CARGO

Collection de Mathématiques

1re C/S

LIVRE DU PROFESSEUR

hachette
LIVRE INTERNATIONAL

ISBN : 978.2.7531.0757.1

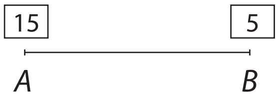
Suivi éditorial et mise en page : Acquansù

Sommaire

1 Barycentre de points pondérés

Activités d'introduction

1 La loi d'Archimède



1. a. G est le point d'équilibre lorsque $15 \times GA = 5 \times GB$.

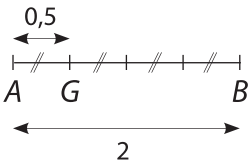
De plus : $2 = AB = GA + GB$ donc $GB = 2 - GA$.

Ainsi, GA vérifie l'équation : $15 \times GA = 5 \times (2 - GA)$;

soit : $15GA = 10 - 5GA \Leftrightarrow 20GA = 10 \Leftrightarrow GA = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Le point G doit être placé sur la perche à une distance du point A égale à 0,5 mètre.

b.



$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{BA} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{GB} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}. \end{cases}$$

Ainsi $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ($a = 3$ et $b = 1$).

2. a. G' étant le point d'équilibre, il vérifie l'égalité $15 \times G'A = m \times G'B$, où m désigne la masse du seau fixé en B.

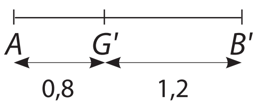
De plus : $G'A = 0{,}8$ et $2 = AB = G'A + G'B$.

Par conséquent, $G'B = 2 - G'A = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$.

On obtient alors l'équation : $15 \times 0{,}8 = m \times 1{,}2$;

soit $m = \dfrac{15 \times 0{,}8}{1{,}2} = 10$. Le seau fixé en B pèse 10 kg.

b.



$G'A = 0{,}8$; $G'B = 1{,}2$ et $AB = 2$.

Ainsi, $G'A = \dfrac{2}{5}\,AB$ et $G'B = \dfrac{3}{5}\,AB$.

Comme $G' \in [AB]$, $\begin{cases} \overrightarrow{G'A} = -\dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{G'B} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}. \end{cases}$

Ainsi, $3\overrightarrow{G'A} + 2\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$. ($a' = 3$ et $b' = 2$.)

2 Quelques propriétés du barycentre

1. a. D'après la relation de Chasles :

$\vec{0} = a\overrightarrow{GA} + b(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (a + b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB}$

donc $(a + b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

b. Comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = \dfrac{-b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$.

Les points A, B, G sont alignés.

2. a. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= a(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + b(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (a + b)\overrightarrow{GO} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{a+b}\,\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{OB}$.

En outre, deux vecteurs sont égaux, si et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées. Par conséquent :

$$\begin{cases} x_G = x_{\overrightarrow{OG}} = \dfrac{a}{a+b}\,x_{\overrightarrow{OA}} + \dfrac{b}{a+b}\,x_{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = y_{\overrightarrow{OG}} = \dfrac{a}{a+b}\,y_{\overrightarrow{OA}} + \dfrac{b}{a+b}\,y_{\overrightarrow{OB}} = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b}. \end{cases}$$

b. D'après ce qui précède,
comme $a = 3$, $b = -2$, $a + b = 1$, on a :

$$\begin{cases} x_G = 3 \times \dfrac{1}{3} + (-2) \times (-\dfrac{1}{2}) = 1 + 1 = 2. \\ y_G = 3 \times 1 + (-2) \times 0 = 3 \end{cases}$$

3 Barycentre partiel

1. On observe que les points G et H sont confondus.

2. a. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b. $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$.

c. En utilisant la relation de Chasles dans la première égalité, on a :

$a(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A}) + b(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B}) + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

soit $(a + b)\overrightarrow{GG'} + a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Or $a\overrightarrow{G'A} + b\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$ donc $(a + b)\overrightarrow{GG'} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

d. On en déduit alors, comme $(a + b) + c \neq 0$, que G est le barycentre des points pondérés $(G', a + b)$ et (C, c).

4 Ligne de niveau

1. a. $M \in (\mathscr{E}_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \,.\, \overrightarrow{MB} = 3$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = 3$

$\Leftrightarrow (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \,.\, \overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \,.\, \overrightarrow{GB} + GB^2) = 3$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})+GA^2-GB^2=3.$

De plus, G est le milieu de $[AB]$ (donc $GA^2-GB^2=0$) et $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}$ d'après la relation de Chasles.

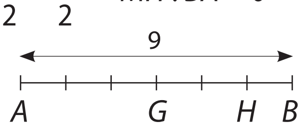
On en déduit alors que : $M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}.$

b. D'après la relation de Chasles :

$M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HG})\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HG}\,.\,\overrightarrow{BA}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}=0$



$\begin{cases} BA=9 \\ \overline{HG}\,.\,\overline{BA}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ donc $HG=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{6}.$

c. $M\in(\mathscr{E}_3)\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{BA}=0$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la prependiculaire passant par H à la droite (AB).

2. $M\in(\mathscr{E}_0)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=0$

$\Leftrightarrow MA^2=MB^2\Leftrightarrow MA=MB$

$(MA\geqslant 0$ et $MB\geqslant 0)$

$\Leftrightarrow M\in\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Savoir-faire

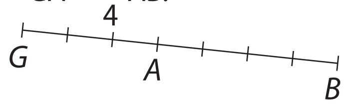
3 **a.** • $a+b=0$, donc le barycentre des points pondérés $(A, 0{,}1)$ et $(B, -0{,}1)$ n'existe pas.

b. $a+b=7+(-3)=4\neq 0$, donc les points pondérés $(A, 7)$ et $(B, -3)$ admettent un unique barycentre G.

De plus, $7\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Par la relation de Chasles, $7\overrightarrow{GA}-3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$;

$4\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=\dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}.$



4 • D'après la relation de Chasles,

$2\overrightarrow{MP}=3(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}+3\overrightarrow{PN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}-3\overrightarrow{NP}=\vec{0}.$

Comme $1+(-3)\neq 0$, $P=\text{bary}\{(M, 1), (N, -3)\}$

• Puis, comme $k=5\neq 0$, $P=\text{bary}\{(M, 5), (N, -15)\}$.

7 **a.** $G=\text{bary}\{(A, 2), (B, -4), (C, 1)\}$

$(2+(-4)+1=-1\neq 0)$.

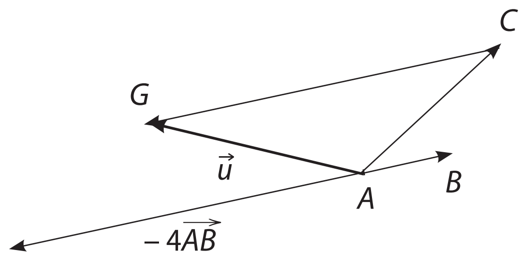
Par définition $2\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles deux fois :

$2\overrightarrow{GA}-4(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0},$

$-\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}.$

$\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{GA}=\vec{u}.\end{cases}$



b. $G'=\text{bary}\{(A, 6), (B, 3), (C, 3)\}$ $(6+3+3=12\neq 0)$.

Par définition, $6\overrightarrow{G'A}+3\overrightarrow{G'B}+3\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$.

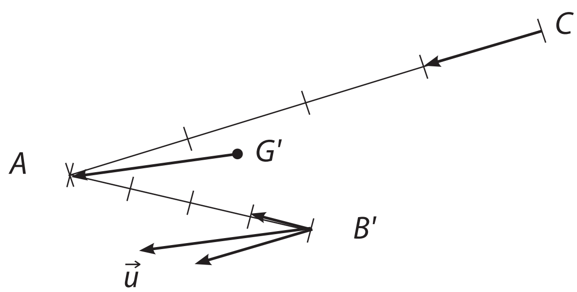
Ainsi, en utilisant la relation de Chasles deux fois :

$6\overrightarrow{G'A}+3(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

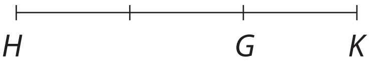
$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{G'A}=3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G'A}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

$\begin{cases}\vec{u}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{G'A}=\vec{u}.\end{cases}$



8 **a.** D'après la relation de Chasles, on a :
$3\overrightarrow{GH} + 2(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GK}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$
Ainsi, $G = \text{bary}\{(H, 1), (K, 2)\}$ $(1 + 2 \neq 0)$.
b. $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$.



9 **a.** Comme $4 + (-1) + (-2) = 1 \neq 0$, le barycentre G des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -2)$ existe et est unique.
b. Les coordonnées du point G sont :
$$\begin{cases} x_G = 4 \times 0 + (-1) \times 5 + (-2) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \\ y_G = 4 \times (-1) + (-1) \times \dfrac{4}{3} + (-2) \times 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_G = -5 + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{8}{5} \\ y_G = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}. \end{cases}$$

10 Par définition du barycentre G :
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{3 \times x_E + 2 \times x_F}{5} \\ y_G = \dfrac{3 \times y_E + 2 \times y_F}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{3 + 2x_F}{5} \\ 0 = -\dfrac{-3 + 2y_F}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 3 + 2x_F \\ 0 = -3 + 2y_F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = \dfrac{7}{2} \\ y_F = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

13 Comme $(-0{,}5) + (-0{,}5) = -1 \neq 0$, le barycentre, noté H, des points pondérés $(B, -0{,}5)$ et $(C, -0{,}5)$ existe et est unique. Ainsi, d'après le barycentre partiel :
$G = \text{bary}\{(A, 5), (B, -0{,}5), (C, -0{,}5)\}$
$G = \text{bary}\{(A, 5), (H, (-0{,}5) + (-0{,}5))\}$
$G = \text{bary}\{(A, 5), (H, -1)\}$.

14 Comme $2 + (-1) = 1 \neq 0$ et $2 + 3 = 5 \neq 0$, les barycentres, notés respectivement E et F, des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, -1)$ et respectivement $(C, 2)$ et $(D, 3)$ existent et sont uniques.
Ainsi, d'après le barycentre partiel :
$G = \text{bary}\{(A, 2), (B, -1), (C, 2), (D, 3)\}$
$G = \text{bary}\{(E, (2 + (-1))), (F, 2 + 3)\}$
$G = \text{bary}\{(E, 1), (F, 5)\}$.

15 • On cherche a, b, c trois nombres réels tels que : $a + b + c \neq 0$ et $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
• On sait que $I = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$ car I milieu de $[BC]$.
Ainsi, le barycentre partiel permet d'écrire que :
$G = \text{bary}\{(A, 2), (I, 1)\}$
$G = \text{bary}\left\{(A, 2), \left(B, \dfrac{1}{2}\right), \left(C, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$ car $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.
• On vérifie que $2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 3 \neq 0$.

16 • Comme $a = b = 1$, d'après la propriété du paragraphe **5.b.**, on note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$, c'est le milieu de $[AB]$.
On note $\alpha = \dfrac{100 - GA^2 - GB^2}{2}1$.
• Comme $AB = 3$, $GA = GB = \dfrac{6}{2} = 3$.
Donc $\alpha = \dfrac{100 - 9 - 9}{2} = \dfrac{82}{2} = 41$.
• Par conséquent, comme $\alpha > 0$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{41}$.

Exercices d'entraînement

Barycentre de deux points pondérés

17 **a.** $3{,}7 + (-3) = 0{,}7 \neq 0$. Donc oui.
b. $\dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{\sqrt{16}}{3}\right) = \dfrac{4}{3} + \left(-\dfrac{4}{3}\right) = 0$. Donc non.
c. $-5 + \sqrt{25} = -5 + 5 = 0$. Donc non.
d. $\dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \neq 0$. Donc oui.

18 **b.** et **d.**

19 $3\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$. Donc **a.**

20 **a.**

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

b.

$-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

c.

$-\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

d.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

21 **a.** $\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4)\}$. $(-1 + 4 \neq 0)$.

b. $\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, 7), (B, 1)\}$ $(7 + (1) \neq 0)$.

c. $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right), (B, -1)\right\}$ $\left(\frac{1}{2} + (-1) \neq 0\right)$.

d. $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}.$

Donc $M = \text{bary}\{(A, 1), (B, 4)\}$ $(1 + 4 \neq 0)$.

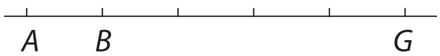
22 **a.** Comme $3 + (-4) = -1 \neq 0$, G existe.

Par définition : $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{GA} - 4(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB}.$



b. Comme $-1 + 5 = 4 \neq 0$, G existe.

Par définition : $-\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$-\overrightarrow{GA} + 5(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.$

c. Comme $7 + (-7) = 0$, G n'existe pas.

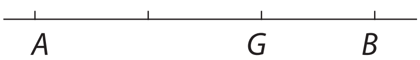
d. Comme $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \neq 0$, G existe.

Par définition : $\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$



e. Comme $(-5) + (-10) = -15 \neq 0$, G existe.

Par définition : $-5\overrightarrow{GA} - 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

On retrouve le point G de la question **d.**

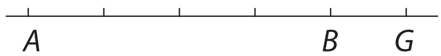
f. Comme $0{,}5 + (-3) = -2{,}5 \neq 0$, G existe.

Par définition, $0{,}5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

En utilisant la relation de Chasles :

$0{,}5\overrightarrow{GA} - 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -2{,}5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}.$



23 M désigne un point du plan. D'après la relation de Chasles :

$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$

$= (a + b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{AB}.$

24 **a.** $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 2$ et $b = 1$.

b. $5\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 5$ et $b = -1$.

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$ $\quad a = b = 1.$

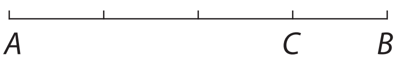
d. $\begin{cases} \overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{BA} \end{cases}$ donc $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$

$a = 3$ et $b = -4$.

25 **Dispositif 1**

$\begin{cases} M \times CA = 3M \times CB \\ C \in [AB] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CA = 3CB \\ C \in [AB] \end{cases}$ (car $M > 0$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}.$

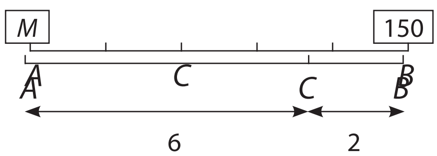


Dispositif 2

$\begin{cases} 3M \times CA = 2M \times CB \\ C \in [AB] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3CA = 2CB \\ C \in [AB] \end{cases}$ (car $M > 0$)

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}.$

26



$\begin{cases} M \times AC = 150 \times CB \\ C \in [AB]. \end{cases}$

Donc $M = 150 \times \frac{2}{6}$ soit $M = 50$ kg.

27 **a.** Par définition, d'une part $2\overrightarrow{GE} - 3\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ et $-3\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a :

• $2\overrightarrow{GE} - 3(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF}$

• $-3\overrightarrow{EH} + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}) + 2\overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FH} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FH} = -3\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{FE}.$

b. Les points E, F et G sont alignés d'une part, et d'autre part, les points E, F et H sont alignés. Ainsi, les points E, F, G, H sont alignés.

28 **a.** Par définition du barycentre, $-\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :

$-(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + 5(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$

On a alors :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB})$

b. Ainsi :

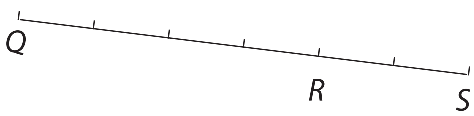
$$\begin{cases} x_G = x_{\overrightarrow{OG}} = \frac{1}{4}(-x_A + 5x_B) = \frac{1}{4}\left(1 + 5 \times \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4} \\ y_G = y_{\overrightarrow{OG}} = \frac{1}{4}(-y_A + 5y_B) = \frac{1}{4}\left(-3 + 5 \times 2\right) = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

29 **a.** Par définition : $3\overrightarrow{QR} - 2\overrightarrow{QS} = \vec{0}$.

Ainsi, d'après l'égalité de Chasles :

$3\overrightarrow{QR} - 2(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{RS}.$



b. $3\overrightarrow{QR} - 2\overrightarrow{QS} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{QR'} - \overrightarrow{QS'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{QR'} - 2\overrightarrow{QS'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(R', 3), (S', -2)\}$ $(3 + (-2) \neq 0)$.

Barycentre de trois ou quatre points

30 **a.** $1 + 3 + (-4) = 0$. Donc non.

b. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12} + \left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Donc oui.

c. $0{,}2 + 0{,}2 + (-2 \times 0{,}2) = 0$. Donc non.

d. $\sqrt{7} - \sqrt{3} - \sqrt{4} \neq 0$. Donc oui.

31 **a.** $\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

donc $A = \text{bary}\{(B, 1), (C, 5), (D, -4)\}$ $(1 + 5 + (-4) \neq 0)$.

b. $A = \text{bary}\{(B, 2), (C, 10), (D, -8)\}$.

32 $2\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{EH}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EG} - 3\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EH} = \vec{0}$

donc $E = \text{bary}\{(G, 2), (F, -3), (H, 2)\}$ $(2 + (-3) + 2 \neq 0)$.

33 G est le centre de gravité du triangle ABC, donc $A = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.

34 **a.** On a : $3\overrightarrow{EP} + 2\overrightarrow{FP} - 2\overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

Comme $3 + 1 + (-2) = 2 \neq 0$, le barycentre (noté P) des points pondérés $(E, 3)$, $(F, 1)$ et $(G, -2)$ existe et est unique.

b. Par définition : $3\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$ $(3 + 1 \neq 0)$.

En utilisant la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{QE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE}.$

c. • D'après le barycentre partiel :

$P = \text{bary}\{(E, 3), (F, 1), (G, -2)\}$

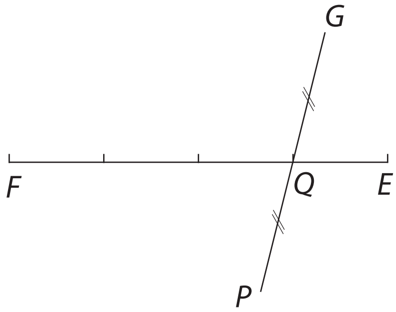
$P = \text{bary}\{(Q, 3 + 1), (G, -2)\}$

$P = \text{bary}\{(Q, 4), (G, -2)\}$.

Donc $4\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PG} = \vec{0}$

• En utilisant la relation de Chasles, on a :

$2\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QG} \Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QG}.$



35 • $3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 2)\}$ $(3 + (-1) + 2 \neq 0)$.

• On note $H = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1)\}$
(existe car $3 + (-1) = 2 \neq 0$).

• D'après le barycentre partiel, on a :

$I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 2)\}$

$I = \text{bary}\{(H, 3 + (-1)), (C, 2)\}$

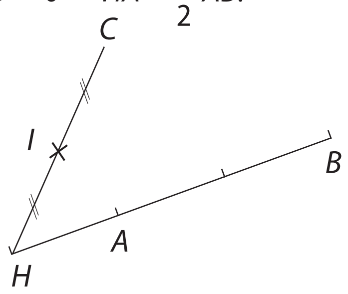
$I = \text{bary}\{(H, 2), (C, 2)\}$

I est donc le milieu de $[HC]$.

• Construisons d'abord le point H. D'après la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} - (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$



36 M désigne un point du plan. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} &= a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + c(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= (a+b+c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}. \end{aligned}$$

Or $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$,
donc $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$,
donc $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

37 D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} &= a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + c(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= (a+b+c)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

38 **a.** Par définition et la relation de Chasles :

$-\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}.$

b. Par définition et la relation de Chasles :

$2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{JC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$

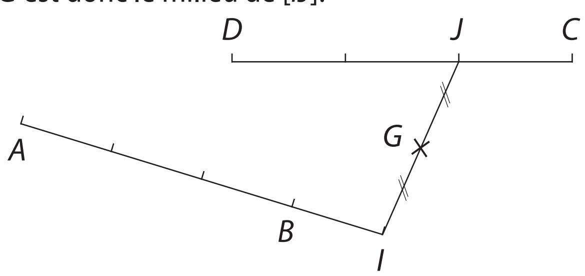
c. • Par le barycentre partiel :

$G = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4), (C, 2), (D, 1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, (-1) + 4), (J, 2 + 1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, 3), (J, 3)\}$

• G est donc le milieu de $[IJ]$.



39 • D'après le barycentre partiel :

$G = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1), (C, 3), (D, -1)\}$

$G = \text{bary}\{(I, 3 + (-1), (J, (3 + (-1))\}$

$G = \text{bary}\{(I, 2), (J, 2)\}$

où $\{I = \text{bary}\{(A, 3), (B, -1)\}$

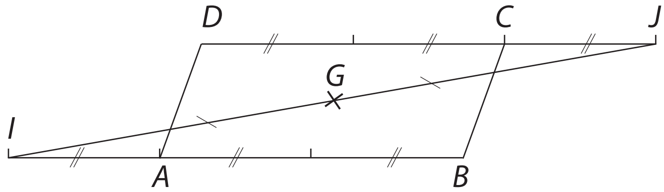
$\{J = \text{bary}\{(C, 3), (D, -1)\}\ (3 + (-1) \neq 0).$

• Construction des points I et J :

$3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

Idem : $\overrightarrow{JC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$



• On place G milieu de $[IJ]$.

40 **a.** Comme $ABCD$ est un parallélogramme :

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow D = \text{bary}\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}\ (1 + (-1) + 1 = 1 \neq 0).$

b. I est le milieu de $[DC]$, donc $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\quad (\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 1), (B, -1)\ (C, 2)\}\ (1 + (-1) + 2 = 2 \neq 0).$

41 **a.** G est l'isobarycentre des points A, B, C. Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

• En utilisant la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

(A' milieu de $[BC]$).

• Idem pour les deux autres.

b. • $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$, donc les points G, A, A' sont alignés.

• $3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$, donc les points G, B, B' sont alignés.

• $3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, donc les points G, C, C' sont alignés.

c. (AA'), (BB') et (CC') sont les trois médianes du triangle ABC. D'après la question **b.**, $G \in (AA')$, $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$. G est donc l'intersection des trois médianes : c'est le centre de gravité du triangle ABC.

42 On cherche G tel que $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

• On note $H = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$.

Alors par définition et d'après la relation de Chasles :

$2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HA} + 3(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = \dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{BA}$

• D'après le barycentre partiel, on a :

$G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 2), (B, 3)}, (C, 4)\}$

$G = \text{bary}\{(H, 2 + 5), (C, 4)\}$

$G = \text{bary}\{(H, 5), (C, 4)\}$.

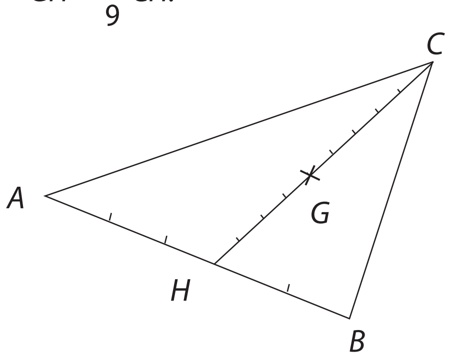
• On écrit alors $5\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D'après la relation de Chasles :

$5\overrightarrow{GH} + 4(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \dfrac{4}{9}\,\overrightarrow{CH}$.



$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = \dfrac{4}{9}\,\overrightarrow{CH} \\ \overrightarrow{HA} = \dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

43 • L est le milieu de $[AK]$ donc $L = \text{bary}\{(A, 2\}, (K, 2)\}$.

• K milieu de $[BC]$ donc $K = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$.

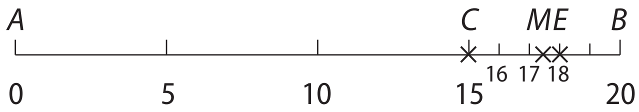
• Ainsi, par le barycentre partiel :

$L = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$.

44 **a.** $m = \dfrac{15 \times 2 + 18 \times 1 + 17 \times 3}{2 + 1 + 3} = \dfrac{99}{6} = 16{,}5$

Ali a 16,5 de moyenne.

b. c.



d. On pose $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Le point C représente la note 15.

Le point D représente la note 18.

Le point E représente la note 17.

On a alors : $2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{ME} = \vec{0}$.

45 **a.** Par le barycentre partiel, comme

$I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$,

$J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$,

$K = \text{bary}\{(C, 1), (D, 1)\}$,

$L = \text{bary}\{(D, 1), (A, 1)\}$,

(car ce sont les milieux des segments associés), on a :

• $G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 1), (B, 1)}, \underbrace{(C, 1), (D, 1)}\}$

$G = \quad \text{bary}\{(I, 2), \qquad (K, 2)\}$

• $G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 1), (D, 1)}, \underbrace{(C, 1), (B, 1)}\}$

$G = \quad \text{bary}\{(L, 2), \qquad (J, 2)\}$.

b. Comme $G = \text{bary}\{(I, 2), (K, 2)\}$, $G \in (IK)$ et comme $G = \text{bary}\{(L, 2), (J, 2)\}$, $G \in (LJ)$. Donc les diagonales de $IJKL$ se coupent en G et c'est le milieu de $[IK]$ et de $[LJ]$.

• Comme les diagonales du quadrilatère $IJKJ$ se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme.

46 **a.** On a :

$$\begin{cases} M\overrightarrow{GA} + M_1\overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ M_2\overrightarrow{GA} + M\overrightarrow{GB} = \vec{0} \end{cases}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\begin{cases} M\overrightarrow{GA} + M_1(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \\ M_2\overrightarrow{GA} + M(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (M + M_1)\overrightarrow{GA} = M_1\overrightarrow{BA} \\ (M_2 + M)\overrightarrow{GA} = M\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

or $M_1 > 0$ et $M > 0$

donc $\dfrac{M + M_1}{M_1} = \dfrac{M_2 + M}{M}$

$\Leftrightarrow M_1(M_2 + M) = M(M + M_1)$

$\Leftrightarrow M_1M_2 + M_1M = M^2 + MM_1$

$\Leftrightarrow M^2 = M_1M_2$

donc $M = \sqrt{M_1M_2}$ (car $M \geqslant 0$).

b. • $\sqrt{M_1M_2} \geqslant 0$ et $\dfrac{M_1 + M_2}{2} \geqslant 0$.

Ainsi, comparer ces deux nombres revient à comparer leurs carrés :

$(\sqrt{M_1M_2})^2 - \left(\dfrac{M_1 + M_2}{2}\right)^2 = M_1M_2 - \dfrac{M_1^{\,2} + 2M_1M_2 + M_2^{\,2}}{4}$

$= M_1M_2 - \dfrac{1}{2}M_1M_2 - \dfrac{1}{4}(M_1^{\,2} + M_2^{\,2})$

$= -\,\dfrac{M_1^{\,2} - 2M_1M_2 + M_2^{\,2}}{4} = -\,\dfrac{(M_1 - M_2)^2}{4} \leqslant 0$

donc $(\sqrt{M_1M_2})^2 \leqslant \left(\dfrac{M_1 + M_2}{2}\right)^2$

donc $\sqrt{M_1M} \leqslant \dfrac{M_1 + M_2}{2}$.

c. Le choix de la marchande n'est donc pas équitable.

Ligne de niveau

47 $a = b = 1$ et $k = 2$.

On note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$ et on pose $\alpha = \dfrac{2 - GA^2 - GB^2}{1+1}$.

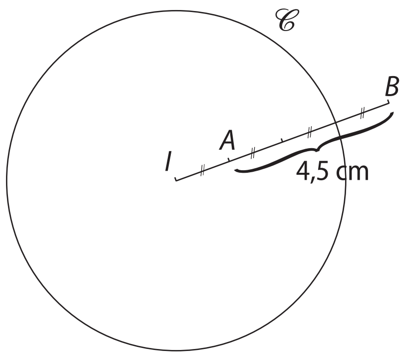
Ainsi, comme G milieu de $[AB]$ avec $AB = 2$, on a :

$$\alpha = \frac{2 - 1^2 - 1^2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0.$$

Comme $\alpha = 0$, l'ensemble cherché est le point G.
Donc réponse **c.**

48 **a.** Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

$$4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$



b. M désigne un point du plan. On a, d'après la relation de Chasles :

$$4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = 4(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) - (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM})$$
$$= \underbrace{4\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}}_{=\vec{0}} + 3\overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IM}$$

car $I = \text{bary}\{(4, 1), (B, -1)\}$.

c. $\|4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\| = 3AB \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{IM}\| = 3AB$
$$\Leftrightarrow 3IM = 3AB$$
$$\Leftrightarrow IM = AB$$
$$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I\,; AB)$$

(voir figure au **a.**)

49 **a.** Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} - 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{AB}.$$

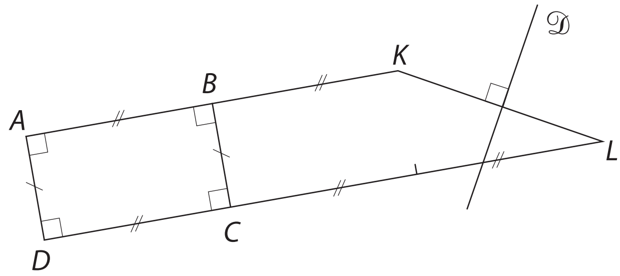
b. Par définition et en utilisant la relation de Chasles :

$$-3\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{LC} + 2(\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LC} = 2\overrightarrow{CD}.$$

c. M désigne un point du plan.

- $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM}) - 2(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM})$
$$= \underbrace{\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{BK}}_{=\vec{0}} - \overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{KM}$$
- $-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM} = -3(\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LM}) + 2(\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LM})$
$$= \underbrace{-3\overrightarrow{CL} + 2\overrightarrow{DL}}_{=\vec{0}} - \overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{LM}$$

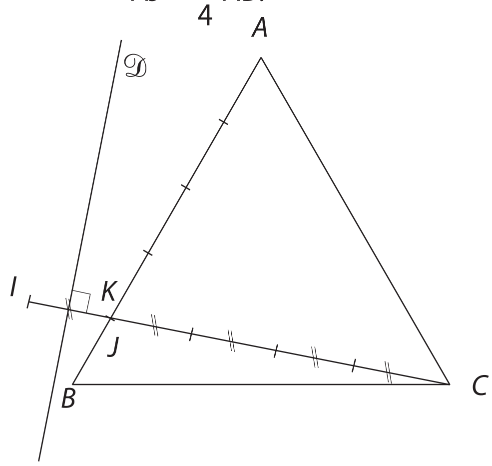
d. $\|\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}\| = \|-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM}\|$
$\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{KM}\| = \|-\overrightarrow{LM}\|$
$\Leftrightarrow KM = LM$
$\Leftrightarrow M \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment $[KL]$.



50 **1. a.** On note $K = \text{bary}\{(A, 1), (B, 4)\}$.
On a : $\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{KB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
Puis par le barycentre partiel, $I = \text{bary}\{(K, 5), (C, -1)\}$.
On a : $5\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}.$

b. On a :

$$\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$



c. $||\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}|| = ||\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}||$

$\Leftrightarrow ||4\overrightarrow{IM}|| = ||4\overrightarrow{JM}||$

$\Leftrightarrow IM = JM$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[IJ]$.

2. • On pose $I' = \text{bary}\{(A, 5), (B, -1), (C, -2)\}$,
$K = \text{bary}\{(A, 5), (B, -1)\}$.

On a : $5\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow 4\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB}$

et $5\overrightarrow{I'A} - \overrightarrow{I'B} - 2\overrightarrow{I'C} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{I'K} - 2\overrightarrow{I'C} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{I'K} - \overrightarrow{I'K} - \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{I'K} = \overrightarrow{KC}$

On note J' le milieu du segment $[AB]$.
Ainsi, $||5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM}|| = ||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}||$

$\Leftrightarrow ||2\overrightarrow{I'M}|| = ||2\overrightarrow{J'M}||$

$\Leftrightarrow I'M = J'M$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[I'J']$.

51 $a = b = 1$. On note $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$, soit G le milieu de $[AB]$.

a. On pose $\alpha = \dfrac{4 - GA^2 - GB^2}{1 + 1}$.

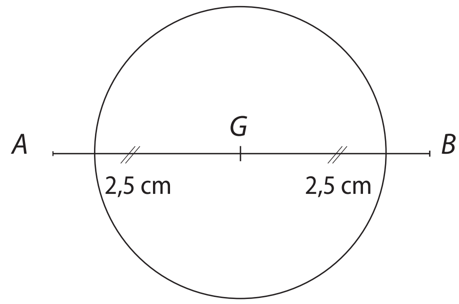
$\alpha = \dfrac{4 - 2^2 - 2^2}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 < 0$

Donc l'ensemble est vide.

b. On pose $\alpha = \dfrac{20 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \times 2}{1 + 1}$.

$\alpha = \dfrac{20 - \dfrac{25}{2}}{2} = \dfrac{15}{4}$.

Donc l'ensemble est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.



52 On note G le milieu de $[AB]$. On a :

$MA^2 - MB^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) . (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) . (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = 1$

$\Leftrightarrow (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GB} + GB^2) = 1$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} . (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) = 1$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{BA} = 1$.

On note H le point de la droite (AB) tel que $2\overline{HG} . \overline{BA} = 1$.

Alors :

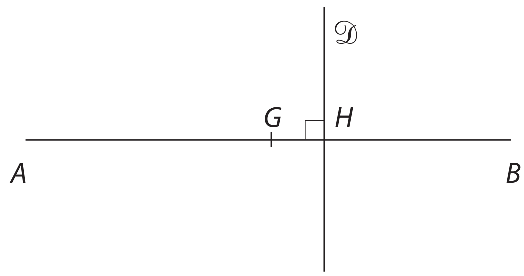
$MA^2 - MB^2 = 1 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG}) . \overrightarrow{BA} = 1$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} . \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{HG} . \overrightarrow{BA} = 1$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MH} . \overrightarrow{BA} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} . \overrightarrow{BA} = 0$

Donc l'ensemble des points M est la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à la droite (AB) passant par H.



Se tester

53 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai.

54 **1.** Faux. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}$.

D'après la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow G = \text{bary}\ \{(A, 2), (C, 1)\}$.

2. Vrai. F est le milieu de $[BC]$ donc $F = \text{bary}\ \{(B, 1), (C, 1)\}$.

Ainsi, d'après le barycentre partiel,

$E = \text{bary}\ \{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$

$E = \text{bary}\ \{(A, 2), (F, 2)\}$

et E est le milieu de $[AF]$.

3. Faux. $3\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{GE}$

$3\overrightarrow{RE} - (\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RE}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} - \overrightarrow{GR} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow R = \text{bary}\ \{(E, 2), (G, 1)\}$.

4. Vrai. $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{FT}$. D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{EF} - 2(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ET}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow E = \text{bary}\ \{(F, 3), (T, -2)\}$.

5. Vrai. Dans ce cas, $a = b = 1$ et $k = 10$. On note G le milieu de $[LK]$. On pose $\alpha = \dfrac{k - GK^2 - GL^2}{1 + 1}$,

soit $\alpha = \dfrac{10 - 1^2 - 1^2}{1 + 1} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Comme $\alpha > 0$, l'ensemble des points M du plan tels que $MK^2 + ML^2 = 10$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

55 **1.** c. ; **2.** b. ; **3.** a. ; **4.** a.

56 **1. b.** D'après le barycentre partiel, on a :
$G = \text{bary}\{(A, -5), (B, 5), (C, 3)\}$.
$G = \text{bary}\{(A, -5), (H, 5 + 3)\}$.
$G = \text{bary}\{(A, -5), (H, 8)\}$.
où $H = \text{bary}\{(B, 5), (C, 3)\}$.
• Ainsi, $G = \text{bary}\left\{(A, 1), \left(H, -\frac{8}{5}\right)\right\}$ par multiplication par k (homogénéité du barycentre).

2. c. On observe que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
D'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow G = \text{bary}\{(C, 3), (D, -1)\}$.

3. b. • F étant le milieu de $[DC]$,
$F = \text{bary}\{(D, 3), (C, 3)\}$.
Ainsi, par la propriété du barycentre partiel,
$H = \text{bary}\{(E, 5), (F, 6)\}$.
$H = \text{bary}\{(E, 5), (D, 3), (C, 3)\}$.

4. a. On cherche un nombre réel α tel que $1+(-1)+\alpha \neq 0$ et $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \alpha\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Or, comme $ABCD$ est un rectangle,
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.
Ainsi, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ et $\alpha = 1$.

Exercices d'approfondissement

57 **Concours de droites**

a. $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$
• Montrons que $I = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1)\}$.
Par définition, $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$.
Donc par la relation de Chasles :
$3\overrightarrow{AI} - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow I = \text{bary}\{(A, 2), (B, 1)\}$.
• Montrons que $J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 3)\}$.
Par définition, $4\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB}$.
Donc par la relation de Chasles :
$4\overrightarrow{CJ} - (\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{JB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow J = \text{bary}\{(B, 1), (C, 3)\}$.
• Montrons que $K = \text{bary}\{(A, 2), (C, 3)\}$.
Par définition, $5\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CA}$.
Donc par la relation de Chasles :
$5\overrightarrow{CK} - 2(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow K = \text{bary}\{(A, 2), (C, 3)\}$.
• On utilise alors la propriété du barycentre partiel :
$G = \text{bary}\{\underbrace{(A, 2), (B, 1)}, (C, 3)\}$
$G = \text{bary}\{\quad (I, 3), \qquad (C, 3)\}$
puis $G = \text{bary}\{(A, 2), \underbrace{(B, 1), (C, 3)}\}$
$G = \text{bary}\{(A, 2), \qquad (J, 4)\}$
et enfin, $G = \text{bary}\{(B, 1), \underbrace{(A, 2), (C, 3)}\}$
$G = \text{bary}\{(B, 1), \qquad (K, 5)\}$.

b. Ainsi, $\begin{cases} G \in (IC) \\ G \in (AJ) \\ G \in (BK) \end{cases}$
Ces trois droites sont donc concourantes (en G).

58 **Points alignés**

a. Par définition :
$3\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA}$. Donc d'après la relation de Chasles :
$3\overrightarrow{CQ} - (\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{QA} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QA} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(A, 1), (C, 2)\}$ ($a = 1$ et $b = 2$).

b. • Comme R est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QR}$ (propriété du parallélogramme).
• Comme C est le milieu de $[PB]$, $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QC}$ soit $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$ (propriété du parallélogramme).

c. • $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}$ (d'après **b.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA}$ (d'après **a.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} = -2\overrightarrow{QR}$ (d'après **b.**)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{QR} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow Q = \text{bary}\{(P, 1), (R, 2)\}$.
• Les points Q, P, R sont donc alignés.

59 Lieu de points et paramètre

1. a. G_m existe si et seulement si $m^2 + (2m - 3) \neq 0$.

On remarque que :

$m^2 + (2m - 3) = m^2 + 2m - 3 = (m - 1)(m + 3)$.

Ainsi, G_m existe, si et seulement si, $m \in \mathbb{R}\backslash\{1 ; -3\}$.

b. m désigne un nombre de $\mathbb{R}\backslash\{1 ; -3\}$ et M un point du plan :

Alors par la relation de Chasles et la définition de G_m, on a :

$$\begin{aligned} m^2\,\overrightarrow{MA} + (2m-3)\,\overrightarrow{MB} &= m^2(\overrightarrow{MG_m} + \overrightarrow{G_mA}) + (2m-3)(\overrightarrow{MG_m} + \overrightarrow{G_mB}) \\ &= (m^2+2m-3)\overrightarrow{MG_m} + m^2\,\overrightarrow{G_mA} + (2m-3)\overrightarrow{G_mB} \\ &= (m^2+2m-3)\overrightarrow{MG_m} \end{aligned}$$

(car $G_m = \text{bay}\{(A ; m^2), (B ; 2m - 3)\}$.

On obtient alors :

$M \in (\mathscr{E}_m) \Leftrightarrow \|(m^2 + 2m - 3)\overrightarrow{MG_m}\| = AB$

$\Leftrightarrow |m^2 + 2m - 3|MG_m = AB$.

c. $M \in (\mathscr{E}_m)$

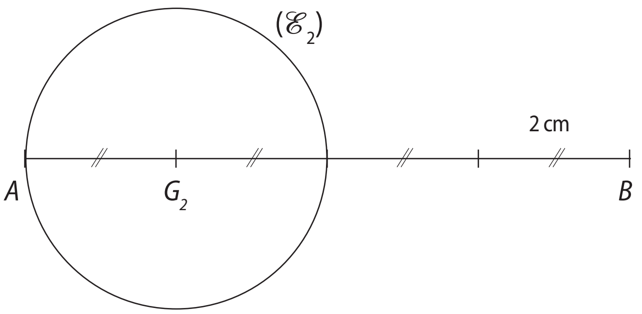
$\Leftrightarrow MG_m = \dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|}$ (car $m \neq 1$ et $m \neq -3$)

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}\left(G_m ; \dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|}\right)$.

2. • Pour $m = 2$, $|m^2 + 2m - 3| = |2^2 + 2 \times 2 - 3| = 5$

donc $\dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|} = 2$.

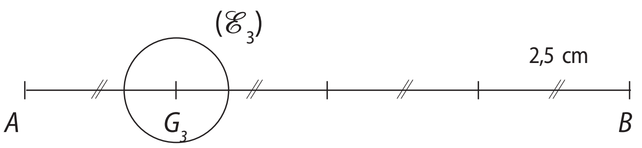
$(\mathscr{E}_2)$ est donc le cercle de centre $G_2 = \text{bary}\{(A ; 4), (B ; 1)\}$ et de rayon 2 cm.



Pour $m = 3$, $|m^2 + 2m - 3| = |3^2 + 2 \times 3 - 3| = 12$

donc $\dfrac{AB}{|m^2 + 2m - 3|} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

$(\mathscr{E}_3)$ est donc le cercle de centre $G_3 = \text{bary}\{(A ; 9), (B ; 3)\}$ et de rayon $\dfrac{5}{6}$ cm.



60 Cercle inscrit dans un triangle

1. a. D'après la relation de Chasles et la définition de I :

$(a + b + c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$

or $(a + b + c) \neq 0$ donc

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

• Ainsi, comme P et Q sont respectivement les points de $[AB]$ et $[AC]$ tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$, il suit que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\|\overrightarrow{AP}\| = \frac{b}{a+b+c}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{c}{a+b+c}\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$$

b. • Par construction, le quadrilatère $AQIP$ est un parallélogramme. Comme de plus, $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AQ}\|$, c'est un losange.

• Ainsi, la diagonale (AI) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Le point I appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. • Soient P' et Q' les points respectifs des segments $[BA]$ et $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BP'} + \overrightarrow{BQ'} = \overrightarrow{BI}$.

De la même manière,

comme $(a + b + c)\overrightarrow{BI} = a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$, on montre que I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

• Par conséquent, I appartient à deux bissectrices, donc c'est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

61 Centres d'inertie

1. a. $(\mathscr{P}_1)$ est de forme rectangle.

Son centre d'inertie, noté I_1, est le centre de ses diagonales.

Sa masse m_1 est $5 \times 3 \times 1 \times 10{,}5 \times 10^{-6} = 157{,}5 \times 10^{-6}$.

$(\mathscr{P}_2)$ est de forme triangle.

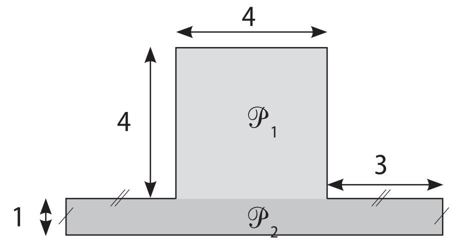
Son centre d'inertie, noté I_2, est le centre de gravité du triangle ABC.

Sa masse m_2 est $\dfrac{2 \times 5}{2} \times 1 \times 19{,}3 \times 10^{-6} = 96{,}5 \times 10^{-6}$.

b. Le centre d'inertie, noté I, de la plaque $(\mathscr{P})$ est alors :

$I = \text{bary}\{(I_1, m_1), (I_2, m_2)\}$.

2.



• $\mathcal{P}_1$ est de forme rectangle.
Son centre d'inertie, noté I_1, est le centre de ses diagonales.
Sa masse, m_1 est $4 \times 4 \times 1 \times 10 \times 10^{-6} = 16 \times 10^{-5}$.
• $\mathcal{P}_2$ est de forme rectangle.
$m_2 = 1 \times (4 + 2 \times 3) \times 10 \times 10^{-6}$
$m_2 = 10 \times 10 \times 10^{-6}$
$m_2 = 10^{-4}$.
• Donc $I = \text{bary}\{(I_1, m_1), (I_2, m_2)\}$.

62 Centre d'inertie et isobarycentre

a. Dans le triangle *ABC*, (*MN*) est la droite passant par les milieux des côtés [*AB*] et [*AC*], elle est donc parallèle à la droite (*BC*). Ainsi, le quadrilatère *MNCB* est un trapèze

b. Le triangle *ABC* peut être considéré comme la juxtaposition de deux plaques homogènes : le triangle *AMN* et le trapèze *MNCB*.

On désigne par *J* et *K* les centres d'inertie respectifs des tiangles *AMN* et *ABC*, c'est-à-dire leur centre de gravité, et par *G* le centre d'inertie du trapèze *MNCB*. Le triangle *AMN* est l'image du triangle *ABC* par l'homothétie *h* de centre *A* et de rapport $\frac{1}{2}$.

Donc $\frac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{1}{4}$ et $\frac{\text{Aire}(AMN)}{\text{Aire}(MNCB)} = \frac{1}{3}$.
Les plaques *AMN*, *ABC* et *MNBC* sont homogènes, donc leurs masses sont proportionnelles à leurs aires.

Donc *K* est le barycentre des points pondérés (*J*, 1) et (*G*, 3).

On a : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AK}$. (1)

Soit *A*' le milieu de [*BC*] :

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

en remplaçant dans (1), on obtient :

$$3\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{7}{18}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (2)$$

c. L'isobarycentre *I* des points *M*, *N*, C et *B* est tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{3}{8}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right). \quad (3)$$

d. $\overrightarrow{GA} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$ donc $GA = \left|\frac{b}{a+b}\right| BA$.

Or, $|a| > |b|$ lorsque :

• 1[er] cas : $a > b > 0$; dans ce cas, $\left|\frac{b}{a+b}\right| = \frac{b}{a+b} < \frac{1}{2}$, donc *G* est plus proche de *A*.

• 2[e] cas : $a < b < 0$; dans ce cas, $\left|\frac{b}{a+b}\right| = \frac{|b|}{|a|+|b|} < \frac{1}{2}$, donc *G* est plus proche de *A*.

• 3[e] cas : $a < 0, b > 0$; dans ce cas, $\frac{b}{a+b} < 0$, donc *G* est plus proche de *A*.

• 4[e] cas : $a > 0, b < 0$; dans ce cas, $\frac{b}{a+b} < 0$, donc *G* est plus proche de *A*.

63 Position du barycentre

Par définition de *G*, on a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a. • Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Donc $G = B$.

• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

Donc $G = A$.

b. Comme $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{GA} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$.

On a $0 < \frac{b}{a+b} < 1$, donc $G \in [AB]$

c. Si *a* et *b* sont de signe opposé, alors $G \in (AB) \backslash [AB]$.

64 Orthocentre

a. • Dans le triangle *ABA*´ rectangle en *A*´, on a :
$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AA'}{A'B}$.

Puis, dans le triangle *AA*´*C* rectangle en *A*´, on a
$\tan(\widehat{BCA}) = \frac{AA'}{A'C}$.

De plus, $A' \in [BC]$.

Ainsi, $AA' = A'B\tan(\widehat{ABC}) = A'C\tan(\widehat{BCA})$

or *A'B* et *A'C* sont de sens contraire ; $\tan(\widehat{ABC}) > 0$ et $\tan(\widehat{BCA}) > 0$,

d'où $\tan(\widehat{BCA})\overrightarrow{A'C} + \tan(\widehat{ABC})\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$.

• On procède de même pour *B*' et pour *C*'.

b. Chaque angle $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ est dans $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\tan(\widehat{BAC}) > 0$, $\tan(\widehat{ABC}) > 0$ et $\tan(\widehat{ACB}) > 0$.

Par conséquent, $\tan(\widehat{ABC}) + \tan(\widehat{BAC}) + \tan(\widehat{ACB}) \neq 0$.

D'où l'existence de *K*.

c. Par le barycentre partiel :

• $K = \text{bary}\{(A, \tan(\widehat{BAC})), \underbrace{(B, \tan(\widehat{ABC})), (C, \tan(\widehat{ABC})}\}$

$K = \text{bary}\{(A, \tan(\widehat{BAC})), \underbrace{(A', \tan(\widehat{ABC}) + \tan(\widehat{ACB})}_{\neq 0}\}$

donc $K \in (AA')$.

• Idem $K \in (BB')$, $K \in (CC')$.

d. (AA'), (BB') et (CC') désignent les trois hauteurs du triangle ABC. H désigne l'orthocentre. Or d'après la question **c.**, K est le point de concours de ces trois droites. Ainsi, $H = K$.

65 Des démonstrations

1. a. Comme $a + b \neq 0$, G existe.

b. Pour tout point M du plan :

$aMA^2 + bMB^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= a(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + GA^2) + b(MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + GB^2)$

$= (a + b)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) + aGA^2 + bGB^2$.

Or $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (car $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b)\}$)

Donc $aMA^2 + bMB^2 = (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2$

Ainsi :

$M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 = k$

$\Leftrightarrow (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k$

$\Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{h - aGA^2 - bGB^2}{a + b}$ (car $a + b \neq 0$).

c. Posons $\alpha = \dfrac{k - aGA^2 - bGB^2}{a + b}$.

• **1er cas** : $\alpha < 0$. Alors $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide.

• **2e cas** : $\alpha > 0$. $(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\alpha}$.

• **3e cas** : $\alpha = 0$. Ainsi, $M \in \mathscr{E}_k \Leftrightarrow MG = 0 \Leftrightarrow M = G$. $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble formé par l'unique point G.

2. a. Pour tout point M du plan :

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + GB^2)$

$= 2\overrightarrow{MG}\,.\,(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) + GA^2 - GB^2$

$= 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{BA}$ (car $GA = GB$)

$= 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GM}$.

b. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GM} = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HM}) = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = k'$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = k'$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HM} = 0$.

c. $(\mathscr{E}_k)$ est la droite passant par H perpendiculaire à la droite (AB).

66 Une ligne de niveau

1. a.

$2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(2x_A - x_B + x_C - 2x\,;\,2y_A - y_B + y_C - 2y)$

et $\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}(x_D + 2x_E - 3x\,;\,y_D + 2y_E - 3y)$.

Ainsi, $M \in (\mathscr{E})$

$$\Leftrightarrow 12 = (2x_A - x_B + x_C - 2x)(x_D + 2x_E - 3x) + (2y_A - y_B + y_C - 2y)(y_D + 2y_E - 3y)$$

$$\Leftrightarrow 12 = 6x^2 + x[-2(x_D + 2x_E) - 3(2x_A - x_B + x_C)] + (x_D + 2x_E)(2x_A - x_B + x_C) + 6y^2 + y[-2(y_D + 2y_E) - 3(2y_A - y_B + y_C)] + (y_D + 2y_E)(2y_A - y_B + y_C)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x[-\frac{1}{3}(x_D + 2x_E) + 1/2\,(x_B - x_C - 2x_A)] + y[-\frac{1}{3}(y_D + 2y_E) + \frac{1}{2}(y_B - y_C - 2y_A)]$$

$$= 2 + (x_D + 2x_E)(x_B - x_C - 2x_A) + \frac{(y_D + 2y_E)(y_B - y_C - 2y_A)}{6}.$$

Posons $\begin{cases} a = \dfrac{x_B - x_C - 2x_A}{2} \\ b = \dfrac{x_D + 2x_E}{3} \\ c = \dfrac{y_B - y_C - 2y_A}{2} \\ d = \dfrac{y_D + 2y_E}{3} \end{cases}$

Ainsi,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (a - b)x + (c - d)y = 2 + ab + cd$

b. $M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{b - a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{d - c}{2}\right)^2$

$= 2 + ab + cd + \dfrac{(b - a)^2 + (d - c)^2}{4}$

or $\dfrac{(b - a)^2 + (d - c)^2}{4} + \dfrac{(ab + cd) \times 4}{4}$

$= \dfrac{b^2 + a^2 + d^2 + c^2 + 2ab + 2cd}{4}$

$= \dfrac{(b + a)^2 + (c + d)^2}{4} \geqslant 0$

donc en posant $r = \dfrac{\sqrt{(b + a)^2 + (c + d)^2}}{2}$,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{b - a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{d - c}{2}\right)^2 = x^2$

$(\mathscr{E})$ est donc le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{b - a}{2}\,;\,\dfrac{d - c}{2}\right)$ et de rayon r.

2. a. Comme $2 + (-1) + 1 = 2 \neq 0$ et $1 + 2 = 3 \neq 0$, les barycentres G_1 et G_2 existent.

b. Pour tout point M du plan, d'après la relation de Chasles :

• $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} + \underbrace{2\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}}_{=\ \vec{0}} = 2\overrightarrow{MG_1}$

• $\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{MG_2} + \underbrace{\overrightarrow{G_2D} + \overrightarrow{G_2E}}_{=\ \vec{0}} = 3\overrightarrow{MG_2}$

• Ainsi, $M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG_1} . 3\overrightarrow{MG_2} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} = 2.$

c. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG_1}) + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG_2})\\ &= MH^2 + \overrightarrow{MH} . \underbrace{(\overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{HG_2})}_{=\ \vec{0}} + \overrightarrow{HG_1} . \overrightarrow{HG_2}\\ &= MH^2 - HG_1{}^2 \text{ car } \begin{cases}\overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{HG_2} = \vec{0}\\ \overrightarrow{HG_1} = -\overrightarrow{HG_2}\end{cases}\\ &= MH_2 - \frac{G_1G_2{}^2}{4}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} . \overrightarrow{MG_2} = 2 \Leftrightarrow MH^2 = 2 + \dfrac{G_1G_2{}^2}{4}$

$\Leftrightarrow$ M est sur le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{2 + \dfrac{G_1G_2{}^2}{4}}.$

67 Produit scalaire et ligne de niveau

a. Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) . (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} . \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\ \vec{0} \text{ car } I \text{ milieu de } [AB]} + \overrightarrow{IA} . \overrightarrow{IB}\\ &= MI^2 - IA^2\\ &= MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k$

$\Leftrightarrow MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}.$

b. • 1^er^ cas : $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0$;

$(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \dfrac{AB^2}{4}}.$

• **2^e^ cas** : $k = -\dfrac{AB^2}{4}$; $(\mathscr{E}_k)$ est réduit au point I.

• **3^e^ cas** : $k < -\dfrac{AB^2}{4}$; $(\mathscr{E}_k) = \emptyset$ (ensemble vide).

68 Prise d'initiative

a. $G = \text{bary}\{(A, 1), (I, 3)\}$; $I = \text{bary}\{(C, 2), (B, 1)\}$ donc $G = \text{bary}\{(A, 1), (C, 2), (B, 1)\}$.

b. On note G' milieu de $[AB]$.

Alors : $G = \text{bary}\{(G', 2), (C, 2)\}$ d'après la propriété du barycentre partiel. Donc G milieu de $(G'C)$; donc $G' \in (CG)$. Or $G' \in (AB)$ par définition de G', donc $G' = H$; H est le milieu de $[AB]$.

Problèmes

69 Ligne de niveau : $\dfrac{MA}{MB} = k$

1. $k < 0$; $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide.

2. $k = 0 : M \in (\mathscr{E}_0) \Leftrightarrow MA = 0$. Donc $\mathscr{E}_0 = \{A\}$.

3. $k = 1$. $M \in (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow MA = MB$. Donc $\mathscr{E}_1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

4. $k > 0$ et $k \neq 0$.

a. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2$

b. $1 + (-k^2) \neq 0$ car $k > 0$ et $k \neq 1$ donc G existe et est unique.

c. $MA^2 - k^2MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - k^2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= (1 - k^2)MG^2 + 2\overrightarrow{MG} . \underbrace{(\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB})}_{=\vec{0}} + GA^2 - k^2GB^2$

Donc $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow (1 - k^2)MG^2 = k^2GB^2 - GA^2$.

d. $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$ $\quad k \neq 1, k > 0.$

Ainsi : • si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} < 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est l'ensemble vide

• si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} = 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est $\{G\}$.

• si $\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2} > 0$, $(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1 - k^2}}.$

e. $AB = 4$ cm.

• Pour $k = 0{,}5$; $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, -025)\}$

donc $\overrightarrow{GA} - 0{,}25\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AG} = \dfrac{0{,}25}{1 - 0{,}25}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

Donc $AG = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{4}{3}$ cm.

De même, $BG = \dfrac{4}{3}AB = \dfrac{16}{3}$ cm.

Ainsi $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1-k^2}} = \sqrt{\dfrac{0{,}25 \times \left(\frac{16}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{1-0{,}25}} = \dfrac{8}{3} > 0.$

$(\mathscr{E}_{0,5})$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{8}{3}$ cm.

• Pour $k = 3$; $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, -9)\}$

donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-9}{-8}\overrightarrow{AB} = \dfrac{9}{8}\overrightarrow{AB}$. Donc $AG = \dfrac{9}{2}$ cm.

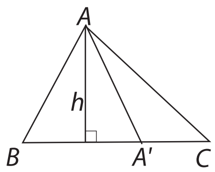
De même, $BG = \dfrac{1}{8}AB$. Donc $BG = \dfrac{1}{2}$ cm.

Ainsi $\sqrt{\dfrac{k^2GB^2 - GA^2}{1-k^2}} = \sqrt{\dfrac{9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2}{1-9}} = 1{,}5 > 0.$

$(\mathscr{E}_3)$ est donc le cercle de centre G et de rayon 1,5 cm.

70 Barycentre et aires

1. a. $\begin{cases} \text{aire}(ABC) = \dfrac{h \times BC}{2} \\ \text{aire}(AA'B) = \dfrac{h \times A'B}{2} \end{cases}$



donc $\dfrac{\text{aire}(ABC)}{BC} = \dfrac{h}{2} = \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{A'B}$

donc $\dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} = \dfrac{A'B}{BC}$.

b. $A' \in [BC]$ et $A' = \text{bary}\{B, A'C), (C, A'B)\}$.

En effet : $\begin{cases} \overrightarrow{BA'} = \dfrac{A'B}{BC} \times \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CA'} = \dfrac{A'C}{BC} \times \overrightarrow{CB} \end{cases}$

donc $\dfrac{BC}{A'B}\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BC} = -\dfrac{BC}{A'C}\overrightarrow{CA'}$

soit $A'C \times \overrightarrow{BA'} = -A'B \times \overrightarrow{CA'}$

$\Leftrightarrow A'C \times \overrightarrow{A'B} + A'B \times \overrightarrow{A'C} = \vec{0}.$

c. On sait que $A'B = \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} \times BC$.

De la même manière, $A'C = \dfrac{\text{aire}(AA'C)}{\text{aire}(ABC)} \times BC$.

Donc $A' = \text{bary}\{(B, \dfrac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} \times BC), (C, \dfrac{\text{aire}(AA'C)}{\text{aire}(ABC)} \times BC)\}$.

En multipliant par $h = \dfrac{BC}{\text{aire}(ABC)} \neq 0$, par homogénéité du barycentre, on a :

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AA'C)), (C, \text{aire}(AA'B))\}$.

2. a. D'après le lemme des proportions, appliqué dans les triangles $AA'C$ avec $M \in [AA']$, on a :

$\dfrac{\text{aire}(A'MC)}{\text{aire}(AA'C)} = \dfrac{MA'}{AA'}$.

Écrit dans le triangle $AA'B$ avec $M \in [AA']$, on a :

$\dfrac{\text{aire}(A'MB)}{\text{aire}(AA'B)} = \dfrac{MA'}{AA'}$.

Donc $\text{aire}(AA'B) = \dfrac{AA'}{MA'}\text{aire}(A'MA)$

et $\text{aire}(AA'C) = \dfrac{AA'}{MA'}\text{aire}(A'MC)$.

De plus, d'après le **1.** :

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AA'C)), (C, \text{aire}(AA'B))\}$ donc par homogénéité : $(\dfrac{AA'}{MA'} \neq 0)$

$A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(A'MC)), (C, \text{aire}(A'MB))\}$.

De plus,

$\begin{cases} \text{aire}(MAB) = \text{aire}(ABA') - \text{aire}(A'MB) \\ \text{aire}(MAC) = \text{aire}(ACA') - \text{aire}(A'MC) \end{cases}$

$\begin{cases} \text{aire}(MAB) = \left(\dfrac{AA'}{MA'} - 1\right)\text{aire}(A'MB) \\ \text{aire}(MAC) = \left(\dfrac{AA'}{MA'} - 1\right)\text{aire}(A'MC). \end{cases}$

Donc par homogénéité, $(k = \dfrac{AA'}{MA'} - 1 \neq 0)$, on a le résultat

b. Même raisonnement.

c. • $G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (C, \text{aire}(AMB)), (B, \text{aire}(AMC))\}$

$= \text{bary}\{(B', \text{aire}(BMC) + \text{aire}(AMB)), (B, \text{aire}(AMC))\}$

donc $G \in (BB')$.

• $G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (B, \text{aire}(AMC)), (C, \text{aire}(AMB))\}$

$G = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (A', \text{aire}(AMC) + \text{aire}(AMB))\}$

donc $G \in (AA')$.

• Ainsi $G = (AA') \cap (BB')$. Or $M = (AA') \cap (BB')$

donc $M = G$.

71 Centre d'inertie et barycentre

1. $m_1 = 2 \times \pi \times 5^2 \times 5 \times 10^{-3}$

$m_1 = 0{,}25\pi$

$m_2 = 2 \times \pi \times 10^2 \times 5 \times 10^{-3} = \pi = 4m_1$.

On note I le centre d'inertie des plaques de masses m_1 et m_2 et de centres O_1 et O_2. On a alors :

$m_1\overrightarrow{IO_1} + m_2\overrightarrow{IO_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO_1} + \overrightarrow{IO_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1I} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{O_1O_2}.$

2. $m_1 = \pi \times 9 \times 1 \times 8 = 72\pi$

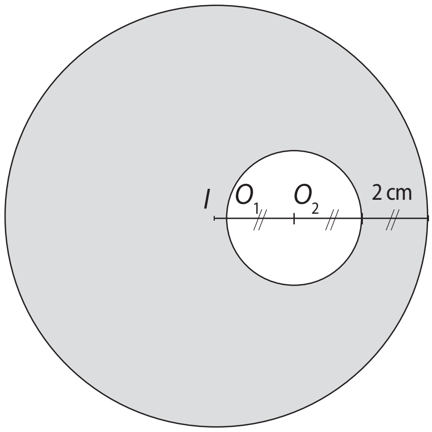
$m_2 = \pi \times 1 \times 1 \times 8 = 8\pi = 9m_1$.

a. $I = \text{bary}\{(O_1\,;72\pi), (O_2\,;-8\pi)\}$

Par exemple, $\alpha = 72\pi$ et $\beta = -8\pi$

b. $9\overrightarrow{O_1I} - \overrightarrow{O_2I} = \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_2O_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IO_1} = -\dfrac{1}{8}\overrightarrow{O_2O_1}$.



72 Le croissant d'or

a. Le disque de centre *O* est la réunion du croissant et du disque de centre *O'*. Donc, *G* est le barycentre de $(O, 1)$ et $(O', -r^2)$.

On a : $r^2\,\overrightarrow{OO'} + (1 - r^2)\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.

O'(1 – r ; 0) et O(0 ; 0) donc G $\left(\dfrac{-r^2}{1+r} ; 0\right)$.

b. La condition est réalisée lorsque l'abscisse de *G* est : $1 - 2r$.

$\dfrac{-r^2}{1+r} = 1 - 2r \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0$.

De plus, *r* est positif ; donc : $r = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

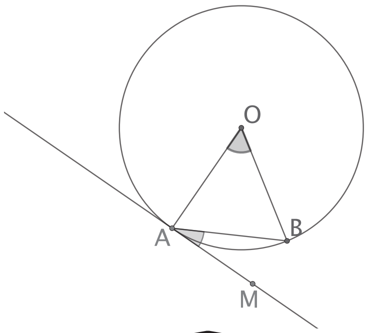
Remarque : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (**nombre d'or**).

2 Trigonométrie

Activités d'introduction

1 Tangente à un cercle

1.



On conjecture que mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}})$.

2. $M \in (T) \Leftrightarrow 2$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}}) = \pi$

$\Leftrightarrow$ 2mes $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}}) + 2$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \pi$. (1)

Le triangle OAB est isocèle car les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle.

D'où : mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \pi -$ 2mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$. (2)

Les égalités (1) et (2) entraînent :

mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = 2$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}})$.

2 Formules d'addition

1. a. $M(\cos(a)\ ;\ \sin(a))\ ;\ N(\cos(b)\ ;\ \sin(b))$.

b. $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = a - b$.

c. $\overrightarrow{OM}.\ \overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2. a. $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$.

b. $\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$
$= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)$
$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin(b)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b)$.

d. $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$
$= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$
$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

3 Mesures de grandes distances

a. $\tan(\beta) = \frac{DC}{BC} = \frac{h}{x}$. **b.** $\tan(\alpha) = \frac{DC}{AC} = \frac{h}{10+x}$.

c. $h = x\tan(\beta)$ et $h = (10+x)\tan(\alpha)$

$\Leftrightarrow x = \frac{h - 10\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)}$.

Ainsi $h = \frac{h - 10\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)}\tan(\beta)$ qui donne :

$h = -10\,\frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$.

On en déduit $h \approx 55$m.

d. $h = l\,\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta-\alpha)} = l\,\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}$

$= l\,\frac{\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}}{\frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}} = l\,\frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$.

4 Lignes trigonométriques d'angles moitié

1. a. $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$
$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

b. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$

car $\cos(x) \geqslant 0$.

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$

car $\sin(x) \geqslant 0$.

2. a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}$.

b. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Savoir-faire

3 **a.** $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\alpha$; **b.** $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha - \pi$;
c. $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}}) = -\alpha$.

4 $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{12}$.

5 $-\frac{4\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{22\pi}{3}$.

6 **a.** $x \equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{3\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4}$.

b. $x \not\equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{7\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \neq k\,2\pi$.

c. $x \not\equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{37\pi}{12} - \left(-\frac{25\pi}{12}\right) \neq k\,2\pi$.

d. $x \equiv y\ [2\pi]$ car $\frac{37\pi}{3} = 6\pi + \frac{19\pi}{3}$.

10 **a.** $x = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $x = -\frac{\pi}{4} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

11 $A = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

12 $\sin^2(x) = 1 - 0,36 = 0,64$.

Or, $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right] \Rightarrow \sin(x) = 0,8$.

15 $A = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).$$

$$\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).$$

D'où $A = 0$.

16 **a.** $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\,2\pi ; \frac{\pi}{4} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\,2\pi ; \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

17 $S = \left]\frac{\pi}{3} + k\,2\pi ; \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

18 **a.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b. On multiplie l'équation par $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\,2\pi ; \pi + k\,2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercices d'entraînement

Angles orientés

19 $-\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$.

20 **a.**, **b.**, **c.** et **e.**

21 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{3}$;
c. mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{3}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

22 La mesure principale de $\frac{19\pi}{3}$ est égale à $\frac{\pi}{3}$ car :

$\frac{19\pi}{3} = \frac{19\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\,\pi + \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$.

Trois autres mesures : $\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{3}$.

23 $x = \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$11\pi \leqslant x \leqslant 12\pi \Leftrightarrow 11\pi \leqslant \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi \leqslant 12\pi$

$\Leftrightarrow \frac{37\pi}{4} \leqslant k\,2\pi \leqslant \frac{41\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{37}{8} \leqslant k \leqslant \frac{41}{8}$.

k est un nombre entier, donc $k = 5$.

Ainsi, $x = \frac{7\pi}{4} + 5 \times 2\pi = \frac{47\pi}{4}$.

24 $x = \frac{\pi}{12} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$-4\pi \leqslant x \leqslant 4\pi \Leftrightarrow -4\,\pi \leqslant \frac{\pi}{12} + k\,2\pi \leqslant 4\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{49\pi}{12} \leqslant k\,2\pi \leqslant \frac{47\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{49}{24} \leqslant k \leqslant \frac{47}{24}$.

k est un nombre entier, donc $-2 \leqslant k \leqslant 1$.

Ainsi $x \in \left\{-\frac{47\pi}{12}\ ; -\frac{23\pi}{12}\ ; \frac{\pi}{12} ; \frac{25\pi}{12}\right\}$.

25 **1.** mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. a. mes $(\widehat{\vec{v}, -\vec{v}}) = \pi$.

b. $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, -\vec{v}})$.

mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) =$ mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) +$ mes $(\widehat{\vec{v}, -\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

Donc mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

26 **a.** mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = -\frac{\pi}{6}$; **b.** mes $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = -\frac{\pi}{3}$;

c. mes $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{5\pi}{6}$; **d.** mes $(\widehat{\vec{v}, 2\vec{u}}) = -\frac{\pi}{6}$;

e. mes $(\widehat{\vec{u}, 3\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}$; **f.** mes $(\widehat{-3\vec{u}, 2\vec{v}}) = -\frac{5\pi}{6}$.

27 **a.** $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) \Leftrightarrow 0 = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.
Ainsi, $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

b. $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) + (\widehat{-\vec{v}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) + \pi$
$= (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$.

$(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

28 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

b. mes $(\widehat{3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}}) = 0$;

c. mes $(\widehat{2\overrightarrow{AO}, -\overrightarrow{BO}}) = \alpha - \pi$;

d. mes $(\widehat{-3\overrightarrow{OA}, 2\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

e. mes $(\widehat{\overrightarrow{AO}, 2\overrightarrow{OB}}) = \alpha - \pi$;

f. mes $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO}}) = \alpha$.

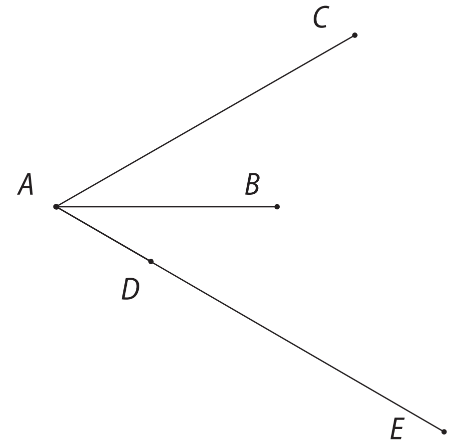
29 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}}) = \frac{2\pi}{3}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{2}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{\pi}{6}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{5\pi}{6}$.

30 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \pi$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}}) = \frac{\pi}{4}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{5\pi}{8}$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}}) = \frac{7\pi}{8}$.

31 **a.**



b. mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} + k\,2\pi$, k $\in \mathbb{Z}$,

mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi$, k $\in \mathbb{Z}$ et

mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi$, k $\in \mathbb{Z}$.

c. D'après la relation de Chasles,
$(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}})$ et donc
mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) =$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) +$ mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}})$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$.

Ainsi mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d. Les points A, D et E sont alignés dans cet ordre.

32 **a.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{4}$; **b.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{3\pi}{4}$;

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}}) = \pi$; **d.** mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}}) = 0$;

e. mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) = 0$; **f.** mes $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{3\pi}{4}$.

33 Pour construire le triangle, il est préférable de connaître une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.

La relation de Chasles donne :

$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}})$.

Ainsi, mes $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}})$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Angles associés

34 **a.** Faux : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

b. Vrai.

c. Faux : $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$.

35 **a.** $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$.

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c. $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

d. $\frac{5}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$.

36 **1.** $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) + 0,16 = 1$.

Ainsi $\cos(\alpha) = -\sqrt{0,84}$ car $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, donc $\cos(\alpha) < 0$.

2. a. $\cos(\pi - \alpha) = \sqrt{0,84}$; **b.** $\sin(\pi + \alpha) = -0,4$;

c. $\cos(-\alpha) = -\sqrt{0,84}$; **d.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sqrt{0,84}$;

e. $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{0,84}}{0,4}$; **f.** $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{0,84}}{0,4}$.

37 **1.** $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \frac{1}{9} = 1$.

Ainsi $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ car $\alpha \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(\alpha) < 0$.

2. a. $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$; **b.** $\cos(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$;

c. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{3}$.

38 $A = \cos(x)$; $B = -2\cos(x)$;
$C = -\cos(x) - \sin(x)$; $D = \cos(x) - \sin(x)$.

39 $E = 0$; $F = 0$; $G = 0$.

40 **1.** $-\cos(t) - \cos(t) + \cos(t) = -\cos(t)$.
2. $-\sin(t) + \sin(t) + \sin(t) = \sin(t)$.
3. $-\cos(t) + \cos(t) - \cos(t) = -\cos(t)$.

Formules de transformation

41 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

42 $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

43 **a.** $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$
$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$
$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

b. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

44 **a.** $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}$
$= \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$; or, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, donc :

$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

b. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

c. $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

$\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$
$= 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{10} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$.

Donc $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

$\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{-\sqrt{5}-1}$.

45 $\cos(3a) = \cos(2a + a)$
$= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)$
$= (2\cos^2(a) - 1)\cos(a) - 2\sin(a)\cos(a)\sin(a)$
$= 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

$\sin(3a) = \sin(2a + a) = \sin(2a)\cos(a) + \cos(2a)\sin(a)$
$= 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) + 1 - 2\sin^2(a)\sin(a)$
$= 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.

46 **a.** $\sin(\alpha) = \sqrt{0,84}$ et $\tan(\beta) = \frac{4}{3}$.
b. $\sin(2\alpha + \beta) = \sin(2\alpha)\cos(\beta) + \cos(2\alpha)\sin(\beta)$
$= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\beta) - (2\cos^2(\alpha) - 1)\sin(\beta)$
$= 2\sqrt{0,84} \times 0,4 \times 0,6 - (2 \times 0,16 - 1)0,8$
$= 0,48\sqrt{0,84} + 0,544$.

$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos(\alpha)\cos(2\beta) - \sin(\alpha)\sin(2\beta)$
$= \cos(\alpha)(2\cos^2(\beta) - 1) - \sin(\alpha)2\sin(\beta)\cos(\beta)$
$= 0,4 \times (2 \times 0,36 - 1) - \sqrt{0,84} \times 2 \times 0,8 \times 0,6$
$= 0,96\sqrt{0,84} - 0,112$.

47 **a.** $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} = \frac{1}{4}$, $\cos(a) = \frac{1}{2}$,
$\sin(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan(a) = \sqrt{3}$.
b. $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} = 0,6$, $\cos(a) = -\sqrt{0,6}$,
$\sin(a) = \sqrt{0,4}$ et $\tan(a) = -\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}$.

48 **a.** $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 2 \times (-0,6)^2 - 1 = -0,28$;
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) - 1 = 2 \times (-0,8) \times (-0,6)$
$= 0,96$.
b. $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) = 1 - 2 \times (0,2)^2 = 0,92$;
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2 \times 0,2 \times \sqrt{0,96} \approx 0,39$.

Équations trigonométriques

49 **a.** $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$; **b.** $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$; **c.** $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Nota : dans les exercices suivants, k *est un nombre entier relatif.*

50 **a.** $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\,2\pi \,;\, \frac{\pi}{3} + k\,2\pi\right\}$;
b. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;
c. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

51 **a.** $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \,;\, \frac{4\pi}{3} + k\,2\pi\right\}$;
b. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;
c. $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{7\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$;
d. $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \,;\, -\frac{\pi}{4} + k\,2\pi\right\}$.

52 **a.** $\sin(x) = \pm\frac{1}{2}$,
$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$.
b. $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \,;\, \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi\right\}$.

53 $2x = \pi + k\,2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Dans $[\pi \,;\, 5\pi]$, $S = \left\{\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{5\pi}{2} \,;\, \frac{7\pi}{2} \,;\, \frac{9\pi}{2}\right\}$.

54 $\begin{cases} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{5} + k\,2\pi \\ x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{5} + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{15} + k\,2\pi \\ x = \frac{22\pi}{15} + k\,2\pi. \end{cases}$
Dans $[-2\pi \,;\, 2\pi]$, $S = \left\{-\frac{8\pi}{15} \,;\, -\frac{17\pi}{15} \,;\, \frac{13\pi}{15} \,;\, \frac{22\pi}{15}\right\}$.

55 **a.** $\cos(3x) = \cos(\pi - x)$.
$\begin{cases} 3x = \pi - x + k\,2\pi \\ 3x = -\pi + x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$
Dans $[-2\pi \,;\, \pi]$,
$S = \left\{-\frac{7\pi}{4} \,;\, -\frac{5\pi}{4} \,;\, -\frac{3\pi}{4} \,;\, -\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4} \,;\, \frac{3\pi}{4} \,;\, -\frac{3\pi}{2} \,;\, -\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}\right\}$.
b. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$.
$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = -x + k\,2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$
Dans $[4\pi \,;\, 6\pi]$, $S = \left\{\frac{19\pi}{4} \,;\, \frac{55\pi}{12} \,;\, \frac{63\pi}{12} \,;\, \frac{71\pi}{12}\right\}$.
c. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x)$.
$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = 2x + k\,2\pi \\ \frac{\pi}{2} - 3x = -2x + k\,2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases}$
$S = \left\{\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

56 **a.** $\Delta = 49$, $\Delta > 0$, donc deux racines, $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = -4$.
b. $S_1 = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$;
$S_2 = \emptyset$, car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
c. $S = S_1$.

57 $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x) = -1$, donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right\}$.

58 **a.** $\dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + 2\,k\pi ; \dfrac{7\pi}{12} + 2k\,\pi\right\}$.

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi. \end{cases}$$

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{12} + 2\,k\pi ; \dfrac{7\pi}{12} + 2k\,\pi\right\}$.

59 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(3\,x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi. \end{cases}$$

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$.

60 **a.** $\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)\sin(y) = 0$.

b. $x = 0 + k\pi$ et y quelconque ou $y = 0 + k\pi$ et x quelconque.

61 **a.** $\cos\left(2 \times \dfrac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

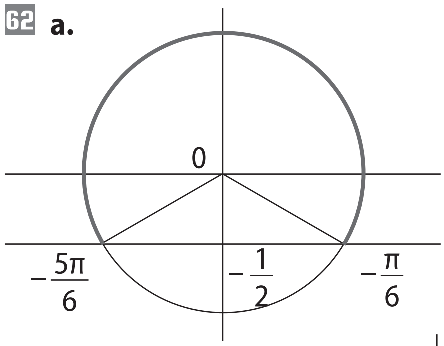
b. $\cos(2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + k\,\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\,\pi. \end{cases}$$

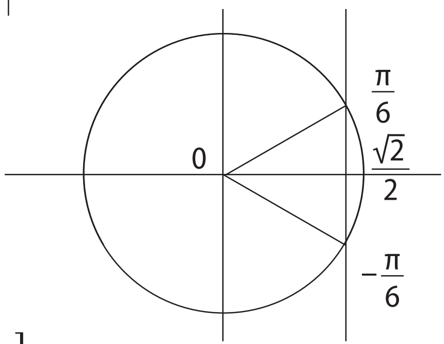
Babila a oublié de diviser $k2\pi$ par 2.

Inéquations trigonométriques

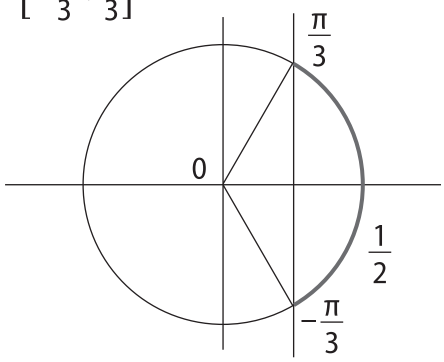
62 **a.**



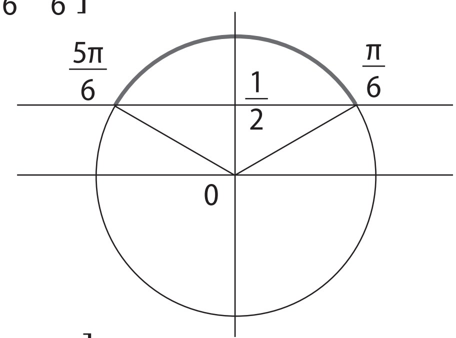
b.



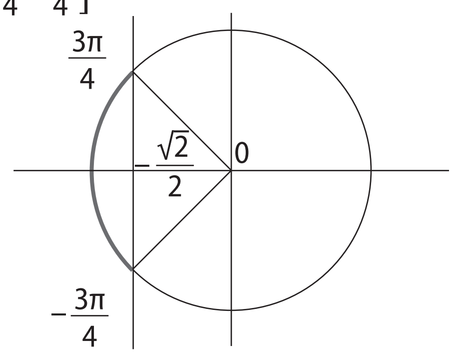
63 **a.** $S = \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$ *modulo* 2π.



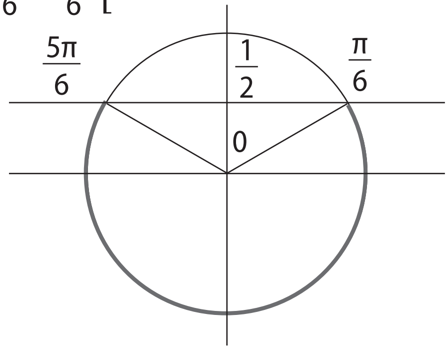
b. $S = \left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ *modulo* 2π.



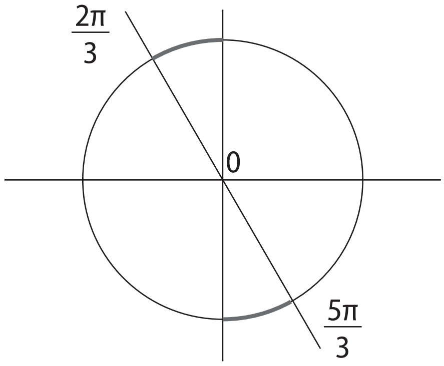
c. $S = \left[\dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ *modulo* 2π.



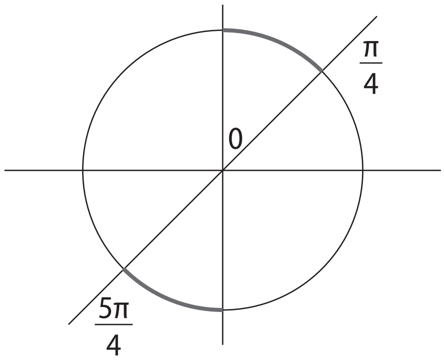
d. $S = \left]\frac{5\pi}{6} ; \frac{13\pi}{6}\right[$ *modulo* 2π.



e. $S = \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{3}\right[$ *modulo* 2π.



f. $S = \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2}\right[$ *modulo* 2π .



64 $\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

$\sin(x) - \cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant \cos(x)$

Donc $S = \left[-\frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ *modulo* 2π.

65 **a.** $\sin^2(x) - \frac{1}{2} = \left(\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b.

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$		−	0	+	0	−		−		−	
$\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$		+		+		+	0	−	0	+	
(I)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

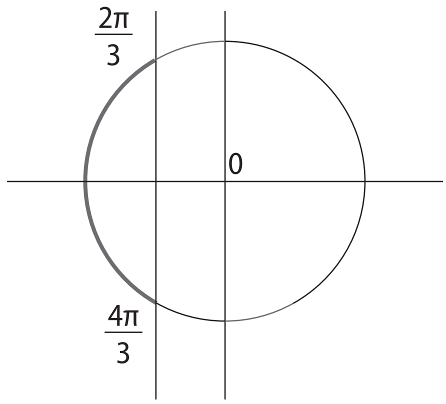
c. $S = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4} ; 2\pi\right]$.

66

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$1 - 2\cos(x)$		−	0	+		+		+	0	−	
$0{,}5 + \cos(x)$		+		+	0	−	0	+		+	
(I)		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

$S = \left]0 ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right[$.

67 $S = \left]\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\right[$ *modulo* 2π.



Se tester

68 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

69 **1.** Vrai. Les points sont alignés et *A* est entre *B* et *C*.

2. Faux. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)$

$= \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$

3. Vrai. $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$.

4. Faux. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

70 **1.** b. • **2.** b. • **3.** c. • **4.** c. • **5.** b.

71 **1.** c. En effet $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est de sens indirect.

2. b. $\frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$. Ainsi, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. b. $X = \sin(x)$ L'équation s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$.

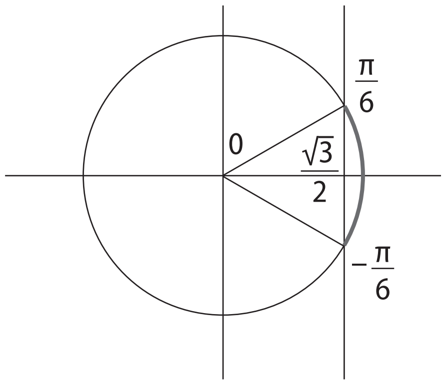
Elle a deux solutions : -2 et 1.

Ainsi on a $\sin(x) = -2$ qui est impossible ou $\sin(x) = 1$.

4. c. Le maximum de la fonction cosinus étant égal à 1, l'équation donnée implique que $\cos(x) = 1$ et $\cos(3x) = 1$.

$S = \{0 + k2\pi\}$

5. a.



Exercices d'approfondissement

72 **Droites parallèles, perpendiculaires**

$$\text{mes}(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_4}) = \text{mes}(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_1}) + \text{mes}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_4})$$
$$= -\frac{\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = -\pi.$$

Ainsi, $(D_3) // (D_4)$.

$$\text{mes}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \text{mes}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3}) + \text{mes}(\widehat{\vec{u}_3, \vec{u}_2})$$
$$= \frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{14} = \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $(D_1) \perp (D_2)$.

73 **Une formule de transformation**

a. $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.

Ainsi :

$$\sin(p) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

et

$$\sin(q) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

b. $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x)$;

$\sin(2x) + \sin(4x) = 2\sin(3x)\cos(x)$.

c. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$

$= 2\sin(2x)\cos(x) + 2\sin(3x)\cos(x)$ (résultats du **b.**)

$= 2[\sin(2x) + \sin(3x)]\cos(x)$

$= 2\left[\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cos(x)$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + 4k\pi ; -\pi + 4k\pi ; \frac{2k\pi}{5} ; -\frac{2k\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5}\right\}.$$

74 **Une équation du troisième degré**

1. a. $2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = 0$.

b. On conjecture que $X_0 = 1$ est solution de (E').

En effet, $2 \times 1^3 - 17 \times 1^2 + 7 \times 1 + 8 = 0$.

c. $(X - 1)(2X^2 - 15X - 8)$.

d. Trois racines : $X_1 = 1$, $X_2 = -\frac{1}{2}$ et $X_3 = 8$.

2. • $\sin(x) = 1$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

• $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ a pour solutions $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;

• $\sin(x) = 8$ n'a pas de solution.

Finalement, $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$.

75 **Une égalité**

a. $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

b. $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(3x) - \cos(3x)}{\sin(x)\cos(x)}$

$$= \frac{[3\sin(x) - 4\sin^3(x)]\cos(x) - [(4\cos^3(x) - 3\cos(x)]\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

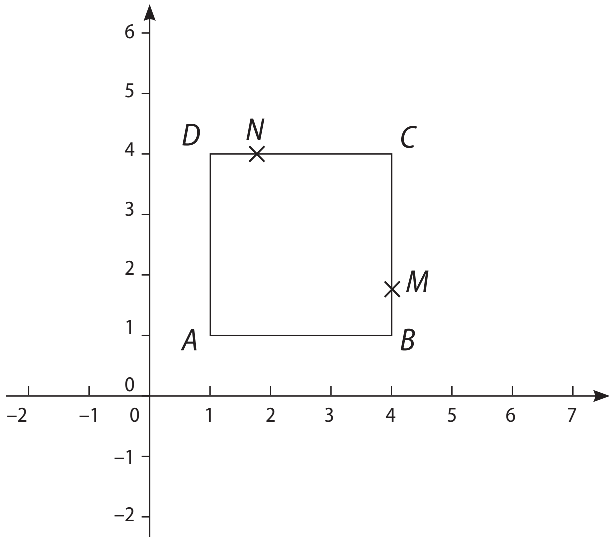
$$= \frac{3\sin(x)\cos(x) - 4\sin^3(x)\cos(x) - 4\cos^3(x)\sin(x) + 3\cos(x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{6\sin(x)\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)[\sin^2(x) + \cos^2(x)]}{\sin(x)\cos(x)}$$

$= 2$.

76 Triangle équilatéral inscrit dans un carré

a.



On conjecture que CM est égale à 0,7 fois le côté du carré.

b. $CM = x$. $AB = a$.

Dans le triangle AMB, $AM^2 = AB^2 + MB^2 = a^2 + (a - x)^2$.

Dans le triangle CMN, $MN^2 = CM^2 + CN^2 = 2CM^2 = 2\,x^2$.

Ainsi, $a^2 + (a - x)^2 = 2\,x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$.

Le discriminant de cette équation est égal à $12a^2$.

L'équation a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-2a + \sqrt{12a^2}}{2} = a(-1 + \sqrt{3})$ et

$x_2 = \dfrac{-2a - \sqrt{12a^2}}{2} = a(-1 - \sqrt{3})$.

x_2 est négative et ne peut être une longueur, la seule solution est donc x_1.

c. Dans le triangle AMB :

$AB = a$, $BM = a - a(-1 + \sqrt{3}) = a(2 - \sqrt{3})$,

$AM = x\sqrt{2} = a(-1 + \sqrt{3})\sqrt{2} = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

De plus, mes $\widehat{BAM}$ = mes $\widehat{BAD}$ – mes $\widehat{MAN}$ – mes $\widehat{NAD}$

$= \dfrac{\pi}{12}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin(\widehat{BAM}) = \frac{BM}{AM} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(\widehat{BAM}) = \frac{AB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

77 Équation trigonométrique

On pose $X = \sin(x)$.

On obtient : $-2X^2 + X + 6 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $-\dfrac{3}{2}$ et 2.

Ces deux nombres ne sont pas dans $[-1\,;1]$, l'équation de départ n'a donc pas de solution.

78 Une suite de doubles

a. $\dfrac{\sin(4x)}{4\sin(x)} = \dfrac{2\sin(2x)\cos(2x)}{4\sin(x)} = \dfrac{4\sin(x)\cos(x)\cos(2x)}{4\sin(x)}$.

b. $\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)} = \dfrac{2\sin(4x)\cos(4x)}{8\sin(x)} = \dfrac{\sin(4x)}{4\sin(x)}\cos(4\,x)$.

Le résultat du **a.** permet de conclure.

c. $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x) = \dfrac{\sin(16x)}{16\sin(x)}$.

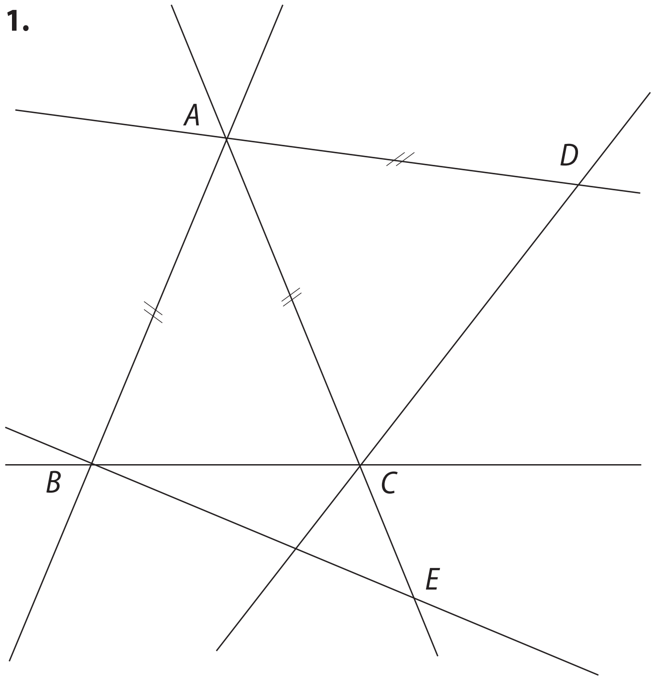
Même démonstration que pour le **b.** en remarquant que $16x = 2 \times 8x$.

d. Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$,

$\cos(x)\cos(2x)....\cos(2^n x) = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$.

79 Construction de points

1.



2. a. mes $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE})$ = mes $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ + mes $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})$ + mes $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE})$

$$= -\frac{\pi}{4} - \pi + \pi - \frac{19\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi - 76\pi - 5\pi}{12} = -\frac{78\pi}{12}$$

$= -6\,\pi - \dfrac{\pi}{2}$.

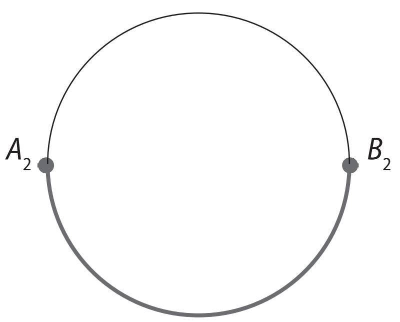
Ainsi, les droites (AB) et (BE) sont perpendiculaires.

b. Le point E est donc le point d'intersection de la droite (AC) et de la perpendiculaire à (AB) passant par B.

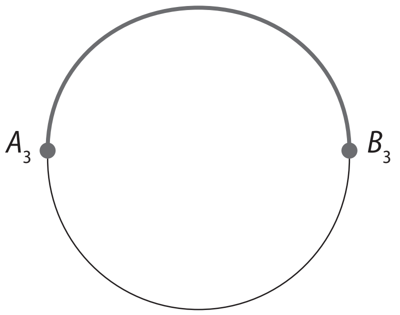
80 Ensembles de points

a.

b.



c.



d.

81 Équation trigonométrique

1. 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2. a. $\sin(x) + \cos(x) = \sin(x) + \sqrt{1 - \sin^2(x)}$.

b. X appartient à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

$(E) \Leftrightarrow \sin(x) + \sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1 \Leftrightarrow X + \sqrt{1 - X^2} = 1$.

Ainsi $\sqrt{1 - X^2} = 1 - X$.

c. En élevant au carré et en réduisant l'équation, on obtient : $2X^2 - 2X = 0$ qui a pour solutions 0 et 1.

d. $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

3. $S = \{0\}$.

4. $S = \left\{0 + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

5. Il suffit de multiplier l'équation (E) par $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(E') \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(E') a le même ensemble de solutions que (E).

82 Calcul formel

1. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

b. $S = \left\{-\frac{11\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{2} ; -\frac{7\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

c. $S = \left\{\frac{13\pi}{6} ; \frac{5\pi}{2} ; \frac{17\pi}{6}\right\}$.

2. On pose $X = \sin(x)$. L'équation s'écrit :

$2X^2 - 3X + 1 = 0$.

Cette nouvelle équation a deux solutions : 1 et $\frac{1}{2}$.

$\sin(x) = 1$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. On retrouve bien les solutions du **1**.

83 Mesures d'angles orientés

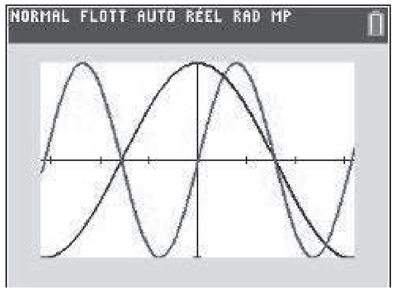
a. $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$; **b.** $\text{mes}(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}) = -\frac{5\pi}{6}$;

c. $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \frac{3\pi}{4}$; **d.** $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{12}$;

e. $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{2\pi}{3}$. **f.** $\text{mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$.

84 Plusieurs méthodes de résolution

Méthode 1



Méthode 2

a. $\cos(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\Leftrightarrow \cos(x)(2\sin(x) - 1) = 0$.

b. $S_{E'} = \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\} = S_E$.

Méthode 3

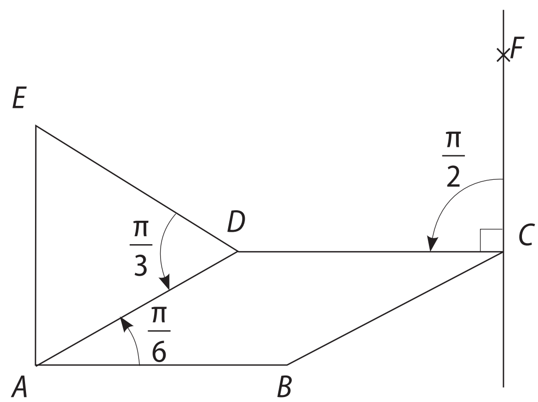
a. $\cos(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases}$$

On retrouve les solutions de la méthode 2.

85 Droites parallèles, perpendiculaires

a. b. c.



d. • mes $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE}}) = -\dfrac{\pi}{2}$; • mes $(\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AE}}) = 0$.
Les droites (CD) et (AE) sont perpendiculaires.
Les droites (CF) et (AE) sont parallèles.

86 Une fraction de π

a. On teste quelques valeurs de n telles que
$\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \approx. \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{16}$. On trouve $n = 12$.

b. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2 \times \dfrac{2(4+2\sqrt{3})}{16} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

c. Ainsi, $2\,x = \dfrac{\pi}{6}$. D'où, $x = \dfrac{\pi}{12}$.

87 Une inéquation du second degré

a. $I \in [-1\,;1]$. (E'): $2X^2 - 3X + 1 \leqslant 0$.

b. (E') a pour solution $S = \left.\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

c. $\cos(x) = 1$ a pour solutions $x = 0 + 2k\pi$;
$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions :
$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\,\pi$.

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π	
$\cos(x) - 1$	0	−		−		−	0	
$\cos(x) - \frac{1}{2}$		+	0	+	0	−		+
(E')	0	−	0	−	0	+	0	−

Ainsi, $S = \left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}\,;2\pi\right[$.

88 Inéquation quotient

$1 - \cos(x) \geqslant 0$ car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Ainsi le quotient est du signe de $0,5 + \cos(x)$.
$0,5 + \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{4\pi}{3}\right[$ modulo 2π.

89 Une rotation

a. $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$.

b. $\begin{cases} x' = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\cos(\alpha) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\sin(\alpha) \\ y' = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\cos(\alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) r\sin(\alpha) \end{cases}$

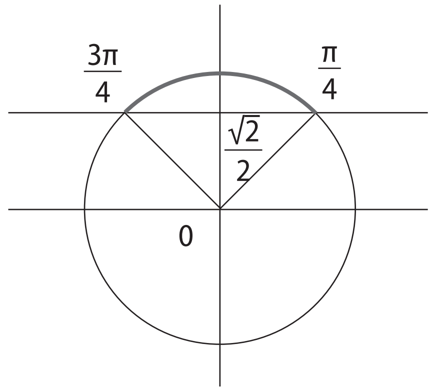
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = r\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y' = r\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right). \end{cases}$

c. mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}'}) = \alpha + \dfrac{\pi}{3}$.

90 Charge d'une batterie

a. $12\sqrt{2}\sin(t) > 12 \Leftrightarrow \sin(t) > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(t) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b.



c. $\left]\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$.

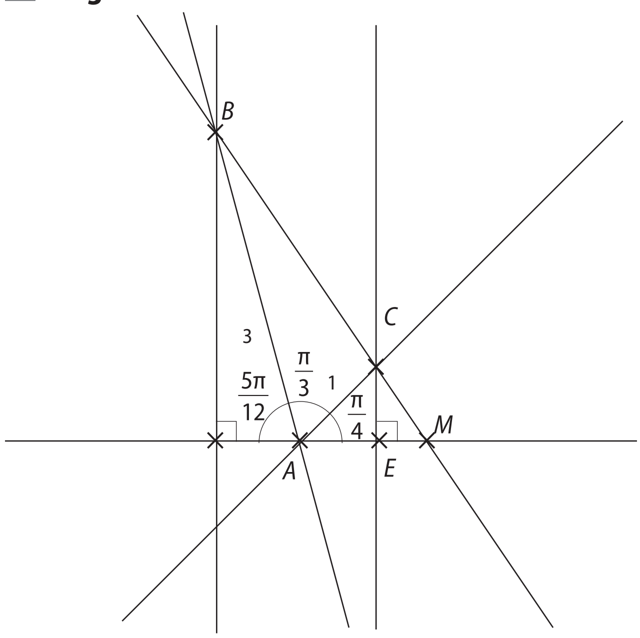
91 Une équation du second degré

1. a. (E) $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}\,x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$.
$S = \{1 - \sqrt{2}\,;1 + \sqrt{2}\}$.

b. (E) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}\,x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 1 = 0$.
$S = \{2 + \sqrt{3}\,;-2 + \sqrt{3}\}$.

2. $\Delta = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos^2(\alpha) = 4$.
$\Delta > 0$, (E) a donc deux solutions.
$S = \left\{\dfrac{\sin(\alpha) - 1}{\cos(\alpha)}\,;\,\dfrac{\sin(\alpha) + 1}{\cos(\alpha)}\right\}$.

92 Alignement ?



On peut conjecturer avec GeoGebra que la distance $x = AM \approx 1,19$.
Dans le triangle ACE, $AE = CE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans le triangle ABD,

$BD = 3\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$

$AD = 3\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4}(-1 + \sqrt{3})$

Le théorème de Thalès donne :

$\frac{ME}{MD} = \frac{CE}{BD} \Leftrightarrow \frac{x - AE}{x + AD} = \frac{CE}{BD}$

$x = \frac{CE \times AD + AE \times BD}{BD - CE} = \frac{CE(AD + BD)}{BD - CE}$

$= \frac{3\sqrt{6}}{1 + 3\sqrt{3}} \approx 1{,}19.$

93 Logique

C'est la troisième affirmation qui est vraie.

En effet, on a :

$\cos(2a) = 2\cos(a) \Leftrightarrow 2\cos^2(a) - 1 = 2\cos(a)$.

On pose $X = \cos(a)$.

L'équation s'écrit alors $2X^2 - 2X - 1 = 0$.

Elle a deux solutions : $X_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

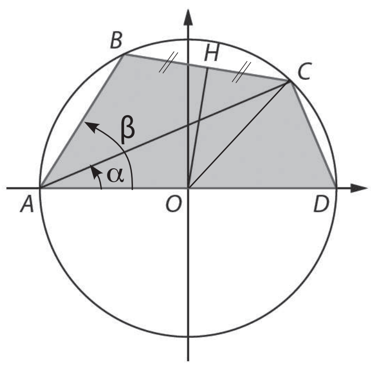
$\cos(a) = X_2$ n'a pas de solution car $X_2 > 1$.

L'ensemble des nombres a tels que $\cos(a) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ sont les solutions de l'équation de départ.

Problèmes

94 Théorème de Ptolémée

a. et **d.**



b. $\sin(\alpha) = \frac{DC}{AD}$ et $\cos(\alpha) = \frac{AC}{AD}$.

$DC = AD\sin(\alpha)$ et $AC = AD\cos(\alpha)$.

c. $\sin(\beta) = \frac{BD}{AD}$ et $\cos(\beta) = \frac{AB}{AD}$.

$BD = AD\sin(\beta)$ et $AB = AD\cos(\beta)$.

e. Le triangle HOC est isocèle en O donc

$\text{mes}\widehat{HOC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOC}$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc,

donc $\text{mes}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{mes}\widehat{BOC}$.

Ainsi, $\text{mes}\widehat{HOC} = \text{mes}\widehat{BAC} = \beta - \alpha$.

f. Dans le triangle HOC, rectangle en H,

$\sin(\widehat{HOC}) = \frac{HC}{OC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$.

g. $\sin(\beta - \alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)$. Ainsi

$\frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AD} \times \frac{AC}{AD} - \frac{AB}{AD} \times \frac{DC}{AD}$.

En multipliant par AD^2, on obtient l'égalité traduisant le théorème de Ptolémée.

95 Distance maximale

1. $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.

Ainsi,

$\cos(p) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

et

$\cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

En additionnant les deux égalités, on obtient :

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

2. a. Le triangle de sommets A et M et dont le milieu de l'hypoténuse est le point O est rectangle en A car il est inscrit dans un cercle et un de ses côtés est un diamètre du cercle. Ainsi $\cos(\widehat{AMO}) = \cos(\alpha) = \frac{MA}{2R}$.

On démontre de même que $MB = 2R\cos(\beta)$.

b. $MA + MB = 2R(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$

$= 2R\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$.

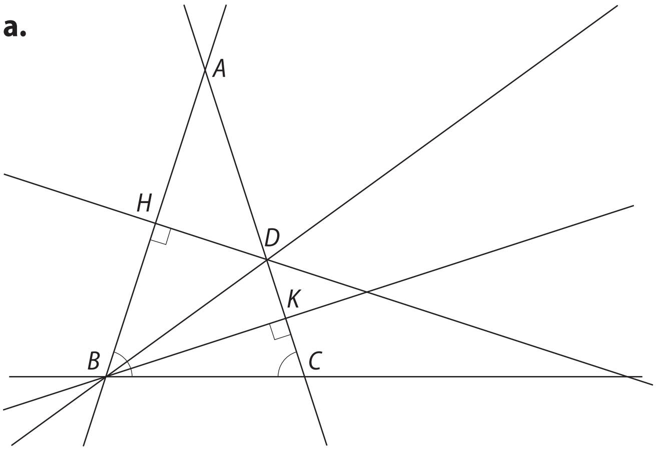
3. Les angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc sont de même mesure. C'est le cas des angles $\widehat{AMB}$ qui ont donc tous pour mesure $\alpha + \beta$ quelle que soit la position du point M.

4. D'après la question **2.b.**, la variation de $MA + MB$ ne dépend donc plus que de $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ qui est maximal s'il est égal à 1.

5. $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

96 **36°**

a.



b. Triangle *ABC* :

$\text{mes}\widehat{ABC} = \dfrac{2\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{BCA} = \dfrac{2\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{5}$.

Triangle *ABD* :

$\text{mes}\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{ADB} = \dfrac{3\pi}{5}$.

Triangle *BDC* :

$\text{mes}\widehat{BDC} = \dfrac{2\pi}{5}$, $\text{mes}\widehat{DBC} = \dfrac{\pi}{5}$ et $\text{mes}\widehat{BCD} = \dfrac{2\pi}{5}$.

c. Les triangles *ADB* et *DCB* sont respectivement isocèles en *D* et en *B*.

d. Dans le triangle *ADB*, le point *H* est la hauteur issue de *D*. Dans le triangle *HBD*, on a :

$\cos(\widehat{HBD}) = \dfrac{BH}{BD} = \dfrac{\frac{1}{2}AB}{BC} = \dfrac{AB}{2x}$, ce qui donne :

$AB = 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

e. On procède de manière identique dans le triangle *BKC* pour obtenir : $CD = 2x\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

f. $BC = BD = AD$ (triangles isocèles).

$BC = AD = AB - CD \Leftrightarrow x = 2x\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 2\,x\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Ainsi $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Les triangles *ABC* et *BCD* ont leurs angles de même mesure, ils sont donc semblables.

Ainsi : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$. On a alors :

$$AB \times CD = BC^2 \Leftrightarrow 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \times 2x\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x^2$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

g. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2\,ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$
$= 4\,ab$.

Ainsi $\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2 - \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2$
$= 4\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$

$\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$.

Ainsi $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

h. $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. D'où, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$.

$-\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

D'où, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

97 **Droite de Simson**

1. Les angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc. Ils sont donc égaux à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Ainsi $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$.

2. a. Les triangles *CQM* et *CRM* sont respectivement rectangles en *Q* et *R*. Ils ont la même hypoténuse et sont donc inscrits dans le même cercle. Ainsi les points *C*, *Q*, *R* et *M* sont cocycliques.

D'où $2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})$.

b. c. Démonstrations analogues au **a.**

d. $2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) + 2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ})$
$= -2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) + 2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ})$
$= -2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})$
$= -2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) = \hat{0}$.

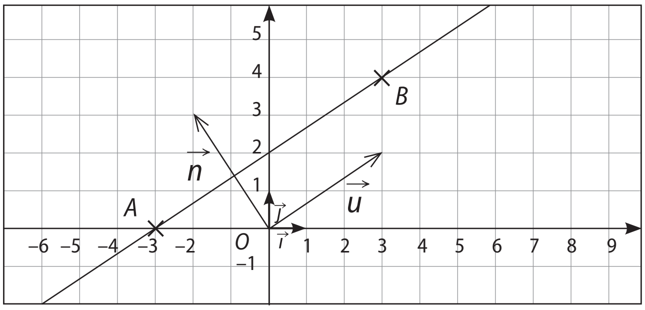
Ainsi les points *R*, *P* et *Q* sont alignés.

3 Géométrie analytique du plan

Activités d'introduction

1 Vecteur normal à une droite

1. et **2. a.** et **c.**



2. b. $\overrightarrow{AB}(6\,;4)$ et $\overrightarrow{AM}(x+3\,;y)$ sont colinéaires si, et seulement si, $6y-4(x+3)=0$ d'où $-4x+6y-12=0$. (AB) a pour équation $-2x+3y-6=0$.

c. $\overrightarrow{n}(-2\,;3)$. $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=-2\times3+3\times2=0$.
Donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

3. a. $M(x\,;y)\in(AB)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3+t\\y=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

b. $AM(-3+3t-(-3)\,;2t-0)$ donc $AM\,(3t\,;2t)$ et $n\,(-2\,;3)$.
Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=3t\times(-2)+2t\times3=0$.
Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

4. a. Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est dit normal à une droite $(\mathscr{D})$ si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

b. Il en existe une infinité (tous ceux qui sont non nuls et colinéaires avec $\overrightarrow{n}$). Par exemple $\overrightarrow{n'}\,(-4\,;6)$ et $\overrightarrow{n''}\,(2\,;-3)$.

2 Droite définie par un point et un vecteur normal

1. a. On vérifie facilement que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=0$, que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0$ et que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

b. On constate que les points A, B, C et E sont alignés.

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\Leftrightarrow(x-1)\times3+(y-2)\times(-2)=0$
$\Leftrightarrow 3x-2y+1=0.$

d. $3x-2y+1=0$ est l'équation d'une droite : la droite (AB). Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2\,;-3)$ donc aussi $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{BA}(2\,;3)$.

2. a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n'}=-2\times(-6)+(-3)\times4=0$. Donc $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur normal à la droite (AB).

b. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n'}=0\Leftrightarrow(x-1)\times(-6)+(y-2)\times4=0$
$\Leftrightarrow -6x+4y-2=0$
$\Leftrightarrow -2(3x+2y-1)=0$
$\Leftrightarrow 3x+2y-1=0.$

Il s'agit bien de la même droite.

3 Distance d'un point à une droite

1. a. $\overrightarrow{n}(1\,;2)$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$ et $\|\overrightarrow{n}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Ainsi, $\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{\sqrt5}\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire et normal à $(\mathscr{D})$.

$\overrightarrow{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt5}\,;\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{AH}\|\times\|\overrightarrow{v}\|=\overline{AH}\times1=\overline{AH}$ (car $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens).

c. $H(-2\,;3)$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v}=8\times\dfrac{1}{\sqrt5}+1\times\dfrac{2}{\sqrt5}=\dfrac{10}{\sqrt5}=2\sqrt5$ donc $AH=2\sqrt5$.

2. a. $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{n}=(x_O-x_H)\times a+(y_O-y_H)\times b$
$=ax_O+b\,y_O-a\,x_H-b\,y_H$
$=ax_O+b\,y_O+c$

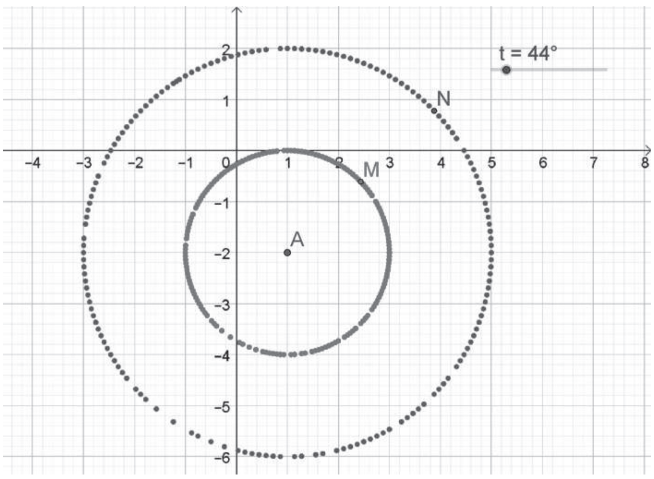
car $H\in(d)$ donc $a\,x_H+b\,y_H+c=0$
donc $-a\,x_H-b\,y_H=c$.

b. $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{n}=\pm HA\times\|\overrightarrow{n}\|$ car $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
Donc $|\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{n}|=HA\times\|\overrightarrow{n}\|$.

c. $HA=\dfrac{|\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}=\dfrac{|ax_O+by_O+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

4 Équation paramétrique d'un cercle

1. On conjecture que le point M décrit le cercle $A(1\,;2)$ et de rayon 2. On conjecture que le point N décrit le cercle de centre $A(1\,;-2)$ et de rayon 4.



2. a. $\overrightarrow{AM}(2\cos(t)\ ;\ 2\sin(t))$ et $AN(4\cos(t)\ ;\ 4\sin(t))$.

b. $AM = \sqrt{(2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2} = \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)}$

$= \sqrt{4} = 2$.

De même, $AN = 4$.

c. $AM = 2 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

$AN = 4 \Leftrightarrow N$ appartient au cercle de centre A et de rayon 4.

Savoir-faire

$M(x\ ;\ y)$; $(\mathscr{D})$ désigne la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

4 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1) \times 3 + (y-5) \times (-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 3 - 2y + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y + 13 = 0.$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est : $3x - 2y + 13 = 0$.

5 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \times \frac{7}{3} + (y-0) \times \frac{4}{5} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3}x - 7 + \frac{4}{5}y = 0$

$\Leftrightarrow 15 \times \frac{7}{3}x - 15 \times 7 + 15 \times \frac{4}{5}y = 0.$

$\Leftrightarrow 35x - 105 + 12y = 0.$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est :
$35x + 12y - 105 = 0$.

6 $M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) \times 0 + (y+1) \times 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow y + 1 = 0.$

Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est : $y = -1$.

7 $M(x\ ;\ y)$

• (h_1) désigne la hauteur issue de A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

$M \in (h_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) \times (1-7) + (y-4) \times (-2-2) = 0$

$\Leftrightarrow -6(x-1) - 4(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow -6x + 6 - 4y + 16 = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 4y - 22 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2y - 11 = 0.$

Une équation cartésienne de (h_1) est : $3x + 2y - 11 = 0$.

• (h_2) désigne la hauteur issue de B, de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

$M \in (h_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (x-7) \times (1-1) + (y-2) \times (-2-4) = 0$

$\Leftrightarrow 0(x-7) - 6(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y = 2.$

Une équation cartésienne de (h_2) est : $y = 2$.

• (h_3) désigne la hauteur issue de C, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$M \in (h_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

$\Leftrightarrow (x-1)(7-1) + (y+2)(2-4) = 0$

$\Leftrightarrow 6(x-1) - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 6 - 2y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0.$

Une équation cartésienne de (h_3) est : $3x - y - 5 = 0$.

8 $(\mathscr{D})$ d'équation $3x + y - 7 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(3\ ;\ 1)$ et vecteur directeur $\vec{u}(1\ ;\ -3)$.

$M(x\ ;\ y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow (x-0) \times 1 + (y-1) \times (-3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0.$

Une équation cartésienne de (Δ) est : $x - 3y + 3 = 0$.

11 (d) a pour équation normale :

$\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}x - \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}y + \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0$

Soit $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} = 0.$

12 $\frac{1}{\sqrt{1+6^2}}x + \frac{6}{\sqrt{1+6^2}}y - \frac{2}{\sqrt{1+6^2}} = 0$

Soit $\frac{1}{\sqrt{37}}x + \frac{6}{\sqrt{37}}y - \frac{2}{\sqrt{37}} = 0.$

13 $\overrightarrow{AB}(6-0\ ;\ -2-3)$ soit $\overrightarrow{AB}(6\ ;\ -5)$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), donc $\vec{n}(5\ ;\ 6)$ est un vecteur normal de la droite (AB).

$\|\vec{n}\| = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}.$

Un vecteur unitaire normal de (AB) est $\vec{n}'\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\ ;\ \frac{6}{\sqrt{61}}\right)$.

$M(x\ ;\ y)$;

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}' = 0$

$\Leftrightarrow (x-0) \times \frac{5}{\sqrt{61}} + (y-3) \times \frac{6}{\sqrt{61}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{61}}x + \frac{6}{\sqrt{61}}y - \frac{18}{\sqrt{61}} = 0$

Une équation normale de (AB) est :

$\frac{5}{\sqrt{61}}x + \frac{6}{\sqrt{61}}y - \frac{18}{\sqrt{61}} = 0.$

14 $\begin{cases} x = 5 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

15 $R = \Omega A = \sqrt{(3+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$.

$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{26}\cos(t) \\ y = 1 + \sqrt{26}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

16 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 6y - 42 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 2y) = 42$

$\Leftrightarrow 3((x-1)^2 - 3 + 3(y+1)^2 - 3 = 42$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 3(y+1)^2 = 48$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$.

Centre $\Omega(1\,;-1)$, rayon $R = \sqrt{16} = 4$.

Représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 1 + 4\cos(t) \\ y = -1 + 4\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

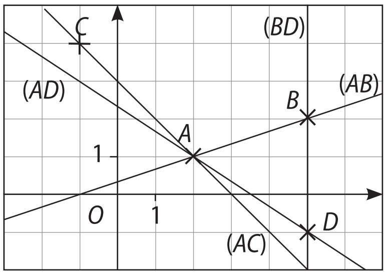
Exercices d'entraînement

Othogonalité et droites

17 • Droite (AB) : vecteur directeur $\vec{u}(-4\,;-2)$; vecteur normal $\vec{n}(2\,;-4)$.

• Droite (AC) : vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-5)$; vecteur normal $\vec{n}(5\,;2)$.

18 **a.**



b. Droite (AB) : vecteur directeur $\vec{u}(3\,;1)$; vecteur normal $\vec{n}(1\,;-3)$.

Droite (AC) : vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;3)$; vecteur normal $\vec{n}(3\,;3)$.

Droite (AD) : vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-2)$; vecteur normal $\vec{n}(2\,;3)$.

Droite (BD) : vecteur directeur $\vec{u}(0\,;-3)$; vecteur normal $\vec{n}(3\,;0)$.

19 **a.** Vecteurs normaux de (d_1) : $\vec{n_1}(5\,;-2)$ $\vec{n_2}(-5\,;2)$.

Vecteurs directeurs de (d_1) : $\vec{u_1}(2\,;5)$ $\vec{u_2}(-2\,;-5)$.

b. Mêmes notations $\vec{n_1}\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$ et $\vec{n_2}\left(-\frac{1}{2}\,;-3\right)$

$\vec{u_1}\left(3\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u_2}\left(-3\,;\frac{1}{2}\right)$.

c. Mêmes notations $\vec{n_1}(1\,;0)$ et $\vec{n_2}(-1\,;0)$

$\vec{u_1}(0\,;1)$ et $\vec{u_2}(0\,;-1)$.

d. Mêmes notations $\vec{n_1}(0\,;1)$ et $\vec{n_2}(0\,;-1)$

$\vec{u_1}(1\,;0)$ et $\vec{u_2}(-1\,;0)$.

20 (d) passe par $B(1\,;-4)$, a pour vecteur normal $\vec{n}(3\,;2)$.

(d') passe par $A(-4\,;-3)$, a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;5)$.

21 (d) a pour vecteur normal $\vec{n}(4\,;6)$;
(d') a pour vecteur normal $\vec{n'}(3\,;-2)$;
$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 12 - 12 = 0$.
(d) et (d') sont perpendiculaires.

22 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(6\,;-4)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'}(3\,;-2)$.
$\text{dét}(\vec{u}, \vec{u'}) = 6 \times (-2) - 3 \times (-4) = -12 + 12 = 0$
donc (d) et (d') sont parallèles.
(d) et (d') ne sont pas confondues car leurs équations cartésiennes ne sont pas proportionnelles.
$2(2x + 3y - 7) = 2 \times 0 \Leftrightarrow 4x + 6y - 14 = 0$.

23 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;1)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'} = \overrightarrow{AB}(6\,;-18)$.
$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 3 \times 6 + 1 \times (-18) = 0$
donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

24 (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;3)$.
(d') a pour vecteur directeur $\vec{u'}(6\,;-2)$.
$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 6 - 6 = 0$, donc (d) et (d') sont perpendiculaires.

25 **a.** (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;a)$.
(d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}(-2\,;3)$.
(d) est perpendiculaire à (d_1) si et seulement si,
$\vec{u} \cdot \vec{u_1} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (-2) + a \times (-3) = 0$

$\Leftrightarrow -2 - 3a = 0$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

b. (d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(3\,;-2)$.
(d) est parallèle à (d_2) si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}, \vec{u_2}) = 0$
soit $1 \times (-2) - a \times 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - 3a = 0$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$.

26 (d) a pour vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1)$.
$\vec{n}$ est un vecteur directeur de (Δ) perpendiculaire à (d).
Représentation paramétrique de (Δ) :
$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

27 $M(x\,;y)$.
$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)\times 1 + (y-4)\times(-3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 - 3y + 12 = 0$
$\Leftrightarrow x - 3y + 9 = 0$
équation cartésienne de $(\mathscr{D})$.

28 **a.** $\overrightarrow{BC}(-2\,;-2)$.
(d) : droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
$M(x\,;y)$;
$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)\times(-2) + (y-0)\times(-2) = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 6 - 2y = 0$
$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$
b. $\overrightarrow{CD}(-2\,;-6)$.
(d') : droite passant par B, de vecteur normal $\overrightarrow{CD}$.
$M \in (d') \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)\times(-2) + (y-4)\times(-6) = 0$
$\Leftrightarrow -2x + 2 - 6y + 24 = 0$
$\Leftrightarrow -2x - 6y + 26 = 0$
$\Leftrightarrow x + 3y - 13 = 0.$

29 $(\mathscr{D})$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;-4)$
$\|\vec{n}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.
Donc $\frac{3}{\sqrt{17}}\vec{n}$ et $-\frac{3}{\sqrt{17}}\vec{n}$ sont deux vecteurs normaux à $(\mathscr{D})$ de norme 3.
Soit $\vec{n}_1\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\,;\frac{-12}{\sqrt{17}}\right)$ et $\vec{n}_2\left(\frac{-3}{\sqrt{17}}\,;\frac{12}{\sqrt{17}}\right)$.

30 Coordonnées des différents points :
$E(5\,;1)$, $F(1\,;5)$, $G(6\,;10)$, $H(16\,;10)$ et $I(19\,;1)$.
a. (EF) : $\overrightarrow{EM}(x-5\,;y_1)$; $\overrightarrow{EF}(-4\,;4)$;
$\text{dét}(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow 4(x-5) - (-4)(y-1) = 0$
$\Leftrightarrow 4x - 20 + 4y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 4y - 24 = 0$
$\Leftrightarrow x + y - 6 = 0.$
(FG) : $\overrightarrow{FG}(5\,;5)$; $\overrightarrow{FM}(x-1\,;y-5)$.
$M \in (FG) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FG}) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)\times 5 - 5\times(y-5) = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 - y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x - y + 4 = 0.$
(GH) : $\overrightarrow{GH}(10\,;0)$; $\overrightarrow{GM}(x-6\,;y-10)$.
(GM) droite horizontale d'équation $y = 10$.
(HI) : $\overrightarrow{HI}(3\,;-9)$; $\overrightarrow{HM}(x-16\,;y-10)$.
$M \in (HI) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HI}) = 0$
$\Leftrightarrow -9(x-16) - 3(y-10) = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 48 + y - 10 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y - 58 = 0.$
Les vecteurs directeurs sont tous non perpendiculaires deux à deux, donc il n'y a pas de droites parallèles.
$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = -4\times 5 + 4\times 5 = 0.$
(EF) et (FG) sont perpendiculaires.
b. La nouvelle trajectoire est (HJ) avec $\overrightarrow{HJ}$ colinéaire à $\overrightarrow{EF}$.
J a pour coordonnées $(19\,;y)$, $\overrightarrow{HJ}(3\,;y-10)$.
$\det(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow 3\times 4 - (y-10)\times(-4) = 0$
$\Leftrightarrow 12 + 4y - 40 = 0$
$\Leftrightarrow 4y - 28 = 0$
$\Leftrightarrow y = 7.$
J a pour coordonnées $(19\,;7)$.

31 **a.** $\overrightarrow{AB}(1\,;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-5\,;-6)$.
$\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1\times(-6) - (-4)\times(-5)$
$= -6 - 20$
$= -26.$
$\text{dét}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.
b. (h_A) : hauteur issue de A.
(h_B) : hauteur issue de B.
(h_C) : hauteur issue de C.
$M(x\,;y)$;
$M \in (h_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)\times(-6) + (y-5)\times(-2) = 0.$
$\Leftrightarrow -6x + 18 - 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow 6x + 2y - 28 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0.$
$M \in (h_B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$\Leftrightarrow (x-4)(-5) + (y-1)(-6) = 0$
$\Leftrightarrow -5x + 20 - 6y + 6 = 0$
$\Leftrightarrow -5x - 6y + 26 = 0$
$\Leftrightarrow 5x + 6y - 26 = 0.$
$M \in (h_C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)\times 1 + (y+1)\times(-4) = 0$
$\Leftrightarrow x + 2 - 4y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x - 4y - 2 = 0.$

32 Coordonnées des points $A(3\,;-6)$, $B(0\,;9)$ et $C(-9\,;0)$.

a. $\overrightarrow{AB}(-3\,;15)$;

$M(x\,;y) : M \in (h_C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow (x+9)\times(-3)+(y-0)\times 15 = 0$

$\Leftrightarrow -3x-27+15y=0$

$\Leftrightarrow x-5y+9=0$

b. On détermine une équation cartésienne de (h_A), hauteur issue de A :

$\overrightarrow{BC}(-9\,;-9)$;

$M \in (h_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\times(-9)+(y+6)\times(-9)=0$

$\Leftrightarrow x-3+y+6=0$

$\Leftrightarrow x+y+3=0.$

H point d'intersection de (h_A) et (h_C) a pour coordonnées $(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases}x-5y+9=0\\x+y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y-9\\5y-9+y+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5y-9\\6y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=-4\end{cases}$$

Donc $H(-4\,;1)$.

33 **a.** U_2 est associé à la droite rouge.

U_1 est associé à la droite bleue.

b. E : valeur de U_1 pour $I = 0$

donc $E = 4{,}5\ V$.

$U_2 = RI$ pour I_1 : $I = 0{,}5$; $U_2 = 5$ donc $R = \dfrac{U_2}{I} = 10\ \Omega$.

Pour A' : $I = 1$; $U = E - rI$

soit $4{,}3 = 4{,}5 - r\times 1 \Leftrightarrow r = 4{,}5-4{,}3 = 0{,}2\ \Omega$.

c. Le point de fonctionnement est le point d'intersection des deux droites.

Son abscisse vaut I_0. Son ordonnée vaut U_0.

d. Calcul : $4{,}5 - 0{,}2\times I_0 = 10\times I_0$

$\Leftrightarrow 10{,}2\,I_0 = 4{,}5 \Leftrightarrow I_0 = \dfrac{4{,}5}{10{,}2} \approx 0{,}44$ A.

Puis $U_0 = 10\times I_0 \approx 4{,}4$ V.

Équation normale de droite

34 **a.** $2x-y+4=0$

$a = 2 > 1$; a n'est pas de la forme $\cos\theta$.

Ce n'est pas une équation normale de droite.

b. $0{,}3x+1{,}5y+2=0.$

$b = 1{,}5 > 1$; b n'est pas de la forme $\sin\theta$.

Ce n'est pas une équation normale de droite.

35 $-\dfrac{1}{\sqrt{17}}x-\dfrac{4}{\sqrt{17}}y-\dfrac{5}{\sqrt{17}}=0$ est une autre équation normale de (d).

36 $2x-y+4=0.$

a. $\vec{n}(2\,;-1)$ est normal à (d).

$\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}.$

$\vec{u}_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{n}.$

$\vec{u}_1\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,;\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\vec{u}_2\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

b. Les deux équations normales de (d) sont :

$\dfrac{2}{\sqrt{5}}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}y+\dfrac{4}{\sqrt{5}}=0$ et $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}x+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y-\dfrac{4}{\sqrt{5}}=0.$

37 **a.** $\vec{n}(-1\,;2)$; $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}.$

Donc $\vec{u}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\,;\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ unitaire et normal à $(\mathscr{D}_1)$.

$M(x\,;y)$

$M\in(\mathscr{D}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0.$

$\Leftrightarrow (x-5)\times\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}\right)+(y+2)\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{5}}x+\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y+\dfrac{4}{\sqrt{5}}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{5}}x+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y+\dfrac{9}{\sqrt{5}}=0$

équation normale de $(\mathscr{D}_1)$.

b. $3x-4y+1=0.$

On multiplie l'équation par $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{5}.$

Équation normale de $(\mathscr{D}_2)$: $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}y+\dfrac{1}{5}=0.$

38 **a.** $\vec{n}(5\,;2)$ est normal à $(\mathscr{D}_3)$.

$\vec{n}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}.$

$\vec{n}_1\left(\dfrac{5}{\sqrt{29}}\,;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$ est unitaire et normal à $(\mathscr{D}_3)$.

$M(x\,;y)$;

$M\in(\mathscr{D}_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{29}}(x-3)+\dfrac{2}{\sqrt{29}}(y-1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{29}}x+\dfrac{2}{\sqrt{29}}-\dfrac{17}{\sqrt{29}}=0$

équation normale de $(\mathscr{D}_3)$.

b. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(6\,;3)$ dirige $(\mathscr{D}_4)$.

$\vec{n}(3\,;-6)$ est normal à $(\mathscr{D}_4)$.

$\vec{n}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$; $\vec{n}_1\left(\frac{3}{\sqrt{45}} ; \frac{-6}{\sqrt{45}}\right)$ or $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$\vec{n}_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}_4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2) - \frac{2}{\sqrt{5}}(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$

équation normale de $(\mathscr{D}_4)$.

39 $(\mathscr{D}_5)$ passe par $A(2 ; 5)$ et est dirigée par $\vec{u}(1 ; -1)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}_5) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow -1 \times (x-2) - 1\,(y-5) = 0$

$\Leftrightarrow -x - y + 7 = 0.$

Une équation normale de $(\mathscr{D}_5)$ est :

$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{7}{\sqrt{2}} = 0.$

Distance d'un point à une droite

40 **a.** $d(A, (d)) = \frac{|1 + 3 \times 2 + 1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$

b. $d(A, (d)) = \frac{|3 \times (-1) - 2 \times (1{,}5)|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|-3-3|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$

41 **a.** L'équation est une équation normale donc :

$d(A, (d)) = \left|\frac{1}{2} \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) - 2\right| = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3} - 2\right|$

$= \left|-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right| = \frac{1}{2} + \sqrt{3}.$

b. L'équation est une équation normale donc :

$d(A, (d)) = \left|\frac{2}{\sqrt{13}} \times 1 + \frac{3}{\sqrt{13}} \times 4 + \frac{6}{\sqrt{13}}\right| = \frac{20}{\sqrt{13}}.$

42 **a.** $d(A, (\mathscr{D}))$: l'équation de $(\mathscr{D})$ est une équation normale, donc :

$d(A, (\mathscr{D})) = \left|1 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$

b. $d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times (-2) - 5 \times 1 + 11|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|-9+11|}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$

c. $d(A, \mathscr{D}) = \frac{\left|\frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{3} \times (-2) + 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}} = \frac{\left|2 + \frac{2}{3} + 1\right|}{\sqrt{\frac{13}{36}}}$

$= \frac{11}{3} \times \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{22}{\sqrt{13}}.$

43 **a.** Équation de (d).

$M(x ; y)$;

$M \in (d) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-1) - 1(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 2 - y = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

équation normale de (d).

b. $d(B, (d)) = \left|\frac{2}{\sqrt{5}} \times 4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times (-3) - \frac{2}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{8-5}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}.$

44 Équation de (BC) : $\overrightarrow{BC}(3 ; -8)$;

$M(x ; y)$;

$M \in (BC) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow -8(x+1) - 3(y-5) = 0$

$\Leftrightarrow -8x - 8 - 3y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 8x + 3y - 7 = 0.$

$d(A, (BC)) = \frac{|8 \times 1 + 3 \times (-2) - 7|}{\sqrt{64+9}} = \frac{|8-6-7|}{\sqrt{73}}$

$= \frac{|-5|}{\sqrt{73}} = \frac{5}{\sqrt{73}}.$

45 $(\mathscr{D})$ passe par $B(3 ; -1)$, a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2)$.

Équation de $(\mathscr{D})$:

$M(x ; y)$;

$M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow$ dét $(BM, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-3) - (y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 6 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0.$

$d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times 2 - (-2) - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|4+2-7|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

46 **a.** $\vec{u}(\cos(70°) ; \sin(70°))$ est un vecteur directeur unitaire de (OB).

b. $O(0 ; 0) \in (OB)$; $M(x ; y)$;

$M \in (OB) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(70°)\,x - \cos(70°)\,y = 0$

équation normale de (OB).

c. $\vec{v}(-\cos(65°) ; \sin(65°))$ est un vecteur directeur unitaire de (AB).

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ dét $(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(65°)(x-3) + \cos(65°)\,y = 0$

$\Leftrightarrow \sin(65°)\,x + \cos(65°)\,y - 3\sin(65°) = 0$

équation normale de (AB).

d. $B\,(x\,;y)$;

$$\begin{cases} B \in (OB) \\ B \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(70)\,x - \cos(70)\,y = 0 \\ \sin(65)\,x + \cos(65)\,y = 3\sin(65) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\cos(70)}{\sin(70)}\,y \\ \left[\sin(65) \times \dfrac{\cos(70)}{\sin(70)} + \cos 65\right] y = 3 \times \sin(65) \end{cases}$$

$$y = \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}$$

$$x = \frac{\cos(70)}{\sin(70)} \times \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}$$

$$= \frac{3 \times \sin(65) \times \sin(70)}{\sin(65)\cos(70) + \cos(65)\sin(70)}.$$

B a pour coordonnées $(x_B\,;y_B)$ soit environ (17,8 ; 21,7).

e. (OA) a pour équation normale : $y = 0$.

$d\,(B\,;(OA)) = |y_B| \approx 21{,}7$ km.

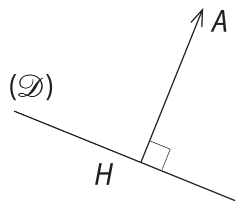
47 Propriété du cours

a. Si $ax + by + c = 0$ est une équation de droite alors $\vec{n}\,(a\,;b)$ est normal à $(\mathscr{D})$.

Ici $a = \cos(\theta)$; $b = \sin(\theta)$; $\vec{v}\,(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ est normal à $(\mathscr{D})$.

De plus $\|\vec{v}\| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. $\vec{v}$ est unitaire.

b.



(AH) est perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ donc :

$\overrightarrow{AH} = \pm\,\|\overrightarrow{AH}\| \cdot \vec{v}$ ($\vec{v}$ unitaire).

Soit $M\,(x\,;y)$ et $M \in (\mathscr{D})$.

$|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}| = |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$.

De plus $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}| = |(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{u}|$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}|$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + 0|$ car $HM \perp \vec{u}$

$= |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}| = \|\overrightarrow{AH}\| = AH$.

Donc $AH = |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$

c. On sait que $d(A\,;(\mathscr{D})) = AH$

$= |(x - x_0)\cos(\theta) + (y - y_0)\sin(\theta)|$.

On va choisir un point m de $(\mathscr{D})$.

Pour H point de $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(x_H\,;y_H)$, on a :

$x_H\cos(\theta) + y_H\sin(\theta) + k = 0$.

Puis $d(A, (\mathscr{D})) = AH$

$= |(x_H - x_0)\cos(\theta) + (y_H - y_0)\sin(\theta)|$

$= |-x_0\cos(\theta) - y_0\sin(\theta) - k|$

$= |x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta) + k|$.

Cercles

48 $\Omega(5\,;-3)$; $R = 2$.

49 $\begin{cases} x = 6 + \sqrt{3}\cos(t) \\ y = -2 + \sqrt{3}\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

50 $(x - 4)^2 + y^2 = 6 = \sqrt{6}^2$ alors : $\Omega(4\,;0)$ et $R = \sqrt{6}$.

$\begin{cases} x = 4 + \sqrt{6}\cos(\alpha) \\ y = \sqrt{6}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

51 $R = AB = \sqrt{(5 + 1)^2 + (-3 - 1)^2}$

$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$.

$\begin{cases} x = -1 + 2\sqrt{13}\cos(\alpha) \\ y = 1 + 2\sqrt{13}\sin(\alpha). \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

52 Ω milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{2 + 8}{2} = 5$; $y_\Omega = \dfrac{1 - 5}{2} = -2$.

$R = \dfrac{1}{2}AB$.

$AB = \sqrt{(8 - 2)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$\begin{cases} x = 5 + 6\sqrt{2}\cos(\alpha) \\ y = -2 + 6\sqrt{2}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

53 $\Omega(1\,;0)$; $R = 3$.

$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 8$.

54 **a.** Représentation paramétrique de $(\mathscr{C}_1)$

$A(-2\,;3)$; $B(2\,;1)$.

$R = AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{5}\cos(\alpha) \\ y = 3 + 2\sqrt{5}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. $(\mathscr{C}_2)$ de diamètre $[AB]$. Centre Ω milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{-2 + 2}{2} = 0$; $y_\Omega = \dfrac{3 + 1}{2} = 2$.

$R_2 = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R}{2} = \sqrt{5}$.

$\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos(\alpha) \\ y = 2 + \sqrt{5}\sin(\alpha) \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

55 **a.** $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 7$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 = 7$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$

Centre $\Omega(3\,;1)$; rayon $R = \sqrt{17}$.

D'où la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{17}\cos(\alpha) \\ y = 1 + \sqrt{17}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

b. $x^2 + y^2 + 3x + 8y + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+4)^2 - 16 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$

Centre $\Omega\left(-\frac{3}{2} ; -4\right)$; rayon $R = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos(\alpha) \\ y = -4 + \frac{5}{2}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

c. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 17 = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 + 17 = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 8.$

Centre $\Omega(-4 ; -3)$; rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 2\sqrt{2}\cos(\alpha) \\ y = -3 + 2\sqrt{2}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

56 **a.** $\overrightarrow{\Omega A}(a + R\cos(t) - a ; b + R\sin(t) - b)$

donc $\overrightarrow{\Omega A}(R\cos(t), R\sin(t))$.

On pose $\vec{u}(\cos(t) ; \sin(t))$; $\vec{u}$ est non nul car $\|\vec{u}\| = 1$ alors $\overrightarrow{\Omega A} = R\,\vec{u}$. $\overrightarrow{\Omega A}$ dirige (ΩA), donc $\vec{u}$ dirige (ΩA).

b. $\vec{n}(\sin(t) ; -\cos(t))$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc normal à (ΩA) et $\vec{n}$ est unitaire car $\|\vec{n}\| = 1$.

c. (T) passe par A et est dirigée par $\vec{n}$.

$M(x ; y)$; $M \in (T) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$.

Or $\overrightarrow{AM}(x - (a + R\cos(t) ; y - (b + R\sin(t))$.

Donc $\text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{n}) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos(t)(x - a - R\cos(t)) - \sin(t)(y - b - R\sin(t)) = 0$

$\Leftrightarrow -x\cos(t) + a\cos(t) + R\cos^2(t) - y\sin(t) + b\sin(t) + R\sin^2(t) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(t) \cdot x + \sin(t)y - (a\cos(t) + b\sin(t) + R) = 0$

équation cartésienne de (T).

57 **a.** $A(-5 ; 1)$ et $B(1 ; -2)$; Ω est le milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \frac{-5+1}{2} = -2$ et $y_\Omega = \frac{1 + (-r)}{2} = -\frac{1}{2}.$

$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1+5)^2 + (-2-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+9}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$:

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\cos(t) \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\sin(t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. (T_A) tangente au cercle au point A : passe par A, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(6 ; -3)$.

$M(x ; y)$;

$M \in (TA) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x+5) + (-3)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 6x + 30 - 3y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 3y + 33 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 11 = 0$

équation cartésienne de (T_A).

(T_B) tangente au cercle au point B : passe par B, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$M \in (TB) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x-1) - 3(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 6 - 3y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 3y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$

équation cartésienne de (T_B).

58 **a.** $d(A, (d)) = \frac{|3 \times 4 + 2 \times 2 + 10|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|12 + 4 + 10|}{\sqrt{13}}$

$= \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$

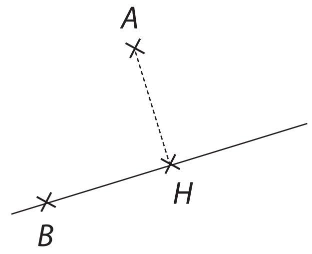
b. $\mathscr{C}$ a pour centre A et pour rayon $R = d(A, (d))$.

$$\begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{13}\cos(\alpha) \\ y = 2 + 2\sqrt{13}\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

59 **a.** $d(A, (\mathscr{D})) = \frac{|2 \times 2 - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$

b. $\vec{n}(2 ; -1)$ est un vecteur normal à $(\mathscr{D})$.

$\frac{1}{\sqrt{5}}(2 ; -1) = \vec{n}_1$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathscr{D})$.



$B(-1 ; 1)$ est un point de $(\mathscr{D})$ alors $(\mathscr{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2)$ $(\vec{u} \cdot \vec{n} = 0)$.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

H est l'unique point de $(\mathscr{D})$ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

$1(-1 + t - 2) + 2(1 + 2t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t - 3 + 2 \times 2t = 0$

$\Leftrightarrow 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$

donc $x_H = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$ et $y_H = 1 + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$

$H\left(-\frac{2}{5} ; \frac{11}{5}\right).$

c. $(\mathscr{C})$ a pour centre A et rayon $R = AH = d(A\,;(\mathscr{D}))$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{36}{5}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \dfrac{36}{5}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 - \dfrac{36}{5} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - \dfrac{11}{5} = 0.$

60 **a.** $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + (y+3)^2 - 9 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+3)^2 = 50$

donc $\Omega(6\,;-3)$ et $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

b. $d(R\,;(\mathscr{D})) = \dfrac{|6-(-3)+1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} = R$

donc $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$.

c. Point de contact I.

Représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$:

$x - y + 1 = 0$; $A(-1\,;0) \in (\mathscr{D})$;

vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$;

$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

I est l'unique point de $(\mathscr{D})$ tel que $\overrightarrow{RI} \cdot \vec{u} = 0$

$\Leftrightarrow 1 \times (-1 + t - 6) + 1 \times (t+3) = 0$

$\Leftrightarrow -7 + t + t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2t = 7 - 3 = 4$

$\Leftrightarrow t = 2$

alors $\begin{cases} x_I = -1 + 2 = 1 \\ y_I = 2 \end{cases}$ Ainsi, $I(1\,;2)$.

61 **a.** $d(\Omega\,;d) = \dfrac{|-4\times 2 + 5\times 3 - 31|}{\sqrt{16+25}} = \dfrac{24}{\sqrt{41}} \approx 3{,}75.$

$d(\Omega\,;d) < R$. Deux points d'intersection.

b. $d(\Omega\,;(d)) = \dfrac{|2 + 18 - 31|}{\sqrt{1+36}} = \dfrac{11}{\sqrt{37}} \approx 1{,}81.$

$d(\Omega\,;(d)) > \sqrt{2}$. Pas de point d'intersection.

c. $d(\Omega\,;(d)) = \dfrac{|-28 + 24 - 26|}{\sqrt{49+64}} = \dfrac{30}{\sqrt{113}} \approx 2{,}8.$

$d(\Omega\,;(d)) > 2$. Pas de point d'intersection.

62 **a.** $R = OA = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$

Équation cartésienne de $(\mathscr{C})$: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

$x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0.$

b. $AB = \sqrt{(5-4)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

c. $(\mathscr{C}')$ de diamètre $[AB]$. Le centre de $(\mathscr{C}')$ est Ω, milieu de $[AB]$.

$x_\Omega = \dfrac{4+5}{2} = \dfrac{9}{2}$; $y_\Omega = \dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{1}{2}$. $\Omega\left(\dfrac{9}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$R' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ rayon de $(\mathscr{C}')$.

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$\left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + \dfrac{81}{4} + y^2 - y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - y + \dfrac{82}{4} - \dfrac{50}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - y + 8 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$.

d. $M(x\,;y)$; $M \in (\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9x - y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 7y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \end{cases}$ $(L_1 - L_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 7y \\ (8-7y)^2 + y^2 - 8(8-7y) + 6y \end{cases}$ (L_2)

On résout (L_2) :

$64 - 112y + 49y^2 + y^2 - 64 + 56y + 6y = 0$

$\Leftrightarrow 50y^2 - 50y = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow y(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Si $y = 0$ alors $x = 8 - 7 \times 0 = 8$.

Si $y = 1$ alors $x = 8 - 7 \times 1 = 1$.

D'après la figure, on identifie $I(1\,;1)$ et $J(8\,;0)$.

e. I (resp. J) appartient au cercle de diamètre $[AB]$, donc le triangle ABI (resp. ABJ) est rectangle en I (resp. J), d'où $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$ (resp. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$).

f. Les tangentes à $(\mathscr{C})$ issues de B sont les droites (BI) et (BJ), de vecteur normal respectif $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

$(\mathscr{T}_1)$ tangente issue de B passant par I :

$M(x\,;y)$;

$M \in (\mathscr{T}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5) \times (1-4) + (y-4) \times (1+3) = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 15 + 4y - 16 = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 4y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 4y + 1 = 0$ équation de $(\mathscr{T}_1)$.

$(\mathcal{T}_2)$ tangente issue de B passant par J :

$M(x\,;y)$;

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{T}_2) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)+(8-4)+(y-4)\times(0+3)=0 \\ &\Leftrightarrow 4x-20+3y-12=0 \\ &\Leftrightarrow 4x+3y-32=0 \quad \text{équation de } (\mathcal{T}_2). \end{aligned}$$

63 $x^2+y^2-4x+2y=3$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1=3 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=8 \end{aligned}$$

Centre $\Omega(2\,;1)$, rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

$$d(\Omega\,;(\mathcal{D})) = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = R.$$

$d(\Omega\,;(\mathcal{D}))=R$, donc $(\mathcal{D})$ est tangente à $(\mathcal{C})$ en A, unique point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$.

A est aussi le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{D})$.

Représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$: $(\mathcal{D})$ passe par $B(0\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$.

D'où $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

A est déterminé par $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\vec{u}=0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (t-2)\times1+(1+t+1)\times1=0 \\ &\Leftrightarrow t-2+t+2=0 \\ &\Leftrightarrow 2t=0 \\ &\Leftrightarrow t=0. \end{aligned}$$

Donc $A=B$; $A(0\,;1)$.

Se tester

64 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

65 **1.** Faux. (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-3)$;

$\overrightarrow{AO}\,(2\,;-1)$.

$\overrightarrow{AO}\cdot\vec{u} = 2\times1+(-3)\times(-1)=5\neq0$

$\overrightarrow{AO}$ et u ne sont pas orthogonaux.

2. Faux. Rayon de $(\mathcal{C})$:

$R=\Omega A=\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

$\Omega B=\sqrt{(-3-4)^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}$.

$\Omega B\neq R$.

3. Faux. Le centre est $\Omega(4\,;3)$.

Représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$:

$\begin{cases} x=4+40\cos(t) \\ y=3+40\sin(t) \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

4. Vrai. Un point de (d) est $A(-2\,;1)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } M\,(x\,;y),\ M\in(d) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0 \\ &\Leftrightarrow -3(x+2)-(y-1)=0 \\ &\Leftrightarrow -3x-y-5=0 \\ &\Leftrightarrow 3x+y+5=0\,. \end{aligned}$$

Une équation normale de (d) est :

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y+\frac{5}{\sqrt{10}}=0$$

5. Faux.

$\overrightarrow{B\Omega}(7\,;-1)$ donc $\vec{v}\left(1\,;-\frac{1}{7}\right)$ dirige $(B\Omega)$.

Soit $E(-10\,;5)$; alors $\overrightarrow{BE}(13\,;1)$.

$$\text{dét}\,(\overrightarrow{BE},\vec{v})=\frac{-1}{7}\times13-1=\frac{-20}{7}\neq0.$$

$\overrightarrow{BE}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. E n'appartient pas à $(B\Omega)$.

66 **1.** b. ; **2.** c. ; **3.** a. ; **4.** b. ; **5.** b.

67 **1. c.** Le centre de $(\mathcal{C})$ est Ω milieu de $[AB]$, donc $\Omega\,(2\,;-6)$.

Le rayon de $(\mathcal{C})$ est $R=\frac{1}{2}AB$.

$AB=\sqrt{(5+1)^2+(-10+2)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

donc $R=5$.

2. c. La tangente à $(\mathcal{C})$ en I a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega I}\,(-4\,;-3)$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } M\,(x\,;y),\ \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{\Omega I}=0 &\Leftrightarrow -4(x+2)-3(y+9)=0 \\ &\Leftrightarrow -4x-3y-35=0 \\ &\Leftrightarrow 4x+3y+35=0\,. \end{aligned}$$

$$\textbf{3. b. } d(J,(d))=\frac{|4\times2+3\times3+35|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|8+9+35|}{5}=\frac{52}{5}.$$

$d(J,(d))=10{,}4$.

Exercices d'approfondissement

68 Droites parallèles

a. $\overrightarrow{OB}(1\,;3)$.

Représentation paramétrique de (OB) :

$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

B' doit vérifier $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont colinéaires, soit $\text{dét}(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{A'B}) = 0$. On a $B'(t\,;3t)$.

$\overrightarrow{AB'}(t-4\,;3t)$; $\overrightarrow{A'B}(-6\,;3)$

donc $3(t-4) - (-6) \times 3t = 0 \Leftrightarrow 3t - 12 + 18t = 0$

$\Leftrightarrow 21t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$

$B'\left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

b. • $C(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x - 1 \\ 0 = y - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Donc $C(5\,;3)$.

• $C'(x\,;y)$

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = x - \dfrac{4}{7} \\ 0 = y - \dfrac{12}{7}. \end{cases}$

Donc $C'\left(\dfrac{53}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

c. • Équation de (AB') : soit $M(x\,;y)$; $\overrightarrow{AB'}\left(\dfrac{4}{7} - 4\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

Soit $\overrightarrow{AB'}\left(\dfrac{-24}{7}\,;\dfrac{12}{7}\right)$.

$M \in (AB') \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB'}) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{12}{7}(x-4) + \dfrac{24}{7}(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 12x - 48 + 24y = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$

équation de (AB').

• Équation de $(A'B)$; $\overrightarrow{A'B}(-6\,;3)$.

$\text{dét}(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B}) = 0 \Leftrightarrow 3(x-7) + 6(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 21 + 6y = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0.$

équation de $(A'B)$

• Équation de (CC') ; $\overrightarrow{CC'}\left(\dfrac{53}{7} - 5\,;\dfrac{12}{7} - 3\right)$

soit $\overrightarrow{CC'}\left(\dfrac{18}{7}\,;\dfrac{-9}{7}\right)$.

$\text{dét}(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CC'}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{7}(x-5) - \dfrac{18}{7}(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -9(x-5) - 18(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -9x + 45 - 18y + 54 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 5 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$ équation de (CC').

d. D'après les trois équations obtenues $\vec{n}(1\,;2)$ est un vecteur normal à (AB'), $(A'B)$ et (CC'), donc ces trois droites sont parallèles.

69 Droites concourantes

a. • $\overrightarrow{OA}(4\,;0)$; $\overrightarrow{OA'}(9\,;0)$

donc $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{9}{4}\overrightarrow{OA}$

O, A et A' sont alignés et $A' \in (OA)$.

• $\overrightarrow{OB}(1\,;3)$; $\overrightarrow{OB'}(-3\,;-9)$.

$\overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB}$, de même $B' \in (OB)$.

b. $C(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x - 1 \\ 0 = y - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

$C'(x\,;y)$; $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 = x + 3 \\ 0 = y + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -9 \end{cases}$

Ainsi, $C(5\,;3)$ et $C'(6\,;-9)$.

c. • Équation de (AB')

$\overrightarrow{AB'}(-3-4\,;-9-0)$ donc $\overrightarrow{AB'}(-7\,;-9)$.

Soit $M(x\,;y)$;

$M \in (AB') \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB'}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4) \times (-9) + 7(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow -9x + 36 + 7y = 0$

$\Leftrightarrow 9x - 7y - 36 = 0$ équation de (AB')

• Équation de $(A'B)$

$\overrightarrow{A'B}(1-9\,;3-0)$ donc $\overrightarrow{A'B}(-8\,;3)$.

$M \in (A'B) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-9) \times 3 + 8(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 8y - 27 = 0$ équation de $(A'B)$.

• Équation de (CC')

$\overrightarrow{CC'}(1\,;-12)$.

$M \in (CC') \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CC'}) = 0$

$\Leftrightarrow -12(x-5) - 1(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -12x + 60 - y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 12x + y - 63 = 0$ équation de (CC').

d. $M \in (AB') \cap (A'B) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 7y - 36 = 0 \\ 3x - 27 + 8y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 7y = 36 \\ 9x + 24y = 81 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -31y = 36 - 81 = -45 \qquad (L_1 - L_2) \\ 9x + 24y = 81 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-45}{-31} = \dfrac{45}{31} \\ 9x + 24 \times \dfrac{45}{31} = 81 \end{cases}$

$9x = \dfrac{81 \times 31 - 24 \times 45}{31} = \dfrac{1\,431}{31}$

$x = \dfrac{159}{31}$; $y = \dfrac{45}{31}$.

$I\left(\dfrac{159}{31} ; \dfrac{45}{31}\right)$ est le point d'intersection de (AB') et $(A'B)$.

On vérifie :

$12 \times \dfrac{159}{31} + 1 \times \dfrac{45}{31} - 63 = \dfrac{1}{31}[12 \times 159 + 45 - 63 \times 31]$

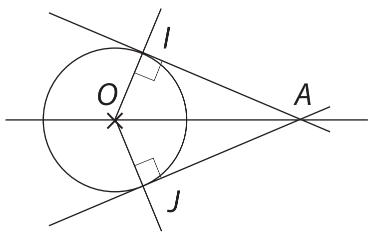
$= \dfrac{0}{31} = 0.$

Donc $I \in (CC')$.

Les trois droites $(A'B)$, (AB') et (CC') sont concourantes en $I\left(\dfrac{159}{31} ; \dfrac{45}{31}\right)$.

70 Tangente à un cercle issue d'un point

a. On cherche les points $M(x ; y)$ appartenant à $(\mathscr{C})$ tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.



On a $x(a - x) + y(0 - y) = 0 \Leftrightarrow ax - x^2 - y^2 = 0$.

M est un point de $(\mathscr{C})$ donc $x^2 + y^2 = 1$.

Il reste $ax - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$.

On a alors $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2 - 1}{a^2} > 0$

$\Leftrightarrow |y| = \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$.

Les points d'intersection des tangentes issues de A avec $(\mathscr{C})$ sont $I\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right)$ et $J\left(\dfrac{1}{a} ; \dfrac{-\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right)$

b. Équation de la tangente (AI) :

$M(x ; y)$;

$M \in (AI) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OI} = 0$

$\Leftrightarrow (x - a) \times \dfrac{1}{a} + (y - 0) \times \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}x - 1 + \dfrac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}y = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{a^2 - 1}\,y - a = 0$ équation de (AI).

Équation de la tangente (AJ) :

$M \in (AJ) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OJ} = 0$

$\Leftrightarrow (x - a) \times \dfrac{1}{a} + (y - 0) \times \left(\dfrac{-\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{a^2 - 1}\,y - a = 0$ équation de (AJ).

71 Orthocentre et hyperbole

a. Équation de (h_3) :

$M(x ; y)$;

$M \in (h_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_3M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_3)(x_2 - x_1) + \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x - x_3) + \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} = 0$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)\left[(x - x_3) - \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{1}{x_1x_2}\right] = 0$

$x_2 - x_1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x - x_3 - \left(y - \dfrac{1}{x_3}\right)\dfrac{1}{x_1x_2} = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x_1x_2}y - x_3 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

équation cartésienne de (h_3).

b. $M \in (\mathscr{H}) \cap (h_3) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ et $x - \dfrac{1}{x_1x_2}y - x_3 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x_1x_2} \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} - x_3 = 0.$

$x \neq 0$ sinon $M \notin (\mathscr{H})$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(\dfrac{1}{x_1x_2x_3} - x_3\right)x - \dfrac{1}{x_1x_2} = 0.$

On doit vérifier que M_3 est une solution évidente.

$x_3^{\,2} + \dfrac{1}{x_1x_2} - x_3^{\,2} - \dfrac{1}{x_1x_2} = 0.$

c. La 2e racine du trinôme vérifie $x' \times x_3 = \dfrac{-1}{x_1x_2}$

donc $x' = \dfrac{-1}{x_1x_2x_3}$.

Alors $I\left(\dfrac{-1}{x_1x_2x_3} ; -x_1x_2x_3\right)$.

d. En changeant les rôles de x_1 ; x_2 et x_3,

équation de (h_1) : $x - \dfrac{1}{x_2x_3}y - x_1 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$

équation de (h_2) : $x - \dfrac{1}{x_1x_3}y - x_2 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0.$

On a : $\dfrac{-1}{x_1x_2x_3} + x_1 - x_1 + \dfrac{1}{x_1x_2x_3} = 0$ donc $I \in (h_1)$

$$\frac{-1}{x_1x_2x_3}+x_2-x_2+\frac{1}{x_1x_2x_3}=0 \text{ donc } I\in(h_2).$$

I est un point d'intersection des trois hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$, c'est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

72 Triangle délimité par trois droites

• $A(x\,;y)$;

$$A\in(d_1)\cap(d_3)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-5=0\\x-2y-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\x-2(5-x)-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\x-10+2x-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x=14\\y=5-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14}{3}\\y=5-\dfrac{14}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$A\left(\frac{14}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

• $B(x\,;y)$;

$$B\in(d_1)\cap(d_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-5=0\\2x-y-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-x\\2x-(5-x)-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5+x-2=0\\y=5-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=5-x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=5-\dfrac{7}{3}=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

$B\left(\frac{7}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

• $C(x\,;y)$;

$$C\in(d_2)\cap(d_3)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-2=0\\x-2y-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-2\\x-(2x-2)-4=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-2)\\x-2x+4-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$$

$C(0\,;-2)$.

b. $BC=\sqrt{\left(0-\frac{7}{3}\right)^2+\left(-2-\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{142}{9}}=\sqrt{\frac{245}{9}}$
$=\frac{7\sqrt5}{3}$.

c. $M(x\,;y)$

$M\in(\mathscr{D})\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\Leftrightarrow(x-0)\times\left(\frac{7}{3}-\frac{14}{3}\right)+(y+2)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{-7}{3}x+\frac{7}{3}(y+2)=0$$
$$\Leftrightarrow -x+y+2=0$$
$$\Leftrightarrow x-y-2=0 \qquad (\mathscr{D})$$

d. $E(x\,;0)$ et $E\in(\mathscr{D})$ donc $x-0-2=0\Leftrightarrow x=2$.
$E(2\,;0)$.

e. F projeté orthogonal de E sur la droite (d_2).
(d_2) est dirigée par $\vec{u}(1\,;2)$.
Représentation paramétrique de (d_2) :

$$\begin{cases}x=t\\y=-2+2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

et (d_2) passe par $I(0\,;-2)$.
F est l'unique point de (d_2) vérifiant $\overrightarrow{EF}\cdot\vec{u}=0$.
Soit $(t-2)\times1+(-2+2t-0)\times2=0$
$\Leftrightarrow t-2-4+4t=0\Leftrightarrow 5t=6\Leftrightarrow t=\frac{6}{5}$.
$F\left(\frac{6}{5}\,;-2+2\times\frac{6}{5}\right)$ soit $F\left(\frac{6}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$.

f. $d(F\,;(d_1))=\dfrac{\left|\frac{6}{5}+\frac{2}{5}-5\right|}{\sqrt2}=\dfrac{\left|\frac{8}{5}-\frac{25}{5}\right|}{\sqrt2}=\dfrac{17}{5\sqrt2}$.

73 Famille de droites

a. $(\mathscr{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;2)$.
(Δ_m) a pour vecteur directeur $\vec{v}_m(m\,;m-2)$
$(\mathscr{D})\,//\,(\Delta_m)\Leftrightarrow \text{dét}(\vec{u}\cdot\vec{v}_m)=0$

$$\Leftrightarrow -1(m-2)-2\times m=0$$
$$\Leftrightarrow -m+2-2m=0$$
$$\Leftrightarrow -3m+2=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}.$$

b. $(\mathscr{D})\perp(\Delta_m)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}_m=0$

$$\Leftrightarrow -m+2(m-2)=0$$
$$\Leftrightarrow -m+2m-4=0$$
$$\Leftrightarrow m-4=0$$
$$\Leftrightarrow m=4.$$

74 Représentation paramétrique de droites

a. (d_1) passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2\,;1)$ car $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.
D'où la représentation paramétrique de (d_1) :

$$\begin{cases}x=0+2t\\y=2+t\end{cases}\quad\text{soit}\begin{cases}x=2t\\y=2+t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

D a pour abscisse $x=2$ alors $y=2+1=3$ donc $t=1$.

$D(2\,;3)$.

b. (d_2) a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;1)$ donc pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;-1)$.

Représentation paramétrique de (d_3) :

$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

C d'abscisse $x=1$ donc $t=2$ et $y=-2$.

$C(1\,;-2)$.

c. • Droite (AC) équation cartésienne

$\overrightarrow{AC}(1-0\,;-2-2)\,;\overrightarrow{AC}(1\,;-4)\,;M(x\,;y)\,;$

$M\in(AC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AC})=0$
$\Leftrightarrow -4(x-0)-1(y-2)=0$
$\Leftrightarrow -4x-y+2=0$
$\Leftrightarrow 4x+y-2=0.$

• Droite (BD) équation cartésienne.

$\overrightarrow{BD}(2+1\,;3-0)\,;\overrightarrow{BD}(3\,;3)\,;$

$M\in(BD) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{BD})=0$
$\Leftrightarrow 3(x+1)-3(y-0)=0$
$\Leftrightarrow x+1-y=0$
$\Leftrightarrow x-y+1=0.$

• Ainsi, le point $I(x\,;y)$ cherché est ;

$I\in(AC)\cap(BD) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 4x+x+1-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 5x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=+\dfrac{1}{5} \\ y=+\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

Donc $I\left(\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{6}{5}\right)$.

d. P point de paramètre t : $\begin{cases} x_P=2t \\ y_P=2+t. \end{cases}$

Q point de paramètre t' : $\begin{cases} x_Q=-1+t' \\ y_Q=-t' \end{cases}$

et I est le milieu de $[PQ]$, soit $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_P+x_Q}{2} \\ y_I=\dfrac{y_P+y_Q}{2} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} 2t-1+t'=2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2}{5} \\ 2+t-t'=2\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+t'=1+\dfrac{2}{5}=\dfrac{7}{5} \\ t-t'=\dfrac{12}{5}-2=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=\dfrac{7}{5}-2t \\ t-\dfrac{7}{5}+2t=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t=\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{5}=\dfrac{9}{5} \\ t'=\dfrac{7}{5}-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5} \\ t'=\dfrac{7}{5}-\dfrac{6}{5}=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Donc $x_P=\dfrac{6}{5}\,;y_P=2+\dfrac{3}{5}=\dfrac{13}{5}\,;P\left(\dfrac{6}{5}\,;\dfrac{13}{5}\right)$.

$x_Q=-1+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{5}\,;y_Q=-\dfrac{1}{5}\,;Q\left(-\dfrac{4}{5}\,;-\dfrac{1}{5}\right)$.

75 Bissectrices de deux droites

a. Équation cartésienne de $(\mathscr{D}')$.

$(\mathscr{D}')$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2\,;-1)$.

Soit $M(x\,;y)$.

$M\in(\mathscr{D}') \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})=0$
$\Leftrightarrow -1(x+1)+2(y-1)=0$
$\Leftrightarrow -x-1+2y-2=0$
$\Leftrightarrow -x+2y-3=0$
$\Leftrightarrow x-2y+3=0$ équation de $(\mathscr{D}')$.

$I(x\,;y)$.

$I\in(\mathscr{D})\cap(\mathscr{D}') \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ -3x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Donc $I(1\,;2)$.

b. $d_1=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}|2x-y|$

$d_2=\dfrac{|x-2y+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y+3|$

c. $d_1=d_2 \Leftrightarrow |2x-y|=|x-2y+3|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=x-2y+3 \\ \text{ou } 2x-y=-(x-2y+3). \end{cases}$

Cas 1 : $2x-y=x-2y+3 \Leftrightarrow x+y-3=0$
équation d'une droite (Δ).

Cas 2 : $2x-y=-x+2y-3 \Leftrightarrow 3x-3y+3=0$
$\Leftrightarrow x-y+1=0$ équation d'une droite (Δ').

75 Triangles tracés dans un cercle

a. $(AB)=(AI)\,;\overrightarrow{AI}(-2+3\,;-3-5)$ donc $\overrightarrow{AI}(1\,;-8)$.

Équation cartésienne de (AB) :

$M(x\,;y)\,;$

$M\in(AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI})=0$
$\Leftrightarrow -8(x+3)-1(y-5)=0$
$\Leftrightarrow -8x-24-y+5=0$
$\Leftrightarrow 8x+y+19=0$ équation de (AB).

$(A'B')$ est la perpendiculaire à (AI) passant par I.

Donc $\overrightarrow{AI}$ est un vecteur normal de $(A'B')$.

$M(x\,;y)$;

$M \in (A'B') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow 1 \times (x+2) - 8(y+3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 - 8y - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x - 8y - 22 = 0$ équation de $(A'B')$.

b. Équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

$R = OA = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$x^2 + y^2 = 34$.

$B(x\,;y)$ vérifie $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ 8x + y + 19 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -19 - 8x \\ x^2 + (19+8x)^2 = 34 \end{cases}$

$x^2 + (19+8x)^2 = 34 \Leftrightarrow x^2 + 361 + 304x + 64x^2 = 34$

$\Leftrightarrow 65x^2 + 304x + 327 = 0$

1re racine $x = -3$ abscisse de A

2e racine $-3 \times x = \dfrac{327}{65} \Leftrightarrow x = \dfrac{327}{-3 \times 65} = \dfrac{-109}{65}$ $(\approx -1{,}68)$

$y = -19 - 8 \times \left(\dfrac{-109}{65}\right) = \dfrac{-363}{65}$ $(\approx -5{,}58)$.

Donc $B\left(\dfrac{-109}{65}\,;\dfrac{-363}{65}\right)$.

c. Coordonnées de A' et B' ; $M(x\,;y)$.

$M \in (\mathscr{C}) \cap (A'B') \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x - 8y - 22 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y + 22 \\ (8y+22)2 + y^2 = 34. \end{cases}$

On a :

$(8y+22)2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow 64\,y^2 + 352y + 484 + y^2 = 34$

$\Leftrightarrow 65\,y^2 + 352y + 450 = 0.$

2 racines $y_1 = \dfrac{-176}{65} + \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}$ et $y_2 = \dfrac{-176}{65} - \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}$

alors $x_1 = 8y_1 + 22 = \dfrac{22}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}$

$x_2 = 8y_2 + 22 = \dfrac{22}{65} - \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}$.

Sur la figure $x_{A'} \leqslant x_{B'}$

donc $A'\left(\dfrac{22}{65} - \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{-176}{65} - \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}\right)$.

$B'\left(\dfrac{22}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{-176}{65} + \dfrac{\sqrt{1\,726}}{65}\right)$.

d. A'' est le milieu de $[AA']$.

$x_{A''} = \dfrac{-173}{130} - \dfrac{4}{65}\sqrt{1\,726}$.

$y_{A''} = \dfrac{149}{130} - \dfrac{1}{130}\sqrt{1\,726}$.

$\overrightarrow{A''I}\left(\dfrac{-87}{130} + \dfrac{4}{65}\sqrt{1\,726}\,;\ \dfrac{-539}{130} + \dfrac{1}{130}\sqrt{1\,726}\right)$.

$\overrightarrow{BB'}\left(\dfrac{131}{65} + \dfrac{8}{65}\sqrt{1\,726}\,;\dfrac{187}{65} + \dfrac{1}{65}\sqrt{1\,726}\right)$.

On veut prouver $\overrightarrow{A''I}$ et $\overrightarrow{BB''}$ orthogonaux.

$130\,\overrightarrow{A''I} = \vec{u}(-87 + 8\sqrt{1\,726}\,;-539 + \sqrt{1\,726})$

$65\overrightarrow{BB'} = \vec{v}(131 + 8\sqrt{1\,726}\,;187 + \sqrt{1\,726})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-87 + 8\sqrt{1\,726})(131 + 8\sqrt{1\,726})$
$+ (-539 + \sqrt{1\,726})(187 + \sqrt{1\,726})$

$= -87 \times 131 + (8 \times 131 - 8 \times 87)\sqrt{1\,726} + 1726$
$+ 64 \times 1\,726 - 539 \times 187 + (187 - 539)\sqrt{1\,726} + 1\,726$

$= -11\,397 + 352\sqrt{1\,726} + 110\,464 - 100\,793$
$- 352\sqrt{1\,726} + 1\,726$

$= 0.$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux soit $\overrightarrow{A''I}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont orthogonaux. Donc (IA'') est la hauteur issue de I dans le triangle IBB'.

77 Vecteurs directeurs des bissectrices

a. $(\mathscr{D}) \mathbin{//} (\mathscr{D}')$ si et seulement si :

$\vec{n}(a\,;b)$ et $\vec{n}(a'\,;b')$ sont colinéaires, soit $\det(\vec{n}\,;\vec{n'}) = 0$, soit $ab' - a'b = 0$.

Donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.

b. $d(M\,;\mathscr{D}) = \dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $d(M\,;\mathscr{D}') = \dfrac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$.

c. $d(M\,;\mathscr{D}) = d(M\,;\mathscr{D}') \Leftrightarrow \dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a'^2 + b'^2}\,|ax + by + c| = \sqrt{a^2 + b^2}\,|a'x + b'y + c'|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a'^2 + b'^2}\,(ax + by + c) = \sqrt{a^2 + b^2}\,(a'x + b'y + c') \\ \text{ou } \sqrt{a'^2 + b'^2}\,(ax + by + c) = -\sqrt{a^2 + b^2}\,(a'x + b'y + c'). \end{cases}$

Δ : Éq. On pose : $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\gamma' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$

$(\gamma' a - \gamma a')x + (\gamma' b - \gamma b')y + (\gamma' c - \gamma c') = 0$

Δ' : Éq. $(\gamma' a + \gamma a')x + (\gamma' b + \gamma b')y + (\gamma' c + \gamma c') = 0$.

On vérifie $(\gamma' a - \gamma a'\,;\gamma' b - \gamma b') \neq (0\,;0)$.

On a $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$ donc $\gamma > 0$ et $\gamma' > 0$.

$\begin{cases} \gamma' a - \gamma a' = 0 \\ \gamma' b - \gamma b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \gamma' \gamma a \\ b' = \gamma'_\gamma b \end{cases}$

alors $ab' - a'b = ab\gamma'_\gamma - ab\gamma'_\gamma = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes.

D'où $(\gamma' a - \gamma a'\,;\gamma' b - \gamma b') \neq (0\,;0)$.

On a $(\gamma' a - \gamma a')x + (\gamma' b - \gamma b')y + (\gamma' c - \gamma c') = 0$ est l'équation cartésienne d'une des bissectrices (Δ) par exemple).

De même si $\begin{cases} \gamma' a + \gamma a' = 0 \\ \gamma' b + \gamma b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -\gamma' \gamma a \\ b' = -\gamma'_\gamma b. \end{cases}$

On a alors $ab' - a'b = -\gamma'_\gamma ab + \gamma'_\gamma ab = 0$,
ce qui est impossible.

Donc $(\gamma' a + \gamma a')x + (\gamma' b + \gamma b')y + (\gamma' c + \gamma c') = 0$ est l'équation cartésienne d'une des bissectrices (Δ') par exemple).

d. $\vec{n}_1(\gamma' a - \gamma a' ; \gamma' b - \gamma b')$ est un vecteur normal à (Δ).
$n_2(\gamma' a + \gamma a' ; \gamma' b + \gamma b')$ est un vecteur normal à (Δ').

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= (\gamma' a - \gamma a')(\gamma' a + \gamma a') + (\gamma' b - \gamma' b)(\gamma' b + \gamma b') \\ &= (\gamma' a)^2 - (\gamma a')^2 + (\gamma' b)^2 - (\gamma b')^2 \\ &= (a'^2 + b'^2)a^2 - (a^2 + b^2)a'^2 + (a'^2 + b'^2)b^2 - (a^2 + b^2)b'^2 \\ &= a'^2a^2 + b'^2a^2 - a^2a'^2 - b^2a'^2 + a'^2b^2 + b'^2b^2 - a^2b'^2 - b^2b'^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.

e. Équation de $(\mathscr{D})$: $ax + by + c = 0$,
alors $\vec{u}_1(b ; -a)$ ou $\vec{u}_1(-b ; a)$ donc vecteur unitaire.

$$\vec{u}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

et de même $\vec{v}\left(\dfrac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} ; \dfrac{-a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}\right)$

$\vec{u}\left(\dfrac{b}{\gamma} ; \dfrac{-a}{\gamma}\right)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{b'}{\gamma'} ; \dfrac{-a}{\gamma'}\right)$.

Soit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{w}\left(\frac{b}{\gamma} + \frac{b'}{\gamma'} ; -\left(\frac{a'}{\gamma'} + \frac{a}{\gamma}\right)\right)$$

ou $\vec{w} = \dfrac{1}{\gamma\gamma'}(\gamma' b + \gamma b' ; -(\gamma' a + \gamma a'))$

on a $\vec{w} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

$\vec{w}$ est un vecteur directeur de (Δ').

$\vec{w}'\left(\dfrac{b}{\gamma} - \dfrac{b'}{\gamma'} ; \dfrac{a'}{\gamma'} - \dfrac{a}{\gamma}\right)$ ou $\vec{w}' = \dfrac{1}{\gamma\gamma'}(\gamma' b - \gamma b' ; \gamma a' - \gamma' a)$.

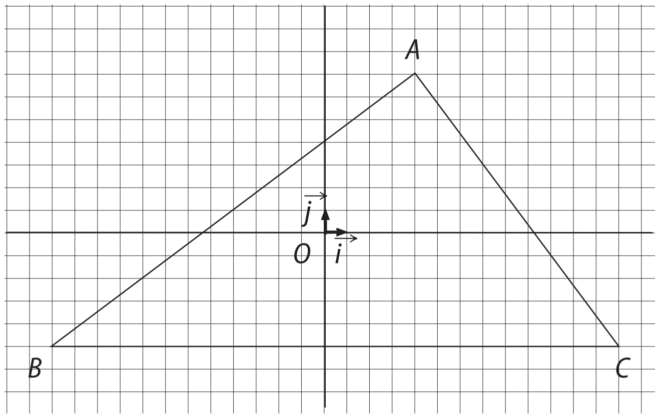
On a $\vec{w}' \cdot \vec{n}_1 = 0$ donc $\vec{w}'$ est un vecteur directeur de (Δ).

78 Bissectrices d'un triangle

a. $\overrightarrow{AB}(-16 ; -12)$; $\overrightarrow{AC}(9 ; -12)$; $\overrightarrow{BC}(25 ; 0)$.

M$(x ; y)$.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x - 4) - 4(y - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 12 - 4y + 28 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y + 16 = 0 \quad \text{équation cartésienne de } (AB) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M \in (AC) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -12(x - 4) - 9(y - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x - 4) + 3(y - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 16 + 3y - 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 3y - 37 = 0 \quad \text{équation cartésienne de } (AC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in (BC) &\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{BC}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0(x + 12) - 25(y + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow y + 5 = 0 \quad \text{équation cartésienne de } (BC). \end{aligned}$$

b. $d(M ; (AB)) = \dfrac{|3x - 4y + 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{1}{5}|3x - 4y + 16|$

$d(M ; (AC)) = \dfrac{|4x + 3y - 37|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{1}{5}|4x + 3y - 37|$

$d(M ; (AB)) = d(M ; (AC)) \Leftrightarrow |3x - 4y + 16| = |4x + 3y - 37|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 4x + 3y - 37 \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -4x - 3y + 37 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y - 53 = 0 \\ \text{ou } 7x - y + 16 - 37 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - y - 21 = 0 \ (1) \\ \text{ou } x + 7y - 53 = 0 \ (2) \end{cases}$

La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ a une équation de la forme $y = ax + 5$ avec $a > 0$.

Donc elle a pour équation :

$7x - y - 21 = 0 \Leftrightarrow y = 7x - 21 \qquad (d_1)$.

c. Bissectrices de $\widehat{B}$:

$d(M ; \text{(AB)}) = d(M ; (BC)) \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}|3x - 4y + 16| = \dfrac{|y + 5|}{1}$

$\Leftrightarrow |3x - 4y + 16| = 5|y + 5|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 5(y + 5) \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -5(y + 5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 5y + 25 \\ \text{ou } 3x - 4y + 16 = -5y - 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 9y - 9 = 0 \\ \text{ou } 3x + y + 41 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-3=0 \ (1) \\ \text{ou } 3x+y+41=0 \ (2) \end{cases}$

Bissectrice intérieure de $\widehat{B}$: d'équation $x-3y-3=0$ (d_2).

Bissectrice de $\widehat{C}$:

$d(M\,;(AC)) = d(M\,;(BC)) \Leftrightarrow \frac{1}{5}|4x+3y-37| = |y+5|$

$\Leftrightarrow |4x+3y-37| = 5|y+5|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y-37=5(y+5) \\ \text{ou } 4x+3y-37=-5(y+5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y-37=5y+25 \\ \text{ou } 4x+3y-37=-5y-25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y-62=0 \\ \text{ou } 4x+8y-12=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-31=0 \ (1) \\ \text{ou } x+2y-3=0 \ (2). \end{cases}$

D'après la figure, la bissectrice intérieure de $\widehat{C}$ a une équation de la forme $y = ax + b$ où $a < 0$.

Donc bissectrice d'équation $x+2y-3=0$ (d_3).

d. On cherche le point $I(x\,;y)$ tel que :

$I \in (d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=7x-21 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7x-21 \\ x-21x+63-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7x-21 \\ -20x+60=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ $\qquad I(3\,;0)$.

On vérifie $I \in (d_3)$: $3+2\times 0-3=0$.

Les trois bissectrices intérieures sont concourantes en $I(3\,;0)$.

e. $d(I,(AB)) = d(I,(AC)) = d(I,(BC))$

$d(I,(BC)) = |0+5| = 5$.

79 Cercle tangent à une droite donnée

a. A est le point de $(\mathscr{D})$ d'abscisse -1.

$x_A = -1+t$ donc $t=0$; alors $y_A=-1$ et $A(-1\,;-1)$.

$(A\Omega)$ est la perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par A. $(\mathscr{D})$ est dirigée par $\vec{u}(1\,;-3)$.

Soit $M(x\,;y)$.

$M \in (A\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow 1\,(x+1)-3(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x-3y+1-3=0$

$\Leftrightarrow x-3y-2=0$ équation cartésienne de $(A\Omega)$.

b. On sait que le triangle AOA' est rectangle en O car inscrit dans le cercle de diamètre $[AA']$.

$A'(x\,;y)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}=0 \Leftrightarrow -1\times x-1\times y=0$

$\Leftrightarrow -x-y=0$

$\Leftrightarrow x=-y$.

De plus $(AA')=(A\Omega)$ donc les coordonnées de A' vérifient l'équation de $(A\Omega)$.

$\begin{cases} x-3y-2=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3x-2=0 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=2 \\ x=-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=+\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $\qquad A'\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

c. On veut une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

Le centre Ω est le milieu de $[AA']$, le rayon R vaut $\frac{1}{2}AA'$.

$x_\Omega = (-1+\frac{1}{2})\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

$y_\Omega = (-1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

$AA' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

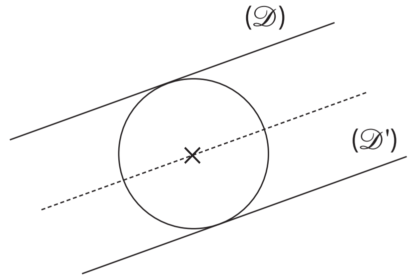
D'où $(\mathscr{C})$: $\begin{cases} x=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{10}}{4}\cos(t) \\ y=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{10}}{4}\sin(t) \end{cases}$, avec $t\in\mathbb{R}$.

représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

80 Cercles tangents à deux droites données

a. $\vec{n}(4\,;-3)$ est normal à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$, donc les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.

b.



Les centres des cercles tangents simultanément à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont situés sur une droite parallèle à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, située à égale distance de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

c. $M(x\,;y)$; $d(M,(\mathscr{D})) = d(M,(\mathscr{D}'))$.

$\Leftrightarrow \frac{|4x-3y+2|}{5} = \frac{|4x-3y-23|}{5}$

$\Leftrightarrow |4x-3y+2| = |4x-3y-23|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y+2=4x-3y-23 \\ \text{ou } 4x-3y+2=-4x+3y+23 \end{cases}$

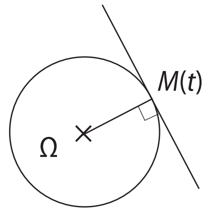
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -23 \text{ impossible} \\ \text{ou } 8x - 6y - 21 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8x - 6y - 21 = 0$ équation cartésienne de la droite (Δ).

81 Tangentes à un cercle

a. Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

$\begin{cases} x = 3 + 4\cos(t) \\ y = -2 + 4\sin(t). \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.



Soit M un point de $(\mathscr{C})$ de paramètre t, alors $\Omega M = 4\,(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j})$.

(ΩM) a pour vecteur directeur $\vec{v_t}(\cos(t), \sin(t))$.

La tangente à $(\mathscr{C})$ en M de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$ vérifie :

$\vec{v_t} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \cos(t) + \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -\cos(t)$.

On sait que $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $2\cos^2(t) = 1$ et $\cos^2(t) = \frac{1}{2}$.

On a $\begin{cases} \cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou } \cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Donc $t = -\frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{3\pi}{4}$.

Pour $t = -\frac{\pi}{4}$ $\quad A \begin{cases} x = 3 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \\ y = -2 + 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

Pour $t = \frac{3\pi}{4}$ $\quad A' \begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{2} \\ y = -2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$A(3 + 2\sqrt{2}\,; -2 - 2\sqrt{2})$ et $A'(3 - 2\sqrt{2}\,; -2 + 2\sqrt{2})$.

b. $\vec{n}(1\,; -1)$ est normal à $\vec{u}(1\,;1)$.

(d_1) tangente à $(\mathscr{C})$ en A :

$M(x\,;y) : M \in (d_1) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 3 - 2\sqrt{2}) - (y + 2 + 2\sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 3 - 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 5 - 4\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{\sqrt{2}} - 4 = 0$

équation normale de (d_1).

(d_2) tangente à $(\mathscr{C})$ en A' :

$M \in (d_2) \Leftrightarrow n \cdot A'M = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 3 + 2\sqrt{2}) - 1(y + 2 - 2\sqrt{2}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + 2\sqrt{2} - y - 2 + 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 5 + 4\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{5}{\sqrt{2}} + 4 = 0$

équation normale de (d_2).

c. B et B'. On cherche M de paramètre t de $(\mathscr{C})$ tel que $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{n}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \times 4\cos(t) - 1 \times 4\sin(t) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(t) = \sqrt{3}\cos(t)$.

De plus $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(t) + 3\cos^2(t) = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(t) = -\frac{1}{2}$.

Si $\cos(t) = \frac{1}{2}$ alors $\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 3 + 2 = 5$

$y = -2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$.

$B(5\,; -2 + 2\sqrt{3})$.

Si $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ alors $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = 3 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 2 = 1$

$y = -2 + 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2\sqrt{3}$.

$B'(1\,; -2 - 2\sqrt{3})$.

d. (d'_1) tangente à $(\mathscr{C})$ en B.

$M \in (d_1) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 5) + \sqrt{3}(y + 2 - 2\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} - 11 = 0$.

(d'_2) tangente à $(\mathscr{C})$ en B.

$M \in (d_2) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{B'M} = 0$

$\Leftrightarrow 1(x - 1) + \sqrt{3}(y + 2 + 2\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x + \sqrt{3}y + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

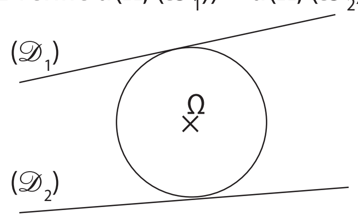
82 Cercle tangent à deux droites

a. $(\mathscr{D}_1)$ a pour vecteur normal $\vec{n_1}(-1\,;5)$

$(\mathscr{D}_2)$ a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(5\,;1)$

$\vec{n_1} \cdot \vec{u_2} = -1 \times 5 + 5 \times 1 = 0$, donc $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont parallèles.

b. $\Omega(x\,;0)$; Ω vérifie $d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega, (\mathscr{D}_2))$.



Soit $d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{|-x + 5 \times 0 - 4|}{\sqrt{26}} = \dfrac{|x+4|}{\sqrt{26}}$.

$(\mathscr{D}_2)$ passe par $A(8\,;-8)$; $M(x\,;y)$;

$M \in (\mathscr{D}_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0$

$\Leftrightarrow -1(x-8) + 5(y+8) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 8 + 5y + 40 = 0$

$\Leftrightarrow -x + 5y + 48 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{D}_2)$.

Donc $d(\Omega, (\mathscr{D}_2)) = \dfrac{|x-48|}{\sqrt{26}}$

$d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega, (\mathscr{D}_2)) \Leftrightarrow |x+4| = |x-48|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x - 48 \text{ impossible} \\ \text{ou } x + 4 = -x + 48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x = 44 \Leftrightarrow x = 22.$

Donc $\Omega(22\,;0)$.

$d(\Omega, (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{|22+4|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}.$

$R = d(\Omega, (\mathscr{D}_1))$.

Donc représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$:

$\begin{cases} x = 22 + \sqrt{26}\cos(t) \\ y = \sqrt{26}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Même étude mais avec $\Omega'(2\,;y)$.

$d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|-2 + 5y - 4| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 - 5y|$

$d(\Omega', (\mathscr{D}_2)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|-2 + 5y + 48| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|46 + 5y|$

donc $d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = d(\Omega', (\mathscr{D}_2))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 5y = 46 + 5y \\ \text{ou } 6 - 5y = -46 - 5y \text{ impossible} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 10y = -40 \quad \Leftrightarrow y = -4.$

Alors $\Omega'(2\,;-4)$.

$R' = d(\Omega', (\mathscr{D}_1)) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 - 5 \times (-4)| = \dfrac{1}{\sqrt{26}}|6 + 20|$

$= \sqrt{26}.$

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4 + y^2 + 8y + 16 = 26$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$.

83 Cercles tangents

a. On cherche le centre Ω de $(\mathscr{C})$.

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 27 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 27 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$

donc $\Omega(-1\,;-2)$ et $R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

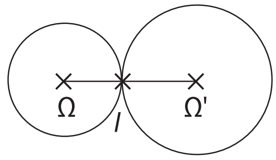
$(\mathscr{C}')$ a pour centre $\Omega'(5\,;4)$ et rayon $R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\Omega\Omega' = \sqrt{(5+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$R + R' = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \Omega\Omega'$.

Il y a un seul point d'intersection, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont donc tangents.

b. (Δ) tangente commune à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.



$\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est un vecteur normal à (Δ).

I point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, vérifie :

$\overrightarrow{\Omega I} = \dfrac{R}{\|\Omega\Omega'\|}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$; $\overrightarrow{\Omega\Omega'}(6\,;6)$, donc :

$x_I = x_\Omega + \dfrac{R}{6\sqrt{2}} \times 6 = -1 + \dfrac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \times 6 = -1 + 4 = 3$

$y_I = y\Omega + \dfrac{R}{6\sqrt{2}} \times 6 = -2 + \dfrac{4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \times 6 = 2.$

Ainsi, $I(3\,;2)$.

$M(x\,;y)$;

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{\Omega\Omega'} = 0$

$\Leftrightarrow 6(x-3) + 6(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 + y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 5 = 0$ Équation de (Δ).

c. $A(10\,;y)$;

$A \in (\Delta)$ donc $10 + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5$. Donc $A(10\,;-5)$.

Équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$:

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y = -33.$

$J(x\,;y)$ vérifie $\Omega'J = \sqrt{8}$ et $JA = IA$.

Or $IA^2 = (10-3)^2 + (-5-2)^2 = 7^2 + 7^2 = 98.$

On a $JA^2 = (x-10)^2 + (y+5)^2 = 98$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x + 10y + 125 = 98$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27.$

On résout $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y = -33 \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 18y = -6 & (L_1 - L_2 \to L_1) \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 9y = -3 \\ x^2 + y^2 - 20x + 10y = -27 \end{cases}$

$x = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y$

$\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y\right)^2 + y^2 - 20\left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{5}y\right) + 10y = -27$

$$\frac{9}{25}-\frac{54}{25}y+\frac{81}{25}y^2+y^2+12-\underbrace{36y+10y}_{-26y}=-27$$

$$\frac{9}{25}-\frac{54}{25}y+\frac{81}{25}y^2+y^2-26y+39=0$$

$984-704y+106\,y^2=0$

$492-352y+53\,y^2=0$

On sait que $y=2$ est solution.

L'autre solution vérifie $2\times y=\frac{492}{53}\Rightarrow y=\frac{246}{53}$.

Puis $x=-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}\times\frac{246}{53}=\frac{411}{53}$.

Donc $J\left(\frac{411}{53};\frac{246}{53}\right)$.

Équation de la deuxième tangente soit la droite (AJ) :

$\overrightarrow{AJ}\left(\frac{411}{53}-10;\frac{246}{53}+5\right)$

$\text{dét}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ})=0$

$\Leftrightarrow (x-10)\left(\frac{246}{53}+5\right)-(y+5)\left(\frac{411}{53}-10\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \frac{511}{53}x-\frac{4\,515}{53}+\frac{119}{53}y=0$

$\Leftrightarrow 511x+119y-4515=0$

$\Leftrightarrow 73x+17y-645=0.$

84 Calcul de distances non accessibles

a. $M_1(0\,;16{,}7)$; $M_2(40\,;30)$; $N_1(0\,;-5{,}6)$; $N_2(40\,;-10)$.

• Équation cartésienne de $(AM_1)=(M_1M_2)$

$\overrightarrow{M_1M_2}(40\,;13{,}3)$; $M(x\,;y)$

$M\in(M_1M_2)\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2})=0$

$\Leftrightarrow 13{,}3(x-0)-(y-16{,}7)\times 40=0$

$\Leftrightarrow 13{,}3x-40y+668=0.$

• Équation cartésienne de $(AN_2)=(N_1N_2)$

$\overrightarrow{N_1N_2}(40\,;-4{,}4)$

$M\in(N_1M_2)\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{N_1M},\overrightarrow{N_1N_2})=0$

$\Leftrightarrow x\times(-4{,}4)-(y+5{,}6)\times 40=0$

$\Leftrightarrow -4{,}4x-40y-224=0$

$\Leftrightarrow 4{,}4x+40y+224=0.$

b. $A\in(M_1M_2)\cap(N_1N_2)$

$A(x\,;y)$ vérifie $\begin{cases}13{,}3x-40y+668=0\\4{,}4x+40y+224=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}17{,}7x+892=0 & L1+L2\to L1\\4{,}4x+40y+224=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-892}{17{,}7}\approx-50{,}4\\y=\frac{1}{40}\left[-224-4{,}4\times\left(\frac{-892}{17{,}7}\right)\right]\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\approx-50{,}4\\y\approx-0{,}06.\end{cases}$

Normalement on devrait trouver $y=0$ pour avoir l'alignement de A, O et B.

Conclusion : $A(-50{,}4\,;0)$; la largeur de la rivière est d'environ 50 m.

85 Tangentes à une parabole

a. $y=f(x)=\frac{x^2}{2}$ et $f'(x)=\frac{2x}{2}=x.$

Équation de (T_a) : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=a(x-a)+\frac{a^2}{2}=ax-a^2+\frac{a^2}{2}=ax-\frac{a^2}{2}$

ou encore $ax-y-\frac{a^2}{2}=0.$

Équation de (T_b) : $bx-y-\frac{b^2}{2}=0$

$(T_a)\perp(T_b)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}(a\,;-1)\perp\overrightarrow{n_2}(b\,;-1)\Leftrightarrow ab+1=0$

$\Leftrightarrow b=\frac{-1}{a}$ (on a imposé $a\neq 0$).

Donc b est unique.

b. Le point $I_a(x\,;y)$ est tel que :

$$I_a\in(T_a)\cap\mathrm{T}(_b)\Leftrightarrow\begin{cases}ax-y-\frac{a^2}{2}=0\\bx-y-\frac{b^2}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ax-y-\frac{a^2}{2}=0\\(a-b)x-\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax-y-\frac{a^2}{2}=0\\(a-b)x-\frac{a^2-b^2}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ax-y-\frac{a^2}{2}=0\\(a-b)x-\frac{(a-b)(a+b)}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax-y-\frac{a^2}{2}=0\\x=\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

c. On reprend le résultat précédent.

$x=\frac{a+b}{2}$ et $y=ax-\frac{a^2}{2}=a\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a^2}{2}=\frac{ab}{2}.$

Ainsi, $I_a\left(\frac{a+b}{2};\frac{ab}{2}\right)$.

d. Puisque $b=-\frac{1}{a}$, $I_a\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2};\frac{a\times\left(-\frac{1}{a}\right)}{2}\right)$.

Donc $I_a\left(\frac{a^2-1}{2a};-\frac{1}{2}\right)$.

Donc lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$, les points I_a décrivent la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$.

Problèmes

86 Collision de particules

a. $M \in (d_1) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM_1}\,;\vec{v_1}) = 0$
$\Leftrightarrow 1 \times (x-3) - 1 \times (y-1) = 0$
$\Leftrightarrow x - y - 3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x - y - 2 = 0$ équation de (d_1).

b. $M \in (d_2) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{BM_2}\,;\vec{v_2}) = 0$
$\Leftrightarrow -1(x+1) - 2(y-5) = 0$
$\Leftrightarrow -x - 1 - 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$ équation de (d_2).

c. $(\Gamma_1) : \begin{cases} x - 3 = t \times 1 \\ y - 1 = t \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$ avec $t \geqslant 0$.

$(\Gamma_2) : \begin{cases} x + 1 = t \times 2 \\ y - 6 = t \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - t. \end{cases}$ avec $t \geqslant 0$

d. Soit $M\,(x\,;y)$ point de paramètre t de (Γ_1).
Alors $x = 3 + t$ et $y = 1 + t$.
$x - y - 2 = (3 + t) - (1 + t) - 2 = 2 - 2 = 0$
donc $M \in (d_1)$.
Soit $M\,(x\,;y)$ de paramètre t de (Γ_2).
Alors $x = -1 + 2t$ et $y = 6 - t$
$(-1 + 2t) + 2(6 - t) - 11 = -1 + 2t + 12 - 2t - 11 = 0$
donc $M \in (d_2)$.
On a bien $(\Gamma_1) \subset (d_1)$ et $(\Gamma_2) \subset (d_2)$.

e. $I(x\,;y) \in (d_1) \cap (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x + 2x - 4 - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 15 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 2 = 3 \end{cases}$

Donc $I(5\,;3)$.

f. $M_1(t_1)\ (3 + t_1\,;1 + t_1)$

$M_1(t_1) = I \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t_1 = 5 \\ 1 + t_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 = 2 \end{cases}$

$M_1(2) = I$
$M_2(t_2)\quad(-1 + 2t_2\,;6 - t_2)$

$\begin{cases} -1 + 2t_2 = 5 \\ 6 - t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_2 = +6 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = 3.$

α est en I à l'instant $t_1 = 2$, et ß est en I à l'instant $t_2 = 3$.
Donc les particules α et ß ne peuvent pas être au même endroit au même instant.

g. Nouvelle représentation paramétrique de (d_2) :

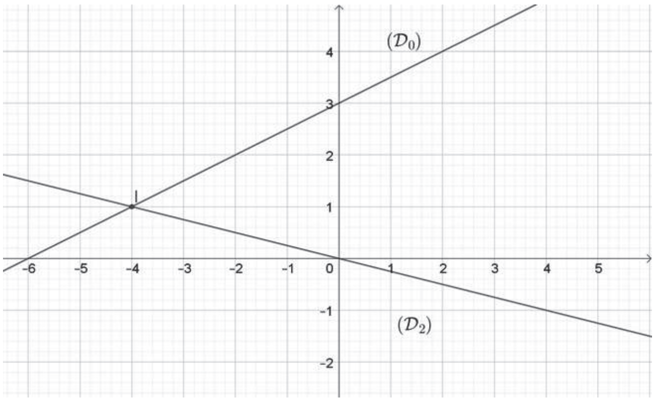
$\begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}^+$.

Il faut, pour $t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2t = 5 \\ y_0 - t = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 4 = 5 \\ y_0 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 4 = 1 \\ y_0 = 3 + 2 = 5 \end{cases}$

Donc il faut $B(1\,;5)$.

87 Famille de droites



1. $(\mathscr{D}_0) : -x + 2y - 6 = 0\,;(\mathscr{D}_2)\ x + 4y = 0\,;M(x\,;y)$.

$M \in (\mathscr{D}_0) \cap (\mathscr{D}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 6 = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 6 = 0 \\ x = -4y \end{cases} \quad L_1 + L_2 \to L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

Donc $I(-4\,;1)$ est le point d'intersection de $(\mathscr{D}_0)$ et de $(\mathscr{D}_2)$.

2. F doit être point d'intersection de toutes les droites donc en particulier de $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'où $F = I$.
Réciproquement soit $F(-4\,;1)$ vérifions que $F \in (\mathscr{D}_m)$.
$(m - 1) \times (-4) + (2 + m) \times 1 + 3m - 6$
$= -4m + 4 + 2 + m + 3m - 6$
$= -4m + 6 + 4m - 6$
$= 0.$
Donc $F(-4\,;1)$ appartient à toutes les droites $(\mathscr{D}_m)$.

3. • $A(-5\,;0)$
$A \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m - 1)(-5) + (2 + m)0 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -5m + 5 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -2m - 1 = 0$
$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$
$A \in (\mathscr{D}_{-\frac{1}{2}})$.
• $B(1\,;4)$
$B \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m - 1) \times 1 + (2 + m) \times 4 + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow m - 1 + 8 + 4m + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 8m + 1 = 0$
$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{8}$
$B \in (\mathscr{D}_{-\frac{1}{8}})$.

• $C(2\,;-7)$

$C \in (\mathscr{D}_m) \Leftrightarrow (m-1)\times 2 + (2+m)(-7) + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 2m - 2 - 14 - 7m + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow -2m - 22 = 0$
$\Leftrightarrow m = -11$

$C \in (\mathscr{D}_{-11})$.

4. a. $M(x_M\,;y_M) \in (\mathscr{D}_m)$
$\Leftrightarrow (m-1)x_M + (2+m)y_M + 3m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow m(x_M + y_M + 3) - x_M + 2y_M - 6 = 0$
$\Leftrightarrow m(x_M + y_M + 3) = x_M - 2y_M + 6.$

Si $x_M + y_M + 3 \neq 0$ on a $m = \dfrac{x_M - 2y_M + 6}{x_M + y_M + 3}$.

b. Si $x_M + y_M + 3 = 0$ alors il n'existe pas de valeur de m telle que $M \in (\mathscr{D}_m)$. Ces points M sont alors situés sur la droite (Δ) d'équation $x + y + 3 = 0$.

5. a. Équation de $(\mathscr{D}_m)$:
$(m-1)x + (2+m)y + 3m - 6 = 0$.
Soit $\vec{u}_m(2+m\,;1-m)$; (peut-on avoir $\vec{u}_m = \vec{0}$?
$\begin{cases} 2+m=0 \\ 1-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$ impossible),
donc $\vec{u}_m \neq \vec{0}$ et $(\mathscr{D}_m)$ a pour vecteur directeur :
$\vec{u}_m(2+m\,;1-m)$.

b. • $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, $\text{dét}(\vec{u}_m, \vec{i}) = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
Seule $(\mathscr{D}_1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

• $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si $\text{dét}(\vec{u}_m, \vec{j}) = 0 \Leftrightarrow 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.
Seule $(\mathscr{D}_{-2})$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

• $(\mathscr{D}_m)$ parallèle à (d) d'équation $y = x + 1$.
(d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1\,;1)$
$\det(\vec{u}_m, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (2+m) - (1-m) = 0$
$\Leftrightarrow 2 + m - 1 + m = 0$
$\Leftrightarrow 2m = -1$
$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Seule $(\mathscr{D}_{-\frac{1}{2}})$ est parallèle à (d).

88 Famille de cercles

1. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

donc $\Omega(-2\,;4)$ et $R = 5$.

$x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35 = 0$
$\Leftrightarrow (x-8)^2 - 64 + (y+1)^2 - 1 - 35 = 0$
$\Leftrightarrow (x-8)^2 + (y+1)^2 = 100$

donc $\Omega'(8\,;-1)$ et $R' = 10$.

2. $M(x\,;y)$

$M \in (\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 10y + 30 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \end{cases}$ $(L_1 - L_2 \to L_1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + (2x+3)^2 + 4x - 8(2x+3) - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + 4x - 16x - 24 - 5 = 0 \end{cases}$

$5x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

$I(2\,;7)$ et $J(-2\,;-1)$.

3. a. $k \in \mathbb{R}$,
$(\Omega M^2 - R^2) + k(\Omega' M^2 - (R')^2) = 0$.
I vérifie $\Omega I = R$ et $\Omega' I = R'$ d'où $0 + k \times 0 = 0$.
J vérifie $\Omega J = R$ et $\Omega' J = R'$ d'où $0 + k \times 0 = 0$.
Pour tout k réel, $I \in (E_k)$ et $J \in (E_k)$.

b. $M(x\,;y)$; $M \in (E_k) \Leftrightarrow$
$((x+2)^2 + (y-4)^2 - 25) + k((x-8)^2 + (y+1)^2 - 100) = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5) + k(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0$.

c. Si $k = -1$, on a :
$x^2 + y^2 + 4x - 8x - 5 - x^2 - y^2 + 16x - 2y + 35 = 0$
$\Leftrightarrow 20x - 10y + 30 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$
Équation d'une droite passant par I et J donc c'est (IJ)
$(E_k) = (IJ)$.

d. Si $k \neq -1$
$M \in (E_k) \Leftrightarrow (1+k)(x^2 + y^2) + (4 - 16k)x + (-8 + 2k)y - 5 - 35k = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{4(1-4k)}{1+k}x + \dfrac{2(k-4)}{1+k}y - \dfrac{-5(1+7k)}{1+k} = 0$

$\alpha = \dfrac{4(1-4k)}{1+k}$; $ß = \dfrac{2(k-4)}{1+k}$; $\gamma = \dfrac{-5(1+7k)}{1+k}$

$x^2 + y^2 + \alpha x + ßy + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} + \left(y + \dfrac{ß}{2}\right)^2 - \dfrac{ß^2}{4} + \gamma = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{ß}{2}\right)^2 - \dfrac{\alpha^2}{4} - \dfrac{ß^2}{4} + \gamma = 0$

Ensemble non vide car contenant I et J donc
$\dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{ß^2}{4} - \gamma > 0$.

C'est un cercle, dont on connait deux points : I et J.

4. a. $\Omega_k\left(-\frac{\alpha}{2} ; -\frac{ß}{2}\right)$

$\alpha = \frac{4(1-4k)}{1+k}$ et $ß = \frac{2(k-4)}{1+k}$

$-\frac{\alpha}{2} = \frac{2(4k-1)}{1+k}$ et $-\frac{ß}{2} = \frac{4-k}{1+k}$

$\Omega_k\left(\frac{2(4k-1)}{1+k} ; \frac{4-k}{1+k}\right)$.

b. (Δ) passe par $A(8 ; -1)$ et est dirigée par $\vec{u}(-10 ; 5)$ ou $\vec{v}(-2 ; 1)$.

$\det(\overrightarrow{A\Omega_k}, \vec{v}) = \left(\frac{2(4k-1)}{1+k} - 8\right) \times 1 + \left(\frac{2(4k-1)}{1+k} + 1\right)$

$= \frac{8k-2}{1+k} - 8 + \frac{8k-2}{1+k} + 2$

$= \frac{8k-2+8-2k-6(1+k)}{1+k} = \frac{6k+6-6-6k}{1+k} = 0.$

Donc $\Omega_k \in (\Delta)$.

c. Soit $\begin{cases} x = 8 - 10t \\ y = -1 + 5t \end{cases}$ (avec $t \neq 0$ car $M \neq A$)

$M(x ; y)$ est un point de (Δ) distinct de A.

On cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \frac{8k-2}{1+k} \\ y = \frac{4-k}{1+k} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (8-10t)(1+k) = 8k-2 \\ (-1+5t)(1+k) = 4-k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 10t + (8-10t-8)k = -2 \\ -1 + 5t + (-1+5t+1)k = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -10tk = -2 - 8 + 10t \\ 5tk = 4 + 1 - 5t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-10+10t}{-10t} = \frac{-t+1}{t} = -1 + \frac{1}{t} \\ k = \frac{5-5t}{5t} = \frac{1}{t} - 1. \end{cases}$

Tout point de (Δ) distinct de A est un centre Ω_k avec $k = \frac{1}{t} - 1$ où t est le paramètre identifiant le point de (Δ) dans la représentation paramétrique de (Δ).

d. L'ensemble des Ω_k pour $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est (Δ) privée de A.

5. a. (Γ) est le cercle passant par I et J de centre ω et de rayon r.
Donc $\omega I = \omega J = r$.
Ainsi ω appartient à la médiatrice de $[IJ]$
Or $\Omega I = \Omega J = R$ car I et J appartiennent à $(\mathscr{C})$.
De même, $\Omega' I = \Omega' J = R'$.
Ω et Ω′ sont aussi sur la médiatrice de $[IJ]$
donc la médiatrice de $[IJ]$ est la droite (ΩΩ′)
et $\omega \in (\Omega\Omega')$.

b. Si $\omega = \Omega'$, alors (Γ) est le cercle passant par I et J et de centre Ω′ donc $(\Gamma) = (\mathscr{C}')$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$ convient.

c. Si $\omega \neq \Omega'$, $\Omega' = A(8 ; -1)$.
Comme $\omega \in (\Delta)$ et $\omega \neq A$, alors, d'après le **4. c.**, ω est un point Ω_k avec $k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Alors (E_k) est un cercle de centre ω passant par I et J donc $(E_k) = (\Gamma)$ et l'équation de (E_k) (lorsque $k \neq -1$) est ;
$1(x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5) + k(x^2 + y^2 - 16x + 2y - 35) = 0.$

4 Transformations du plan

Manuel pages 53 à 72

Activités d'introduction

1 Photographie

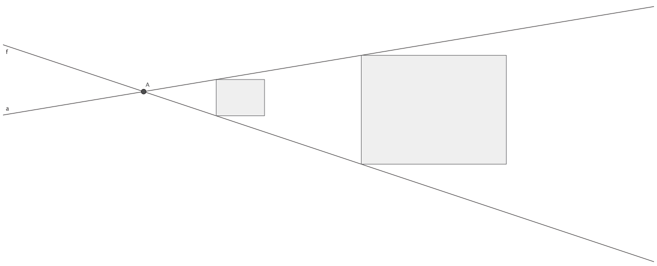
1.

Hauteur en cm	2, 4	10	15	20
Largeur en cm	3, 6	15	22, 5	30
rapport de l'homothétie		4, 17	6, 25	8, 33

2. a. $\frac{10}{3} \neq \frac{15}{4}$.

b. Le format papier utilisé est du 10×13 ou du $11,5 \times 15$. En effet, $\frac{10}{3} \approx 3,33$ et $\frac{13}{4} \approx 3,25$ qui sont des nombres assez proches, ainsi que pour l'autre format.

3.



2 Pavage

- Le pavé 1 a pour image le pavé 2 par une translation ;
- le pavé 1 a pour image le pavé 3 par une rotation;
- le pavé 1 a pour image le pavé 5 par une translation ;
- le pavé 2 a pour image le pavé 5 par une translation ;
- le pavé 3 a pour image le pavé 2 par une rotation.

3 Aire d'un quadrilatère intersection de deux carrés

1. f. On conjecture que l'aire de la partie hachurée est égale au quart de l'aire de *ABCD*.

2. a. r désigne la rotation de centre E et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

$r(C) = B$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et $EC = EB$. De même $r(B) = A$.

Ainsi $r([CB]) = [BA]$.

$(EJ) \perp (EI)$. De plus, $J \in [CB]$ d'où $r(J) \in [BA]$.

Ainsi $r(J) = I$.

b. $r(ECJ) = EBI$. Une rotation est une isométrie qui conserve donc les longueurs. Ainsi les triangles ECJ et EBI sont isométriques.

c. Aire $EIBJ$ = Aire EBI + Aire EBJ

= Aire ECJ + Aire EBJ

= Aire $EBC = \frac{1}{4}$ Aire $ABCD$.

d. Quelle que soit la position du point F, l'aire du quadrilatère $EIBJ$ est égale au quart de l'aire du carré $ABCD$.

4 Des triangles et des cercles

1. a. h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

$2AE = AB$ et $2AF = AC$ donc $h(E) = B$ et $h(F) = C$. De plus, $h(A) = A$.

On en déduit que $h(AEF) = ABC$.

b. Les triangles ont leurs angles égaux deux à deux .

2. a. $(EF)//(BC)$ donc $\frac{EF}{EA} = \frac{BC}{AB}$.

Or $EA = EB$, d'où $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{EB} = \frac{r_2}{r_1}$.

De même $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{r_2}{r_3}$.

c. ABC rectangle en A donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow BC^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}BC\right)^2 + \left(\frac{r_3}{r_2}BC\right)^2 \Leftrightarrow r_2^{\,2} = r_1^{\,2} + r_3^{\,2}$.

Savoir-faire

3 Le centre de l'homothétie est le point d'intersection des médianes (centre de gravité) du triangle ABC.

Le rapport est $-\frac{1}{2}$.

4 h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

$h(B') = C$ ainsi l'image de (BB') est la droite parallèle passant par C.

De même, l'image de (CC') est la droite parallèle passant par B.

L'image de leur point d'intersection G est donc D.
A, G et D sont donc alignés .
De plus $G \in (AA')$, ainsi A, A' et D sont alignés .

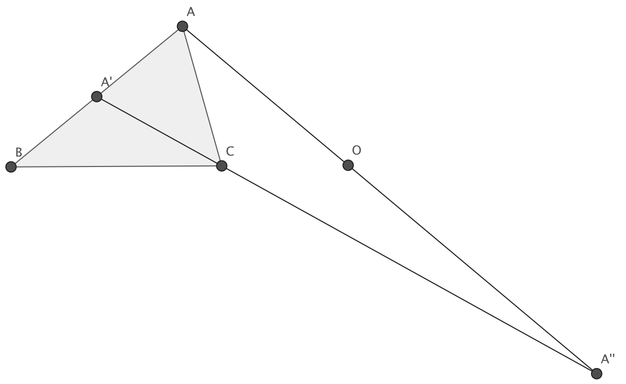
7 h est l'homothétie de centre I milieu de $[AB]$ et de rapport $\frac{1}{3}$. $h(M) = G$.

L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle. Le lieu cherché est donc le cercle de centre $h(O) = O'$ et de rayon égal au tiers du rayon de $(\mathscr{C})$.

L'agalité $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ donne la position de O'.

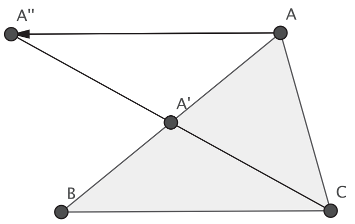
8 **a.** Le rapport de h est égal à $\frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2}$.

b. Les points A, A'' et O sont alignés et $O \in (BC)$. On en déduit l'emplacement du point O.



9 **a.** Le rapport de h est égal à $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. donc h est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

b.

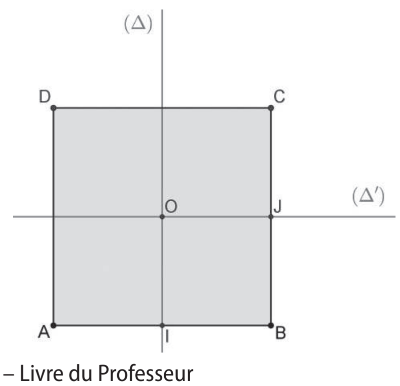


12 Le lieu du point B est la droite (Δ') symétrique de la droite (Δ) par rapport à la droite (D).

13 **a.** $(AB) // (CD)$ donc $s_{(AB)} \circ s_{(CD)} = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} = 2\overrightarrow{AH}$ (H projeté orthogonal de A sur (CD)) ;

b. (AB) et (AC) sont sécantes en A donc $s_{(AB)} \circ s_{(AC)} = r$ (r rotation de centre A et d'angle $2\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$;

14 **1. a.**



Par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$:
- les points A, B, C, D et O ont pour images respectives C, D, A, B et O ;
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont pour images respectives les segments $[CD]$ et $[AB]$;
- le carré $ABCD$ est sa propre image.

b. $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$ est la symétrie de centre O.

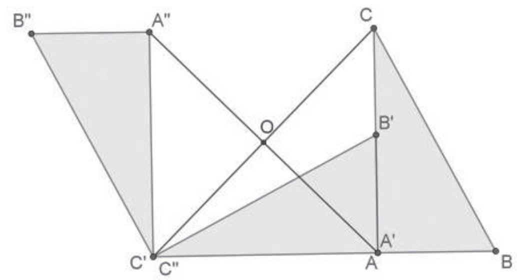
2. a. par $s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$:
- les points A, B, C, D et O ont pour images respectives B, B', C', C et O' où B', C' et O' sont les symétriques respectifs de A, D et O par rapport à la droite (BC). ;
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont pour images respectives les segments $[BB']$ et $[CC']$;
- le carré $ABCD$ a pour image le carré $BB'C'C$.

b. $s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

16 **a.** Les six triangles sont équilatéraux et ils ont deux côtés qui sont des rayons du cercle donc de même longueur. Ainsi ils sont isométriques.

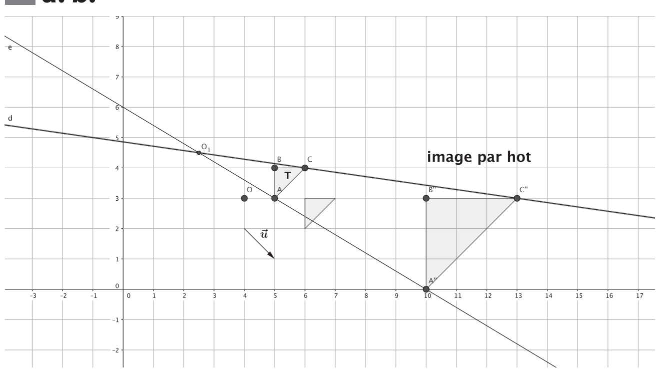
b. • La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme OAB en OBC ;
- la symétrie de centre O transforme OAB en OED ;
- la symétrie d'axe la médiatrice de [AF] transforme OAB en OEF.

17 **a. b. c.**



d. Symétrie de centre O intersection des segments $[AA'']$ et $[CC'']$.

20 **a. b.**



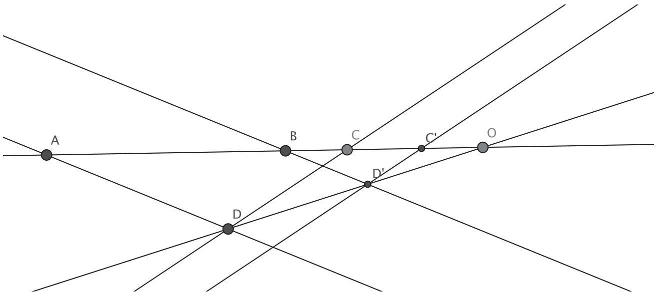
21 **a.** Les angles des triangles étant tous égaux, ils sont semblables.

b. $s = h \circ r$ avec h homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et r rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$.

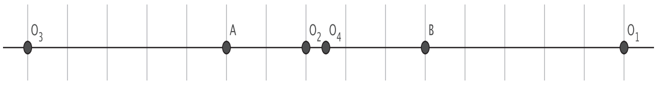
Exercices d'entraînement

Homothéties

22



23



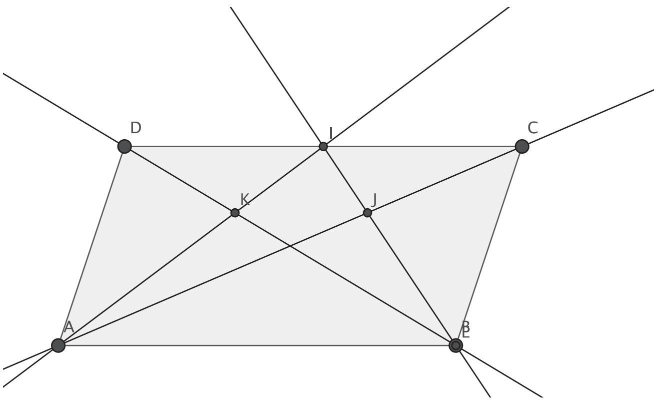
24 **a.** Homothétie ; **b.** translation ; **c.** homothétie ; **d.** homothétie.

25 • $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$ donc C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -3 ;

• $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{3}$;

• $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BA}$ donc C est l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 4.

26 **a.**



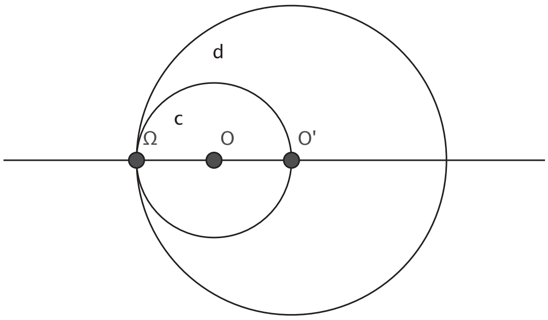
b. J est le centre de gravité car il est à l'intersection des médianes (BI) et (CJ).

c. C'est l'homothétie de centre I et de rapport 3.

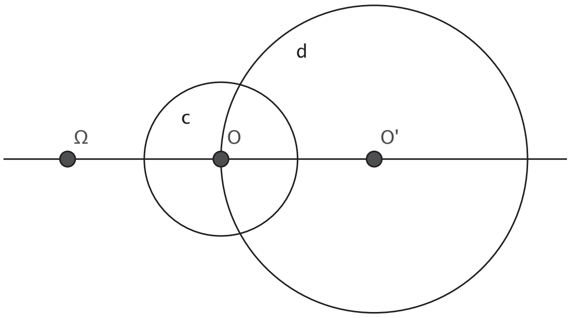
27 Le lieu est le cercle de centre le milieu de [AB] et de rayon égal à $\frac{1}{3}AB$.

28 Dans les trois cas, le point Ω est le centre de l'homothétie cherchée.

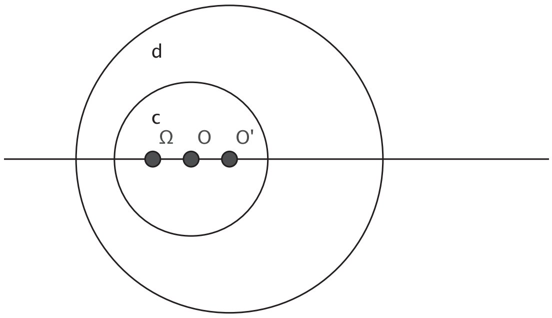
a.



b.



c.



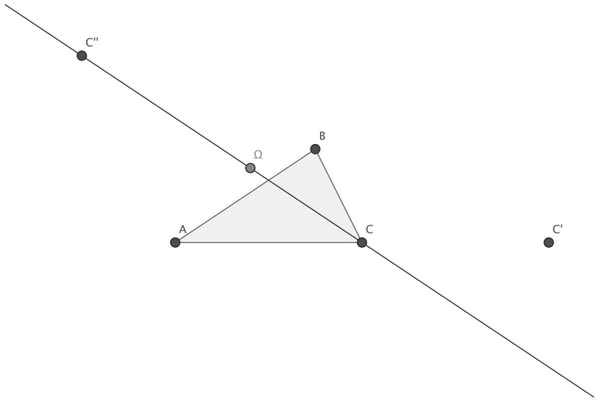
29 On a $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{GF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

Ainsi, il existe un homothétie, de rapport $\frac{3}{2}$, qui transforme [AD] en [FE], [AB] en [FG] et [AC] en [FA], et donc qui transforme A en F, B en G et C en E.

Donc les droites (AF), (BG) et (DE) sont concourantes en le centre de cette homothétie.

30 **a.** La composée de deux homothéties de centres différents est une homothétie si le produit des rapport s est différent de 1. Ainsi $h' \circ h$ est une homothétie de rapport −2.

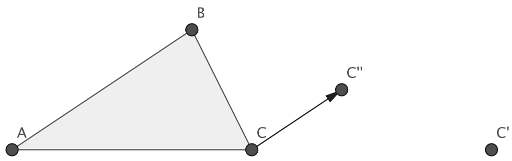
b.



c. Le centre est sur la droite (CC''). Le rapport étant égal à –2, on a $\overrightarrow{\Omega C''} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC''}$.

31 **a.** Le produit des rapport s est égal à 1.

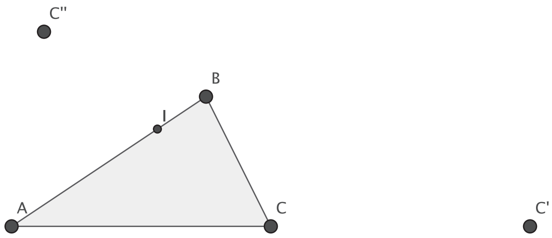
b.



c. Le vecteur de la translation est le vecteur $\overrightarrow{CC''}$.

32 **a.** Le produit des rapport s est égal à –1, donc il s'agit d'un symétrie centrale.

b.



c. $h' \circ h = s_I$ donc $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IA}$. De plus, $\overrightarrow{BA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Ainsi $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

33 h désigne l'homothétie de centre A qui transforme G en D. $(GE)//(DB)$ donc $h((GE)) = (DB)$ et $h(E) = B$.

L'image d'un parallélogramme par h est un parallélogramme, donc $h(AEFG) = ABCD$.
Ainsi $h(F) = C$. donc les points A, F et C sont alignés .

34 h est l'homothétie de centre le centre du cercle et de rapport $\dfrac{1\,000}{400} = \dfrac{5}{2}$.

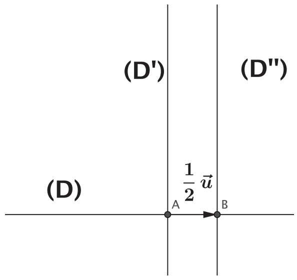
Isométries

35 **a.** $t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}}$; **b.** Identité ; **c.** rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; **d.** translation .

36 **a.** Déplacement ; **b.** antidéplacement ; **c.** antidéplacement ; **d.** déplacement .

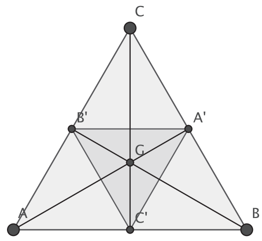
37 **a.** ODC ; **b.** OBC ; **c.** ADB, BCD et ADC.

38 $t_{\vec{u}} \circ s_{(D')}$ est un antidéplacement donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite (D'').



39 **a.** $f = s_D$; **b.** ; $g = s_B$; **c.** $h = t_{2\overrightarrow{BD}}$.

40 **1.**



2. **a.** $s_{(BB')}$; **b.** $s_{(CC')}$;

c. rotation de centre G et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$;

d. rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

41 r désigne la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

• $r(B) = C$ et $r(B') = C'$. Ainsi $r((BB')) = (CC')$

• Les droites (BB') et (CC') sont donc perpendiculaires. De plus, r étant une isométrie, $BB' = CC'$.

42 **a.** $AA' = BB'$; $AB' = AB + BB' = BC + CC' = BC'$.

$\text{mes}\widehat{A'AB'} = \pi - \text{mes}\widehat{B'AC'} = \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3}$.

$\text{mes}\widehat{B'BC'} = \dfrac{2\pi}{3}$. Ainsi $\widehat{A'AB'} = \widehat{B'BC'}$.

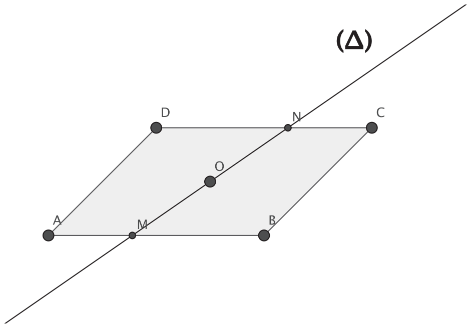
Les triangles $A'AB'$ et $B'BC''$ ont un angle de même mesure car les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles, donc les angles alterne-interne $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ sont de même mesure. Les triangles $A'AB'$ et $B'BC'$ sont isométriques.

On procéderait de même avec le triangle $A'CC'$.

b. On en déduit que $A'B' = A'C' = B'C'$. Ainsi le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

43 Les triangles ABF' et CDE ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques. Ainsi $AF = DE$.

44 a.



b. O est le milieu de $[AC]$; donc $OA = OC$.
$\widehat{OAM} = \widehat{OCN}$ car ils sont alterne-interne.
$\widehat{AOM} = \widehat{NOC}$ car ils sont opposés par le sommet.
Les triangles OMA et ONC ont un côté égal compris entre deux angles de même mesure. Ils sont isométriques. Ainsi $AM = NC$.

45 a. $CB = AB$ et $BE = BG$.

$\text{mes}(\widehat{CBE}) = \text{mes}(\widehat{CBA}) + \text{mes}(\widehat{ABE}) = \dfrac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{ABE})$

et

$\text{mes}(\widehat{ABG}) = \text{mes}(\widehat{ABE}) + \text{mes}(\widehat{EBG}) = \text{mes}(\widehat{ABE}) + \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $\widehat{CBE} = \widehat{ABG}$.

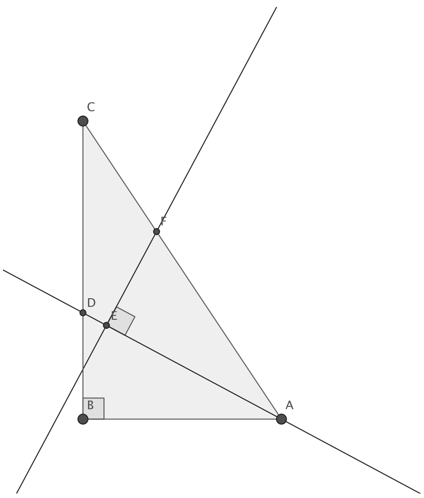
Les triangles ABG et CBE ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

b. r désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

$r(C) = A$ et $r(E) = G$. Ainsi $r((CE)) = (AG)$.

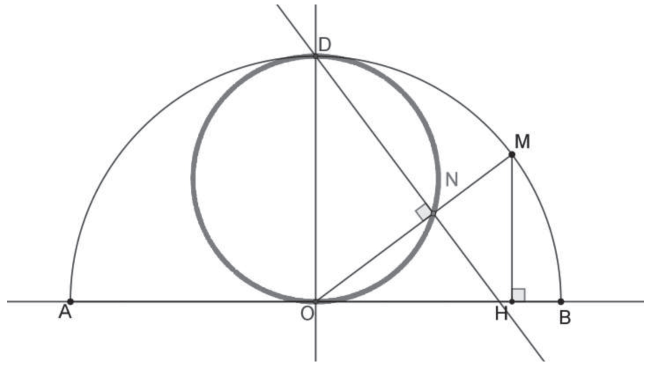
Les droites (CE) et (AG) sont donc perpendiculaires.

46 a.



b. Les triangles ABD et AEF ont un côté égal compris entre deux angles de même mesure **.** Ils sont isométriques.

47 1. a. et **b.**



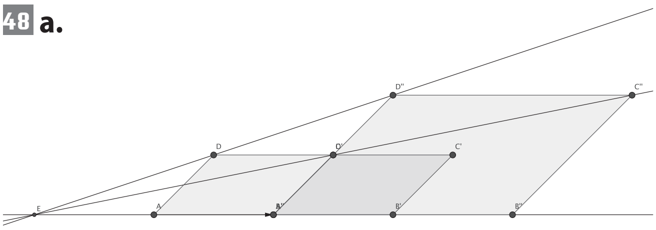
c. On conjecture que le lieu des points N est le cercle de centre milieu de $[OD]$ et de rayon égal à la moitié du cercle initial.

2. a. $ON = MH$ et $OM = OD$ car ce sont deux rayons du cercle.
$\widehat{DON} = \widehat{OMH}$ car ils sont alterne-interne.
Les triangles ODN et OMH ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

b. On en déduit que l'angle $\widehat{OND}$ est droit. Le triangle rectangle ODN est donc inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse $[OD]$.

c. Le cercle est décrit en entier et cela vient confirmer la conjecture.

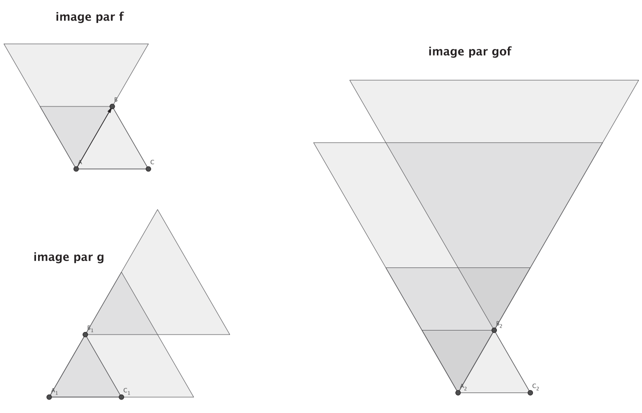
48 a.



b. La transformation est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point E tel que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$.

49 r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
h est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

50 a.



b. $g \circ f$ est la composée de la symétrie de centre B et de l'homothétie de centre B et de rapport 4.

51 **a.** $s\,([AB]) = [BC]$; **b.** rapport $= \dfrac{BC}{AB}$;

c. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$; **d.** $\text{mes}\,\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

52 **a.** $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC} = 1{,}5$.

Les triangles ABC et ADE ont leurs côtés proportionnels. Ils sont semblables.

b. Les angles correspondants sont donc égaux. Ainsi $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ et la droite(AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.

53 $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x - 2 \\ y_1 = 3y - 4 \end{cases}$.

$\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 + x_1 \\ y' = 1 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 3 \\ y' = 3y - 3 \end{cases}$.

54 **a.** $AG = 5\sqrt{2}$; $AE = 5\sqrt{10}$; $AF = 5\sqrt{5}$.

b. $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{GF}{CE} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

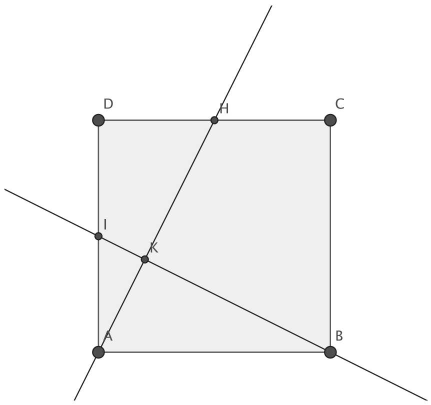
Les triangles CEA et GFA ont leurs côtés proportionnels. Ils sont semblables.

c. Les angles correspondants sont égaux. Ainsi :

$\widehat{GAF} = \widehat{AC} \Leftrightarrow \widehat{GAF} + \dfrac{1}{2}\widehat{FAE} = \widehat{ACE} + \dfrac{1}{2}\widehat{FAE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DAG}$.

donc les angles $\widehat{DAG}$ et $\widehat{EAF}$ ont la même bissectrice.

55 **a.**



b. $AI = DH = \dfrac{1}{2}AB$; $AB = AD$; $\text{mes}\,\widehat{BAI} = \text{mes}\,\widehat{ADH} = \dfrac{\pi}{2}$.

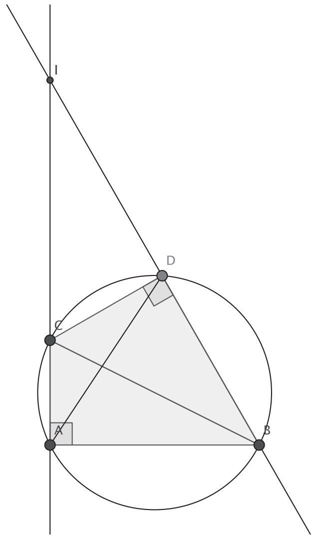
Les triangles ABI et ADH ont un angle de même mesure compris entre deux côtés égaux. Ils sont isométriques.

c. On en déduit que $\text{mes}\,\widehat{BIA} = \text{mes}\,\widehat{AHD}$.
De plus, $\text{mes}\,\widehat{KAI} = \text{mes}\,\widehat{HAD}$.
Les triangles AIK et ADH ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

d. Par conséquent, le troisième angle a la même mesure . Ainsi $\text{mes}(\widehat{AKI}) = \text{mes}(\widehat{ADH}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (BI) et (AH) sont perpendiculaires.

56 **a.** $\text{mes}\,\widehat{AIB} = \text{mes}\,\widehat{BAC}$ et $\text{mes}\,\widehat{IBA} = \text{mes}\,\widehat{CBA}$.
Les triangles ABI et ABC ont deux angles de même mesure. Ils sont semblables.
b. Rapport de similitude : $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

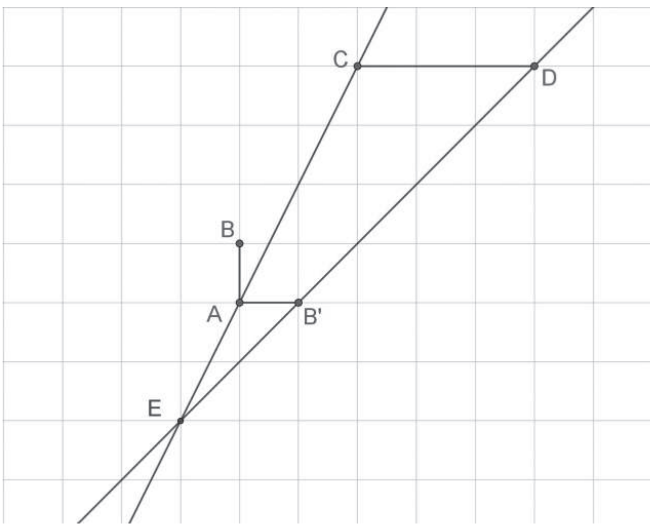
57 **a.**



b. Les angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{CBI}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\widehat{CD}$. Ils sont donc égaux. De plus l'angle $\widehat{AID}$ est commun aux deux triangles .

Les triangles ADI et BCI ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

58 **a.**



b. L'angle de la rotation a pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

c. Le rapport de l'homothétie est égal à 3 car son centre E est situé sur (AC) et sur $(B'D)$ où $r(B) = B'$.

Se tester

59 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Faux : **6.** Vrai ; **7.** Vrai.

60 **1.** Faux : il faudrait que l'angle mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

2. Vrai : si h désigne l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$, $h(B) = A'$ et $h(A) = B'$. Ainsi $h([AB]) = [A'B']$ et donc $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

3. Vrai : leurs trois angles sont respectivement de même mesure : $\frac{\pi}{3}$.

4. Vrai : $\text{mes}(\widehat{A'GB'}) = \text{mes}(\widehat{B'GC'}) = \text{mes}(\widehat{C'GA'}) = \frac{2\pi}{3}$ et $GA' = GB' = GC'$.

5. Vrai : car $BC = AC$; $B'C = A'C$ et $\text{mes}(\widehat{B'CB}) = \text{mes}(\widehat{ACA'}) = \frac{\pi}{3}$.

61 **1.** a. ; **2.** b. ; **3.** a. ; **4.** b. ; **5.** c.

62 **1.** a. Les triangles ont des angles de même mesure. En effet, $\widehat{ICG} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{IJC} = \widehat{BAC}$.

2. b. $BC = \sqrt{34}$. Donc $\frac{IC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{34}} \approx 0,34$. Ainsi $BC \approx \frac{IC}{0,34}$.

3. c. Les triangles sont semblables. Il existe donc une similitude qui les échange. Or une similitude conserve les milieux. Comme l'image de $[JC]$ est $[BC]$, l'image du milieu de $[JC]$ est le milieu de $[BC]$.

4. b. $\frac{BC}{IC} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Exercices d'approfondissement

63 **Calcul d'une distance par rapport à un cercle**

1. a. Les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{CDE}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\overset{\frown}{CE}$, donc ils sont de même mesure.

De plus l'angle $\widehat{CAE}$ est commun aux deux triangles .

Les triangles ABE et ADC ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

b. On a donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow AB \times AC = AD \times AE$.

2. On note J le point d'intersection de la diagonale $[AC]$ et du cercle (situé dans le demi-cercle contenant K).

$AJ = \frac{1}{2}(AC - 4) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - 4) = 2\sqrt{2} - 2$.

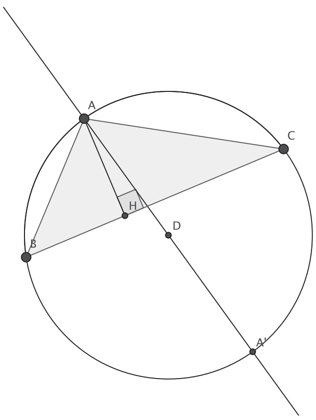
$AI = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

En appliquant les résultats du 1., on obtient :

$AJ \times AC = AK \times AI \Leftrightarrow AK = \frac{AJ \times AC}{AI} = \frac{(2\sqrt{2} - 2)4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$.

64 **Usinage**

a.



b. Le triangle $AA'C$ est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle de diamètre $[AA']$.

Ainsi $\text{mes}\,\widehat{ACA'} = \text{mes}\,\widehat{AHB}$.

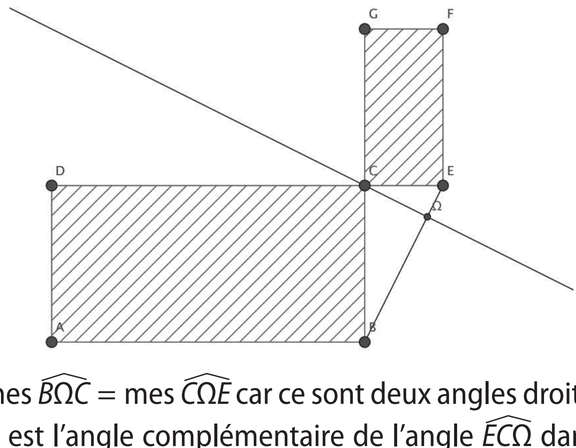
$\text{mes}\,\widehat{AA'C} = \text{mes}\,\widehat{ABC}$ car ces deux angles sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc.

Les triangles AHB et $AA'C$ ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

c. $\frac{AA'}{AB} = \frac{AC}{AH} \Leftrightarrow AA' = \frac{AB \times AC}{AH} = 4,8$.

65 **Centres de similitudes**

a.



b. $\text{mes}\,\widehat{B\Omega C} = \text{mes}\,\widehat{C\Omega E}$ car ce sont deux angles droits.

$\widehat{CE\Omega}$ est l'angle complémentaire de l'angle $\widehat{EC\Omega}$ dans le triangle $C\Omega E$ et de l'angle $\widehat{EBC}$ dans le triangle CEB. Ainsi $\text{mes}\,\widehat{EC\Omega} = \text{mes}\,\widehat{EBC} = \text{mes}\,\widehat{\Omega BC}$.

Les triangles $C\Omega E$ et $C\Omega B$ ont deux angles de même mesure . Ils sont semblables.

c. Le rapport de h est égal à 2 et l'angle de r est de mesure $\frac{\pi}{2}$.

d. $s' = h' \circ r'$ où h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$ et r' est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

66 Alignement

a. $ABCD$ est un carré donc la droite (AC) est la médiatrice du segment$[BD]$.

Le triangle GBD est équilatéral donc $GB = GD$; de plus, $AB = AD$, donc la droite (AG) est la médiatrice du segment $[BD]$.

Ainsi G, A et C sont alignés .

b. r désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. $r(G) = D$, $r(A) = E$ et $r(C) = F$.

Une rotation conserve l'alignement. Donc les points G, A et C alignés ont pour image les points D, E et F alignés .

67 Composées de symétries centrales

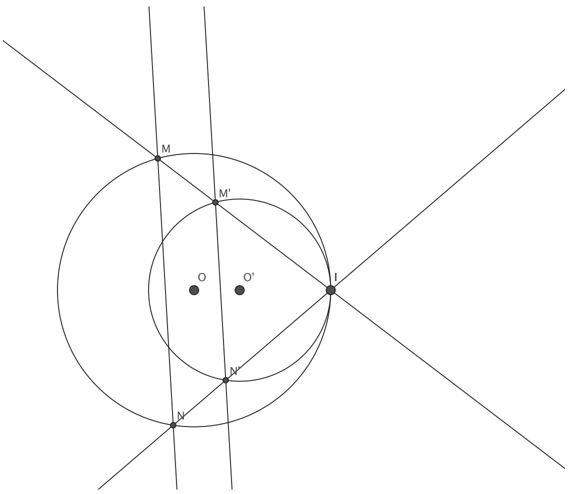
a. Image de B : $s_I \circ s_B(B) = s_I(B) = A$. donc $s_I \circ s_B = t_{\overrightarrow{BA}}$.

b. $s_I \circ s_B = s_M \circ s_C \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{BA}} = t_{2\overrightarrow{CM}} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Ainsi M est le milieu de $[CD]$.

68 Parallélisme

a. et **c.**



b. $O'I = OI - OO' = 3 - 1 = 2$ donc le point I appartient au cercle$(\mathscr{C}')$.

d. La transformation qui transforme le cercle $(\mathscr{C})$ en le cercle $(\mathscr{C}')$ est l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

e. L'image par h du point M du cercle $(\mathscr{C})$ est un point du cercle $(\mathscr{C}')$ et de la droite (IM). Ainsi $h(M) = M'$.

De même $h(N) = N'$.

Par conséquent, $h((MN)) = (M'N')$

L'image par une homothétie est une droite parallèle. On en déduit que $(MN) // (M'N')$.

69 Perpendicularité

a. Le rapport de h est égal à 2.

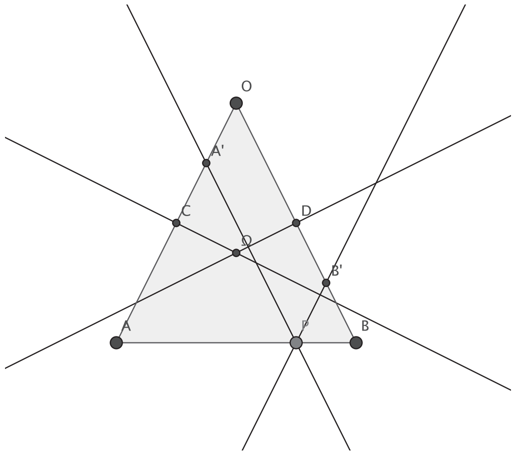
b. r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

c. $r((AM)) = (B'C')$. Ainsi $(AM) \perp (B'C')$.

d. $h \circ r([AM]) = [B'C']$. Le rapport de h est égal à 2 donc $B'C' = 2AM$.

70 Centre d'une rotation

a.



b. $OB'PA'$ est un parallélogramme (côtés opposés parallèles) donc $OA' = PB'$.

Le triangle $B'PB$ est isocèle en B' donc $PB' = BB'$.

Ainsi $OA' = BB'$.

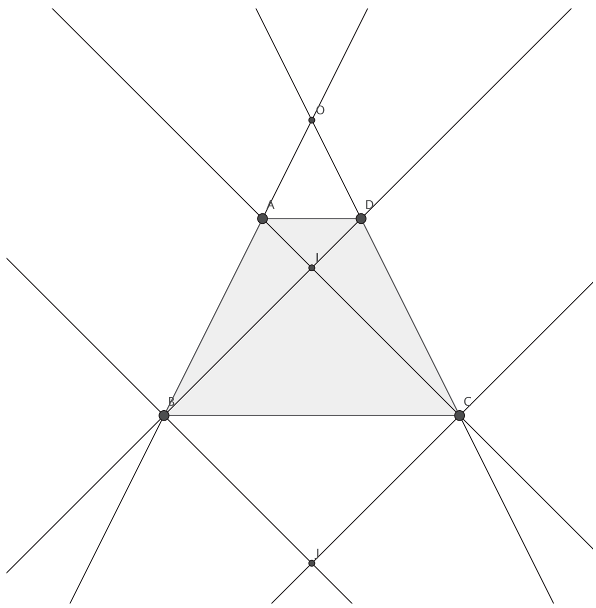
c. $r((OA')) = (BB')$ et $A \in (OA')$ donc $r(A) \in (BB')$.

De plus l'image du segment $[AO]$ est un segment de même longueur de la droite (BB') et d'extrémité B. donc $r(A) = O$.

d. Le centre Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[OB]$ et $[OA]$ c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

71 Homothéties dans un trapèze

a.



• Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. De plus, $h(A) = B$ donc $h((AC)) = (d_1)$ où (d_1) est la parallèle à (AC) passant par B.
• $h(A) = B$ et $(AD) // (BC)$ donc $h(D) = C$.

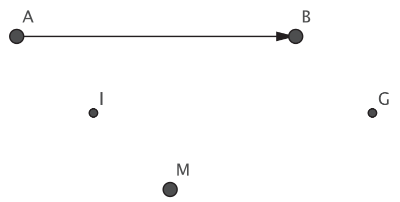
En reprenant le raisonnement ci-dessus, on montre que (d_2) est a droite parallèle à (BD) passant par C.

b. $I \in (BD)$ et $h((BD)) = (d_2)$, donc $h(I) \in (d_2)$.
$I \in (AC)$ et $h((AC)) = (d_1)$, donc $h(I) \in (d_1)$.
Ainsi $h(I)$ est le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2). donc $h(I) = J$ et O, I et J sont alignés .

c. $h(B)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (d_2).
$h(C)$ est le point d'intersection des droites (DC) et (d_1).

72 Barycentres et lieux de points

1.



2. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. I est donc l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

3. $-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = -2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IA}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB}$.
G est donc l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4. a. Le point I décrit le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{4}$.

b. Le point G décrit le cercle de centre Ω tel que $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et de rayon $\frac{AB}{4}$.

c. Le point I décrit la médiatrice de $[AB]$.

d. Le point G décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par C telle que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

73 Une transformation du plan

1. a. $\overrightarrow{MM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$
f est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.
b. L'image du triangle ABC est le triangle $A'B'C'$.
En effet, $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{A'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
f est donc la translation de vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

3. $\overrightarrow{MM'} = (k+1)\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (k+1)\overrightarrow{MG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{MG} = -k\overrightarrow{GM}$.
f est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-k$.

74 Un problème de construction

a. $h([BP]) = [BA]$; $h([PQ]) = [AQ']$.
$BP = PQ$ donc le point Q appartient au cercle de centre P et de rayon BP. Son image Q' appartient à l'image du cercle qui est le cercle de centre A, image de P, et de rayon AB.
b. Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle donc $(Q'C')//(QC)$.
$CC'Q'R$ est un parallélogramme donc $CR = C'Q'$.
Or $h([CQ]) = [C'Q']$ et $h([BP]) = [BA]$.
De plus, $CQ = BP$ donc $C'Q' = BA$.
Finalement $CR = AB$.
$(BC) = (CC')$ et $CC'Q'R$ parallélogramme entraînent que $(Q'R)//(BC)$. Ainsi le point Q' appartient à la droite parallèle à la droite (BC) passant par R.
c. • Tracer le cercle de centre A et de rayon AB.
• Construire le point R de la demi-droite $[AC)$ tel que $CR = AB$.
• Construire le point Q' intersection du cercle et de la parallèle à (BC) passant par R.
• Construire le point Q intersection de la droite (BQ') et de la droite (AC).
• Construire le point P intersection de la droite (AB) et de la parallèle à la droite (BC) passant par Q.

75 La droite d'Euler

a. $h(A') = A$; $h(B') = B$ et $h(C') = C$.
En effet, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{B'C'}$.

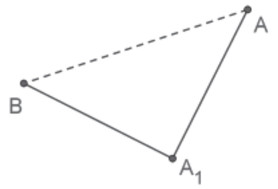
b. La hauteur issue de A' dans le triangle $A'B'C'$ est perpendiculaire à $(B'C')$ donc (BC) en A'. Or A' est le milieu de $[BC]$. Donc cette hauteur est la médiatrice de $[BC]$, la droite (OA'). L'image de la hauteur (OA') par h est la hauteur du triangle ABC issue de A.
De même pour les droites (OB') et (OC').

c. Ainsi $h(O) = H$.

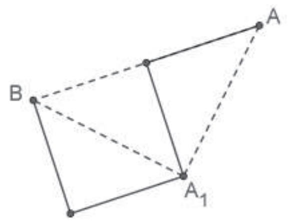
d. Les points G, O et H sont donc alignés puisqu'un point, son image par un homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

76 La courbe du dragon

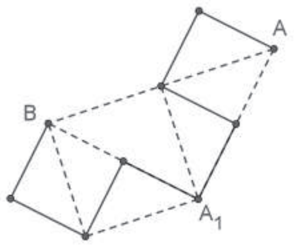
1re étape



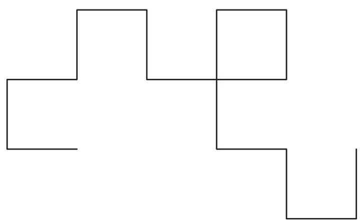
2e étape



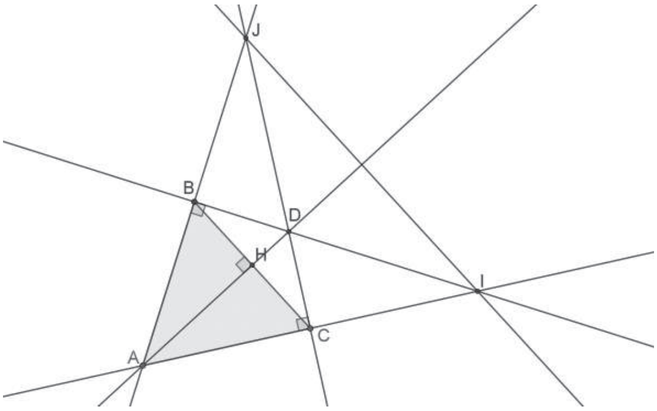
3e étape



4e étape



77 Cerf-volant



a. Les droites(AC) et (BD) sont sécantes en un point I donc la composée des deux symétries est la rotation de centre I et d'angle de mesure : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}}) = \frac{\pi}{6}$.

En effet l'angle $\text{mes}(\widehat{AIB}) = \frac{\pi}{2} - \text{mes}(\widehat{BAI}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

b. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point J donc la composée des deux symétries est la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$. En effet l'angle $\text{mes}(\widehat{AJC}) = \frac{\pi}{3} - \text{mes}(\widehat{CAJ}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

c. (AD) est la médiatrice de $[BC]$.

or, $s_{(AD)}(A) = A$, $s_{(AD)}(B) = C$ et $s_{(AD)}(D) = D$,

donc $s_{(AD)}(AB) = ((AC))$ et $s_{(AD)}(CD) = ((BD))$.

Ainsi, le point J, intersection de (AB) et (CD), a pour image par $s_{(AD)}$ le point I, intersection de (AC) et (BD).
Donc (AD) est aussi la médiatrice de $[IJ]$.
Le triangle AIJ est donc isocèle en A et comme il possède un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ (l'angle $\widehat{IAJ}$), c'est qu'il est équilatéral.

Problèmes

78 Règle de Dostor

a. Les deux triangles ont deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables.

b. $k = \frac{ED}{AB} = \frac{FD}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

c. Le produit en croix donne :

$AB \times FD = AC \times ED \Leftrightarrow AB \times FD - AC \times ED = 0$.

En élevant au carré, on obtient :

$AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 - 2\,AB \times FD \times AC \times ED = 0$

$\Leftrightarrow AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 = 2AB \times FD \times AC \times ED$.

d. $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $EF^2 = ED^2 + FD^2$.

e. $BC^2 \times EF^2 = AB^2 \times ED^2 + AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 + AC^2 \times FD^2$

$\Leftrightarrow BC^2 \times EF^2 = AB^2 \times ED^2 + 2\,AB \times FD \times AC \times ED + AC^2 \times FD^2$

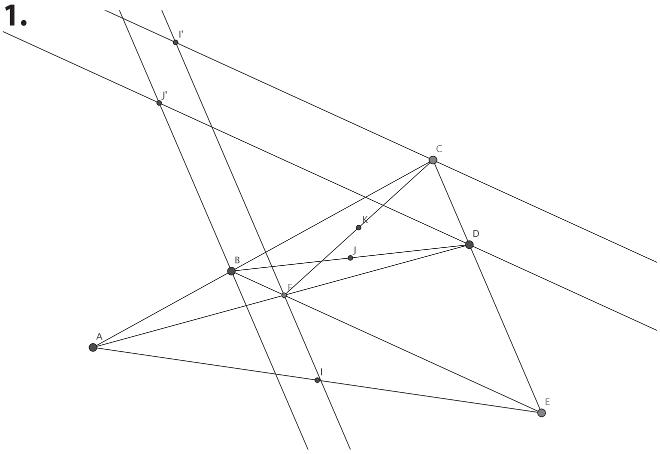
$\Leftrightarrow BC^2 \times EF^2 = (AB \times ED + AC \times FD)^2$.

Ainsi $BC \times EF = AB \times ED + AC \times FD$.

f. Les côtés « homologues » sont les côtés qui sont images l'un de l'autre par la similitude qui échange les deux triangles.

79 Droite de Newton

1.



2. a. L'image de (BJ') par h est la droite parallèle à (BJ') passant par C, donc (CD).
L'image de (CD) par h' est la droite parallèle à (CD) passant par F, donc (FI'). Ainsi $h' \circ h(BJ') = (FI')$.

b. L'image de (DJ') par h' est la droite parallèle à (DJ') passant par F, donc (EB).
L'image de (EB) par h est la droite parallèle à (EB) passant par C, donc (CI'). Ainsi $h \circ h'(DJ') = (CI')$.

c. Les deux homothéties ayant le même centre, elles-sont commutatives.
Le point J' est l'intersection des droites (BJ') et (DJ'), il a donc pour image par $h' \circ h$ le point intersection des droites (FI') et (CI') c'est à dire le point I'.

d. $h' \circ h(J') = I'$ donc A, I' et J' sont alignés .

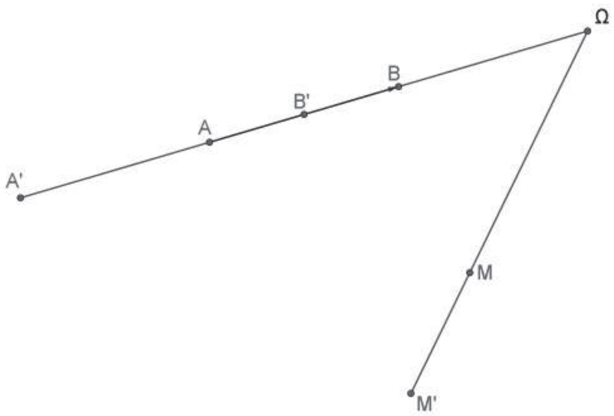
3. a. $BEDJ'$ est un parallélogramme donc J est le milieu des diagonales. Ainsi $E \in (J'J)$.
De même $E \in (KI')$. De plus, $E \in (AI)$.
Ainsi les droites (AI), $(J'J)$ et (KI') sont concourantes.

b. Les points I, J et K sont les images respectives des points A, I' et J' par l'homothétie de centre E et de rapport 2.

c. L'image par une homothétie d'une droite est une droite parallèle : A, I' et J' sont alignés donc leurs images I, J et K sont alignées.

80 Reconnaître des transformations

1. a. et **b.**



c. $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A} - 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = 2\overrightarrow{AB}$.
donc le point Ω existe et est unique.

d. $\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

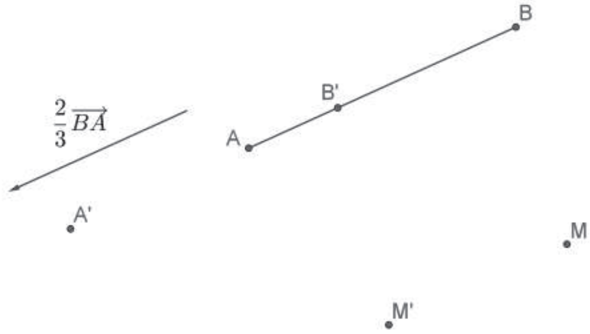
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} - 2\overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega B} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M} \text{ (car } \Omega A - 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}\text{)}.$$

e. f est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$.

2. a. et **b.**

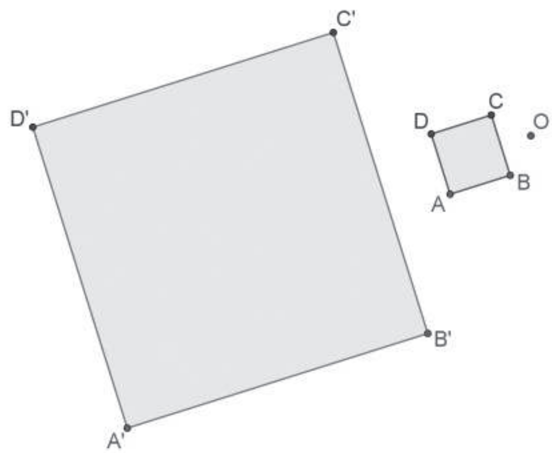


c. $2\overrightarrow{M'A} - 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

d. g est la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

3. a. et **b.**



c. $h(O) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Donc le point O existe et est unique**.**

d. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 4\overrightarrow{MO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM}.$$

h est donc l'homothétie de centre O et de rapport 5.

81 Démonstration d'un théorème

1. a. Les points O, C et A sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.

b. $A' = C$ d'après l'égalité ci-dessus.

c. L'image par h de la droite (AB) est la parallèle à (AB) passant par C, donc (CD). Ainsi $B' \in (CD)$.
De plus $B' \in (OB)$ puisqu'un point, son image et le centre d'une homothétie sont alignés. Ainsi B' est le point d'intersection de (CD) et (OB), donc $B' = D$.

d. Une homothétie conserve les milieux, donc $h(I) = J$ et les points O, I et J sont alignés.

2. a. h' désigne l'homothétie de centre O' qui transforme A en D.

En procédant comme à la question **1**, on a $h'(B) = C$, $h(I') = J'$ et les points O', I et J sont alignés.

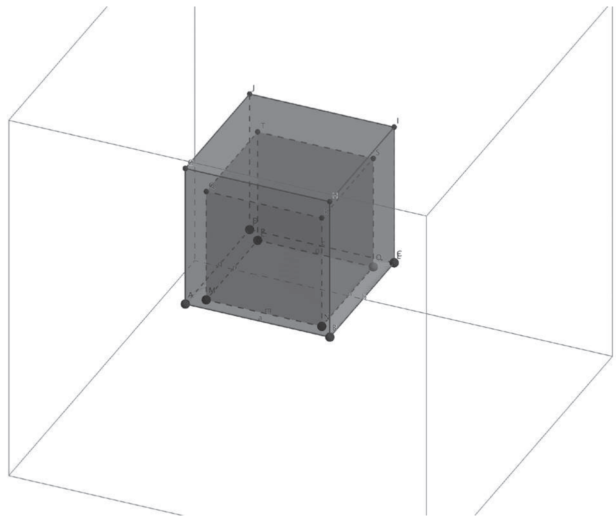
b. Ce théorème est démontré aux questions **1. d** et **2. a**.

5 Droites et plans de l'espace

Manuel pages 73 à 88

Activités d'introduction

1 Représentation en perspective cavalière (Rappel)



2 Théorème du toit

1. a. Les droites sont parallèles, elles sont donc coplanaires. Ainsi il existe un plan (P_3) les contenant.
b. Les droites semblent parallèles.

2. a. $A \in (P_3)$ car $A \in (d_1)$ et $(d_1) \subset (P_3)$.
$A \in (P_2)$ car $A \in (\Delta)$et $(\Delta) \subset (P_2)$.

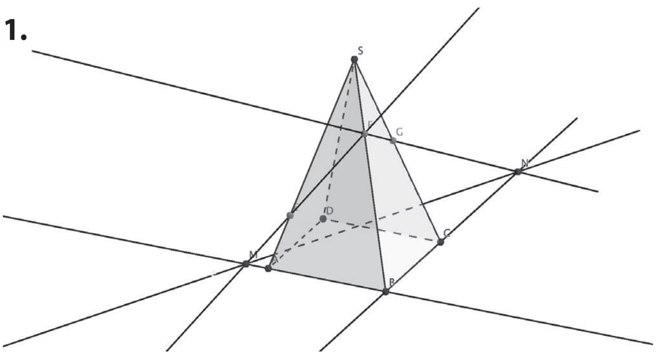
b. Les plans (P_2) et (P_3) se coupent suivant une droite qui ne peut être que (d_2). Ainsi $A \in (d_2)$.

c. Le point A appartient aux deux droites (d_1) et (d_2) qui sont parallèles. C'est impossible.

d. L'hypothèse de départ est fausse. Ainsi les droites (d_1)et (Δ)sont parallèles.

3 Intersection d'une pyramide par un plan

1.



2. a. $M \in (AB)$ donc $M \in (ABC)$.
$N \in (BC)$ Donc $N \in (ABC)$.
Ainsi $(MN) \subset (ABC)$.
On démontre de même que $(MN) \subset (EFG)$.
Ainsi la droite (MN) est l'intersection lorsqu'elle existe, des deux plans (EFG) et (ABC).
b. Il faut que $(EF)//(AB)$ et$(FG)//(BC)$.

4 Dans un cube

1. a. Les faces *AEFB* et *AEHD* sont des carrés donc :
$(AE) \perp (EH)$ et $(AE) \perp (EF)$.

b. La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EFG), elle est donc orthogonale au plan.

c. On en déduit que (AE) est orthogonale à toute droite du plan (EFG) et en particulier à (EI). Ainsi le triangle *AEI* est rectangle en *E*.

2. a. Le plan (AEI) contient la droite (AE) qui est orthogonale au plan (EFG). Ainsi les deux plans sont perpendiculaires.

b. $(HF) \perp (EG)$ car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
$(HF) \perp (AE)$ car (AE) est orthogonale au plan (EFG).
Ainsi la droite (HF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AEI), elle est donc orthogonale au plan.

c. On en déduit que (HF) est orthogonale à toute droite du plan (AEI) et en particulier à(AI).

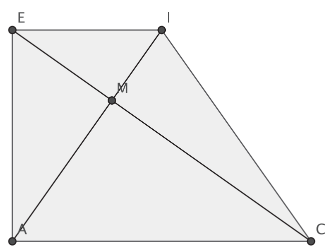
3. a. (EI) // (AC) donc les points A, C, E et I sont coplanaires. Les droites (AI) et (EC) ne sont pas parallèles sinon I serait confondu avec G. Elles sont donc sécantes.

b. Dans le repère $(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$,

$\overrightarrow{AI}(\frac{\sqrt{2}}{3}\ ; 1)$ et $\overrightarrow{EC}(\sqrt{2}\ ; -1)$.

$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2} + 1 \times (-1) = 0.$

Ainsi les droites (AI) et (EC) sont perpendiculaires.



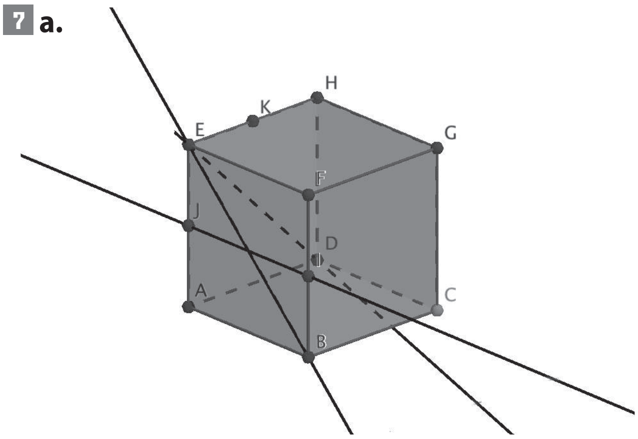
Savoir-faire

3 • (*AB*) // (*HG*) ; • (*HD*) // (*FB*) ;
• (*CA*) et (*GB*) non coplanaires ;
• (*AG*) et (*HD*) non coplanaires.

4 La droite (*SO*) est orthogonale au plan de base donc à toute droite du plan de base.

Ainsi (*SO*) ⊥ (*AC*).

7 **a.**



b. (*IJ*) //(*AB*). Or (*AB*) ⊥ (*AD*) et (*AB*) ⊥ (*AE*).

Donc (*IJ*) ⊥ (*AD*) et (*IJ*) ⊥ (*AE*). Ainsi la droite (*IJ*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ADE*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

c. (*BE*) ⊥ (*AF*) car ce sont les diagonales du carré *ABFE*. (*BE*) ⊥ (*AD*) car la droite (*AD*) est orthogonale au plan (*ABF*).

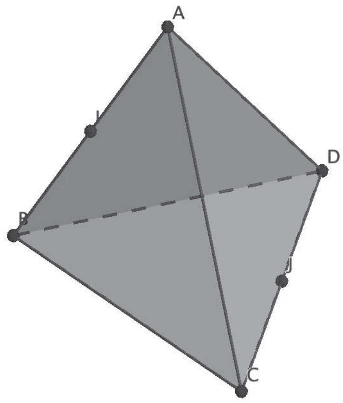
Ainsi la droite (*BE*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ADG*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

d. (*DE*) ⊥ (*AH*) car ce sont les diagonales du carré *ADHE*. Donc (*DE*) ⊥ (*JK*) car (*JK*) //(AH).

De plus (*IJ*) ⊥ (*DE*) car (*IJ*) ⊥ (*ADE*).

Ainsi la droite (*DE*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*IJK*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

8 **a.**



b. Le triangle *ABC* est équilatéral donc la droite (*CI*) est à la fois médiane et hauteur. Ainsi (*CI*) ⊥ (*AB*).

c. Le triangle *D* est équilatéral donc la droite (*DI*) est à la fois médiane et hauteur. Ainsi (*DI*) ⊥ (*AB*).

d. La droite (*AB*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ICD*) ; elle est donc orthogonale à ce plan.

Comme le plan (*ICD*) coupe [*AB*] en son milieu *I*, on en déduit que (*ICD*) est le plan médiateur de [*AB*].

11 **a.** (*EA*) ⊥ (*AB*) et(*EA*) ⊥ (*AD*) , donc (*EA*) ⊥ (*ABD*).

Or (*ABD*) = (*ABC*), ainsi (*EA*) ⊥ (*ABC*). Le plan (*EAC*) contient une droite orthogonale au plan (*ABC*). Le plan (*EAC*) est donc perpendiculaire au plan (*ABC*).

b. (*BF*) ⊥ (*EFG*) donc (*BF*) ⊥ (*EG*). De plus (*HF*) ⊥ (*EG*). Le plan (*EGC*) contient une droite orthogonale au plan (*BFH*). Le plan (*EGC*) est donc perpendiculaire au plan (*BFH*).

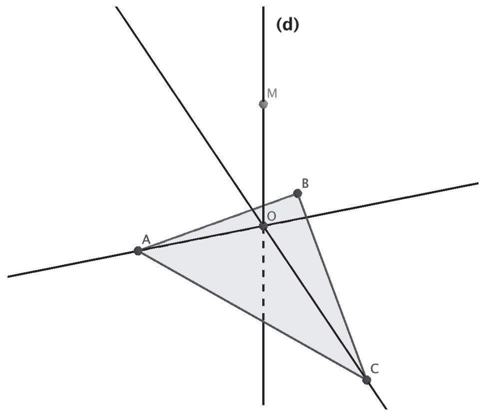
c. (*AE*) ⊥ (*EHF*) donc (*AE*) ⊥ (*HF*). De plus (*HF*) ⊥ (*EG*). Le plan (*AHF*) contient une droite orthogonale au plan (*ACE*). Le plan (*AHF*) est donc perpendiculaire au plan (*ACE*).

Exercices d'entraînement

Droites et plans orthogonaux

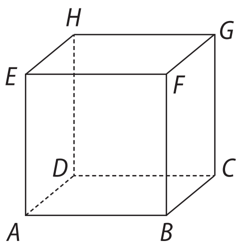
12 a. (*BC*), (*AD*), (*FG*), (*EH*), (*AE*), (*HD*), (*FB*) et (*GC*).
b. (*ADE*) et (*BFC*). **c.** (*BC*) et (*AE*).

13 a.



b. • (*d*) ⊥ (*ABC)* donc (*d*) est orthogonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à (*BC*).
• (*AB*) ⊥ (*OC)* car (*OC*) est une hauteur du triangle *ABC*.
(*AB*) ⊥ (*MO)* Car (*MO*) est orthogonale au plan (*AB*C).
Ainsi la droite (*AB*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*MOC*). Elle est orthogonale à ce plan. Or (*MC*) ⊂ (*MOC)*. On en déduit que (*AB*) ⊥ (*MC)*.

14 a.



b. • (*AB*)//(*HG*) ;
• (*AE*) ⊥ (*BC*) ;
• (*AG*) ⊥ (*HF*) ;
• (*HF*) et (*BG*) non coplanaires.
c. • (*AB*)//(EFG) ;
• (*AE*) ⊥ (*EFG*) ;
• (*HF*) ⊥ (*AGC*) ;
• (*CE*) et (*FGH*) sécants.

15 a. (*BC*)//(*EF*) et (*AB*) ⊥ (*BC*) donc (*AB*) ⊥ (*EF*).
b. (*EB*) ⊥ (*BC*) et (*EB*) ⊥ (*BA)* donc (*EB*) ⊥ (*AB*C).
Or (*FC*) //(*EB*). Ainsi (*FC*) ⊥ (*ABC)*.

16 a. • (*MI*) ⊥ (*EF*) car (*MI*) = (*MK*), (*EF*) = (*FK*) et *FKMP* est un carré.
• (*AE*)//(*MI*) car (*AE*) //(*FB*)//(*KI*) et (*MI*) = (*KI*).
• (*FC*) et (*MI*) ne sont pas coplanaires car elles appartiennent à des faces opposées du cube *BIJCFKLG*.
b. •(*MI)* ⊂ (*ABF*) car (*AE*) //(*MI*) et *I* ∈ (*AB*).
• (*MI*) ⊥ (*AB*C) car (*MI*) ⊥ (*IJ*) et (*MI*) ⊥ (*IB*).
• (*MI)* ⊥ (*EFG*) car (*MI)* ⊥ (*AB*C) et (*ABC)* // (*EFG*).

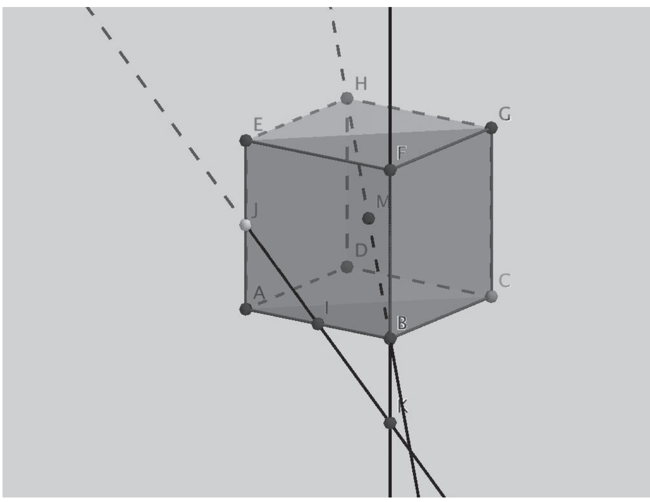
17 a. Le triangle *ABC* est isocèle de sommet *C*. Ainsi la médiane (*CI*) est aussi hauteur issue de *C*.
Donc (*CI*) ⊥ (*AB*).
De même dans le triangle *D* : (*DI*) ⊥ (*AB*).
Ainsi la droite (*AB*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*ICD*) ; elle est donc orthogonale au plan.
b. La droite (*AB*) est orthogonale à toute droite du plan (*ICD*) donc en particulier à la droite (*CD*).

18 a. (*IJ*) //(*AD*) et (*AC*) ⊥ (*AD*) donc (*IJ)* ⊥ (*AC*).
b. (*BE)* ⊥ (*AB*C) car la droite (BE) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*AB*C) : (*AB*) et (*BC*).
c. (*IJ*) //(*AD*)//(BE) et (*BE)* ⊥ (*AB*C) donc (*IJ*) ⊥ (*AB*C).
d. La droite (*IJ*) est orthogonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à la droite (*IB*).

19 a. (*CG*) //(*HD*) et (*HD*) ⊥ (*EH)* donc (*CG*) ⊥ (*EH*).
(*AB*) ⊥ (*AD*) et (*AB*) ⊥ (*AE*) donc (*AB*) ⊥ (*ADE*).
Or (*EH)* ⊂ (*ADE*). Ainsi (*EH*) ⊥ (*AB)*.
b. (*EF*) et (*HD*) ne sont pas coplanaires car elles appartiennent aux deux bases du prisme et elles ne sont pas parallèles.
c. (*HD*) ⊥ (*DA)* et (*HD*) ⊥ (*DC)* car les faces latérales du prisme sont des rectangles.
Ainsi la droite (*HD*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*AB*C). Elle est orthogonale à ce plan.

20 a. Le triangle *AFC* est équilatéral car ses côtés sont les diagonales de faces du cube. Donc la médiane (*CI*) est aussi la hauteur issue de *C*. Ainsi (*CI)* ⊥ (*AF)*.
De plus (*AF)* //(*DG*). On en déduit que (*CI)* ⊥ (*DG)*.
b. Le théorème des milieux appliqué au triangle *AFC* donne (*IJ)* //(*AC*).
(*AC*) ⊥ (*BD*) car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
Ainsi (*IJ)* ⊥ (*BD*).

21 1.



2. a. (*HE*) ⊥ (*EA*) et (*HE*) ⊥ (*EF*) donc (*HE*) ⊥ (*AFE*).
Or (*EB*) ⊂ (*AFE)*. Ainsi (*HE*) ⊥ (*EB*).

b. Les droites (*GE*) et (*EB*) ne sont pas perpendiculaires.

c. (*HE*) ⊥ (*FA*) car (*HE*) ⊥ (*AFE*).

d. La droite (*EG*) est incluse dans la face opposée à la face (*ABC*). Les deux faces étant parallèles, (*EG*) //(*ABC*).

e. (*AC*) ⊥ (*DB)* car les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
(*AE*) ⊥ (*DB*) car (*AE*) ⊥ (*ADB*). Ainsi (*DB*) ⊥ (*ACE)*.
Or (*EAG*) = (*ACE*). Il en résulte (*DB*) ⊥ (*EAG)*.

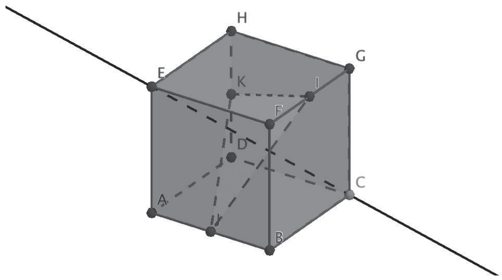
f. Les points *H* et *B* sont de part et d'autre du plan médiateur (*EGC*). Ainsi la droite (*HB*) coupe le plan (*EGC*).

3. a. (*IJ)*//(*EB*)//(*HC*) et (*HC*) ⊂ (*BCH)* donc (*IJ*) //(*BCH*).

b. Les quatre points *I, J*, *B* et *F* sont coplanaires et les droites (*IJ*) et (*BF*) ne sont pas parallèles sinon *J* appartiendrait à l'arête (*AE*), donc elles sont sécantes.

c. (*BF)* ⊂ (*DBF*) donc la droite (*IJ*) est sécante au plan (*DBF*).

22 a.



b. Les triangles *IGC* et *IFE* sont isométriques.

Donc *IC* = *IE*. Ainsi le point *I* appartient au plan médiateur de[*CE*].

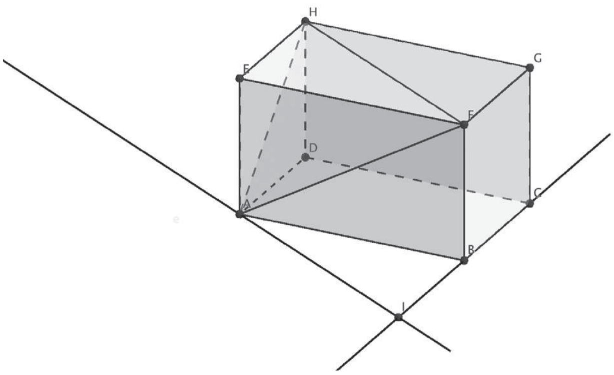
De même pour les points *J* et K.

Le plan *IJK* est donc le plan médiateur de [*CE*]. Ainsi la droite (*CE*) est orthogonale au plan (*IJK*).

c. La droite (*IB*) est orthogonale au plan (*BCD*) donc à toute droite de ce plan. Ainsi (*IB)* ⊥ (*BC)*. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle *IBC* permet de calculer *JK* en fonction du côté du carré.

On calcule de même les longueurs *IJ* et *IK* pour conclure que le triangle *IJK* est équilatéral.

23 a. c.



b. Les deux plans ont un point commun *A*, ils ne sont-donc pas parallèles.

d. Le point cherché est le point d'intersection *I* de la droite (*BC*) et de la parallèle à la droite (*HF*) passant par *A*.

Plans perpendiculaires

24 a. • (*BCF*), (*ABF*), (*ADH*) et (*DCH*).
• (*HDF*), (*ABC*) et (*EHF*).
• (*AFG*), (*ABF*) et (*DCH*).

b. Si (*HBC)* ⊥ (*ABC*), (*HBC*) serait confondu avec (*FBC*) qui est perpendiculaire à (*ABC*) et qui le coupe suivant la droite (*BC*). Ce qui est faux car le point *F* n'appartient pas au plan (*HBC*).

25 1. a. Les triangles *ADC* et *BCD* sont équilatéraux. Les médianes sont donc également hauteurs.
Ainsi (*AJ)* ⊥ (*CD*) et (*BJ)* ⊥ (*CD*).

b. Le plan (*CDA*) contient la droite (*CD*) qui est orthogonale au plan (*ABJ*). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

2. Les faces perpendiculaires au plan (*CDI*) sont (*ABC*) et (*ABD*).

3. a. Le plan (*CDI*) contient la droite (*CD*) qui est orthogonale au plan (*ABJ*). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

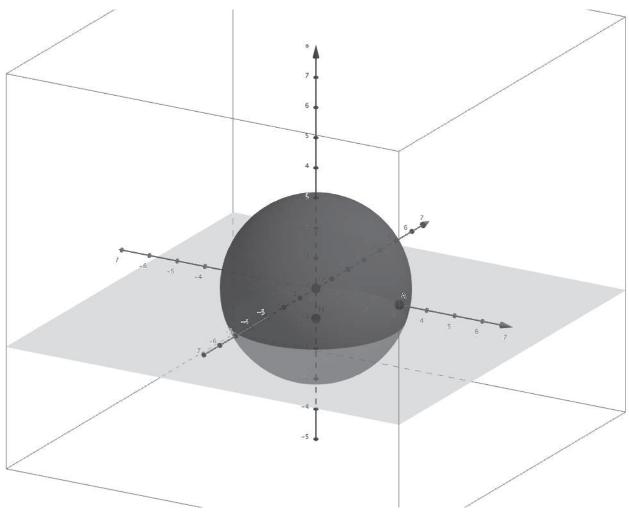
b. (*ABJ*)∩(*CDI*) = (*IJ*).

26 1. Le plan (*MAB)* contient la droite (*MB*) qui est orthogonale au plan (*ABC*). Ainsi les plans (*ABC*)et (*MAB)* sont perpendiculaires.

2. a. (*AC*) ⊥ (*AB*) car le triangle *ABC* est rectangle en *A*.
(*AC*) ⊥ (*MB*) car la droite (*MB*) est orthogonale au plan (*ABC*) qui contient la droite (*AC*).

b. Le plan (*MAC*) contient la droite (*AC*) qui est orthogonale au plan (*MAB)*. Ainsi les plans (*MAC*) et (*MAB)* sont perpendiculaires.

27 a.

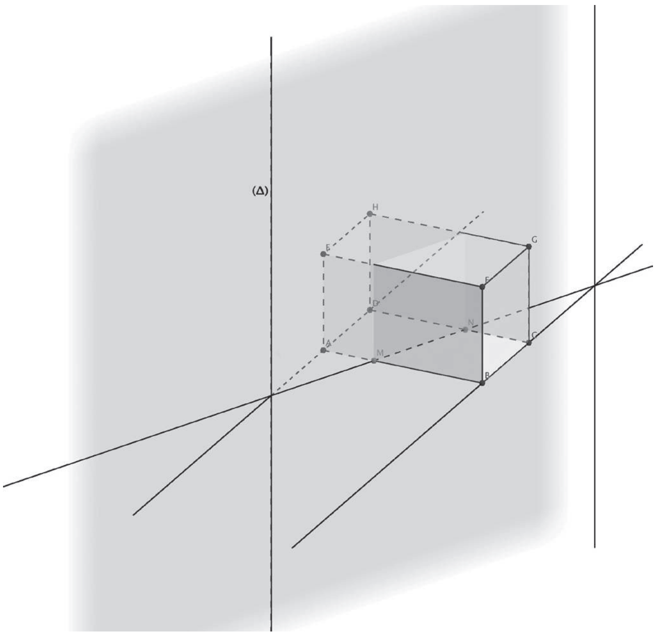


b. Le triangle *MOH est* rectangle en *H*.
Ainsi $HM^2 + HO^2 = OM^2$.
$M \in (S) \Leftrightarrow OM = r$.
Donc $HM^2 + d^2 = r^2 \Leftrightarrow HM = \sqrt{r^2 - d^2}$.

28 **1. a.** Les plans (*ABC*) et (*BEH*) sont sécants suivant la droite (*BC*).

b. Le plan (*AEG*) contient la droite (*AE*) qui est orthogonale au plan (*ABC*). Ainsi les plans (*ABC*) et (*AEG*) sont perpendiculaires.

2. a.

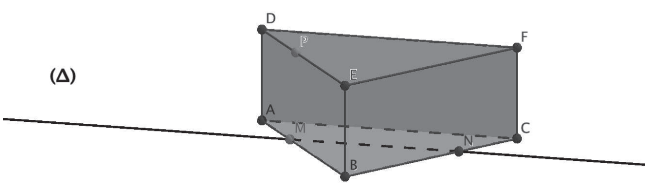


b. Les droites (*AD*) et (*MN*) sont sécantes. Or la première appartient au plan (*AEH*) et la deuxième au plan (*P*). Ces deux plans sont donc sécants.

c. Les droites (*BC*) et (*MN*) sont sécantes. Or lapremière appartient au plan (*BCG*) et la deuxième au plan (*P*). Ces deux plans sont donc sécants.

d. (*AEH*)//(*BCG*). Les droites d'intersection avec un troisième plan (*P*) sont donc parallèles.

29 **1.**



2. a. Les deux plans ont un point commun *M* et ne sont pas confondus, ils sont donc sécants.

b. La droite (*MN*) est parallèle à la droite (*DF*) et donc à la droite (*AC*). Le théorème de Thalès appliqué au triangle *ABC* donne $BN = \dfrac{2}{3}BC$.

3. b. (*MP*) //(*AD*) et donc (*MP*) ⊥ (*ABC*).

Le plan (*MNP*) contient la droite (*MP*) qui est orthogonale au plan (*ABC*). Ces deux plans sont donc perpendiculaires.

30 **1.** $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$.

2. a. $N \in (AJ) \Rightarrow N \in (AIJ)$ et $M \in (AI) \Rightarrow M \in (AIJ)$ donc *M*, *N* , *I* et *J* sont coplanaires.

b. $P \in (AIJ) \cap (BCD)$ et $(AIJ) \cap (BCD) = (IJ)$ donc $P \in (IJ)$.

31 **a.** Par construction $(IK) \subset (BCD)$. De plus $K \in (AJ)$ et $(AJ) \subset (AIJ)$. Donc $K \in (AIJ)$.
Finalement $(IK) = (AIJ) \cap (BCD)$.

b. Le point *A* est commun aux deux plans.
$M \in (IK) \Rightarrow M \in (AIJ)$ et $M \in (BD) \Rightarrow M \in (ABD)$.
Donc $(AM) = (AIJ) \cap (ABD)$.

32 • (*ABF*) ⊥ (*AEH*) ; • (*EFG*) et (*ABC*) sécants ;
• (*EGC*) ⊥ (*BHD*).

33 **a.** *AM*, *HF* et *AH* sont des diagonales de carrés isométriques. Donc elles sont de même longueur. Ainsi le triangle *AFH* est équilatéral.

b. $AC = AF$ donc *A* appartient au plan médiateur de [*CF*].

De même $GC = GF$ donc *G* appartient au plan médiateur de [*CF*].

On démontre de même que *A* et *G* appartiennent au plan médiateur de [*CH*].

c. La droite (*CF*) est orthogonale au plan (*AGF*) donc (*CF*) ⊥ (*AG*). De même, (*CH*) ⊥ (*AG*). Ainsi la droite (*AG*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*CFH*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

34 **a.** La droite (*SO*) est orthogonale au plan (*ABC*) donc à toute droite de ce plan et en particulier (*CB*).

b. (*CB*) ⊥ (*SO*) et (*CB*) ⊥ (*OI*) donc (*CB*) ⊥ (*SOI*). Le plan (*SOI*) contient la droite (*SO*) qui est perpendiculaire au plan (*ABC*). Donc (*SOI*) ⊥ (*ABC*).

c. (*P*) ⊥ (*ABC*).

35 **a.** Le point *B* est commun aux plans (*BAI*) et (*BCD*).
Comme ils ont un point commun et qu'ils ne sont pas confondus, on en déduit qu'ils sont sécants.

b. (*AI*) et (*CD*) sont coplanaires et sécantes.

c. Le point d'intersection *J* de ces deux droites appartient aux deux plans dans lesquels elles sont incluses.

d. $(BAI) \cap (BCD) = (BJ)$.

36 **a.** (*FCI*) ⊥ (*ABC*) ; **b.** (*FCI*) et (*H*) sont sécants ;
c. (*AGL*) ⊥ (*DCI*).

Se tester

37 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ; **7.** Vrai.

38 **1.** Vrai. (*SH)* ⊥ (*AB*C) donc la droite (SH) est orthogonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à la droite (*HA*).

2. Faux. (*SH)* ⊥ (*AB*C) donc (*SH)* ⊥ (*BC*).

3. Vrai. Le plan (*SHA*) contient la droite (*SH*) orthogonale au plan (*AB*C).

4. Faux. Les droites (*AD*) et (*BC*) sont sécantes.

39 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. b.** ; **5. c.**

40 **1. c.** Car les points *O* et *A* sont communs aux deux plans.

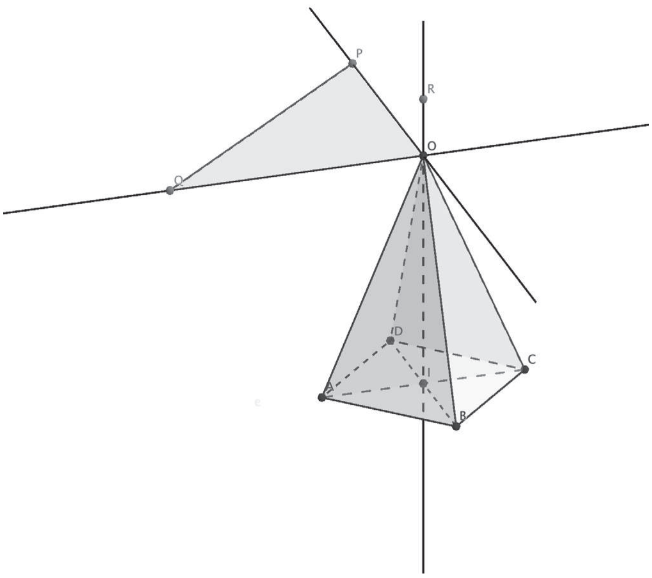
2. a. Car le plan (*SOA*) contient la droite (*SO*) orthogonale au plan (*AB*C).

3. a. Car le plan (*SBD*) contient la droite (*BD*) orthogonale aux deux droites (*AC*) et (*SO*) du plan (*SAC*).

4. c. (*SO*) ⊥ (*AB*C) donc la droite (*SO*) est orthogonale à toute droite du plan (*AB*C) donc en particulier à la droite (*CD*).

Exercices d'approfondissement

41 **a.**



b. (*OP*) ⊥ (*AOC)* et (*OI)* ⊂ (*AOC)*. Donc (*OP*) ⊥ (*OI)*. On démontre de même que (*OQ*) ⊥ (*OI)*.

c. La droite (*OI*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*OPQ*), elle est donc orthogonale à ce plan.

d. Or la droite (*OR*) est orthogonale au plan (*OPQ*). Les droites (*OI*) et (*OR*) ayant un point commun, elles sont confondues. Ainsi les points *O*, *I* et *R* sontalignés.

42 **a.** Le point *O* est équidistant des points *I* et *J*, donc il appartient au plan (P_1) médiateur de [*IJ*]. De même *O* appartient à (P_2).

b. *M* ∈ (P_1) donc *M* est équidistant de *I* et *J*.

Ainsi *MI* = *MJ*.

M ∈ (*P*2) donc *M* est équidistant de *J* et *K*.

Ainsi *MJ* = *MK*.

c. (Δ) ⊂ (P_1) ⇒ (Δ) ⊥ (*IJ*) et (Δ) ⊂ (P_2) ⇒ (Δ) ⊥ (*JK*).

Ainsi la droite (Δ) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*IJK*). Donc (Δ) ⊥ (*IJK)*.

43 **a.** La droite (*SH*) est orthogonale au plan (*AB*C). Donc tout plan qui la contient est perpendiculaire au plan (*AB*C).

b. Les trois plans contiennent la droite (*SH*), donc ils sont perpendiculaires au plan (*ABC*).

c. La droite (*SA*) est perpendiculaire aux deux droites (*SB*)et (*SC*) du plan (*SBC*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

d. (*SA*) ⊥ (*AB*C) ⇒ (*SA*) ⊥ (*BC*)

et (*SH)* ⊥ (*AB*C) ⇒ (*SH)* ⊥ (*BC*).

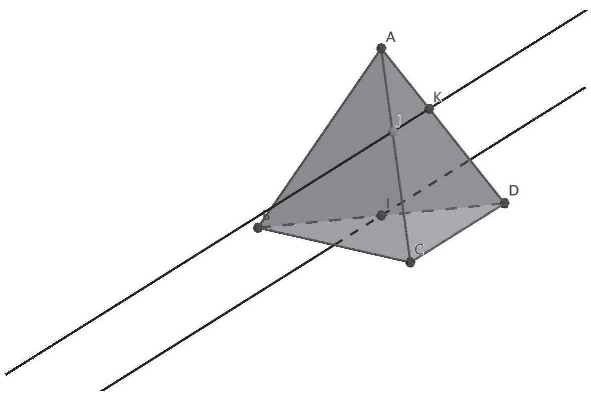
Ainsi la droite (*BC*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*SAH*). Donc (*BC)* ⊥ (*SAH)*.

e. (*BC*) ⊥ (*SAH*) ⇒ (*BC*) ⊥ (*AH*). Donc la droite(*AH*) est la hauteur issue de *A* du triangle *ABC*.

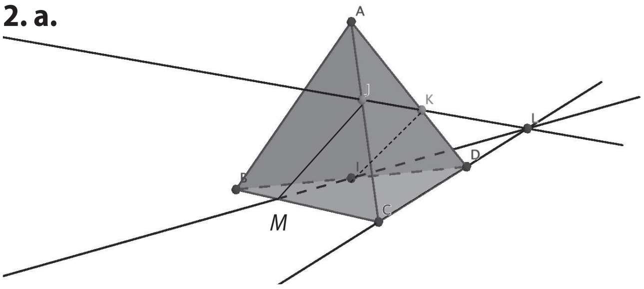
On démontre de même que (*BH*) et (*CH*) sont des hauteurs.

44 **1. a.** C'est le théorème du toit qui permet de dire que l'intersection des plans (*IJK*) et (*BCD*) est la parallèle à (*CD*) passant par *J*.

b.



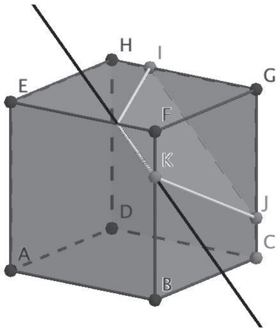
2. a.



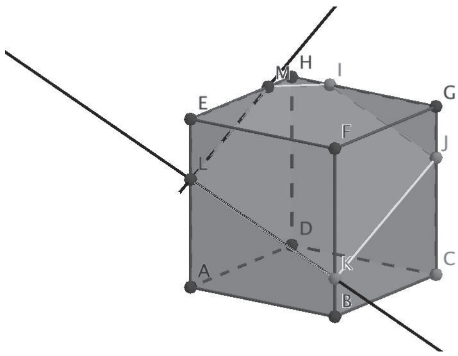
b. $(IJK) \cap (ABC) = (JM)$.

3. La section du tétraèdre est le quadrilatère $MIJK$.

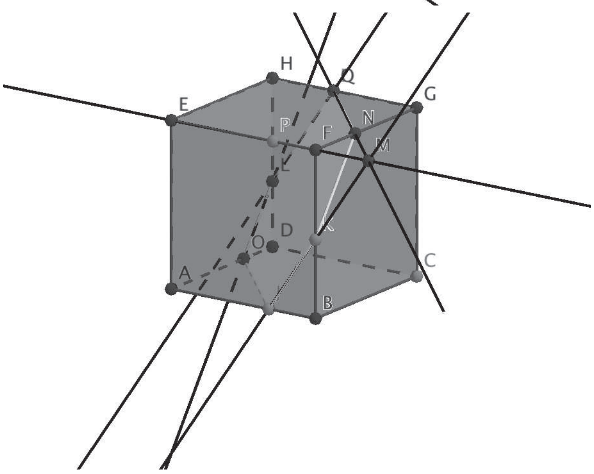
45 **a.**



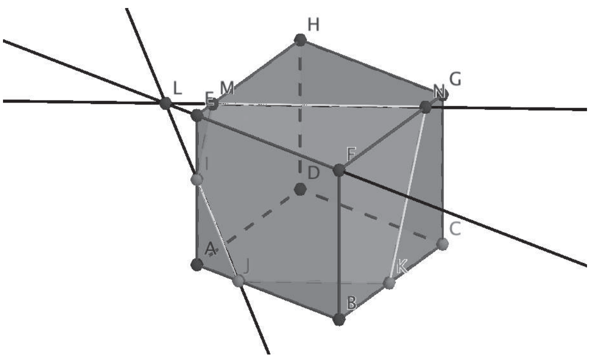
b.



c.



d.

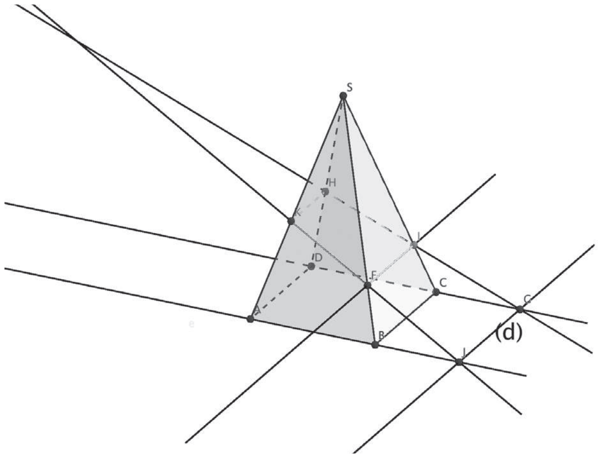


46 **a.** Les droites (AD) et (BC) sont des génératrices du cylindre. Elles sont donc parallèles.

b. On note x la longueur OC. Le théorème de Thalès donne l'égalité : $\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC} \Leftrightarrow \frac{10}{9} = \frac{x+10}{x} \Leftrightarrow x = 90$.

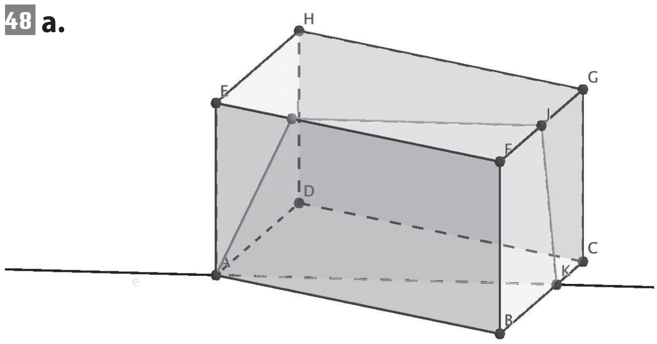
$\tan(\alpha) = \frac{BC}{OC} = 0{,}1$. Ainsi $\alpha \approx 6°$.

47 **a. c.**



b. D'après le théorème du toit, l'intersection cherchée est la parallèle à (d) passant par le point I.

48 **a.**



b. L'intersection est la parallèle à (IJ) passant par A.

c. La trace de la section sur le plan (AIJ) est contenue dans la parallèle précédente.

d. La section est un trapèze.

49 **a.** $(CD) \perp (AB)$ et $(CD) \perp (BH)$ donc $(CD) \perp (ABH)$.

Ainsi le plan (BCD) contient une droite orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABH). Donc $(BCD) \perp (ABH)$.

De même pour le plan (ADH).

b. $(BD) \perp (AH)$ et $(BD) \perp (CH)$. Donc $(BCD) \perp (ACH)$. Ainsi $(AC) \perp (BD)$.

50 **a.** Si $(d) // (P)$, alors $(P) \perp (BCD)$ et donc $(AD) // (BCD)$, ce qui est faux.

b. $O \in (P) \Rightarrow OA = OD$.

De plus, tout point de (d) est équidistant de B, C et D grâce au théorème de Pythagore.

Ainsi O est équidistant de A, B, C et D.

51 **a.** *ASCT* est un losange donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi $(SO) \perp (AC)$.
SBD est un triangle isocèle en *S*. Ainsi $(SO) \perp (BD)$.
La droite (*SO*) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (*P*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

b. *ABCD* est un parallélogramme car *O* est le milieu de ses diagonales.

52 **1. a.** Dans le triangle *FCH*, *M* est le milieu de [*FH*] et *J* le milieu de [*FC*]. Le théorème de Thalès permet de dire que $(JM) // (CH)$.

b. Démonstration analogue au **1. a.** dans le triangle *ACH*.

c. Par transitivité, $(JM) // (NL)$.

2. $(JM)//(NL) \Rightarrow (JM)//(NKL)$.
On peut démontrer de manière analogue que :
$(IJ) //(LK) \Rightarrow (IJ) //(NKL)$. Ainsi le plan (*IJM*) contient deux droites sécantes parallèles au plan (*NKL*). Donc $(IJM) //(NKL)$.

3. Le plan (*MNK*) contient la droite (*MN*) qui est perpendiculaire aux droites (*IK*) et (*LJ*) du plan (*IJK*).
Ainsi $(IJK) \perp (MNK)$.

53 **a.** $(JK)//(AM) \Rightarrow (JK)//(P) \Rightarrow (JK) \perp (d')$.
Or $(IK) //(d')$. Donc $(JK) \perp (IK)$, le triangle *IJK* est rectangle en *K*.

b. Le lieu est le plan médiateur du segment[*AB*].

54 **1. a.** La droite (*DH*) est orthogonale aux deux droites (*HE*) et (*HG*) sécantes du plan (*HGE*). Elle est donc orthogonale à ce plan.

b. $(HI) \subset (HGE)$ donc $(HI) \perp (HD)$.

c. *HII'D* est un rectangle car ses côtés opposés sont de même longueur et ses angles sont droits car *ABCDEFGH* est un cube.

d. $(II') //(HD)$ et $(HD) \subset (AHE)$. Donc $(II') //(AHE)$.

2. a. Le théorème de Thalès dans le triangle *EGH* donne $JM = \frac{1}{2}HG$. De même, dans le triangle *ADB*, on a $J'M' = \frac{1}{2}AB$. Or $AB = HG$. On en déduit que $JM = J'M'$.

b. *JMM'J'* est un parallélogramme car il a deux côtés *JM*et *J'M'* parallèles et de même longueur. De plus, $(JM) //(HG)$ et la droite (*HG*) est orthogonale au plan (*AHE*). On en déduit que la droite (*JM*) est orthogonale au plan (*AHE*), donc à la droite (*MM'*). Le quadrilatère *JMM'J'* est un parallélogramme qui a un angle droit. C'est donc un rectangle.

c. Les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles. Donc $(JJ') //(MM')$. Comme $(MM') \subset (AHE)$, on en déduit que $(JJ') //(AHE)$.

3. Il suffit de projeter orthogonalement *K* et *K'* respectivement sur [*FG*] et[*BC*].

4. a. Le théorème des milieux appliqué au triangle *AED* assure que $\overrightarrow{PM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$. De même, dans le triangle *EHD*, on a $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$. Ainsi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.

b. La projection orthogonale conserve lesmilieux.

c. En utilisant une méthode analogue , on peut démontrer que *R*, *S* et *T* se projettent orthogonalement en *P*. Ainsi *P*, *Q*, *R*, *S* et *T* sontalignés.

5. Les points *I* et I' sont les points d'intersection des diagonales des faces supérieure et inférieure du cube. Ils appartiennent donc aux deux surfaces.
L'intersection contient d'autres points car par exemple la droite (*KK'*) a ses points *K* et *K'* de part et d'autre de la deuxième surface réglée.

55 **1^er^ cas : (*d*) et (*d'*) sont coplanaires**

1. a. Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

b. Si on trace deux droites perpendiculaires à (*d*) et à (*d'*), la figure obtenue en joignant les points d'intersection est un quadrilatère qui a quatre angles droits. C'est donc un rectangle et donc ses côtés opposés sont de même longueur.

2. a. Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre (car (*d*) et (*d'*) sont coplanaires).

b. Il n'y a donc pas de perpendiculaire commune aux deux droites.

3. a. Si $(d') //(d'')$, comme $(d) \perp (d'')$ on en déduirait que $(d) \perp (d')$ ce qui contredit l'énoncé.

b. Si l'angle $\widehat{ACB}$ est droit alors $(d)//(d')$ ce qui contredit l'énoncé.

c. Il n'y a donc pas de perpendiculaire commune aux deux droites.

2^e^ cas : (*d*) et (*d'*) ne sont pas coplanaires

a. Le plan (*P*) est celui contenant (*d*) et la parallèle à (*d'*) passant par un point quelconque de (*d*).
Le plan (*P'*) est celui contenant (*d'*) et une perpendiculaire à (*P*).

b. Si $(d)//(P')$ alors (*d*) est parallèle à la droite d'intersection des deux plans et donc à (*d'*). Contradiction.

c. (*d''*) est orthogonale à (*P*) donc à toute droite de (*P*), donc en particulier à (*d*).
Comme $(d')//(P)$, on en déduit que $(d'') \perp (d')$.

d. La droite orthogonale à un plan en un point est unique. Ainsi (*d''*) est unique.

Cas général :

Lorsque deux droites ne sont pas coplanaires, elles ont une perpendiculaire commune unique. Lorsqu'elles sont coplanaires, elles en ont une infinité si elles sont parallèles et aucune sinon.

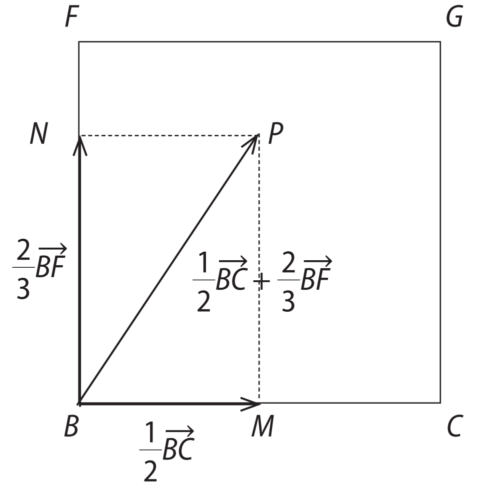
6 Vecteurs et produit scalaire dans l'espace

Manuel pages 89 à 106

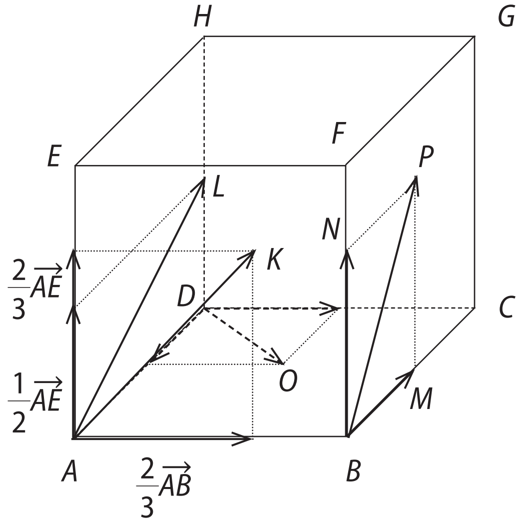
Activités d'introduction

1 Vecteurs de l'espace

1. a. et **b.**



2. a., **b.** et **c.**



d. Le point K appartient à la face $ABFE$.

Le point L appartient à l'arête $[DH]$.

3. a. $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LH}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{LH}$
$=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{LH}$.

Ainsi $\overrightarrow{DH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{LH}$ soit $\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{LH}$ soit $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{LH}$.

b. C'est le sommet H.
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BH}$.

2 Vecteurs colinéaires, coplanaires

1. a. $\vec{w}=\overrightarrow{IO}$, $2\vec{w}=\overrightarrow{AB}$ et $-2\vec{w}=\overrightarrow{CD}$.

b. Dans le plan (ABC) : (AB) // (DC) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires.

Dans le triangle ABD, I et O sont des milieux de deux côtés donc (IO) // (AB) donc $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Ainsi $\overrightarrow{IO}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc $\vec{w}$, $2\vec{w}$ et $-2\vec{w}$ sont aussi colinéaires.

2. a. $\vec{u}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{DB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{IO}$.

b. Dans le plan (ABC)
- $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IO}+(-\overrightarrow{BC})$ et ainsi $\vec{v}=2\vec{w}-\vec{u}$.
- $\overrightarrow{BC}=BD+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{IO}$ et ainsi $\vec{u}=-\vec{v}+2\vec{w}$.

3 Se repérer

1. a. A se trouve à 300 m vers l'est et 100 m au nord de O et à la même altitude de 0, c'est-à-dire au bord de la mer.

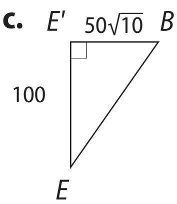
b. $P(100\ ;350\ ;100)$

c. $B(-50\ ;-50\ ;0)$ et $E(-200\ ;0\ ;-100)$.

2. b. Dans ce plan, $E'(-200\ ;0)$ et $B(-50\ ;-50)$

donc $E'B=\sqrt{[-50-(-200)]^2+(-50-0)^2}$
$=\sqrt{150^2+(-50)^2}$
$=\sqrt{25\,000}=50\sqrt{10}$.

c.

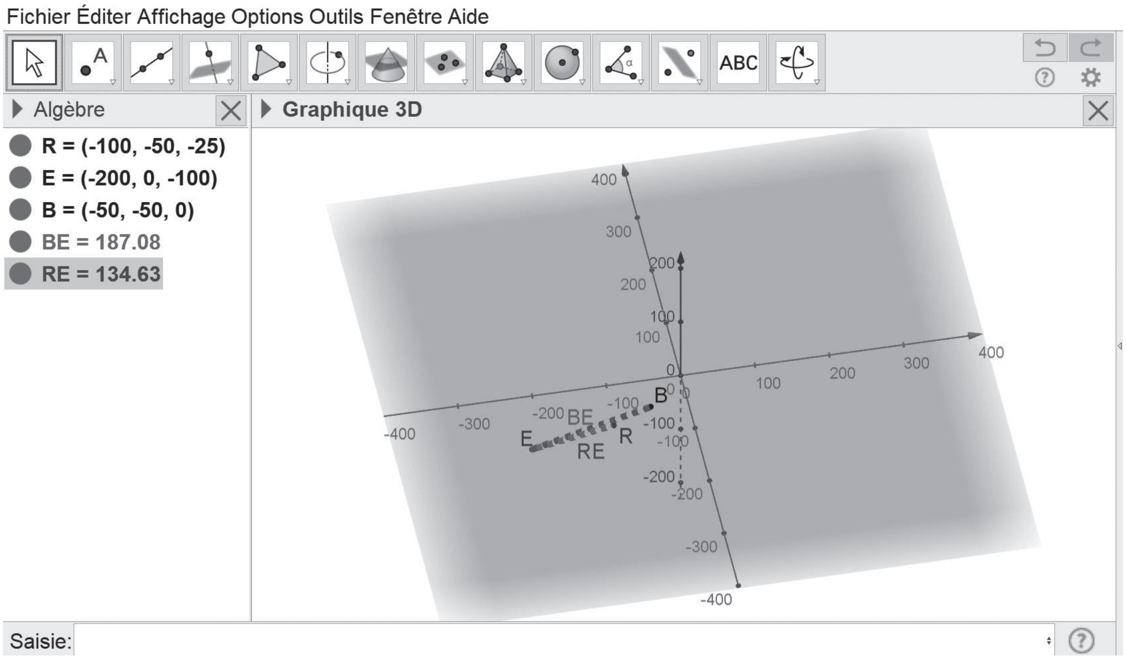


donc $EB=\sqrt{100^2+(50\sqrt{10})^2}$
$=\sqrt{35\,000}$.

La distance entre le bateau et l'épave est d'environ 187 m.

3. Non, car sur le graphique, la distance observée entre les deux points ne tient pas compte de la profondeur.

4.



4 Produits scalaires dans les plans de l'espace

1. *ABCD* est un tétraèdre régulier donc toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

Ainsi (*HD*) hauteur du triangle *BCD* donc (*HD*) est aussi une médiane et donc *H* est le milieu de [*BC*].

Dans le triangle *ABC*, *H* milieu de [*BC*] donc (*AH*) médiane du triangle *ABC* mais aussi hauteur.

Ainsi $(AH) \perp (BC)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{HC} \times \overline{BC} = 2 \times 4 = 8.$

2. a. • Dans le plan (*BCD*) ;

• Dans le plan (*BCD*) ;

• Dans le plan (*ABK*).

b. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{CD} \times \overline{KC} = 4 \times (-2) = -8.$

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OD} = \overline{HD} \times \overline{OD}.$

Or $HD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ et $OD = \dfrac{2}{3}HD$.

Ainsi $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{5} \times \dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{5} = \dfrac{40}{3}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \overline{AB} \times \overline{AK}.$

Or $AK = BK = HD = 2\sqrt{5}$. Cela signifie que *ABK* est un triangle isocèle en *K* donc *K'* est le milieu de [*AB*].

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = \overline{AK'} \cdot \overline{AK} = 4 \times \dfrac{4}{2} = 8.$

3. a. Dans le plan (*BCD*), $(BC) \perp (HD)$ donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$.

Dans le plan (*ABC*), $(BC) \perp (AH)$ donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

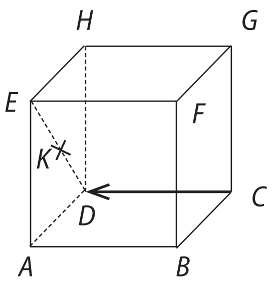
b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HD}$

$= 0 + 0 = 0.$

c. Les droites (*BC*) et (*AD*) sont orthogonales.

Savoir-faire

3



$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.$$

K est le centre de la face *ADHE*.

4 $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$. Ainsi $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

5 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HD}$.

Ainsi $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont non colinéaires.

8 **a.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}$

$= -(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB}) + 2\overrightarrow{IJ}$

$= -(\overrightarrow{EA}) + \overrightarrow{FB} + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}.$

b. $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HF}$ donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.

9 **a.** Dans le triangle HKG, J et K milieux de deux côtés donc $2\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{BH}$ soit $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

b. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ donc B, C, E et H sont coplanaires donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires. Or $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont coplanaires.

10 O est le centre du cube donc O est aussi le centre du rectangle $ABGH$. Autrement dit O isobarycentre de A, B, G et H.

De plus K milieu de $[HG]$ donc K isobarycentre de H et G et de même L isobarycentre de A et B.

Ainsi $\{(H, 1), (G, 1)\} = (K, 2)$ et $\{(A, 1), (B, 1)\} = (L, 2)$ et donc $\{(K, 2), (L, 2)\} = (O, 4)$ donc O, L et K alignés.

13 • $\vec{u} - \vec{v}(5\,;0\,;-5)$; • $2\vec{u} + \vec{v}(1\,;3\,;2)$;
• $-3\vec{u} - \vec{v}(-3\,;-4\,;-1)$.

14 $\overrightarrow{AB}(-6\,;2\,;-3)$ donc $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\left(-\frac{12}{5}\,;\frac{4}{5}\,;-\frac{6}{5}\right)$.

On note $C(x\,;y\,;z)$ donc $\overrightarrow{BC}(x+4\,;y-5\,;z-1)$.

Ainsi $\begin{cases} x+4 = -\frac{12}{5} \\ y-5 = \frac{4}{5} \\ z-1 = -\frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{32}{5} \\ y = \frac{29}{5} \\ z = -\frac{1}{5}. \end{cases}$

Finalement $C(-6{,}4\,;5{,}8\,;-0{,}2)$.

15 **a.** G_1 isobarycentre de A, B et C donc $G_1 = \text{bary}\{(A, I), (B, I,), (C, I)\}$.

Ainsi $x_{G_1} = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{3} \times 12 = 4$.

De même $y_{G_1} = \frac{1}{3} \times -11 = -\frac{11}{3}$ et $z_{G_1} = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$.

$G_1\left(4\,;-\frac{11}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$.

b. $x_{G_2} = \frac{1}{-1+2+4}(-x_A + 2x_B + 4x_C) = \frac{1}{5} \times 35 = 7$.

De même $y_{G_2} = \frac{1}{5} \times (-40) = -8$ et $z_{G_2} = \frac{1}{5} \times 17 = \frac{17}{5}$.

$G_2\left(7\,;-8\,;\frac{17}{5}\right)$.

18 **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH}$
$= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + \overline{AB} \times \overline{BA} = -a^2$.

b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
$= 0 + \overline{AD} \times \overline{AD} = a^2$.

c. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BH}$
$= -a^2 + \overline{BJ} \times \overline{BG} = -a^2 + \frac{a\sqrt{2}}{2} \times a\sqrt{2}$
$= -a^2 + a^2 = 0$.

d. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}$
$= -a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2$.

19 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$
$= a \times \frac{1}{a}\overrightarrow{DA} + a \times \frac{1}{a}\overrightarrow{DC} + a \times \frac{1}{a}\overrightarrow{DH}$.

Ainsi $\overrightarrow{DF}(a\,;a\,;a)$.

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EK} = -1/2\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$
$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + 0\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$.

Ainsi $\overrightarrow{IK}\left(\frac{a}{2}\,;0\,;-\frac{a}{2}\right)$.

$\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HD})$
$= \overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.

Ainsi $\overrightarrow{GK}\left(a\,;-\frac{a}{2}\,;-\frac{a}{2}\right)$.

b. $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IK} = a \times \frac{a}{2} + a \times 0 + a \times (-\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{GK} = a \times a + a \times \left(-\frac{a}{2}\right) + a \times \left(-\frac{a}{2}\right)$
$= a^2 + 2 \times \left(-\frac{a^2}{2}\right) = 0$.

Ainsi $(DF) \perp (IK)$, $(DF) \perp (GK)$ et (IK) et (GK) sont deux droites sécantes du plan (IGK) donc $(DF) \perp (IGK)$.

Exercices d'entraînement

Vecteurs de l'espace

20 **a.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IL}$;
$\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{EB}$.

b. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$;
$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$.

21 **a.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.
b. $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}$.
c. $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$.
d. $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DE}$.

22 **a.** $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$; **b.** $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DH}$;
c. $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DH}$. **d.** $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

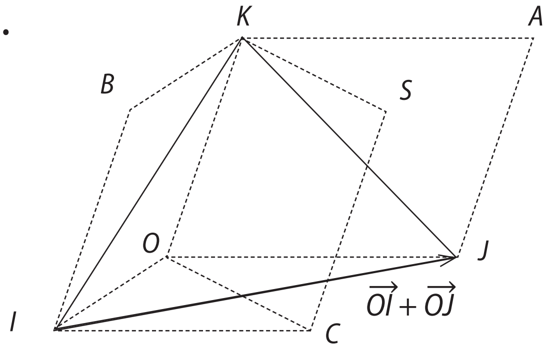
23 **a.** $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$;
b. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$;
c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$;
d. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$.

24 **a.** $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{GI}+\vec{0}=2\overrightarrow{GI}$.
b. G centre de gravité de BCD, cela signifie que
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$.
c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$
$=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$.

25 **a.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.
b. Démonstration de l'implication directe
$M\in\mathscr{E}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$.
Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Ainsi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.
Démonstration de la réciproque
Avec $M=D$, on a $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DD}$
donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\vec{0}+\overrightarrow{AD}$
donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

26 **a.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}$. ($I$ milieu de $[AB]$).
$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{MJ}$.
b. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MJ}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\overrightarrow{JM}\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{JI}$.
Or $ABCD$ non coplanaire donc $I\neq J$ donc $\overrightarrow{IJ}\neq\vec{0}$.
Ainsi, il n'existe pas de M de l'espace tel que
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
L'ensemble cherché est donc l'ensemble vide.

27 **a.**



b. • $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\Leftrightarrow(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC})=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{OI}$
$\Leftrightarrow$ $OICJ$ parallélogramme.
• De même, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{JA}=\overrightarrow{OK}$
$\Leftrightarrow$ $OKAJ$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow$ $OKBI$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OK}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow$ $IBSC$ parallélogramme.
• $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OJ})$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{JO}\Leftrightarrow\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{JA}$
$\Leftrightarrow$ $JASC$ parallélogramme.
c. $OICJKBSA$ forment un parallélépipède.

Vecteurs colinéaires, coplanaires

28 • Oui ; • Non ; • Non ; • Non.

29 • Oui ; • Non ; • Oui ; • Non.

30 • $\overrightarrow{EA}$; • $\overrightarrow{HD}$; • $\overrightarrow{DK}$; • $\overrightarrow{FB}$.

31 • (EH) ; • (EHG) ; • (EF) ; • (JL) ;
• (KIJ) ; • (AEC).

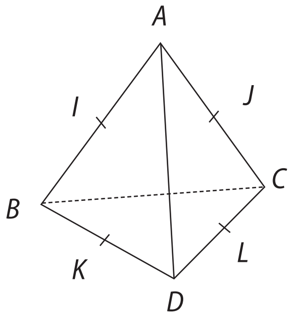
32 $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}$
$=3\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{BC}$.
Il existe $k=-3$ tel que $\vec{u}=k\overrightarrow{BC}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

33 $2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{EA}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$.
Ainsi il existe un couple k et k' tel que $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}+k'\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Cela signifie que A, B, C et D sont coplanaires.

34 **a.** • $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{JI}=-2\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$ vecteur directeur de (CB).
• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\vec{k}-\vec{\jmath}$; $\vec{k}-\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de (AB).
• $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{\jmath}+2\vec{\imath}$; $2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de (DC).
• $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{k}-\vec{\jmath}+2\vec{\imath}$; $2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de (AC).
b. • $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{k}-\vec{\jmath}$ et $2\vec{\imath}$ forment un couple de vecteurs directeurs de (ABC).
• De même, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ soit $2\vec{\imath}$ et $-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (BCD).
• De même, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ soit $\vec{k}-\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABD).

• De même, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soit $2\vec{i}-\vec{j}$ et $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ADC).

35 **a.**



b. $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

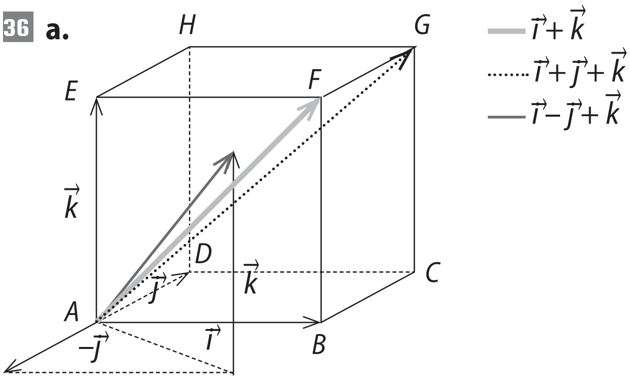
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}).$$

Ainsi il existe $k=\frac{1}{2}$ tel que $\overrightarrow{IL}=k(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$ donc $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

c. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{KL}$.
Ainsi $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont coplanaires.

d. K et L sont les milieux de $[BD]$ et $[DC]$ donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont des vecteurs directeurs de (ABC).
Par contre, $A\in(ABC)$ et $K\notin(ABC)$ donc $\overrightarrow{AK}$ non directeur de (ABC).
Ainsi $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas coplanaires.

36 **a.**



b. $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires puisque $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ forme le plan (ABC) et (AE) est une droite orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{k}$ ne peut pas être une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Non puisque $\vec{k}$ ne peut pas s'exprimer en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

d. Les vecteurs $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ACG). Or $\vec{i}$ n'est pas un vecteur directeur de ce plan, donc ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

37 **1. a.** $\overrightarrow{SE}$ est un combinaison linéaire de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont colinéaires et ainsi S, E, B et C sont coplanaires.

b. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{BS}+\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}=\left(\frac{3}{4}-1\right)\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$

$$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Ainsi $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont alignés.

2. a. Comme au **1. a.** S, F, B et C sont des points coplanaires.

b. On conjecture que quelle que soit la valeur de p, les points B, F et C sont alignés.

c. Pour un réel p non nul,

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{BS}+\frac{p-1}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{p}\overrightarrow{SC}$

$=-\frac{p}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{p-1}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{p}\overrightarrow{SC}=\frac{p-1-p}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{p}SC$

$=-\frac{1}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{p}\overrightarrow{SC}$

$=\frac{1}{p}(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC})=\frac{1}{p}\overrightarrow{BC}.$

Ainsi $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc B, F et C sont alignés.

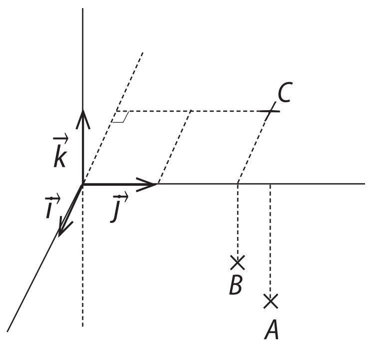
Repérage

38 $C(1\,;1\,;0)$; $\overrightarrow{AH}(0\,;1\,;1)$; $G(1\,;1\,;1)$; $\overrightarrow{DG}(1\,;0\,;1)$.

39 **a.** $\overrightarrow{AB}(-3\,;2\,;2)$; $\overrightarrow{AC}(1{,}5\,;-1\,;-1)$.
b. $-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

40 • $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}(-6\,;2\,;0)$;
• $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}(-4\,;2\,;-1)$;
• $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}(0\,;0\,;1)$;
• $\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}+\vec{w}(-1{,}5\,;1{,}5\,;-1{,}75)$.

41 **a.**



b. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;2)$; $\overrightarrow{BC}(-1\,;-1\,;)$; $\overrightarrow{CA}(0\,;1\,;-3)$.
c. $\|\overrightarrow{AB}\|^2=1^2+0^2+2^2=5$;
$\|\overrightarrow{BC}\|^2=3$ et $\|\overrightarrow{CA}\|^2=10$.
ABC n'est pas rectangle puisque $CA^2\neq AB^2+BC^2$.
d. $I\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $J\left(-1\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{2}\,;2\,;-2\right)$.

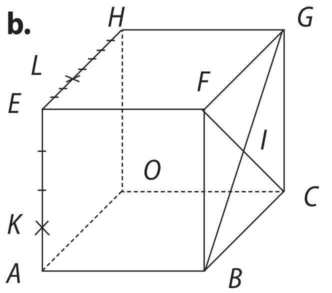
42 a. $(OA) \perp (OC)$ donc $\vec{i} \perp \vec{j}$. De même $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$.

De plus $\|\vec{i}\| = \left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right\| = \left|\frac{1}{4}\right| \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{1}{4} \times OA = 1$.

De même $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé.

b.



$O\,(0 ; 0 ; 0)$; $A\,(4 ; 0 ; 0)$; $B\,(4 ; 4 ; 0)$; $C\,(0 ; 4 ; 0)$; $E\,(4 ; 0 ; 4)$; $F\,(4 ; 4 ; 4)$; $G\,(0 ; 4 ; 4)$; $H\,(0 ; 0 ; 4)$. $I\,(2 ; 4 ; 2)$; $K\,(4 ; 0 ; 1)$ et $L\,(2{,}5 ; 0 ; 4)$.

c. $\|\overrightarrow{IK}\|^2 = (4-2)^2 + (0-4)^2 + (1-2)^2 = 21$.

$\|\overrightarrow{IL}\|^2 = (2{,}5-2)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2 + (4-2)^2 = 20{,}25$.

$\|\overrightarrow{LK}\|^2 = (4-2{,}5)^2 + (0-0)^2 + (1-4)^2 = 11{,}25$.

IKL est quelconque car il n'a pas deux côtés de même longueur et $\|\overrightarrow{IK}\| \neq \|\overrightarrow{IL}\|^2 + \|\overrightarrow{LK}\|^2$ donc il n'est pas rectangle.

43 $\overrightarrow{AB}\,(-3 ; 1 ; 2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(-3 ; 1 ; 2)$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc *ABDC* est un parallélogramme.

44 $\overrightarrow{AB}\,(1 ; 3 ; -9)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-13 ; -39 ; 117)$.

Ainsi $\overrightarrow{AC} = -13\overrightarrow{AB}$ donc *A*, *B* et *C* sont alignés.

45 a. $\overrightarrow{OC}\,(1 ; 2 ; 7)$, $2\overrightarrow{OA}\,(-2 ; 2 ; 4)$ et $3\overrightarrow{OB}\,(3 ; 0 ; 3)$. Ainsi $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}\,(1 ; 2 ; 7)$ et donc $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

b. $\overrightarrow{OC}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{OB}$ sont des vecteurs coplanaires et alors *O*, *A*, *B* et *C* sont des points coplanaires.

46 a. $\overrightarrow{AB}\,(-1 ; 0 ; 5)$, $\overrightarrow{AC}\,(-2 ; -2 ; -2)$ et $\overrightarrow{DE}\,(-4 ; -2 ; 8)$.

b. $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2y \\ -2 = -2y \\ 8 = 5x - 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x - 2 \\ y = 1 \\ 8 = 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Ce système admet un unique couple solution (2 ; 1) donc $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires donc (*DE*) est incluse dans le plan (*ABC*).

47 a. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$:

$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ et $L\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{AB}(1 ; 0 ; 0)$ et $\overrightarrow{BC}(-1 ; 1 ; 0)$ donc $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$.

Ainsi $J\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{6} ; \frac{2}{3} ; 0\right)$.

Puis $D(0 ; 0 ; 1)$, $C(0 ; 1 ; 0)$ et *K* milieu de [*DC*] donc $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Ainsi $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

b. Voyons si il existe un triplet de réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{IL} + y\overrightarrow{IK} + z\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$.

Cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z = 0 \\ z = -\frac{1}{2}y \times \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2}y \times \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ z = -\frac{3}{4}y \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}y\right) - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{4}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y \\ z = -\frac{3}{4}y \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Avec $y = 4$, $x = -3$ et $z = -3$. Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

Barycentre

48 a. $G = \text{bary}\{(A, 3), (D, 3)\}$.

b. *G* milieu de [*AD*].

49 a. $G\left(\frac{1+2(-1)+3(2)}{1+2+3} ; \frac{1+2(1)+3(0)}{1+2+3} ; \frac{1+2(0)+3(3)}{1+2+3}\right)$

soit $G\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{3}\right)$.

b. $G'\left(\frac{-2(1)+3(-1)-2(2)}{-2+3-2} ; \frac{-2(1)+3(1)-2(0)}{-2+3-2} ; \frac{-2(1)+3(0)-2(3)}{-2+3-2}\right)$

soit $G'(9 ; -1 ; 8)$.

c. $I\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} ; 2\right)$. **d.** $H\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

50 a. $I = \text{bary}\ \{(A, 1), (B, 1)\}$ et $J = \text{bary}\ \{(B, 1), (C, 1)\}$

b. $K = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (B, 1), (C, 1), (H, 1)\}$
$= \text{bary}\ \{(I, 2), (J, 2), (H, 1)\}$.

Et ainsi, pour tout point M de l'espace,
$5\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} + 1\overrightarrow{MH}$
et pour $M = I$, $5\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{IJ} + 1\overrightarrow{IH}$.
Ainsi *I*, *J*, *K* et *H* sont coplanaires.

51 a. $G = \text{bary}\ \{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
$= \text{bary}\ \{(A, 1), (H, 3)\}$.

b. $G = \text{bary}\ \{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
$= \text{bary}\ \{(I, 2), (J, 2)\}$.

52 a. *I* milieu de [*SO*] donc $I = \text{bary}\{(S, 4), (O, 4)\}$.
Or *O* centre du carré *ABCD*
donc $O = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$
donc $I = \text{bary}\{(S, 4), (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$.

b. $A\,(0\,;0\,;0)$, $B\,(1\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;1\,;0)$, $S\,(0\,;0\,;1)$ et $C\,(1\,;1\,;0)$ donc $I\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$.

53 **1. a.** $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{EB}=\vec{0}.$

Ainsi $E=\text{bary}\left\{\left(A,-\frac{3}{2}\right),\left(B,\frac{5}{2}\right)\right\}$.

b. $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\overrightarrow{AF}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\overrightarrow{FA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}=\vec{0}.$

Ainsi $F=\text{bary}\left\{\left(A,-\frac{3}{5}\right),\left(B,-\frac{2}{5}\right)\right\}$.

$\overrightarrow{FG}=\frac{2}{7}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \overrightarrow{FG}-\frac{2}{7}(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{7}\overrightarrow{GF}-\frac{2}{7}\overrightarrow{GE}=\vec{0}.$

Ainsi $G=\text{bary}\left\{\left(F,-\frac{5}{7}\right),\left(E,-\frac{2}{7}\right)\right\}$.

2. a. $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-5(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

$=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}.$

b. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}.$

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}).$

Ainsi $\overrightarrow{FB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CE}.$

$\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont donc colinéaires et les droites (FB) et (CE) sont parallèles.

Produit scalaire

54 • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$;

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AB}=a^2$;

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=0$;

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2$;

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overline{AB}\times\overline{AB}=a^2$;

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overline{AB}\times\overline{BA}=a\times(-a)=-a^2$.

55 • $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times2+1\times(-1)+(-5)\times0=5.$

• $2\vec{u}\cdot3\vec{v}=(2\times3)\times\vec{u}\cdot\vec{v}=6\times5=30.$

• $-\vec{u}\cdot\frac{1}{2}\vec{v}=(-1\times\frac{1}{2})\times\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{5}{2}.$

• $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=3\times(3+2)+1\times0+(-5)\times(-5+0)=40.$

56 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AB=(AB)^2=16.$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$AB^2+0=AB^2=16.$

b. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{KL}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JL})$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{JL}$

$=0+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=AE^2=1.$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{LJ})$

$=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{LJ}$

$=\overline{EF}\times\frac{1}{2}\overline{EF}+0+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}$

$=\frac{1}{2}EF^2=8.$

57 **a.** • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AI=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}.$

Puisque le triangle ABD est équilatéral et ainsi $[ID]$ est une médiane mais aussi une hauteur.

• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$. Même démonstration.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$

c. Ainsi $(AB)\perp(CD)$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$

$=1\times1\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{IB}\times\overrightarrow{AB}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0=0.$

Ainsi $(IJ)\perp(AB)$.

58 **a.** $AB=\sqrt{(5-(-3))^2+(3-2)^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{81}=9.$

$AC=\sqrt{(1-(-3))^2+(-5-2)^2+(-6-(-2))^2}=\sqrt{81}=9.$

b. $\overrightarrow{AB}(8\,;1\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;-7\,;-4)$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32-7-16=9.$

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

$\Leftrightarrow 9=9\times9\times\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{1}{9}.$

Ainsi $\text{mes}(\widehat{AB,AC})\approx1{,}5$ rad.

59 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base orthonormée de l'espace donc il existe un unique triplet de réels (a,b,c) tel que $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$.

Puis $\vec{u}\cdot\vec{i}=(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\cdot\vec{i}=a\vec{i}\cdot\vec{i}+0+0=a.$

De même $\vec{u}\cdot\vec{j}=0+b\vec{j}\cdot\vec{j}+0=b$ et $\vec{u}\cdot\vec{k}=c\,\vec{k}\cdot\vec{k}=c.$

Finalement $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{i})\,\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{j})\,\vec{j}+(\vec{u}\cdot\vec{k})\,\vec{k}.$

60 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 + 4 \times 0 + (-5) \times (-3) = 24$;
$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$;
$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$;
$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(3+3)^2 + (4+0)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{116}$.
b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
$\Leftrightarrow 24 = \sqrt{50} \times \sqrt{18} \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{24}{\sqrt{50} \times \sqrt{18}}$
$\Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{24}{30} \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{4}{5}$.
mes $(\widehat{u, v}) \approx 0{,}6$ rad.

61 **a.** • $\overrightarrow{SG} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AH}$

$$= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$$
$$= \overrightarrow{SA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{HA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}) \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} + \frac{1}{3}AB^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{1}{3}BK \times AB \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} + \frac{a}{3} \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12} = 0.$$

• $\overrightarrow{SG} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AJ}$
$= \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$. (De même).

b. D'après **a.**, $(SG) \perp (AH)$ et $(SG) \perp (AJ)$ donc (SG) est orthogonale à deux droites sécantes (AH) et (AJ) incluses dans le plan (ABC). Ainsi (SG) est orthogonale au plan (ABC).

62 $\overrightarrow{AB}(1 ; 2 ; -1)$, $\overrightarrow{AC}(-2 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{AD}(1 ; 2 ; 5)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + (-1) \times 0 = 0$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = 0$;
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 5 = 0$.
Ainsi $(AB) \perp (AC)$, $(AB) \perp (AD)$ et $(AC) \perp (AD)$.
Cela signifie que le tétraèdre $ABCD$ est trirectangle en A.

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{AB \times AC}{2}\right) \times AD$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2}}{2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}$$
$$= 5.$$

63 **1. a.** $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$.

b. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$.

c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \times 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + 0 \times 0 = 0$.

d. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

2. $r\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $s\left(\frac{1}{\sqrt{6}} ; -\frac{2}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $t\left(0 ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\|\vec{r}\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$; $\|\vec{s}\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1$

et $\|\vec{t}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$; $\vec{r} \cdot \vec{t} = 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$

et $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0 - \frac{2}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}} = -\frac{3}{\sqrt{12}}$.

$(\vec{r} ; \vec{s} ; \vec{t})$ n'est pas orthonormée.

64 **a.** $C(1 ; 1 ; 0)$; $N(b ; b ; 0)$ donc $\overrightarrow{CN}(b-1 ; b-1 ; 0)$.
$B(1 ; 0 ; 0)$; $S(0 ; b ; b)$ donc $\overrightarrow{BS}(-1 ; b ; b)$.
b. (CN) et (BS) sont orthogonales
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$
$\Leftrightarrow (b-1) \times (-1) + (b-1) \times b + 0 \times b = 0$
$\Leftrightarrow -b + 1 + b^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.
Mais dans le cas où $b = 1$, les deux cubes sont confondus et $N = C$. Donc il n'y a pas de droite (CN).
Ainsi, cela n'est pas possible.

Se tester

65 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Vrai ; **4.** Faux ; **5.** Faux.

66 **1.** Faux. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = a^2$.
2. Vrai. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$.
3. Vrai. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$.
4. Faux. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF}$
$= 0 + 0 = 0$. Ainsi $(AG) \perp (HF)$.
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) \cdot \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DH}$
$= AE^2 + 0 = a^2$. Ainsi $(AC) \perp (DH)$.
5. Faux. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = BD \times BD = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$.

Or $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH} = BD\times BH\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow 2a^2=\sqrt{2}a\times\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a^2}{\sqrt{2}a\sqrt{3}a}=\cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\cos(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BH}})$. Ainsi mes$(\widehat{BD\,;BH})\neq\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

6. Faux.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HB} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DB})$
$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{DB}$
$= 0+0+(-a^2)+0$
$= -a^2$.

67 **1. b** ; **2. a** ; **3. c** ; **4. b** ; **5. c**.

68 **1. b.** $\overrightarrow{AB}$ (2 ; 0 ; 1) et $\overrightarrow{AC}$ (–3 ; –2 ; 2).
Ainsi • $\overrightarrow{AB}$ non colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ puisque $\overrightarrow{AB}\neq k\overrightarrow{AC}$;
• $\overrightarrow{AB}$ non orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\neq 0$.
2. c. $\overrightarrow{AD}$ (7 ; 2 ; 0) donc $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ (0 ; 0 ; 0).

3. c. • A, B et C sont non alignés puisque $\overrightarrow{AB}$ non colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ (**1.**).
• D'après **2.**, il existe un triplet de nombres réels (2 ; –1 ; –1) tel que $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
soit $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
Ainsi A, B, C et D sont coplanaires.

4. b. $\overrightarrow{AE}(-2\,;0\,;0)$. On cherche x, y et z tels que $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AE}=\vec{0}$.

On résout $\begin{cases}2x-3y-2z=0\\0x-2y+0z=0\\1x+2y+9z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2z\\y=0\\x=-9z\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\y=0\\x=0.\end{cases}$

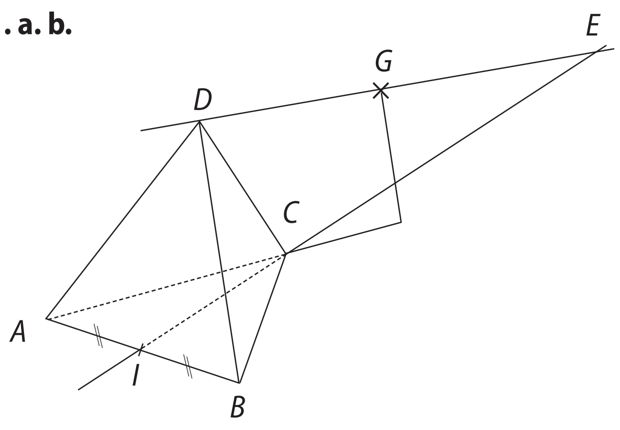
Ce système admet une unique solution (0 ; 0 ; 0).
Les points sont non coplanaires.

5. a. $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont des représentants de vecteurs qui n'utilisent que 3 points donc ils sont coplanaires.

Exercices d'approfondissement

69 **Calcul vectoriel**

1. a. b.



2. a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID})$
$=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$
$=\vec{0}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$
$=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$

b. $\overrightarrow{AG}=1{,}5\overrightarrow{AC}+0{,}5\overrightarrow{BD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AC}+0{,}5(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+0{,}5(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{ID}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=1{,}5\overrightarrow{IC}+0{,}5\overrightarrow{ID}$.

On peut en déduire que $G\in(ICD)$ ou que les points I, C, D et G sont coplanaires.

3. L'intersection entre les plans (ABC) et (ICD) est la droite (IC). Donc la droite (DG) incluse dans le plan (ICD) coupe le plan (ABC) là où elle coupe (IC).

Ainsi l'intersection de la droite (DG) et de la droite (IC) est le point E cherché.

70 **Une droite et un plan**

1. $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{GC}$
$=\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KC}$.

2. D'après **1.**, $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont coplanaires. Or les points H et I n'appartient pas au plan (KJC) donc (HI) est parallèle au plan (KJC).

71 **Ensemble des barycentres de trois points**

1. a. $M=\text{bary}\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ tels que $a+b+c\neq 0$.
Ainsi $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$
$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

b. D'après **a.**, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de même origine A sont coplanaires, et donc A, M, B et C sont coplanaires (A même origine).

c. Tous les barycentres de trois points appartiennent au plan défini par ses trois points.

2. a. $N\in(ABC)$ donc à l'aide de la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ du plan (ABC) il existe un unique couple de réels (x ; y) tels que $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=x(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB})+y(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC})$
$\Leftrightarrow (1-x-y)\overrightarrow{NA}+x\overrightarrow{NB}+y\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Or $1 - x - y + x + y = 1$ ($\neq 0$) donc N est le barycentre du système $\{(A, 1 - x - y), (B, 1), (C, 1)\}$.

c. Tout point appartenant à un plan défini à l'aide de trois points non alignés peut être considéré comme barycentre de ces trois points.

3. A, B et C sont trois points non alignés.

Il existe trois nombres a, b et c tels que $a + b + c \neq 0$ et M barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\} \Leftrightarrow M \in (ABC)$.

72 Colinéarité et base

1. $ABCD$ tétraèdre donc A, B, C et D sont non coplanaires et donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires.

2. a. $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD}.$

b. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

c. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t non nul tel que $\overrightarrow{IK} = t\overrightarrow{JL}$.

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t non nul tel que :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD}\right)t$

$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB} + \left(-1 + \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AC} + \left(-\frac{1}{2} - kt\right)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}t = 0 \\ -1 + \frac{1}{2}t = 0 \text{ puisque } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ non coplanaires} \\ -\frac{1}{2} - kt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -\frac{1}{2}k. \text{ Ainsi } k = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

73 Avec un logiciel

1. $1 + (1 - m) + (2m - 1) + (1 - m) = 2$.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la somme des coefficients est non nulle donc G_m existe.

2. c. On peut conjecturer que le lieu décrit par G_m quand m décrit $\mathbb{R}$ est une droite.

3. a. $G_0 = \text{bary}\{(E, 1), (B, 1), (G, -1), (D, 1)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (B, 1), (D, 1), (G, -1)\}$

$= \text{bary}\{(I, 3), (G, -1)\}$.

Ainsi $3\overrightarrow{G_0I} - \overrightarrow{G_0A} - \overrightarrow{AG} = 0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{G_0A} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2I} = \overrightarrow{AO_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{O_2E}$ donc $3\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2E}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}.$

Ainsi $2\overrightarrow{G_0A} + 3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{G_0A}$ et $2\overrightarrow{G_0A} = \vec{0}$.

G_0 et A sont confondus.

b. $G_0 = \text{bary}\{(I, 3), (G, -1)\}$ donc $G_0 = A$, I et G sont alignés.

4. $G_1 = \text{bary}\{(E, 1), (B, 0), (G, 1), (D, 0)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (G, 1)\}$

$= \text{bary}\{(O_1, 2)\} = O_1$.

5. a. $G_m = \text{bary}\{(E, 1), (B, 1 - m), (G, 2m - 1), (D, 1 - m)\}$

$= \text{bary}\{(E, 1), (G, 2m - 1), (O_2, 2 - 2m)\}$

$G_m = \text{bary}\{(E, 1), (G, 1), (G, 2m - 2), (O_2, 2 - 2m)\}$

$G_m = \text{bary}\{(O_1, 2), (G, 2m - 2), (O_2, 2 - 2m)\}$.

Ainsi, pour tout point M de l'espace,

$2\overrightarrow{MG_m} = 2\overrightarrow{MO_1} + (2m - 2)\overrightarrow{MG} + (2 - 2m)\overrightarrow{MO_2}$.

Avec $M = A$, $2\overrightarrow{AG_m} = 2\overrightarrow{AO_1} + (2m - 2)\overrightarrow{AG} + (2 - 2m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_1} + (m - 1)\overrightarrow{AG} + (1 - m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{AO_2} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G} + (1 - m)\overrightarrow{AO_2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = (1 + m - 1 + 1 - m)\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{O_2G}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)(\overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{CG})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{AO_2} + (m - 1)\overrightarrow{CG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{O_2O_1} + (m - 1)\overrightarrow{CG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2} + m\overrightarrow{O_2O_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_1}$.

b. D'après **5. a.** A, G_m et O_1 sont alignés donc lorsque m décrit $\mathbb{R}$, G_m décrit (AO_1). Ainsi l'ensemble des points G_m est la droite (AO_1).

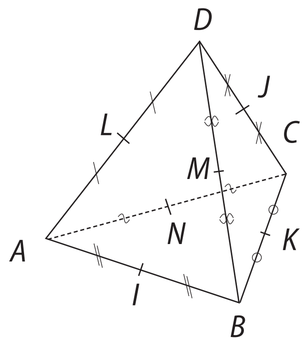
6. a. A, G_m et O_1 sont alignés donc E, A, G_m et O sont coplanaires.

b. Dans ce cas $G_m \in (EI)$ et $G_m \in (AO_1)$. Ainsi G_m est le point d'intersection de (AO_1) et (EI).

Or $(EI) = (EO_2)$ donc G_m est le point d'intersection de (AO_1) et (EO_2). Or AO_2O_1E est un rectangle donc G_m est le milieu des diagonales donc $m = \frac{1}{2}$.

74 Repère fondamental

1. a.



b. $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

De même $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ainsi $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$ donc $ILJK$ parallélogramme donc $[IJ]$ et $[LK]$ ont le même milieu.

Puis $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

De même $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Ainsi $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NJ}$ donc $IMJN$ est un parallélogramme et $[IJ]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

Finalement $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ ont le même milieu, O.

c. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD}$

$= 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$.

Or O milieu de $[IJ]$ donc $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

2. D'après **1. c.**, O isobarycentre des points A, B, C et D donc $4\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

soit $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi $O\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$.

3. a. • I milieu de $[AB]$ donc $I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OI} = 1\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}$ donc $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

• K milieu de $[BC]$ donc $K = \text{bary}\{(B, 1), (C, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

• M milieu de $[BD]$ donc $M = \text{bary}\{(B, 1), (D, 1)\}$.

Ainsi $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

b. O milieu de $[MN]$ et $N \notin (MIK)$ donc $O \notin (MIK)$.

O, M, I, et K sont des points non coplanaires.

Ainsi $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OK} ; \overrightarrow{OM})$ est un repère de l'espace.

c. $4\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ (1)

$4\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ (2)

$4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ (3)

Donc ((2) – (1)) $2\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OK}$

((3) – (1)) $2\overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OM}$

((2) + (3)) $2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OK} + 4\overrightarrow{MK}$

d'où $\overrightarrow{AC}\,(-2 ; 2 ; 0)$, $\overrightarrow{AD}\,(-2 ; 0 ; 2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(0 ; 2 ; 2)$.

Donc $\begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ x_D - x_A = -2 \\ x_B - x_A = 0 \\ x_A + x_B + x_C + x_D = 0 \text{ d'après le } \mathbf{1.\ c.} \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ x_B = 1 \\ x_C = -1 \\ x_D = -1 \end{cases}$

De plus, $\begin{cases} y_C - y_A = 2 \\ y_D - y_A = 0 \\ y_B - y_A = 2 \\ y_A + y_B + y_C + y_D = 0 \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = -1 \\ y_B = 1 \\ y_C = 1 \\ y_D = -1 \end{cases}$

Enfin, $\begin{cases} z_C - z_A = 0 \\ z_D - z_A = 2 \\ z_B - z_A = 2 \\ z_A + z_B + z_C + z_D = 0 \end{cases}$ ainsi $\Leftrightarrow \begin{cases} z_A = -1 \\ z_B = 1 \\ z_C = -1 \\ z_D = 1 \end{cases}$

Finalement, dans le repère $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM})$,
$A(1 ; -1 ; -1)$, $B(1 ; 1 ; 1)$, $C(-1 ; 1 ; -1)$ et $D(-1 ; -1 ; 1)$.

75 Analytique ou vectoriel

1. a. $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(1 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 1 ; 1)$, $D(1 ; 0 ; 1)$.

I isobarycentre de G, C et B

donc $I\left(\frac{0+1+1}{3} ; \frac{0+0+1}{3} ; \frac{0+0+0}{3}\right)$; $I\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$.

J isobarycentre de G, C et H

donc $J\left(\frac{0+1+0}{3} ; \frac{0+0+0}{3} ; \frac{0+0+1}{3}\right)$; $J\left(\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$.

b. $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{DG}(-1 ; 0 ; -1)$

donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{3} \times (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 0 + \frac{1}{3} \times (-1)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Puis $\overrightarrow{FC}(1 ; -1 ; 0)$

donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{FC} = 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times 0 = 0$.

Finalement (IJ) est perpendiculaire à (DG) et à (FC).

2. a. D'une part, $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{3}\right) ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\Big)$; d'autre part

$\overrightarrow{GC}\,(1 ; 0 ; 0)$, $\overrightarrow{GF}(0 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{GH}(0 ; 0 ; 1)$,

donc $-\frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH})\left(-\frac{1}{3}\right) ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\Big)$; d'où l'égalité.

b. $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}GC \times GC + \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3}GH \times GH$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

$\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{FC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{FC}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{FC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{FC}$

$= \frac{1}{3}GC \times GC + \frac{1}{3}GF \times FG - \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

On en conclut que (IJ) est perpendiculaire à (DG) et à (FC).

76 Surfaces de niveau

Partie A

1. $f(M) = MA^2 + MB^2$

a. $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$

b. • $MA^2 + MB^2 = 44{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 90 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 44{,}5$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{5^2}{2} = 44{,}5 \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4$ $(MI > 0)$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre I et de rayon 4.

• $MA^2 + MB^2 = 12{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 12{,}5 \Leftrightarrow 2MI^2 = 12{,}5 - \frac{5^2}{2} \Leftrightarrow MI^2 = 0$

$\Leftrightarrow M = I.$

• $MA^2 + MB^2 = 2{,}5$

$MA^2 + MB^2 = 2{,}5 \Leftrightarrow MI^2 = -5 \Leftrightarrow M$ n'existe pas.

Donc cet ensemble est vide.

c. $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - 12{,}5}{2}.$

Si $k \geqslant 12{,}5$ alors $\frac{k-12{,}5}{2} \geqslant 0$ donc $MI = \sqrt{\frac{k-12{,}5}{2}}$.

Ainsi si $k \geqslant 12{,}5$ alors M appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-12{,}5}{2}}$.

2. $f(M) = 2MA^2 + 3MB^2$:

a. $2MA^2 + 3MB^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2$

$= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= 2[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}] + 3[\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}]$

$= 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}).$

Or $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$ cela signifie $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Ainsi $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2$.

b. $G = \text{bary}\{(A, 2), (B, 3)\}$donc $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

soit $5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Comme $AB = 5$, $AG = 3$ et $GB = 2$.

• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 75$

$\Leftrightarrow 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 = 75$

$\Leftrightarrow 5MG^2 + 18 + 12 = 75$

$\Leftrightarrow MG^2 = 9$

$\Leftrightarrow MG = 3$ $(MG > 0)$.

Ainsi M appartient à la sphère de centre G de rayon 3.

• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 30$

$\Leftrightarrow 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 = 30$

$\Leftrightarrow 5MG^2 = 0$

$\Leftrightarrow MG = 0.$

Ainsi $M = G$.

• D'après **2. a.**, $2MA^2 + 3MB^2 = 10 \Leftrightarrow 5MG^2 = -20$.

Ainsi M n'existe pas et cet ensemble est vide.

Partie B

1. $a + b \neq 0$.

a. $aMA^2 + bMB^2 = a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$= a\overrightarrow{MG}^2 + 2a\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{MG}^2 + 2b\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + b\overrightarrow{GB}^2$

$= (a + b)\overrightarrow{MG}^2 + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB})$

$= (a + b)\overrightarrow{MG}^2 + a\overrightarrow{GA}^2 + b\overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0}$

$= (a + b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2.$

b. $aMA^2 + bMB^2 = k$

$\Leftrightarrow (a + b)\, MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a + b}.$

Ainsi si $k \geqslant aGA^2 + bGB^2$ alors $(\mathscr{M}_k)$ est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}}$ et sinon $(\mathscr{M}_K)$ est vide.

2. $a + b = 0$

a. $aMA^2 + bMB^2 = k$

$\Leftrightarrow aMA^2 - aMB^2 = k$ (car $a + b = 0 \Leftrightarrow -a = b$)

$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$ (a non nul).

b. $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$

$= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}.$

En effet, I milieu de $[AB]$ donc $I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$ et donc pour tout point M de l'espace $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

c. $M \in (\mathscr{M}_K) \Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 = k$ avec $a + b = 0$

$\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}$ avec $a \neq 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{k}{a}$ avec $a \neq 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2a}$ avec $a \neq 0$.

$\Leftrightarrow IH \times AB = \frac{k}{2a}$ avec $a \neq 0$ où H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\Leftrightarrow IH = \frac{k}{2a}AB$ avec $a \neq 0$.

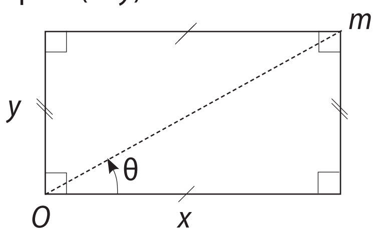
Si $H \in [IB]$: $IH = \frac{k}{10a}$; Si $H \in [IA]$: $IH = -\frac{k}{10a}$.

Ainsi M appartient au plan perpendiculaire à (AB) passant par le point $H \in (AB)$ et défini comme ci-dessus.

77 Coordonnées sphériques

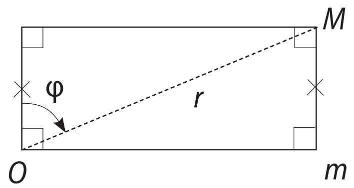
Partie A

1. a. Dans le plan (xOy) :



En utilisant la trigonométrie, on obtient $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

Dans le plan(OmM) :



En utilisant la trigonométrie, on obtient $\cos\varphi = \frac{z}{r}$.

b. D'après les figures précédentes, $r^2 = Om^2 + mM^2$
$\Leftrightarrow r^2 = Om^2 + z^2$ et $Om^2 = x^2 + y^2$.

Ainsi $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ($r > 0$).

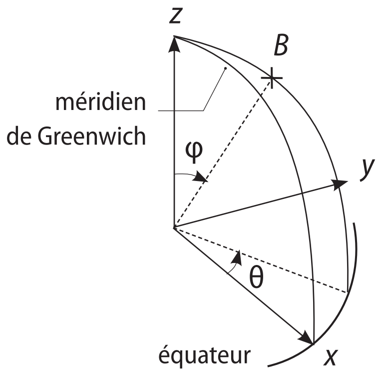
On a bien :si $M(x\,;y\,;z)$ alors $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) \end{cases}$

2. Si $M(r\,;\theta\,;\varphi)$ alors dans le plan (OMz), en utilisant la trigonométrie : $\cos\varphi = \frac{z}{r} \Leftrightarrow z = r\cos\varphi$ et $\sin\varphi = \frac{Om}{r}$
$\Leftrightarrow Om = r\sin\varphi$. Puis dans le plan ($Oxy$), en utilisant la trigonométrie : $\cos\theta = \frac{x}{Om} \Leftrightarrow x = \cos\theta \times Om$
$\Leftrightarrow x = r\cos\theta\sin\theta$ et $\sin\theta = \frac{y}{Om} \Leftrightarrow y = Om \times \sin\theta$
$\Leftrightarrow y = r\sin\theta\sin\varphi$.

Partie B

1. r est le rayon de la terre donc $r = 6\,000$.

2. θ et φ correspondent à la latitude et à la longitude.



3. $r = 6\,000$, $\theta = 9°$ et $\varphi = 13°$ donc, d'après **A. 2.**,

$\begin{cases} x = 6\,000 \times \sin 13 \times \cos 9 \\ y = 6\,000 \times \sin 13 \times \sin 9 \\ z = 6\,000 \times \cos 13 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \approx 1\,333 \\ y \approx 211 \\ z \approx 5\,846 \end{cases}$

Conakry a pour coordonnées cartésiennes :
(1 333 ; 211 ; 5 846).

7 Géométrie analytique de l'espace

Manuel pages 107 à 122

Activités d'introduction

1 Des plans particuliers

1. a. $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

b. La cote de ces cinq points est nulle ainsi (ABC) : $z = 0$.

c. $(ABE) : y = 0$; $(ADE) : x = 0$; $(EFG) : z = 1$.

2. a. Dans $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(AC) : y = x$

b. $E(0\,;0\,;1)$ donc $y_E = x_E$.

$G(1\,;1\,;1)$ donc $y_G = x_G$.

O milieu de $[AG]$ donc $O\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $y_0 = x_0$.

Ainsi E, G, O ont des coordonnées qui vérifient la relation du **2. a.**

Cette relation ne peut pas caractériser une droite car ces trois points ne sont pas alignés.

c. A, E, G et C forment un rectangle donc ils sont coplanaires et O est le milieu de $[AG]$ donc O est coplanaire avec A, E, G et C.

Pour $A : y_A = x_A$ et pour $C : y_C = x_C$ donc ces cinq points ont des coordonnées qui vérifient la relation du **2. a.**

2 Une sphère dans un repère orthonormé de l'espace

1. a. $M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \Omega M = 5$.

b. $\Omega M = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$

donc $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = 5$.

2. a. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+3)^2 - 9 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

Par identification, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$ et $R = 4$.

b. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-(-2))^2 + (z-(-3))^2} = 4$

$\Leftrightarrow \Omega' M = 4$.

$\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre M de rayon 4.

c. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y+1)^2 - 1 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{4}$.

Or une somme de carrés ne peut pas être négative donc il n'existe pas de triplet $(x\,;y\,;z)$ vérifiant la dernière égalité. Ce n'est donc pas l'équation cartésienne d'une sphère.

3 Une droite dans un repère de l'espace

1. a. $M_0(1\,;-2\,;0)$; $M_1(-1\,;-1\,;-1)$; $M_2(-3\,;0\,;-2)$; $M_{1/2}\left(0\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $M_{-2}(5\,;-4\,;2)$.

b. $\overrightarrow{M_0M_1}(-2\,;1\,;-1)$; $\overrightarrow{M_0M_2}(-4\,;2\,;-2)$;

$\overrightarrow{M_0M_{1/2}}\left(-1\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{M_0M_{-2}}(4\,;-2\,;2)$.

Ainsi $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et M_2 sont alignés.

$\overrightarrow{M_0M_{1/2}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et $M_{0,5}$ sont alignés.

$\overrightarrow{M_0M_{-2}} = -2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc les points M_0, M_1 et M_{-2} sont alignés.

Finalement M_0, M_1, M_2, $M_{0,5}$ et M_{-2} sont alignés.

c. $(\mathscr{E})$ semble être la droite de l'espace qui passe par M_0 et M_1.

d. • $\overrightarrow{M_0C}(-4\,;2\,;-2)$ et $\overrightarrow{M_0C} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$ donc M_0, M_1 et C sont alignés.

• Résolution du système

$$\begin{cases} 1 - 2t = -3 \\ -2 + t = 0 \\ -t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

Il existe un réel t égal à 2 tel que $C(1 - 2t\,;-2 + t\,;-t)$ donc $C \in (\mathscr{E})$. (Remarque : $C = M_2$.)

e. L'ensemble des points de la droite (M_0M_1) ont des coordonnées qui peuvent s'écrire $(1 - 2t\,;-2 + t\,;-t)$.

2. a. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M_0M_t}(1 - 2t - 1\,;-2 + t + 2\,;-t)$ soit $\overrightarrow{M_0M_t}(-2t\,;t\,;-t)$ et $\overrightarrow{M_0M_1}(-2\,;1\,;-1)$.

Ainsi $t\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{M_0M_t}$.

b. Les points M_t sont alignés avec M_0 et M_1 donc $M_t \in (M_0M_1)$.

c. $M(t)$ dans le repère $(M_0\,;\overrightarrow{M_0M_1})$ donc $\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}$

donc $\begin{cases} x_M - 1 = t(-2) \\ y_M - (-2) = t(1) \\ z_M - 0 = t(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 - 2t \\ y_M = -2 + t \\ z_M = -t \end{cases}$

d. • Lorsque $t \in [0\,;1]$:

$$\begin{array}{ccc} 0 \leqslant t \leqslant 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{donc} & \text{donc} & \text{donc} \\ -1 \leqslant x_M \leqslant 1 & 2 \leqslant y_M \leqslant 3 & -1 \leqslant z_M \leqslant 0. \end{array}$$

Ainsi $(\mathscr{F}_1)$ semble être un segment.

• Lorsque $t \in [0\,;+\infty[$:
$t \geqslant 0$ donc $x_M \leqslant 1$, $y_M \geqslant 2$ et $z_M \leqslant 0$.
Ainsi $(\mathscr{F}_2)$ semble être une demi-droite.

4 Projeté orthogonal sur un plan

1. a. $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ donc un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ est aussi directeur de $(\mathscr{D})$.
$\vec{n}'(1\,;2\,;-1)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ et directeur de $(\mathscr{D})$.

Ainsi $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = -1t + 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b. $H \in (\mathscr{D})$ donc $(AH) = (\mathscr{D})$ donc $\overrightarrow{AH}$ vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires.

c. $\begin{cases} H \in (\mathscr{D}) \\ H \in (\mathscr{P}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ x_H + 2y_H - z_H + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ (t + 2) + 2(2t + 2) - (-t + 3) + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1t + 2 \\ y_H = 2t + 2 \\ z_H = -t + 3 \\ 6t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{7}{6} \\ x_H = \dfrac{5}{6} \\ y_H = -\dfrac{2}{6} \\ z_H = \dfrac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{5}{6}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{25}{6}\right).$

2. a. $(AH) \perp (\mathscr{P})$ donc (AH) orthogonale à toute droite contenue dans $(\mathscr{P})$, en particulier $(AH) \perp (HM)$. Ainsi AHM triangle rectangle en H.

b. D'après Pythagore $AM^2 = AH^2 + HM^2$.
Donc si $M \neq H$, $HM^2 > 0$ et donc $AM^2 > AH^2$
Ainsi AH est la plus petite longueur entre le point A et tous les points du plan $(\mathscr{P})$.

3. a. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur directeur de (AH) donc
$\begin{cases} x_H = at + x_A \\ y_H = bt + y_A \\ z_H = ct + z_A \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $a(at + x_A) + b(bt + y_A) + c(ct + z_A) + d = 0$
$\Leftrightarrow t(a^2 + b^2 + c^2) + ax_A + by_A + cz_A + d = 0$
$\Leftrightarrow t = \dfrac{-ax_A - by_A - cz_A - d}{a^2 + b^2 + c^2}$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0})$.

Et donc $x_H = \dfrac{-a^2x_A - bay_A - caz_A - ad + (a^2 + b^2 + c^2)x_A}{a^2 + b^2 + c^2}$

de même :

• pour $y_H = \dfrac{-abx_A - b^2y_A - cbz_A - bd + (a^2 + b^2 + c^2)y_A}{a^2 + b^2 + c^2}$

• et $z_H = \dfrac{-acx_A - bcy_A - c^2z_A - cd + (a^2 + b^2 + c^2)z_A}{a^2 + b^2 + c^2}$.

b. Dans le repère orthonormé,
$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$
$= \sqrt{\dfrac{(-a^2x_A - aby_A - acz_A - ad)^2 + (-abx_A - b^2y_A - bcz_A - bd)^2 + (-acx_A - bcy_A - c^2z_A - cd)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}}$.

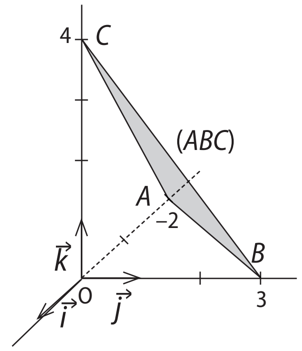
En développant et en réduisant on a bien :

$AH = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Savoir-faire

3 a. $\overrightarrow{AB}(2\,;3\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;0\,;4)$.
$x_{\overrightarrow{AB}} \times 1 = x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AB}} \times 1 \neq y_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc A, B, C non alignés, ils forment un plan.
$\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal de (ABC) donc
$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ a + 4c = 0. \end{cases}$
Prenons $a = 6$, dans ce cas $b = -4$ et $c = -3$.
$\vec{n}(6\,;-4\,;-3)$ vecteur normal de (ABC)
donc $(ABC) : 6x - 4y - 3z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.
De plus $A \in (ABC)$ donc $6x - 2 + d = 0$ donc $d = 12$.
Finalement $(ABC) : 6x - 4y - 3z + 12 = 0$.

b.



4 a. $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
Ainsi $\begin{cases} 2a - 5b + 2c = 0 \\ -3a + 5b + 2c = 0 \end{cases}$.

On choisit $c = -1$ et donc $a = -4$ et $b = -2$.
$\vec{n}(-4\,;-2\,;-1)$

b. $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(-4) + (y-3) \times (-2) + (z+5) \times (-1) = 0$
$\Leftrightarrow -4x - 2y - z - 3 = 0.$

7 a. $M \in (A, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $M \in (A\,; \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 0t' \\ y = -3 - t + 1t' \\ z = 2 + 0t + 2t' \end{cases}$
avec $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$.

8 a. $3x_A + 2y_A + 6z_A - 6 = 6 + 0 + 0 - 6 = 0.$
$3x_B + 2y_B + 6z_B - 6 = 0 + 6 + 0 - 6 = 0.$
$3x_C + 2y_C + 6z_C - 6 = 0 + 0 + 6 + 6 = 0.$
Ainsi (ABC) a pour équation cartésienne
$3x + 2y + 6z - 6 = 0.$

b. La hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$ est la distance de O au plan (ABC).
Or $d(O\,; (ABC)) = \dfrac{|3 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 0 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{49}} = \dfrac{6}{7}.$
Ainsi la hauteur issue de O est égale à $\dfrac{6}{7}$ d'unité.

11 • Un vecteur directeur de ($) est $\vec{u}(-2\,; 1\,; -3)$ et un vecteur directeur de ($') est $\vec{v}(4\,; -1\,; 3)$.
$x_{\vec{u}} \times (-2) = x_{\vec{v}}$ mais $y_{\vec{u}} \times (-2) \neq y_{\vec{v}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.
• $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes lorsqu'il existe t et t' tels que :
$\begin{cases} 1 - 2t = 4t' + 6 \\ 2 + t = -t' - \dfrac{13}{3} \\ -1 - 3t = 3t' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t = -2t' - \dfrac{5}{2} \\ t = -t' - \dfrac{19}{3} \\ t = -t' - \dfrac{1}{3} \end{cases}$
ce qui est impossible.
Donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas sécantes.

12 Un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(1\,; 3\,; 2)$ et un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$ est $\vec{n}'(3\,; 1\,; -3)$.
Or $\vec{n}\,.\,\vec{n}' = 1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$
Ainsi $\vec{n} \perp \vec{n}'$ et donc $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.

13 Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-2\,; 2\,; -3)$ et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(2\,; 1\,; 2)$.
Or $\vec{n}\,.\,\vec{u} = -2 \times 2 + 2 \times 1 + (-3) \times 2 = -4 + 2 - 6 = -8.$
Ainsi $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ ne sont pas parallèles et donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.

Exercices d'entraînement

Équation cartésienne

14 a. $\vec{n}(2\,; -6\,; 2)$; **b.** $\vec{n}(-1\,; 3\,; 2)$; **c.** $\vec{n}(0\,; 0\,; 1)$.

15 Un vecteur normal est $\overrightarrow{BC}(-5\,; -4\,; -5)$ donc le plan a une équation cartésienne du type :
$-5x - 4y - 5z + d = 0.$
Or A appartient à ce plan donc $-5 - 8 - 15 + d = 0$ soit $d = 28$. Une équation cartésienne de ce plan est :
$-5x - 4y - 5z + 28 = 0.$

16 a. Centre $O_1(1\,; 3\,; -2)$; $r_1 = \sqrt{16} = 4.$
b. Centre $O_2(-1\,; -5\,; 3)$; $r_2 = \sqrt{2}.$
c. Centre $O_3(0\,; 0\,; 0)$; $r_3 = \sqrt{1} = 1.$

17 $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 3^2.$

18 a. $-2x_{\vec{v}} = x_{\vec{u}}$ mais $-2y_{\vec{v}} \neq y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b. $\vec{n}(a\,; b\,; c)$ est tel que $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 3b + 6c = 0 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = -\dfrac{16}{3}c. \end{cases}$

Avec $c = 3$ on a $a = -15$ et $b = -16$; $\vec{n}(-15\,; -16\,; 3)$.
c. $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ a une équation cartésienne du type :
$-15x - 16y + 3z + d = 0$ avec d un réel.
Or $O \in (O\,; \vec{u}, \vec{v})$ donc $0 - 0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$.
Ainsi $(O\,; \vec{u}, \vec{v}) : -15x - 16y + 3z = 0.$

19 $\overrightarrow{AB}(3\,; 1\,; 2)$ est un vecteur normal de ce plan donc une équation cartésienne est du type :
$3x + y + 2z + d = 0.$
De plus I milieu de $[AB]$ est tel que $I\left(-\dfrac{1}{2}\,; -\dfrac{7}{2}\,; 4\right)$
et il appartient à ce plan donc $-\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2} + 8 + d = 0$
$\Leftrightarrow d = -3.$
Ainsi le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation cartésienne $3x + y + 2y - 3 = 0.$

20 Comme $(\mathcal{P}) \,//\, (\mathcal{P}')$, ces deux plans ont les mêmes vecteurs normaux donc $\vec{n}(2\,; -3\,; -7)$ vecteur normal de $(\mathcal{P}')$ est aussi un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
Ainsi une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est du type
$2x - 3y + 7z + d = 0.$

Or $A(-2\,;-4\,;3)$ appartient à $(\mathcal{P})$ donc :
$-4+12+21+d=0 \Leftrightarrow d=-29$.
Ainsi $(\mathcal{P}) : 2x-3y+7z-29=0$.

21 $\vec{n}(1\,;-3\,;2)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ mais il est de norme $\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{14}$.

Le vecteur $\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{n}$ a pour norme 1 puisque
$\left\|\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{n}\right\|=\frac{1}{\sqrt{14}}\|\vec{n}\|=1$.

Ainsi $\frac{1}{\sqrt{14}}x-\frac{3}{\sqrt{14}}y+\frac{2}{\sqrt{14}}z-\frac{5}{\sqrt{14}}=0$ est l'équation normale du plan $(\mathcal{P})$.

22 **a.** $\|\overrightarrow{MA}\|^2=\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\|^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\,.\,(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})$
$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2$
$=MI^2+IA^2+2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\,;\overrightarrow{IA})$.

De même $\|\overrightarrow{MB}\|^2=\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\|^2=\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\|^2$
$=(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})\,.\,(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-2\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IA}+IA^2$
$=MI^2+IA^2-2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\,;\overrightarrow{IA})$.

b. $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|^2-\|\overrightarrow{MA}\|^2-\|\overrightarrow{MB}\|^2)=0$
$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\|^2-MI^2-IA^2-2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\,;\overrightarrow{IA})-MI^2$
$-IA^2+2MI\times IA\times\cos(\overrightarrow{MI}\,;\overrightarrow{IA})=0$
$\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=0$
$\Leftrightarrow MI^2=IA^2$ donc $IM=\frac{1}{2}AB$.

Ainsi $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre I de rayon $\frac{AB}{2}$ soit celle de diamètre $[AB]$.

c. D'après **a.** et **b.**, cet ensemble de points est aussi la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{2}$.
Or $I(-1\,;1\,;1)$
et $AB=\sqrt{(1+3)^2+(0-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$.
Ainsi cet ensemble a pour équation cartésienne
$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{21})^2$.

23 **a.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2-(2)^2-\frac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=(3)^2$

C'est donc une équation cartésienne de la sphère de rayon 3 et de centre $\Omega(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;2)$.

b. $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+3)^2-9+14=0$
$\Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-2)^2+(z-(-3))^2=0$
C'est donc le point $\Omega'(-1\,;2\,;-3)$.

c. $(x-3)^2-9+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(z+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+10=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{2}$

C'est l'ensemble vide.

24 **a.** C'est le plan passant par $O(0\,;0\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;1\,;0)$.

b. $(x-4)^2-16+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+(z-3)^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(y-\left(-\frac{7}{2}\right)\right)^2+(z-3)^2=\frac{149}{4}$.

C'est la sphère de centre $\Omega(4\,;-\frac{7}{2}\,;3)$ et de rayon $\frac{\sqrt{149}}{2}$.

c. $9x^2=4z^2 \Leftrightarrow (3x)^2=(2z)^2 \Leftrightarrow \begin{cases}3x=2z\\ \text{ou}\\ 3x=-2z\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-2z=0\\ \text{ou}\\ 3x+2z=0.\end{cases}$

C'est la réunion du plan passant par $O(0\,;0\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}_1(3\,;0\,;-2)$ et du plan passant par $O(0\,;0\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}_2(3\,;0\,;2)$.

d. $(x+1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(z+3)^2-9=K$

$\Leftrightarrow (x-(-1))^2+\left(y-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2+(z-(-3))^2=K+\frac{49}{4}$.

Si $K<-\frac{49}{4}$: ensemble vide.

Si $K=-\frac{49}{4}$: l'unique point $A\left(-1\,;-\frac{3}{2}\,;-3\right)$.

Si $K>-\frac{49}{4}$: la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{K+\frac{49}{4}}$.

25 **a.** $AB=\sqrt{(1-3)^2+(-3+5)^2+(7-1)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.
I milieu de $[AB]$ alors $I(2\,;-4\,;4)$.
Ainsi $(\mathcal{S})$ a pour équation cartésienne
$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=(\sqrt{11})^2$.

b. $(\mathcal{P})$ tangent à $(\mathcal{S})$ en A donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. Or $\overrightarrow{AB}(-2\,;2\,;6)$
donc $(\mathcal{P}) : -2x+2y+6z+d=0$.
De plus $A\in(\mathcal{P})$
donc $-2\times3+2\times(-5)+6\times(1)+d=0$ soit $d=10$.
Finalement $(\mathcal{P}) : -2x+2y+6z+10=0$.

26 Un rayon de cette sphère est :
$AI=\sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{12}$.

Ainsi $\mathcal{V}=\frac{4}{3}\times\pi\times\sqrt{12}^3=16\sqrt{12}\,\pi$.

Représentations paramétriques

27 **a.** $(A\,;\vec{u})$ avec $A(0\,;1\,;3)$ et $\vec{u}(2\,;-2\,;4)$.
b. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(2\,;0\,;4)$ et $\vec{u}(1\,;-3\,;1)$.
c. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(3\,;-1\,;0)$ et $\vec{u}(-1\,;1\,;2)$.
d. $(A\,;\vec{u})$ avec $A(-2\,;0\,;3)$ et $\vec{u}(1\,;5\,;0)$.

28 **a.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

29 $\overrightarrow{IJ}(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{IK}(-1\,;0\,;1)$ sont deux vecteurs non coplanaires et directeurs du plan (IJK).

Ainsi $\begin{cases} x = 1 - t - t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

est une représentation paramétrique du plan (IJK).

30 $d(B\,;(\mathcal{P})) = \dfrac{|3 + 2 \times 1 + 2 \times (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$.

31 **a.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Si $x = 0$ alors $t = 1$. Puis avec $t = 1$, $y = 1$ et $z = -1$. Ainsi $B \in (d)$.

c. Cette représentation indique que cette droite a pour repère $(B\,;\vec{v})$ avec $\vec{v}(2\,;-2\,;-4)$.
On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Nous pouvons donc dire que (d) admet aussi cette représentation paramétrique.

32 **a.** Par lecture $A(1\,;1\,;1)$ et $B(2\,;3\,;2)$. Ainsi :

$(OA) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $(OB) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $(OAB) : \begin{cases} x = t + 2t' \\ y = t + 3t' \\ z = t + 2t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

33 **a.** $\vec{n}(1\,;2\,;2)$ et $\vec{n}\,'(1\,;-1\,;2)$.

b. $x_{\vec{n}} = x_{\vec{n}'}$ mais $y_{\vec{n}} \neq y_{\vec{n}'}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ ne sont pas colinéaires.

c. $x_A + 2y_A + 2z_A - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$, donc $A \in (\mathcal{P})$.
$x_A - y_A + 2z_A - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$, donc $A \in (\mathcal{P}')$.

d. $\vec{u}\,.\,\vec{n} = 2 \times 1 + 0 \times 2 - 1 \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$.
$\vec{u}\,.\,\vec{n}\,' = 2 \times 1 + 0 \times (-1) - 1 \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}\,'$.

e. $\vec{u} \perp \vec{n}$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ et de même $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P}')$. Puis A est un point commun à ces deux plans. Ainsi $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ se coupent en une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Donc si $M(x\,;y\,;z) \in (A\,;\vec{u})$ alors

$\begin{cases} M(x\,;y\,;z) \in (\mathcal{P}) \\ M(x\,;y\,;z) \in (\mathcal{P}') \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

f. $(A\,;\vec{u}) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

34 • Par lecture $A_1(2\,;3\,;0)$, $B_1(0\,;1\,;2)$ donc

$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

• Par lecture $A_2(2\,;0\,;3)$ et $B_2(0\,;1\,;3)$ donc

$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

35 **a.** $\vec{u}(1\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;-1)$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $(\mathcal{P})$.

b. $A(0\,;1\,;1)$ est un point de $(\mathcal{P})$. (Avec $t = t' = 0$)

c. Avec $t = 1$ et $t' = 1$ on obtient $x = 2$, $y = 0$ et $z = 0$.
Ainsi $B(2\,;0\,;0)$ est un autre point de $(\mathcal{P})$.
Puis $\vec{u} + \vec{v}(2\,;-1\,;-1)$ et $\vec{u} - \vec{v}(0\,;-1\,;1)$ sont des vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$ et ils ne sont pas colinéaires.
Ainsi $(B\,;\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ est un repère de $(\mathcal{P})$.

$(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t - t' \\ z = -t + t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

36 **1. a.** $y = 4 - 2x - 2z$. Ainsi $y = 4 - 2t - 2t'$.

b. $(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t - 2t' \\ z = t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

2. a. Si $x = 1$, $y = 0$ et $z = 1$ alors $2x + y - 2z - 4 = 0$.
Donc $A(1\,;0\,;1)$ est un point de $(\mathcal{P})$.

b. $\vec{n}(2\,;1\,;2)$ vecteur normal de $(\mathcal{P})$
Si $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{n} = 0$ soit $2a + b + 2c = 0$. Si $a = 2$, $b = 2$ alors $c = -3$.
Ainsi $\vec{u}(2\,;2\,;-3)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.
De même avec $\vec{v}(d\,;e\,;f)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.
Si $a = 5$, $b = 0$ alors $c = -5$. Ainsi $\vec{v}(5\,;0\,;-5)$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.

c. Puis $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de $(\mathscr{P})$ et

$$(\mathscr{P}):\begin{cases}x=1+2t+5t'\\y=2t\\z=1-3t-5t'\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$

3. a. On a déjà $A(1\,;0\,;1)$ puis $B(2\,;0\,;0)$ et $C(-1\,;4\,;1)$ sont des points appartenant à $(\mathscr{P})$.

b. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;4\,;0)$ sont des vecteurs non colinéaires et directeurs de $(\mathscr{P})$.

$$\text{Ainsi } (\mathscr{P}):\begin{cases}x=1+t-2t'\\y=4t'\\z=1-t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$

37 **a.** $A(3\,;0\,;2)$, $\vec{u}(1\,;2\,;-2)$ et $\vec{v}(-3\,;3\,;0)$.

b. $$(\mathscr{P}):\begin{cases}x=3+t-3t'\\y=2t+3t'\\z=2-2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}.$$

c. $z=2-2t \Leftrightarrow -\frac{1}{2}z+1=t.$

$$\begin{aligned}y=2t+3t' &\Leftrightarrow y=2(-\tfrac{1}{2}z+1)+3t'\\&\Leftrightarrow y+z-2=3t'\\&\Leftrightarrow t'=\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}x=3+t-3t' &\Leftrightarrow x=3+\left(1-\tfrac{1}{2}z\right)-3\left(\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{2}{3}\right)\\&\Leftrightarrow x=3+1-\tfrac{1}{2}z-y-z+2\\&\Leftrightarrow x+y+\tfrac{3}{2}z-6=0.\end{aligned}$$

Ainsi $(\mathscr{P}): x+y+\frac{3}{2}z-6=0.$

Position relative

38 **a.** Le vecteur $\vec{u}(1\,;-1\,;2)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et le vecteur $\vec{v}(-2\,;-1\,;1)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D}')$.

$x_{\vec{v}}=-2\times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}}\neq -2\times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

b. Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes, alors il existe t et λ tels que :

$$\begin{cases}t+3=-2\lambda+1\\-t+2=-\lambda\\2t=\lambda-1\end{cases}\quad\text{c'est-à-dire}\quad\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}t-1\\\lambda=t-2\\\lambda=2t+1\end{cases}$$

ce qui est impossible.

Donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas sécantes.

39 **a.** $\vec{u}(-2\,;1\,;3)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;-3)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

$\vec{u}\,.\,\vec{n}=-2\times 2+1\times(-1)+3\times(-3)=-14$. $-14\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux et donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ ne sont pas parallèles.

b. Est-ce que $I\in(\mathscr{D})$?

$-1=1-2t \Leftrightarrow t=1$. Et ainsi $y=-1$ et $z=3$.

Donc $I\in(\mathscr{D})$.

Est-ce que $I\in(\mathscr{P})$?

$2\times(-1)-(-1)-3\times 3+10=-2+1-9+10=0.$

Donc $I\in(\mathscr{P})$.

Finalement $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants en I.

40 $\vec{n}(1\,;-3\,;2)$ et $\vec{n}'(2\,;1\,;7)$ sont, respectivement des vecteurs normaux de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

Or $x_{\vec{n}'}=2\times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\vec{n}'}\neq 2\times y_{\vec{n}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas parallèles.

41 **a.** $\vec{u}(-1\,;2\,;3)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

$x_{\vec{n}}=-3\times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{n}}\neq -3\times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ ne sont pas perpendiculaires.

Puis $-1\times 3+2\times(-1)+3\times 2=-3-2+6=1.$

$1\neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ ne sont pas parallèles.

Finalement $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants.

b. $$M(x\,;y\,;z)\in(\mathscr{D})\Leftrightarrow\begin{cases}x=-t+2\\y=2t\\z=3t-1\end{cases}$$

et $M(x\,;y\,;z)\in(\mathscr{P})\Leftrightarrow 3x-y+2z-1=0.$

Ainsi $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{P})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-t+2\\y=2t\\z=3t-1\\3x-y+2z-1=0.\end{cases}$$

c. $$\begin{aligned}&3(-t+2)-(2t)+2(3t-1)-1=0\\&\Leftrightarrow -3t+6-2t+6t-2-1=0\\&\Leftrightarrow t=-3.\end{aligned}$$

Et ainsi $x=-(-3)+2=5$, $y=2\times(-3)=-6$ et $z=3\times(-3)-1=-10$.

$M(5\,;-6\,;-10)$ est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$.

42 **a.** $\vec{n}(4\,;-2\,;2)$ et $\vec{n}'\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;-1\right)$ sont, respectivement, des vecteurs normaux de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

$z_{\vec{n}}=-2\times z_{\vec{n}'}$ mais $x_{\vec{n}}\neq -2\times x_{\vec{n}'}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont parallèles, donc ils sont sécants.

Puis $4\times\frac{1}{3}-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2\times(-1)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2=0$

donc $(\mathscr{P})\perp(\mathscr{P}')$.

b. $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2y+2z-6=0\\\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-z=0\end{cases}$$

c. En posant $z = t$ où $t \in \mathbb{R}$.

$M(x\,;y\,;z)$ est solution du système $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 - 2t \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = t \\ z = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + t - 3 \\ x - (2x + t - 3) = 3t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = -7t + 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

d. La droite (Δ) est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = -7t + 3 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

43 **a.** $\vec{u}(2\,;4\,;-3)$ et $\vec{u}'(1\,;3\,;-2)$ sont, respectivement, des vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

$x_{\vec{u}} = 2 \times x_{\vec{u}'}$ mais $y_{\vec{u}} \neq 2 \times y_{\vec{u}'}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

$\vec{u}\,.\,\vec{u}' = 2 \times 1 + 4 \times 3 - 3 \times (-2) = 2 + 12 + 6 = 20.$

$20 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ non plus.

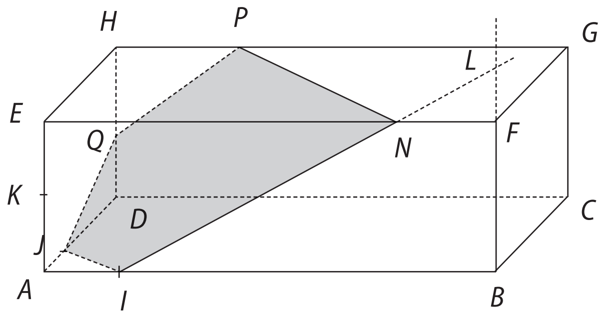
b. c. Si $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{D}')$ alors

$\begin{cases} 2t - 1 = \lambda + 6 \\ 4t = 3\lambda - 1 \\ -3t + 5 = -2\lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 7 = \lambda \\ 4t = 3(2t - 7) - 1 \\ -3t + 5 = -2(2t - 7)) + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t - 7 \\ -2t = -22 \\ t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 15 \\ t = 11. \end{cases}$

d. Avec $t = 11$, on obtient $M(21\,;44\,;-28)$. Ce point M est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

44 **a.** et **e.**



b. $ABCDEFGH$ est un pavé droit donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{AI}$.

Puis, $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{6} \times 6 = 1$ de même $\|\overrightarrow{AJ}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AK}\| = 1$.

Ainsi $(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé.

c. • $I(1\,;0\,;0)$ et $J(0\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{IJ}(-1\,;1\,;0)$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ}\,.\,\vec{n} = -1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 9 = 0$

$G(6\,;4\,;2)$ donc $\overrightarrow{IG}(5\,;4\,;2)$.

Ainsi $\overrightarrow{IG}\,.\,\vec{n} = 5 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times (-9) = 18 - 18 = 0.$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de (IJG).

• Une équation du type $2x + 2y - 9z + d = 0$ est une équation cartésienne de (IJG).

Puis $I \in (IJG)$ donc :

$2 \times 1 + 2 \times 0 - 9 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2.$

Ainsi $(IJG) : 2x + 2y - 9z - 2 = 0.$

d. $B(6\,;0\,;0)$ et $F(6\,;0\,;2)$ donc $\overrightarrow{BF}(0\,;0\,;2)$ donc (BF) a pour représentation paramétrique

$\begin{cases} x = 6 + 0t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$M(x\,;y\,;z)$ est l'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + 2y - 9z - 2 = 0 \\ x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ 2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times 2t - 2 = 0 \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ t = \frac{10}{18} \\ z = \frac{20}{18} \end{cases}$

$M\left(6\,;0\,;\frac{10}{9}\right)$ est le point d'intersection de (BF) et (IJG).

e. On trace (1) $[IJ]$; (2) $[IN]$ tel que N intersection de (IL) et (EF) ; (3) la parallèle à $[IJ]$ passant par N avec P intersection de cette parallèle avec (HG) ; (4) la parallèle à $[IN]$ passant par P avec Q intersection de (HD) et cette parallèle.

La section est le polygone $IJQPN$.

45 **1. a.** $\begin{cases} 2 \times 0 + 0 + 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 0 + 4 + 2 \times 0 = 4 \\ 2 \times 2 + 0 + 2 \times 0 = 4 \end{cases}$

donc $(ABC) : 2x + y + 2z = 4$.

b. $d(0\,;(ABC)) = \dfrac{|2 \times 0 + 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}.$

2. a. $\overrightarrow{BC}(2\,;-4\,;0)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ donc $(\mathscr{P}) : 2x - 4y + 0z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus $A \in (\mathscr{P})$ donc $2 \times 0 - 4 \times 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

Ainsi $(\mathscr{P}) : 2x - 4y = 0$.

b. $M(x\,;y\,;z)$ appartient à $(\mathscr{P})$ et à (ABC) si et seulement si

$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 2t \\ 2 \times (2t) + t + 2z = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -\frac{5}{2}t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

(Δ) a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2{,}5t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

A étant un point commun à ces deux plans, $A \in (\Delta)$ et (Δ) étant incluse dans $(\mathscr{P})$, elle est orthogonale à (AB). Ainsi (Δ) est la hauteur issue de A dans ABC.

3. a. I milieu de $[AC]$ donc $I\left(\dfrac{0+2}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\ ;\ \dfrac{2+0}{2}\right)$ soit $I(1\ ;0\ ;1)$.

Est-ce que $I \in (\Delta')$?

$1 = t$ donc $y = 4 - 4 \times 1 = 0$ et $z = 1$. Ainsi $I \in (\Delta')$.

Est-ce que $B \in (\Delta')$?

$0 = t$ donc $y = 4 - 4 \times 0 = 4$ et $z = 0$. Ainsi $B \in (\Delta')$.

Donc (Δ') est bien la médiane issue de B dans ABC.

b. $AB = \sqrt{(0-0)^2 + (4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ainsi ABC est isocèle en B.

4. H appartient à (Δ) et à (Δ) donc

$$\begin{cases} t = 2t' \\ 4 - 4t = t' \\ t = -2{,}5t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 4 - 8t' = t' \\ 2t' = -2{,}5t' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 4 = 9t' \\ 4{,}5t' = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{9}{4} \\ t = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Ainsi $H(4{,}5\ ;-14\ ;4{,}5)$.

H est le centre de gravité de ABC.

46 **a.** • $G\left(\dfrac{1+0+0}{3}\ ;\dfrac{0+1+0}{3}\ ;\dfrac{0+0+1}{3}\right)$ soit $G(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3})$.

• $\overrightarrow{OG}(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AB}(-1\ ;1\ ;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\ ;0\ ;1)$.

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{3} + 0 + \dfrac{1}{3} = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{OG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) donc $(OG) \perp (ABC)$.

b. $\overrightarrow{A'B'}(-2\ ;2\ ;0)$ et $\overrightarrow{A'C'}(-2\ ;0\ ;3)$ sont deux vecteurs non colinéaires et directeurs du plan $(A'B'C')$.

Puis $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'B'} = 3 \times (-2) + 3 \times 2 + 2 \times 0 = 0$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'C'} = 3 \times (-2) + 3 \times 0 + 2 \times 3 = 0$.

Ainsi $\vec{n}$ est bien un vecteur normal de $(A'B'C')$ donc $(A'B'C') : 3x + 3y + 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $A' \in (A'B'C')$ donc $3 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -6$. Ainsi $(A'B'C') : 3x + 3y + 2z - 6 = 0$.

c. • $\overrightarrow{AC}(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = -1t + 1 \\ y = 0t + 0 \\ z = 1t + 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

• $K(x\ ;y\ ;z)$ appartient à (AC) et à $(A'B'C') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ 3x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ -3t + 0 + 2t - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ x = 6 \\ y = 0 \\ z = -6 \end{cases}$$

Donc $K(6\ ;0\ ;-6)$.

d. • $3 \times 0 + 3 \times 4 + 2 \times (-3) - 6 = 0 + 12 - 6 - 6 = 0$ donc $L \in (A'B'C')$.

• Puis $\overrightarrow{BL}(0\ ;3\ ;-3)$ et $\overrightarrow{BC}(0\ ;-1\ ;1)$. Ainsi $-3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BL}$. Cela signifie que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires donc que B, C et L sont alignés et donc $L \in (BC)$.

• (ABC) et $(A'B'C')$ sont deux plans sécants suivant la droite (LK). De plus, $\overrightarrow{AB}(-1\ ;1\ ;0)$ et $\overrightarrow{A'B'}(-2\ ;2\ ;0)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$(AB) \subset (ABC)$; $(A'B') \subset (A'B'C')$ $(AB) // (A'B')$; (LK) intersection de (ABC) et $(A'B'C')$, donc, d'après le théorème du toit $(AB) // (A'B') // (LK)$.

Se Tester

47 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Faux.

48 **1.** Faux. $1 + 2 - (-1) - 1 = 3$. Or $3 \neq 0$ donc l'équation $x + y - z - 1 = 0$ n'est pas celle du plan (ABC) puisque les coordonnées de A ne vérifient pas cette équation.

2. Faux. Si $\vec{n}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ était un vecteur normal de ce plan, alors il serait colinéaire à tout vecteur normal de ce plan. Mais il n'est pas colinéaire au vecteur normal $\vec{n}'(1\ ;-2\ ;0)$ du plan d'équation donc $x + y - z + d = 0$.

3. Faux. $-1 = 1 + 2t \Leftrightarrow -2 = 2t \Leftrightarrow -1 = t$.

Et si $t = -1$ alors $y = 3$ et $z = 3$. Or $y_M = 3$ et $z_M = 2$ donc $M \notin (\mathscr{D})$.

4. Faux. $x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

5. Vrai. La sphère de centre $I(1\ ;0\ ;-2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$ a pour équation cartésienne :

$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \sqrt{5}^2$,

c'est-à-dire $x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = 5$

soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 0$.

6. Faux. $\overrightarrow{BB'}(2\,;-5\,;5)$ et $\vec{n}(-1\,;3\,;-1)$.
$x_{\overrightarrow{BB'}} = -2 \times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\overrightarrow{BB'}} \neq -2 \times y_{\vec{n}}$ donc $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires et donc (BB') n'est pas orthogonal au plan d'équation donnée.

49 **1. c.** ; **2. a.** ; **3. b.**

50 **1. b.** : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ donc $\vec{n}(1\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ mais aussi directeur de $(\mathscr{D})$. Or seul le vecteur directeur de la droite proposée en réponse **b.** est colinéaire à $\vec{n}$.

2. c. : $d(A\,;(\mathscr{P})) = \dfrac{|1+(-2)-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

3. c. : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=3^2$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2=9$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y=4$.

Exercices d'approfondissement

51 Droites coplanaires

• Un repère de la droite $(\mathscr{D})$ peut être $(A\,;\vec{u})$ où $A(4\,;5\,;-3)$ et $\vec{u}(1\,;-2\,;3)$. Un repère de $(\mathscr{D}')$ est $(B\,;\vec{v})$ avec $B(1\,;11\,;-4)$ et $\vec{v}(3\,;-6\,;1)$.

$x_{\vec{v}} = 3\times x_{\vec{u}}$, $y_{\vec{v}} = 3\times y_{\vec{u}}$ mais $z_{\vec{v}} \neq 3\times z_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

• Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes en $M(x\,;y\,;z)$ alors

$$\begin{cases}4+t=3t'+1\\5-2t=-6t'+11\\-3+3t=t'-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=3t'-3\\5-2(3t'-3)=-6t'+11\\-3+3(3t'-3)=t'-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=3t'-4\\11-6t'=-6t'+11\\-12+9t'=t'-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=3t'-3\\8t'=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t'=1\\t=0.\end{cases}$$

Ainsi $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes en $M(4\,;5\,;-3)$ donc il existe un unique plan contenant $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

• Ce plan contient le point $M(4\,;5\,;-3)$ et a pour couple de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Recherche d'un vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ tels que $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$.

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\\vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\times a-2\times b+3\times c=0\\3\times a-6\times b+1\times c=0\end{cases}$$

Avec $b=1$ on a :

$$\begin{cases}a-2+3c=0\\3a-6+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2-3c\\3(2-3c)-6+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\a=2.\end{cases}$$

Ainsi $\vec{n}(2\,;1\,;0)$ et une équation cartésienne du plan cherché est du type $2x+y+0z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

Et $M(4\,;5\,;-3)$ appartient à ce plan donc :
$2\times4+5+0\times(-3)+d=0$ soit $d=-13$.

Finalement le plan d'équation cartésienne $2x+y-13=0$ contient les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

52 Droites et barycentre

a. G bary$\{(A,1),(M,2)\}$ donc

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{1}{1+2}(x_A+x_M)\\y_G=\dfrac{1}{1+2}(y_A+y_M)\\z_G=\dfrac{1}{1+2}(z_A+z_M)\end{cases} \text{soit} \begin{cases}x_G=\dfrac{1}{3}(1+2t-1)\\y_G=\dfrac{1}{3}(-1+t+1)\\z_G=\dfrac{1}{3}(2-t)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_G=\dfrac{2}{3}t\\y_G=\dfrac{1}{3}t\\z_G=-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3}\end{cases} \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

b. Lorsque M décrit la droite $(\mathscr{D})$, t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ et donc G décrit la droite $(\mathscr{D}')$ de représentation paramétrique $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}t\\y=\dfrac{1}{3}t\\z=-\dfrac{1}{3}t+\dfrac{2}{3}\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$. $(\mathscr{E})=(\mathscr{D}')$.

53 Positions relatives de droites

a. Les points $A(1\,;0\,;1)$ et $B\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ appartiennent à $(\mathscr{D}'')$ donc $\overrightarrow{AB}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D}'')$.

Les points $C(3\,;0\,;2)$ et $D(3\,;1\,;0)$ appartiennent à $(\mathscr{D})$ donc $\overrightarrow{CD}(0\,;1\,;-2)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

Or $\overrightarrow{AB}\times 2=\overrightarrow{CD}$ cela signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont parallèles.

b. Les points $A(1\,;0\,;1)$ et $E(0\,;2\,;2)$ appartiennent à $(\mathscr{D}')$ donc $\overrightarrow{AE}(-1\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D}')$.

Ainsi $(\mathscr{D}')$: $\begin{cases}x=1-t\\y=0+2t\\z=1+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

et $(\mathscr{D}'')$: $\begin{cases}x=1\\y=0+\dfrac{1}{2}t'\\z=1-t'\end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ ne sont pas parallèles et A est un point commun à $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ donc $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en $A(1 ; 0 ; 1)$.

c. • $(\mathscr{D})$ // $(\mathscr{D}'')$ et $(\mathscr{D}'')$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes donc $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.

• Sont elles sécantes ?
Si elles sont sécantes en $M(x ; y ; z)$ alors

$$\begin{cases} 3 = 1 - t \\ 0 + t' = 2t \\ 2 - 2t' = 1 + t \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t = -2 \\ t' = -4 \\ 2 - 2 \times (-4) = 1 + (-2) \end{cases}$$

soit $\begin{cases} t = -2 \\ t' = -4 \\ 10 = -1. \end{cases}$

Ce système n'a pas de solution. Ainsi $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas sécantes.
Finalement $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non parallèles et non sécantes donc elles sont non coplanaires.
Comme de plus $\overrightarrow{CD} . \overrightarrow{AE} = 0$, elles sont orthogonales.

54 Distance d'un point à une droite

1. • $\overrightarrow{AB}(2 ; 0 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(0 ; 1 ; 1)$. Puis $z_{\overrightarrow{AC}} = -z_{\overrightarrow{AB}}$ mais $y_{\overrightarrow{AC}} \neq -y_{\overrightarrow{AB}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc (ABC) est un plan.

• $\vec{n}(a ; b ; c)$ est un vecteur normal du plan (ABC) donc

$$\begin{cases} 2 \times a + 0 \times b - 1 \times c = 0 \\ 0 \times a + 1 \times b + 1 \times c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = c \\ -b = c \end{cases}$$

Avec $c = 4$, $a = 2$ et $b = -4$. Ainsi $\vec{n}(2 ; -4 ; 4)$ est un vecteur normal de (ABC) et il existe un réel d tel que $(ABC) : 2x - 4y + 4z + d = 0$.

Or $A(1 ; 2 ; 2)$ appartient à (ABC) donc

$2 \times 1 - 4 \times 2 + 4 \times 2 + d = 0$ soit $d = -2$.

Ainsi $(ABC) : 2x - 4y + 4z - 2 = 0$ ou $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

2. a. $\vec{n}_1(1 ; -2 ; 2)$ et $\vec{n}_2(1 ; -3 ; 2)$ sont, respectivement, des vecteurs normaux de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

Or $x_{\vec{n}_1} = 1 \times x_{\vec{n}_2}$ mais $y_{\vec{n}_1} \neq 1 \times y_{\vec{n}_2}$ donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas parallèles et sont donc sécants.

b. $(\mathscr{P})$ et (ABC) ont une équation cartésienne identique donc ils sont égaux. Ainsi $C \in (\mathscr{P})$.

Puis $1 - 3 \times 3 + 2 \times 3 + 2 = 1 - 9 + 6 + 2 = 0$ donc $C \in (\mathscr{P}')$.

C est un point appartenant aux deux plans, il appartient à leur droite d'intersection (Δ).

c. $\vec{u} . \vec{n}_1 = 2 \times 1 + 0 \times (-2) + (-1) \times 2 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}_1$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathscr{P})$.

$\vec{u} . \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 0 \times (-3) + (-1) \times 2 = 0$ donc $\vec{u}$ vecteur directeur de $(\mathscr{P}')$.

Ainsi $\vec{u}$ vecteur directeur de (Δ).

d. $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. a. $\overrightarrow{CM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2k + 1 \\ y_M = 0k + 3 \\ z_M = -1k + 3. \end{cases}$

$\overrightarrow{AM}(2k ; 1 ; -k + 1)$.

$\overrightarrow{AM} . \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2k \times 2 + 1 \times 0 + (-k + 1) \times (-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4k + k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$ si et seulement si $k = \frac{1}{5}$.

b. Si $k = \frac{1}{5}$ alors $M\left(\frac{7}{5} ; 3 ; \frac{14}{5}\right)$

et $AM = \sqrt{\left(\frac{7}{5} - 1\right)^2 + (3 - 2)^2 + \left(\frac{14}{5} - 2\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{4}{25} + 1 + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

4. a. $AH = \dfrac{|1 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{9}} = 0.$

$AH' = \dfrac{|1 - 3 \times 2 + 2 \times 2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}.$

b. $(AH') \perp (\mathscr{P}')$ donc $(AH') \perp (H'M)$ donc $AH'M$ triangle rectangle en H' donc H' appartient au cercle de diamètre $[AM]$.

De même, $(AH) \perp (\mathscr{P})$ donc $(AH) \perp (HM)$ donc AHM triangle rectangle en H donc H appartient au cercle de diamètre $[AM]$.

Dans l'espace, si I est le milieu de $[AM]$, $IA = IM = IH = IH'$ donc H, H', M et A sont sur la sphère de centre I ou de rayon $[AM]$ que l'on note $(\mathscr{S})$.

c. $(AH) \perp (\mathscr{P})$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires

donc $\overrightarrow{AH} = k\,\vec{n}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 1 = 1 \times k \\ y_H - 2 = -2 \times k \\ z_H - 2 = 2 \times k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

soit $\begin{cases} x_H = k + 1 \\ y_H = -2k + 2 \\ z_H = 2k + 2 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

De plus $H \in (\mathscr{P})$ donc $k + 1 - 2(-2k + 2) + 2(2k + 2) - 1 = 0$ donc $9k = 0$ donc $k = 0$.

Ainsi $H(1 ; 2 ; 2)$. On remarque que $H = A$.

De même $(AH') \perp (\mathscr{P}')$ donc $\overrightarrow{AH'} = k'\vec{n}_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{H'} - 1 = 1 \times k' \\ y_{H'} - 2 = -3 \times k' \\ z_{H'} - 2 = 2 \times k' \end{cases}$ avec $k' \in \mathbb{R}$.

Puis $H' \in (\mathscr{P}')$

donc $(k' + 1) - 3(-3k' + 2) + 2(2k' + 2) + 2 = 0$ donc $14k' = -1$ donc $k' = -\frac{1}{14}$.

Ainsi $H'\left(\frac{13}{14} ; \frac{31}{14} ; \frac{26}{14}\right)$.

d. Puisque $A = H$, les points A, M, H' (et donc H) sont nécessairement coplanaires.

55 Plans perpendiculaires et fonction

1. a. $\vec{n}'(1\,;2\,;0)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$.
$\vec{n}\,.\,\vec{n}' = -2\times 1 + 1\times 2 + 5\times 0 = 0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$
et $(\mathcal{P})\perp(\mathcal{P}')$.

b. • Montrons que B appartient aux deux plans.
$-1 + 2\times 4 - 7 = -1 + 8 - 7 = 0$ donc $B\in(\mathcal{P}')$.
Puis $\overrightarrow{BA}(2\,;-6\,;2)$ et tels que :
$\overrightarrow{BA}\,.\,\vec{n} = 2\times(-2) + (-6)\times 1 + 2\times 5 = -4 - 6 + 10 = 0.$
Donc $\overrightarrow{BA}\perp\vec{n}$ donc $\overrightarrow{BA}$ vecteur directeur de $(\mathcal{P})$ et comme $A\in(\mathcal{P})$, B aussi.

• Montrons que $\vec{u}$ est un vecteur directeur des deux plans.
$\vec{u}\,.\,\vec{n} = 2\times(-2) + (-1)\times 1 + 1\times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{n}$ et ainsi $\vec{u}$ est directeur de $(\mathcal{P})$.
$2\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times 0 = 2 - 2 = 0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{P}')$.
Ainsi $\vec{u}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ et donc de $(\mathcal{D})$.

c. Équation cartésienne de $(\mathcal{P})$:
Elle est du type $-2x + y + 5z + d = 0$ où $d\in\mathbb{R}$.
$A\in(\mathcal{P})$ donc $-2\times 1 + (-2) + 5\times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$.
Ainsi $(\mathcal{P}) : -2x + y + 5z - 1 = 0$ et alors

$$d(C\,;(\mathcal{P})) = \frac{|-2\times 5 + (-2) + 5\times(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

$$d(C\,;(\mathcal{P}')) = \frac{|5 + 2\times(-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

2. a. $CM = \sqrt{(1 + 2t - 5)^2 + (3 - t + 2)^2 + (t + 1)^2}$
$= \sqrt{4t^2 - 16t + 16 + 25 - 10t + t^2 + t^2 + 2t + 1}$
$= \sqrt{6t^2 - 24t + 42}$

b. $f : t \longmapsto \sqrt{6t^2 - 24t + 42}$.
f est définie lorsque $6t^2 - 24t + 42 \geqslant 0$.
Or $6t^2 - 24t + 42$ est une expression du second degré dont $\Delta = -432$, négatif, donc $6t^2 - 24t + 42$ est du signe de 6, positif, sur $\mathbb{R}$.
Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction étant une fonction racine carrée, elle est dérivable où $6t^2 - 24t + 42 > 0$, c'est-à-dire pour $t\in\mathbb{R}$ et

$$f'(t) = \frac{(6t^2 - 24t + 42)}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{12t - 24}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6t - 12}{f(t)}.$$

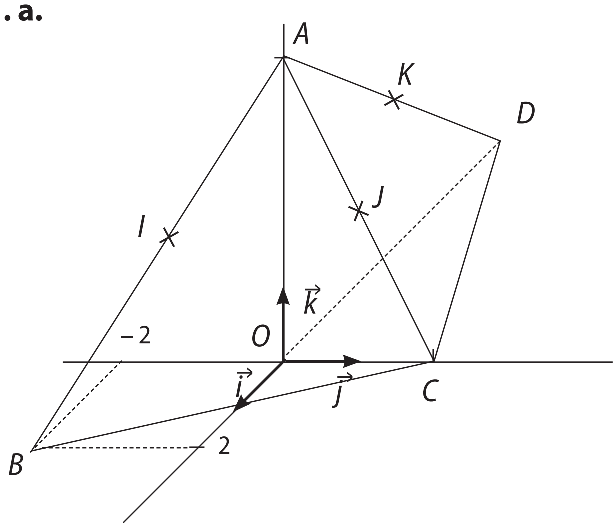
De plus $6t - 12 > 0 \Leftrightarrow 6t > 12 \Leftrightarrow t > 2$.

Ainsi sur $]-\infty\,;2]$, $f'(t)\leqslant 0$ et donc f décroissante sur $[2\,;+\infty[$, $f'(t)\geqslant 0$ et donc f croissante ; f admet donc un minimum en 2 qui vaut $3\sqrt{2}$.

c. Ce minimum est la plus petite valeur de CM lorsque M se déplace sur la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

56 Sphère circonscrite à un tétraèdre

1. a.



b. B, C et D appartiennent au plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ alors que A n'appartient pas à ce plan donc les quatre points sont non coplanaires et $ABCD$ est un tétraèdre.

c. I milieu de $[AB]$ donc $I\left(\frac{0+2}{2}\,;\frac{0-2}{2}\,;\frac{4+0}{2}\right)$ soit $I(1\,;-1\,;2)$.
De même $J(0\,;1\,;2)$ et $K(-2\,;0\,;2)$.

d. $(\mathcal{P}_1)$ est médiateur de $[AB]$ donc $I\in(\mathcal{P}_1)$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P}_1)$.
$\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-4)$ donc $(\mathcal{P}_1) : 2x - 2y - 4z + d = 0$ où $d\in\mathbb{R}$.
$I(1\,;-1\,;2)$ donc $2\times 1 - 2\times(-1) - 4\times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$.
$(\mathcal{P}_1) : 2x - 2y - 4z + 4 = 0$.
De même $(\mathcal{P}_2) : 2y - 4z + 6 = 0$ et $(\mathcal{P}_3) : -4x - 4z = 0$.

e. $\Omega(x\,;y\,;z)$ appartient aux trois plans lorsque
$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z + 4 = 0 \\ 2y - 4z + 6 = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-z) - 2(2z - 3) - 4z + 4 = 0 \\ y = 2z - 3 \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$
Les trois plans n'ont qu'un seul point commun $\Omega(-1\,;-1\,;1)$.

2. a. $\Omega\in(\mathcal{P}_1)$ donc $A\Omega = \Omega B$; $\Omega\in(\mathcal{P}_2)$ donc $A\Omega = \Omega C$; $\Omega\in(\mathcal{P}_3)$ donc $A\Omega = \Omega D$; donc $A\Omega = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

Ainsi la sphère de centre Ω et de rayon Ω*A* passe par *A*, *B*, *C* et *D*.

b. $\Omega A = \sqrt{(0-(-1))^2+(0-(-1))^2+(4-1)^2} = \sqrt{11}$.
Ainsi $(\mathcal{S}) : (x-(-1))^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2 = \sqrt{11}^2$
soit $(\mathcal{S}) : (x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 11$.

57 Intersection de deux sphères

1. $x^2-4x+y^2-4y+z^2+2z=7$
$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-2)^2-4+(z+1)^2-1=7$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-(-1))^2=16$.

$(\mathcal{S})$ est la sphère de centre $\Omega(2\,;2\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{16}=4$.

$x^2-8x+y^2-6y+z^2+2z=-13$
$\Leftrightarrow (x-4)^2-16+(y-3)^2-9+(z+1)^2-1=-10$
$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2+(z-(-1))^2=16$.

$(\mathcal{S}')$ est la sphère de centre $\Omega'(4\,;3\,;-1)$
et de rayon $\sqrt{16}=4$.

2. $\Omega\Omega' = \sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2+(-1-(-1))^2}$
$= \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$.

$R+R'=8$ donc $R+R' > \Omega\Omega'$ donc $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont sécantes.

3. a. $M \in (\mathcal{S})$ donc $\Omega M = 4$ et $M \in (\mathcal{S}')$ donc $\Omega' M = 4$.
Ainsi, $\Omega M = \Omega' M$ et M appartient au plan médiateur de *MM*'.

b. Le point $M(x\,;y\,;z)$ vérifie :

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16\\(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16\\(x-2)^2-(x-4)^2+(y-2)^2-(y-3)^2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16\\x^2-4x+4-x^2+8x-16+y^2-4y+4-y^2+6y-9=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16\\4x+2y=17\end{cases}$$

Donc le point M est situé à l'intersection de la sphère $(\mathcal{S})$ et du plan $(\mathcal{P})$ d'équation $4x+2y=17$; il est donc bien situé sur un cercle.

• On note $I(x_I\,;y_I\,;z_I)$; il est situé à la fois dans le plan $(\mathcal{P})$ et sur la droite (ΩΩ'). Donc :

$$\begin{cases}4x_I+2y_I=17\\x_I=2+2t\\y_I=2+t\\z_I=-1\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R} \text{ (on a } \overrightarrow{\Omega\Omega'}(2\,;1\,;0)).$$

Ainsi $I\left(3\,;\dfrac{5}{2}\,;-1\right)$.

(Remarque : *I* est le milieu de [ΩΩ'].)

• Le triangle Ω*IM* est rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore, $\Omega M^2 = \Omega I^2 + IM^2$,
donc $IM^2 = 4^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{59}{4}$.

Ains, le rayon de ce cercle *est* $IM = \dfrac{\sqrt{59}}{2}$.

c. $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega M'} = \Omega I \times \Omega M' = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5} = \dfrac{5}{2}$.

4. a. Le milieu I de [ΩΩ'] a pour coordonnées $\left(3\,;\dfrac{5}{2}\,;-1\right)$.

De plus, $\overrightarrow{\Omega\Omega'}(2\,;1\,;0)$ est un vecteur normal de ce plan médiateur $(\mathcal{Q})$. Il a donc pour équation $2x+y+d=0$.

Or $I \in (\mathcal{Q})$ donc $2\times 3+\dfrac{5}{2}+d=0$ d'où $d=-\dfrac{17}{2}$.

Ainsi, $(\mathcal{Q})$ a pour équation $2x+y-\dfrac{17}{2}=0$.

b. $\Omega \in$ (ΩΩ') et $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est un vecteur directeur de (ΩΩ'), donc sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

58 Plans bissecteurs

a. • $\vec{n}(1\,;2\,;-2)$ et $\vec{n}'(2\,;-1\,;2)$ sont des vecteurs normaux de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

$x_{\vec{n}'} = 2\times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\vec{n}'} \neq 2\times y_{\vec{n}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires et donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

• $\vec{n}\,.\,\vec{n}' = 1\times 2+2\times(-1)+(-2)\times 2 = 2-2-4=-4$.

$\vec{n}\,.\,\vec{n}' \neq 0$ donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.

b. $M\in(\mathcal{E}) \Leftrightarrow d(M\,;(\mathcal{P})) = d(M\,;(\mathcal{P}'))$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+2y-2z-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{|2x-y+2z+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$
$$\Leftrightarrow |x+2y-2z-1| = |2x-y+2z+1|$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-2z-1=2x-y+2z+1\\\text{ou}\\x+2y-2z-1=-(2x-y+2z+1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x+3y-4z-2=0\\\text{ou}\\3x+3y=0.\end{cases}$$

c. $-x+3y-4z-2=0$ est une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n}''(-1\,;3\,;-4)$ passant par $A(1\,;1\,;0)$.

$3x+3y=0$ est une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{v}(3\,;3\,;0)$ passant par $O(0\,;0\,;0)$.

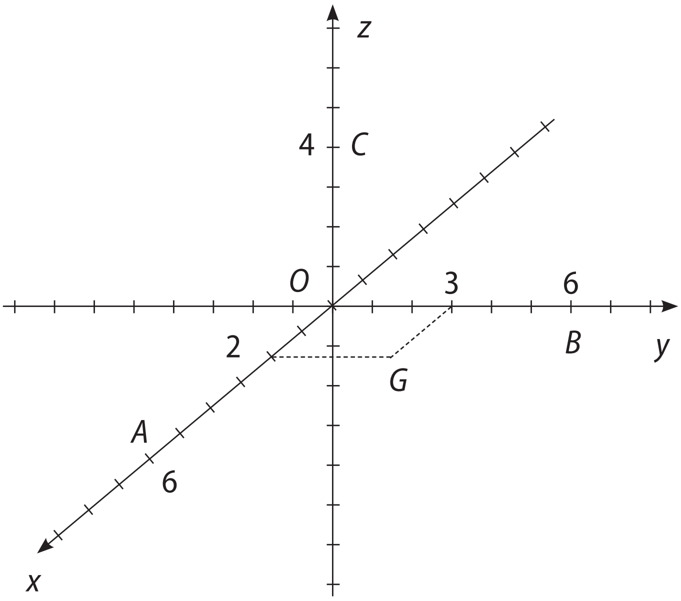
Donc $(\mathcal{E})$ est la réunion de ces deux plans.

$(\mathcal{E})$ est la réunion de ces deux plans.

De plus $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -1\times 3+3\times 1+(-4)\times 0 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ et donc les deux plans sont perpendiculaires.

59 Ensembles de points

1.



2. $G = \text{bary}\{(O, 1), (A, 2), (B, 3)\}$

donc $x_G = \dfrac{1 \times 0 + 2 \times 6 + 3 \times 0}{1 + 2 + 3} = 2$ et $y_G = 3$ et $z_G = 0$.

$G(2 ; 3 ; 0)$.

3. $\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG}$

donc $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) . \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{MC}$.

Ainsi M est tel que $\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{MC} = 0$

$\Leftrightarrow (2 - x)(0 - x) + (3 - y)(0 - y) + (0 - z)(4 - z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 4z = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 - 1 - \dfrac{9}{4} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{29}{4}$.

Cet ensemble est donc une sphère.

$(\mathscr{S})$ a pour centre $\Omega\left(1 ; \dfrac{3}{2} ; 2\right)$ et pour rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

4. $x = 0$ est une équation du plan (Oyz).

$d(\Omega, (Oyz)) = \dfrac{|1|}{\sqrt{1^2}} = 1$; $1 < 7$ donc le plan (Oyz) et la sphère $(\mathscr{S})$ sont sécants en un cercle.

Ce cercle a pour équation $y^2 + z^2 - 3y - 4z = 0$

$\Leftrightarrow \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \dfrac{25}{4}$.

Ce cercle a pour centre $I\left(0 ; \dfrac{3}{2} ; 2\right)$ et rayon $\dfrac{5}{2}$.

5. a. $GO^2 + 2GA^2 - 3GB^2 = (2^2 + 3^2 + 0^2) + 2((4)^2 + (-3)^2 + (0)^2) - 3((-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2)$

$= 13 + 2(25) - 3(13) = 24$.

Donc $G \in (\mathscr{P})$.

b. • $\overrightarrow{MG}(2 - x ; 3 - y ; -z)$

et $\overrightarrow{MG} . \vec{u} = (2 - x) \times 2 + (3 - y) \times (-3) + (-z) \times 0$

$= -2x + 4 + 3y - 9 = -2x + 3y - 5$.

• $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2((6 - x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2) - 3((-x)^2 + (6 - y)^2 + (-z)^2) = 24$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 72 - 24x + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x^2 - 108 + 36y - 3y^2 - 3z^2 = 24$

$\Leftrightarrow -36 - 24x + 36y = 24$

$\Leftrightarrow -24x + 36y - 60 = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 3y - 5 = 0$

L'équivalence est prouvée. $(\mathscr{P})$ est le plan d'équation $-2x + 3y - 5 = 0$.

60 Un tétraèdre dans un cube

1. a. $F(1 ; 0 ; 1)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$ donc $\overrightarrow{FD}(-1 ; 1 ; -1)$.

Puis $I\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ et $J\left(0 ; \dfrac{1}{2} ; 1\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 1\right)$ et

$K\left(1 ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$ donc $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; 0\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FD} . \overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 0$ et $\overrightarrow{FD} . \overrightarrow{IK} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc normal au plan (IJK) et donc $(FD) \perp (IJK)$.

b. $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal de (IJK) donc une équation cartésienne de (IJK) est $-x + y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $I\left(\dfrac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ appartient à ce plan donc $d = \dfrac{1}{2}$.

Finalement $(IJK) : -x + y - z + \dfrac{1}{2} = 0$.

2. $(FD) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. Résolvons $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ -x + y - z + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases}$

On obtient $-(1 - t) + t - (1 - t) + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$ et $z = \dfrac{1}{2}$.

4. $\overrightarrow{IK} . \overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{IJ}$ et ainsi IJK triangle rectangle en I.

$\mathscr{A}_{IJK} = \dfrac{1}{2} \times IJ \times IK = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\overrightarrow{FM}\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

$\mathscr{V}_{FIJK} = \dfrac{1}{3} \times FM \times \mathscr{A}_{IJK} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{8}$.

6. $(IJ) : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et $\overrightarrow{KL}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc $(KL) : \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t' \\ z = \dfrac{1}{2}t' \end{cases}$

et ainsi $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t = 1 \\ \dfrac{1}{2}t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}t' \\ t = \dfrac{1}{2}t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -2 \end{cases}$

Finalement (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$.

Problèmes

61 Programmation linéaire

Partie A

Si x, y et z représente le nombre de m^3 des marchandises M_1, M_2 et M_3 alors
- x, y et z sont des grandeurs positives ;
- la capacité maximale est 10 m^3 donc $x + y + z \leqslant 10$;
- la charge maximale est 5 t donc $x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{2}z \leqslant 5$.

Partie B

1. a. $(\mathscr{P}_1)$ et $(0\,;\vec{i})$:

$A \in (0\,;\vec{i})$ donc $y = 0$ et $z = 0$ puis $A \in (\mathscr{P}_1)$ donc $z = 10$.
$A(10\,;0\,;0)$.

$(\mathscr{P}_1)$ et $(0\,;\vec{j})$:

$B \in (0\,;\vec{j})$ donc $x = 0$ et $z = 0$ puis $B \in (\mathscr{P}_1)$ donc $y = 10$.
$B(0\,;10\,;0)$.

$(\mathscr{P}_1)$ et $(0\,;\vec{k})$:

$C \in (0\,;\vec{k})$ donc $x = 0$ et $y = 0$ puis $C \in (\mathscr{P}_1)$ donc $z = 10$.
$C(0\,;0\,;10)$.

b. De même $D(5\,;0\,;0)$, $E(0\,;20\,;0)$ et $F(0\,;0\,;10)$.

2. Le plan (ABC) est égal au plan $(\mathscr{P}_1)$ et le plan (DEF) est égal au plan $(\mathscr{P}_2)$.

Ainsi $(\mathscr{P}_1)$ et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont sécants en (AB) et $(\mathscr{P}_2)$ et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont sécants en (DE).

L'intersection de ces deux droites est le point d'intersection des trois plans (ABC), (DEF) et $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

$(AB) : \begin{cases} x = 10 - 10t \\ y = 0 + 10t \\ z = 0 + 0t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$(DE) : \begin{cases} x = 5 - 5t' \\ y = 0 + 20t' \\ z = 0 + 0t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Résolvons $\begin{cases} 10 - 10t = 5 - 5t' \\ 10t = 20t' \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 10 - 20t' = 5 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 5 = 15t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{1}{3} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Le point $G\left(\dfrac{10}{3}\,;\dfrac{20}{3}\,;0\right)$ est le point d'intersection des plans (ABC), (DEF) et $(0\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

3. Les points $M(x\,;y\,;z)$ sont tels que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 10$ et $x + 0{,}25y + 0{,}5z \leqslant 5$ donc les coordonnées de ces points sont les triplets solutions du système de la partie A.

Partie C

e. Les points $M(x\,;y\,;z)$ qui appartiennent au polyèdre $ODGBC$ et au demi-espace de frontière $(\mathscr{P}_3)$ contenant 0 ont des coordonnées qui vérifient le système du A est $x + y + 2z \leqslant 14$,

soit $1\,000x + 1\,000y + 2\,000z \leqslant 14\,000$.

Les points $M(x\,;y\,;z)$ ont les coordonnées qui sont solutions des contraintes du transporteur.

62 Perpendiculaire commune à deux droites

Partie A

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires puisque $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base d'un plan et ainsi il existe un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, il suffit de prendre un vecteur normal au plan défini précédemment.

2. Ces deux plans sont non parallèles puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires avec $\vec{w}$ donc ils sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

3. (Δ) est la droite d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ donc le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur directeur de (Δ).

Or $\vec{w} \perp \vec{u}$ donc $(\Delta) \perp (\mathscr{D})$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ donc $(\Delta) \perp (\mathscr{D}')$.

4. On utilise un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe une autre droite (Δ') distincte de (Δ) de vecteur directeur $\vec{w'}$ perpendiculaire à la fois à $(\mathcal{D})$ et à $\mathcal{D}$').

On aurait alors $\vec{u}\,.\,\vec{w'} = \vec{v}\,.\,\vec{w'} = 0$

donc (Δ') serait perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.

Ainsi $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ seraient colinéaires car (Δ) et (Δ') seraient parallèles.

Comme l'intersection de deux plans est une droite unique, c'est que (Δ) et (Δ') sont confondues. Donc la droite (Δ) est unique.

Partie B

1. $\overrightarrow{MM'}\,.\,\overrightarrow{HH'} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})\,.\,\overrightarrow{HH'}$
$= \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M'}\,.\,\overrightarrow{HH'}$

H et H' appartiennent à (Δ) donc $\overrightarrow{HH'}$ vecteur directeur de (Δ).

De même $\overrightarrow{MH}$ vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $\overrightarrow{M'H'}$ vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$.

Ainsi $\overrightarrow{MM'}\,.\,\overrightarrow{HH'} = 0 + HH'^2 + 0 = HH'^2$.

2. $MM'^2 = \overrightarrow{MM'}\,.\,\overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})\,.\,(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})$
$= HH'^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 + 2\,\overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{HH'} + 2\,\overrightarrow{HH'}\,.\,\overrightarrow{H'M'}$
$= HH'^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 + 2\times 0 + 2\times 0.$

Or $(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 \geqslant 0$ donc $MM'^2 \geqslant HH'^2$ et comme MM' et HH' sont des longueurs, $MM' \geqslant HH'$. Ainsi, HH' est la plus courte distance entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Partie C

1. • $x_{\vec{v}} = 2 \times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}} \neq 2 \times y_{\vec{u}}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ non parallèles.

• Voyons si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires. $\overrightarrow{AB}(-5\,;-2\,;1)$.
Cherchons s'ils existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} a\times 1 + b\times 2 + c\times(-5) = 0 \\ a\times 2 + b\times 1 + c\times(-2) = 0 \\ a\times(-1) + b\times 0 + c\times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 5c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ 2b - 4c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas coplanaires et donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas coplanaires.

2. • $\vec{w}(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{cases} \vec{w}\,.\,\vec{u} = 0 \\ \vec{w}\,.\,\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x = z \end{cases}$$

En prenant $x = 1$, $y = -2$ et $z = -3$.

$\vec{w}(1\,;-2\,;-3)$ est un des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est orthogonal à $\vec{w}$ et $\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

Avec $b = 1$ et $a = -4$ on obtient $\vec{n}(-4\,;1\,;-2)$.

Ainsi $(\mathcal{P}) : -4x + y + -2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or $A \in (\mathcal{P})$ donc $d = 15$.

Finalement $(\mathcal{P}) : -2x + y - 2z + 15 = 0$.

• De même $\vec{n}'(a'\,;b'\,;c')$ tel que :

$$\begin{cases} a' - 2b' - 3c' = 0 \\ 2a' + b' = 0 \end{cases}$$

Avec $a' = -3$ et $b' = 6$ on obtient $\vec{n}'(-3\,;6\,;-5)$.

Ainsi $(\mathcal{P}') : -3x + 6y + -5z + d' = 0$ avec $d' \in \mathbb{R}$.

Or $B \in (\mathcal{P}h)$ donc $d' = 1$.

Et $(\mathcal{P}') : -3x + 6y + -5z + 1 = 0$.

3. a. $M(x\,;y\,;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y - 2z + 15 = 0 \\ -3x + 6y + -5z + 1 = 0. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ -3t + 6(4t + 2z - 15) - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ 21t + 7z - 89 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 2z - 15 \\ z = -3t + \dfrac{89}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t + \dfrac{73}{7} \\ z = -3t + \dfrac{89}{7} \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. • H point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et (Δ) donc

$$\begin{cases} t = 4 + t' \\ -2t + \dfrac{73}{7} = 3 + 2t' \\ -3t + \dfrac{89}{7} = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -\dfrac{1}{7} \\ t = \dfrac{27}{7} \end{cases}$$

Ainsi $H\left(\dfrac{27}{7}\,;\dfrac{19}{7}\,;\dfrac{8}{7}\right)$.

• On procède de même avec H' point d'intersection de $(\mathcal{D}')$ et (Δ) et on trouve $H'\left(\dfrac{25}{7}\,;\dfrac{23}{7}\,;2\right)$.

• Ainsi $d((\mathcal{D})\,;(\mathcal{D}')) = HH'$

$$= \sqrt{\left(\frac{25}{7} - \frac{27}{7}\right)^2 + \left(\frac{23}{7} - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{23}{49} + \frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{56}}{7}.$$

8 Équations, inéquations, systèmes

Manuel pages 123 à 140

Activités d'introduction

1 Discriminant

1. a. $f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c.$

Donc $D = \frac{-b}{2a}$ et $E = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

b. c. $S\left(\frac{-b}{2a} ; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

2. a. $f_1 : y_S < 0$ et $\Delta > 0$;
$f_2 : y_S > 0$ et $\Delta < 0$;
$f_3 : y_S = 0$ et $\Delta = 0$.

b. f_1 : deux solutions ; f_2 : pas de solution ;
f_3 : unesolution.

3. $\Delta > 0$: deux solutions ; : $\Delta < 0$: pas de solution ;
$\Delta = 0$: une solution.

4. La conjecture reste valable.

2 Somme et produit des racines

1. Les deux nombres sont égaux à 12 et 17.

2.a. $\begin{cases} x + y = 29 \\ xy = 204 \end{cases}$

b. Dans l'équation (1) $y = 29 - x$.

c. $x(29 - x) = 204 \Leftrightarrow x^2 - 29x + 204 = 0$.

La vérification se fait en développant le deuxième membre de l'égalité.

$$\begin{aligned}(x - 14{,}5)^2 - 6{,}25 &= (x - 14{,}5 - 2{,}5)(x - 14{,}5 + 2{,}5)\\ &= (x - 17)(x - 12).\end{aligned}$$

Ce qui valide la conjecture du 1.b.

3 Résolution de systèmes

1. a. $\begin{cases} x = 7 + 3y \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 3y \\ 2(7+3y) - y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 + 3y \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

La solution du système (S) est donc (1 ; – 2).

b. $\begin{cases} 2x - 6y = 14 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -10 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$.

La solution du système (S) est donc (1 ; – 2).

2. $\begin{cases} x - y - z = -4 \\ 3y + 3z = 9 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -4 \\ 3y + 3z = 9 \\ 9z = 9 \end{cases}$

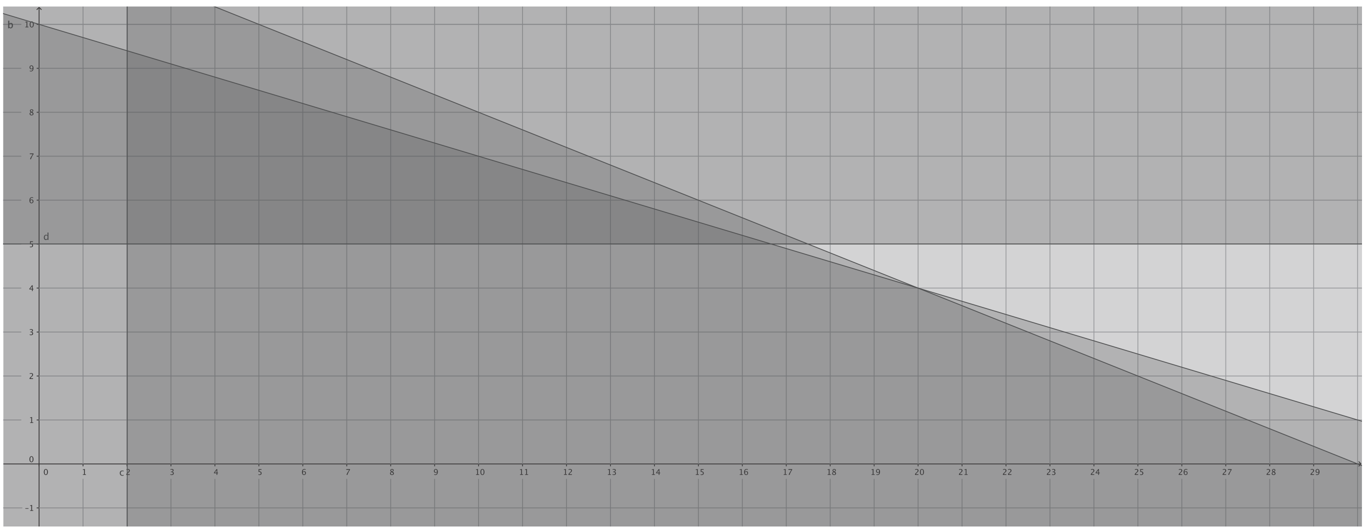
La solution du système (S') est donc (– 1 ; 2 ; 1).

4 Peinture

1. a. Cette inéquation est la traduction de la contrainte sur le chargement qui ne doit pas dépasser 300 kg.

b. x et y sont des entiers naturels. Et ona : $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ y \geqslant 5 \end{cases}$. De plus la contrainte sur la somme totale se traduit par l'inéquation : $6\,000x + 20\,000y \leqslant 200\,000$ que l'on simplifie en : $3x + 10y \leqslant 100$.

2.



3. a. On ne peut acheter que des pots entiers.

b. • L'artisan peut commander les deux quantités • maximum de pots de 10 kg : 16 ; • maximum de pots de 25 kg : 9.

Savoir-faire

3 **a.** $\Delta = 9$, $9 > 0$ deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.
b. $\Delta = 0$, une racine $x_0 = 3$.
c. $\Delta = -55$, $-55 < 0$ pas de racine .
d. $\Delta = 25$, $9 > 0$ deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

4 **a.** $2x^2 + 3x - 2$ a deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)$.
$4x^2 + 10x - 6$ a deux racines $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $4x^2 + 10x - 6 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$.
b. Lorsque $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -3$, $Q(x) = \frac{x+2}{2(x+3)}$.

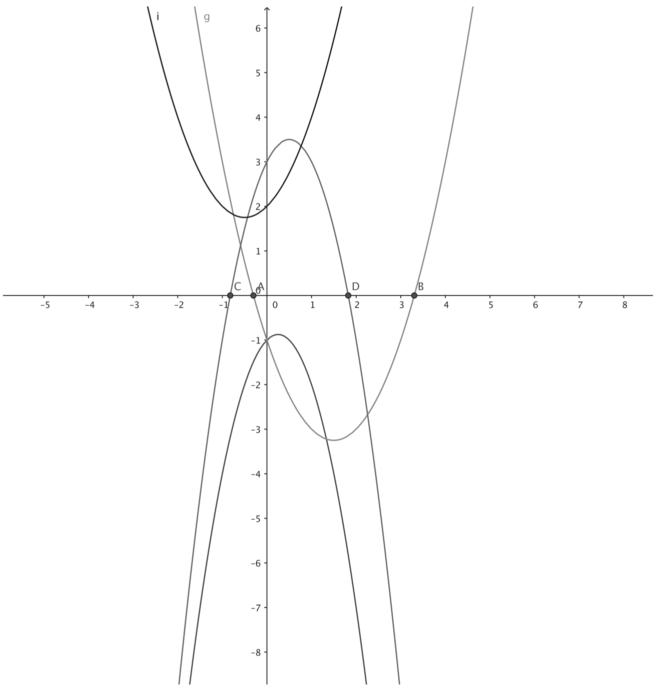
5 $P(-2) = P(3) = 0$. Ainsi -2 et 3 sont solutions de (E).
b. $P(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + x + 7)$.
L'ensemble des solutions de (E) est : $\{-2 ; 3\}$ car le discriminant de $x^2 + x + 7$ est négatif.

6 **a.** $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.
b. $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

10 **a.** $x = -1$; $P = \frac{-1}{3}$ donc $x = \frac{1}{3}$.
b. $x_1 = 2$; $S = -3$ donc $x_2 = -5$.

11 **a.** $S =]-\infty ; -1[\cup \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$. **b.** $S = \mathbb{R}$.

12 Les résultatts sont des valeurs approchées car une lecture graphique est approximative.
a. $S = \emptyset$; **b.** $S = \{-0{,}3 ; 3{,}3\}$;
c. $S =]-0{,}82 ; 1{,}82[$; **d.** $S = \emptyset$.



13 Il faut que : $x + 1 \geqslant 0$, donc que $x \in]-1 ; +\infty[$.
$\sqrt{x+1} = x \Rightarrow x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (E')
$\Delta = 5$; l'équation (E') a donc deux solutions :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
b. $S =]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[\cap]-1 ; +\infty[$
$=]-1 ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$.

16 **a.** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$
La solution du système est donc $(1 ; 3)$.
b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ 3(-3y + 2) + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 2 \\ -7y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$
La solution du système est donc $(-1 ; 1)$.

17 **a.** $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 2 \times (-1) = 12$.
$D \neq 0$ donc le système est bien un système de Cramer.
$D_x = \begin{vmatrix} 17 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 17 \times 2 - 2 \times (-1) = 36$ et
$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 2 \times 17 = -24$.
Ainsi la solution du système est le couple :
$\left(\frac{36}{12} ; \frac{24}{12}\right) = (3 ; -2)$.
b. $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \times 2 - 3 \times 2 = -13$.
$D \neq 0$ donc le système est bien un système de Cramer.
$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 10 \times 3 = -26$ et
$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \times 10 - 3 \times 2 = -26$.
Ainsi la solution du système est le couple :
$\left(\frac{-26}{-13} ; \frac{-26}{-13}\right) = (2 ; 2)$.

18 **a.** $\begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ 2x - y + z = 4 \\ -x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ -3y - 5z = -18 \\ 2y + 2z = 8 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 11 \\ -3y - 5z = -18 \\ 4z = -12 \end{cases}$
Ainsi la solution du système est : $(1 ; 1 ; 3)$.

b. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=-3 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-z=-5 \\ 2y=2 \end{cases}$

Ainsi la solution du système est : (– 2 ; 1 ; 2).

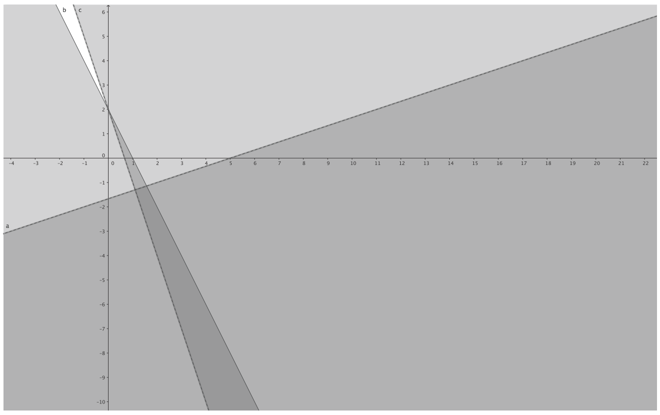
20 **a.** x et y désignent les deux nombres cherchés, $x > y$.

x et y sont solution du système (S) $\begin{cases} x+y=21 \\ x^2-y^2=105. \end{cases}$

b. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=21-x \\ x^2-(21-x)^2=105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=21-x \\ 42x-441=105 \end{cases}$

Les deux nombres cherchés sont donc 13 et 8.

21



Exercices d'entraînement

Équations du second degré

22 P_1 a deux racines –3 et –1.

Ainsi $P_1(x) = (x+1)(x+3)$.

P_2 a une racine 2.

Ainsi $P_2(x) = -(x-2)^2$.

23 $\Delta = 13$, $\Delta > 0$ donc deux solutions ;

$\Delta = 5$, $\Delta > 0$ donc deux solutions ;

$\Delta = -23$, $\Delta < 0$ donc pas de solution ;

$\Delta = 0$ donc une solution.

24 **a.** $P(x) = (x+1)(x+2)$; **b.** $P(x) = (2x+1)^2$.

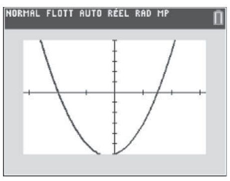
25 **a.** $\Delta = 9, \Delta > 0$ donc $S = \{-2 ; 1\}$;

b. $\Delta = -3$, $\Delta < 0$ donc $S = \emptyset$;

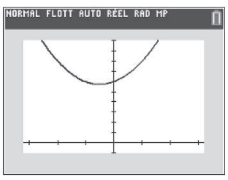
c. $\Delta = 41$, $\Delta > 0$ donc $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{41}}{4} ; \frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right\}$;

d. $\Delta = 0$ donc $S = \{3\}$.

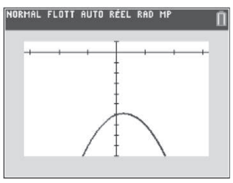
26 **a.** Deux solutions ;



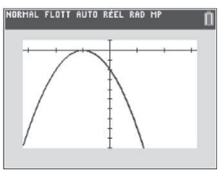
b. Pas de solution ;



c. Pas de solution ;



d. Une solution.



27

$P(x) = x^2+x+5$	$-\frac{3}{2}$ et 1
$P(x) = 2x^2+x-3$	Pas de racine
$P(x) = 5x^2+x+1$	– 1 et 3
$P(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3$	– 2 et 1
$P(x) = x^2-2x-3$	Pas de racine
$P(x) = -x^2-x+2$	– 3 et 2

28

	Signe de a	Signe de Δ	Nombre de racines
a.	+	+	2
b.	–	–	0
c.	+	nul	1

29 **a.** $P(2) = 0$, $P(x) = (x-2)(x+3)$ et $x_2 = -3$;

b. $P(-1) = 0$, $P(x) = (x+1)(-2x+3)$ et $x_2 = \frac{3}{2}$;

c. $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $P(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x-2\right)$ et $x_2 = 1$;

d. $P(\sqrt{3}) = 0$, $P(x) = (x-\sqrt{3})(x-1)$ et $x_2 = 1$.

30 **a.** $P(x) = x(x+1)$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$;

b. $P(x) = (\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)$; $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

c. $P(x) = -4(x-1)^2$; $x_1 = x_2 = 1$;

d. $P(x) = x(x-9)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.

31 **a.** $S = \left\{-\frac{2}{3} ; \frac{3}{5}\right\}$; **b.** $S = \{-3 ; 5\}$; **c.** $S = \emptyset$; **d.** $S = \left\{-\frac{1}{4} ; 2\right\}$.

32 **a.** $S = \left\{-\frac{1}{2} ; 1\right\}$.

b. $P_1(x) = P_2(x) \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=0$.

Les solutions sont donc $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

33 A désigne l'aire totale.

$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6R^2 + 90R$.

$A = 600 \Leftrightarrow 6R^2 + 90R = 600 \Leftrightarrow R^2 + 15R - 100 = 0$.

L'équation a deux solutions -20 et 5.

Les dimensions devant être positives, le rayon R est donc égal à 5 cm.

Ainsi le volume V sera égal à $V = \pi R^2 H = 1\,125$ cm^3.

Somme et produit des racines

34 **a.** $x_1 = 1$, $S = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{1}{2}$;

b. $x_1 = 2$, $P = \frac{2}{-3}$ donc $x_2 = -\frac{1}{3}$;

c. $x_1 = 2$, $S = 4$ donc $x_2 = 2$;

d. $x_1 = 1$, $P = -\frac{2}{3}$ donc $x_2 = -\frac{2}{3}$.

35 **a.** Les deux nombres cherchés sont 4 et 6 car ils sont solutions de l'équation : $x^2 - 10x + 24 = 0$;

b. Les deux nombres cherchés sont –5 et 2 car ils sont solutions de l'équation : $x^2 + 3x - 10 = 0$.

36 La largeur et la longueur du rectangle sont 4 et 5 car elles sont solutions de l'équation : $x^2 - 9x + 20 = 0$.

37 **a.** $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{25}{4} + 2 \times (-3) = \frac{1}{4}$.

b. $S_1 = -\frac{1}{2}$ ou $S_2 = \frac{1}{2}$.

x et y sont donc solutions des équations :

$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$ ou $x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$.

Les couples solutions sont alors :

$\left(2 ; -\frac{3}{2}\right), \left(-2 ; \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} ; 2\right), \left(\frac{3}{2} ; -2\right)$.

Inéquations du second degré

38

a.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P_2(x)$		$-$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		-4		1		
$P_3(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P_4(x)$		$+$	

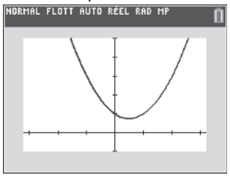
39 **a.** $S =]-\infty ; 1[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$;

b. $S = \emptyset$;

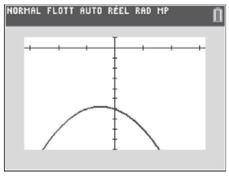
c. $S = \left[\frac{5 - \sqrt{109}}{6} ; \frac{5 + \sqrt{109}}{6}\right]$;

d. $S = \left]-\infty ; \frac{5 - \sqrt{105}}{4}\right[\cup \left]\frac{5 + \sqrt{105}}{4} ; +\infty\right[$.

40 **a.** $P_1(x) > 0$

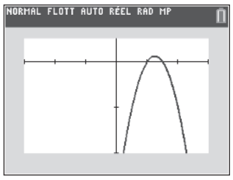


b. $P_2(x) > 0$;

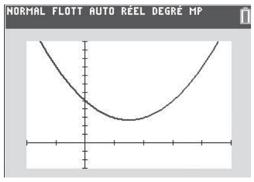


c. $P(x) > 0$ si $x \in \left]1 ; \frac{3}{2}\right[$;

$P(x) < 0$ si $x \in]-\infty ; 1[\cup \left]\frac{3}{2} + \infty\right[$



d. $P(x) > 0$.



41 **a.** $(x - 3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0$; $S =]-1 ; 7[$;

b. $-7x^2 + x < 1 \Leftrightarrow -7x^2 + x - 1 < 0$; $S = \mathbb{R}$;

c. $12 > x^2 + 11x \Leftrightarrow x^2 + 11x - 12 < 0$; $S =]-12 ; 1[$;

d. $2x^2 + 9x - 14 \geqslant x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 10 \geqslant 0$;

$S =]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$;

e. $x(x - 2) < 9 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0$; $S =]-3 ; 3[$;

f. $(x + 1)(x - 5) \leqslant (2x + 1)(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 9x + 7 \geqslant 0$;

$S = \left]-\infty ; \frac{-9 - \sqrt{53}}{2}\right[\cup \left]\frac{-9 + \sqrt{53}}{2} ; +\infty\right[$.

42 **a.** $P_1(x) > P_2(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + \frac{3}{2} > 0$;

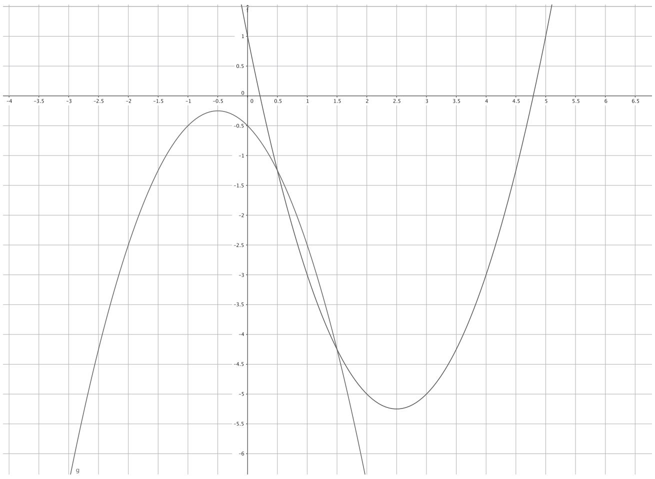
$S = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.

b. Sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} + \infty\right[$, $(\mathscr{C}_1)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_2)$;

sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$ $(\mathscr{C}_1)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$

se coupent en deux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

c.



43 **a.** $R(x) = 1\,250\,x$.
b. $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 750x - 50\,000$.
c. $B(50) = -17\,500$; $B(100) = 5\,000$; $B(300) = -5\,000$.
Pour une production de 50 et 300 produits, l'artisan enregistre une perte, alors que pour une production de 100 produits, il réalise un bénéfice.
d. $B(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 750x - 50\,000 > 0$;
$S = \left]\frac{750 - 50\sqrt{65}}{4} ; \frac{750 + 50\sqrt{65}}{4}\right[$.
L'artisan doit fabriquer entre 87 et 288 objets pour réaliser un bénéfice.

44 **1. a.** $m = -2$; **b.** $m = -0{,}1$; **c.** $m = 2$.

Équations se ramenant au second degré

45 **a.** $P(-1) = 0$.
b. L'équation $x^2 - 2x + 4 = 0$ n'a pas de solution. Ainsi (E) n'a qu'une solution : -1.

46 2 est solution évidente car :
$4 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 5 \times 2 - 10 = 32 - 12 - 10 - 10 = 0$.
Ainsi $4x^3 - 3x^2 - 5x - 10 = (x - 2)(4x^2 + 5x + 5)$.
L'équation $4x^2 + 5x + 5 = 0$ n'a pas de solution, donc la seule solution est : 2.

47 **a.** $P(x) = (x^2 + 1)Q(x)$.
b. $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution ;
$Q(x) = 0$ n'a pas de solution.
Finalement l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution.

48 **a.** Il suffit de développer (E').
b. $(E'') \Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0$ a pour unique solution $X_0 = 1$.
c. $x^2 - x - 2 = X_0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$.
Cette équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

49 **a.** $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$.
b. $x^2 = x_1$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
$x^2 = x_2$ a deux solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
c. On pose $X = x^2$. Ainsi
$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 = 0$.
Les résultats du **a.** et du **b.** permettent de déterminer les solutions de l'équation qui sont donc $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

50 **a.** $x^2 - 10\,x + 9 = (x - 1)(x - 9)$.
b. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$.
c. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

51 $x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x = 0$.
Ainsi (E) a pour solution : 1.

52 L'équation $-X^2 + 5X - 7 = 0$ n'a pas de racine, la courbe $(\mathscr{C}_3)$ correspond donc au polynôme P_2.
Les autres équations ont des racines,
et comme $P_3(0) = -6$ la courbe $(\mathscr{C}_1)$ correspond donc au polynôme P_3 et la courbe $(\mathscr{C}_2)$ correspond donc au polynôme P_1.

Équations/Inéquations irrationnelles

53 **a.** $S = \emptyset$ car $-3 < 0$; **b.** $S = \{-1\}$; **c.** $S = \{8\}$.

54 $S =]8 ; +\infty[$.

55 **a.** $D = \emptyset$ donc $S = \emptyset$;
b. $D = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.
$\sqrt{x + 2} = \sqrt{2x - 3} \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 5$.
Ainsi $S = \{5\}$.

56 **a.** Le trinôme $x^2 + x + 5$ n'a pas de racine, il est donc toujours positif. Ainsi $D = \mathbb{R}$.
$\sqrt{x^2 + x + 5} < 5 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 < 25 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 < 0$.
$S =]-5 ; 4[$.
b. $D = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.
$\sqrt{x} < \sqrt{2x - 3} \Leftrightarrow x < 2x - 3 \Leftrightarrow x > 3$; $S =]3 ; +\infty[$.

57 **a.** Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ a deux racines : 2 et 3. Il est positif si $x \in]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.
Le trinôme $4x^2 + 4x + 1$ a une seule racine : $-\frac{1}{2}$. Il est donc toujours positif ou nul.
Ainsi : $D =]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$.

b. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 5 = 0.$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{141}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{141}}{6}$.

$x_1 \in$ D et $x_2 \in$ D. Ainsi S = $\{x_1 ; x_2\}$.

Systèmes linéaires

58 **a.** $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$; $7 \neq 0$ donc une seule solution.

b. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

c. $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$ $2 \neq 0$ donc une seule solution.

59 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$ $5 \neq 0$ donc une seule solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10$ et $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{10}{5} ; \dfrac{-5}{5}\right) = (2 ; -1).$

60 **a.** $\begin{cases} y < -2x + 5 \\ y < -0{,}5x + 3 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} y < -x^2 + 4x \\ x > 3 \\ y > 0. \end{cases}$

61 **a.** $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $2 \neq 0$ donc une seule solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$ et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{4}{2} ; \dfrac{-2}{2}\right) = (2 ; -1).$

b. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

On ne peut appliquer la méthode de Cramer.

62 **1. a.** Lorsque $m = 3$, (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

$3 \neq 1$ donc le système n'a pas de solution.

b. Lorsque $m = 1$, (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 3 \\ 2x = 3 \end{cases}$

Le système a donc pour solution le couple $\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{3}{4}\right)$.

2. a. $D = \begin{vmatrix} m-1 & -(m-5) \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 + 2(m-5)$

$= m^2 - 9.$

$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 3. \end{cases}$

b. $D_x = \begin{vmatrix} m & -(m-5) \\ -m+4 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + (-m+4)(m-5)$

$= 8m - 20.$

$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & m \\ 2 & -m+4 \end{vmatrix} = (m-1)(-m+4) - 2m$

$= -m^2 + 3m - 4.$

Ainsi la solution du système est le couple :

$\left(\dfrac{8m - 20}{m^2 - 9} ; \dfrac{-m^2 + 3m - 4}{m^2 - 9}\right).$

c. Si $m = 2$ le couple solution est $\left(\dfrac{-4}{-5} ; \dfrac{-2}{-5}\right) = \left(\dfrac{4}{5} ; \dfrac{2}{5}\right).$

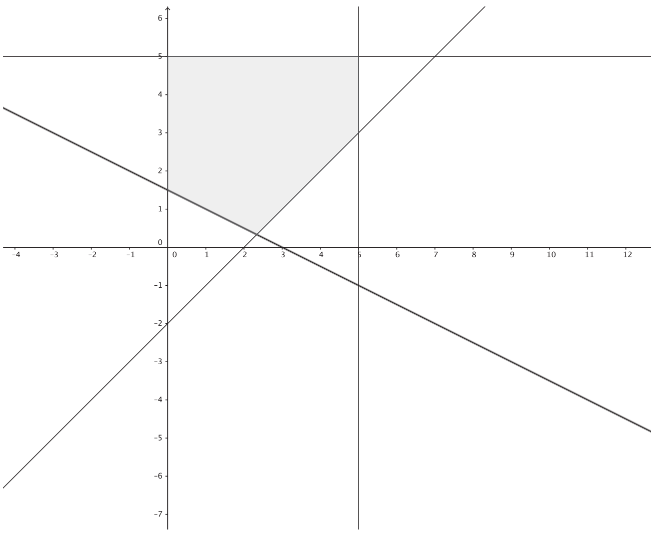
63 **a.** $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 5y - 8z = -14 \\ 7y - 7z = -7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 5y - 8z = -14 \\ 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -y + 3z = -9 \\ 3y - 3z = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -y + 3z = -9 \\ 6z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \\ z = -2 \end{cases}$

64



65 Les nombres a, b et c sont solution du système :

$\begin{cases} a + b + c = 10 \\ 100c + 10b + a = 100a + 10b + c + 297 \\ 100a + 10b + c = 100b + 10c + a - 117 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 10 \\ 99a - 99c = -297 \\ 99a - 90b - 9c = -117 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 10 \\ a - c = -3 \\ 11a - 10b - c = -13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c - 3 + b + c = 10 \\ a = c - 3 \\ 11c - 33 - 10b - c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c = 13 \\ a = c - 3 \\ c - b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 5. \end{cases}$

Ainsi le nombre cherché est 235.

Se tester

66 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ; **7.** Vrai.

67 **1.** Vrai. $\Delta = 1$. Deux solutions : $x_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1$.

2. Faux. $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x-1)$.

3. Faux. $(x^2 + x - 6) = (x-2)(x+3)$.

4. Vrai. Trinôme du signe de $-a = -1$ à l'intérieur des racines.

5. Vrai. $D = \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13 \times 1 - 5 \times 7 = -22$.

6. Faux La solution est le couple : $(-2 ; 3)$.

68 **1.** b. **2.** a. **3.** b. **4.** a. **5.** c. **6.** b.

69 **1. c.** car $1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$.

2. a. car $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$
$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

3. b. car $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux racines : 2 et 3.

4. b. Trinôme du signe de $-a = -1$ à l'intérieur des racines.

5. c. car le trinôme $x^2 - 5x + 6$ change de signe en 2. (Pour détailler cette réponse, on peut dresser un tableau de signes.)

6. a. car $P(x) < 11x - 6 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 < 0$
$\Leftrightarrow x^2(x-6) < 0$.

Exercices d'approfondissement

70 **Danger : inéquation**

1. a. Le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{10 - \sqrt{79}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{10 + \sqrt{79}}{3}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2 - 20x + 7$		+	0	−	0	+	

b. $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$.

c. $(I) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - 20x + 7}{x - 6} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		x_1		6		x_2		$+\infty$
$x - 6$		−	|	−	0	+	|	+	
$3x^2 - 20x + 7$		+	0	−	|	−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	||	−	0	+	

$S = [x_1 ; 6[\cup [x_2 ; +\infty[$.

2. a. $D = \mathbb{R}\backslash\{-2 ; 2\}$.

b.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	0	−	0	+	

c. $I' \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 - 4} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 5}{x^2 - 4} \leqslant 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2		2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$-x^2 + 5$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
(I')		−	0	+	||	−	||	+	0	−	

Ainsi, $S =]-\infty ; -\sqrt{5}] \cup]2 ; -2[\cup [\sqrt{5} ; +\infty[$.

71 **Somme = produit**

a. $x = 2$ et $y = 2$.

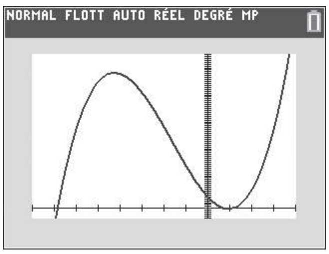
b. (E) : $x^2 - mx + m = 0$.

c. $\Delta = m^2 - 4m$.

- si $0 < m < 4$, pas de solution,
- si $m = 0$, une solution $x = y = 0$,
- si $m = 4$, une solution $x = y = 2$,
- si $m < 0$ ou $m > 4$, deux solutions $x = \dfrac{m - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $y = \dfrac{m + \sqrt{\Delta}}{2}$.

72 **Signe d'un polynôme du troisième degré**

a.



On conjecture que $P(x) < 0$ lorsque $x < 6{,}8$ (environ) ;
que $P(x) = 0$ lorsque $x \approx 6{,}8$;
que $P(x) > 0$ lorsque $x < 6{,}8$ (environ).

b. $x_0 = 1$.

c. $P(x) = (x-1)(x^2 + 6x - 6)$.

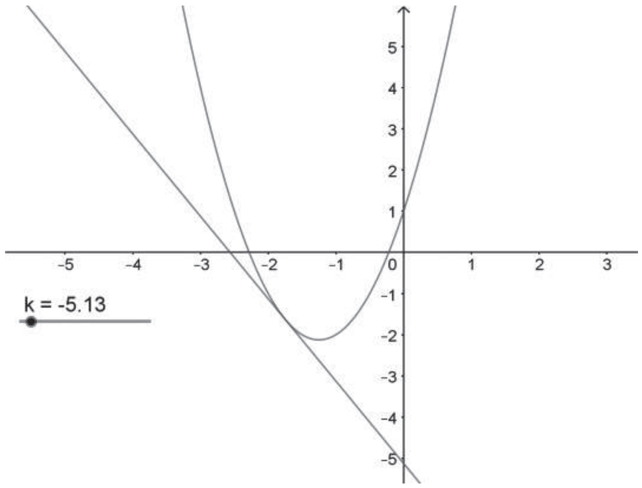
d. $x_1 = -3 - \sqrt{15}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{15}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$x - 1$		−	|	−	|	−	0	+	
$x^2 + 6x - 6$		+	0	−	0	+	|	+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

La conjecture du **a.** (lecture imprécise) est invalidée par le calcul.

73 Paramètre et intersection

a.



On conjecture que :

- lorsque $k < -5{,}1$ il n'y a pas de point d'intersection ;
- lorsque $k \approx -5{,}1$ il y a un unique point d'intersection ;
- lorsque $k > -5{,}1$ il y a deux points d'intersection ;

b. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 1 - k = 0$.

$\Delta = 49 - 8(1 - k) = 41 + 8k$.

Si $k < -\dfrac{41}{8}$, aucun point d'intersection ;

si $k = -\dfrac{41}{8}$, un point d'intersection ;

si $k > -\dfrac{41}{8}$, deux points d'intersection.

74 Inéquation

a. Q a deux racines -3 et $-\dfrac{1}{2}$.

b.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $S = \left]-3\,;-\dfrac{1}{2}\right[$.

75 Deux nombres inconnus

x désigne l'un des nombres, l'autre est donc $\dfrac{1}{x}$.

L'énoncé se traduit par l'équation (E) :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$$

On pose $X = x^2$. Ainsi $(E) \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $\dfrac{1}{2}$ et 2.

Finalement, on obtient quatre solutions :

$x \in \left\{-\sqrt{2}\,;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\sqrt{2}\right\}$.

76 Équation inconnue

1. $\Delta = 5m^2 - 14m + 1$.

2. a. $\Delta = 1 \Leftrightarrow m(5m - 14) = 0$.

Or $m \neq 0$, donc $m = \dfrac{14}{5}$.

b. (E) a deux solutions $x_1 = -\dfrac{1}{7}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left]\dfrac{7 - \sqrt{44}}{5}\,;\dfrac{7 + \sqrt{44}}{5}\right[$.

4. a. $x_1 = \dfrac{-m + 1 - \sqrt{5m^2 - 14m + 1}}{2m}$

et $x_2 = \dfrac{-m + 1 + \sqrt{5m^2 - 14m + 1}}{2m}$.

b. Les deux solutions sont -1 et $\dfrac{1}{4}$.

77 Vitesse d'un avion

a. $t_{aller} = \dfrac{630}{V - 100}$; $t_{retour} = \dfrac{630}{V + 100}$.

b. $t_{aller} + t_{retour} = 1{,}6 \Leftrightarrow 630\left(\dfrac{1}{V - 100} + \dfrac{630}{V + 100}\right) = 1{,}6$

$\Leftrightarrow \dfrac{1\,260V}{V^2 - 10\,000} = 1{,}6$

$\Leftrightarrow 1{,}6\,V^2 - 1\,260V - 16\,000 = 0$.

c. $\Delta = 1\,300^2$; (E) a donc deux solutions :

$V_1 = -12{,}5$ (non valable car la vitesse est positive) et $V_2 = 800$.

La vitesse de l'avion serait donc de 800 km/h.

78 Un carreau

$A_{colorée} = x^2 + [100 - (10 - 2x)^2] = -3x^2 + 40\,x$.

$A_{blanche} = 100 - A_{colorée} = 3x^2 - 40x + 100$.

$A_{colorée} < A_{blanche} \Leftrightarrow 6x^2 - 80x + 100 > 0$.

Le trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{20 - 5\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}4$

et $x_2 = \dfrac{20 + 5\sqrt{10}}{3} \approx 11{,}9$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 10$, donc $x \in [0\,; x_1]$.

79 Carrés et cubes des racines

1. a. $\Delta = 29$; $\Delta > 0$.

b. $S = 3$, $P = -5$.

2. a. $(x_1 + x_2)^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + 2x_1 x_2$.

b. $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = S^2 - 2P = 19$.

3. a. $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2$.

b. $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP = 72$.

4. $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

Vérifier ensuite les résultats précédents avec ces valeurs.

80 Une ficelle

a. On pose $AC = x$.

Le théorème de Pythagore se traduit par :

$13^2 = x^2 + (20 - x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 231 = 0$.

Le discriminant est négatif ($\Delta = -2\ 096$), donc cette équation n'a pas de solution. Il est donc impossible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle soit rectangle.

b. l désigne la longueur de la ficelle.

En procédant de manière analogue au **a.**, on obtient l'équation : $2x^2 - 2lx + l^2 - 169 = 0$.

$\Delta = 1\ 352 - 4l^2$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow l < \sqrt{338} \Leftrightarrow l < 13\sqrt{2}$.

La longueur de la ficelle doit donc être inférieure à $13\sqrt{2}$ cm (soit environ 18,4 cm).

81 Un pavé

1. $V = abc$; $A = 2(ab + ac + bc)$; $L = 4\ (a + b + c)$.

2. a. $P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

b. $P(x) = x^3 - \dfrac{L}{4}x^2 + \dfrac{A}{2}x - V$.

$x^3 - 39x^2 + 284x - 420 = 0 \qquad (E)$.

c. a, b et c sont les racines de P.

3. a. $x_0 = 2$.

b. $(E) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 37x + 210) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 7)(x - 30) = 0$.

c. Les dimensions du pavé sont donc 2 cm, 7 cm et 30 cm.

82 Des équations irrationnelles

1. a. $(E')\ X^2 + X - 6 = 0$.

b. $X_1 = -3$, $X_2 = 2$.

c. $\sqrt{x} = -3$ est impossible ; $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$.

Finalement, $S = \{4\}$.

2. a. $(F')\ X^2 + X - 2 = 0$.

b. $X_1 = -2$, $X_2 = 1$.

c. $\sqrt{x - 1} = -2$ est impossible ; $\sqrt{x - 1} = 1 \Rightarrow x = 2$.

Finalement, $S = \{2\}$.

83 Point sur la courbe

a. A milieu de $[MM']$ donc

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{x + x'}{2} \\ 3 = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = \dfrac{5x - 5}{x - 2}. \end{cases}$$

b. $M' \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow y' = f(x') \Leftrightarrow \dfrac{5x - 5}{x - 2} = \dfrac{-x - 1}{-x + 4}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 11 = 0$.

c. Cette équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{14}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{14}}{2}$.

d. $f(x_1) = \dfrac{-8 - \sqrt{14}}{2 - \sqrt{14}}$ et $f(x_2) = \dfrac{-8 + \sqrt{14}}{2 + \sqrt{14}}$.

84 Une histoire de boules

1. a. $V_{eau} = V_{interieur} - V_{boule} = 912\pi$.

b. $V_{eau} = 200\pi R - \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2. a. $912\pi = 200\pi R - \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 - 150R + 684 = 0$.

c. $(E) \Leftrightarrow (R - 6)(R^2 + 6R - 114) = 0$.

d. Deux solutions $R_1 = -3 - \sqrt{123}$ et $R_2 = -3 + \sqrt{123}$.

$R > 0$. Donc $R = R_2 \approx 8{,}09$.

Le rayon de la deuxième boule est donc environ 8,09 cm.

85 Système 2 × 3

a. $(S')\ \begin{cases} x + 2y = 5 - z \\ -2x + y = -3 + 2z. \end{cases}$

b. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.\ 5 \neq 0$ donc une seule solution.

$D_x = \begin{vmatrix} 5 - z & 1 \\ -3 + 2z & 3 \end{vmatrix} = 18 - 5z$ et $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 - z \\ -2 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 7$.

Ainsi la solution du système (S') est le couple :

$\left(\dfrac{18 - 5z}{5} ; \dfrac{7}{5}\right)$.

c. L'ensemble des solutions de (S) est alors :

$\left\{\left(\dfrac{18 - 5z}{5} ; \dfrac{7}{5} ; z\right)\right\}$, avec $z \in \mathbb{R}$.

86 Bassin

a. d_1, d_2 et d_3 désignent les débits respectifs des trois robinets et V le volume du bassin.

Le tableau se traduit par le système : $\begin{cases} d_1 + d_2 = \dfrac{V}{20} \\ d_2 + d_3 = \dfrac{V}{15} \\ d_1 + d_3 = \dfrac{V}{12}. \end{cases}$

b. $d_1 = \dfrac{V}{30}$; $d_2 = \dfrac{V}{60}$ et $d_3 = \dfrac{V}{20}$.

c. $t_1 = \dfrac{V}{d_1} = \dfrac{V}{\frac{V}{30}} = 30$ min;

$t_2 = \dfrac{V}{d_2} = \dfrac{V}{\frac{V}{60}} = 60$ min

et $t_3 = \dfrac{V}{d_3} = \dfrac{V}{\frac{V}{20}} = 20$ min.

d. $t = \dfrac{V}{d_1 + d_2 + d_3} = \dfrac{V}{\frac{V}{30} + \frac{V}{60} + \frac{V}{20}} = \dfrac{V}{\frac{V}{10}} = 10$ min.

87 Un circuit électrique

Calcul de la résistance équivalente des résistances montées en parallèle :

$\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{x+5}{2(x+3)} \Leftrightarrow R_{eq} = \dfrac{2(x+3)}{x+5}$.

Il en résulte l'équation :

$\dfrac{2(x+3)}{x+5} + x = 4{,}5 \Leftrightarrow 2(x+3) + x(x+5) = 4{,}5(x+5)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2{,}5x - 16{,}5 = 0.$

L'équation a deux solutions : $x_1 = -5{,}5$ et $x_2 = 3$.

La valeur de la résistance étant un nombre positif, elle est égale à 3 Ω.

88 Système 4 × 4

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ 2x-y+3z-t=5 \\ x-3y+z+2t=-1 \\ 3x+2y-z-t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -y-4z-4t=-14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -y-4z-4t=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -13y-16t=-42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ -77y=-154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=6 \\ -3y+z-3t=-7 \\ -4y+t=-7 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ t=1 \\ y=2. \end{cases} \qquad S = \{(1\,;2\,;2\,;1)\}.$$

89 Réservoir

d désigne le débit du deuxième tuyau et t le temps de remplissage lorsque l'on utilise les deux tuyaux.

L'énoncé se traduit par le système :

$\Leftrightarrow \begin{cases} (15+d)t = 1400 \\ d\,(t+30) = 1\,400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15t + dt = 1400 \\ dt + 30d = 1\,400 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\,d \\ 2d^2 + 30\,d - 1400 = 0. \end{cases}$

Deux solutions pour d : -35 et 20.

Le débit étant positif, il ést égal à 20 litres par minute.

Problèmes

90 Une méthode de résolution babylonienne

1. a. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ et $u_4 = \sqrt{2}$.

b. $u_1 + u_4 - \dfrac{1}{u_1 + u_4} = 1 + \sqrt{2} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - 1}{1+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2$.

c. $(E) \Leftrightarrow x^2 - cx - 1 = 0$; $\Delta = c^2 + 4 = 8$.

(E') a deux solutions : $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2} = x_1$.

2. Pour c = –3 : $u_1 = -\dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{9}{4}$, $u_3 = \dfrac{13}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

(E') a deux solutions : $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Pour $c = 0$: $u_1 = -0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 1$.

(E') a deux solutions : –1 et 1.

3. a. On pose $X = x^2$.

$u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{9}{4}$, $u_3 = \dfrac{13}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

(E') a deux solutions : $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Ainsi on obtient $x^2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x^2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. Finalement, l'équation a deux solutions :

$-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$.

b. On pose $X = \sqrt{x}$.

$u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_3 = \dfrac{5}{4}$ et $u_4 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (E') a deux solutions :

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi on obtient $\sqrt{x} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Finalement, l'équation a une solution :
$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

91 Un problème chinois

1. Grâce à la feuille de calcul, étirée jusqu'à la ligne 251, on conjecture que la réponse au problème est $x = 250$.

2. a. Le théorème de Thalès donne l'égalité :
$$\dfrac{1\,775}{\dfrac{x}{2}} = \dfrac{x+34}{20} \Leftrightarrow 1\,775 \times 20 = \dfrac{x}{2} \times (x+34)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 34\,x - 71\,000 = 0$$

b. $\Delta = 34^2 + 4 \times 71\,000 = 285\,156 = 534^2$.

L'équation a donc deux solutions : $\dfrac{-34-534}{2} = -284$ et $\dfrac{-34+534}{2} = 250$.

La dimension du côté de la ville devant être positive, la seule réponse est qu'elle mesure 250 pas de côté.

92 Système avec paramètre

1. $\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=1. \end{cases}$

Donc $S = \{1\,;y\,;-y\}$ avec $y \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2}z=\dfrac{1}{4} \\ x+y+z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\,y+3\,z=\dfrac{1}{2} \\ x+y+z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y+z=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ z=-y \end{cases}$

Donc $S = \left\{\dfrac{1}{2}\,;y\,;-y\right\}$ avec $y \in \mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} -x+2y+2z=1 \\ -x=-2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2z=3 \\ x=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

impossible, donc S n'a pas de solution.

4. a. (1') $\Leftrightarrow 2a^2x = 3a^2 - a \Leftrightarrow x = \dfrac{3a-1}{2a}$.

b. (2') $\Leftrightarrow x = 1-a$.

c. $x = \dfrac{3a-1}{2a} = 1-a \Leftrightarrow 3a-1 = 2a-2a^2$
$\Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$.

Cette équation a deux solutions : -1 et $\dfrac{1}{2}$.

5. Finalement, le système n'a pas de solution si $a \neq 0$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$ et une infinité de solutions sinon.

93 Triangle dans un carré

1. On conjecture que l'aire du triangle CMM' est égale à 9 lorsque $x \approx 1{,}8$.

On conjecture que l'aire du triangle CMM' est supérieure au quart de l'aire du carré lorsque $1{,}8 < x \leqslant 6$ (environ).

2. a. $x \in [0\ ;6]$.

b. $A(x) = \text{Aire}_{ABCD} - \text{Aire}_{AMM'} - \text{Aire}_{DCM'} - \text{Aire}_{BCM}$
$$= 36 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{6(6-x)}{2} - \dfrac{6(6-x)}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2} + 6\,x\,.$$

c. $A(x) = 9 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 18 = 0$.

Cette équation a deux solutions :
$x_1 = 6 - 3\sqrt{2}$ et $x_2 = 6 + 3\sqrt{2}$.

Le nombre x doit être inférieur à 6, donc la seule solution admissible est x_1.

d. $S = [6 - 3\sqrt{2}\,;6]$.

9 Généralités sur les applications

Manuel pages 141 à 158

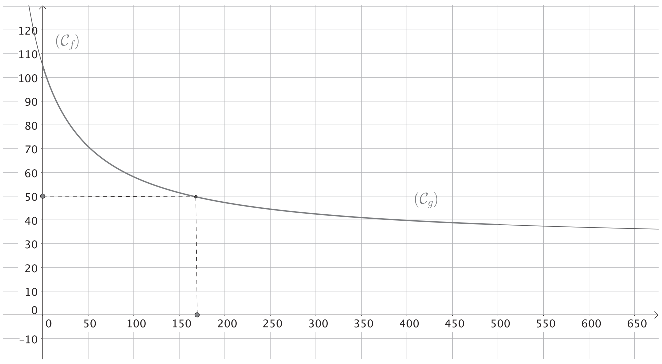
Activités d'introduction

1 Restriction d'une fonction

① **a.**

x	–35	–20	0	10	30	50	80	100	400	500
$f(x)$	210	142,5	105	94,3	80	70,9	62,1	58,1	39,8	38

b.



② **a.** On retrouve sur ce graphique quelques points du tableau précédent :

• pour une distance $x = 0$ m, la nuisance sonore est de $f(0) = 105$ dB ;

• pour une distance $x = 30$ m, la nuisance sonore est de $f(30) = 80$ dB ;

• pour une distance $x = 400$ m, ma nuisance sonore est de $f(400) = 40$ dB.

b. g est définie sur l'intervalle $[0 ; 500]$.

c. On cherche x tel que $g(x) = 50$.

$$g(x) = 50 \Leftrightarrow 30 + \frac{4\,500}{x+60} = 50 \Leftrightarrow \frac{4\,500}{x+60} = 20$$

$\Leftrightarrow 20x + 1\,200 = 4\,500 \Leftrightarrow 20x = 3\,300 \Leftrightarrow x = 165.$

À 165 m, la nuisance sonore d'une éolienne correspond à celle d'un micro-ondes.

2 Composition de fonctions

① $\mathcal{D}_f = [0 ; +\infty[$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

② $[0 ; +\infty[\xrightarrow{f} [0 ; +\infty[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} \longmapsto g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1.$

③ **a.** Car il faut que $g(x) \geqslant 0$ pour pouvoir écrire $f(g(x))$.

b. $[1 ; +\infty[\xrightarrow{g} [0 ; +\infty[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$

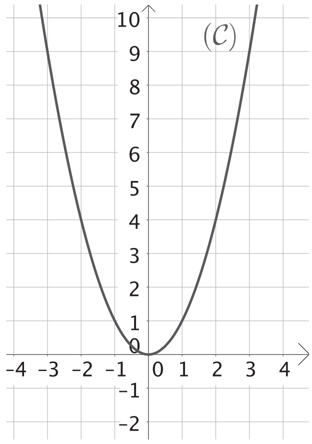
$x \longmapsto g(x) = x - 1 \longmapsto f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{x-1}.$

c. On constate que $g \circ f \neq f \circ g$.

3 Surjection, injection, bijection

①

a.

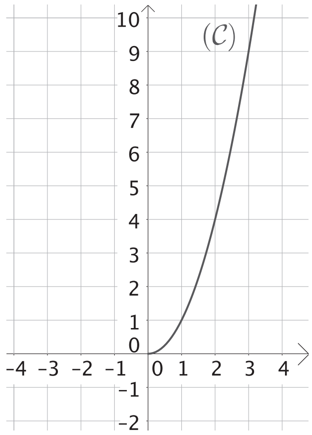


b. • Lorsque $m = 0$, m possède un seul antécédent par f : $x = 0$.

• Lorsque $m > 0$, m possède deux antécédents par f : $x = -\sqrt{m}$ et $x = \sqrt{m}$.

②

a.



b. • Lorsque $m < 0$, m ne possède aucun antécédent par g.

• Lorsque $m = 0$, m possède un seul antécédent par g : $x = 0$.

• Lorsque $m > 0$, m possède un seul antécédent par g : $x = \sqrt{m}$.

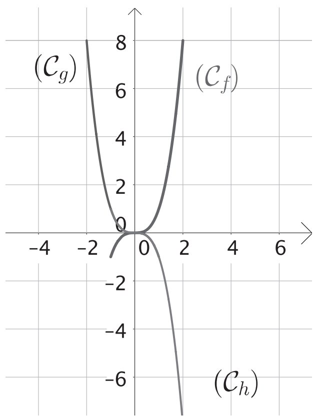
③ Pour tout $m \geqslant 0$, m possède un unique antécédent par h : $x = \sqrt{m}$, donc h est injective et surjective. h est donc bijective.

4 Fonction associée à une fonction usuelle

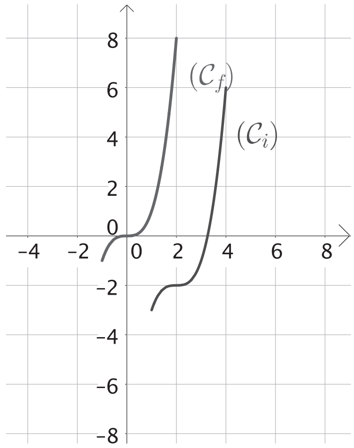
① **a.** à **c.**

• $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

d. • $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



② **a.** à **c.**



• $(\mathscr{C}_i)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(a\,;b)$.

Savoir-faire

3 **a.** À chaque nombre entier naturel n, u associé le nombre entier naturel $3n$.

Donc u est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

b. En tant que fonction, u est une application. Son ensemble de départ est $\mathbb{R}$ et son ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

c. u est une application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan associe son symétrique M' par rapport à I.

4 **a.** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, donc f et g ne sont pas égales.

Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$ et,

$g(x) = \begin{cases} x-1 \text{ pour } x \geqslant 1 \\ -x+1 \text{ pour } \leqslant 1. \end{cases}$

Ainsi, f et g sont égales sur $[1\,;+\infty[$.

b. L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de i est $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Donc les fonctions h et i ne sont pas égales, sauf pour $x \geqslant 0$, c'est-à-dire sur $[0\,;+\infty[$.

7 **a.** $x \in [2\,;7]\,;\, 2 \leqslant x \leqslant 7$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant x+2 \leqslant 9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{9} \leqslant \dfrac{3}{x+2} \leqslant \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3}{9} - 5 \leqslant \dfrac{3}{x+2} - 5 \leqslant \dfrac{3}{4} - 5$

$\Leftrightarrow -\dfrac{14}{3} \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{17}{4} \Leftrightarrow f(x) \in \left[-\dfrac{14}{3}\,;-\dfrac{17}{4}\right].$

b. $f(x) \in [0\,;1] \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{3}{x+2} - 5 \leqslant 1 \Leftrightarrow 5 \leqslant \dfrac{3}{x+2} \leqslant 6$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant \dfrac{1}{x+2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant x+2 \leqslant \dfrac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - 2 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{5} - 2 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{5}\right].$

8 **a.** L'image de $]-3\,;+\infty[$ par f est $]0\,;+\infty[$.

D'où le schéma :

$g \circ f :]-3\,;+\infty[\xrightarrow{f}]0\,;+\infty[\xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{5}{x+3} \longmapsto g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x+3}}.$

b. L'image de $]0\,;+\infty[$ par g est $]0\,;+\infty[$.

D'où le schéma :

$f \circ g :]0\,;+\infty[\xrightarrow{g}]0\,;+\infty\,[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$

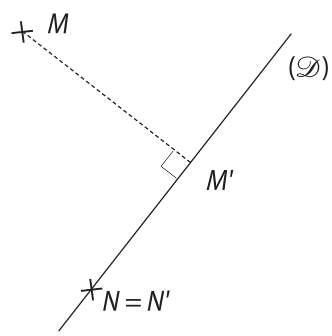
$x \longmapsto \sqrt{x} \longmapsto f \circ g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}+3}.$

11 **a.** Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet au plus un antécédent par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ au plus une fois). Donc f est injective.

b. Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet au moins un antécédent par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ au moins une fois). Donc f est surjective.

c. Pour tout b de $[0\,;3]$, b admet exactement un antécédent a de $[-2\,;7]$ par f (toute droite d'équation $y = b$ coupe $(\mathscr{C}_f)$ exactement une fois). Donc f est bijective.

12



p est une application du plan $(\mathscr{P})$ vers $(\mathscr{D})$.

a. Pour tout point M' de $(\mathscr{D})$, il existe une infinité d'antécédents de M' par p (tous les points situés sur la droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par M').

Donc p n'est pas injective.

b. Pour tout point M' de $(\mathscr{D})$, il existe une infinité (donc au moins un) d'antécédents de M' par p.

Donc p est surjective.

c. p n'est pas injective, elle n'est donc pas bijective.

15 $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de la courbe représentative de la fonction racine carrée par la translation de vecteur $\vec{u}(4\,;3)$.

16 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - 2$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = f(-x)$.

Exercices d'entraînement

Notion d'application

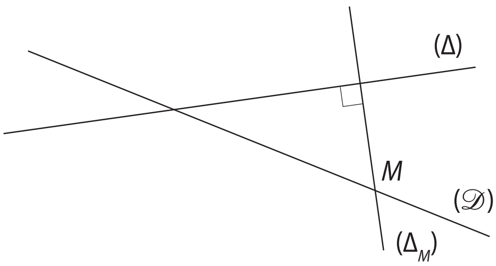
17 g n'est pas une application car à un point M du plan, elle associe deux points H et H' du plan.

18 **a.** $f([AB]) = [DC]$. **b.** $f([AB]) = [CD]$.

19 f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.
f est le prolongement de h sur $\mathbb{R}$.
h est la restriction de f à $[4 ; 8]$.

20 C'est une application de l'ensemble $(\mathscr{P})$ des points du plan vers $\mathbb{R}$.

21 **a.**



b. Cette relation n'est pas une application car à un point M de $(\mathscr{P})$, elle fait correspondre une droite, c'est-à-dire une infinité de points de $(\mathscr{P})$.

22 On peut conjecturer que $f = g$ sur $[2 ; +\infty[$, $f = h$ sur $[-1 ; 1]$.

23 $g : x \longmapsto g(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

24 Si $x \in [1 ; 3]$, alors $|x - 1| = x - 1$ et $|3 - x| = -x + 3$, donc $g : [1 ; 3] \longmapsto \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto -x + 5$.

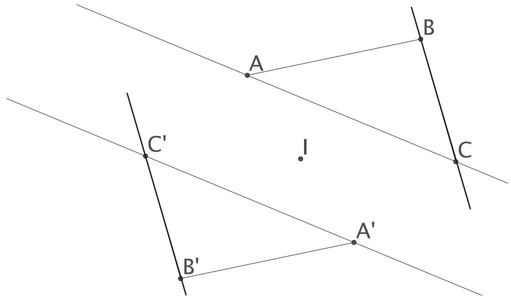
25 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$g(x) = 4x^2 + 12x - 7$;
$h(x) = 4x^2 + 12x - 7$.
b. Non, car elles n'ont pas le même ensemble de départ ou le même ensemble d'arrivée.

26 $f = g = \ell$.

Image, image réciproque

27 **a.** $f([0 ; 0{,}6]) = [0 ; 1]$.
$f([-1 ; 0]) = [0 ; 1]$.
$f([0 ; 1]) = [-2 ; 1]$.
b. $f^{-1}([1 ; 2]) = [-2{,}2 ; -2]$.
$f^{-1}([0 ; 1]) = [-2 ; -1{,}6] \cup [-1 ; 0{,}6]$.
$f^{-1}([-2 ; 2]) = [-2{,}2 ; 1]$.

28 **a.** $s_I([AB]) = [A'B']$;
b. $s_I^{-1}((AC)) = (A'C')$;
c. $s_I^{-1}([BC]) = [B'C']$; $s_I((BC)) = (B'C')$; où A', B', C' sont les symétriques de A, B, C par rapport au point I.

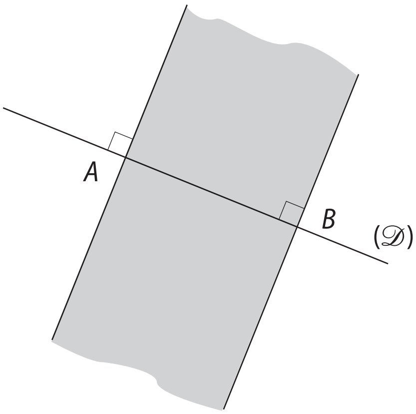


29 **a.** $-3 \leqslant x \leqslant 4 \Leftrightarrow -20 \leqslant -5x \leqslant 15$
$\qquad \Leftrightarrow -19 \leqslant f(x) \leqslant 16$.
Donc $f([-3 ; 4]) = [-19 ; 16]$.
De la même façon, on trouve que :
b. $f([-3 ; 4]) = [0 ; 32]$.
c. $f([-3 ; 4]) = \left[-2 ; -\dfrac{4}{9}\right]$.
d. $f([-3 ; 4]) = [-250 ; 16]$.

30 **a.** $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant 3x - 4 \leqslant 2$
$\qquad \Leftrightarrow 5 \leqslant 3x \leqslant 6 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant 2$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[\dfrac{5}{3} ; 2\right]$.
b. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant 3(x + 2) \leqslant 2$
$\qquad \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant x + 2 \leqslant \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{4}{3}$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[-\dfrac{5}{3} ; -\dfrac{4}{3}\right]$.
c. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{2}{x + 1} \leqslant 2$
$\qquad \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x + 1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x + 1 \leqslant 2$
$\qquad \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = [0 ; 1]$.
d. $1 \leqslant f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{5}{x - 3} \leqslant 2$
$\qquad \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x - 3} \leqslant \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \leqslant x - 3 \leqslant 5$
$\qquad \Leftrightarrow \dfrac{11}{2} \leqslant x \leqslant 8$.
Donc $f^{-1}([1 ; 2]) = \left[\dfrac{11}{2} ; 8\right]$.

31 **a.** • $f([-5 ; 5]) = [1 ; 74]$.
• $f^{-1}([0 ; 4]) = \left[-\sqrt{\dfrac{5}{3}} ; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}} ; \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right]$.
b. • $g([2 ; +\infty[) = [0 ; +\infty[$. • $g_{-1}([0 ; 4]) = [3 ; 7]$.

32 **a.** $p((\mathscr{P})) = (\mathscr{D})$.
b. $p((\Delta)) = \{H\}$ où H est le point d'intersection de (Δ) et de $(\mathscr{D})$.
c.



$p^{-1}([AB])$ est la zone colorée en gris (bords compris).

Composition d'applications

33 **a.** $g \circ f(x) = (2x + 3)^2$.
b. $g \circ f(x) = 2x^2 + 3$.
c. $g \circ f(x) = 2 \times \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)^3 + 5$.
d. $g \circ f(x) = 5 \times (\sqrt{3x + 5})^2 - 5 = 15x + 20$.

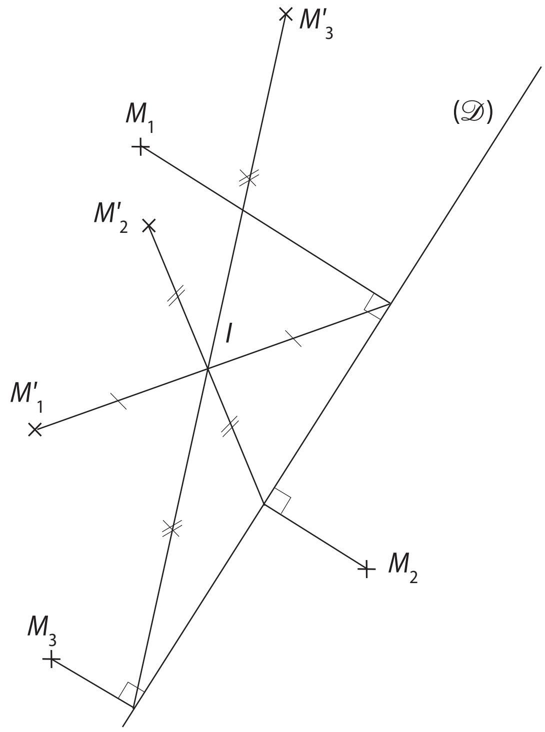
34 **a.** $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
b. $f \circ f(x) = 5(5x - 1) - 1 = 25x - 6$.
c. • $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
• $f \circ f(x) = -3(-3x + 4) + 4 = 9x - 8$.

35 **1.** $g \circ f(x) = -2ax + 3a + b$
et $f \circ g(x) = -2ax + -2b + 3$.
2. $g \circ f(x) = f \circ g(x) \iff 3a + b = -2b + 3 \iff a + b = 1$.
Le couple $(2 ; -1)$ convient.

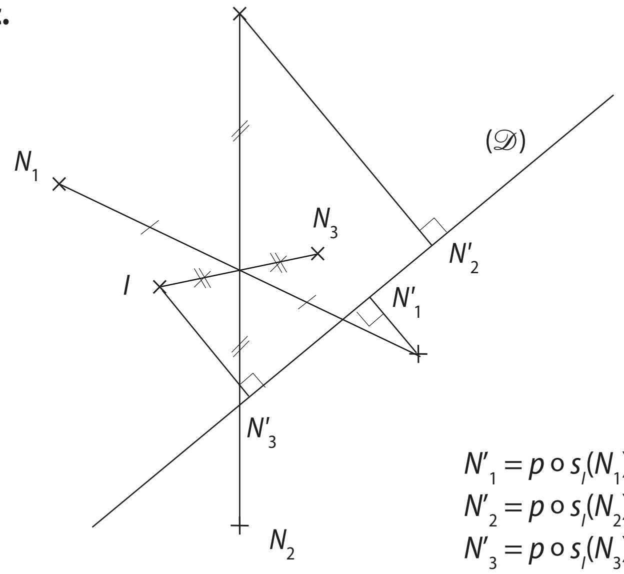
36 **a.** • $A = [-1 ; +\infty[$.
• $f(A) = f([-1 ; +\infty[) = [0 ; +\infty[= B$.
b. $g(B) = g([0 ; +\infty[) = [-1 ; +\infty[$.
c. $g \circ f : [-1 ; +\infty[\longmapsto [0 ; +\infty[\longmapsto [1 ; +\infty[$
$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x + 1} \longmapsto g \circ f(x) = 3x + 2$.

37 **a.** • $A = \mathbb{R}$.
• $f(A) = f(\mathbb{R}) = [-1 ; +\infty[= B$.
b. $g(B) = g([-1 ; +\infty[) = [0 ; 6]$.
c. $g \circ f : \mathbb{R} \longmapsto [-1 ; +\infty[\longmapsto [5 ; 6]$
$x \longmapsto f(x) = 2x^2 - 1 \longmapsto g \circ f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 1} + 5$.

38 **a.** et **b.** $M'_1 = s_I \circ p(M_1)$
$M'_2 = s_I \circ p(M_2)$
$M'_3 = s_I \circ p(M_3)$



c.



$N'_1 = p \circ s_I(N_1)$
$N'_2 = p \circ s_I(N_2)$
$N'_3 = p \circ s_I(N_3)$

39 **a.** $s_{(AB)} \circ s_{(AB)} = \mathrm{id}_{(\mathscr{P})}$.
b. $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.
c. $s_A \circ s_A = \mathrm{id}_{(\mathscr{P})}$.

40 **a.** $h \circ g(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 3}$.
L'ensemble de définition de $h \circ g$ est $\mathbb{R}$.
b. $h \circ f(x) = \dfrac{1}{-2x + 3}$.
L'ensemble de définition de $h \circ f$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
c. $h \circ g \circ f(x) = h(1 + 4(-2x + 1)^2)$
$= \dfrac{1}{1 + 4(-2x + 1)^2 + 2} = \dfrac{1}{4(-2x + 1)^2 + 3}$.
L'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ est $\mathbb{R}$.

Injection – Surjection – Bijection

41 ① Application surjective.
② Ce n'est pas une application.
③ Application bijective.
④ Application injective.

42 Cette application est injective et surjective.
C'est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{I}$.

43 f_1 est bijective car on lit que $f([-1\,;1]) = [-3\,;3]$, et que tout y de $[-3\,;3]$ possède un unique antécédent x dans $[-1\,;1]$.

44 **a.** Pour $A = [1\,;3]$ et $B = [0\,;1]$, f est une injection, mais pas une surjection.
b. Pour $A = [-2\,;2]$ et $B = [1\,;2]$, f est une surjection, mais pas une injection.
c. Pour $A = [1\,;2]$ et $B = [1\,;2]$, f est une bijection.

45 **a.** Pour $A = [0\,;+\infty[$ et $B = \mathbb{R}$, g est une injection mais pas une surjection.
b. Pour $A = \mathbb{R}$ et $B = [1\,;+\infty[$, g est une surjection mais pas une injection.
c. Pour $A = [0\,;+\infty[$ et $B = [1\,;+\infty[$, g est une bijection.

46 **a.** Pour $A = [0\,;1]$ et $B = [-1\,;2]$, h est une injection mais pas une surjection.
b. Pour $A = [-1\,;4]$ et $B = [0\,;2]$, h est une surjection mais pas une injection.
c. Pour $A = \left[\frac{3}{2}\,;5\right]$ et $B = [0\,;7]$, h est une bijection.

47 **1. a.** Puisque f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$, $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)] = B$.
b. • $f([a\,;b]) = [f(b)\,;f(a)]$, et pour tout y de $[f(b)\,;f(a)]$, il existe un unique antécédent de y par f, donc f est bijective.
Pour démontrer ceci, on peut raisonner par l'absurde : supposons que y ait deux antécédents distincts x_1 et x_2 par f avec $x_1, x_2 \in [a\,;b]$ et, sans perdre de généralité, $x_1 < x_2$. Dans ce cas, $f(x_1) = f(x_2) = y$, ce qui contredit le fait que f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.
2. On procède de la même façon avec f strictement croissante.

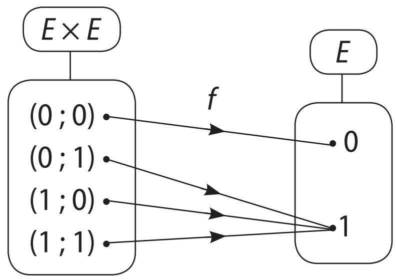
48 • $u(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on cherche l' ou les antécédent(s) de k par u :

$$k = u(n) \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{n}{2} + 1 \text{ avec } n \text{ pair} \\ k = \dfrac{n+1}{2} \text{ avec } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2(k-1) \text{ avec } n \text{ pair} \\ n = 2k - 1 \text{ avec } n \text{ impair} \end{cases}$$

donc, à tout k de $\mathbb{N}^*$, on peut associer un unique antécédent n par u.
u est donc injective et surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$.

49 **1.** On a :



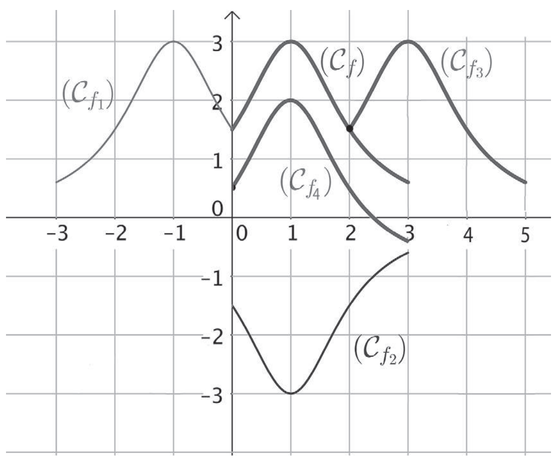
Donc, f est une application de $E \times E$ vers E.
2. f est surjective et non injective.

50 Soit f^{-1} la réciproque de la bijection f.
On a : $f \circ f = f \Longrightarrow (f \circ f) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$ donc $f = \mathrm{Id}_E$.

Fonctions associées

51 **a.** $\mathcal{D}_{f+g} = \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = -3x + 13$.
b. $\mathcal{D}_{f\times g} = \mathbb{R}$, $(f \times g)(x) = -10x^2 + 5x + 30$.
c. $\mathcal{D}_{f-g} = \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = 7x - 7$.
d. $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+3}{-5x+10}$.
e. $\mathcal{D}_{\sqrt{f}} = \left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{2x+3}$.
f. $\mathcal{D}_{\sqrt{g}} =]-\infty\,;2]$, $(\sqrt{g})(x) = \sqrt{-5x+10}$.

52



53 **1.** $\mathcal{D}_f = [0\,;+\infty[$, $\mathcal{D}_g = [0\,;+\infty[$.
2. a. $\mathcal{D}_{f+g} = [0\,;+\infty[$,
$(f+g)(x) = 3x + \sqrt{x} - \sqrt{3x} = 3x + (1 - \sqrt{3})\sqrt{x}$.
b. $\mathcal{D}_{f\times g} = [0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}(f \times g)(x) &= (2x + \sqrt{x})(x - \sqrt{3x}) \\ &= 2x^2 - 2x\sqrt{3x} + x\sqrt{x} - x\sqrt{3} \\ &= 2x^2 + x\sqrt{x}(1 - 2\sqrt{3}) - x\sqrt{3}.\end{aligned}$$

c. $\mathscr{D}_{3f+\sqrt{3}g} = [0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}(f+\sqrt{3}g)(x) &= 3(2x+\sqrt{x})+\sqrt{3}(x-\sqrt{3}x)\\ &= 6x+3\sqrt{x}+x\sqrt{3}-3\sqrt{x} = 6x+x\sqrt{3}\\ &= (6+\sqrt{3})x.\end{aligned}$$

54 **a.** $\mathscr{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\,;1\right\}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2-4x+1}$.

b. $\mathscr{D}_{\frac{f}{g}} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$.

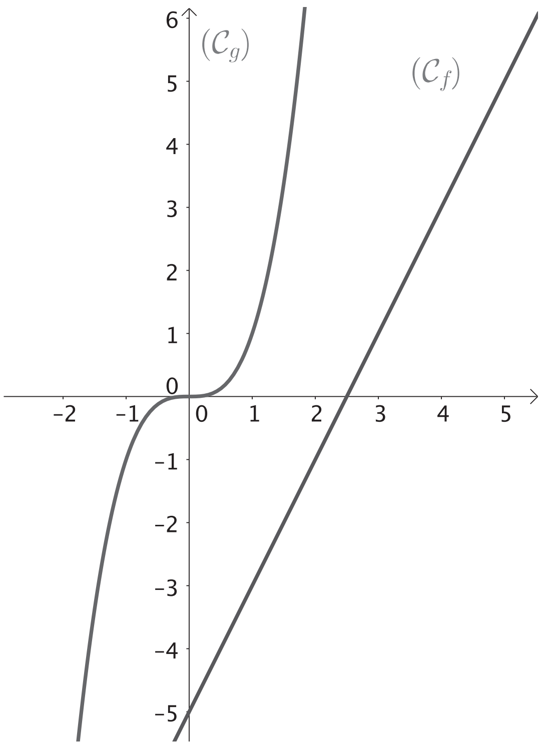
55 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(af+bg)(x) &= a(x+1)^3+b(x-2)^2\\ &= ax^3+(3a+b)x^2+(3a-4b)x+(a+4b).\end{aligned}$$

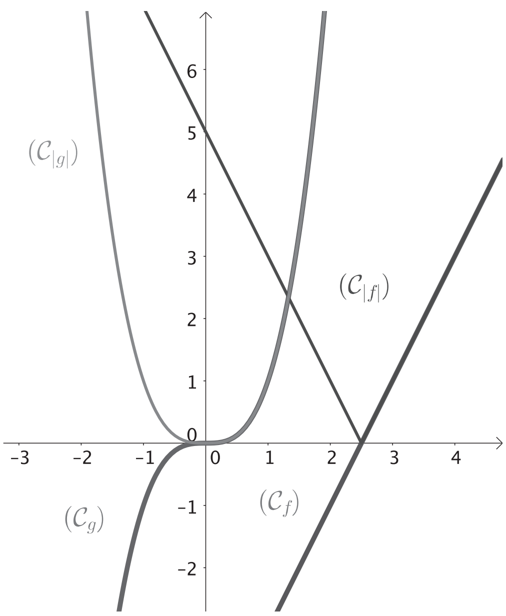
Par identification : $a = 1$ et $b = -3$.

b. $\mathscr{D}_{\frac{af}{bg}} = \mathscr{D}_{\frac{f}{-3g}} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. $\left(\frac{f}{-3g}\right)(x) = \frac{(x+1)^3}{-3(x-2)^2}$.

56 **a.**

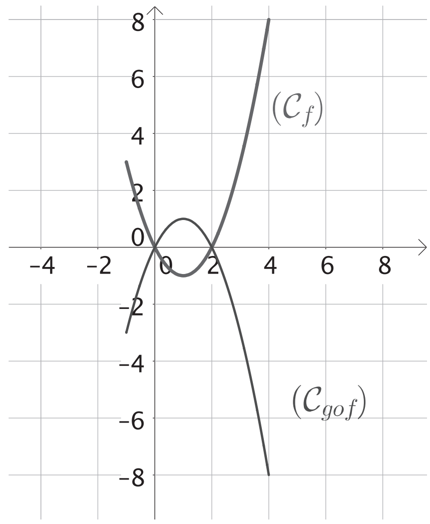


b.



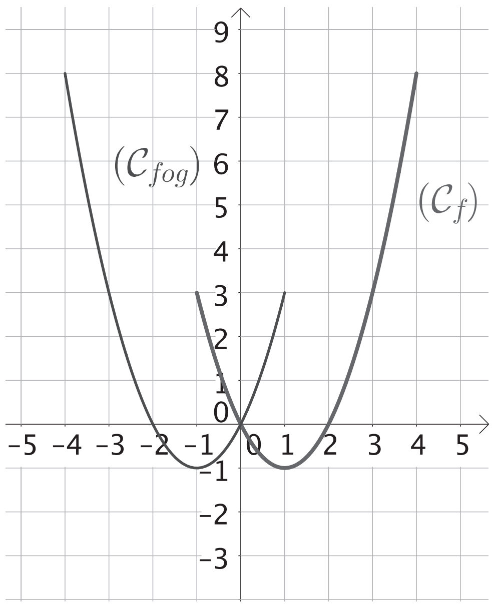
57 **1. a.** $g\circ f(x) = -f(x)$.

b.



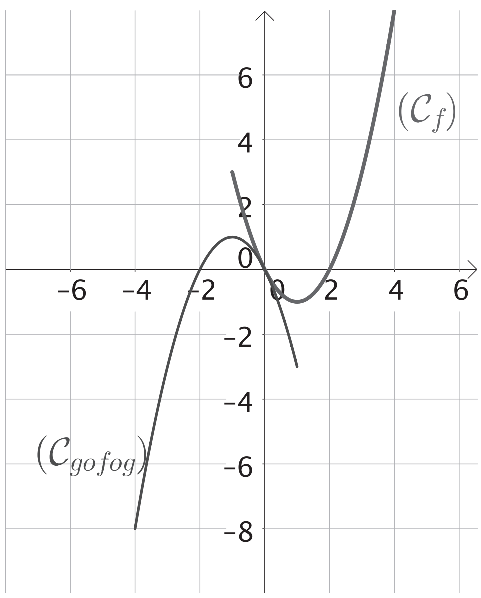
2. a. $f\circ g(x) = f(-x)$.

b.



3. a. $g\circ f\circ g(x) = -f(-x)$.

b.



58 a.

x	-5		-2		-1		3
$g(x)$	8	↘	-3	↗	4	↘	0

b.

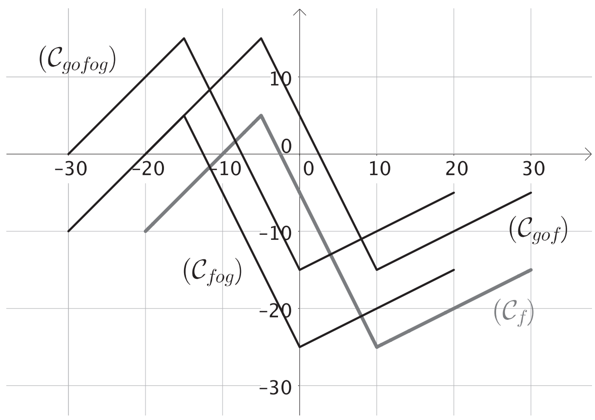
x	-3		1		2		5
$h(x)$	0	↘	-4	↗	3	↘	-8

c.

x	-5		1		2		5
$h(x)$	-8	↗	3	↘	-4	↗	0

59 a. $g \circ f(x) = f(x) + c$;
$f \circ g(x) = f(x + c)$; $g \circ f \circ g(x) = f(x + c) + c$.

b.



60 a.

x	-1		1		4		5
$g(x)$	1	↘	-1	↗	2	↘	-3

b.

x	-2		0		3		4
$h(x)$	3	↘	1	↗	4	↘	-1

c.

x	1		3		6		7
$i(x)$	5	↘	3	↗	6	↘	1

Se tester

61 **1.** Vrai ; **2.** Faux ; **3.** Vrai ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux.

62 **1.** Vrai. En effet, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = x^2 \geqslant 0$.
2. Faux. En effet, $-5 \leqslant h(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow -5 \leqslant x^2 \leqslant 4$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.
3. Faux. En effet, pour $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet aucun antécédent par h, donc h n'est pas une surjection, donc n'est pas une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
4. Faux. En effet $\mathcal{D}_{\frac{h}{g}} = \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_g \setminus \{x \in \mathcal{D}_g / g(x) = 0\}$
donc $\mathcal{D}_{\frac{h}{g}} = [0 + \infty[\setminus \{3\}$.
5. Vrai. En effet, $f \circ h \circ g(x) = (x - 3)^2 + 2$.

63 **1.** a ; **2.** b ; **3.** b ; **4.** b.

64 **1. b.** En effet, u n'est pas injective car, par exemple au chiffre des unités 2, correspond une infinité de nombres entiers naturels (2 ; 12 ; 22 ; …).
2 a donc plus d'un antécédent par u.
u est surjective car à tout chiffre des unités correspondent au moins (et même une infinité) de nombres entiers naturels ayant ce chiffre pour unité.
2. b. En effet, $-1 \leqslant x < 8 \Leftrightarrow 0 \leqslant x + 1 < 9$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x+1} < 3 \Leftrightarrow 2 \leqslant 2 + \sqrt{x+1} < 5$
$\Leftrightarrow 2 \leqslant f(x) < 5 \Leftrightarrow f(x) \in [2\,;5[$.
3. c. En effet, si on pose $g : x \longmapsto \sqrt{x}$,
alors $f(x) = g(x - (-1)) + 2$.
4. b. • En effet, pour tout x de $[-1\,;+\infty[$,
$h \circ i \circ g(x) = h \circ i(x + 1) = h(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1} + 2$.

Exercices d'approfondissement

65 À l'aide de fonctions usuelles

Il existe plusieurs réponses possibles

a. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 5x + 7$; $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $w : x \longmapsto x^2$.

b. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 3x - 5$; $v : x \longmapsto x^2$; $w : x \longmapsto x + 1$.

c. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto x - 10$; $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $w : x \longmapsto x + 4$.

d. $f = u \circ v \circ w$ avec

$u : x \longmapsto 7x + 3$; $v : x \longmapsto \sqrt{x}$; $w : x \longmapsto x - 2$.

66 Retrouver une expression

a. $f(x) = 2x + 1$.

b. $h(x) = 5\sqrt{x} - 2$.

c. $\mathcal{D}h \circ f = \left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

Pour tout x de $\mathcal{D}h \circ f$, $h \circ f(x) = 5\sqrt{2x + 1} - 2$.

67 Résolution graphique

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

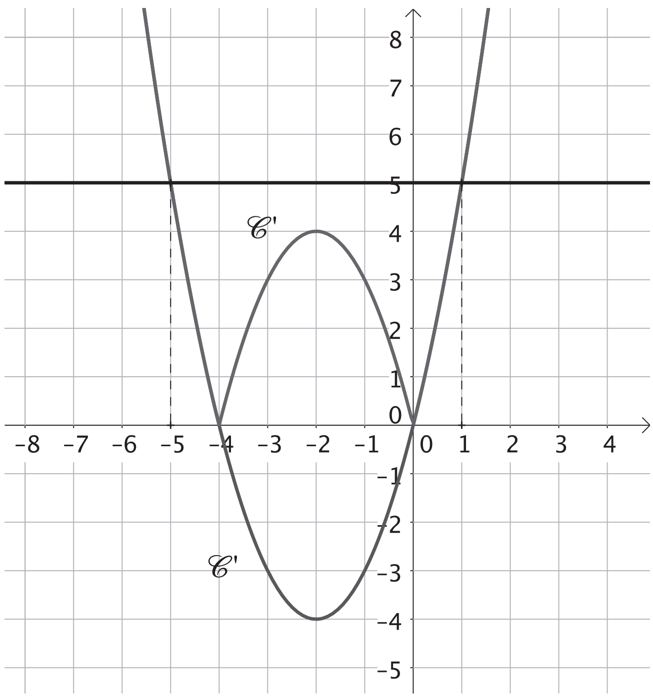
$a(x - b)^2 + c = ax^2 - 2abx + ab^2 + c$,

par identification avec $f(x) = x^2 + 4x$,

on trouve $\begin{cases} a = 1 \\ -2ab = 4 \\ ab^2 + c = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \\ c = -4 \end{cases}$

b. $(\mathscr{C}_f)$ est obtenue par translation de la courbe de la fonction carré, par le vecteur $\vec{u}(-2 ; -4)$.

c. et **2. a.**



b. Graphiquement,

- $g(x) = 5$ lorsque $x = -5$ ou $x = 1$
- $g(x) > 5$ lorsque $x \in]-\infty ; -5[\cup]1 ; +\infty[$.

c. $g(x) = 5 \Leftrightarrow |(x + 2)^2 - 4| = 5$

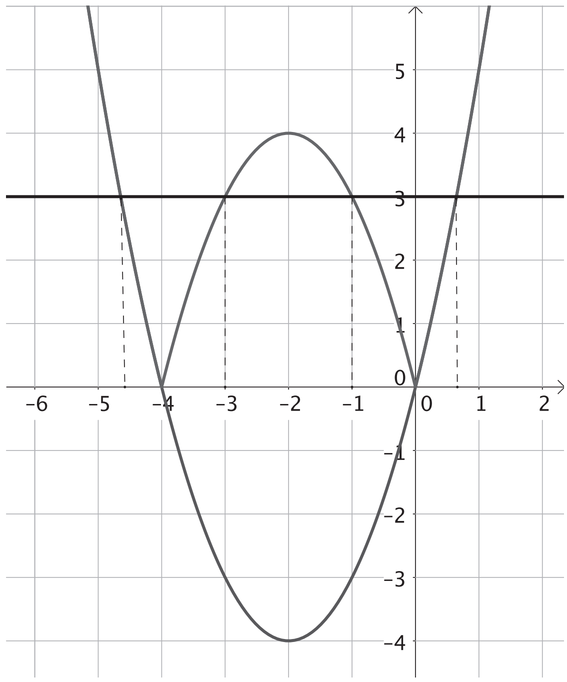
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 - 4 = 5 \text{ pour } (x + 2)^2 - 4 \geqslant 0 \\ -(x + 2)^2 + 4 = 5 \text{ pour } (x + 2)^2 - 4 \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 9 \text{ pour } (x + 2)^2 \geqslant 4 \\ (x + 2)^2 = -1 \text{ pour } (x + 2)^2 \leqslant 4 \quad \text{(impossible)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$ avec $x \in [-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$ avec $x \in]-\infty ; -4] \cup [0 ; +\infty[$.

3. Résolution graphique



Par le calcul, on trouve que :

a. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{5}$ ou $x = -2 + \sqrt{5}$.

b. $g(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{5}$ ou $x = -2 + \sqrt{5}$

ou $x = -3$ ou $x = -1$.

68 Composées

a. Soit $x \in \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$,

f_1 est une bijection et $f_1^{-1} = f_1$;

f_2 est une bijection et $f_2^{-1} = f_2$;

f_3 est une bijection et $f_3^{-1} = f_3$;

f_4 est une bijection et $f_4^{-1} = f_4$;

f_5 est une bijection et $f_5^{-1} = f_6$;

f_6 est une bijection et $f_6^{-1} = f_5$.

b.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

69 Involution

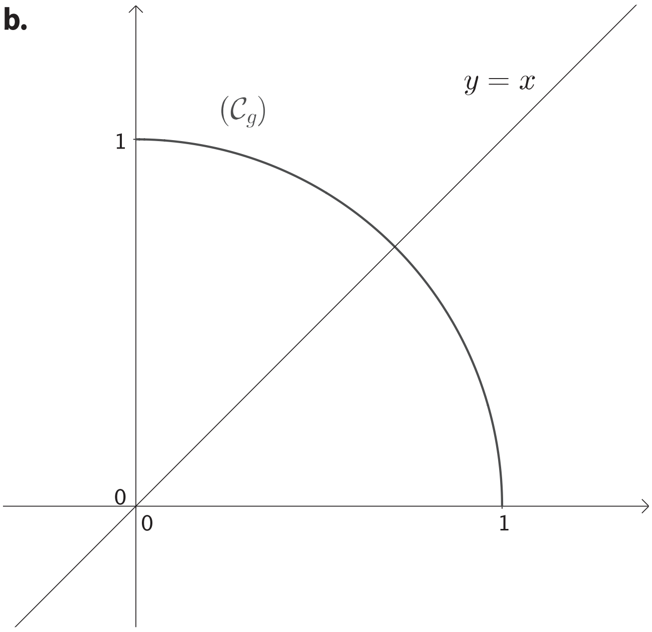
1. • Soient a, b dans A, si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$ et donc $a = b$.

Donc f est injective.

• Soit $y \in A$, si $f(x) = y$ alors $f(f(x)) = f(y)$ donc $x = f(y)$.
Donc il existe un antécédent (ici x) à tout nombre y de A. Donc f est surjective.
Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = f$.

2. a. Pour tout x de $[0 ; 1]$,
$g \circ g(x) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = x$.
Donc g est involution de $[0 ; 1]$ dans $[0 ; 1]$.

b.



c. Pour tout point $M(x ; y)$ du plan, son image par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $y = x$, est le point $M'(y ; x)$.

Or, $M(x ; y) \in (\mathscr{C}_g) \Leftrightarrow y = g(x)$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-y^2}$

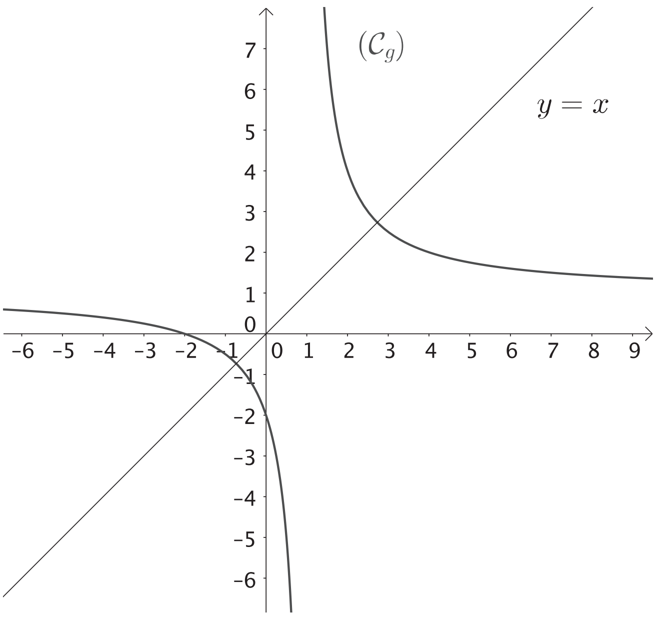
donc le point $M'(y ; x) \in (\mathscr{C}_g)$.
Ainsi $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à (Δ).

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$g \circ g(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x-1} + 2}{\dfrac{x+2}{x-1} - 1} = \frac{x+2+2(x-1)}{x+2-(x-1)} = \frac{3x}{3} = x.$$

Donc g est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b.



c. $M(x ; y) \in (\mathscr{C}_g)$
$\Leftrightarrow y(x-1) = x+2 \Leftrightarrow xy - y = x + 2$
$\Leftrightarrow xy - x = y + 2 \Leftrightarrow x(y-1) = y + 2$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow M'(y ; x) \in (\mathscr{C}_g)$.
Ainsi, $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à (Δ).

70 Opérations sur les fonctions

• Expression des fonctions $f + g$, $f \times g$ et $-2f + 3g$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		x^2	0	x^2	4	$-2x$	
$g(x)$		x^2+2x	0	$2x$	4	$2x$	
$(f+g)(x)$		$2x^2+2x$	0	x^2+2x	8	0	
$(f \times g)(x)$		x^4+2x^3	0	$2x^3$	16	$-4x^2$	
$(-2f+3g)(x)$		x^2+6x	0	$-2x^2+6x$	4	$10x$	

• Expression de la fonction $f \circ g$:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$		x^2+2x	2	x^2+2x	0	$2x$	2	$-2x$	
$g(x)-2$		$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	
$(f(g))(x)$		$-2g(x)$	4	$(g(x))^2$	0	$(g(x))^2$	4	$-2g(x)$	
$f \circ g(x)$		$-2x^2-4x$	0	$x^4+4x^3+4x^2$	0	$4x^2$	4	$4x$	

Problèmes

71 Un résultat surprenant

1. f est une application, donc chancun des n éléments de E a exactement une image dans F par f.

a. Si f est injective, alors les n images dans F par f sont distinctes deux à deux, donc $n \leqslant p$.

b. Si f est surjective, alors chacun des p éléments de f est l'image d'au moins un élément de E, donc $n \geqslant p$.

c. Si f est bijective, alors f est à la fois injective et surjective, donc $n \leqslant p$ et $n \geqslant p \Longrightarrow n = p$.

d. Si f est injective et $n = p$, alors les n images deux à deux distinctes dans F par f sont les n éléments de F. On en déduit que f est surjective, dont bijective.

e. Si f est surjective et $n = p$, alors chacune des p éléments de F par f a exactement un antécédent dans E par f ; donc f est injective. On en déduit que f est bijective.

2. a. Soient a, b dans $\mathbb{N}$,

$p(a) = p(b) \Longleftrightarrow 2a = 2b \Longleftrightarrow a = b$ donc p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres entiers naturels pairs.

b. Puisqu'à chaque élément de $\mathbb{N}$ correspond un unique élément de $\mathscr{P}$ et réciproquement, ces deux ensembles contiennent le même nombre d'éléments.

72 Fonction réciproque

1. Pour tout point $M(x\,;y)$, le point $M'(y\,;x)$ est le symétrique de M par rapport à (Δ).

2. a. • $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x - 5$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, de plus, soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = 2x - 5$ c'est-à-dire $x = \dfrac{y+5}{2}$, ainsi, tout y de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent par f.

f est donc bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto f^{-1}(x) = \dfrac{y+5}{2}$.

• $g : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

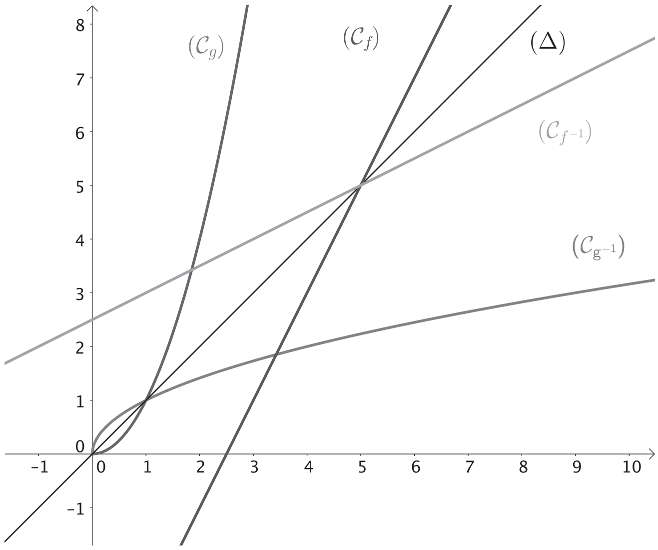
$x \longmapsto x^2$

$g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, de plus, soit $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = x^2$, c'est-à-dire $x = \sqrt{y}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$, ainsi, tout y de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent par g.

g est donc bijective et $g^{-1} : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

b.



On constate que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport à (Δ), tout comme $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

• $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_f) \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow y = 2x - 5$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{y+5}{2} \Longleftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_f)$

$\Longleftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{f^{-1}})$

où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

• $M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_g) \Longleftrightarrow y = g(x) \Longleftrightarrow y = x^2$

$\Longleftrightarrow x = \sqrt{y} \Longleftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_g)$

$\Longleftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{g^{-1}})$

où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

3. a. • $\dfrac{1}{5} \leqslant x < 5 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x} \leqslant 5$

$\Longleftrightarrow \dfrac{-2}{5} < \dfrac{2}{x} \leqslant 10 \Longleftrightarrow -\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{x} - 1 \leqslant 9$

$\Longleftrightarrow h(x) \in \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right]$.

Donc $B = \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right]$.

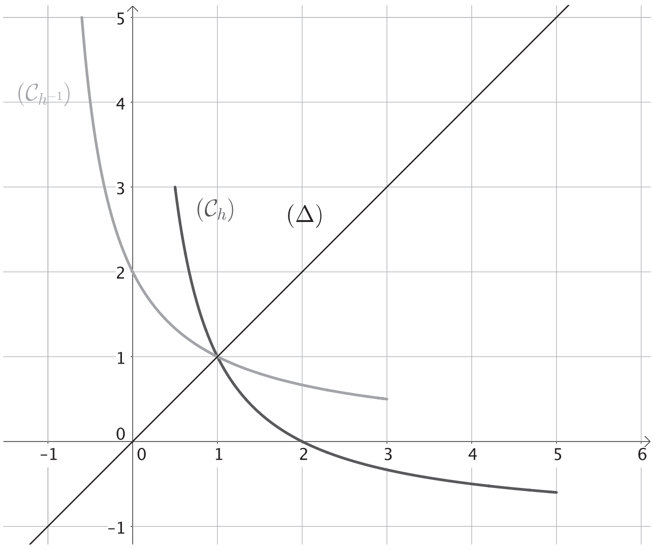
b. • De plus, soit $y \in B$ tel que $y = \dfrac{x}{2} - 1$,

c'est-à-dire $x = \dfrac{2}{y+1}$, ainsi, tout y de B admet un unique antécédent par h. h est donc bijective.

• $h^{-1} : \left]-\dfrac{3}{5}\,;9\right] \longmapsto \left[\dfrac{1}{5}\,;5\right[$

$x \longmapsto h^{-1}(x) = \dfrac{2}{y+1}$

c.



f est une fonction bijective de A vers B, de fonction réciproque f^{-1}.

$M(x\,;y) \in (\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow M(f^{-1}(y)\,;y) \in (\mathscr{C}_f)$

$\Leftrightarrow M'(y\,;f^{-1}(y)) \in (\mathscr{C}_{f^{-1}})$ où M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

73 Bijection réciproque

1. $f : E \longmapsto F$

$x \longmapsto y = f(x)$ est bijective

donc $f^{-1} : F \longmapsto E$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ est bijective

car $f^{-1}(F) = E$ et tout x de E possède un unique antécédent y par f^{-1}.

2. On suppose que $f \circ g = id_F$ (l'autre cas se traite de façon similaire).

$f \circ g = id_F : F \overset{g}{\longmapsto} E \overset{f}{\longmapsto} F$

$y \longmapsto g(y) \longmapsto f \circ g(y) = f(g(y)) = y.$

Ainsi, $g(y)$ est l'antécédent de y par f, donc $g = f^{-1}$.

3. • r^{-1} est la rotation de centre A et de mesure d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ rad.

• t^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

• S_A^{-1} est la symétrique centrale de centre A : $S_A = S_A^{-1}$.

• $S_{(\Delta)}^{-1}$ est la symétrique orthogonale d'axe (Δ) : $S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}^{-1}$.

• h^{-1} est l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

4. a. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b. • $g \circ f$ est une application de E vers G.

Pour tout a, b de E, $g \circ f(a) = g \circ f(b)$

$\Longrightarrow f(a) = f(b)$ (car g est injective)

$\Longrightarrow a = b$ (car f est injective).

Donc $g \circ f$ est injective.

• $f(E) = F$ (car f est surjective)

et $g(F) = G$ (car g est surjective)

donc $g \circ f(E) = g(F) = G$, donc $g \circ f$ est surjective.

• $g \circ f$ est donc bijective de E vers G.

• On vérifie (voir question **1.**) que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_G$.

Ainsi, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c. • $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k_1 \times k_2$.

• h_1^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_1}$.

• h_2^{-1} est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_2}$.

• $(h_2 \circ h_1)$–1 est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{k_1 \times k_2}$.

d. • $-1{,}8 < x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}2 < x + 2 \leqslant 2$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{2}{x+2} < 10 \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) < 9,$

donc $f([-1{,}8\,;0[) = [0\,;9[$.

De plus, tout y de $[0\,;9[$ possède un seul antécédent par f, donc f est bijective.

• $0 \leqslant x < 9 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow 1 \leqslant g(x) < 10,$

donc $g([0\,;9[) = [1\,;10[$.

De plus, tout y de $[1\,;10[$ possède un seul antécédent par g, donc g est bijective.

• $f^{-1} : [0\,;9[\longmapsto [-1{,}8\,;0[$

$x \longmapsto -2 + \dfrac{2}{x+1}.$

• $g^{-1} : [1\,;10[\longmapsto [0\,;9[$

$x \longmapsto \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2.$

• $g \circ f : [-1{,}8\,;0[\longmapsto [1\,;10[$

$x \longmapsto 1 + 3\sqrt{\dfrac{2}{x+2} - 1}.$

• $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : [1\,;10[\longmapsto [-1{,}8\,;0[$

$x \longmapsto -2 + \dfrac{2}{\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + 1}.$

10 Limites et continuité

Manuel pages 159 à 174

Activités d'introduction

1 Approche intuitive de la notion de limite en un point

1. a.

x	$-0{,}001$	$-0{,}01$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}001$	$0{,}999$	$0{,}99$	$1{,}01$	$1{,}001$	$1{,}0001$
$f(x)$	-1	$-1{,}009$	$-1{,}089$	$-0{,}891$	$-0{,}998$	$-0{,}0005$	$-0{,}005$	$-0{,}0049$	$-0{,}00049$	$-0{,}000049$

b. Lorsque x tend vers 0 (respectivement vers 1), $f(x)$ tend vers -1 (respectivement 0).

On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 (respectivement vers 1) est égale à -1 (respectivement 0).

On note $\lim\limits_{x\to 0}(x) = -1$ (respectivement $\lim\limits_{x\to 1}(x) = 0$).

2. a. • Lorsque x se rapproche de 2 par valeurs supérieures, $g(x)$ devient un grand nombre positif.

• Lorsque x se rapproche de 2 par valeurs inférieures, $g(x)$ devient un grand nombre négatif.

b. • $g(x) \geqslant A \Leftrightarrow x - 2 \leqslant \dfrac{1}{A}$ (car $x - 2 > 0$, $A > 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$)

$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{A} + 2 \Leftrightarrow 0 < x - 2 \leqslant \dfrac{1}{A}$.

• Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$

($\eta = \dfrac{1}{A}$ tel que $|v - 2| \leqslant \eta \Rightarrow g(x) \geqslant A$).

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de 2 (supérieur à 2), $g(x) \in [A\,;+\infty[$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$.

2 Approche intuitive de la notion de limite à l'infini

1. c. Lorsque x devient de plus en plus grand, $g(x)$ se rapproche de 1.

2. a. $\left.\begin{array}{r} h(x) \geqslant A \\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geqslant A \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant A + 3 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{A+3}$ (car $A + 3 > 0$).

b. • Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ ($B = \sqrt{A+3}$) tel que : ($x \geqslant B \Rightarrow h(x) \geqslant A$).

• Ainsi dès que x est suffisamment grand, $h(x) \in [A\,;+\infty[$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3 Limites et représentations graphiques

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **f.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = -\infty$.

2. a. • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$ car « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée.

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \end{cases}$

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \times h)(x) = +\infty$.

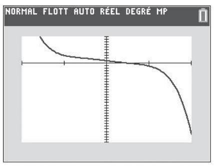
• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \end{cases}$

On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f}{h}(x)$ car « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »est une forme indéterminée.

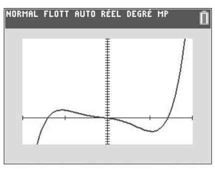
• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$

On ne peut pas donner $\lim\limits_{x\to-\infty} (i+g)(x)$ car «$-\infty+\infty$ » est une forme indéterminée.

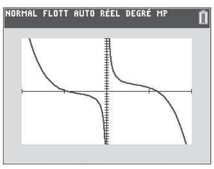
b.



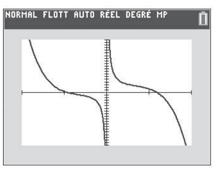
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} (f \times g)(x) = +\infty$



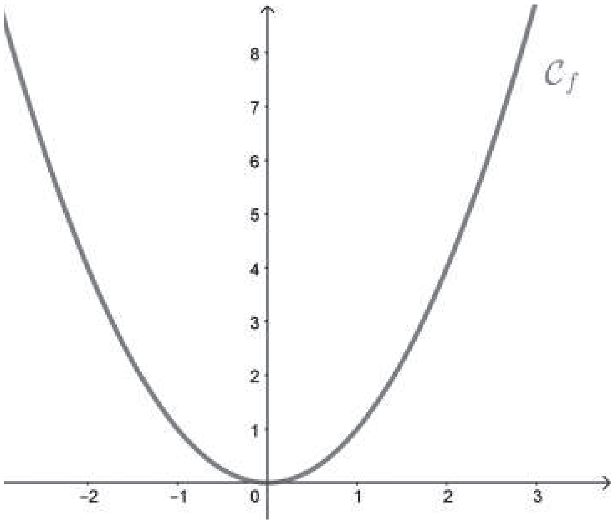
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{h}\right)(x) = -\infty$



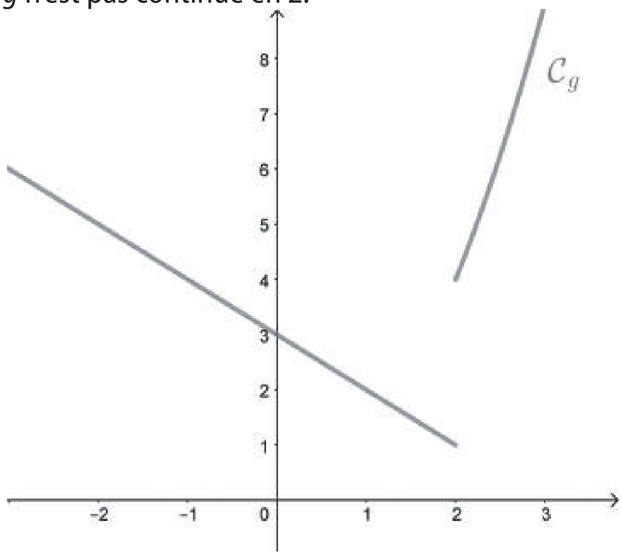
$\lim\limits_{x\to+\infty} (i+g)(x) = -\infty$

4 Notion de continuité

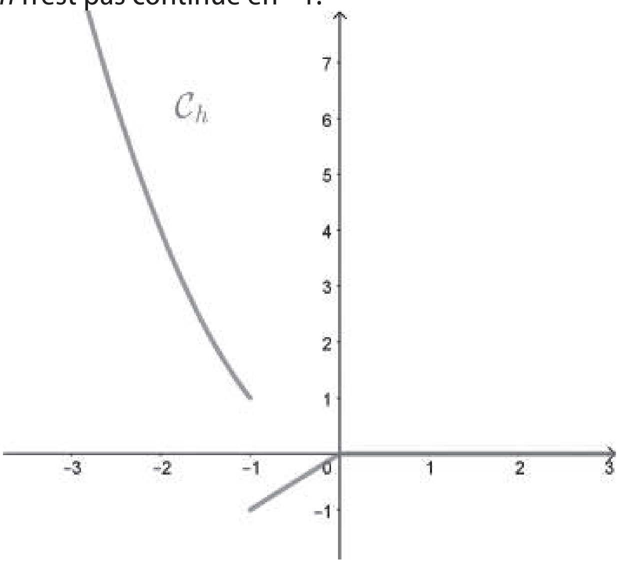
1. a. • f est continue sur $\mathbb{R}$.



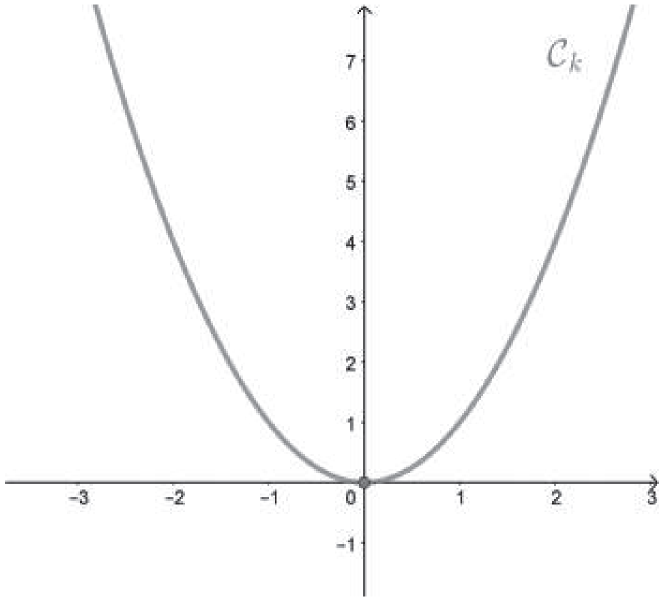
• g n'est pas continue en 2.



• h n'est pas continue en –1.



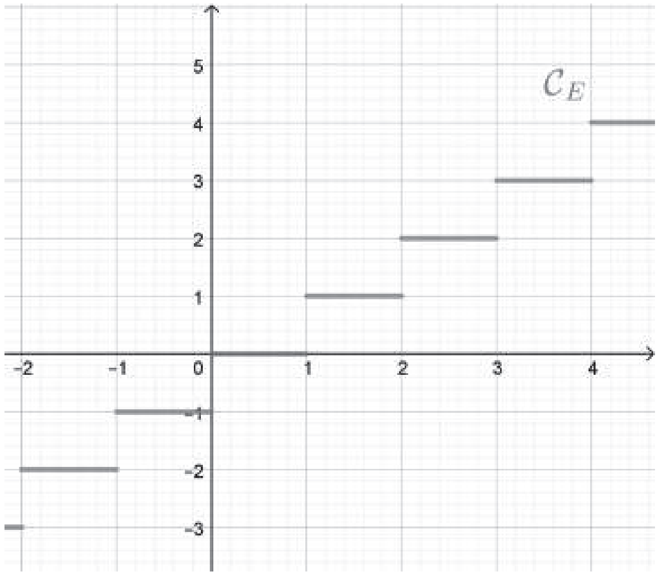
• k est continue sur $\mathbb{R}$.



b. • f est continue sur $\mathbb{R}$.
• g et h ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.
• k est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a. $E(0) = 0$; $E(-1,5) = -2$; $E(1) = 1$ et $E(\sqrt{3}) = 1$.

b.



c. n désigne un nombre entier relatif.

• $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = E(n)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n - 1$.

• Comme $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x)$, on ne peut définir $\lim\limits_{x \to n} E(x)$, et E n'est pas continue en n.

Savoir-faire

3 Soit $A > 0$.

$f(x) \in]A\,;+\infty[\Leftrightarrow f(x) > A \Leftrightarrow \dfrac{3}{x^2-4} > A$

$\Leftrightarrow 3 > A(x^2-4)$, car $x > 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{A} + 4 > x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{A}+4} > x$

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de 4 (supérieur à 4) $f(x) \in]A\,;+\infty[$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = +\infty$.

4 Soit $A < 0$.

$f(x) \in]-\infty\,;A[\Leftrightarrow f(x) < A \Leftrightarrow \dfrac{7}{x+2} < A$

$\Leftrightarrow 7 > A(x+2)$ car $x < -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{A} < x+2$ car $A < 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{A} - 2 < x$

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de -2 (inférieur à -2), $f(x) \in]-\infty\,;A[$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty$.

8 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2[1+\dfrac{1}{-4x^2}] = -\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$f(x) = \dfrac{x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$, donc par produit :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

• Puis, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

9 **a.** $\lim\limits_{x\to 0} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{x} = 1$ donc par passage du quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$f(x) = \dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^2} = 2$ donc, par quotient, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

13 • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant 1$, puis $|2\sin(x)| \leqslant 2$.

• Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{|x|}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{|x|} = 0$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

14 **a.** $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$

b. • f est continue en 0, si et seulement si :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0)$. Or :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1-\cos x) = 1-\cos 0 = 1-1 = 0 = f(0)$.

Par conséquent, f est continue en 0.

• De plus, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

15 • $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2x-1 = 2-1 = 1$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$

Donc g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercices d'entraînement

Limite en un point

16 **a.** 1 ; **b.** 3 ; **c.** $-\pi$; **d.** 1.

17 • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$;

• $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$; • $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = -3$.

18 **a.** $(f(x) \geqslant 100$ et $x > 1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{x-1} \geqslant 100 \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-1} \geqslant 20 \text{ et } x > 1\right) \Leftrightarrow \left(x-1 \leqslant \dfrac{1}{20} \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 1 + \dfrac{1}{20}$.

Sur l'intervalle $]1\,;\infty[$, l'inéquation $f(x) \geqslant 100$ admet pour solutions $\left]1\,;1+\dfrac{1}{20}\right]$.

b. $(f(x) \geqslant A \text{ et } x > 1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{x-1} \geqslant A \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{A}{5} \text{ et } x > 1\right) \Leftrightarrow \left(x - 1 \leqslant \dfrac{5}{A} \text{ et } x > 1\right)$

$\Leftrightarrow 1 < x \leqslant 1 + \dfrac{5}{A}.$

Sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, l'inéquation $f(x) \geqslant A$ admet pour solutions $\left]1 ; 1 + \dfrac{5}{A}\right]$.

c. Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ $\left(\eta = \dfrac{5}{A}\right)$ tel que $\forall\, x \in \,]1 ; 1 + \eta]$, $f(x) \geqslant A$.

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

19 **a.** $\lim\limits_{x \to 3} (x-3)^2 = 0^+$

donc par passage au quotient, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x-3)^2} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} |x - 1| = 0^+$

donc par passage au quotient, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{|x-1|} = +\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leqslant 1$ donc $|x \cos(x)| \leqslant |x|$.

• Par le théorème de gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} x \cos(x) = 0$.

d. • $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$ et $\lim\limits_{x > 5} (x - 5) = 0$, donc par quotient,

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}} = 0.$

20 $\lim\limits_{x \to 1} x + 3 = 4$ et $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$, donc par quotient,

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+3}{x-1} = \infty.$

21 **a.** $\lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 5$ et $\lim\limits_{x \to -3} (x-2) = -5$.

b. On remarque que

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x-2) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0^+$.

c. On remarque que

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x+3) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} (x+3) = 0^+$.

d.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

e. • $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x-2)(x+3) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2)(x+3) = 0^+$.

Ainsi, par passage à l'inverse :

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} (x-2)(x+3) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} (x-2)(x+3) = 0^-$.

Ainsi, par passage à l'inverse :

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$.

22 **a.** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 + 1 = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 + 1 = 2$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

b. • $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} x + 2 = 4$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x + 2 = 4$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

c. • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{2x+1}{x+4} = \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x = 0^-$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2x+1}{x+4} = \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

d. • $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x < 0,5}} x^2 = 0{,}25$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x < 0,5}} x - 0{,}5 = 0^-$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x < 0,5}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x > 0,5}} x^2 = 0{,}25$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x > 0,5}} x - 0{,}5 = 0^+$, donc par quotient

$\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ x > 0,5}} f(x) = +\infty$.

23 • $\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x < 5/2}} 4x^2 - 5 = \dfrac{4 \times 25}{4} - 5 = 20$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x > 5/2}} 4x^2 - 5 = \dfrac{4 \times 25}{4} - 5 = 20$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x < 5/2}} 2x - 5 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x > 5/2}} 2x - 5 = 0^+$

• Ainsi, par quotient :

$\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x < 5/2}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5/2 \\ x > 5/2}} h(x) = +\infty$.

Limite à l'infini

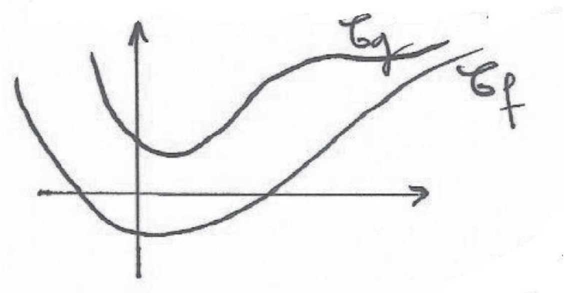
24 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = 0$.

25 **a. b.** (À main levée)



c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

26 ε désigne un réel strictement positif.

a. Si $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, alors $0 < \dfrac{1}{x} < \varepsilon$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, $1 - \varepsilon < h(x) < 1 + \varepsilon$, ce qui implique que $h(x) \in I$.

b. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ $\left(A = \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ tel que $\forall\, x > A$, $h(x) \in\,]1 - \varepsilon ; 1 + \varepsilon[$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

27 **a.** $f(x) - 1 = \dfrac{x-1}{x+4} - \dfrac{x+4}{x+4} = \dfrac{(x-1)-(x+4)}{x+4} = \dfrac{-5}{x+4}$.

b. $(|f(x) - 1| < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow (-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0)$

$\Leftrightarrow \left(-\varepsilon < \dfrac{-5}{x+4} < \varepsilon \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\varepsilon}{5} > \dfrac{-1}{x+4} > -\dfrac{\varepsilon}{5} \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\varepsilon}{5} > \dfrac{-1}{x+4} > 0 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{\varepsilon} < x + 4 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(x > \dfrac{5}{\varepsilon} - 4 \text{ et } x \geqslant 0\right)$

c. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ $\left(B = \dfrac{5}{\varepsilon} - 4\right)$ tel que $\forall\, x > B$, $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

28 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 3 = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x + 5 = -\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x - 1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} |7x - 1| = +\infty$.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 7 + \dfrac{4}{x} = 7$.

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2} = 0$.

29 $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 5 = -\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x-5} = 0$.

Calcul de limites et comparaisons

30 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \cos \pi = -1$;

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-4x}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x}{x} = -4$.

31 **a.** On remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = -\infty$.

b. On remarque que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0} (f \times g)(x) = +\infty$.

c. On remarque que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Donc on ne peut pas directement calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} (f \times g)(x)$: c'est une forme indéterminée.

d. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f}{g}(x) = 0$ par quotient.

32 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-\cos x \geqslant -1$ et $0 < 2 + \cos x \leqslant 3$.

Ainsi, $x - \cos x \geqslant x - 1$ et $\dfrac{1}{2+\cos x} \geqslant \dfrac{1}{3}$ (passage à l'inverse).

Par conséquent, $f(x) \geqslant \dfrac{x-1}{3}$ pour tout $x \geqslant 1$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{3} = +\infty$

c. Comme pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x - \dfrac{1}{3}$ par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

33 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|g(x)| = \dfrac{|\sin(3x)|}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$

car, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\sin(a)| \leqslant a$.

b. • Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} |g(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

• Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} |g(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

34 • $\lim\limits_{x\to 0,} 5x^3 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0,} x + 2 = 2$, donc par quotient

$\lim\limits_{x\to 0,} \dfrac{5x^3-1}{x+2} = -\dfrac{1}{2}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, donc par produit

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-2)x^2 = -\infty$.

35 **1. a.** Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = 4x^2 \times 1 + 4x^2 \times \dfrac{1}{4x} + 4x^2 \times \dfrac{3}{4x^2}$

$= 4x^2\left(1 + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{3}{4x^2}\right)$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{4x^2} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{3}{4x^2}\right) = 1$

c. Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{4x^2} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{3}{4x^2}\right) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

36 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x + 2 = +\infty$.
On ne peut donc pas déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: c'est une forme indéterminée.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{x^2\left(5 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(3 + \dfrac{2}{x}\right)} = x\,\frac{5 + \dfrac{1}{x^2}}{3 + \dfrac{2}{x}}.$$

c. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 + \dfrac{1}{x^2} = 5$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \dfrac{2}{x} = 3$.

• On obtient alors par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5 + \dfrac{1}{x^2}}{3 + \dfrac{2}{x}} = \dfrac{5}{3}$.

• Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

37 **1. a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a_n \neq 0$,

$$P(x) = a_nx^n\left[1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_1x}{a_nx^n} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right]$$

$$= a_nx^n\left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right].$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_0}{a_nx^n} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}\right] = 1$.

• Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} = \ldots = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_0}{a_nx^n} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}\right] = 1$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$.

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n\left[1 + \dfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n} + \ldots + \dfrac{a_1x}{a_nx^n} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}\right]}{b_mx^m\left[1 + \dfrac{b_{m-1}x^{m-1}}{b_mx^m} + \ldots + \dfrac{b_1x}{b_mx^m} + \dfrac{b_0}{b_mx^m}\right]}$$

$$= \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \times \frac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \dfrac{b_0}{b_mx^m}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \dfrac{b_0}{b_mx^m}} = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_nx^n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_mx} + \ldots + \dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \dfrac{b_0}{b_mx^m}} = 1$

donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

38 **a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = -4x^3 + \dfrac{x}{2} = -4x^3\left(1 + \dfrac{1}{-8x^2}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{-8x^2} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{-8x^2} = 1$, donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$f(x) = \dfrac{7}{2}x^4 + x^2 - x = x^4\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = \dfrac{7}{2}$

donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{-x^2\left(\dfrac{-4}{x^2} + 1\right)}{2x^3\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right)} = -\frac{1}{2x} \times \frac{1 - \dfrac{-4}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{-4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{-4}{x^2}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2x^2}\right) = 1$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - \dfrac{-4}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{-4}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{2x^2}} = 1$.

• De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2x} = 0$.

• Ainsi par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

d. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $f(x) = x\left(-1 + \dfrac{5x^2 - \frac{1}{x}}{2 - x^3}\right)$

$$= x\left[-1 + \frac{5x^3\left(1 + \frac{1}{5x^4}\right)}{-x^3\left(\frac{2}{-x^3} + 1\right)}\right] = x\left[-1 - 5 \times \frac{1 + \frac{1}{5x^4}}{1 + \frac{2}{-x^3}}\right].$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{5x^4}}{1 + \frac{2}{-x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{5x^4}}{1 + \frac{2}{-x^3}} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[-1 - 5 \times \dfrac{1 + \frac{1}{5x^4}}{1 + \frac{2}{-x^3}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-1 - 5 \times \dfrac{1 + \frac{1}{5x^4}}{1 + \frac{2}{-x^3}}\right]$

$= -1 - 5 \times 1 = -6$.

• Ainsi par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x \times (-6) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \times (-6) = -\infty$.

39 **a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{5x^7\left(1 - \frac{1}{5x^7}\right)}{x^6\left(1 + \frac{2}{x^6}\right)} = 5x \times \frac{1 - \frac{1}{5x^7}}{1 + \frac{2}{x^6}}.$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{5x^7}}{1 + \frac{2}{x^6}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = -3x^5\left(1 - \dfrac{7}{3x^5} + \dfrac{1}{3x^4}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{7}{3x^5} + \dfrac{1}{3x^4}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^5 = -\infty$,

donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

c. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f(x) = \frac{-x\left(\frac{-3}{x} + 1\right)}{-x\left(\frac{-5}{x} + 1\right)} = \frac{\frac{-3}{x} + 1}{\frac{-5}{x} + 1}.$$

• Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = \dfrac{1}{1} = 1$.

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\dfrac{x}{3 + x} = \dfrac{x \times 1}{x \times \left(\frac{3}{x} + 1\right)} = \dfrac{1}{\frac{3}{x} + 1}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{3 + x} = 1$.

• Comme de plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^5 = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

40 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 + 4 \geqslant x^2$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{x^2 + 4} \geqslant x$ par croissance de la fonction racine carrée.

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$

• Pour tout x de $\mathbb{R}_-$: $\sqrt{x^2 + 4} \geqslant -x$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$ par comparaison.

41 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 4) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$.

• Nous ne pouvons pas déduire directement $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$ car c'est une forme indéterminée.

b. Pour tout x de $[0 ; +\infty[$,

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - (\sqrt{x^2 + 4})^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{(x^2 + 1) - (x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}.$$

c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$.

Puis par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}} = 0.$$

42 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$\left|\dfrac{5\cos(x) + 3x}{2x^2 + 1}\right| \leqslant \dfrac{5|\cos(x)| + 3|x|}{|2x^2 + 1|} \leqslant \dfrac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1}$ (car $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\cos(a)| \leqslant 1$).

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1}$.

• Pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

$$\frac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1} = \frac{5 + 3x}{2x^2 + 1} = \frac{3x\left(\frac{5}{3x} + 1\right)}{2x^2\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)} = \frac{3}{2x} \times \frac{1 + \frac{5}{3x}}{1 + \frac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{5}{3x}}{1 + \frac{1}{2x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2x} = 0$, donc par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1} = 0$.

Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1}$.

• Pour tout x de $]-\infty ; 0[$:

$$\frac{5 + 3|x|}{2x^2 + 1} = \frac{5 - 3x}{2x^2 + 1} = \frac{-3x\left(\frac{5}{-3x} + 1\right)}{2x^2\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)} = -\frac{3}{2x} \times \frac{1 - \frac{5}{3x}}{1 + \frac{1}{2x^2}}.$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\dfrac{5}{3x}}{1+\dfrac{1}{2x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3}{2x} = 0$,

donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = 0$.

c. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1} = 0$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$, $0 \leqslant \left|\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$.

Le théorème des gendarmes assure donc que

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \left|\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right| = 0$, soit $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1} = 0$.

43 On remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

De plus, si $a \neq 0$, alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} (ax+b) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax\left(1+\dfrac{b}{ax}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax = \text{signe }(a) \times \infty$.

Ainsi, pour que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \infty$ il faut que $a = 0$.

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(b+\dfrac{1}{x-1}\right) = b$.

Donc $b = 3$.

44 • $g(0) = -1 \Leftrightarrow b = -1$.

• De plus, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$\dfrac{cx^2}{x^2+2} = \dfrac{x^2 \times c}{x^2 \times \left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{c}{1+\dfrac{2}{x^2}}$.

Ainsi, pour tout c de $\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{cx^2}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{1+\dfrac{2}{x^2}} = c$.

• En outre, si $a \neq 0$,

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} (ax-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax\left(1-\dfrac{1}{ax}\right) = \text{signe }(a) \times (-\infty)$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (ax-1) \neq \infty$ si et seulement si $a = 0$.

• Par conséquent, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g(x) = -1 + \dfrac{cx^2}{x^2+2}$ et $-1 + c = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$, donc $c = 2$.

Continuité

45 **1. a.** f est continue sur I.

b. f n'est pas continue sur I.

2. a. f n'est pas continue sur I.

b. f est continue sur I.

3. a. f est continue sur I.

b. f est continue sur I.

46 • $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (2x-3) = 2 \times 0 - 3 = -3$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (-3) = -3$.

• Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = -3 = f(0)$, f est continue en 0.

• De plus, f est continue en tout point x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

47 • $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} x^2 = 1^2 = 1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} (2-x) = 2-1 = 1$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} g(x) = 1 = g(1)$

donc g est continue en 1.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (2-x) = 2-0 = 0 = g(0)$

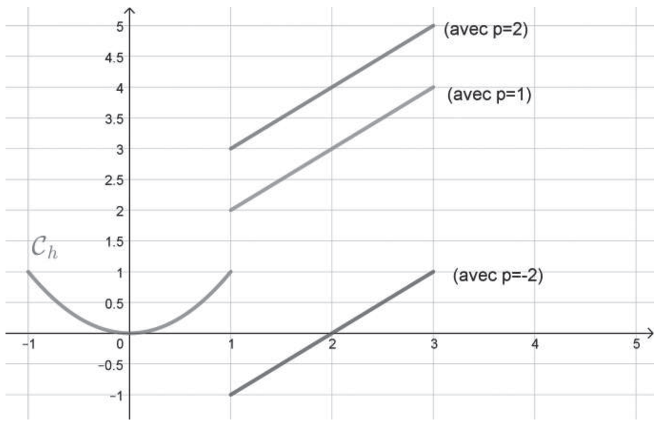
et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} g(x) \neq g(0)$, g n'est pas continue en 0.

• g n'étant pas continue en 0, g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

• g est une fonction polynôme sur $[1\,;+\infty[$, donc continue sur $[1\,;+\infty[$.

48 **a.**



Pour ces trois valeurs de p, h n'est pas continue en 1.

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^2 = 1^2 = 1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (x+p) = 1+p = h(1)$.

Donc h est continue en 1 si et seulement si :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} h(x)$

c'est-à-dire si $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1)$ soit si $1 = 1 + p$

c'est-à-dire si et seulement si $p = 0$.

49 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$|f(x)| = \left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2 \times \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$
car $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\sin(a)| \leqslant 1$.
b. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\forall\, x \neq 0$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant x^2$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est finie, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

50 **a.** Pour tout x de $[0 ; +\infty[\ \backslash\{1\}$,
$$g(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$
b. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$.
Ainsi, g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = \frac{1}{2}$.

Se tester

51 **1.** Vrai. **2.** Faux. **3.** Faux. **4.** Faux. **5.** Faux.

52 **1.** Faux.
Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\frac{3x-4}{x-5} = \frac{3x\left(1-\frac{4}{3x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)} = 3 \times \frac{1-\frac{4}{3x}}{1-\frac{5}{x}}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{3x}}{1-\frac{5}{x}} = \frac{1}{1} = 1$, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-4}{x-5} = 3$.
2. Vrai.
Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$: $0 \leqslant \left|\frac{3\sin(x)}{x^2+3}\right| \leqslant \frac{3}{x^2+3} \leqslant \frac{3}{x^2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{3\sin(x)}{x^2+3}\right| = 0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\sin(x)}{x^2+3} = 0$.
3. Vrai.
• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+2) = 1+2 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+$,
donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$.
• De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 3x = 3$,
donc par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(3x + \frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$.
4. Faux.
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2 = f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 3 \neq f(1)$.
Donc f n'est pas continue en 1, donc f n'est pas continue sur $[1 ; 3]$.
5. Faux.
• $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-1) = 3-1 = 2 \neq g(3)$
$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (6-x) = 6-3 = 3 = g(3)$.
Donc f n'est pas continue en 3.
Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

53 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. c.**

54 **1. a.** • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$$\frac{5x+1}{x^2-1} = \frac{5x \times \left(1+\frac{1}{5x}\right)}{x^2 \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{5}{x} \times \frac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$
• Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0$, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x+1}{x^2-1} = 0$.
• Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

2. b. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$$\frac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = \frac{-x^3 \times \left(\frac{4}{-x} + \frac{5}{-x^3} + 1\right)}{3x^3 \times \left(\frac{1}{3x} + 1 + \frac{4}{3x^3}\right)} = -\frac{1}{3} \times \frac{1 + \frac{5}{-x^3} + \frac{4}{-x}}{1 + \frac{4}{3x^3} + \frac{1}{3x}}$$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = -\frac{1}{3}$.

3. c. • $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x>\pi/4}} h(x) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/4\\ x<\pi/4}} h(x)$.
Donc h est continue en $\frac{\pi}{4}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = 1 = h(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{2}{\pi}x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\times 0} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) \neq h(0)$ et h n'est pas continue en 0, donc h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $h(x) = \sin(x)$.
h est donc continue sur $[1\,;+\infty[$.

Exercices d'approfondissement

55 Fonction polynôme et fonction inverse

• Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, comme $a \neq 0$,
$f(x) = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right)$.
Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) = 1$,
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = \text{signe}\,(a) \times (+\infty)$ c'est-à-dire :
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0. \end{cases}$

• Par passage à l'inverse, pour tout $a \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} g(x) = 0$.

56 Formes indéterminées

1. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$f(x) = 3x^2\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)$.
Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + 1 = +\infty$ donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b. On ne peut pas déduire directement $\lim\limits_{x\to+\infty} (f \times g)(x)$ car « $+\infty \times 0$ » est une forme indéterminée.

c. • Pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$(f\times g)(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}\times\left(3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\times\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x \times \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x\times\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$
Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x) = +\infty$.

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$5x^2 - 3x + 1 = 5x^2\left(1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right)$.
Ainsi, de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 - 3x + 1 = +\infty$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + 1 = +\infty$.
• Ainsi, on ne peut conclure directement car « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » est une forme indéterminée.
• On écrit pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}\times\left(5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\times\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x\times\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\times(5x - 3) + \frac{1}{\sqrt{x}}$
$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x - 3) = +\infty$).
Par conséquent, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}+1} = +\infty$.

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\frac{x^3 + 2}{x^2} = \frac{x^3\times\left(1 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2} = x\times\left(1 + \frac{2}{x^3}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) = 1$, par produit,
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} = -\infty$.
• $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 1 = +\infty$.
• On ne peut donc pas conclure directement car « $(-\infty) + (+\infty)$ » est une forme indéterminée.
• On écrit pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
$\frac{x^3 + 2}{x^2} + 3x^2 - 1 = x + \frac{2}{x^2} + 3x^2 - 1$
$= 3x^2\times\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^4} - \frac{1}{3x^2}\right)$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^4} - \frac{1}{3x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$
donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} + 3x^2 - 1 = +\infty$.

57 Étude d'une fonction rationnelle

a. On remarque que :
$(-2)^2 - 3\times(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$
et $5^2 - 3\times 5 - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$.

Ainsi, le polynôme $x^2 - 3x - 10$ a pour racines -2 et 5.
En outre, la fraction rationnelle $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10}$ est définie si et seulement si $x^2 - 3x - 10 \neq 0$.
Ainsi, $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,5\}$.

b. On remarque que d'après **a.**, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,5\}$,
$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10}$.

• $(x + 2)\,f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 5}$

donc $a(x + 2) + b + \dfrac{c(x + 2)}{x - 5} = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 5}$.

Ainsi pour $x = -2$, on obtient :

$b = \dfrac{(-2)^2 + (-2) - 6}{(-2) - 5} = \dfrac{-4}{-7} = \dfrac{4}{7}$.

• $(x - 5)\,f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$

donc $a(x - 5) + \dfrac{b(x - 5)}{x + 2} + c = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 2}$.

Ainsi, pour $x = 5$, on obtient

$c = \dfrac{5^2 + 5 - 6}{5 + 2} = \dfrac{24}{7}$.

• Enfin, $f(0) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ et $f(0) = a + \dfrac{2}{7} - \dfrac{24}{35}$

donc $a = \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{7} + \dfrac{24}{35} = \dfrac{21 - 10 + 24}{35} = 1$.

Et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;\,5\}$

$f(x) = 1 + \dfrac{\frac{4}{7}}{x + 2} + \dfrac{\frac{24}{7}}{x - 5}$.

c. • $\lim\limits_{x \to -2} \left(1 + \dfrac{\frac{24}{7}}{x - 5}\right) = 1 + \dfrac{24}{7} \times \dfrac{1}{-7} = 1 - \dfrac{24}{49} = \dfrac{49 - 24}{49}$
$= \dfrac{25}{49}$.

•

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (x - 2) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} (x - 2) = 0^+$.

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x + 2} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x + 2} = +\infty$.

Puis par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

d. • $\lim\limits_{x \to 5} \left(1 + \dfrac{\frac{4}{7}}{x + 2}\right) = 1 + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{7} = 1 + \dfrac{4}{49} = \dfrac{53}{49}$.

•

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x - 5$		$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} (x - 5) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} (x - 5) = 0^+$.

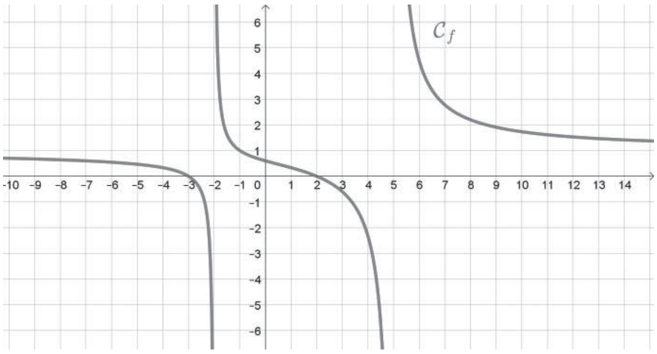
Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x - 5} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x - 5} = +\infty$.

Puis par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$.

e. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{\frac{4}{7}}{x + 2} = 0 = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{\frac{24}{7}}{x - 5}$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = 1$.

f.



58 Le théorème des gendarmes

a. Pour tout $x \geqslant 0$:

$-1 \leqslant \sin(4x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin(4x) \leqslant 2$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant 1 + 2\sin(4x) \leqslant 3$.

De plus, $\forall\, x \geqslant 0$, $1 + 2\sqrt{x} > 0$, donc :

$\dfrac{-1}{1 + 2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1 + 2\sin(4x)}{1 + 2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{3}{1 + 2\sqrt{x}}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2\sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ donc par quotient,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{1 + 2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{1 + 2\sqrt{x}} = 0$.

Ainsi, l'inégalité précédente et le théorème des gendarmes impliquent que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 2\sin(4x)}{1 + 2\sqrt{x}} = 0$.

59 Limite ou pas de limite ?

a. • Comme $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|\cos(a)| \leqslant 1$, on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $|f(x)| = 3|x| \times \left|\cos\left(\dfrac{5}{x^2}\right)\right| \leqslant 3|x|$.

• Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $0 \leqslant |\,f(x)| \leqslant 3|x|$
et $\lim\limits_{x \to 0} 3|x| = 0$, donc par le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = 0$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = 0$.

b. • Pour tout k de $\mathbb{Z}$: $g(2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1$
et $g\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

• Supposons que $g(x)$ admette une limite quand x tend vers $+\infty$. Notons la ℓ.

Alors comme $\lim\limits_{\substack{k\to+\infty\\ k\in\mathbb{Z}}} 2k\pi = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{k\to+\infty\\ k\in\mathbb{Z}}} 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} = +\infty$, on aurait :

$\lim\limits_{k\to+\infty} g(2k\pi) = \ell = \lim\limits_{k\to+\infty} g\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $1 = 0$!

Ce qui est impossible.

Donc $g(x)$ n'admet pas de limite quand k tend vers $+\infty$.

60 Expression conjuguée

a. Pour tout $x > 0$.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

b. • $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1} + 1 = 1 + 1 = 2$.

• Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0 = f(0)$.

c. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \dfrac{1}{2} \neq f(0)$, f n'est pas continue en 0 ; f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

61 De drôles de limites

a. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

Ainsi : $\begin{cases} \forall\, x > 0, \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1 \\ \forall\, x < 0, \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1. \end{cases}$

Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = -1$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x^2+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

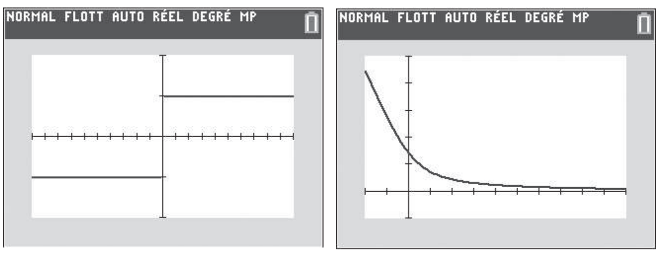
$$= \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}.$$

• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par conséquent, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} + x = +\infty$; puis par quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0.$$

c.



62 Vitesse instantanée

1. a. La vitesse instantanée à l'instant 2 est égale à $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(2+h)-x(2)}{h}$.

• Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(2+h)-x(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 + (2+h) + 1 - 7}{h}$

$$= \frac{4+4h+h^2+2+h-6}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = h+5.$$

• Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(2+h)-x(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+5) = 5$.

b. Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(5+h)-x(5)}{h} = \dfrac{(5+h)^2 + (5+h) + 1 - 31}{h}$

$$= \frac{25+10h+h^2+5+h+1-31}{h} = \frac{h^2+11h}{h} = h+11.$$

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(5+h)-x(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+11) = 11$.

2. a. On cherche $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = 13$.

Pour $h \neq 0$, $\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$

$$= \frac{(h+t_0)^2 + (h+t_0) + 1 - (t_0{}^2 + t_0 + 1)}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2ht_0 + t_0{}^2 + t_0 + h - 1 - t_0{}^2 - t_0 - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + (2t_0+1)h}{h} = h + 2t_0 + 1.$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h + 2t_0 + 1) = 2t_0 + 1$.

On obtient l'équation :

$2t_0 + 1 = 13 \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{13-1}{2} \Leftrightarrow t_0 = 6$.

b. On cherche $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h} = 1{,}05$,

soit $2t_1 + 1 = 1{,}05 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1{,}05-1}{2} = 0{,}025$.

63 À partir de la définition

Supposons qu'il existe $a \in [0\,;+\infty[$ tel que $f(a) < 0$.

• Comme f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, $\forall\, x \geqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$.

• De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Donc de la relation « $\forall\, x \geqslant a$, $f(x) \leqslant f(a)$ », on déduit que $0 \leqslant f(a)$. Ce qui est absurde.

Par conséquent, $\forall\, a \in [0\,;+\infty[$, $f(a) \geqslant 0$.

64 Conjecturer, puis démontrer

a. Il semble que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} f(x) = -\infty$.

b. • Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant x + \cos x \leqslant 1 + x$.

• On en déduit, d'une part que, pour $x > \dfrac{\pi}{2}$, comme $x-\frac{\pi}{2}>0$ on a : $\dfrac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 1$,

d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

• D'autre part, pour $x<\frac{\pi}{2}$, comme $x-\frac{\pi}{2}<0$, on a :

$\dfrac{x-1}{x-\frac{\pi}{2}} \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1+x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Et on en déduit de la même manière que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

c. • On remarque que $\lim\limits_{x\to\pi/2} (x+\cos x) = \frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

• De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0^-$.

Ainsi, par quotient, on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}} f(x) = -\infty$.

65 Encadrements

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $-1 \leqslant -\sin(1/x) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 2-1 \leqslant 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 2+1$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 3$.

Ainsi, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1$,

la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Et finalement, pour tout $x>0$: $\dfrac{x}{3} \leqslant f(x) \leqslant x$.

b. De même, pour tout $x<0$: $\dfrac{x}{3} \geqslant f(x) \geqslant x$.

c. • En utilisant les deux encadrements précédents, comme $\lim\limits_{x\to0} x = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{3} = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

• Comme $f(x) \geqslant \dfrac{x}{3}$ pour $x>0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• Comme $f(x) \leqslant \dfrac{x}{3}$ pour $x<0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{3} = -\infty$, par comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. • De la même manière, pour $x \neq 0$

$\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1$.

Ainsi, pour $x>0$, $\dfrac{x}{3} \leqslant g(x) \leqslant x$

et pour $x<0$, $x \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x}{3}$.

• Par conséquent :

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

66 Fonction partie entière

1. E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (voir Activité 4, question 2).

2. a. • Pour $x \in]0\,;1[$, $\sqrt{x} \in]0, 1[$.

Donc $E(\sqrt{x}) = 0$ et $f(x) = 0$.

• Pour tout $x>0$: $\sqrt{x} \leqslant E(\sqrt{x})$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$.

• Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, par comparaison, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

• Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

b. • Pour $x \geqslant 1$: $0 \leqslant E(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x}+1 \leqslant x+1$

donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

67 Prolongement par continuité

f est continue sur $]-\infty\,;0[$, sur $]0\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

• Continuité en 2

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (5x-1) = 5\times2-1 = 9$

et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} (x^2+bx) = 4+2b$

donc f est continue en 2, si et seulement si, $4+2b=9$, c'est-à-dire si $b = \dfrac{9-4}{2} = \dfrac{5}{2}$.

• Continuité en 0

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} a\sqrt{1+x^2}+x-1 = a-1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x^2+\frac{5}{2}x\right) = 0$

donc f est continue en 0, si et seulement si, $a-1=0$, c'est-à-dire si $a=1$.

• Conclusion

f définie par : $f(x) = \begin{cases} 5x-1 \text{ si } x \geqslant 2 \\ x^2+\frac{5}{2}x \text{ si } 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{1+x^2}+x-1 \text{ si } x<0 \end{cases}$

est continue sur $\mathbb{R}$.

68 Les deux cercles

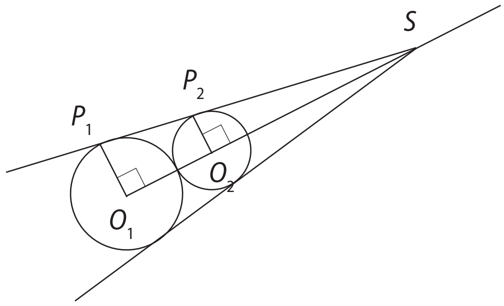
a. Les droites (P_1O_1) et (P_2O_2) sont parallèles. Les points S, P_2, P_1 d'une part et S, O_2, O_1 d'autre part sont alignés. Le théorème de Thalès permet d'écrire que :

$\dfrac{O_1S}{O_2S} = \dfrac{O_1P_1}{O_2P_2} = \dfrac{6}{r}$. De plus, $O_2S = O_1S-(r+6)$.

Ainsi : $\dfrac{O_1S}{O_1S - r - 6} = \dfrac{6}{r} \Leftrightarrow rO_1S = 6(O_1S - r - 6)$

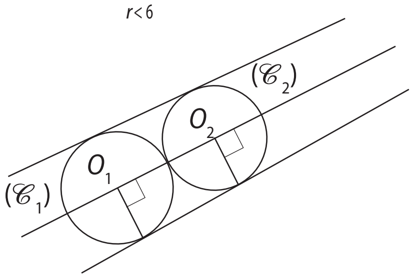
$\Leftrightarrow 6O_1S - rO_1S = 6r + 36$

$\Leftrightarrow O_1S = \dfrac{6r + 36}{6 - r}.$

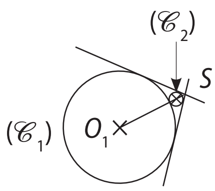


b. $\lim\limits_{\substack{r \to 6 \\ r<6}} 6r + 36 = 72$ et $\lim\limits_{\substack{r \to 6 \\ r<6}} 6 - r = 0^+$

ainsi, par quotient, $\lim\limits_{\substack{r \to 6 \\ r<6}} O_1S = +\infty$.



c. $\lim\limits_{r \to 0} O_1S = \dfrac{36}{6} = 6$.



69 Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0

1. a. $\mathscr{A}_1 = \dfrac{OA \times MP}{2} = \dfrac{1 \times \sin(x)}{2}$;

$\mathscr{A}_2 = \dfrac{x}{2} \times OA^2 = \dfrac{x}{2} \times 1^2$; $\mathscr{A}_3 = \dfrac{AT \times OA}{2} = \dfrac{\tan(x) \times 1}{2}$.

Or $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{A}_2 \leqslant \mathscr{A}_3$, donc $\dfrac{\sin(x)}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\tan(x)}{2}$

d'où $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

b. Puisque $\mathbf{x} \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) > 0$ donc, en divisant l'encadrement précédent par $\sin(x)$:

$1 \leqslant \dfrac{x}{\sin(x)} \leqslant \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$ d'où $1 \leqslant \dfrac{x}{\sin(x)} \leqslant \dfrac{1}{\cos(x)}$

et $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \cos(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} = \dfrac{3}{2}$.

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{x}{\sin(5x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5x}{\sin(5x)} = \dfrac{1}{5}$.

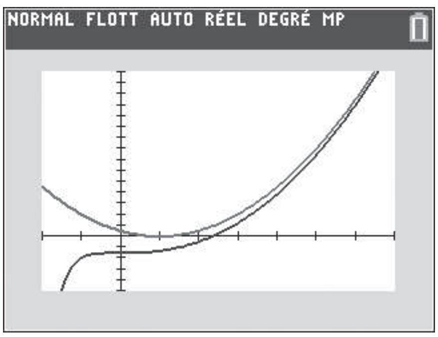
c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{1}{\cos(x)} = 1$.

d. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{x\cos(x)}{\sin(4x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4x}{\sin(4x)} \times \cos(x) = \dfrac{1}{4}$.

Problèmes

70 Un algorithme

1.



2. a. Pour $x > 2$:

$f(x) - g(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$

$= \dfrac{(x^3 - 3x - 6) - (x-1)^2(x+2)}{2(x+2)}$

$= \dfrac{(x^3 - 3x - 6) - (x^2 - 2x + 1)(x+2)}{2(x+2)}$

$= \dfrac{x^3 - 3x - 6 - [x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2]}{2(x+2)}$

$= \dfrac{-3x - 6 + 3x - 2}{2(x+2)} = \dfrac{-4}{x+2}$

donc $g(x) - f(x) = \dfrac{4}{x+2}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - f(x) = 0$.

3. a. L'algorithme permet de déterminer, par un nombre réel positif a donné, la valeur entière de x à partir de laquelle $\dfrac{4}{x+2} \leqslant a$.

b. • Pour $a = -0{,}01$, il affiche -1

car $\forall\, x > \dfrac{4}{x+2} > 0 \geqslant -0{,}01$.

• Pour $a = 0{,}001$, il affiche 3 998.

En effet : $\dfrac{4}{x+2} > 0{,}001 \Leftrightarrow x + 2 < 4\,000 \Leftrightarrow x < 3\,998$.

• Pour $a = 10^{-5}$, il affiche 399 998.

En effet : $\dfrac{4}{x+2} > 10^{-5} \Leftrightarrow x + 2 < 400\,000 \Leftrightarrow x < 399\,998$.

71 Majoration et minoration

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2 + x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.

2. a. Pour $x > 0$: $f(x) = \dfrac{(x^2+x)x-2}{x} = \dfrac{x^3+x^2-2}{x}$.

On cherche a et b réels tels que :

$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$.

On a :

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^2 + ax + b) &= x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b\\ &= x^3 + x^2(a - 1) + x(b - a) - b\end{aligned}$$

Ainsi, par identification :

$$\begin{cases} a - 1 = 1\\ b - a = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\\ b = 2.\end{cases}$$

On a donc $f(x) = \dfrac{(x-1)P(x)}{x}$ avec $P(x) = x^2 + 2x + 2$.

b. • Pour x de $\mathbb{R}$:

$(x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2 = P(x)$

• Pour x de $]0 ; 1]$:

$$f(x) = \frac{(x-1)P(x)}{x} = \underbrace{\frac{(x-1)(x+1)^2}{x}}_{\leqslant 0} + \frac{(x-1)}{x}$$

donc $f(x) \leqslant \dfrac{(x-1)}{x}$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x}$

• Il suffit que : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant -10^4$

$$-\frac{1}{x} \leqslant -10\,001$$

$$\frac{1}{x} \geqslant 10\,001$$

$$x \leqslant \frac{1}{10\,001}$$

Donc $\alpha = \dfrac{1}{10\,001}$ convient.

c. • Pour tout x de $[2 ; +\infty[$:

$$x - \frac{2}{x} - 1 = \frac{x^2-x-2}{x} = \frac{(x+1)(x-2)}{x}$$

donc $x - \dfrac{2}{x} - 1 \geqslant 0$, donc $x - \dfrac{2}{x} \geqslant 1$

• Ainsi, pour tout x de $[2 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant x^2 + 1 \geqslant x^2$.

• Il suffit que $x^2 \geqslant 10^4$, donc $x \geqslant 10^2$

Donc $\beta = 10^2$ convient.

72 Histoire d'aires

a. • Le triangle HMP est rectangle en H.

Ainsi : $S_1(x) = \dfrac{MH \times HP}{2}$.

• Dans le triangle rectangle OMH en H, on a :

$\sin(x) = \dfrac{MH}{OM} = MH$ et $\cos(x) = \dfrac{OH}{OM} = OH$

• Dans le triangle OMP rectangle en M,

$\cos(x) = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{1}{OP}$ donc $OP = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

• Ainsi, $HP = OP - OH = \dfrac{1}{\cos(x)} - \cos(x) = \dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}$

$= \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$ et $S_1(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{2\cos(x)}$.

b. • Le triangle NIP est rectangle en I.

Ainsi, $S_2(x) = \dfrac{IP \times NI}{2}$.

• $IP = HP - HI = HP - (OI - OH) = HP - 1 + \cos(x)$

$= \dfrac{1}{\cos(x)} - \cos(x) - 1 + \cos(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} - 1 = \dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)}$.

• Les droites (MH) et (NI) sont parallèles.

Le théorème de Thalès assure que :

$$\frac{NI}{MH} = \frac{IP}{HP} \Leftrightarrow \frac{NI}{\sin(x)} = \frac{\dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)}}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}} = \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$\Leftrightarrow NI = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$.

• Ainsi, $S_2(x) = \dfrac{(1-\cos(x))^2}{2\sin(x)\cos(x)}$.

c. • $\lim\limits_{x\to 0} \sin^3(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2\cos(x) = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} S_1(x) = 0$. Quand x se rapproche de 0, l'aire $S_1(x)$ se rapproche de 0.

• $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \sin^3(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} 2\cos(x) = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to\pi/2} S_1(x) = +\infty$. Quand x se rapproche de $\dfrac{\pi}{2}$, l'aire $S_1(x)$ devient infiniment grande.

d. • Pour $x \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{\sin^3(x)}{2\cos(x)} \times \frac{2\sin(x)\cos(x)}{(1-\cos(x))^2} = \frac{(\sin^2(x))^2}{(1-\cos(x))^2}$$

$$\frac{(1-\cos^2(x))^2}{(1-\cos(x))^2} = \left(\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1-\cos(x)}\right)^2 = (1+\cos(x))^2.$$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\cos(x))^2 = 2^2 = 4$

et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} 1^2 = 1.$

e. • Pour $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$S_2(x) = \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} \times S_1(x).$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} = \dfrac{1}{4}$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_2(x) = 0$. Quand x se rapproche de 0, l'aire $S_2(x)$ se rapproche de 0.

• $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} S_1(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} \dfrac{S_2(x)}{S_1(x)} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2\\ x<\pi/2}} S_2(x) = +\infty$. Quand x se rapproche de $\dfrac{\pi}{2}$, l'aire $S_2(x)$ devient infiniment grande.

73 Position relative

1. $f(x)$ est défini, si et seulement si, $x^2 + x - 2 \neq 0$.

On remarque que : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

Ainsi, $f(x)$ est défini, si et seulement si, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$.

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\,;0\}$:

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = x\,\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. • $\lim\limits_{x\to-2} x^3 - x^2 - 4x + 5 = -8 - 4 + 8 + 5 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} x^2 + x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} x^2 + x - 2 = 0^+$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$ et l$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - x^2 - 4x + 5 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>-1}} x^2 + x - 2 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 + x - 2 = 0^-$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$.

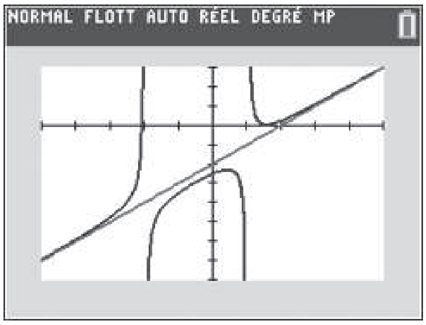
3. a.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 5 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -\left(x^3 + x^2 - 2x\right) & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 2x + 5 & \\ -\left(-2x^2 - 2x + 4\right) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$ ($a = 1 = c$ et $b = -2$).

b. $f(x) - (x-2) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

Donc $f(x) - (x-2)$ est du signe de $x^2 + x - 2$.



Ainsi, $f(x) - (x-2) > 0$ lorsque $x \in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$ et dans ce cas, $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessus de (Δ) ;

$f(x) - (x-2) = 0$ lorsque $x = -2$ ou $x = 1$, ce qui n'est pas possible car f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$;

$f(x) - (x-2) < 0$ lorsque $x \in]-2\,;1[$ et dans ce cas, $(\mathscr{C}_f)$ est située au-dessous de (Δ).

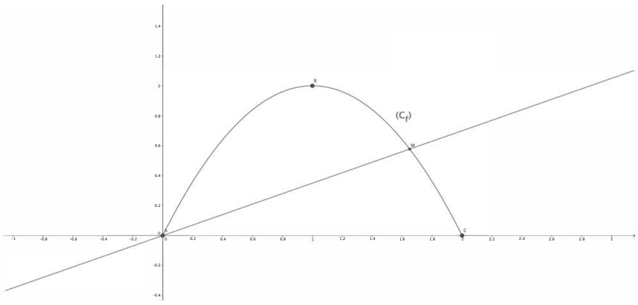
11 Dérivée d'une fonction

Manuel pages 175 à 192

Activités d'introduction

1 Nombre dérivé, définition graphique

1. a. et **b.**



c. Lorsque M se rapproche de A, (AM) se rapproche de la tangente en A à $(\mathscr{C}_f)$.

d. On conjecture que $f'(0) = 2$.

2. • On conjecture que $f'(1) = 0$.

• On conjecture que $f'(2) = -2$.

2 Nombre dérivé, définition algébrique

1. a. $m = \dfrac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} m = 1$.

La position limite de la droite (AM) est la droite de coefficient directeur 1 tangente à la courbe de f.

2. a. $m = \dfrac{[-(a+h)^2 + 2(a+h)] - (-a^2 + 2a)}{h}$

$= \dfrac{-h^2 - a^2 - 2ah + 2a + 2h + a^2 - 2a}{h}$

$= \dfrac{-h^2 - 2ah + 2h}{h} = -h - 2a + 2$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} m = 2 - 2a$.

La position limite de la droite (AM) est la droite de coefficient directeur $2\text{-}2a$ tangente à la courbe de f.

3. a. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{3(a+h) + 1 - (3a+1)}{h} = 3$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (3) = 3$. Donc f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 3$.

b. $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - 3 - (a^2 - 3)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h}$

$= h + 2a$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (h + 2a) = 2a$. Donc g est dérivable en a et le nombre dérivé de g en a est $g'(a) = 2a$.

3 Vitesse moyenne, vitesse instantanée

1. $\dfrac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2 = 12 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{24}{9{,}81}$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{\dfrac{24}{9{,}81}} \approx 1{,}56$ s.

2. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{12}{1{,}56} \approx 7{,}67$ m/s.

3. a. $\dfrac{d(1+h) - d(1)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h+2)$.

b. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h+2) = 9{,}81$ m/s.

c. En mathématiques, on parle de dérivée de d en 1.

d. $\dfrac{d(1{,}25+h) - d(1{,}25)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h+2{,}5)$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h+2{,}5) \approx 12{,}26$ m/s.

b. $\dfrac{d(1{,}56+h) - d(1{,}56)}{h} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}81\ (h+3{,}12)$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{2} \times 9{,}81(h+3{,}12) \approx 15{,}30$ m/s.

4 Lien entre variation d'une fonction et signe de sa dérivée

1. $f'(-2) = 3$; $f'(0) = -0{,}5$; $f'(1) = 0$; $f'(2) = 2$

2. a.]-2;-0,75[U]1;2,5[;]-0,75;1[.

b.

x	-2		-0,75		1		2, 5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1,5	↗	0,2	↘	-0,4	↗	1,9

Savoir-faire

4 **a.** Calcul du taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3 - (2)^3}{h} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h}$$
$$= h^2 + 6h + 12.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$. Donc f est dérivable en 2 et le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 12$.

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2.

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 12(x - 2) + 8 = 12x - 16$.

5 **a.** $f'(1) = 0$; **b.** $f'(2) = 2$.

8 **a.** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^3 - (a)^3}{h}$

$= \dfrac{h^3 + 3ah^2 + 3a^2h}{h} = h^2 + 3ah + 3a^2$

$\lim\limits_{h \to 0} (h^2 + 3ah + 3a^2) = 3a^2$.

f est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 3a^2$.

Ainsi la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.

b. $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{a + h - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

g est dérivable en a pour tout a de $]0 + \infty[$ et $g'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ainsi la fonction dérivée de g est la fonction g' définie sur $]0 + \infty[$ par $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

9 $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h} = \dfrac{a^2 - (a+h)^2}{ha^2(h+a)^2}$

$= \dfrac{-h - 2a}{a^2(h+a)^2}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h - 2a}{a^2(h+a)^2} = \dfrac{-2a}{a^4} = \dfrac{-2}{a^3}$.

f est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}^*$ et $f'(a) = \dfrac{-2}{a^3}$.

Ainsi la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.

10 **a.** $f'_1(x) = 14x - 3$; **b.** $f'_2(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$;

c. $f'_3(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; **d.** $f'_4(x) = \dfrac{13}{(5-2x)^2}$;

e. $f'_5(x) = 10(2x - 1)^4$; **f.** $f'_6(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$.

14 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

Ainsi $f'(x) = -2x + 2$.

Donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[$.

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty$ 1[et décroissante sur $]1 + \infty[$.

b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

Ainsi $g'(x) = \dfrac{12x}{(2+x^2)^2}$.

Donc $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; +\infty[$.

La fonction g est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

15 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

Ainsi $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-17	↗	3	↘	-1	↗	19

f admet un minimum local égal à -1 pour $x = 1$ et un maximum local égal à 3 pour $x = 1$.

Sur $[-3 ; 3]$, le maximum global est égal à 19 et le minimum global à -17.

16 La fonction utilisée est la fonction cube. 2,03 est proche de 2.

L'approximation affine au voisinage de 2 s'écrit :

$f(x) \approx f'(2)(x-2) + f(2) \approx 12(x-2) + 8 \approx 12x - 16$.

Ainsi $2{,}03^3 \approx 12 \times 2{,}03 - 16 \approx 8{,}36$.

Exercices d'entraînement

17 **a.** $f'(1) = -3$; **b.** $y = -3x + 1{,}5$.

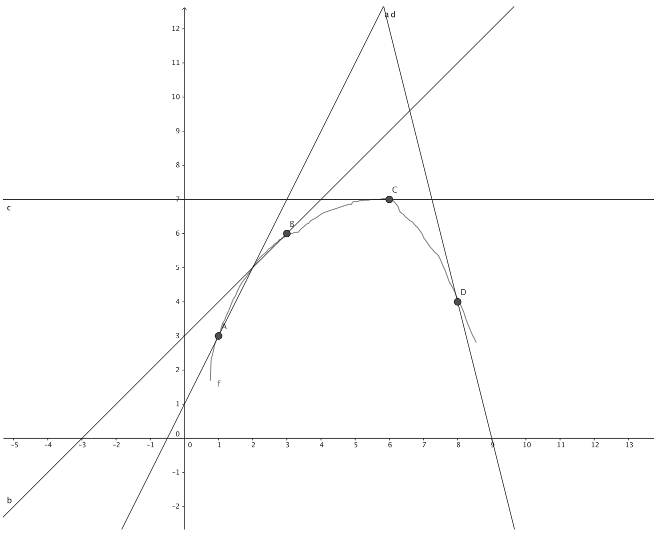
18 $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{(-1+h)^3 - (-1)^3}{h}$

$= \dfrac{h^3 - 3h^2 + 3h}{h} = h^2 + 3h + 3.$

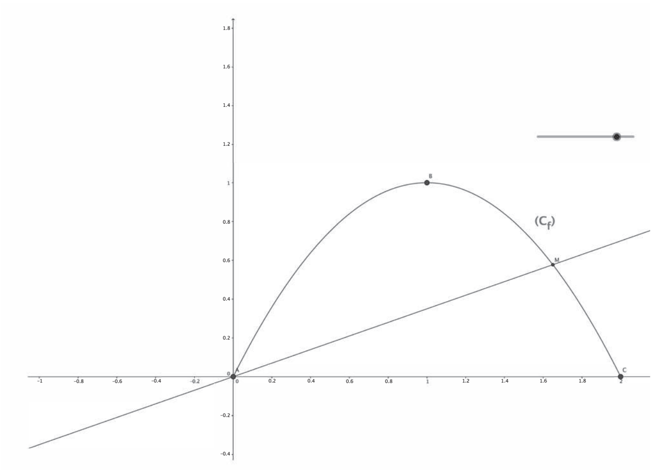
$\lim\limits_{h \to 0}(h^2 - 3h + 3) = 3.$

Ainsi f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 3$.

19



20



21 A : $y = -4x + 3$; B : $y = 3$; C : $y = 2x$.

22 **a.**

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	5	2,5	0	5
$f'(x)$	11	0	–4	0	11

b. $f'(a) = 0$ pour $a = 1$ et $a = 3$.

$f'(a) > 0$ sur $[0\ ;\ 1[\cup]3\ ;\ 4]$.

23 **a.** $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1-h} - (-1)}{h} = \dfrac{-h}{h(1-h)} = \dfrac{1}{1+h}.$

$\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{1}{1+h}\right) = 1.$

Ainsi f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

b. $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}.$

$\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}.$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

c. $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{(2h+1)^2 - 1}{h} = \dfrac{4h^2 + 4h}{h} = 4h + 4..$

$\lim\limits_{h \to 0}(4h + 4) = 4.$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 4$.

24 **a.** Sommet $S(0\ ;\ -5)$.

b. $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2(1+h)^2 - 5 - (-3)}{h} = \dfrac{2h^2 + 4h}{h}$

$= 2h + 4.$

$\lim\limits_{h \to 0}(2h + 4) = 4.$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

c. Équation de T_1 : $y = 4x - 7$.

d. $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{2(2+h)^2 - 5 - 3}{h} = \dfrac{2h^2 + 8h}{h}$

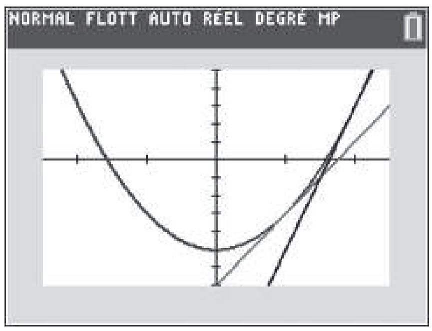
$= 2h + 8.$

$\lim\limits_{h \to 0}(2h + 8) = 8.$

Ainsi f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

Équation de T_2 : $y = 8x - 13$.

e.



25 Équation de la tangente au point d'abscisse -1 :

$y = 3x + 2$.

26 Le nombre dérivé à gauche de 1 est égal à $2a$.

Le nombre dérivé à droite de 1 est égal à 3.

Ainsi, il faut que $a = \dfrac{3}{2}$ et b peut être quelconque.

27 **a.** $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{(h-3)^3-(-27)}{h}$

$= \dfrac{h^3-9h^2+27h-27+27}{h}$

$= h^2-9h+27.$

b. $\lim\limits_{h\to 0}(h^2-9h+27) = 27$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 27$.

28 • $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; • $g'(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{3}x$.

29 • $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; • $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$.

30 • $f'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}}$; • $g'(x) = 4x + 1$.

31 • $f'(x) = \dfrac{-11}{(x-5)^2}$; • $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

32 • $f'(x) = 8(2x+1)^3$; • $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$.

33 **a.** $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :
$y = -3$.

c. L'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions : -3 et 1.
Les points où la tangente est horizontale sont :
$A(1\,;-3)$ et $B(-3\,;29)$.

34 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \dfrac{mh}{h} = m.$

$\lim\limits_{h\to 0}(m) = m.$

Ainsi f est dérivable en tout nombre réel a et $f'(a) = m$.

35 Expression 1 : $f(x) = x^3 - 2x + 3$ donc $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Expression 2 : $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

donc $f'(x) = \dfrac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{x^2-2x+1}$.

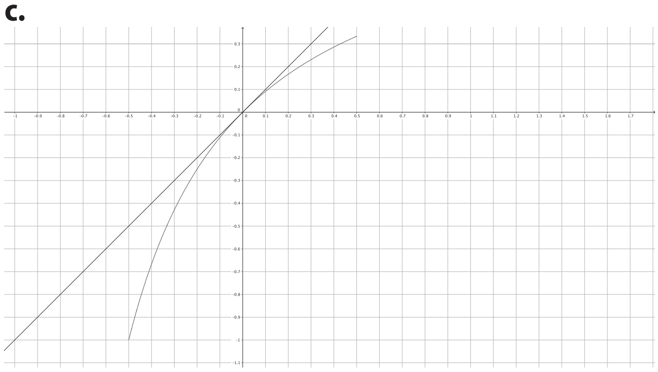
36 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x$.

b. Étude du signe de $f(x) - x = \dfrac{x}{1+x} - x = \dfrac{-x^2}{1+x}$.

Sur $]-1\,;+\infty[$, $f(x) - x < 0$.
Donc la courbe est au-dessous de sa tangente.

c.



37 **a.** $f'(x) = \dfrac{1(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2 :
$y = -\dfrac{3}{25}x + \dfrac{16}{25}$.

c. L'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions : -1 et 1.
Les points où la tangente est horizontale sont :
$A\left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

38 **1.** f_1 a pour dérivée f'_3 ;
f_2 a pour dérivée f'_1 ;
f_3 a pour dérivée f'_2.

2. a. $f'(x) = \dfrac{b(3-x)-(-1)(a+bx)}{(3-x)^2} = \dfrac{3b+a}{(3-x)^2}$.

b. $f'(x) = \dfrac{-3}{(3-x)^2}$.

c. Pour f_1, $a = 1$ et $b = 0$; pour f_2, $a = 1$ et $b = 1$; pour f_3, $a = 0$ et $b = 1$.

39 a désigne un nombre réel de l'intervalle I.

$T = \dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$

$= \dfrac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$

$= \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.

Or u est dérivable en a,

donc $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\right) = u'(a)$.

De même, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right) = v'(a)$.

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0}(T) = u'(a) + v'(a)$.

On en déduit que $u + v$ est dérivable en a et que $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

40 **a.** $T = \dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}$

$= \dfrac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$.

b. En développant l'expression proposée, le résultat est immédiat.

c. u est dérivable en a,

donc $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\right) = u'(a)$.

De même, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right) = v'(a)$.

De plus, $\lim\limits_{h\to 0}(v(a+h)) = v(a)$.

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0}(T) = v(a)u'(a) + u(a)v'(a)$.

On en déduit que uv est dérivable en a et que $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$.

41 **1.** $f'(x) = \dfrac{-3(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{-6x+3}{(x^2-x-2)^2}.$

2. a. $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{-1}{x+1}.$

b. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}.$

c. $\dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{-(x+1)^2+(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{-x^2-2x-1+x^2-4x+4}{(x-2)^2(x+1)^2} = \dfrac{-6x+3}{(x^2-x-2)^2}.$

42 **a.** $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$

b. Équation de la tangente au point d'abscisse 2 :

$y = x - 3$

c. Étude du signe de $f(x) - (x-3)$.

Si $x = 2$ ou $x = -1$, la courbe et la tangente coïncident.

Sur $]-1\,;2[\cup]2;+\infty[$, $f(x) - (x-3) > 0$. Donc la courbe est au-dessus de sa tangente.

Sur $]-\infty\,;-1[$, $f(x) - (x-3) < 0$. Donc la courbe est au-dessous de sa tangente.

43 **a.**

x		-1,8		0		3,2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

b.

x		-1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

44 **a.** $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante ;

sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.

45

x		-1	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗

46

x		1	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	-1	↘

47

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$		↗	

48

x		-1		0		1	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘	1	↗

49 $f'(x) = 2x + 1.$

x		$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{21}{4}$	↗

50 $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}.$

x		-1	
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	↗	‖	↗

51 $f'(x) = \sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}.$

x	0	
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

52 **a.** $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2).$

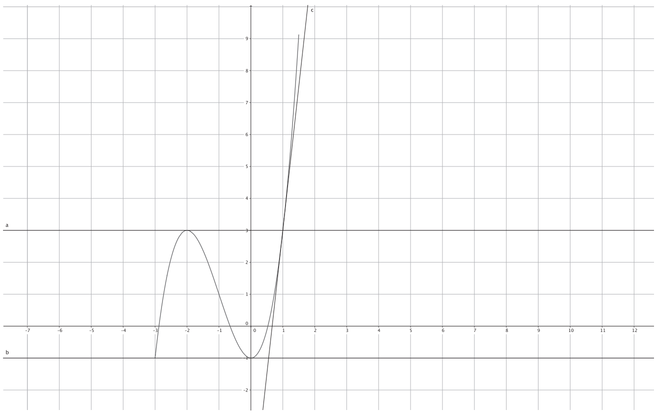
b.

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

c. Il y a deux tangentes horizontales aux points $A(-2\,;3)$ et $B(0\,;-1)$.

d. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = 9x - 6$.

e.



53 **a.** $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.

b.

x		0		$\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	$-\frac{27}{256}$	↗

54 **a.** L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

55 Maximum égal à 1 atteint pour $x = 1$ ou $x = -2$ et minimum égal à -3 atteint pour $x = -1$ ou $x = 2$.

56

x	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Maximum local en 0. Minima locaux en -2 et 2.

57 Minima locaux : -14 et -3 ; minimum global : -14.
Maxima locaux : 2 ; 11 et 15 ; maximum global : 15.

58 $f'(x) = 2x - 2$.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗

Minimum égal à 4 atteint pour $x = 1$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

Maximum égal à 2 atteint pour $x = -1$ et minimum égal à -2 atteint pour $x = 1$.

59 $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

Donc f admet un maximum égal à 0 et atteint pour $x = 0$.

60 **a.** $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^3 + 15x^2 + 300x - 100$.

b. $B'(x) = -6x^2 + 30x + 300 = 3(-2x^2 + 10x + 100)$.

x	0		10		50
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		↗	2400	↘	

c. Pour obtenir un bénéfice maximal, il faut que $x = 10$. Il faut donc fabriquer 10 000 chargeurs.
$B(10) = 2\,400$.

61 **1.** f semble croissante sur $[-10 ; 10]$.
2. a. $f'(x) = 3x^2 - 0{,}03 = 3(x^2 - 0{,}01)$.

x	-10		-0,1		0,1		10
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

b. La conjecture est donc fausse.
3. Maximum égal à 0,002 atteint pour $x = -0{,}1$ et minimum égal à $-0{,}002$ atteint pour $x = 0{,}1$.

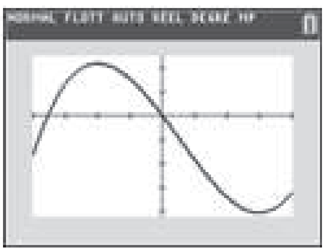
62 **a.** $f'(x) = \dfrac{4(x^2+3) - 2x(4x+1)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2x + 12}{(x^2+3)^2}$.

x	-4		-2		$\frac{3}{2}$		4
$f'(x)$		-	•	+	•	-	
$f(x)$	$-\frac{15}{19}$	↘	-1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$\frac{17}{19}$

b. Maximum global égal à $\dfrac{4}{3}$ atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.

c. Minimum global égal à -1 atteint pour $x = -2$.

63 **a.**



On conjecture que f admet un minimum égal à -40 environ et atteint pour $x = 3$.
b. $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$.

c.

x	-4		-2		3		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-16	↗	22	↘	-40,5	↗	-32

d. Minimum égal à $-40{,}5$ atteint pour $x = 3$.

64 $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+2) - 1(x^2+x+2)}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	↘	1	↗	$\frac{4}{3}$

Minimum local et global égal à 1 atteint pour $x = 0$.
Maximum global égal à 2 atteint pour $x = -1$.

65 **a.** $i(R) = \dfrac{230}{10+R}$; $P(R) = R\left(\dfrac{230}{10+R}\right)^2 = \dfrac{52\,900R}{(10+R)^2}$.

b. $P'(R) = \dfrac{52\,900(10+R)^2 - 52\,900[2R(10+R)]}{(10+R)^4}$
$= 52\,900\dfrac{(10+R)-2R}{(10+R)^3} = 52\,900\dfrac{10-R}{(10+R)^3}$.

R	0		10	
$P'(R)$		+	0	-
$P(R)$		↗		↘

c. La puissance P est donc maximale pour une résistance $R = 10$ et $P(10) = 1\,322{,}5$.

66 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 2$.
$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 2 = 0$;
$f(-1) = 2 \Leftrightarrow -a + b - 2 - 3 = -2 \Leftrightarrow -a + b - 3 = 0$.
Le système obtenu a pour solutions : $a = 8$ et $b = 11$.

67 **a.** $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $f(x) \approx f'((0)(x-0) + f(0) \approx -x + 1$.

b. $0{,}992 = 1 - 0{,}008$; ainsi $\dfrac{1}{0{,}992} = f(-0{,}008)$

et donc $\dfrac{1}{0{,}992} \approx -(-0{,}008) + 1 \approx 1{,}008$.
c. La calculatrice donne 1,008064. L'approximation est donc très bonne.

68 **a.** • $f'(x) = 2(1+x)$; $f(x) \approx 2(x-0) + 1 \approx 2x + 1$;
• $f'(x) = 3(1+x)^2$; $f(x) \approx 3(x-0) + 1 \approx 3x + 1$;
• $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $f(x) \approx \dfrac{1}{2}(x-0) + 1 \approx \dfrac{1}{2}x + 1$;
• $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $f(x) \approx -1(x-0) + 1 \approx -x + 1$.
b. $A = (1 + 0{,}005)^2 \approx 1 + 2 \times 0{,}005 \approx 1{,}01$;

$B = (1-0{,}003)^2 \approx 1 + 3 \times (-0{,}003) \approx 0{,}991$;

$C = \sqrt{1-0{,}004} \approx 1 + \dfrac{1}{2} \times (-0{,}004) \approx 0{,}998$;

$D = \dfrac{1}{(1+0{,}007)} \approx 1 - 0{,}007 \approx 0{,}993.$

69 $f(x) = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$;

$f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 2(1+x)(2+x)}{(1+x)^4} = \dfrac{-3-x}{(1+x)^3}.$

Or $f'(0) = -3$ et $f(0) = 2$,
donc $f(x) \approx -3(x-0) + 2 \approx -3x + 2$.
$N = f(0{,}001) \approx -3(0{,}001) + 2 \approx 1{,}997$.

70 **a.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{25+x}}.$

x	25	
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$\sqrt{50}$	$\nearrow$

b. $f'(0) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$et $f(0) = 5$,
donc $f(x) \approx 0{,}1(x-0) + 5 \approx 0{,}1x + 5$
$\sqrt{25{,}02} = (0{,}02) \approx 0{,}1(0{,}02) + 5 \approx 5{,}002$.
À la calculatrice, on trouve $\sqrt{25{,}02} \approx 5{,}0019996$.

Se tester

71 **1.** Vrai ; **2.** Vrai; **3.** Faux; **4.** Vrai ; **5.** Faux ; **6.** Vrai; **7.** Faux.

72 **1.** Vrai car $f'(x) > 0$.

2. Faux.car $f'(x) > 0$.

3. Vrai. $f'(3) = 2$.

4. Faux car $f'(x) > 0$ et donc le coefficient directeur de la tangente ne peut être égal à -1.

4. Vrai car $f'(x)$ s'annule en 1 et change de signe.

5. Faux car $f(0) > f(3)$.

73 **1. a** ; **2. c** ; **3. b** ;**4. c** ; **5. c.**

74 **1. c.** $f'(x) = 2(3x-4) + 3(2x-5) = 12x - 23$.

2. a. $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$

3. a. $f'(x) = 2x$.

x		0	
$f'(x)$	-	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

4. b. $f'(x) = 2(1+x)$; $f(x) \approx 2(x-0) + 1 \approx 2x + 1$.

5. a. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$

Donc sur $]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est croissante.

Exercices d'approfondissement

75 **Parabole**

a. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Par lecture graphique, $f(-1{,}5) = f(1{,}5) = 0$ et $f(0) = 9$.
On en déduit un système d'inconnues a, b et c. Ainsi,
$f(x) = -4x^2 + 9$.

b. $S(x) = f(x) + x = -4x^2 + x + 9$.

$S'(x) = -8x + 1$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{8}$ e,t dans ce cas,
$f\left(\dfrac{1}{8}\right) = 143$.

76 **Une inégalité**

a. $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n[(1+x)^{n-1} - 1]$.

Sur $[0 ; +\infty[$, $1 + x \geqslant 1 \Rightarrow (1+x)^{n-1} \geqslant 1$. Ainsi $f'(x) \geqslant 0$.

b.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

Ainsi $f(x) \geqslant 0$ et donc $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

c. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = 0$.
Or $f(x) \geqslant 0$, donc la courbe de f est au-dessus de la tangente.

77 **Deux manières de dériver**

a. • $(x-1)^3(2x+3)^2 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(4x^2 + 12x + 9)$

$= 4x^5 + 12x^4 + 9x^3 - 12x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 12x^3 + 36x^2$
$- 27x - 4x^2 - 12x - 9$
$= 4x^5 - 15x^3 + 5x^2 + 15x - 9.$

• $f'(x) = 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15.$

b. • $5(x-1)^2(2x+1)(2x+3)$
$= (x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 6x + 2x + 3)$
$= (5x^2 - 10x + 5)(4x^2 + 8x + 3)$
$= 20x^4 + 40x^3 + 15x^2 - 40x^3 - 80x^2 - 30x + 20x^2 + 40x + 15$
$= 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15$
$= f'(x).$

• $3(x-1)^2(2x+3)^2 + 4(x-1)^3(2x+3)$
$= 3(x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 12x + 9) + 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(2x + 3)$
$= (3x^2 - 6x + 3)(4x^2 + 12x + 9) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)(2x + 3)$
$= 12x^4 + 36x^3 + 27x^2 - 24x^3 - 72x^2 - 54x + 12x^2 + 36x + 27 + 8x^4 + 12x^3 - 24x^3 - 36x^2 + 24x^2 + 36x - 8x - 12$
$= 20x^4 - 45x^2 + 10x + 15 = f'(x).$

c. L'étape 3 peut servir à étudier le signe de $f'(x)$ et donc les variations de f.

78 Coût marginal

1. a. $C(100) = 101\,000$; $C(101) = 101\,099$.

b. $C(101) - C(100) = 99$.

2. $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$
$= [2\,000 + 100(x+1) - 0{,}001(x+1)^2] - [2\,000 + 100x - 0{,}001x^2]$
$= 2\,000 + 100x + 100 - 0{,}001x^2 - 0{,}002x - 0{,}001 - 2\,000 - 100x + 0{,}001x^2$
$= 99{,}999 - 0{,}002x$

$C_m(x) = 99{,}999 - 0{,}002x$; $C'(x) = 100 - 0{,}002x$.

3. a. $C'(x) = 100 - 0{,}002x$, donc $C'(x) - C_m(x) = 0{,}001$;

b. $C'(100) - C_m(100) = 0{,}001$.

79 Rectangle ou carré ?

On note ℓ la largeur du rectangle.

$x \times \ell = 100 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{x}{100}$.

Ainsi $P(x) = 2(x + \ell) = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right)$.

b. $P'(x) = 2\left(1 - \dfrac{100}{x^2}\right) = 2\left(\dfrac{x^2 - 100}{x^2}\right)$.

x		10	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

La fonction P admet donc un minimum pour $x = 10$, ce qui donne une largeur égale à 10. Le rectangle est donc carré.

80 Minimum global

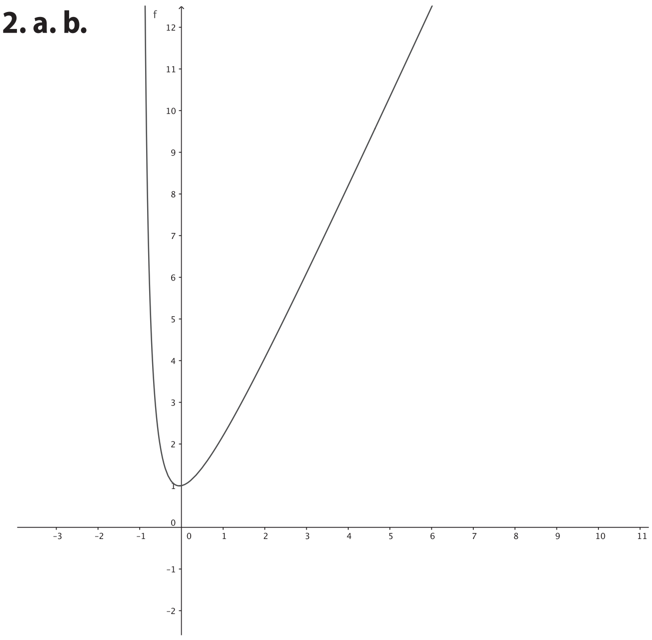
1. a. $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$.

b.

x		$-1+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Donc f admet un minimum en $x = -1 + \sqrt{2}$.

2. a. b.



3. a. $f'(x) = m - \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{mx^2 + 2mx + m - 2}{(x+1)^2}$.

L'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution positive :

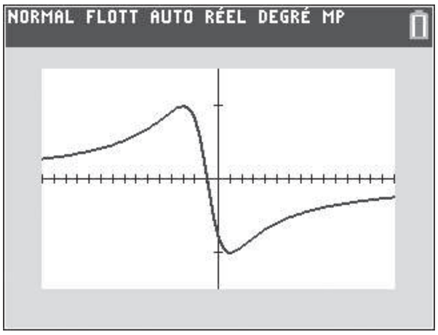
$x_1 = \dfrac{-2m + \sqrt{8m}}{2m}$;

$x_1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{8m} = 4m \Leftrightarrow 8m = 16m^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

81 Une fonction bornée

a. $x^2 + 2x + 5$ n'a pas de racine car $\Delta < 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



b. $f'(x) = \dfrac{4(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x + 5)^2}$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

Minimum global égal à -1 atteint pour $x = 1$ et maximum global égal à 1 atteint pour $x = -3$.

82 Tangente de direction donnée

a. $f'(x) = \dfrac{(4x + m)(x + 3) - 1(2x^2 + mx - 7)}{(x + 3)^2}$

$= \dfrac{2x^2 + 12x + 3m + 7}{(x + 3)^2}$.

b. $f'(-1) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3m - 3}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

c. $f'(0) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3m + 7}{9} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\dfrac{10}{3}$.

83 Tangente perpendiculaire

(D_1) a pour équation $y = -x + 2$ et a donc -1 pour coefficient directeur.

$f'(x) = \dfrac{(2x + m)(x - 1) - 1(x^2 + mx + 1)}{(x - 1)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2x - m - 1}{(x - 1)^2}$.

(D_2) a pour coefficient directeur $f'(2) = -m - 1$.
(D_1) et (D_2) sont perpendiculaires si :
$(-m - 1)(-1) = (-1) \Leftrightarrow m = -2$.

84 Vitesse moyenne

1. On note d la distance entre les deux villes. L'équation horaire se traduit par :
$\dfrac{d}{50} + \dfrac{d}{x} = \dfrac{2d}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{100x}{x + 50}$.

2. a. $v'(x) = \dfrac{5\,000}{(x + 50)^2}$.

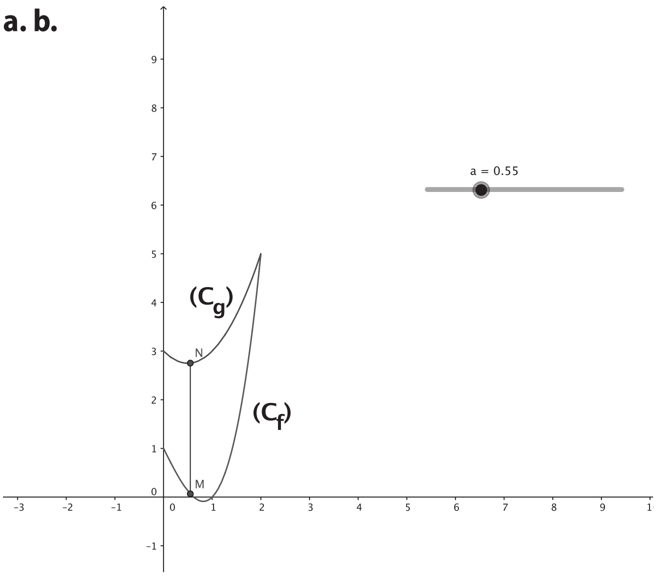
x	0		90
$v'(x)$		$+$	
$v(x)$	0	↗	$\dfrac{450}{7}$

b. Le maximum est d'environ 64,3 km/h. Il est donc impossible d'atteindre 75 km/h.

c. La vitesse maximale est atteinte pour $x = 90$ et elle est de $\dfrac{450}{7}$ km/h.

85 Distance entre deux courbes

a. b.



On conjecture que la longueur MN est maximale pour $x = 1$.

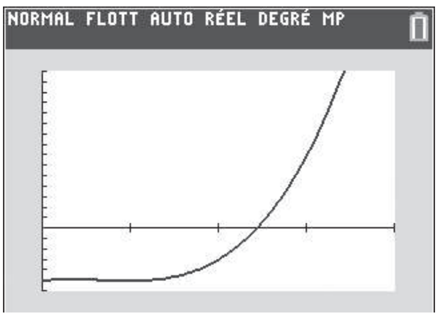
2. a. $h(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$; $h'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

x	0		$-\dfrac{1}{3}$		1		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	2	↘	$\dfrac{49}{27}$	↗	3	↘	0

b. Maximum global atteint pour $x = 1$.

86 Étude d'un signe

1.



2. a. $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

x	0		$\frac{1}{3}$		1		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-5	↗	$-\frac{131}{27}$	↘	-5	↗	31

P est croissante sur [1 ; 4] et $0 \in [-5 ; 31]$ donc il y a une valeur d'annulation dans cet intervalle.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
2.3	-1.113
2.35	-0.717
2.4	-0.296
2.45	0.1511
2.5	0.625
2.55	1.1264
2.6	1.656
2.65	2.2146
2.7	2.803
2.75	3.4219
2.8	4.072

c. $2,4 < \alpha < 2,5$.

d.

x	0		α		4
$P(x)$		$-$	0	+	

87 Un problème d'optimisation

a. $CD = \sqrt{x^2+1}$; $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{4} + \dfrac{4-x}{8}$.

b. $t'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+1}}{8\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{3x^2 - 1}{8\sqrt{x^2+1}(2x + \sqrt{x^2+1})}$.

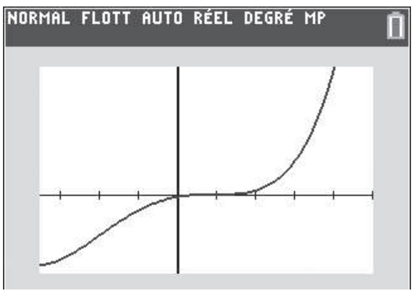
x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

c. Le temps minimum est atteint lorsque $CD = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$ km et dans ce cas,

$t\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \approx 0,72$ h ≈ 43 min.

88 Fonction polynôme du quatrième degré

a.



b. $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14$.

$P''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$.

c.

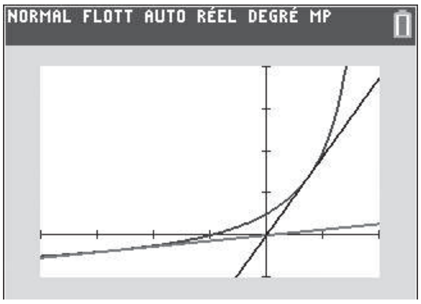
x	-5		-2		1		5
$P''(x)$		+	0	-	0	+	
$P'(x)$	-216	↗	54	↘	0	↗	544

d.

x	-3,5		5
$P'(x)$	0	+	
$P(x)$		↗	

89 Tangente passant par l'origine

a.



b. $f'(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.

c. $y = \dfrac{3}{(m-2)^2}x + \dfrac{-m^2 - 2m + 2}{(m-2)^2}$.

d. Pour que la tangente passe par l'origine, il faut que $\dfrac{-m^2 - 2m + 2}{(m-2)^2} = 0$, soit $-m^2 - 2m + 2 = 0$.

Deux solutions :

$m_1 = -1 - \sqrt{3}$; $T_1 : y = \dfrac{1}{4 + 2\sqrt{3}}x$;

$m_2 = -1 + \sqrt{3}$; $T : y = \dfrac{1}{4 - 2\sqrt{3}}x$.

90 Approximation affine

a. $f'(x) = 8x$; $g(x) = 160x - 1\,597$.

b. $e(x) = 4x^2 - 160x + 1\,600 = 4(x-20)^2$.

c. $f(20,001) = 1\,603,160\,004$; $g(20,001) = 1\,603,16$; $e(20,001) = 0,000\,004$.

c. $f(20,000\,001) = 1\,603,16$; $g(20,000\,001) = 1\,603,16$; $e(20,000\,001) = 4 \times 10^{-12}$: erreur commise par la calculatrice.

Le problème est dû aux arrondis d'affichage.

91 Diamètre d'une bille

1. Le diamètre du verre est de 10 cm, donc $0 \leqslant d \leqslant 20$.

Volume de l'eau : 50π ; volume de la bille : $\dfrac{\pi d^3}{6}$.
Volume dans le deuxième cas :
$\dfrac{\pi d^3}{6} + 50\,\pi = 25\pi d \Leftrightarrow d^3 - 150d + 300 = 0$.

2. a. $f'(x) = 3x^2 - 150 = 3(x^2 - 50)$.

x	0	$\boxed{\sqrt{50}}$	10
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	300 ↘	$\boxed{300 - 100\sqrt{50}}$	↗ -200

f est décroissante sur $[0\,;\sqrt{50}]$. De plus $f(0) > 0$ et $f(\sqrt{50}) < 0$. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;10]$.

c. $a \approx 2{,}05$.

3. Le diamètre de la bille est environ égal à 2,05cm.

92 Tangentes parallèles

a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $g'(x) = 4x - 6$.
$-\dfrac{1}{x^2} = 4x - 6 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$

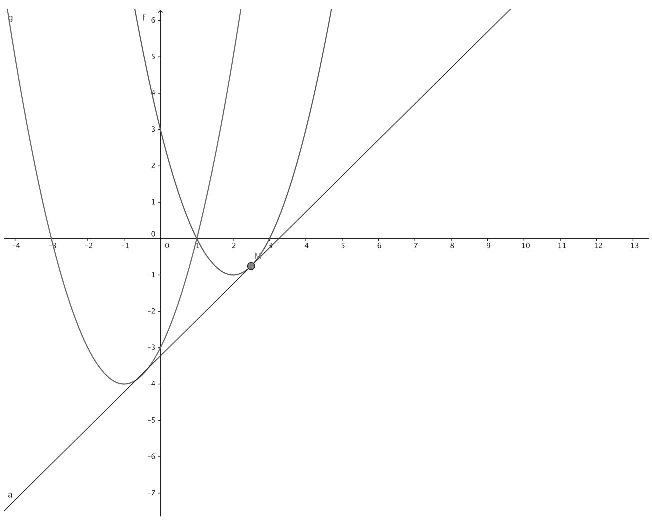
b. $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$.

c. $4x^3 - 6x^2 + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x - 2)$.

Il y a trois valeurs de x pour lesquelles les tangentes sont parallèles : $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

93 Tangentes communes à deux courbes

1.



2. a. $f'(x) = 2x - 4$; $y = (2a - 4)x - a^2 + 3$.

b. $g'(x) = 2x + 2$; $y = (2b + 2)x - b^2 - 3$.
Par identification, on obtient le système.

d. $a = \dfrac{5}{2}$; $b = -\dfrac{1}{2}$ et $y = x - \dfrac{13}{4}$.

94 Prolongement par continuité

a. $g(2) = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b - 7 = 3 \Leftrightarrow 2a + b = 5$.

b. $f'(x) = 2x - 1$; $g'(x) = 2ax + b$.
$f'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 3 = 4a + b$.

c. $a = -1$; $b = 7$.

d. On trace $(\mathscr{C}f)$ et $(\mathscr{C}g)$ et on observe que les deux coïncident en A et possèdent une tangente commune en ce point.

95 Deux points, une même tangente

1. $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$.

a. $y = x$.

b. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0$.
Il y a trois solutions : -1 ; 0 et 1.
Mais pour $x = 1$, l'équation de la tangente est : $y = x + 1$.
Pour $x = 0$, l'équation de la tangente est celle de (T) : $y = x$.

2. a. $f'(x) - f'(m) = -4x^3 + 4x + 4m^3 - 4m$.
$= -4(x^3 - m^3 - x + m)$
$= -4(x - m)(x^2 + mx + m^2 - 1)$.

b. $f'(x) - f'(m) = 0 \Rightarrow x = m$ ou $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$.
Or $x \neq m$. Ainsi l'équation $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ doit avoir au moins une solution.

c. $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow -3m^2 + 4 \geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{\dfrac{4}{3}} \leqslant m \leqslant \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

96 Relativité

1. a. $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1-h} - \dfrac{1}{\sqrt{1}}}{h} = \dfrac{\dfrac{1-\sqrt{1-h}}{\sqrt{1-h}}}{h}$

$= \dfrac{1-\sqrt{1-h}}{h\sqrt{1-h}} = \dfrac{1^2 - (1-h)}{h\sqrt{1-h}(1+\sqrt{1-h})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-h}(1+\sqrt{1-h})}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

b. $f(x) \approx \dfrac{1}{2}x + 1$.

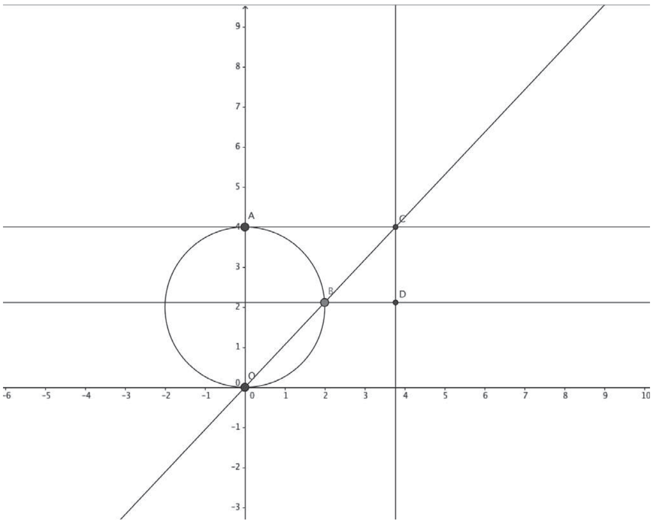
2. Pour des vitesses v très inférieures à celle de la lumière, $\dfrac{v}{c}$ est proche de 0, donc $x = \dfrac{v^2}{c^2}$ est proche de 0. Ainsi, d'après le **1. b.**,

$E_c = (f(x) - 1)mc^2 \approx \dfrac{1}{2}xmc^2 \approx \dfrac{1}{2}mv^2$.

Problèmes

97 La « sorcière d'Agnesi »

1.



2. a. Équation du cercle : $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

$x_B = m \Rightarrow (y_B - 2)^2 = 4 - m^2$. Ainsi, on a deux solutions :

$y_B = 2 - \sqrt{4 - m^2}$ et $y_B = 2 + \sqrt{4 - m^2}$.

b. Équation de la droite (OB) : $y = \dfrac{2 + \sqrt{4 - m^2}}{m}x$.

$y_C = 4 \Rightarrow x_C = \dfrac{4m}{2 + \sqrt{4 - m^2}}$.

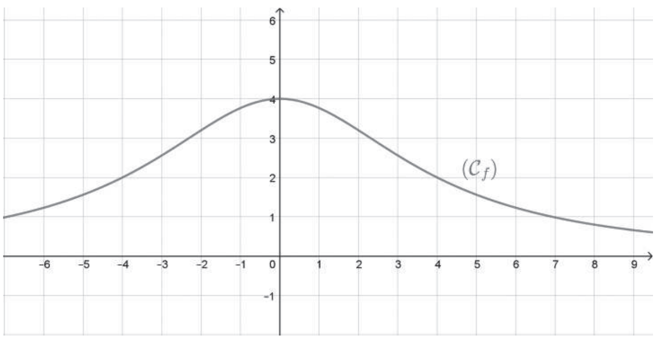
c. $y_D = y_B = 2 + \sqrt{4 - m^2}$; $x_D = x_C = \dfrac{4m}{2 + \sqrt{4 - m^2}}$.

3. a. $f'(x) = \dfrac{-128x}{(x^2 + 16)^2}$.

x		0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	4	↘

b. Maximum global égal à 4 atteint pour $x = 0$.

c.



98 Méthode d'Euler

Partie A

1. a. $M_0(0 ; 1)$; **b.** $y = -2x + 1$.

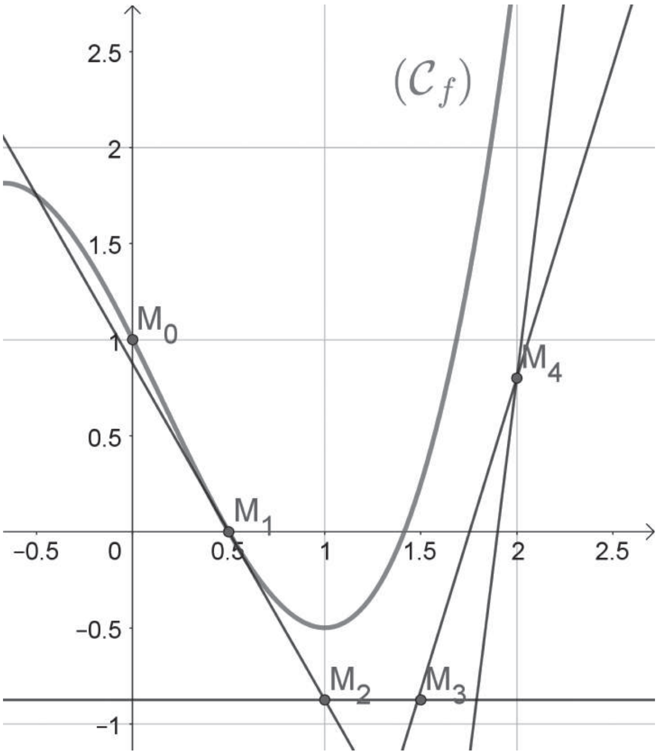
2. a. $M_1(0,5; 0)$; **b.** $y = -1,75x + 0,875$.

3. a. $M_2(1 ; -0,875)$; **b.** $y = -0,875$.

a. $M_3(1,5; -0,875)$; **b.** $y = 3,25x - 5,7$.

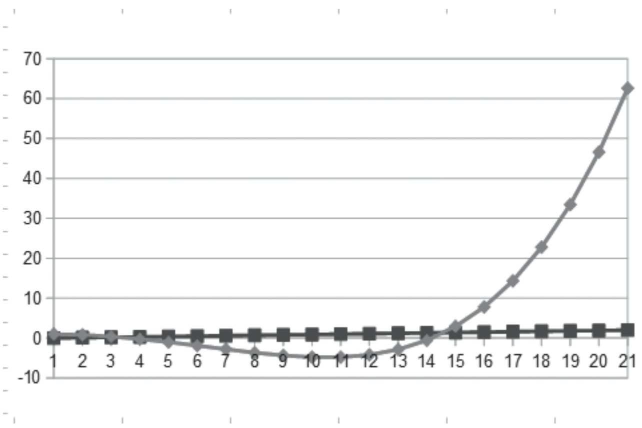
a. $M_4(2 ; 0,8)$; **b.** $y = 8x - 15,2$.

4.



Partie B

a. et **d.**



b. En cellule A4, on a saisi la formule « **=A3+1** ».
En cellule B4, on a saisi la formule « **=A4*B1** ».

c. En cellule C4, on a saisi la formule
« **=C3+B4*(3*B4^2-B4-2** ».

12 Étude de fonctions usuelles

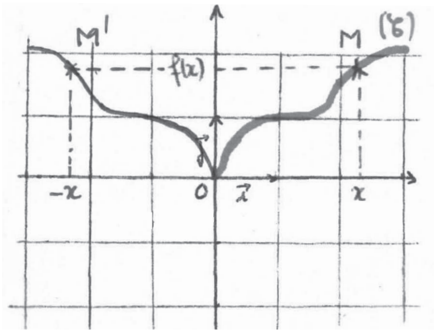
Manuel pages 193 à 210

Activités d'introduction

1 Fonction paire – fonction impaire

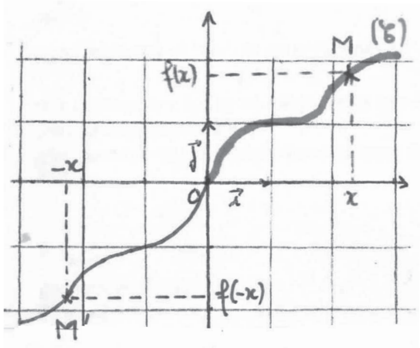
1. a. $M'(-x\,;y)$. **b.** $M''(-x\,;-y)$.

2. a.



• $M'(-x\,;f(-x))$.
• $f(-x) = f(x)$.

b.



• $M''(-x\,;f(-x))$.
• $f(-x) = -f(x)$.

2 Symétrie d'une courbe par rapport à un point

1. a. La courbe $(\mathscr{C})$ semble symétrique par rapport au point $A(2\,;1)$.

b. Pour $\frac{1}{2} \leqslant h \leqslant 3$ on a $2 + \frac{1}{2} \leqslant 2 + h \leqslant 2 + 3$

donc $\frac{5}{2} \leqslant 2 + h \leqslant 5$, ainsi $2 + h \in [\frac{5}{2}\,;5]$ et $2 + h \in \mathscr{D}$.
• Si $2 + h \in \mathscr{D}$ alors :

→ soit $2 + h \in \left[-1\,;\frac{3}{2}\right]$, c'est-à-dire $-1 \leqslant 2 + h \leqslant \frac{3}{2}$;

$-\frac{3}{2} \leqslant -2 - h \leqslant 1$; $4 - \frac{3}{2} \leqslant 4 - 2 - h \leqslant 4 + 1$;

$\frac{5}{2} \leqslant 2 - h \leqslant 5$, donc $2 - h \in \mathscr{D}$;

→ soit $2 + h \in \left[\frac{5}{2}\,;5\right]$, c'est-à-dire $\frac{5}{2} \leqslant 2 + h \leqslant 5$;

$-5 \leqslant -2 - h \leqslant -\frac{5}{2}$;

$4 - 5 \leqslant 4 - 2 - h \leqslant 4 - \frac{5}{2}$; $-1 \leqslant 2 - h \leqslant \frac{3}{2}$,
donc $2 - h \in \mathscr{D}$.

c. • $M'(1\,;0)$ car $A(2\,;1)$ doit être le milieu de $[MM']$;
• $M'\left(6\,;\frac{5}{4}\right)$;
• $M'(2 - h\,;2 - f(2 + h))$.

d. $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à $A(2\,;1)$.
si $M' \in (\mathscr{C})$, c'est-à-dire si, $f(2 - h) = 2 - f(2 + h)$;
c'est-à-dire si $f(2 - h) + f(2 + h) = 2$.

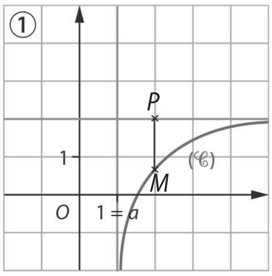
2. a. $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à a à condition que, pour tout nombre réel h tel que $a + h \in \mathscr{D}$, on a $a - h \in \mathscr{D}$.

b. Pour tout h tel que $a + h \in \mathscr{D}$,
$$\frac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b.$$

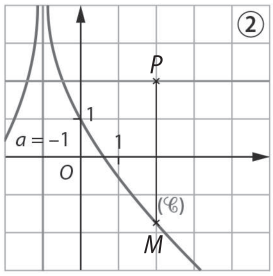
3 Asymptotes parallèles aux axes du repère

1. a. On conjecture que :
Schéma 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$;
Schéma 2 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
Schéma 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$;
Schéma 4 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

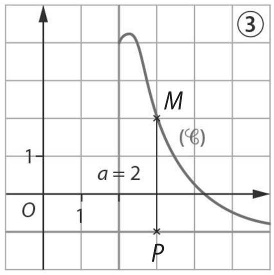
b.



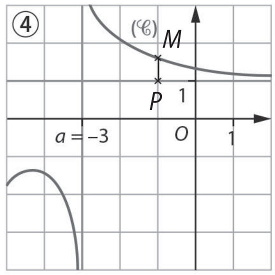
Cette courbe $(\mathscr{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 2$.



Cette courbe $(\mathscr{C})$ ne possède pas d'asymptote en $+\infty$.



Cette courbe $(\mathscr{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = -1$.



Cette courbe $(\mathscr{C})$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

Une courbe ($\mathscr{C}$) représentative d'une fonction f possède, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = b$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

2. a. On conjecture que :

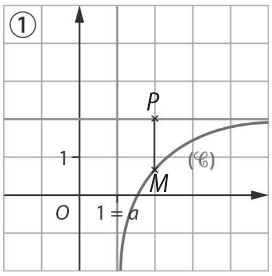
Schéma 1 : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$;

Schéma 2 : $\lim\limits_{x \to -1} x\, f(x) = +\infty$;

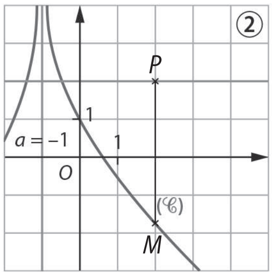
Schéma 3 : $\lim\limits_{x \to 2} (x) = f(2) = 4$;

Schéma 4 : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$.

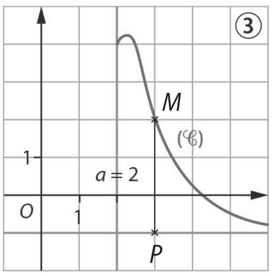
b.



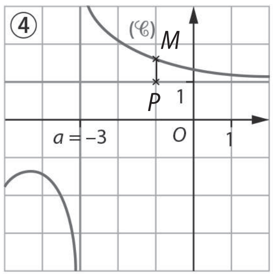
Cette courbe ($\mathscr{C}$) possède une asymptote en 1 d'équation $x = 1$.



Cette courbe ($\mathscr{C}$) possède une asymptote en –1 d'équation $x = -1$.



Cette courbe ($\mathscr{C}$) ne possède pas asymptote en 2.

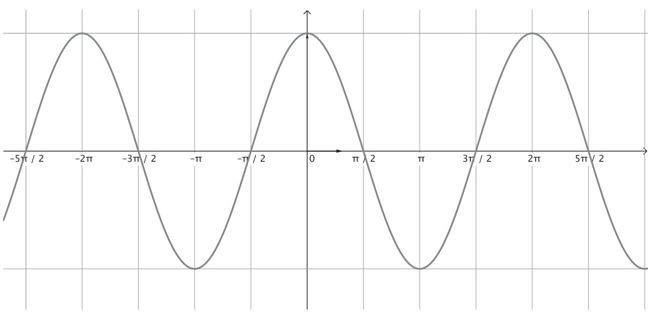


Cette courbe ($\mathscr{C}$) possède une asymptote en –3 d'équation $x = -3$.

Une courbe ($\mathscr{C}$) représentative d'une fonction f possède, en a, une asymptote d'équation $x = a$ lorsque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

4 Les fonctions cosinus et sinus

1. a. à **c.**



d. On conjecture que :

- la fonction cosinus est paire ;
- la fonction cosinus est périodique de période 2π ;
- le tableau de variation sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

x	0	π
$\cos x$	1 ↘	-1

2. Le domaine de définition de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro ;

pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$.

Donc f est paire.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$;

de plus, $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π.

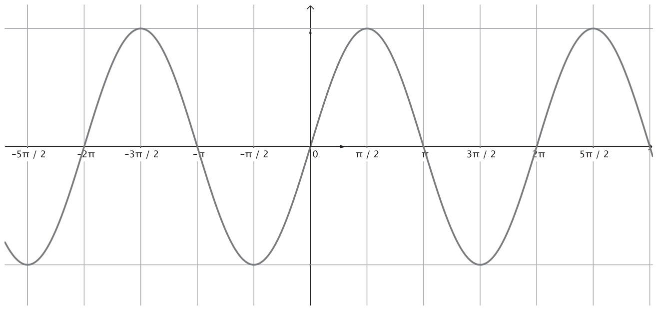
- Puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $f'(x) = -\sin(x) < 0$;

donc f est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

De plus, $f(0) = \cos(0) = 1$ et $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$.

D'où le tableau de variation ci-dessus.

3.



On conjecture que :

- la fonction sinus est impaire ;
- la fonction sinus est périodique de période 2π ;
- le tableau de variation sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0

2. Le domaine de définition de la fonction sinus est $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro ;

pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$.

Donc f est impaire.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$;

de plus $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π.

- Puisque, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $f'(x) = \cos(x)$.

Or, $\cos(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0 ; \pi/2]$, donc f est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, donc f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

De plus, $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$.
D'où le tableau de variation ci-dessus.

Savoir-faire

3 $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2(-x)^3 + 1 = -2x^3 + 1$ donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.
f n'est ni paire, ni impaire.

4 $[-1 ; 1]$ est symétrique par rapport à zéro.
Pour tout x de $[-1, 1]$, $g(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)$.
f est paire.

5 $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 5(-x)^2 - (-x) = 5x^2 + x$, donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.
f n'est ni paire, ni impaire.

6 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est symétrique par rapport à zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(-x) = 3(-x) - \frac{1}{-x} = -3x + \frac{1}{x}$ donc $f(-x) = -f(x)$.
f est impaire.

7 Pour tout nombre réel h tel que $2 + h \in [-2 ; 6]$, on a $\quad -2 \leqslant 2 + h \leqslant 6$; $\quad -6 \leqslant -2 - h \leqslant 2$;
$4 - 6 \leqslant 4 - 2 - h \leqslant 4 + 2$; $\quad -2 \leqslant 2 - h \leqslant 6$,
donc $2 - h \in [-2 ; 6]$.
De plus,
$f(2 - h) = (2 - h - 2)^3 + 5 = (-h)^3 + 5 = -h^3 + 5$
et $f(2 + h) = (2 + h - 2)^3 + 5 = h^3 + 5$.
Ainsi, $\dfrac{f(2-h) + f(2+h)}{2} = \dfrac{-h^3 + 5 + h^3 + 5}{2} = 5$.
Finalement, $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport au point $A(2 ; 5)$.

8 Pour tout nombre réel h tel que $-3 + h \in [-6 ; 0]$, on a : $\quad -6 \leqslant -3 + h \leqslant 0$; $\quad 0 \leqslant 3 - h \leqslant 6$;
$-6 + 0 \leqslant -6 + 3 - h \leqslant -6 + 6$; $\quad -6 \leqslant -3 - h \leqslant 0$,
donc $-3 - h \in [-6 ; 0]$.
De plus,
$f(-3 - h) = \dfrac{3}{(-3 - h + 3)^2} = \dfrac{3}{(-h)^2} = \dfrac{3}{h^2}$
et $f(-3 + h) = \dfrac{3}{(-3 + h + 3)^2} = \dfrac{3}{h^2}$.
Ainsi, $f(-3 - h) = f(-3 + h)$,
Finalement, $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = -3$.

11 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$, donc (Δ) d'équation $x = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

12 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x}{x} = 7$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 7$, donc (Δ) d'équation $y = 7$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

13 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$, donc (Δ) d'équation $y = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

14 **a.** On conjecture que (Δ) est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7 - x^2}{x + 3} + x - 3$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} x \dfrac{7 - x^2}{x + 3} + \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3}$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7 - x^2 + x^2 - 9}{x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x + 3} = 0$.
Ainsi, (Δ) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

16 **a.** Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x + \pi) = \cos\left(2(x + \pi) + \dfrac{\pi}{3}\right)$;
$f(x + \pi) = \cos\left(2x + 2\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$;
$f(x + \pi) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
Ainsi, $f(x + \pi) = f(x)$.
f est périodique de période π.

b. • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$.
• Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 5\cos\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \pi\right)$
$g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 5\cos\left(3x + 3 \times \dfrac{2\pi}{3} - \pi\right)$
$g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 5\cos(3x + 2\pi - \pi)$
$g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 5\cos(3x - \pi)$
Ainsi, $g\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = g(x)$.
g est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

c. • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + 10\pi \in \mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x + 10\pi) = -\sin\left(\dfrac{x+10\pi}{5} + 3\right)$

$h(x + 10\pi) = -\sin\left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{10\pi}{5} + 3\right)$

$h(x + 10\pi) = -\sin\left(\dfrac{x}{5} + 2\pi + 3\right) = -\sin\left(\dfrac{x}{5} + 3\right)$.

Ainsi, $h(x + 10\pi) = h(x)$.

h est périodique de période 10π.

17 **a.** • Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R}$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(x + 2\pi) = 3\cos\left(2(x + \pi) - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 3\cos\left(2x + 2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= f(x)$.

f est donc périodique de période π.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3 \times 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= -6\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$f'(x) \geqslant 0$ lorsque $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant 0$,

c'est-à-dire lorsque $-\pi \leqslant 2x - \dfrac{\pi}{3} \leqslant 0$;

$\dfrac{\pi}{3} - \pi \leqslant 2x \leqslant 0 + \dfrac{\pi}{3}$; $\quad -\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$

ou lorsque $\pi \leqslant 2x - \dfrac{\pi}{3} \leqslant 2\pi$; $\quad \dfrac{\pi}{3} + \pi \leqslant 2x \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi$;

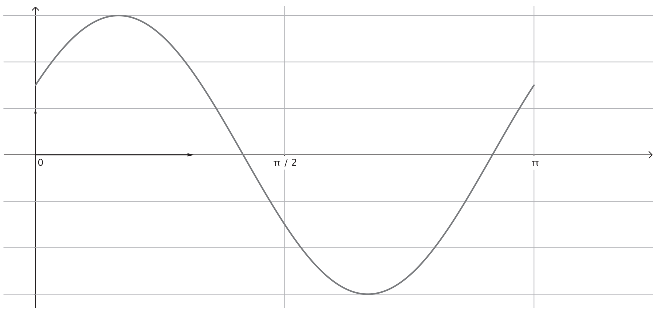
$\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{3}$.

De même $f'(x) \leqslant 0$ lorsque $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$, c'est-à-dire lorsque $0 \leqslant 2x - \dfrac{\pi}{3} \leqslant \pi$; $\quad \dfrac{\pi}{3} + 0 \leqslant 2x \leqslant \pi + \dfrac{\pi}{3}$;

$\dfrac{\pi}{3} \leqslant 2x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}$; $\quad \dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$.

D'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↗	3	↘	−3	↗	$\frac{3}{2}$



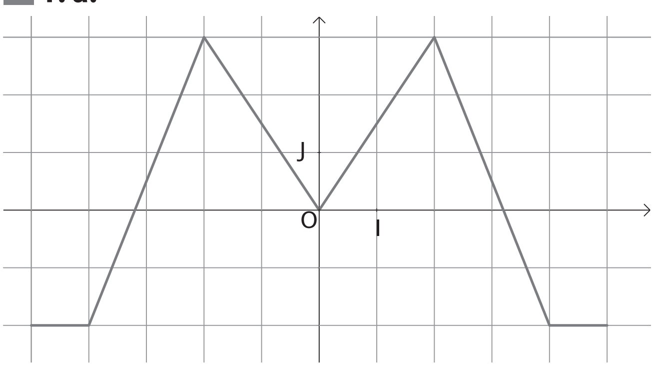
Exercices d'entraînement

Parité, périodicité

18 ① f est ni l'un, ni l'autre. ② f est paire.
③ f est paire. ④ f est paire.
⑤ f est ni l'un, ni l'autre. ⑥ f est impaire.

19 ① g est périodique de période 2.
② g n'est pas périodique.
③ g est périodique de période 3.
④ g n'est pas périodique.

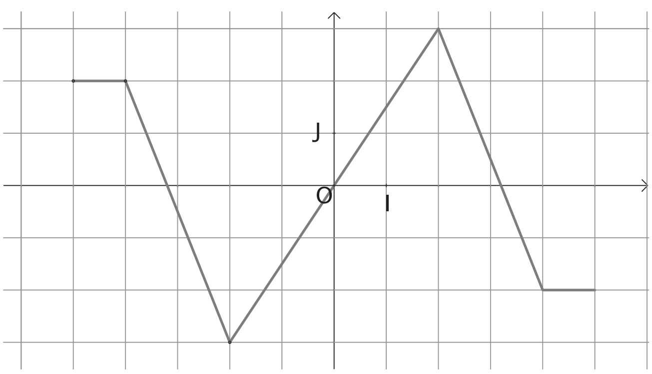
20 **1. a.**



b.

x	−5		−4		−2		0		2		4		5
$f(x)$	−2	→	−2	↗	3	↘	0	↗	3		−2	→	−2

2. a.



b.

x	−5		−4		2		2		4		5
$f(x)$	2	→	2	↘	−3	↗	3	↘	−2	→	−2

21 **a.** Dans le cas où f est paire :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ pour } x \geqslant 0 \\ -2x + 1 \text{ pour } x \leqslant 0. \end{cases}$$

b. Dans le cas où f est impaire :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \text{ pour } x \geqslant 0 \\ 2x - 1 \text{ pour } x \leqslant 0 \end{cases}$$

22 **a.** Dans le cas où f est paire :

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 5 \text{ si } x \in [-3\,;-1] \\ 3 \text{ si } x \in [-1\,;0] \\ 3 \text{ si } x \in [0\,;1] \\ 4x - 5 \text{ si } x \in [1\,;3]. \end{cases}$$

b. Dans le cas où f est impaire :

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5 \text{ si } x \in [-3\,;-1] \\ 3 \text{ si } x \in [-1\,;0] \\ -3 \text{ si } x \in [0\,;1] \\ 4x - 5 \text{ si } x \in [1\,;3]. \end{cases}$$

23 • La fonction carré $f : x \longmapsto x^2$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, donc f est paire.

• La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, donc f est impaire.

• La fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Son domaine de définition $[0\,;+\infty[$ n'est pas centré en zéro, donc f n'est ni paire, ni impaire.

• La fonction inverse $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\, \cup \,]0\,;+\infty[$ est centré en zéro.

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, donc f est impaire.

• La fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$.

Son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

De plus, pour tout de x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, donc f est paire.

24 **a.** $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$f(-x) = (-x) - \dfrac{2}{(-x)} = -x + \dfrac{2}{x} = -f(x)$. f est impaire.

b. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(-x) = -4(-x)^3 + (-x) = 4x^3 - x = -f(x)$. f est impaire.

c. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x)$. f est paire.

d. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ n'est pas centré en zéro, donc f est ni paire, ni impaire.

e. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = 5(-x)^3 - (-x) + 1 = -5x^3 + x + 1$,
donc $f(-x) \neq f(x)$, f n'est pas paire et $f(-x) \neq -f(x)$, f n'est pas impaire.

f. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$f(-x) = \dfrac{3(-x) + 1}{-x} = \dfrac{-3x + 1}{-x} = \dfrac{3x - 1}{x}$, donc $f(-x) \neq f(x)$, f n'est pas paire et $f(-x) \neq -f(x)$, f n'est pas impaire.

g. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = (-x)\,|(-x)| = -x\,|x| = -f(x)$. f est impaire.

h. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = \dfrac{2|(-x)|}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{2|x|}{x^2 + 1} = f(x)$. f est paire.

25 • La fonction cosinus $f : x \longmapsto \cos x$.
$\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.
f est paire.

• La fonction sinus $f : x \longmapsto \sin x$.
$\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est centré en zéro.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.
f est impaire.

• La fonction tangente $f : x \longmapsto \tan x$.

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est centré en zéro.

Pour tout x et $\mathcal{D}$, $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$
$= -f(x)$. f est impaire.

26 **a.** f est paire ; **b.** f est impaire ; **c.** f est paire ;

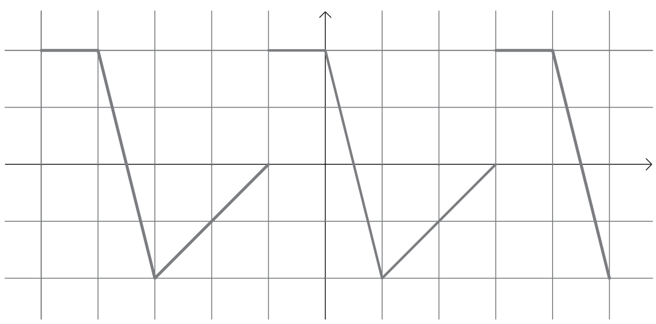
d. f est ni paire, ni impaire ; **e.** f est ni paire, ni impaire ;

f. f est impaire ; **g.** f est paire ; **h.** f est paire.

27 **a.** π est la plus petite période de f.

b. Tous les multiples (non nul) de π sont des périodes de f : 2π, 3π, 4π…

28



29 • Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Donc la fonction cosinus est périodique de période 2π.
• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Donc la fonction sinus est périodique de période 2π.
• Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$ et
$\tan(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.
Donc la fonction tangente est périodique de période π.

30 **a.** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) = [\sin(x + \pi)]^2 = (-\sin x)^2$
$= \sin^2 x$ donc $f(x + \pi) = f(x)$.
f est périodique de période π.
b. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + 2\pi) = x + 2\pi + \cos(x + 2\pi) = x + 2\pi + \cos x$
$\neq f(x)$.
f n'est pas périodique de période 2π.
c. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $x + \frac{\pi}{2} \notin \mathscr{D}_f$, donc f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{2}$.
d. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi \in \mathbb{R}$
et $f(x + \pi) = \cos^2(x + \pi) = (\cos(x + 2))^2$
$= (-\cos(x))^2 = \cos^2(x) = f(x)$.
f est périodique de période π.
e. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$
et $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - \sin(3x + \pi)$
$= 1 + \sin 3x \neq f(x)$.
f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{3}$.
f. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$ et
$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 4\cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$
$= \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 4\cos(4x + \pi)$
$= \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos 4x \neq f(x)$.
f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{4}$.
g. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 8\pi \in \mathbb{R}$ et
$f(x + 8\pi) = \cos^2\left(\frac{x + 4\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$
$= \left[\cos\left(\frac{x}{4} + \pi\right)\right]^2 = \left[-\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]^2 = \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = f(x)$.
f est périodique de période 4π.
h. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $x + \pi \in \mathscr{D}_f$
et $f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) + \tan(x + \pi)$
$= \sin(2x + 2\pi) + \tan(x + \pi)$
$= \sin 2x + \tan x = f(x)$.
f est périodique de période π.

31 ① **Vrai.** Pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $x + \pi \in \mathscr{D}_f$
donc $x + \pi + \pi = x + 2\pi \in \mathscr{D}_f$
et $f(x + 2\pi) = f(x + \pi + \pi) = f(x + \pi) = f(x)$.
Donc f est périodique de période 2π.
② Faux, par exemple, la fonction cosinus est périodique de période 2π, mais n'est pas périodique de période π.
③ Faux, par exemple la fonction sinus est périodique de période 2π et impaire, mais n'est pas périodique de période π.

32 **a.** f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.
b. g est périodique de période 10.
c. h est périodique de période $\frac{\pi^2}{2}$.
d. i est périodique de période 12π.

33 **a.** Par exemple, $f : x \longmapsto \cos(2x)$.
b. Par exemple, $f : x \longmapsto \sin(4x)$.

Symétrie d'une courbe

34 Dans chacun des cas, on note A', B' et M' les symétriques des points A, B et M.
a. $A'(1 ; -3)$, $B'(-4 ; -5)$, $M'(-x ; -y)$.
b. $A'(1 ; 3)$, $B'(-4 ; 5)$, $M'(-x ; y)$.
c. $A'(3 ; 1)$, $B'(-2 ; -1)$, $M'(2 - x ; 4 - y)$
car il faut que $\frac{x + x'}{2} = 1$ et $\frac{y + y'}{2} = 2$.
d. $A'(7 ; 3)$, $B'(2 ; 5)$, $M'(6 - x ; y)$
car il faut que $\frac{x + x'}{2} = 3$.

35 ① $(\mathscr{C}_1)$ est symétrique par rapport au point I et $(\mathscr{C}_2)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = 1$.
② $(\mathscr{C}_1)$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{5}{2}$ et $(\mathscr{C}_2)$ est symétrique par rapport au point $A(-2 ; 1)$.

36
a.

x	-2	-1	3	7	8
$f(x)$	7 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	-7

b.

x	-2	-1	3	7	8

$f(x)$	7	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	7

37 **a.** Pour tout $h \neq 0$, si $2 + h \in \mathscr{D}$, alors $2 - h \in \mathscr{D}$ et

$$\frac{f(2-h)+f(2+h)}{2} = \frac{\left(3+\frac{1}{-h}\right)+\left(3+\frac{1}{h}\right)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(2\,;3)$.

b. Pour tout $h \neq 0$, si $-2 + h \in \mathscr{D}$, alors $-2 - h \in \mathscr{D}$ et

$$\frac{f(2-h)+f(2+h)}{2} = \frac{(-h)^3+1+h^3+1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(-2\,;1)$.

c. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\pi + h \in [0\,;2\pi]$, c'est-à-dire $0 \leqslant \pi + h \leqslant 2\pi$; $-\pi \leqslant h \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant -h \leqslant \pi$;
$0 \leqslant \pi - h \leqslant 2\pi$

et $\frac{f(\pi-h)+f(\pi+h)}{2} = \frac{3\sin(\pi-h)-5+3\sin(\pi+h)-5}{2}$

$= \frac{3\sin h - 5 - 3\sin h - 5}{2} = -\frac{10}{2} = -5.$

$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à $\Omega(\pi\,;-5)$.

38 **a.** Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $1 + h \in \mathbb{R}$, on a $1 - h \in \mathbb{R}$ et $f(1+h) = 5h^2 + 3$ et $f(1-h) = 5(-h)^2 + 3$
donc $f(1+h) = f(1-h)$.
$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = 1$.

b. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $-3 + h \in \mathbb{R}$,
on a $-3 - h \in \mathbb{R}$ et $f(-3+h) = |2(-3+h)+6| = |2h|$
et $f(-3-h) = |2(-3-h)+6| = |-2h| = |2h|$,
donc $f(-3+h) = f(-3-h)$.
$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -3$.

c. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\pi + h \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$,

$\frac{\pi}{2} \leqslant \pi + h \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$-\frac{\pi}{2} \leqslant -h \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - h \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

$f(\pi+h) = 5\cos(2(\pi+h)) = 5\cos(2\pi+2h) = 5\cos(2h)$
et $f(\pi-h) = 5\cos(2(\pi-h)) = 5\cos(2x-2h)$
$= 5\cos(-2h) = 5\cos(2h)$,
donc $f(\pi+h) = f(\pi-h)$.
$(\mathscr{C})$ est donc symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = \pi$.

39 **a.** On conjecture que la courbe $(\mathscr{C})$ représentée est symétrique par rapport au point $I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$.

b. $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$.

Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2} + h \neq 0$, et $\frac{1}{2} + h \neq 1$, on a $h \neq -\frac{1}{2}$ et $h \neq \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} - h \neq 0$ et $\frac{1}{2} - h \neq 1$.

$$f\left(\frac{1}{2}+h\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}+h} + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+h\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+h} + \frac{1}{\frac{1}{2}-h}$$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{2}\,]\,h\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}-h} + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-h\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}-h} + \frac{1}{\frac{1}{2}+h},$$

donc $f\left(\frac{1}{2}+h\right) = f\left(\frac{1}{2}-h\right)$.

Cela valide la conjecture émise au **a.**

40 On utilise des démonstrations analogues à celles des exercices 38 et 39 pour justifier que :

a. $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -1$.

b. $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -3$.

c. $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = -3$.

d. $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x = 1$.

Asymptote à une courbe

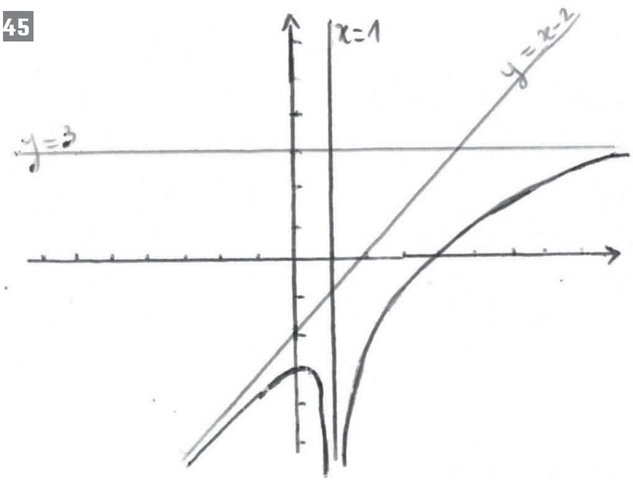
41 • Les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ ont pour équations $y = 1$ et $x = -2$.
• Les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ ont pour équations $y = -1$ et $x = 1$.

42 • De $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, on déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
• De $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = +\infty$, on déduit que la droite d'équation $x = -3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

43 • Les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ ont pour équations $y = x + 1$ et $x = -1$.
• Les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ ont pour équations $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et $x = 2$.

44 • De $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (2x+1) = 0$, on déduit que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
• De $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 4 = 0$, on déduit que la droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

45



46 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f.

47 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x-3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{|x+1|} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{|x+1|} = 0$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{|x+1|} = +\infty$, donc les droites d'équations $y = 0$ et $x = -1$ sont asymptotes à la courbe.

c. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{5}{\sqrt{x-2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc les droites d'équations $y = 0$ et $x = 2$ sont asymptotes à la courbe.

48 Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{2x^2-3x+1}{x} - (2x-3) = 2x - 3 + \frac{1}{x} - (2x-3) = \frac{1}{x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

49 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-3x + 5) = x^2$.

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc (Δ) n'est asymptote à $(\mathscr{C})$ ni en $-\infty$, ni en $+\infty$.

b. Pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) - (x+1) = \frac{x^2+2x+7}{x+1} - \frac{(x+1)(x+1)}{x+1}$$
$$= \frac{x^2+2x+7-x^2-2x-1}{x+1} = \frac{6}{x+1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x+1} = 0$, donc (Δ) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) - (3x+7) = \frac{3x^2-13x-10}{x+2} - (3x+7)$$
$$= \frac{3x^2-13x-10-(3x-7)(x-2)}{x+2}$$
$$= \frac{3x^2-13x-10-3x^2+x+14}{x+2} = \frac{14}{x+2}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{14}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{14}{x+2} = 0$, donc (Δ) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

50 **a.** Dans le cas où f est paire, pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-2x+1) = \lim_{x\to-\infty} f(-x) - (2(-x)+1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) - (-2x+1) = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

b. Dans le cas où f est impaire, pour tout x de $\mathscr{D}_f$ $f(-x) = -f(x)$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x\to-\infty} -[-f(x) - (-2x+1)]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -[f(-x) - (2(-x)+1)]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} -[f(x) - (2x+1)] = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

Fonctions polynômes

51 **a.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d.

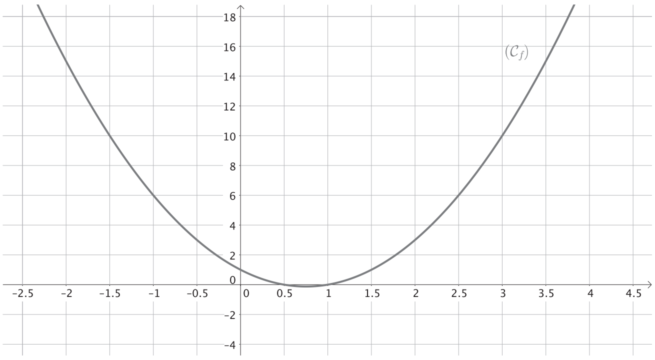
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

52 Dans chacun des cas, on étudie le signe de la dérivée f' afin d'en déduire les variations de f.

On complète le tableau de variation grâce aux limites aux bornes de l'ensemble de définition. Grâce à la calculatrice, on utilise un tableau de valeurs pour tracer la courbe représentative de f dans un repère.

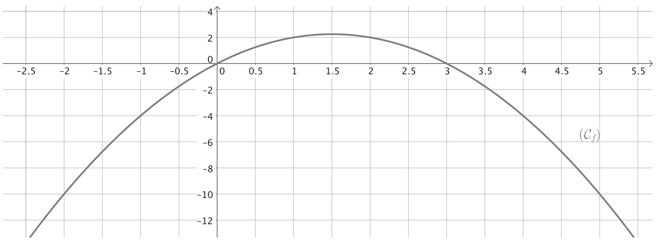
a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$



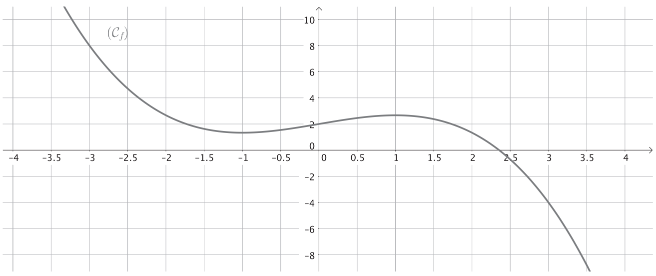
b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2x + 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



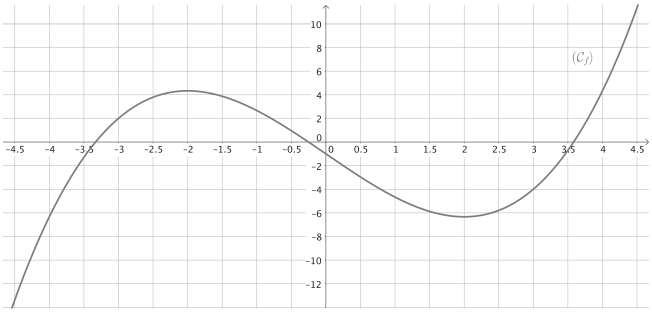
c. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -x^2 + 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$-\infty$



d. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 4$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	$-\frac{19}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



53 **a.** • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(-x) = 0{,}2(-x^2) + 0{,}4 = 0{,}2x^2 + 0{,}4 = f(x)$, donc f est paire.

b. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

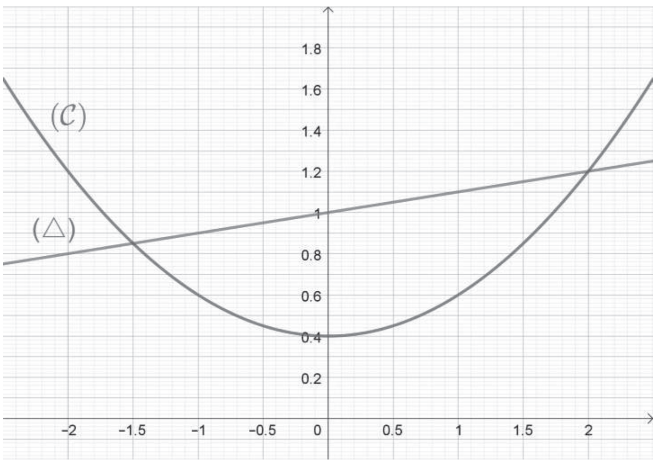
c. $f(x) = 0{,}1x + 1 \Leftrightarrow 0{,}2x^2 - 0{,}1x - 0{,}6 = 0$

$\Delta = 0{,}49 = 0{,}7^2$, les solutions de cette équation sont $x_1 = \dfrac{0{,}1 - 0{,}7}{2 \times 0{,}2} = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{0{,}1 + 0{,}7}{2 \times 0{,}2} = 2$.

$f(x_1) = 0{,}85$ et $f(x_2) = 1{,}2$.

Les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (Δ) sont $A(2\,;1{,}2)$ et $B\left(-\dfrac{3}{2}\,;0{,}85\right)$.

d.



54 • $A(-2\,;5) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow a \times (-2)^2 + b \times (-2) + c = 5$
$\Leftrightarrow 4a - 2b + c = 5.$

• $B(2\,;-3) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow a \times 2^2 + b \times 2 + c = -3$
$\Leftrightarrow 4a + 2b + c = -3.$

• La tangente en B à $(\mathscr{C})$ est parallèle à (Oy), donc $f'(2) = 0$.

Or $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2a \times 2 + b = 0$
$\Leftrightarrow 4a + b = 0.$

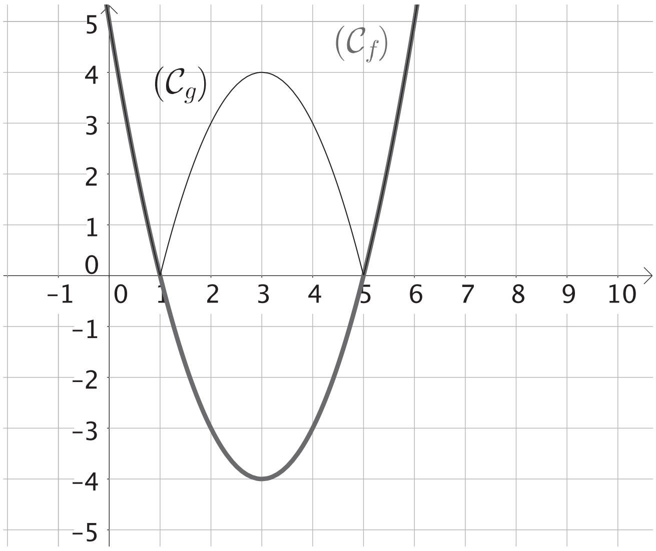
On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

ce qui donne, après calculs $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

Ainsi, $(\mathscr{C})$ a pour équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

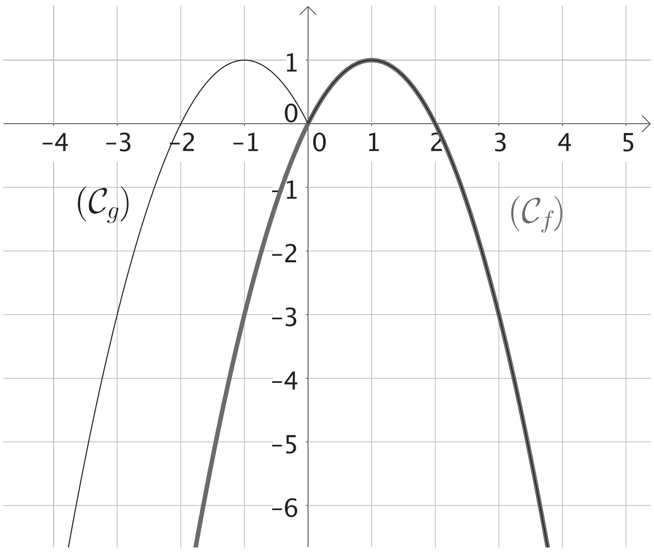
55 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ lorsque } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) \text{ lorsque } f(x) \leqslant 0. \end{cases}$



b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$,

donc $g(x) = -|x|^2 + 2|x| = f(|x|)$.

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = f(x)$ et puisque g est paire, on en déduit $(\mathscr{C}_g)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.



56 • $A(-3\,;-1) \in (\mathscr{C})$

$\Leftrightarrow a \times (-3)^3 + b \times (-3)^2 + c \times (-3) + d = -1$

$\Leftrightarrow -27a + 9b - 3c + d = 1$

• $B(1\,;-1) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow a + b + c + d = -1$.

• $O(0\,;0) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow d = 0$.

• La tangente en B à $(\mathscr{C})$ est parallèle à (Oy), donc $f'(1) = 0$.

Or, $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a \times 1^2 + 2b \times 1 + c = 0$

$\Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = -1 \\ a + b + c + d = -1 \\ d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

ce qui donne, après calculs $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{5}{3} \\ d = 0 \end{cases}$

• Ainsi, $(\mathscr{C})$ a pour équation $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$.

57 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}$,

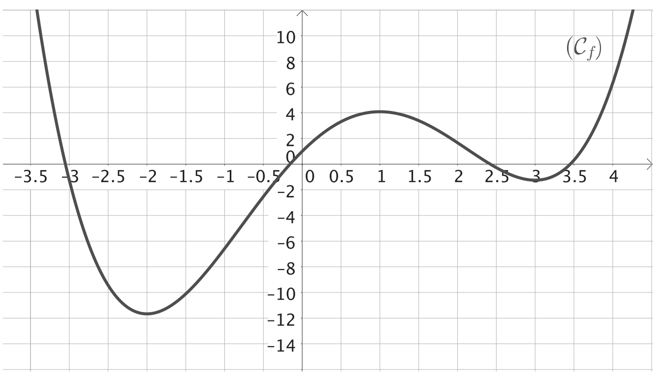
$(x-3)(x-1)(x+2) = (x-3)(x^2 - x + 2x - 2)$
$= (x-3)(x^2 + x - 2)$
$= x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6$
$= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

On utilise la réponse au **a.** pour déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

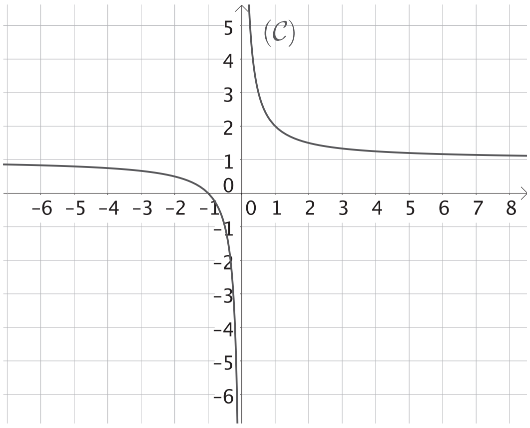
x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{49}{12}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c.



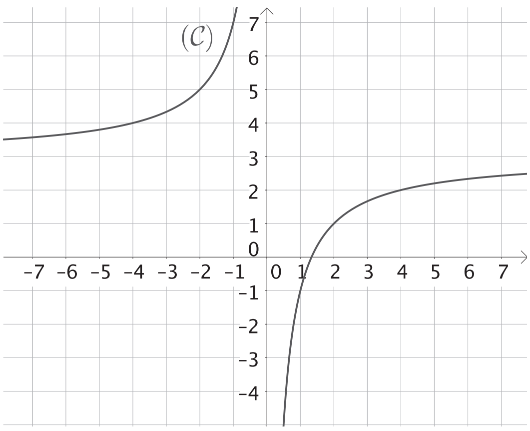
58 **a.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



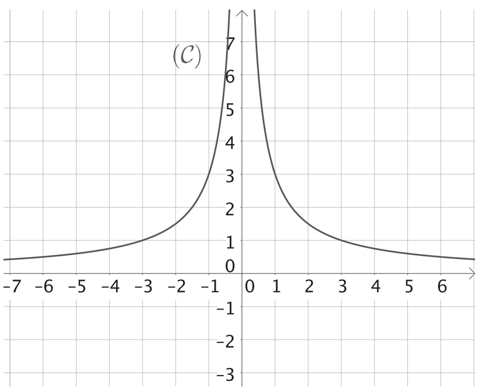
b.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3



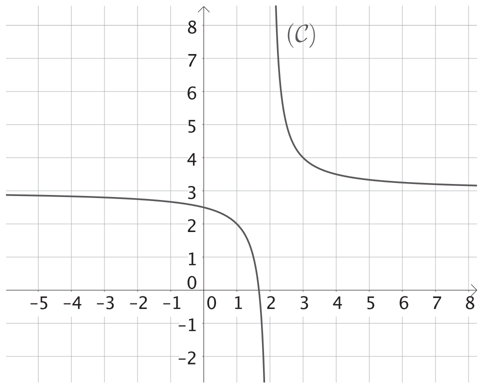
c.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



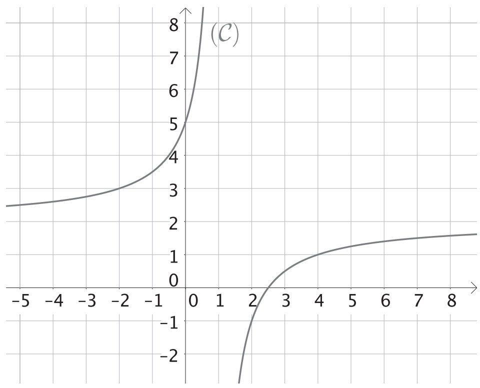
d.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3



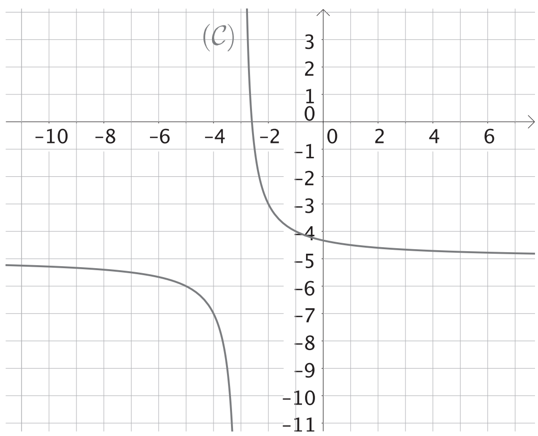
59 **a.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2



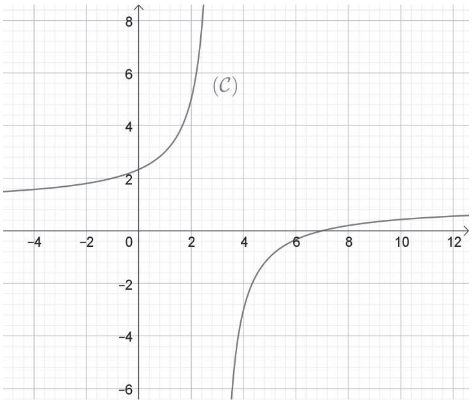
b.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-5



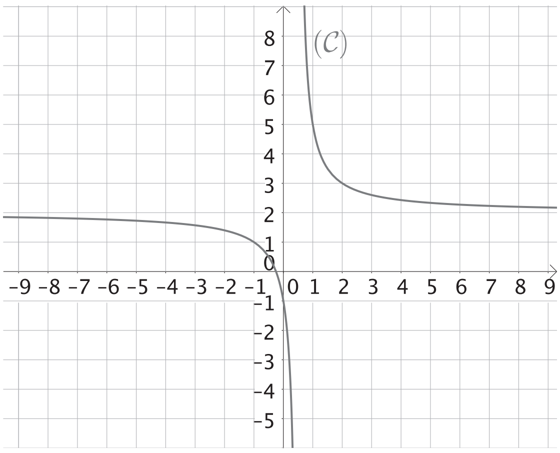
c.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)=\dfrac{4}{(3-x)^2}$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$



d.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)=\dfrac{-6}{(2x-1)^2}$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$



60 **a.** Pour tout $x \neq 2$,

$a+\dfrac{b}{x-2}=\dfrac{a(x-2)+b}{x-2}=\dfrac{ax-2a+b}{x-2}$,

par identification avec $f(x)$, on trouve que

$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=2 \\ b=7. \end{cases}$

b. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;

• $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$,

donc les droites (Δ) d'équation $y=2$ et (Δ') d'équation $x=2$ sont asymptotes à ($\mathscr{C}$).

c. • Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ') a pour coordonnées (2 ; 2).

• Pour tout $x \neq 2$, $f(2-h)=2+\dfrac{7}{-h}$ et $f(2+h)=2+\dfrac{7}{h}$,

donc $\dfrac{f(2-h)+f(2+h)}{2}=2$, ce qui prouve que I est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

61 **a.** Pour tout $x \neq 1$,

$a+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+b}{x-1}=\dfrac{ax-a+b}{x-1}$,

par identification avec $h(x)$, on trouve que

$\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=2 \\ b=-3. \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$;

• $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x)=-\infty$, donc les droites ($\Delta$) d'équation $y=2$ et (Δ') d'équation $x=1$ sont asymptotes à ($\mathscr{C}$).

• Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ') a pour coordonnées (1 ; 2).

• Pour tout $x \neq 1$,

$g(1-h)=2-\dfrac{3}{-h}$ et $g(1+h)=2-\dfrac{3}{h}$,

donc $\dfrac{g(1-h)+g(1+h)}{2}=2$, ce qui prouve que I est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

b. Pour tout $x \neq -3$,

$a+\dfrac{b}{2x+6}=\dfrac{a(2x+6)+b}{2x+6}=\dfrac{2ax+6a+b}{2x+6}$,

par identification avec $h(x)$, on trouve que

$\begin{cases} 2a=1 \\ 6a+b=4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1. \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\dfrac{1}{2}$;

• $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} h(x)=+\infty$, donc les droites ($\Delta$) d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ et (Δ') d'équation $x=-3$ sont asymptotes à ($\mathscr{C}$).

• Le point d'intersection I de ces asymptotes (Δ) et (Δ') a pour coordonnées $\left(-3\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

• Pour tout $x \neq -3$,

$h(-3-h)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{-h}$ et $h(-3+h)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{h}$,

donc $\dfrac{h(-3-h)+h(-3+h)}{2}=\dfrac{1}{2}$, ce qui prouve que I est centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

62 **a.** Le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=-\infty$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

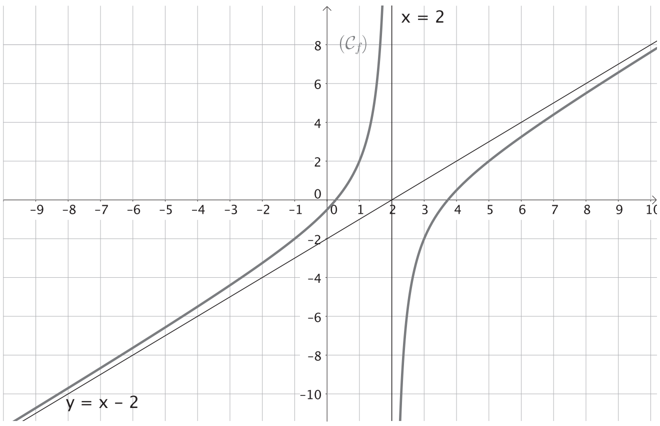
$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+1)\times 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}.$$

On étudie le signe de $x^2 - 4x + 7$ à l'aide du discriminant $\Delta = -12 < 0$. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

(On peut également montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$).



b. • Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = +\infty$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$,

$$f'(x) = \frac{18x(x-3)-(9x^2-1)\times 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2-54x+1}{(x-3)^2}.$$

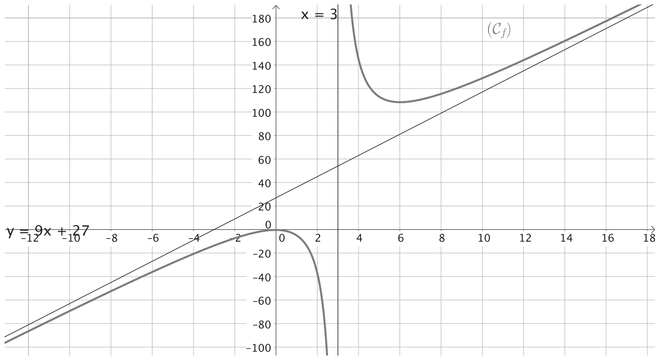
On étudie le signe de $9x^2 - 54x + 1$ à l'aide du discriminant $\Delta = 2\,880 > 0$ les racines de $9x^2 - 54x + 1$ sont

$$x_1 = \frac{54-\sqrt{2\,880}}{18} < 3 \text{ et } x_2 = \frac{54+\sqrt{2\,880}}{18} > 3$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	x_1		3		x_2	$+\infty$
$f'(x)$		0		‖		0	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(x_1) \approx -0{,}34$	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$f(x_2) \approx 108{,}34$	$\nearrow +\infty$

(On peut également montrer que la droite d'équation $y = 9x + 27$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$).



63 **a.** Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

Par identification avec $f(x)$, on obtient le système
$\begin{cases} a+1 \\ 2a+b=1 \\ 2b+c=3 \end{cases}$ dont les solutions sont $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=5. \end{cases}$

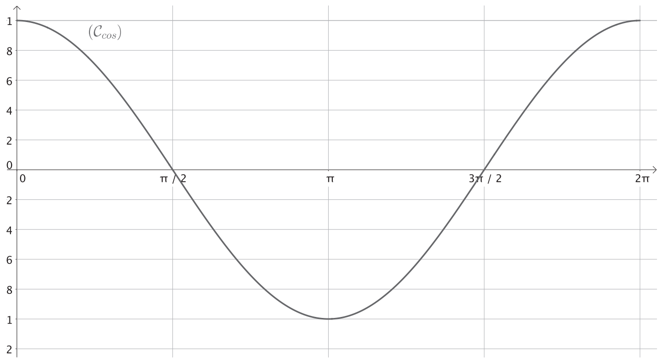
Ainsi, pour tout $x \neq -2$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{5}{x+2}$.

b. • $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

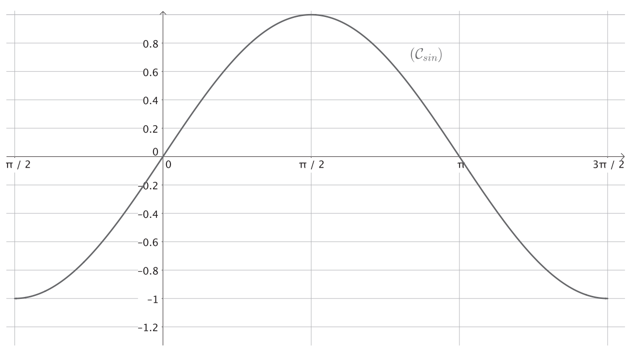
• $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x+2} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(f(x) - (x-2)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x+2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

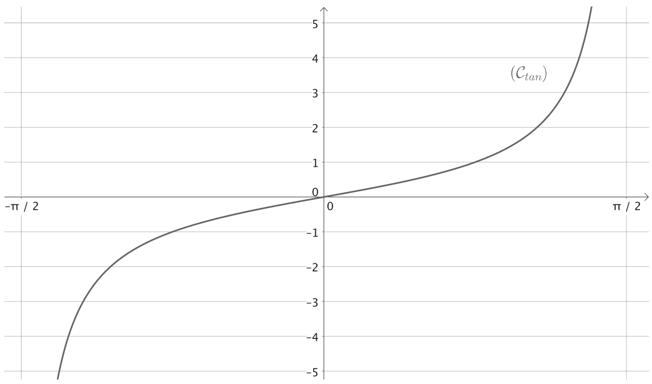
64 **a.**



b.



c.



65 • Pour f et f_1 :

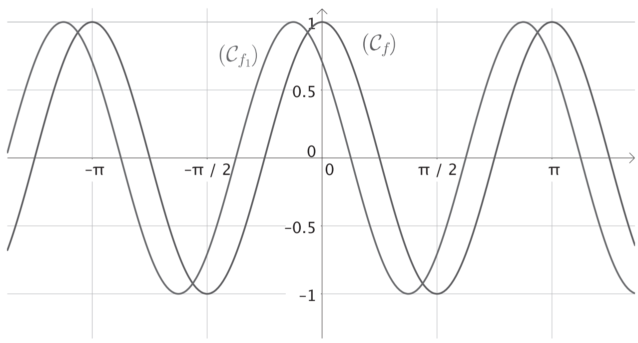
a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. f est de période π et est paire.

Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f'(x) = -2 \sin 2x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

b. • $(\mathscr{C}_{f1})$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}\,;0\right)$.



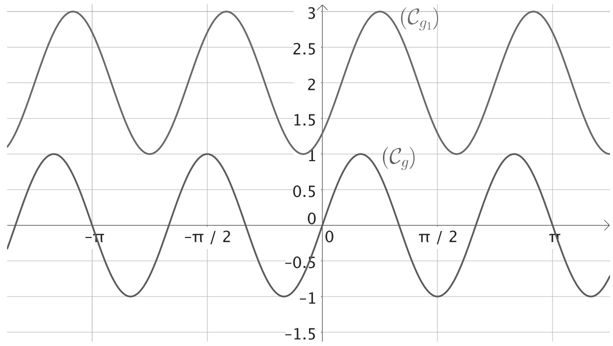
• Pour g et g_1 :

a. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$; g est de période $\frac{2\pi}{3}$ et est impaire. Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

$g'(x) = 3 \cos 3x$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$g'(x)$	3	$+$	0	$-$	-3
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b. $(\mathscr{C}_{g1})$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\,;3\right)$.



66 **a.** $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(2(-x))$
$= -2\sin(x) + \sin(-2x)$
$= -2\sin x - \sin 2x$
$= -f(x)$ donc f est impaire.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.

De plus, $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi))$
$= 2\sin x + \sin(2x + 4\pi)$
$= 2\sin x + \sin 2x = f(x)$ donc f est périodique de période 2π.

On peut donc restreindre l'étude à l'intevalle $[0\,;\pi]$.

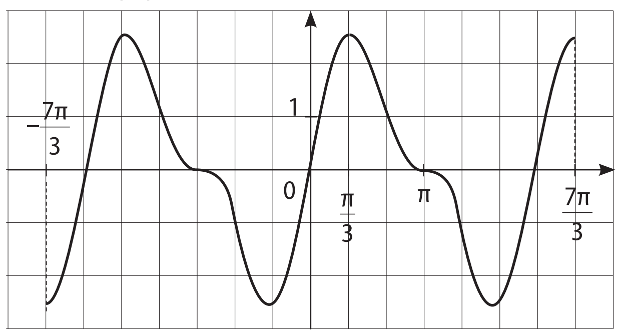
b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$
$= 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1)$
$= 2\cos x + 4\cos^2 x - 2$.

Or $2(1 + \cos x)(2\cos x - 1) = (2 + 2\cos x)(2\cos x - 1)$
$= 4\cos x - 2 + 4\cos^2 x - 2\cos x$
$= 2\cos x + 4\cos^2 x - 2 = f'(x)$.

c.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

d. Courbe $(\mathscr{C})$.



67 **a.** Pour tout $t \geqslant 0$,

• $X_1\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}2 \sin\left(3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$
$= 0{,}2 \sin(2t + 2\pi)$
$= 0{,}2 \sin(3t)$
$= X_1(t)$.

Donc X_1 est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

• $X_2\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}15 \sin\left(4\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 0{,}15 \sin\left(4t + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 0{,}15 \sin\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$

$= X_2(t)$

Donc X_2 est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

b. Pour tout $t \geqslant 0$,

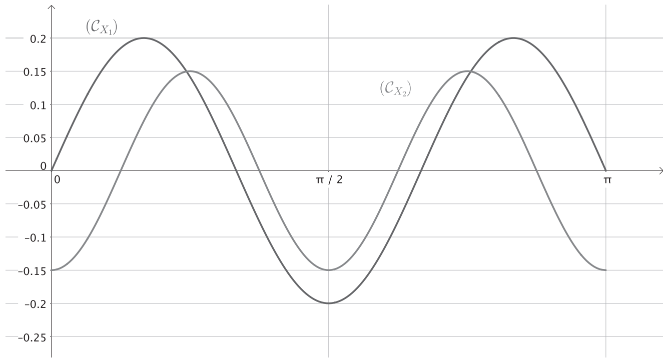
• $X_1'(t) = 0{,}6 \cos(3t)$

• $X_2'(t) = 0{,}6 \cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$

D'où les tableaux de variation sur $[0 ; \pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$X_1'(t)$		+	0	–	0	+	0	–	
$X_1(t)$	0	↗	0,2	↘	–0,2	↗	0,2	↘	0

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$X_2'(t)$		+	0	–	0	+	0	–	
$X_2(t)$	–0,15	↗	0,15	↘	–0,15	↗	0,15	↘	–0,15



Se tester

68 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Vrai ; **5.** Vrai ; **6.** Vrai ; **7.** Vrai.

69 **1.** Faux. En effet, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f n'est pas centré en zéro.

2. Faux. En effet, pour tout $x \neq -2$, $f'(x) = \frac{-5}{(x+2)^2}$ donc $f'(x) < 0$. f est donc décroissante sur $]-\infty ; -2[$.

3. Vrai. En effet, pour tout $x \neq 2$,

$3 - \frac{5}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2} = \frac{3x+6-5}{x+2} = \frac{3x+1}{x+2}$

$= f(x)$.

4. Vrai. En effet, $f(2) = \frac{3\times 2+1}{2+2} = \frac{7}{4}$

et $f'(2) = \frac{-5}{(2+2)^2} = -\frac{5}{16}$.

Ainsi, la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -\frac{5}{16}(x-2) + \frac{7}{4}$ soit $y = -\frac{5}{16}x + \frac{19}{8}$.

5. Vrai. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $-2+h \in \mathcal{D}_f$, on a $-2+h < -2$ ou $-2+h > -2$ donc $h < 0$ ou $h > 0$, donc $-2-h > -2$ ou $-2-h < -2$ donc $-2-h \in \mathcal{D}_f$ et

$f(-2-h) = \frac{3(-2-h)+1}{-2-h+2} = \frac{-5-3h}{-h} = \frac{5+3h}{h}$.

$f(-2+h) = \frac{3(-2+h)+1}{-2+h+2} = \frac{-5+3h}{h}$.

Donc $\frac{f(-2-h)+f(-2+h)}{2} = \frac{\frac{5+3h}{h} + \frac{-5+3h}{h}}{2} = 3$.

6. Vrai. En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

70 **1. c.** ; **2. b.** ; **3. c.** ; **4. a.** ; **5. a.**

71 **1. a.** En effet, on observe sur le graphique que $A(0 ; -3)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = -3$. Cette condition ne convient que pour la réponse **a.**

2. a. En effet, $\mathbb{R}$ est centré en zéro et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -1 - 2\cos(2x)$ (car $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$.)

Ainsi, $f(-x) = -1 - 2\cos(2(-x)) = -1 - 2\cos(-2x)$

donc $f(-x) = -1 - 2\cos(2x) = f(x)$.

3. c. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4} + h \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\pi}{4} - h \in \mathbb{R}$ et

$f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) = -1 + 2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - h\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2\sin(2h)$

et $f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = -1 + 2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2\sin(2h)$.

Donc, $\frac{f\left(\frac{\pi}{4} - h\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + h\right)}{2} = -1$.

Exercices d'approfondissement

72 Centre de symétrie

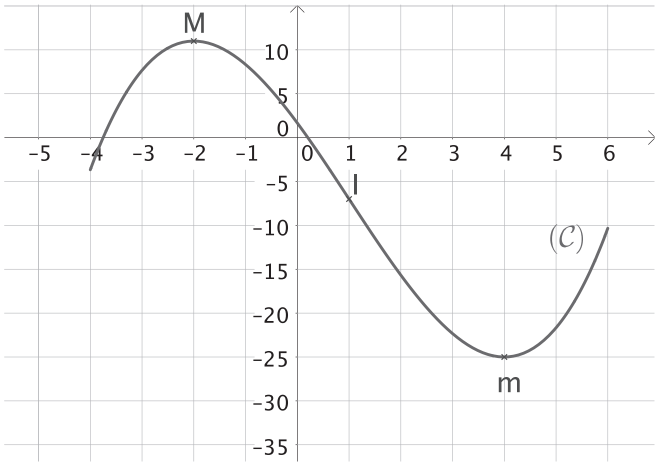
a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 2x - 8$.

b. On étudie le signe de $f'(x)$ grâce au discriminant ($\Delta = 36 > 0$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$).

x	-4		-2		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{11}{3}$	↗	11	↘	-25	↗	$-\frac{31}{3}$

c. Le minimum de f est -25, il est atteint pour $x = 4$; le maximum de f est 11, il est atteint pour $x = -2$.

d.



e. $x_I = \dfrac{-2+4}{2} = 1$; $y_I = \dfrac{11+(-25)}{2} = -7$.

• Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $1 + h \in [-4 ; 6]$, on a

$-4 \leqslant 1 + h \leqslant 6$; $-5 \leqslant h \leqslant 5$; $-5 \leqslant -h \leqslant 5$;

$-4 \leqslant 1 - h \leqslant 6$ donc $1 - h \in [-4 ; 6]$

et $f(1-h) = \dfrac{1}{3}(1-h)^3 - (1-h)^2 - 8(1-h) + \dfrac{5}{3}$

$f(1+h) = \dfrac{1}{3}(1+h)^3 - (1+h)^2 - 8(1+h) + \dfrac{5}{3}$.

Ainsi, en développant les expressions, on trouve que $\dfrac{f(1-h)+f(1+h)}{2} = -7$, ce qui prouve que $I(1 ; -7)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

73 Rentabilité d'un article

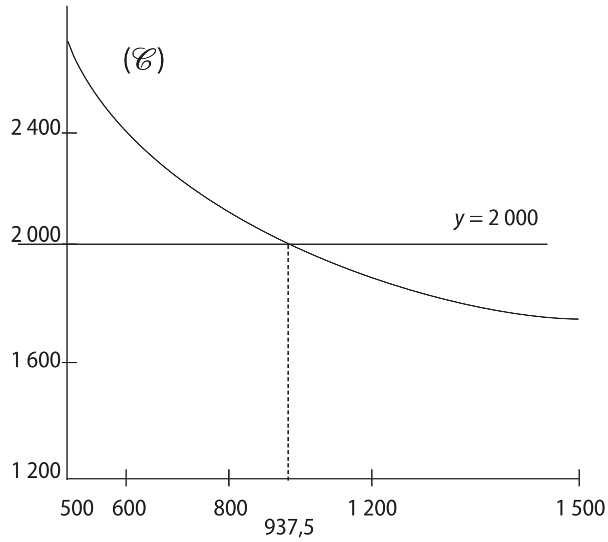
1. Le prix de revient de n articles est $750\,000 + 1\,200n$.

On a donc : $r = 1\,200 + \dfrac{750\,000}{n}$

2. a. L'ensemble de définition de la fonction r est $\mathbb{R}^*$; r est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $r' : x \longmapsto -\dfrac{750\,000}{x^2}$.

b. $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de r sur $[500 ; 1\,500]$.



3. On doit avoir : $r \leqslant 2\,000$. Donc $n \geqslant 937{,}5$.

Le nombre minimum d'articles à produire, pour que l'entreprise soit rentable est de 938 articles.

4. L'entreprise est rentable lorsque la droite d'équation $y = 2\,000$ est au-dessus de la courbe $(\mathscr{C})$.

74 Périmètre minimal

1. a. $\mathbb{R}^*$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$\mathscr{P}(-x) = \dfrac{1}{-x} + (-x) = -\dfrac{1}{x} - x = -\left(\dfrac{1}{x} + x\right) = -\mathscr{P}(x)$

donc $\mathscr{P}$ est impaire.

b. • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \mathscr{P}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathscr{P}(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe représentative de $\mathscr{P}$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathscr{P}(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{P}(x) - x = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de $\mathscr{P}$ en $-\infty$ est en $+\infty$.

c. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\mathscr{P}'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, donc $\mathscr{P}'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\mathscr{P}'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$\mathscr{P}(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathscr{P}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathscr{P}(x) = +\infty$.

d. Du tableau de variation, on déduit que 2 est le minimum de $\mathcal{P}$ sur $]0\,;+\infty[$ et qu'il est atteint pour $x = 1$.

2. a. $OL = x$ et $OP = \dfrac{1}{x}$, donc l'aire du rectangle $OLMN$ est : $\mathcal{A} = OL \times OP = x \times \dfrac{1}{x} = 1$.

b. Le périmètre du rectangle $OLMN$ est :

$P(x) = 2 \times (OL + OP) = 2 \times \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2 \times \mathcal{P}(x)$.

Or, P est minimal lorsque $\mathcal{P}$ est minimal donc lorsque $x = 1$.

Ainsi, le périmètre minimal du rectangle $OLMN$ est atteint lorsque $x = 1$ et il est alors égal à $P(1) = 4$.

75 Même dénominateur

1. a. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(-x) = \dfrac{(-x^2)}{(-x^2)+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1} = f(x)$, donc f est paire.

• $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g(-x) = \dfrac{-x}{(-x^2)+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -g(x)$, donc g est impaire.

• $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$h(-x) = \dfrac{1}{(-x^2)+1} = \dfrac{1}{x^2+1} = h(x)$, donc h est paire.

b. • $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. On utilise les réponses au **a.** et au **b.** pour en déduire que $(\mathscr{C}_1)$ est la courbe représentative de f, $(\mathscr{C}_2)$ celle de h et $(\mathscr{C}_3)$ celle de g.

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x)$ est donc du signe de $2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x)$ est donc du signe de $1 - x^2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$h'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$. $h'(x)$ est donc du signe de $-2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. a. Les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont symétriques par rapport au point $I\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

En effet, pour tout $M(x\,;f(x)) \in (\mathscr{C}_1)$ et pour tout $M'(-x\,;h(-x)) \in (\mathscr{C}_2)$, I est le milieu de $[MM']$ car $\dfrac{x_M + x_{M'}}{2} = \dfrac{x+(-x)}{2} = 0 = x_I$

et $\dfrac{y_M + y_{M'}}{2} = \dfrac{f(x)+h(-x)}{2} = \dfrac{\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{1}{(-x^2)+1}}{2}$

$= \dfrac{\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}}{2} = \dfrac{\dfrac{x^2+1}{x^2+1}}{2} = \dfrac{1}{2} = y_I$.

Donc M' est le symétrique de M par rapport à I.

b. Les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En effet, pour tout $N(x\,;f(x)) \in (\mathscr{C}_1)$ et pour tout $N'(x\,;h(x)) \in (\mathscr{C}_2)$, le milieu de $[NN']$ appartient à (Δ), car

$\dfrac{x_N + x_{N'}}{2} = \dfrac{x+x}{2} = x$ et $\dfrac{y_N + y_{N'}}{2} = \dfrac{f(x)+h(x)}{2}$

$= \dfrac{\dfrac{x^2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Or, le point $P\left(x\,;\dfrac{1}{2}\right) \in (\Delta)$.

Donc N' est le symétrique de N par rapport à (Δ).

76 Aire et périmètre

1. a. Pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$\mathcal{A}(x) = \cos x \times \sin x$ et $\mathcal{P}(x) = 2 \times (\cos x + \sin x)$.

b. Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4}+h\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$, on a :

$0\leqslant\frac{\pi}{4}+h\leqslant\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}\leqslant h\leqslant\frac{\pi}{4}$;

$-\frac{\pi}{4}\leqslant -h\leqslant\frac{\pi}{4}$; $0\leqslant\frac{\pi}{4}-h\leqslant\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}-h\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

et $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4}-h\right)&=\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\mathcal{A}\left(\frac{\pi}{4}-h\right)$.

Enfin

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)&=2\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4}-h\right)&=\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\&=2\times\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{4}-h\right)$.

Ce qui prouve que (Δ) est un axe de symétrie des courbes $(\mathscr{C}_{\mathcal{A}})$ et $(\mathscr{C}_{\mathcal{P}})$.

2. Pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$\mathcal{A}'(x)=-\sin x\times\sin x+\cos x\times\cos x=\cos^2x-\sin^2x$ donc $\mathcal{A}'(x)=\cos 2x$.

$\mathcal{P}'(x)=2\times(-\sin x+\cos x)$.

D'où les tableaux de variation.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{P}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{P}(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Aire et périmètre atteignent leur maximum lorsque $x=\frac{\pi}{4}$.

77 Une fonction trigonométrique

1. a. $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.

b. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(-x)=2\sin(-x)+\sin(2(-x))=-2\sin x-\sin 2x$
$=-f(x)$, donc f est impaire.

• De plus, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=2\sin(x+2\pi)+\sin(2(x+2\pi))\\&=2\sin x+\sin(2x+4\pi)\\&=2\sin x+\sin 2x\\&=f(x)\text{, donc } f \text{ est périodique de période } 2\pi.\end{aligned}$$

2. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, d'une part :

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos x+2\cos 2x\\&=2\cos x+2(2\cos^2x-1)\\&=2(2\cos^2x+\cos x-1)\text{ ; et, d'autre part :}\end{aligned}$$

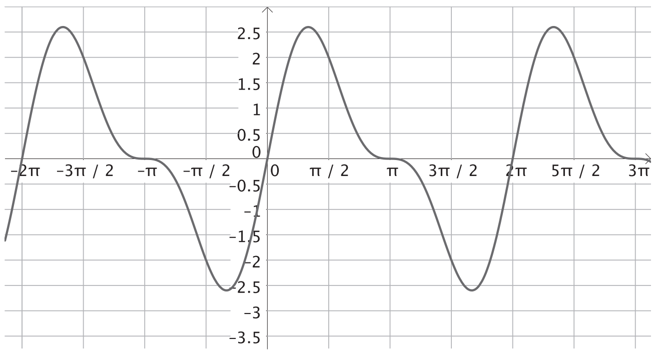
$$\begin{aligned}2(2\cos x-1)(\cos x+1)&=2(2\cos^2x+2\cos x-\cos x-1)\\&=2(2\cos^2x+\cos x-1).\end{aligned}$$

D'où l'égalité.

b.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$	
$\cos x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

3.



78 Les boîtes de lait

1. a. La fonction f est un polynôme, son ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

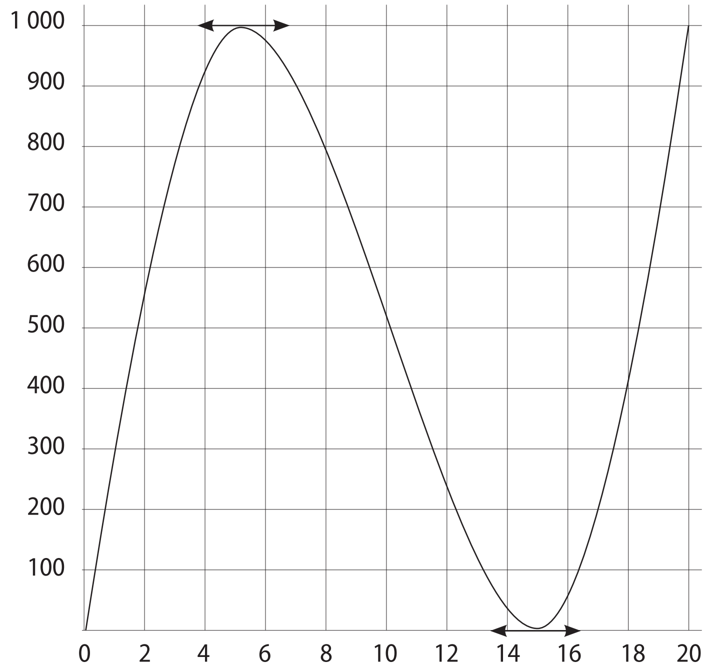
On a : $f'(x)=6(x-5)(x-15)$.

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1\,000$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b. $(\Delta) : y = 450x$.

c.

x	5	10	15	20
$f(x)$	1 000	500	0	1 000



d. L'équation admet trois solutions : $10 - 5\sqrt{3}$; 10 et $10 + 5\sqrt{3}$.

2. a. et **b.** L'unité de longueur étant le cm, la boîte a pour dimensions x, $15 - x$, $30 - 2x$ et pour volume :
$\mathcal{V}(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = \mathcal{V}(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

Pour $x = 10$, on obtient un volume de :
$\mathcal{V} = 10 \times 5 \times 10 = 500\ \text{cm}^3$.

c. D'après l'étude précédente, $\mathcal{V}$ est maximal pour $x = 5$, la boîte a alors un volume de 1 L.

d. Pour réaliser des boîtes de 500 cm³, le fabriquant peut attribuer à x la valeur $10 - 5\sqrt{3}$ ou 10.

Il préférera sans doute prendre $x = 10$ et se faciliter ainsi la construction.

79 Résolutions d'équations

1. a. $\Delta = \dfrac{9}{4} > 0$, donc l'équation $X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{2} = 0$ admet deux solutions $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.

b. On pose $X = \cos x$.

Les solutions de l'équation $\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2} = 0$ sont données par :

$\cos x = X_1$, $\cos x = -1$ donc $x = -\pi$ ou $x = \pi$;

et

$\cos x = X_2$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$ donc $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Les solutions de (E) sont donc $-\pi, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \pi$.

2. On procède comme précédemment en posant $X = \sin x$.

Les solutions de l'équation $2X^2 + (4 - \sqrt{3})X - 2\sqrt{3} = 0$ sont ($\Delta = 16 + 8\sqrt{3} + 3 = (4 + \sqrt{3})^2 > 0$)

$X_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $X_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{3} - 4 - \sqrt{3}}{4} = -2$.

Les solutions de l'équation $2\sin^2 x + (4 - \sqrt{3})\sin x - 2\sqrt{3} = 0$ sont données par :

$\sin x = X_1$, $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$;

et $\sin x = X_2$, $\sin x = -2$ qui n'a pas de solution.

Les solutions de (F) sont donc $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

80 La bonne fonction homographique

a. Il faut que :

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$,

or $\lim\limits_{x\to -c} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to -c} f(x) = +\infty$, donc $c = -3$.

et que :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$,

or $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$, donc $a = 2$.

• Pour tout $x \neq -3$,

$f'(x) = \dfrac{2(x-3) - (2x+b)}{(x-3)^2} = \dfrac{-6-b}{(x-3)^2}$.

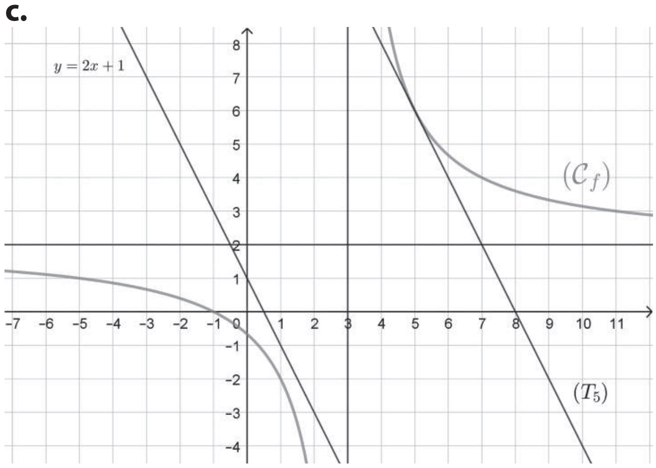
Pour que la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 5 soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$, il faut que $f'(5) = -2$ soit $\dfrac{-6-b}{(5-3)^2} = -2$; $\dfrac{-6-b}{4} = -2$; $b = 2$.

Ainsi, pour tout $x \neq 3$, $f(x) = \dfrac{-2x + 14}{x - 3}$.

b.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-2

c.



81 Modéliser grâce aux fonctions

1. • Pour tout x de $[60 ; 120]$,

$f'(x) = -45{,}2 \times 0{,}02 \sin(0{,}02x - 1{,}7)$

$f'(x) = -0{,}904 \sin(0{,}02x - 1{,}7)$.

Or, $\sin(0{,}02x - 1{,}7) > 0$ lorsque $0 < 0{,}02x - 1{,}7 < \pi$, c'est-à-dire $1{,}7 < 0{,}02x < \pi + 1{,}7$ donc $85 < x < \dfrac{\pi + 1{,}7}{0{,}02}$.

Or, $\dfrac{\pi + 1{,}7}{0{,}02} \approx 242$.

D'où le tableau de variation :

x	60	85	120
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	39,67 ↗	45,2	↘ 34,57

• Pour tout x de $[60 ; 120]$,

$g'(x) = 0{,}00105x^2 - 0{,}2152x + 10{,}70554$.

$\Delta = 0{,}001347772 > 0$, donc les solutions de l'équation $g'(x)$ sont :

$x_1 = \dfrac{0{,}2152 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 0{,}00105} \approx 85$ et $x_2 = \dfrac{0{,}2152 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 0{,}00105} \approx 120$.

D'où le tableau de variation :

x	60	$x_1 \approx 85$	$x_2 \approx 120$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	29 ↗	46	↘ 39

(Les résultats sont arrondis à l'unité.)

2. a. Selon les deux modèles, le pourcentage semble avoir été maximal en 1985.

b. • Selon le modèle 1, le pourcentage en l'an 2000 était $f(100) \approx 43{,}18$ %.

• Selon le modèle 2, le pourcentage en l'an 2000 était $g(100) \approx 43{,}054$ %.

3. a. $f(113) \approx 38{,}3$ % et $g(113) \approx 39{,}3$ %.

Le deuxième modèle semble mieux adapté.

b. Selon le deuxième modèle, le pourcentage atteindrait $g(120)$, soit 39 % en 2020.

82 Centre et axe, fonction et dérivée

a. Si $\Omega(a ; b)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$, c'est que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{f(a-x) + f(a+x)}{2} = b$, donc (en dérivant à gauche et à droite), $\dfrac{-f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$, c'est-à-dire $f'(a+x) = f'(a-x)$.

Ainsi, (Δ) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

b. Si (Δ) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, c'est que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$, donc (en dérivant à gauche et à droite), $f'(a+x) = -f'(a-x)$, donc, $\dfrac{f'(a-x) + f'(a+x)}{2} = 0$, ainsi, le point $\Omega(a ; 0)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

83 La bonne fonction cubique

a. • $A(2 ; 10) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow 2^3 + a \times 2^2 + b \times 2 + c = 10$

$\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 2$.

• $g'(2) = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2^2 + 2a \times 2 + b = 0$

$\Leftrightarrow 4a + b = -12$.

• La tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = g'(3)(x-3) + g(3)$.

Or, $g(3) = 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 9a + 3b + c + 27$, et $g'(3) = 3 \times 3^2 + 2a \times 3 + b = 6a + b + 27$.

Ainsi, $y = (6a + b + 27)(x - 3) + 9a + 3b + c + 27$.

Or, $B(0 ; 2) \in (T)$

$\Leftrightarrow 2 = (6a + b + 27)(0 - 3) + 9a + 3b + c + 27$

$\Leftrightarrow 2 = -18a - 3b - 81 + 9a + 3b + c + 27$

$\Leftrightarrow 9a - c = -56$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 4a + b = -12 \\ 9a - c = -56, \end{cases}$$

ce qui, après calculs, donne $\begin{cases} a = -6 \\ b = 12 \\ c = 2. \end{cases}$

Ainsi, la fonction g a pour expression :

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 2$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g(2-x) = (2-x)^3 - 6(2-x)^2 + 12(2-x) + 2$

$g(2-x) = -x^3 + 10$

$g(2+x) = (2+x)^3 - 6(2+x)^2 + 12(2+x) + 2$

$g(2+x) = x^3 + 10$.

Donc $\dfrac{g(2-x) + g(2+x)}{2} = 10$.

Ainsi, le point $A(2 ; 10)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

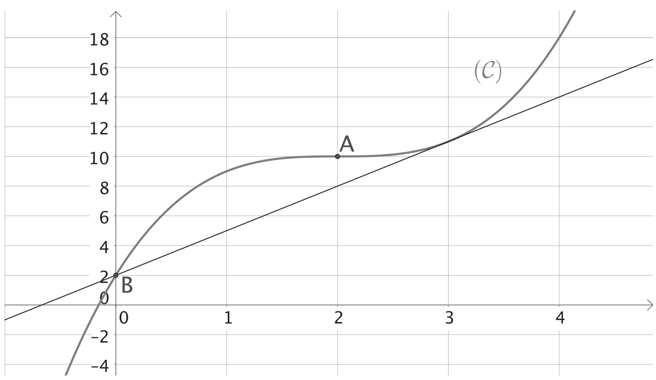
c. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$

On déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗	10	↗ $+\infty$

d.



Problèmes

84 Différentes écritures

Partie A

1. a. Pour tout $x \neq -\dfrac{d}{c}$,

$$\alpha + \frac{\beta}{x-\gamma} = \frac{\alpha(x-\gamma)+\beta}{x-\gamma} = \frac{\alpha x - \alpha\gamma + \beta}{x-\gamma}$$

et $f(x) = \dfrac{ax+b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \dfrac{\dfrac{a}{c}x+\dfrac{b}{c}}{x+\dfrac{d}{c}}$.

Ainsi, il y a égalité lorsque :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{c} \\ -\alpha\gamma + \beta = \dfrac{b}{c} \\ \gamma = -\dfrac{d}{c} \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{c} \\ \beta = \dfrac{bc-ab}{c} \\ \gamma = -\dfrac{d}{c} \end{cases}.$$

b. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ donc la droite d'équation $y = \alpha$ est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to\gamma\\x<\gamma}} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\gamma\\x>\gamma}} f(x) = \infty$ donc la droite d'équation $x = \gamma$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

c. • Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$,

$f(\gamma - h) = \alpha + \dfrac{\beta}{-h}$ et $f(\gamma + h) = \alpha + \dfrac{\beta}{h}$,

donc $\dfrac{f(\gamma-h)+f(\gamma+h)}{2} = \alpha$.

Donc le point $I(\gamma\ ;\ \alpha)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

• $x_I = \gamma = -\dfrac{d}{c}$ et $y_I = \alpha = \dfrac{a}{c}$.

d. • Lorsque $\beta = \dfrac{bc-ab}{c} > 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		γ		$+\infty$
$f(x)$	α	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	α

• Lorsque $\beta = \dfrac{bc-ab}{c} < 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		γ		$+\infty$
$f(x)$	α	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	α

2. a. • Les droites d'équation $y = 2$ et $x = 5$ sont asymptotes à $(\mathscr{C}_1)$ donc $\alpha = 2$ et $\gamma = 5$.

• $A(2\ ;\ 3) \in (\mathscr{C}_1)$ donc $f_1(2) = 3$ c'est-à-dire $2 + \dfrac{\beta}{2-5} = 3$, soit $\beta = -3$.

Ainsi, pour tout $x \neq 5$, $f_1(x) = 2 + \dfrac{-3}{x-5}$.

b. Le point $I(-1\ ;\ -1)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_2)$ donc $\alpha = -1$ et $\gamma = -1$.

• $B(-3\ ;\ -2) \in (\mathscr{C}_2)$ donc $f_2(-3) = -2$,

c'est-à-dire $-1 + \dfrac{\beta}{-3+1} = -2$, soit $\beta = 2$.

Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f_2(x) = -1 + \dfrac{2}{x+1}$.

Partie B

1. a. Pour tout $x \neq -\dfrac{e}{d'}$,

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{d\left(x+\dfrac{e}{d}\right)} = \frac{\dfrac{a}{d}x^2+\dfrac{b}{d}x+\dfrac{c}{d}}{x+\dfrac{e}{d}}.$$

Ainsi, $a' = \dfrac{a}{d'}$, $b' = \dfrac{b}{d'}$, $c' = \dfrac{c}{d'}$, $d' = -\dfrac{e}{d}$.

b. Pour tout $x \neq d'$,

$$\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-\delta} = \frac{(\alpha x+\beta)(x-\delta)}{x-\delta} + \frac{\gamma}{x-\delta}$$
$$= \frac{\alpha x^2 + (\beta - \alpha\delta)x + \gamma}{x-\delta}/x-\delta$$

Ainsi, $\begin{cases} \alpha = a' \\ \beta - \alpha\delta = b' \\ \gamma = c' \\ \delta = d' \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha = a' \\ \beta = b' + a'd' \\ \gamma = c' \\ \delta = d'. \end{cases}$

c. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\gamma}{x-\delta} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (\alpha x + \beta) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\gamma}{x-\delta} = 0$, donc la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to\delta\\x<\delta}} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\delta\\x>\delta}} f(x) = \infty$, donc la droite d'équation $x = \delta$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

d. • Le point d'intersection de ces deux asymptotes est le point $I(x_I\ ;\ y_I)$ tel que :

$\begin{cases} y_I = \alpha x_I + \beta \\ x_I = \delta \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_I = \delta \\ y_I = \alpha\delta + \beta. \end{cases}$

• Pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$,

$f(\delta - h) = \alpha(\delta - h) + \beta + \dfrac{\gamma}{-h}$

et $f(\delta + h) = \alpha(\delta + h) + \beta + \dfrac{\gamma}{h}$

donc $\dfrac{f(\delta-h)+f(\delta+h)}{2} = \alpha\delta + \beta$.

Donc le point $I(\delta\ ;\ \alpha\delta + \beta)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2. • Les droites d'équation $x = 1$ et $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ sont asymptotes à $(\mathscr{C})$, donc, d'après le **1. c.**, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{3}{2}$, $\delta = 1$.

• Le point $A(3\,;4) \in (\mathscr{C})$ donc $f(3) = 4$,
c'est-à-dire $\frac{1}{2} \times 3 + \frac{3}{2} + \frac{\gamma}{3-1} = 4$, d'où $\gamma = 2$.
L'équation de $(\mathscr{C})$ est donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x-1}$.

85 Coincée entre deux droites

Partie A

1. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.
• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = -x + \cos^2(-x) = -x + \cos^2 x$.
Donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.
f n'est ni paire, ni impaire.

2. La fonction $x \longmapsto \cos^2 x$ est périodique de période π ; mais la fonction $x \longmapsto x$ n'est pas périodique, donc f n'est pas périodique.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= x + \pi + \cos^2(x+\pi) \\ &= x + \pi + (-\cos x)^2 \\ &= x + \pi + \cos^2 x \\ &= f(x) + \pi. \end{aligned}$$

b. D'après le **a.**, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f(x) = f(x+\pi) - \pi$
Ainsi, (Γ_2) est obtenue en translatant (Γ_1) du vecteur $\pi\vec{i} + \pi\vec{j}$.

Partie B

1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, ainsi $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

b. • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. La courbe $(\mathscr{C})$ est coincée entre les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.

2. • Pour $(\mathscr{D}_0) \cap (\mathscr{C})$, il faut résoudre l'équation :
$x + \cos^2 x = x$, c'est-à-dire $\cos^2 x = 0$ d'où $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{D}_0)$ et de $(\mathscr{C})$ sont donc : $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Pour $(\mathscr{D}_1) \cap (\mathscr{C})$, il faut résoudre l'équation :
$x + \cos^2 x = x + 1$, c'est-à-dire $\cos^2 x = 1$, d'où $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{D}_1)$ et de $(\mathscr{C})$ sont donc : $(k\pi\,;1 + k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour tout x de $[0\,;\pi]$,
$f(x) = x + \cos x \times \cos x$, donc
$f'(x) = 1 + \cos x\,(-\sin x) + (-\sin x)\cos x$
$f'(x) = 1 - 2\cos x \sin x$
$f'(x) = 1 - \sin 2x$.
$f'(x) = 0, \Leftrightarrow 1 = \sin 2x \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ (puisqu'on travaille dans $[0\,;\pi]$).
D'où le tableau de variation de f :

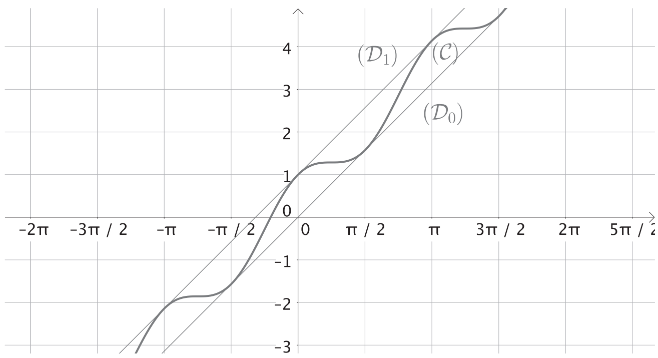
x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$			$\pi + 1$

4.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	$\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6} + \frac{3}{4}$	$\pi + 1$

5. a. et **b.**



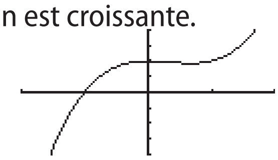
86 Fonctions polynômes de degré 3

Partie A

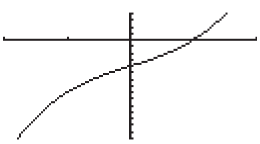
1. a. Pour $(\mathscr{C}_1)$: $a^2 - 3b = -2 < 0$;
pour $(\mathscr{C}_2)$: $a^2 - 3b = 13 > 0$;
pour $(\mathscr{C}_3)$: $a^2 - 3b = 1 > 0$;
pour $(\mathscr{C}_4)$: $a^2 - 3b = -5 < 0$.

b. On conjecture que :
• lorsque $a^2 - 3b > 0$, la fonction est croissante, puis décroissante puis croissante ;
• lorsque $a^2 - 3b < 0$, la fonction est croissante.

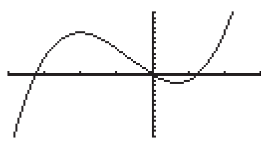
2. a. Première équation



Deuxième équation



Troisième équation



b. Ces trois cas ($a_1^2 - 3b_1 = 1 > 0$; $a_2^2 - 3b_2 = -9 < 0$; $a_3^2 - 3b_3 = 16 > 0$) confirment la conjecture émise au **1. b.**

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

On étudie le signe de $f'(x)$ à l'aide du discriminant :
$\Delta = (2a)^2 - 4 \times 3 \times b$
$\Delta = 4a^2 - 12b$
$\Delta = 4(a^2 - 3b)$.

• Lorsque $\Delta < 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^2 - 3b < 0$), $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Lorsque $\Delta = 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^2 - 3b = 0$), $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \dfrac{-2a}{2 \times 3} = -\dfrac{a}{3}$.

$f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et f croissante sur $\mathbb{R}$.

• Lorsque $\Delta > 0$ (c'est-à-dire lorsque $a^3 - 3b > 0$), $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \dfrac{-2a - \sqrt{\Delta}}{6}$ $(= x_1)$ ou $x = \dfrac{-2a + \sqrt{\Delta}}{6}$ $(= x_2)$.

$f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de $[x_1 \,;\, x_2]$ et $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty \,;\, x_1[\, \cup \,]x_2 \,;\, +\infty[$.

f est donc croissante sur $]-\infty \,;\, x_1[$ et sur $]x_2 \,;\, +\infty[$ et f est décroissante sur $[x_1 \,;\, x_2]$.

3. Pour tout h de $\mathbb{R}$,

$f\left(-\dfrac{a}{3} - h\right) = \left(-\dfrac{a}{3} - h\right)^3 + a\left(-\dfrac{a}{3} - h\right)^2 + b\left(-\dfrac{a}{3} - h\right) + c$

et

$f\left(-\dfrac{a}{3} + h\right) = \left(-\dfrac{a}{3} + h\right)^3 + a\left(-\dfrac{a}{3} + h\right)^2 + b\left(-\dfrac{a}{3} + h\right) + c$

Après calculs, on trouve que

$$\frac{f\left(-\dfrac{a}{3} - h\right) + f\left(-\dfrac{a}{3} + h\right)}{2} = f\left(-\frac{a}{3}\right).$$

Ce qui montre que le point $I\left(-\dfrac{a}{3} \,;\, f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ dans un repère.

Partie C

1. $f(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$

et $f'(\alpha) = 3\alpha^2 + 2a\alpha + b$ donc (Δ_α) a pour équation

$y = (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)(x - \alpha) + \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c$

$y = (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)x - 2\alpha^3 - a\alpha^2 + c$

2. a. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g'(x) = f'(x) - f'(\alpha)$ et $g''(x) = f''(x)$.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g''(x) = 6x + 2a$, donc $g''(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\left[-\dfrac{a}{3} \,;\, +\infty\right[$

et $g''(x) < 0$ pour tout x de $\left]-\infty \,;\, -\dfrac{a}{3}\right[$.

g' est donc croissante sur $\left[-\dfrac{a}{3} \,;\, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty \,;\, -\dfrac{a}{3}\right]$.

b. $g'(\alpha) = f'(\alpha) - f'(\alpha) = 0$, donc α est solution de l'équation $g'(x) = 0$.

• $g'(x) = (x - \alpha)(Ax + B)$ (car $g(x)$ est un polynôme de degré 2 dont α est racine).

$g'(x) = Ax^2 + (-\alpha A + B)x - \alpha B$.

Or, $g'(x) = f'(x) - f'(\alpha)$

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b - 3\alpha^2 - 2a\alpha - b$

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + (-3\alpha^2 - 2a\alpha)$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases} A = 3 \\ -\alpha A + B = 2a \\ -\alpha B = -3\alpha^2 - 2a\alpha \end{cases}$

d'où $\begin{cases} A = 3 \\ B = 2a + 3\alpha \end{cases}$

Ainsi, $\beta = -\dfrac{B}{A} = \dfrac{-2a - 3\alpha}{3}$.

• On vérifie que $g(\beta) = 4\left(\alpha + \dfrac{a}{3}\right)^3$.

c. D'après ce qui précède, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$g'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$.

Donc $g'(x) < 0$ pour x situé entre α et β et $g'(x) \geqslant 0$ ailleurs.

d. • Lorsque $\alpha > -\dfrac{a}{3}$, $\beta < \alpha$:

x	$-\infty$		β		$-\frac{a}{3}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–			0	+	
$g(x)$		↗		↘			0	↗	

Ainsi, pour tout x situé « autour de α », $g(x) \geqslant 0$.

• Lorsque $\alpha = -\dfrac{a}{3}$, $\beta = \alpha$:

x	$-\infty$		$\alpha = \beta$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$		↗	0	↗	

Ainsi, pour tout $x \leqslant \alpha$, $g(x) \leqslant 0$
et pour tout $x \geqslant \alpha$, $g(x) \geqslant 0$.

• Lorsque $\alpha < -\dfrac{a}{3}$, $\beta > \alpha$:

x	$-\infty$		α		$-\frac{a}{3}$		β		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–			0	+	
$g(x)$		↗	0	↘				↗	

Ainsi, pour tout x situé « autour de α », $g(x) \leqslant 0$.

3. La position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Δ_α) se déduit du signe de $f(x) - [f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)]$, c'est-à-dire du signe de $g(x)$.

Ainsi :

- lorsque $\alpha > -\frac{a}{3}$, $(\mathscr{C})$ est situé au-dessus de (Δ_α) ;
- lorsque $\alpha = -\frac{a}{3}$, $(\mathscr{C})$ est situé au-dessous de (Δ_α) pour $x \leqslant \alpha$ et au-dessus de (Δ_α) pour $x \geqslant \alpha$.
- lorsque $\alpha < -\frac{a}{3}$, $(\mathscr{C})$ est situé au-dessous de (Δ_α).

87 Distances d'un point à des tangentes

Partie A

1. • $\mathbb{R}$ est centré en zéro.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{2 + (-x)^2} = \frac{-x^3 - 2x}{2 + x^2} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

2. a. $\Delta = 80 > 0$, les solutions sont donc $X_1 = \frac{-8 - \sqrt{80}}{2} = -4 - 2\sqrt{5}$ et $X_2 = -4 + 2\sqrt{5}$.

b. En posant $X = x^2$, on retrouve l'équation du **2. a.**

Ainsi, soit $x^2 = X_1$, qui n'a pas de solution car $X_1 < 0$, soit $x^2 = X_2$, c'est-à-dire

$x = -\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ ou $x = \sqrt{2\sqrt{5} - 4}$.

3. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(2 + x^2) - (x^3 - 2x) \times 2x}{(2 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^2 - 4 - 2x^4 + 4x^2}{(2 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 8x^2 - 4}{(2 + x^2)^2}.$$

b. En développant et en simplifiant :

$(x - \sqrt{2\sqrt{5} - 4})(x + \sqrt{2\sqrt{5} - 4})(x^2 + 4 + 2\sqrt{5})$, on retrouve $x^4 + 8x^2 - 4$ comme affiché.

c. On déduit le tableau de variation de f de la factorisation ci-dessus.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$		$\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\alpha = f(-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}) = \frac{-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}(2\sqrt{5} - 6)}{2\sqrt{5} - 2}$.

d. • Pour tout x de $\mathbb{R}$,

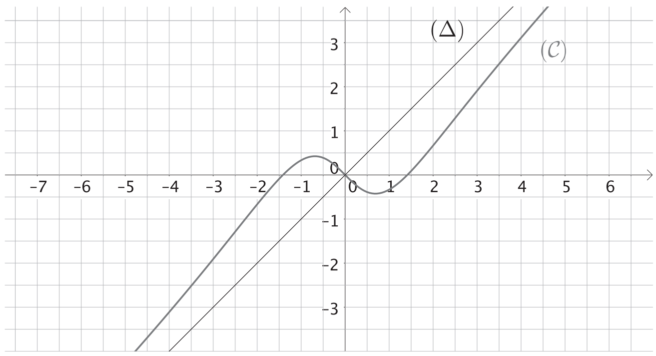
$$x\left(1 - \frac{4}{2 + x^2}\right) = \frac{x(2 + x^2) - 4x}{2 + x^2} = \frac{x^3 - 2x}{2 + x^2} = f(x)$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x}{2 + x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x}{2 + x^2} = 0$,

donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

e.



Partie B

1. • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ ou $x = \sqrt{2\sqrt{5} - 4}$.

Ainsi, (T) et (T') tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $-\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ et $\sqrt{2\sqrt{5} - 4}$ ont pour équations $y = \alpha$ et $y = -\alpha$.

• $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 8x^2 - 4}{(2 + x^2)^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 4 = (2 + x^2)^2$

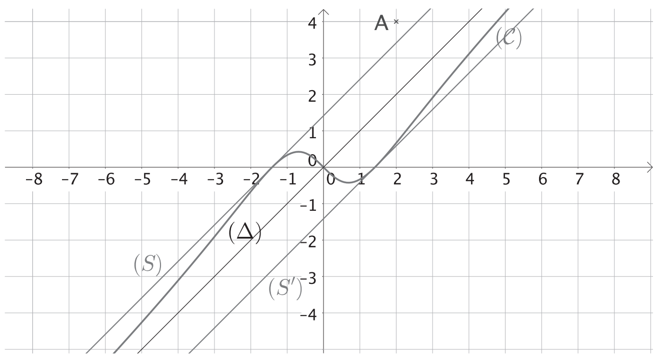
$\Leftrightarrow x^4 + 8x^2 - 4 = 4 + 4x^2 + x^4$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

Or, $f(-\sqrt{2}) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 0$, donc (S) et (S') tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ont pour équations $y = x + \sqrt{2}$ et $y = x - \sqrt{2}$.

2.



Partie C

1. $(\Delta) : x - y = 0$, donc $d(A ; (\Delta)) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

2. a. $(S) : x - y + \sqrt{2} = 0$, donc

$$d(A ; (S)) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4 + \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

$(S') : x - y - \sqrt{2} = 0$, donc

$$d(A ; (S')) = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 4 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

b. Du **a.**, on déduit que

$$d((S) ; (S')) = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2.$$

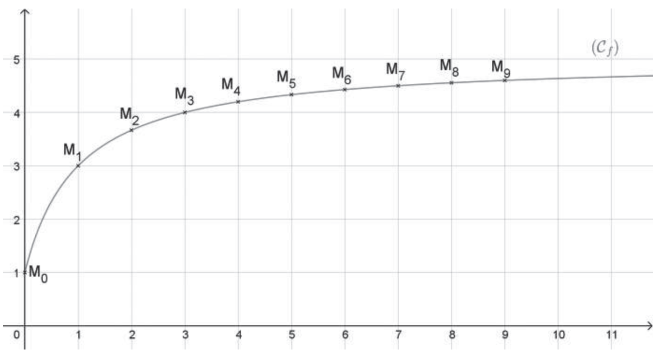
13 Suites numériques

Manuel pages 211 à 228

Activités d'introduction

1 Fonction et suite

1. a. et **b.**



c. Les point M_n ont pour ordonnée $f(n) = 5 - \dfrac{4}{n+1}$.

2. a. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$,

donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

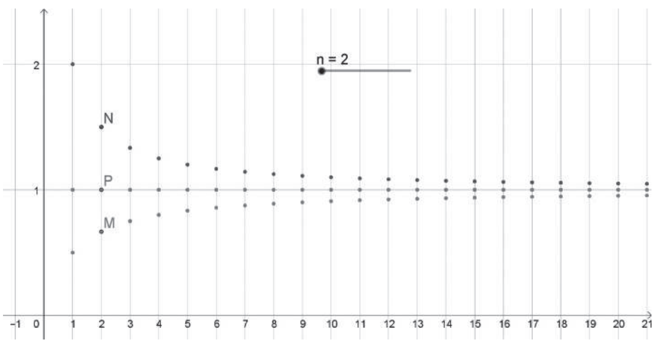
b. Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \leqslant n+1$ et que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $f(n) \leqslant f(n+1)$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 5$.

2 Représentation graphique de suites et conjectures

1. a. et **b.**



c. On conjecture que :

- la suite (l_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 1$;
- la suite (L_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 1$;
- la suite (a_n) est constante.

2. • Pour tout n de $\mathbb{N}$, $l_{n+1} - l_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} - 1 + \dfrac{1}{n+1}$

$$= \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Or $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc $l_{n+1} > l_n$ donc la suite (l_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 1$.

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, $L_{n+1} - L_n = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$

$$= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Or $\dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$, donc $L_{n+1} < L_n$ donc la suite (L_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

De plus, $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 1$.

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \times \dfrac{n+1}{n}$

$$= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \times \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = 1.$$

Donc la suite (a_n) est constante égale à 1.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = 1$.

3. Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire du rectangle R_n reste constante égale à 1.

3 Suite géométrique

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n V_n = P_0 V_0$.

2. a. $P_1 = 2$; $V_1 = \dfrac{1}{2}$; $P_2 = 4$; $V_2 = \dfrac{1}{4}$; $P_5 = 8$; $V_3 = \dfrac{1}{8}$;

$P_4 = 16$; $V_4 = \dfrac{1}{16}$; $P_5 = 32$; $V_5 = \dfrac{1}{32}$.

b. On conjecture que $P_n = 2^n$ et $V_n = \dfrac{1}{2^n}$.

c. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

d. $P_n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow n = 8$.

e. $V_n = \dfrac{1}{512} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{512} \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$.

4 Suite arithmétique et somme de termes consécutifs

1. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2.

n	u_n	Somme
0	2	2
1	5	7
2	8	15
3	11	26
4	14	40
5	17	57
6	20	77
7	23	100
8	26	126
9	29	155
10	32	187
11	35	222
12	38	260
13	41	301
14	44	345
15	47	392
16	50	442
17	53	495
18	56	551
19	59	610
20	62	672

En cellule B, il faut saisir la formule : « **=B2+3** ».

3. a. Cette somme contient 21 termes.

b.
$$\begin{array}{rl} & S_{20} = 2 + 5 + \ldots + 59 + 62 \\ + & S_{20} = 62 + 58 + \ldots + 5 + 2 \\ \hline & 2S_{20} = 64 + 64 + \ldots + 64 + 64 \end{array}$$

c. Ainsi, $2S_{20} = 21 \times 64$ d'où $S_{20} = 21 \times \dfrac{64}{2} = 21 \times 32$
$= 672$.

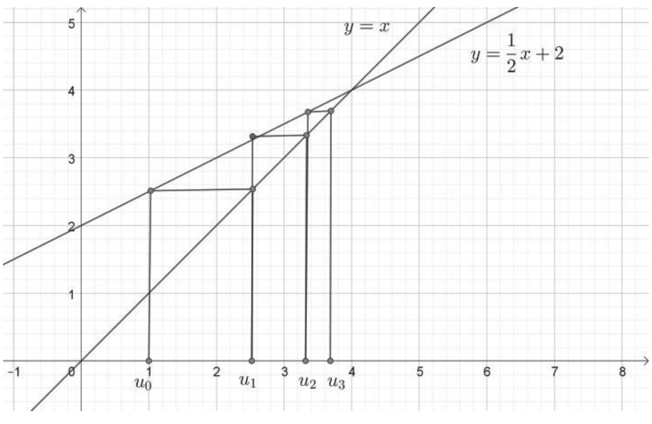
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{(n+1)(4+3n)}{2}$.

Savoir-faire

3 **a.** $u_0 = 0\,;\, u_1 = \dfrac{1}{3}\,;\, u_2 = \dfrac{2}{5}\,;\, u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.
b. $u_0 = 2\,;\, u_1 = \sqrt{8}\,;\, u_2 = \sqrt{14}\,;\, u_{n+1} = \sqrt{n^2+5n+8}$.
c. $u_0 = -4\,;\, u_1 = -1\,;\, u_2 = 0\,;\, u_{n+1} = \dfrac{2n-2}{n+2}$.
d. $u_0 = 1\,;\, u_1 = \dfrac{1}{2}\,;\, u_2 = \dfrac{1}{5}\,;\, u_{n+1} = \dfrac{1}{n^2+2n+2}$

4 **a.** $u_1 = 4\,;\, u_2 = -8\,;\, u_{n+1} = (-2)^{n+2}$.
b. $u_1 = 1\,;\, u_2 = \sqrt{2}\,;\, u_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{n}}$.
c. $u_1 = \sqrt{2}\,;\, u_2 = \sqrt{3}\,;\, u_{n+1} = \sqrt{n+1}$.

5 **a.** $u_1 = \dfrac{5}{2}\,;\, u_2 = \dfrac{13}{4}$.
b. et **c.**



9 **a.** Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n+1 > 0$ et $n+2 \geqslant 0$, donc $u_n > 0 > -1$.

De plus, $n+1 < n+2$, donc $u_n < 1$.
Ainsi (u_n) est bornée par -1 et 1.

b. 1re méthode – Pour tout n de $\mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$
donc $u_{n+1} > u_n$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2e méthode – f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

3e méthode – On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+2}{n+3}}{\dfrac{n+1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+3} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} > 1$$
donc $u_{n+1} > u_n$ et (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1\,;\, (u_n)$ converge vers 1.

10 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.
Donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$ et $-5 \leqslant u_n \leqslant -2$.
La suite (u_n) est donc bornée par -5 et -2.

11 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3\,u_n - u_n = 2\,u_n$.
Or $u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est donc décroissante sur $\mathbb{N}$.

14 **a.** (u_n) est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 5$.

b. (u_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

c. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

d. (u_n) est géométrique de raison $\frac{5}{3}$ et de premier terme $u_0 = 5$.

e. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

f. (u_n) est géométrique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$.

15 **1.** $u_{50} = u_2 + (50 - 2) \times (-2) = -95$.

$v_7 = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7-0} = 0{,}015625$.

2. a. $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{50}$

$S = \frac{(50 - 3 + 1)(u_{50} + u_3)}{2}$

$S = \frac{(50 - 3 + 1)(u_{50} + u_3)}{2}$

$S = \frac{48(-95 + (-1))}{2} = -2\,304$.

b. $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$

$S' = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 3{,}984\,375$.

Exercices d'entraînement

Suites : représentation et propriétés

16 **a.** $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{1}{4}$.

b. $u_1 = u_0 - 0 = 1$; $u_2 = u_1 - 1 = 0$; $u_3 = 0 - 2 = -2$.

c. $u_1 = (-1)^2 = 1$; $u_2 = (-1)^4 = 1$; $u_3 = 1$.

d. $u_1 = u_0 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$;

$u_2 = u_1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$; $u_3 = u_2 + (-1)^2 = 3$.

17 **a.** Pour tout nombre réel x on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

b. $u_{n+8} = \sin\left(\frac{(n+8)\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{n\pi}{4} = u_n$.

18 (u_n) semble être décroissante et converger vers 2.

19 Faux ; Faux ; Faux.

20 • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{3}{\left(1 + \frac{5}{x}\right)}$

$= 0 \times 3 = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x + 2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

21 **a.** $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16$; $u_5 = 25$.

b. Conjecture : $u_n = n^2$.

22 **a.** $u_2 = 3u_1 + 2u_0 = 9 + 2 = 11$; $u_3 = 33 + 6 = 39$; $u_4 = 139$; $u_5 = 495$.

b. $u_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{6}$; $u_3 = \frac{1}{12}$; $u_4 = \frac{1}{20}$; $u_5 = \frac{1}{30}$.

23 **a.** $u_{15} = 3{,}54 \times 10^7$. **b.** $u_{15} = 229\,326$.

24 **a.** (u_n) admet un majorant : 5.
($n^2 \geqslant 0 \Rightarrow -n^2 \leqslant 0 \Rightarrow 5 - n^2 \leqslant 5$).

b. $\frac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

$u_n - \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{2n + 2 - (n+2)}{2(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)} \geqslant 0$

et $u_n - 1 = \frac{-1}{n+2} < 0$.

c. $2 \leqslant u_n \leqslant 4$. En effet $u_{2n} = 4$ et $u_{2n+1} = 2$.

d. $-2 \leqslant u_n \leqslant 2$.

En effet $-1 \leqslant \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leqslant 2$.

25 **a.** $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 5 - (-3n + 5) = -3 < 0$ donc (u_n) est décroissante.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$ donc (u_n) est décroissante.

c. $u_0 = \sin(0) - 3 = -3$, $u_1 = -2$, $u_2 = -3$ et $u_3 = -4$ donc (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

d. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$.

26 **a.** (u_n) diverge vers $-\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x - 5}{3x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{3}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

c. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n+\infty} u_n = +\infty$.

27 **a.** $u_n - 1 = \dfrac{2n+1}{n+1} \geqslant 0$ et $u_n - 3 = \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 0$
donc $u_n \geqslant 1$ et $u_n \leqslant 3$.
b. $-1 \leqslant \cos\left(\dfrac{3\pi}{n}\right) \leqslant 1$, $-3 \leqslant 3\cos\left(\dfrac{3\pi}{n}\right) \leqslant 3$
donc $-3 + 2 \leqslant 3\cos\left(\dfrac{3\pi}{n}\right) + 2 \leqslant 3 + 2$.

28 **a.** Si (u_n) désigne une suite croissante de premier terme u_0 alors, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \geqslant u_0$, alors (u_n) est minorée par u_0.
b. En raisonnant de la même manière, on montre que (u_n) est majorée par son premier terme.

29 **a.** $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \geqslant 0$ pour $x \in [0\,;+\infty[$, donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Or $u_n = f(n)$ sur $\mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ elle est donc minorée par $u_0 = \sqrt{3}$.

30 **a.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n \leqslant 1 \times u_n$ (car $u_n > 0$) et $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc la suite(u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \times u_n \geqslant 1 \times u_n$ (car $u_n < 0$) et $u_{n+1} \geqslant u_n$. Donc la suite(u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

31 Conjectures :
(ℓ_n) est décroissante et tend vers 0 ; (L_n) est croissante et tend vers $+\infty$; (a_n) est croissante et tend vers 1.

Suites arithmétiques

32 **a.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}$ donc (u_n) est arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$.
b. $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{7}{3}$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
c. (u_n) n'est pas arithmétique : $u_0 = 2$; $u_1 = -2$; $u_2 = -4$.
d. (u_n) est arithmétique de raison $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{5}$.
e. $u_{n+1} - u_n = n$ et n n'est pas une constante donc (u_n) n'est pas arithmétique.
f. (u_n) est arithmétique de raison -3.

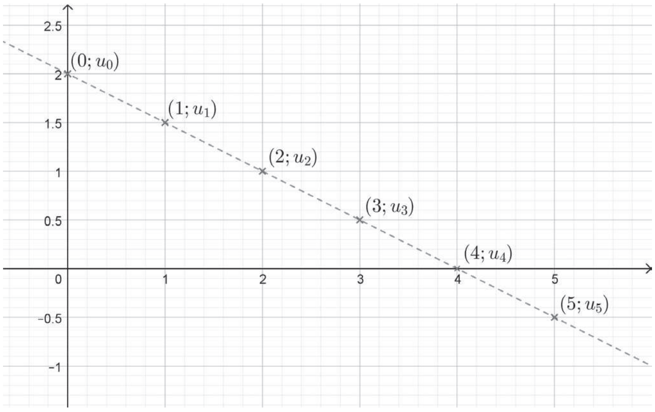
33 **a.** $10 - 6 = 6 - 2$ donc 2 ; 6 et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 4.
b. Non. $n + u - n = 4$ et $n - (n - 3) = 3$.
c. Oui, de raison x.
$3x + 1 - (2x + 1) = x$ et $2x + 1 - (x + 1)$

34 **a.** $u_{20} = u_0 + 20r = 1 + 20 \times 2 = 41$.
b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = \dfrac{u_0 + u_{20}}{2} \times 21 = 21 \times 21 = 441$.

35 **a.** $u_9 = u_4 + 5r$, $r = \dfrac{u_9 - u_4}{5} = \dfrac{10-2}{5} = \dfrac{8}{5}$.
b. $u_0 + 4r = u_4$, $u_0 = u_4 - 4r = 2 - \dfrac{32}{5} = -\dfrac{22}{5}$.
$u_0 + u_1 + \ldots + u_9 = \dfrac{u_0 + u_9}{2} \times 10 = 28$.

36 $u_n = u_0 + nr$, $n = \dfrac{u_n - u_0}{r} = \dfrac{123}{3} = 41$.

37 **a.**



b. Ils sont alignés.
Notons $A_1(1\,;u_1)$, $A_2(2\,;u_2)$, $A_3(3\,;u_3)$, $A_4(4\,;u_4)$
$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_4}\left(1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$

Suites géométriques

38 **a.** $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison 3.
b. $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
c. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{13}{5}$; $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
d. (u_n) n'est pas géométrique.
e. $u_{n+1} = -u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison -1.

39 **a.** Oui car $\dfrac{-6}{3} = \dfrac{12}{-6}$ (de raison -2).
b. Oui pour $n = 0$, et non pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n^2}{5n} = \dfrac{\frac{n^3}{5}}{n^2} = \dfrac{n}{5}$.
c. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2$. Oui pour $x = 2$.

40 **a.** $u_6 = u_0 \times q^6 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{3}{64}$.

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_6 = u_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = 3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\frac{1}{2}}$

$= 6\left(1-\dfrac{1}{128}\right) = \dfrac{6\times 127}{128} = \dfrac{381}{64}.$

41 **a.** $u_6 = u_4 \times q^2$, $q^2 = 2$, $q = -\sqrt{2}$ car $q = \dfrac{u_5}{u_4} < 0$.

b. $u_0 = \dfrac{u_4}{q^4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$; $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = u_0 \times \dfrac{q^{11}-1}{q-1}$

$= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}^{11}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{32\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}.$

42 $u_n = u_0 \times 2^n$, $2^n = 256$, $n = 8$.

43 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty.$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0.$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+2}}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0.$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{2}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right) = 0.$

44 **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} - 1 = \dfrac{1}{5}u_n - \dfrac{1}{5}$

$= \dfrac{1}{5}(u_n - 1) = \dfrac{1}{5}v_n.$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 5 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$,

$u_n = v_n + 1 = 5 \times \dfrac{1}{5^n} + 1 = \dfrac{1}{5^{n-1}} + 1.$

c. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Compléments sur les suites arithmétiques et géométriques

45 Si $r \leqslant 0$ alors (u_n) est décroissante et si $r \geqslant 0$ alors (u_n) est croissante.

46 Si $0 < q \leqslant 1$ alors (u_n) est décroissante et si $q \geqslant 1$ alors (u_n) est croissante.

47 **a.** Elle semble arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. Elle semble géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

c. Elle ne semble ni arithmétique ni géométrique.
d. Elle semble arithmétique de raison -1.

48 **1.** $u_n = u_1 + (n-1)r = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$.

2. a. $S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n = \dfrac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2} \times n$

$= \dfrac{10 + 2(n-1)}{2} \times n = (n+4)n.$

b. $T_n = \dfrac{(n+4)n}{n} = n + 4$; $T_{n+1} - T_n = 1$ donc (T_n) est arithmétique de raison 1.

49 **1.** $u_1 = u_0 - 2\times 0 + 5 = 8$, $u_2 = 11$; $u_3 = 12$.
2. (u_n) n'est pas arithmétique : $u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$.
3. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$
$= u_{n+1} - 2(n+1) + 5 - (u_n - 2n + 5)$
$= u_{n+1} - u_n - 2 = v_n - 2.$
donc (v_n) est arithmétique de raison -2.

4. a. $S_n = \dfrac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) = \dfrac{5 + 5 - 2n}{2} \times (n+1)$

$= (5-n)(n+1)$

$= -n^2 + 4n + 5.$
b. $S_n = u_{n+1} - u_0$, $u_{n+1} = u_0 + S_n = -n^2 + 4n + 8$.
c. $u_n = -(n-1)^2 + 4(n-1) + 8 = -n^2 + 6n + 3$.

50 **1.** $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{4}{3}$; $u_3 = \dfrac{11}{9}$.

2. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique :

$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}u_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{3}\left(u_n - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_n.$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -\dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et

$u_n = v_n + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}.$

c. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$= -\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{9}{4}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n.$

d. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = v_0 + \dfrac{3}{2} + v_1 + \dfrac{3}{2} + \ldots + v_n + \dfrac{3}{2}$

$= v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \dfrac{3}{2}(n+1)$

$= -\dfrac{9}{4}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{3}{2}(n+1)$

$= -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2}n + \dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$= -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2}n + \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3^n}.$

51 **1.** Choix 1 : 1 320 000 + 70 000 = 1 390 000.

Choix 2 : $1\,320\,000 + \dfrac{5}{100} \times 1\,320\,000 = 1\,386\,000$.

2. $a_{n+1} = a_n + 70\,000$, $b_{n+1} = b_n + \dfrac{5}{100}b_n = 1{,}05b_n$.

3. a. Choix 1 : 16 350 000, choix 2 : 16 602 818,15.

Nombre d'années	Choix 1	Choix 2
0	1320000	1320000
1	1390000	1386000
2	1460000	1455300
3	1530000	1528065
4	1600000	1604468,25
5	1670000	1684691,663
6	1740000	1768926,246
7	1810000	1857372,558
8	1880000	1950241,186
9	1950000	2047753,245
10	2020000	2150140,907

b. Choix 2.
c. Le choix 2 est plus avantageux s'il s'engage pour au moins 5 ans.

52 **1. a.** $u_1 = -2$; $u_2 = -3$; $u_3 = -2$; $u_4 = 1$.
b. (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique :
$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) - 3 - (u_n + 2n - 3)$
$= u_{n+1} - u_n + 2 = v_n + 2$.
donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

b. $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = \dfrac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n$
$= \dfrac{v_0 + v_0 + (n-1)\times 2}{2} \times n$
$= (v_0 + n - 1)n = (n-4)n$.
On en déduit $u_n - u_0 = (n-4)n$
et $u_n = (n-4)n + u_0 = n^2 - 4n + 1$.

53 **1.** $u_p + u_q = u_0 + pr + u_0 + qr = 2u_0 + (p+q)r$
$= 2u_0 + (p' + q')r = u_0 + p'r + u_0 + q'r$
$= u_{p'} + u_{q'}$.

2. $v_pv_q = v_0 \times r^p \times v_0 \times r^q = v_0 \times v_0 \times r^{p+q}$
$= v_0 \times v_0 \times r^{p'+q'} = v_0r^{p'} \times v_0r^{q'} = v_{p'} \times v_{q'}$.

54 On désigne par r la raison de la suite cherchée. On a : $x = y - r$ et $z = y + r$, donc y et r sont les solutions du système :

$$\begin{cases}(y-r) + y + (y+r) = 9\\(y-r)^2 + y^2 + (y+r)^2 = 59\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3y = 9\\3y^2 + 2r^2 = 59\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}y = 3\\r^2 = 16\end{cases}$$

Si $r = 4$, on a : $(x, y, z) = (-1 ; 3 ; 7)$.
Si $r = -4$, on a : $(x, y, z) = (7 ; 3 ; -1)$.

55 **a.** $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \dfrac{1}{u_n} = 2 + v_n$
donc (v_n) est arithmétique de raison 2.

b. $v_n = v_0 + n \times 2 = 1 + 2n$; $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{1+2n}$.

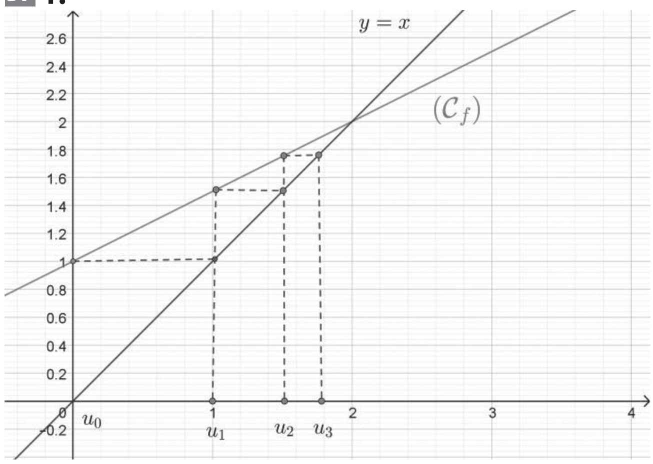
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$.

56 **a.** $u_n = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{n+1}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)}$
$= \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

57 **1.**



2. Conjectures : (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3. $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

4. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \dfrac{1}{2}u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 2)$
$= \dfrac{1}{2}v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

et $u_n = v_n + 2 = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$.

c. $u_{n+1} - u_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 + 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2$
$= -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(-\dfrac{1}{2} + 1\right)$
$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$.

58 **1.** $u_{n+1} - u_n = 2^n$ et 2^n n'est pas une constante donc (u_n) n'est pas arithmétique.
2. $v_n = u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$.

3. a. $S_n = v_0 \times \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$

b. $S_n = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$

donc $u_{n+1} = S_n + 1 = 2^{n+1} - 1 + 1 = 2^{n+1}$.

$u_n = S_{n-1} + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

59 **a.** S_1 est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$S_1 = \dfrac{1+100}{2} \times 100 = 101 \times 50 = 5\,050.$

b. Posons $u_0 = 1$ et $u_n = 99$, $u_n = u_0 + n \times 2$,

donc $99 = 1 + 2n$ et $n = 49$.

Donc $S_2 = \dfrac{1+99}{2} \times 50 = 2\,500.$

c. Posons $u_0 = 14$ et $u_n = -66$, $u_n = u_0 + n \times (-5)$
donc $-66 = 14 - 5n$ et $n = 16$.

Donc $S_3 = \dfrac{14-66}{2} \times 17 = -26 \times 17 = -442.$

60 **a.** $S_1 = 1 \times \dfrac{2^{11}-1}{2-1} = 2^{11} - 1 = 2\,047.$

b. $S_2 = \dfrac{1 \times (-3)^{11} - 1}{-3-1} = \dfrac{(-3)^{11} - 1}{-4} = \dfrac{-3^{11} - 1}{-4} = \dfrac{3^{11}+1}{4}$

$= 44\,287.$

c. $S_3 = 3^5 \times \dfrac{3^{16}-1}{3-1} = \dfrac{3^{16} - 3^5}{2} = 21\,523\,239.$

61 **a.** $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \dfrac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} + 3}$

$= \dfrac{\dfrac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n+4}}{\dfrac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n+4}}$

$= \dfrac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \dfrac{1}{5} v_n.$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{5} v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

b. $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$;

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow u_n v_n + 3v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow (1 - v_n)u_n = 1 + 3v_n$,

$u_n = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n} = \dfrac{1 + \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}.$

c. $u_n = -3 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = -3 + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \Leftrightarrow 1 = -3$, ce qui est impossible.

62 **1. a.** $S_n - qS_n = 1 + q + \ldots + q^n - (q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1})$
$= 1 - q^{n+1}$.

b. D'après **a.** $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ donc $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. a. $u_1 = u_0 \times q$, $u_2 = u_0 \times q^2$ et $u_n = u_0 \times q^n$.

b. $s_n = u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$ donc $s_n = u_0 S_n$.

c. $s_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 3 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$= 3 \times \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 3(2^{n+1} - 1).$

63 La droite est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Donc $u_n = \dfrac{f(n) + f(n+1)}{2} \times (n + 1 - n)$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2}n + 1 + \dfrac{1}{2}(n+1) + 1}{2} = \dfrac{n + \dfrac{5}{2}}{2} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{5}{4}.$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{n}{2} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et par conséquent (u_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

64 **a.** Notons u_n le nombre de personnes recevant l'information à la $n^{\text{ième}}$ minute. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.
Le nombre de personnes qui connaissent l'information…
- au bout de 2 minutes : $1 + 2 + 4 = 7$,
- au bout de 3 minutes : $7 + 8 = 15$,
- au bout de 6 minutes : $15 + 16 + 32 + 64 = 127$.

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$

c. $2^{n+1} - 1 \geqslant 8\,000\,000 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 8\,000\,001$

$\Leftrightarrow 2^n \geqslant \dfrac{8\,000\,001}{2} \Leftrightarrow n \geqslant 22$

donc on peut mettre au courant les 8 millions de personnes en seulement 22 minutes.

Se tester

65 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ;

7. Faux ; **7.** Vrai.

66 **1.** Faux. $u_0 = \dfrac{2\times 0+7}{0+2} = \dfrac{7}{2}$ et $u_1 = \dfrac{2\times 1+7}{1+2} = \dfrac{9}{3}$

donc $u_1 < u_0$.

2. Vrai. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+7}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3. Vrai. $w_n = \dfrac{\dfrac{2n+7}{n+2}+1}{\dfrac{2n+7}{n+2}-2} = \dfrac{\dfrac{2n+7}{n+2}+\dfrac{n+2}{n+2}}{\dfrac{2n+7}{n+2}-\dfrac{2n+4}{n+2}} = \dfrac{\dfrac{3n+9}{n+2}}{\dfrac{3}{n+2}}$

$= \dfrac{3n+9}{n+2}\times\dfrac{n+2}{3} = \dfrac{3n+9}{3}$

$w_{n+1} - w_n = n+1+3-(n+3) = 1$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison 3.

4. Vrai. Voir la réponse à la question 3.

5. Faux. $v_1 = f(v_0) = f(3) = \dfrac{2\times 3+7}{3+2} = \dfrac{13}{5}$ et $v_0 = 3$ donc $v_1 < v_0$.

6. Faux. $\lim\limits_{x\to+\infty} w_n = \lim\limits_{x\to+\infty} (n+3) = +\infty$.

67 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. a.** ; **5. c.**

68 **1. a.** En effet, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2}{(n+1)^2+2} - \dfrac{-2}{n^2+2}$

$= \dfrac{-2}{n^2+2n+3} + \dfrac{2}{n^2+2} = \dfrac{-2(n^2+2)+2(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}$

$= \dfrac{4n+2}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}$.

Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $n \geqslant 0$, par conséquent $n^2 + 2n+3 > 0$, $n^2+2 > 0$ et $u_n + 2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

2. a. En effet, pout tout n de $\mathbb{N}$, on a $(-1)^n \geqslant -1$ donc $n + (-1)^n \geqslant n-1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n = +\infty$.

3. b. En effet, $S_n = u_0 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}} = 5\times\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\dfrac{1}{3}}$

$= 3\times 5\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 15\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 15$.

4. c. En effet, pout tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$

donc $2-1 \leqslant 2+\sin n \leqslant 2+1$,

donc $0 < 1 \leqslant 2+\sin n \leqslant 3$, par conséquent

$\dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{2+\sin n} \geqslant \dfrac{1}{3}$, $1 \geqslant \dfrac{1}{2+\sin n} \geqslant \dfrac{1}{3}$

donc $3\times 1 \geqslant \dfrac{3}{2+\sin n} \geqslant 3\times\dfrac{1}{3}$

c'est-à-dire $3 \geqslant u_n \geqslant 1$.

Exercices d'approfondissement

69 **Somme et produit de suites**

1. a. $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n$
$= u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n$, or $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$
donc $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ et (w_n) est croissante.

b. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de raisons respectives r et r'

alors $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n$
$= u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n = r + r'$.
Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $r + r'$.

2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques de raisons respectives q et q'
alors $t_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = qu_nq'v_n = qq'u_nv_n = qq't_n$.
Donc la suite (t_n) est géométrique de raison qq'.

70 **Encadrement du terme général**

• $u_n > 0{,}99 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{n+2} > 0{,}99 \Leftrightarrow n-1 > 0{,}99n + 1{,}98$
$\Leftrightarrow 0{,}01n > 2{,}98 \Leftrightarrow n > 298$.

• $-1 < 2 \Rightarrow n-1 < n+2 \Rightarrow \dfrac{n-1}{n+2} < 1 < 1{,}01$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

• $n_0 = 299$ convient.

71 **Suite et calculatrice**

a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1+2}{(n+1)^3+(n+1)^2} - \dfrac{n+2}{n^3+n^2}$

$= \dfrac{(n+3)(n^3+n^2)-(n+2)[(n+1)^3+(n+1)^2]}{[(n+1)^3+(n+1)^2][n^3+n^2]}$

$= \dfrac{-(2n^3+10n^2+12n+4)}{[(n+1)^3+(n+1)^2][n^3+n^2]} \leqslant 0$ (car $n \geqslant 0$).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=0.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0.$

c. On effectue quelques essais et on trouve : $n_0 = 33$.

72 Suites arithmétiques et géométriques

1. Pour $a = 0$, $u_n = b$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Donc (u_n) est constante sur $\mathbb{N}^*$ et sa limite est b.

Pour $a = 1$, $u_{n+1} = u_n + b$, donc (u_n) est arithmétique de raison b.

Si $b = 0$ alors $u_n = u_0$ donc la suite est constante et égale à u_0 ;

Si $b > 0$ alors (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Si $b < 0$ alors (u_n) est décroissante et tend vers $-\infty$.

2. $ax + b = x \Leftrightarrow b = (1-a)x \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$.

3. α est l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

4. Pour $u_0 = \alpha$, on a $u_1 = \alpha$, $u_2 = \alpha$, …, par conséquent $u_n = \alpha$. Donc (u_n) est constante et converge vers α.

5. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + (1-a)\alpha - \alpha$
$= a(u_n - \alpha) = av_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

b. $v_n = v_0 \times a^n = (u_0 - \alpha)\times a^n$

$u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha)\times a^n + \alpha$.

c. (u_n) est convergente pour $-1 < a < 1$, sa limite est alors égale à α.

73 Un paradoxe de Zénon

1. $d_1 = 8$; $d_2 = 4$; $d_3 = 2$.

2. $d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n$ et $d_n = d_0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. a. On conjecture que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n = 16$.

b. $S_n = 8\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}} = 16\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$= 16 - 16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

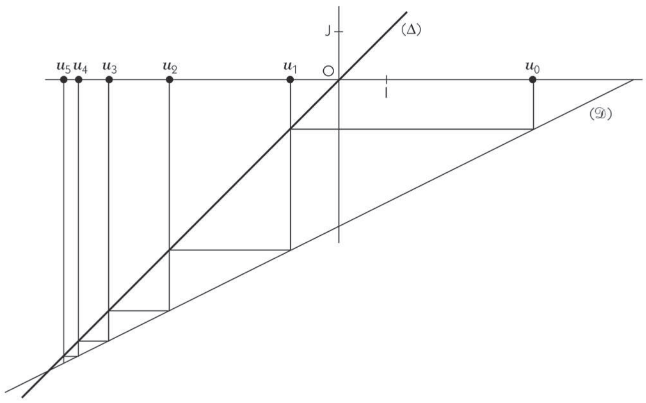
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n = 16$.

4. $S_n = 16 \Leftrightarrow -16\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ce qui est impossible.

74 Suite arithmético-géométrique

1. Dans le repère (O, I, J), on trace les droites (Δ) et $(\mathscr{D})$ d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.

On construit u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 comme indiqué sur la figure.



2. a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{2}u_n - 3\right) - \left(\dfrac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) = \dfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$.

b. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = u_n - u_{n-1}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = -5$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} = -5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$; donc, la suite (u_n) est décroissante.

3. a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n + 6 = \left(\dfrac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) + 6 = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$.

b. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $w_n = u_n + 6$.

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 + 6 = 10$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :

$u_n + 6 = (u_0 + 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = -6$.

75 Conjecture et démonstration

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{9}{10^{n+1}}$.

2. On a : $u_1 = 0{,}1 + \dfrac{9}{10^2}$; $u_2 = u_1 + \dfrac{9}{10^3}$; $u_3 = u_2 + \dfrac{9}{10^4}$; … ; $u_n = u_{n-1} + \dfrac{9}{10^{n+1}}$.

En additionnant membre à membre les n égalités, on obtient : $u_n = 0{,}1 + 9\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right)$.

Entre parenthèses, on a la somme de n termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $\dfrac{1}{10^2}$.

Donc : $u_n = 0{,}1 + \dfrac{9}{10^2}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}} = 0{,}1 + 0{,}1\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

$= 0{,}2 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$.

3. On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0{,}2$.

76 Suites emmêlées

1. a. $u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3} = \frac{4}{3}$; $v_1 = \frac{5}{3}$; $u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3} = \frac{13}{9}$; $v_2 = \frac{14}{9}$; …

b. Conjectures : (u_n) est une suite croissante et (v_n) est décroissante et convergent toutes deux vers $\frac{3}{2}$.

2. a. $S_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3}$
$= u_n + v_n = S_n$

Donc la suite (S_n) est constante et égale à $S_0 = 3$.

$D_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n - v_n}{3}$
$= \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3} D_n$.

Donc la suite (D_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $D_0 = -1$.

b. $S_n + D_n = 2u_n$, $u_n = \frac{S_n + D_n}{2} = \frac{S_0 + D_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$

$= \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$.

$S_n - D_n = 2v_n$, $v_n = \frac{S_n - D_n}{2} = \frac{3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$.

3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$.

77 Suite auxiliaire

a. $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$; $v_1 = \frac{7}{2}$; $v_2 = \frac{13}{2}$; $v_3 = \frac{19}{2}$; $v_4 = \frac{25}{2}$.

b. Conjecture : (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{3u_n + 1}{u_n} = 3 + \frac{1}{u_n} = 3 + v_n$.

c. $v_n = v_0 + 3n = \frac{1}{2} + 3n$ donc $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n} = \frac{2}{1 + 6n}$.

78 Avec paramètre

1. a. Si $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$; (u_n) est une suite constante.

b. Si $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$; (u_n) est une suite alternée (– 1 ; 1 ; – 1 ; 1 ; ...).

c. Si $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$; (u_n) est la suite nulle.

2. Si α est différent des valeurs précédentes, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $\cos\alpha$ tel que : $0 < |\cos\alpha| < 1$; donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

79 Nombres entiers impairs

Notons u_0 le premier entier impair de cette somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme u_0.

$\frac{u_0 + u_{99}}{2} \times 100 = 17\,600$, $\frac{u_0 + u_0 + 2 \times 99}{2} = 17\,600$,
$u_0 + 99 = 176$
$u_0 = 77$. Les nombres sont : 77, 79, 81, … , $77 + 2 \times 99$.

80 Le meilleur choix

• Le premier choix rapporte
$\frac{101 + 100 + 64}{2} \times 64 = 8\,480$.

• Le second choix rapporte $1 \times \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$.

• Le choix le plus intéressant est de loin le second.

81 Suites extraites

1. a. $f(x) = x \Leftrightarrow 5 + \frac{3}{x+1} = x \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} = x - 5$
$\Leftrightarrow 3 = (x+1)(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{48}}{2}$ car $x \geqslant 0$.
$\Leftrightarrow x = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}$.

b. $f'(x) = -3/(x+1)^2 < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. • Pour $x \leqslant \alpha$, $f(x) \geqslant f(\alpha)$ donc $f(x) \geqslant \alpha$ (car $f(\alpha) = \alpha$); $f(f(x)) \leqslant f(\alpha)$ ainsi $f(f(x)) \leqslant \alpha$.

• Pour $x \geqslant \alpha$, $f(x) \leqslant f(\alpha)$ donc $f(x) \leqslant \alpha$ (car $f(\alpha) = \alpha$); $f(f(x)) \geqslant f(\alpha)$ ainsi $f(f(x)) \geqslant \alpha$.

2. Conjecture : (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

3. a. Conjectures : (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.

b. Conjecture : Les deux suites ont la même limite $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}$.

82 Le meilleur placement

1. a. On pose : C_0 = 1 000 000 ; l'intérêt annuel est $0{,}065 \times C_0$, c'est-à-dire 65 000 F.

$C_1 = C_0 + 65\,000 = 1\,065\,000$;

$C_2 = C_1 + 65\,000 = 1\,130\,000$;

$C_3 = C_2 + 65\,000 = 1\,195\,000$.

b. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, on a :

$C_n = C_{n-1} + 65\,000$.

Donc, (C_n) est une suite arithmétique de premier terme 1 000 000 et de raison 65 000.

2. a. On a : $D_1 = 1\,065\,000$; $D_2 = 1\,134\,225$;

$D_3 \approx 1\,207\,950$.

b. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$, on a :

$D_n = D_{n-1} \times 1{,}065$.

Donc, (D_n) est une suite géométrique de premier terme 1 000 000 et de raison 1,065.

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = 1\,000\,000 + 65\,000\,n$;
donc : $C_{10} = 1\,650\,000$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = 1\,000\,000 \times 1{,}065^n$;
donc : $D_{10} \approx 1\,877\,137$.

83 Les points sur une spirale

1. a. $u_0 = 16$; $u_1 = 16 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$; $u_2 = 8\sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 8$;
$u_3 = 8 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; donc, (u_n) est une suite géométrique de premier terme 16 et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 16 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1}A_n = u_n$;
donc : $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 16 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{16}{\sqrt{2}-1} = 16(\sqrt{2}+1)$.

3. a. $a_0 = \dfrac{1}{2} \times (u_1)^2 = 64$; $a_1 = \dfrac{1}{2} \times (u_2)^2 = 32$;
$a_2 = \dfrac{1}{2} \times (u_3)^2 = 16$; $a_3 = \dfrac{1}{2} \times (u_4)^2 = 8$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{2} \times a_{n-1}$; donc, (a_n) est une suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\dfrac{1}{2}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 64 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = 128 \times \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 128$.

84 Un paradoxe de Zénon

Les distances successives, exprimées en mètres, séparant Achille de la tortue sont : 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...

Ces distances forment une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_0 = 100$.

Le terme général de cette suite est : $u_0 = 100 \times (0{,}1)^n$.

La somme des n premiers termes de cette suite est :

$s_n = 100 \times \dfrac{1-(0{,}1)^n}{1-0{,}1} = \dfrac{1\,000}{9} \times [1-(0{,}1)^n]$.

On en déduit :
- la limite de cette suite est 0, donc Achille rattrappera la tortue ;
- la limite de s_n est $\dfrac{1\,000}{9}$, donc il aura alors parcouru 111,111... m.

85 Carrés coloriés

1. Chaque étape consiste à découper un ou plusieurs carrés non hachurés en 9 carrés égaux et à en hachurer 1 sur les 9. Donc, après chaque découpage, le côté du carré est divisé par 3.

On en déduit :
- après 1 découpage, il reste 8 carrés de côtés $\dfrac{1}{3}$ non hachurés ;
- après 2 découpages, il reste 8×8, c'est-à-dire 8^2 carrés de côtés $\dfrac{1}{3^2}$ non hachurés ;
- après 3 découpages, il reste $8^2 \times 8$, c'est-à-dire 8^3 carrés de côtés $\dfrac{1}{3^3}$ non hachurés...

Donc, si après $n-1$ découpages, il reste 8^{n-1} carrés de côtés $\dfrac{1}{3^{n-1}}$ non hachurés, alors après n découpages, il reste $8^{n-1} \times 8$, c'est-à-dire 8^n carrés carrés de côtés $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^{n-1}}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{3^n}$, non hachurés.

On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, après n découpages, il reste 8^n carrés de côtés $\dfrac{1}{3^n}$ non hachurés.

2. a. $a_1 = 1 - 8 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$;

$a_2 = 1 - 8^2 \times \left(\dfrac{1}{3^2}\right)^2 = 1 - 8^2 \times \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{17}{81}$;

$a_3 = 1 - 8^3 \times \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^2 = 1 - 8^3 \times \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{217}{729}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 - 8^n \times \left(\dfrac{1}{3^n}\right)^2$

$= 1 - 8^n \times \dfrac{1}{3^{2n}} = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

86 Bassins et fuites

a. La contenance de B_1 à la fin du 30e jour est :

$50 - \dfrac{20}{100\,000} \times 30 = 49{,}994$ m^3.

Celle de B_2 est :

$50 \times \dfrac{1-0{,}9^{31}}{1-0{,}9} = 500(1-0{,}9^{31}) \simeq 48{,}1$ m^3

b. $\dfrac{50}{\dfrac{20}{100\,000}} = 250\,000$

donc B_1 sera vidé à la fin du 250 000e jour.

B_2 ne se videra jamais : à la fin du ne jour sa contenance sera de $500 \times 0{,}9^n$ qui n'est nulle que lorsque n tend vers l'infini.

87 Étude d'une épidémie

a. $C_{n+1} = C_n - \frac{30}{100} C_n = 0{,}7\, C_n$,

donc $C_n = C_0 \times 0{,}7^n = 5\,000 \times 0{,}7^n$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 0$ donc l'épidémie tend à disparaître.

Problèmes

88 Évolution du nombre d'abonnés

1. $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 2\,000$.

2. $0{,}8x + 2\,000 = x \Leftrightarrow 0{,}2x = 2\,000 \Leftrightarrow x = 10\,000$.

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 10\,000 = 0{,}8u_n - 8\,000$
$= 0{,}8(u_n - 10\,000) = 0{,}8v_n$.

Donc la suite(v_n) est géométrique de raison 0,8.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car (v_n) est géométrique de raison 0,8.

c. $u_n = v_n + 10\,000$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10\,000$ ce qui signifie que le nombre de clients de cet opérateur se stabilisera aux alentours de 10 000 clients.

89 Suites adjacentes

1. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$
($\Delta = -8 < 0$ et $3 > 0$), donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$ donc $f(0) < f(\alpha) < f(1)$ d'où $0 < \alpha < 1$.
Car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$
$= \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2} w_n$.

Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, $w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2} w_n$.

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

4. Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$ alors $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n = 0$

Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$

alors $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$

Donc (u_n) est croissante.

On montre de la même façon que (v_n) est décroissante.

5. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n)$,
$f(u_n) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(v_n)$
donc $u_n \leqslant \alpha \leqslant v_n$, par conséquent $\ell \leqslant \alpha \leqslant \ell'$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ d'après **3. b.** donc $\ell' - \ell = 0$.

b. D'après **5. a.** on a $\ell \leqslant \alpha \leqslant \ell'$ et $\ell' = \ell$ donc $\ell' = \ell = \alpha$.

6. $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{128} \Leftrightarrow n \geqslant 7$. Donc $u_7 \leqslant \alpha \leqslant v_7$ est un encadrement d'amplitude $\frac{1}{128}$.

90 Demi-vie de l'iode 131

a. $u_{n+1} = u_n - \frac{8{,}3}{100} u_n = 0{,}917 u_n$,

$u_n = u_0 \times 0{,}917^n = 1\,000\,000 \times 0{,}917^n$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, par conséquent la quantité d'iode tend à disparaître. (Elle disparaîtra le jour où la valeur de u_n devient plus petite que 1).

b. $u_n = \frac{1}{2} u_0 \Leftrightarrow u_0 \times 0{,}917^n = \frac{1}{2} u_0 \Leftrightarrow 0{,}917^n = \frac{1}{2}$.

À un jour près, la demi-vie du noyau d'iode est de 8 jours.

91 Mythologie et mathématiques

1. a. Soit u_n le nombre de cercles après n divisions ; on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Pour tout entier naturel n, la somme des diamètres de ces 2^n cercles est égale à 2 ; de plus, ces diamètres sont égaux. Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{1}{2^n}$.

b. (r_n) est une suite géométrique de premier terme est 1 et de raison $\frac{1}{2}$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$.

2. a. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n \times \pi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = \frac{\pi}{2^n}$.

(a_n) est une suite géométrique de premier terme π et de raison $\frac{1}{2}$.

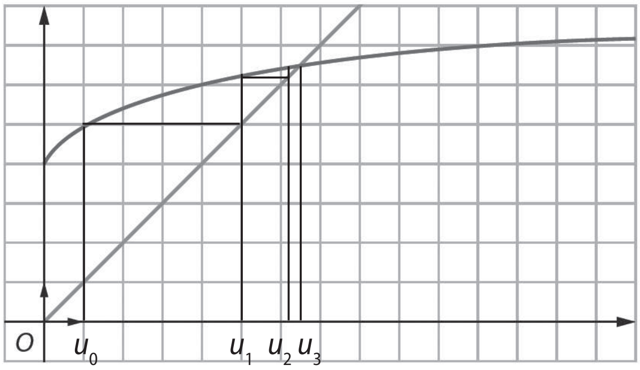
b. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

92 Point fixe

1. a. $f(x) = x \Leftrightarrow 7 - \frac{6}{x+2} = x \Leftrightarrow -\frac{6}{x+2} = x - 7$
$\Leftrightarrow -6 = (x+2)(x-7) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$ car $x \geqslant 0$.

b. $f'(x) = 6/(x+2)^2 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. • On conjecture que : pour $u_0 \in [0 ; \alpha[$, la suite (u_n) est croissante et converge vers α.



• De même, on conjecture que pour $u_0 \in]\alpha ; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante et converge vers α.

3. a. Pour $u_0 \in [0 ; \alpha[$, $u_n \in [0 ; \alpha[$, donc $f(u_n) \geqslant u_n$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

b. Pour $u_0 \in]\alpha ; +\infty[$, $u_n \in]\alpha ; +\infty[$, donc $f(u_n) \leqslant u_n$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

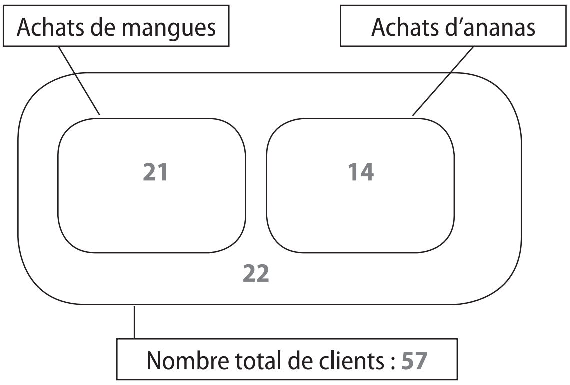
14 Dénombrement

Manuel pages 229 à 242

Activités d'introduction

1 Diagrammes et tableaux à double-entrée

1. a.

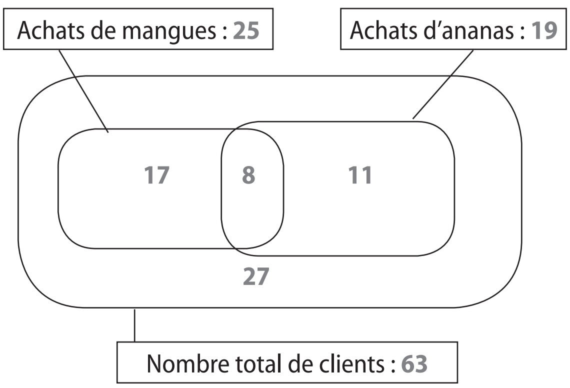


Achat d'ananas \ Achat de mangues	Oui	Non	Total
Oui	0	14	14
Non	21	22	43
Total	21	36	57

b. 22 clients n'ont acheté ni mangues, ni ananas.

2. a. Parmi les 25 clients ayant acheté des mangues, 8 ont aussi acheté des ananas, donc 17 (17 = 25 – 8) ont acheté des mangues mais pas d'ananas.

b.

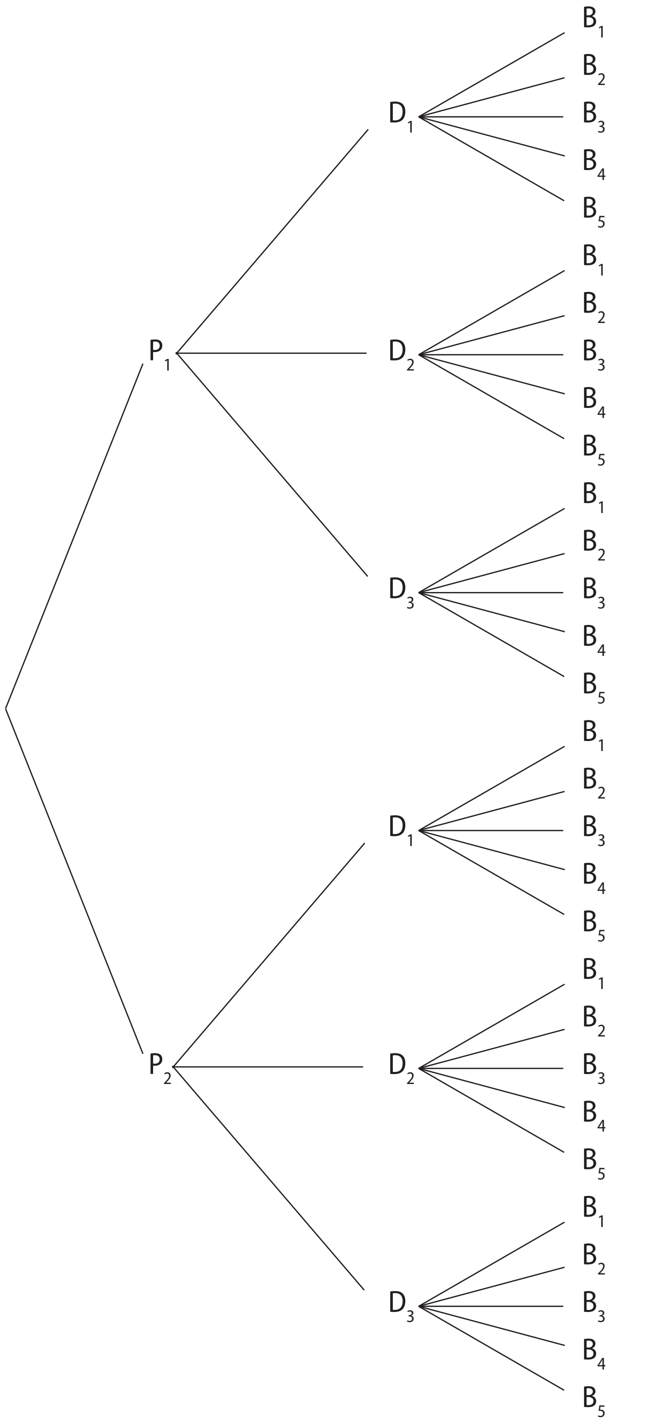


Achat d'ananas \ Achat de mangues	Oui	Non	Total
Oui	8	11	19
Non	17	27	44
Total	25	38	63

c. 27 clients n'ont acheté ni mangues, ni ananas.

2 Arbres et nombre de choix

1. a. Plats Desserts Boissons



b. Il y a 30 ($2 \times 3 \times 5$) menus possibles.

2. a.

2	3	5
Plats	Desserts	Boissons

→ Nombre total de choix : $2 \times 3 \times 5 = 30$.

b. Il y a 30 menus possibles.

3 *p*-uplets et arrangements

(A) *p*-uplets : lettres distinctes ou non

1. a.

4	4	4
1re lettre	2e lettre	3e lettre

→ Nombre de choix : $4^3 = 64$.

b. Il y a 64 mots possibles de 3 lettres distinctes ou non, choisies dans l'ensemble *E*.

2.

5	5	5
1re lettre	2e lettre	3e lettre

→ Nombre de choix : $5^3 = 125$.

Il y a 125 mots possibles de 3 lettres distinctes ou non, choisies dans l'ensemble *F*.

3.

n	n	…	n
1re lettre	2e lettre	…	pe lettre

→ Nombre de choix : n^p

Il y a n^p mots possibles de p lettres distinctes ou non, choisies parmi n lettres.

(B) Arrangements : lettres distinctes

1. a.

4	3
1re lettre	2e lettre

→ Nombre de choix : $4 \times 3 = 12$.

b. Il y a 12 mots possibles de 2 lettres distinctes choisies dans l'ensemble *E*.

2. a.

5	4	3
1re lettre	2e lettre	3e lettre

→ Nombre de choix : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Il y a 60 mots possibles de 3 lettres distinctes choisies dans l'ensemble *G*.

b.

6	5	4	3
1re lettre	2e lettre	3e lettre	4e lettre

→ Nombre de choix : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Il y a 360 mots possibles de 4 lettres distinctes choisies dans l'ensemble *H*.

3.

n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$
1re lettre	2e lettre	3e lettre	4e lettre	5e lettre

→ Nombre de choix :
$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$

Il y a $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ mots de 5 lettres distinctes choisies dans l'ensemble *I*.

4 La notation factorielle et les permutations

1. a. • $1! = 1$; • $3! = 6$; • $5! = 120$; • $6! = 720$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}_{}$$

$$n! = n \times \qquad (n-1)!$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

2.

4	3	2	1
choix 1	choix 2	choix 3	choix 4

→ Nombre de choix : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

Les quatre collègues de travail ont 4! (c'est-à-dire 24) façons différents de s'asseoir.

Savoir-faire

3 On peut utiliser un tableau à double-entrée (ou un diagramme) pour répondre.

Sport individuel / Sport collectif	Oui	Non	Total
Oui	17	36 = 53 – 17	53
Non	8 = 25 – 17	23 = 59 – 36	31 = 84 – 53
Total	25	59 = 84 – 25	84

23 élèves interrogés ne pratiquent ni sport individuel, ni sport collectif.

4 $B_2 = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}$, $B_3 = \{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15\}$, $B_5 = \{5 ; 10 ; 15\}$, $B_7 = \{7 ; 14\}$.

B_2, B_3, B_5, B_7 ne forment pas une partition de *E* car, par exemple, $B_2 \cap B_3 = \{6 ; 12\}$ donc $B_2 \cap B_3 \neq \emptyset$.

8 Pour chaque chiffre, il y a 10 choix : de 0 à 9. Ainsi :

10	10	10	10
1er choix	2e choix	3e choix	4e choix

→ Nombre total de choix : $10^4 = 10\,000$.

Il y a donc 10 000 codes possibles.

9 $A = 6! = 720$; $B = 7! = 5\,040$.

10

5	4	3	2	1
1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	5e rang

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$.

La bibliothécaire peut ranger ces livres de 120 façons différentes.

14

5	4	3
1re place	2e place	3e place

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 = A_5^3 = 60$.

Ces voitures peuvent se ranger de 60 façons possibles.

15 On choisit 5 personnes parmi 8, sans répétition et sans que l'ordre des personnes n'ait d'importance.

$C_8^5 = 56$. On peut constituer 56 équipes différentes.

16 • $A_6^2 = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30.$

• $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!\,(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4!6!}$

$= \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = \dfrac{10 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 10 \times 3 \times 7 = 210.$

Exercices d'entraînement

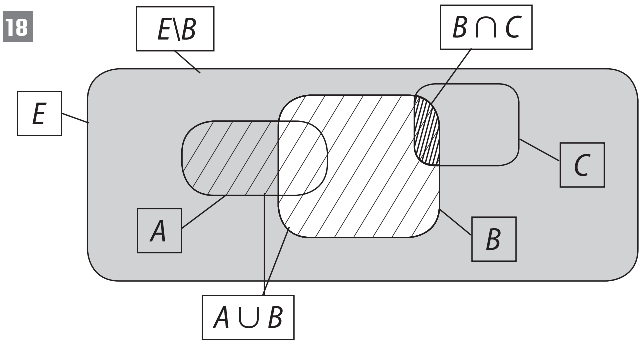
Cardinal d'un ensemble, partition

17 **a.** Card $E = 11$.

b. Card $E = 26$.

c. Card $E = 8$.

18



19 **a.** Exemple de partition de E à deux sous-ensembles A et B.

$A = \{a\,;b\,;h\}$, $B = \{c\,;d\,;e\,;f\,;g\}$.

b. Exemple de partition de E à trois sous-ensembles A, B et C.

$A = \{b\,;d\}$, $B = \{a\,;c\,;g\}$, $C = \{e\,;f\,;h\}$.

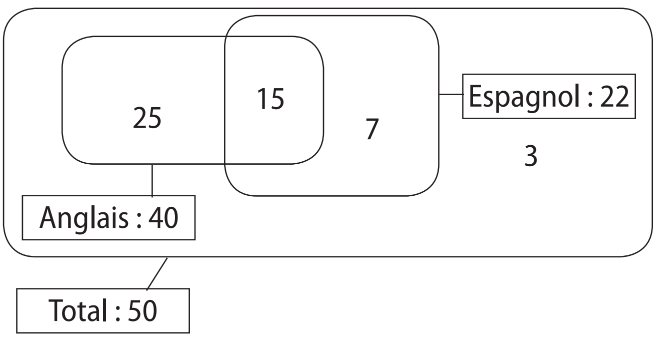
c. Exemple de partition de E à sept sous-ensembles A à G.

$A = \{a\,;b\}$, $B = \{c\}$, $C = \{d\}$, $D = \{e\}$, $E = \{f\}$, $F = \{g\}$, $G = \{h\}$.

20 **a.**

Anglais / Espagnol	Oui	Non	Total
Oui	15 = 22 – 7	7 = 10 – 3	22 = 50 – 28
Non	25 = 28 – 3	3	28
Total	40	10 = 50 – 40	50

b.



21 Q désigne l'ensemble des personnes ayant entendu la publicité à 15 h ;

S désigne l'ensemble des personnes ayant entendu la publicité à 16 h.

D'après l'énoncé, Card $Q = 21\,400$; Card $S = 24\,800$ et Card $(Q \cap S) = 4\,600$.

D'après le cours.

Card $(Q \cup S)$ = Card Q + Card S – Card $(Q \cap S)$

Card $(Q \cup S) = 21\,400 + 24\,800 - 4\,600$

Card $(Q \cup S) = 41\,600$.

Ainsi, 41 600 personnes ont entendu cette publicité à 15 h ou à 16 h.

22 $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\,;\{0\}\,;\{1\}\,;\{2\}\,;\{0\,;1\}\,;\{0\,;2\}\,;\{1\,;2\}\,;E\}$.
Card $\mathscr{P}(E) = 2^3 = 8$.

23 $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset\,;\{A\}\,;\{B\}\,;\{C\}\,;\{D\}\,;\{A\,;B\}\,;\{A\,;C\}\,;\{A\,;D\}\,;\{B\,;C\}\,;\{B\,;D\}\,;\{C\,;D\}\,;\{A\,;B\,;C\}\,;\{A\,;C\,;D\}\,;\{A\,;B\,;D\}\,;\{B\,;C\,;D\}\,;E\}$. Card $\mathscr{P}(E) = 2^4 = 16$.

24 **a.** $A_2 = \{2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\}$, $A_3 = \{3\,;6\,;9\,;12\}$, $A_5 = \{5\,;10\}$, $A_7 = \{7\}$.

b. A_2, A_3, A_5, A_7 ne forment pas une partition de E car, par exemple, $A_2 \cap A_3 = \{6\,;12\}$, donc $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$.

25 **a.** $B_3 = \{6\,;21\}$, $B_4 = \{4\,;16\,;64\}$, $B_5 = \{10\,;25\}$, $B_7 = \{7\,;14\,;21\}$.

b. Les ensembles B_3, B_4, B_5 et B_7 ne forment pas une partition de E car, par exemple, $B_3 \cap B_7 = \{21\}$, donc $B_3 \cap B_7 \neq \emptyset$.

Produit cartésien, *p*-uplets

26 **a.** $E \times F = \{(A\,;1)\,;(A\,;2)\,;(A\,;3)\,;(B\,;1)\,;(B\,;2)\,;(B\,;3)\}$.

b. $E \times F \times E = \{(A\,;1\,;A)\,;(A\,;1\,;B)\,;(A\,;2\,;A)\,;(A\,;2\,;B)\,;(A\,;3\,;A)\,;(A\,;3\,;B)\,;(B\,;1\,;A)\,;(B\,;1\,;B)\,;(B\,;2\,;A)\,;(B\,;2\,;B)\,;(B\,;3\,;A)\,;(B\,;3\,;B)\}$.

c. $F \times E = \{(1\,;A)\,;(2\,;A)\,;(3\,;A)\,;(1\,;B)\,;(2\,;B)\,;(3\,;B)\}$.

27 • Card $(E \times F) = 2 \times 3 = 6$;

• Card $(E \times F \times E) = 2 \times 3 \times 2 = 12$;

• Card $(E^5) = 2^5 = 32$;

• Card $(F^4) = 3^4 = 81$;
• Card $(E^2 \times F^3) = 2^2 \times 3^3 = 108$;
• Card $(E^3 \times F^2) = 2^3 \times 3^2 = 72$.

28 **a.** $\mathscr{E}$ possède 12 éléments.
b. $\mathscr{E} = \{(A ; 1 ; a) ; (B ; 1 ; a) ; (A ; 2 ; a) ; (B ; 2 ; a) ; (A ; 3 ; a) ; (B ; 3 ; a) ; (A ; 1 ; b) ; (B ; 1 ; b) ; (A ; 2 ; b) ; (B ; 2 ; b) ; (A ; 3 ; b) ; (B ; 3 ; b)\}$.

29 **a.** Voici trois exemples de résultats : $(F ; 3 ; P)$, $(F ; 4 ; F)$, $(P ; 1 ; P)$.
b. Il y a 16 résultats possibles. $(2 \times 4 \times 2 = 16)$.

30 • $(A ; A) \in \mathscr{E}$ et $(C ; D) \in \mathscr{E}$.
Card $\mathscr{E} = 4^2 = 32$.
• $(A ; A ; A ; A) \in \mathscr{E}$ et $(B ; C ; A ; C) \in \mathscr{E}$.
Card $\mathscr{E} = 4^4 = 128$.
• $(A ; A ; A ; A ; A ; A ; A ; A ; A ; A) \in \mathscr{E}$ et $(A ; B ; C ; D ; A ; B ; C ; D ; A ; B) \in \mathscr{E}$.
Card $\mathscr{E}^{10} = 4^{10} = 1\,048\,576$.

31

10 choix	10 choix	…	10 choix
1er chiffre	2e chiffre	…	8e chiffre

→ Nombre total de choix : $10^8 = 100\,000\,000$.
Il y a cent millions numéros de téléphone possibles.

32 **a.** Avec les lettres A, B, C, D, on peut former 4^5 mots de cinq lettres distinctes ou non, c'est-à-dire 1 024 mots.
b. Avec les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, on peut former 8^5 mots de cinq lettres distinctes ou non, c'est-à-dire 32 768 mots.

33 L'enfant dispose de 7 couleurs différentes et trois cases à colorier, il peut donc colorier le drapeau de 7^3, c'est-à-dire 343 façons différentes.

Notation factorielle, permutations

34 • $3! = 6$; • $5! = 120$; • $6! = 720$.

35 À la calculatrice, on trouve :
• $9! = 362\,880$; $12! = 479\,001\,600$; $13! = 6\,227\,020\,800$.

36 **a.** L'arbre contient 6 branches, il y a donc 6 cas possibles.
b. Il y a 4!, c'est-à-dire 24 cas possibles.
c. Il y a 6!, c'est-à-dire 120 cas possibles.

37 **a.** $A = \dfrac{12!}{10!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$;

$B = \dfrac{15!}{14!} = \dfrac{15 \times 14!}{14!} = 15$;

$C = \dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,
• $n! = n \times (n - 1)!$
• $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2)!$

38 • Faux, par exemple pour $n = 3$:
$2 \times 3! = 2 \times 6 = 12$ et $(2 \times 3)! = 6! = 720$.
• Faux, par exemple pour $n = 3$:
$3^2! = 9! = 362\,880$ et $3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$.
• Faux, par exemple pour $n = 3$:
$2 \times 3 + 1! = 6 + 1! = 6 + 1 = 7$
et $(2 \times 3 + 1)! = 7! = 5\,040$.

39 **a.** $(A ; B ; C ; D)$ et $(D ; B ; A ; C)$ sont deux exemples de permutations de E.
Il y a 4!, c'est-à-dire 24 permutations possibles.
b. $(-3 ; 1 ; -1 ; 0 ; -2 ; 1 ; 2)$ et $(0 ; 1 ; 2 ; -3 ; -2 ; -1)$ sont deux exemples de permutations de E.
Il y a 6!, c'est-à-dire 720 permutations possibles.

40 Il y a 8!, c'est-à-dire 40 320 positions de départ possibles.

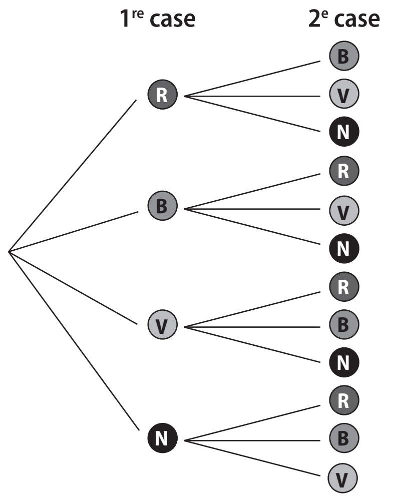
41 **a.** Il y a 8!, c'est-à-dire 40 320 façons différentes de garer 8 voitures dans 8 places de parking.
b. En considérant qu'une neuvième voiture « fantôme » se gare sur la place vide, cela revient à considérer les permutations à 9 éléments.
Il y a donc 9!, c'est-à-dire 362 880 façons de garer ces voitures.

Arrangements, combinaisons

42 **a.** • $A_3^1 = \dfrac{3!}{(3-1)!} = \dfrac{3!}{2!} = 3$.
• $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = 12$.
• $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 60$.
b. • $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!\,2!} = 3$.
• $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$.
• $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$.

43 À la calculatrice, on trouve :
a. • $A_{12}^5 = 95\,040$; • $A_{14}^7 = 17\,297\,280$; • $A_7^3 = 210$.
b. • $C_8^3 = 56$; • $C_{10}^4 = 210$; • $C_{20}^{12} = 125\,970$.

44 a.



Ainsi, il y a 12 cas possibles (cela correspond au nombre d'arrangements A_4^2).

b. • Dans cette situation, il y a A_4^3, c'est-à-dire 24 cas possibles.

• Dans cette situation, il y a A_5^2, c'est-à-dire 20 cas possibles.

45 Il y a A_{25}^6, c'est-à-dire 127 512 000 classements possibles.

46 • Pour tout n de $\mathbb{N}$, $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

et $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = \dfrac{n!}{n! \times 1} = 1$.

Ainsi, $C_n^0 = C_n^n$.

• Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

et $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Ainsi, $C_n^p = C_n^{n-p}$.

• Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$,

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$
$$= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times \ldots \times 2 \times 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-p)!}.$$

47 a. Triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

b. D'après les coefficients calculés au **a.**

• $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

• $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

48 L'entraîneur choisit 3 joueurs parmi 15 joueurs, sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre, on dénombre donc des combinaisons.

L'entraîneur peut faire C_{15}^3, c'est-à-dire 455 équipes différentes.

49 Le contrôleur choisit 4 objets parmi 100 objets,

sans répétitions et sans tenir compte de l'ordre, on dénombre donc des combinaisons.

Le contrôleur peut faire C_{100}^4, c'est-à-dire 3 921 225 choix différents.

Se tester

50 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Vrai.

51 Tous les choix s'effectuent sans répétitions (on ne prend pas plusieurs fois le même élève) et sans tenir compte de l'ordre. On dénombre donc des combinaisons.

1. Vrai. En effet, il y a C_{32}^6, c'est-à-dire 906 192 équipes possibles.

2. Faux. En effet, Card (F^6) = 15^6 = 11 390 625 et en choisissant 6 élèves parmi les filles, on peut constituer C_{15}^6, c'est-à-dire 5 005 équipes différentes de filles.

Or, Card (F^6) $\neq C_{15}^6$.

3. Vrai. En effet, le nombre de garçons est 17 (32 – 15). Il y a donc C_{17}^6, c'est-à-dire 12 376 équipes différentes de garçons.

4. Vrai. En effet, on choisit successivement 3 filles parmi 15 filles et 3 garçons parmi 17 garçons. Il y a donc $C_{15}^3 \times C_{17}^3$, c'est-à-dire 309 400 équipes différentes comptant autant de filles que de garçons.

52 **1. c.** ; **2. a.** ; **3. b.** ; **4. a.**

53 **1. a.** En effet, on dénombre des p-listes.

5 choix	5 choix	5 choix	5 choix	5 choix
1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre	4e chiffre	5e chiffre

→ Nombre total de choix : 5^5.

2. b. En effet, on dénombre des permutations.

5 choix	4 choix	3 choix	2 choix	1 choix
1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre	4e chiffre	5e chiffre

→ Nombre total de choix : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

3. b. En effet, on dénombre des arrangements.

8 choix	7 choix	6 choix	5 choix	4 choix
1^{er} chiffre	2^e chiffre	3^e chiffre	4^e chiffre	5^e chiffre

$\longrightarrow$ Nombre total de choix : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = A_8^5$.

4. a. En effet, on dénombre des combinaisons de 3 fruits choisis parmi 8 fruits. Il y a C_8^3, c'est-à-dire 56 choix possibles.

Exercices d'approfondissement

54 Nombre d'atomes dans l'Univers

1. a. $\dfrac{1}{2 \times 10^{-24}} = 5 \times 10^{23}$.

Ainsi, il y a environ 5×10^{23} atomes dans un gramme de matière.

b. $2 \times 10^{33} \times 5 \times 10^{23} = 10^{57}$.

Ainsi, le Soleil contient environ 10^{57} atomes.

c. $100\,000\,000\,000 \times 10^{57} = 10^{68}$.

Ainsi, notre galaxie, la Voie Lactée, contient environ 10^{68} atomes.

2. $1\,000\,000\,000\,000 \times 10^{68} = 10^{80}$.

Ainsi, l'Univers contient environ 10^{80} atomes.

55 Distinguer les cas

	Condition sur n et p	Tenir compte de l'ordre dans une liste	Dans une liste, des répétitions sont possibles
p-uplet de E	Non	Oui	Oui
Permutation de E	Oui $n = p$	Oui	Non
Arrangement à p éléments de E	Oui $p \leqslant n$	Oui	Non
Combinaison à p éléments de E	Oui $p \leqslant n$	Non	Non

56 Démontrer une propriété

Pour tous n, p de $\mathbb{N}$ tels que $0 < p < n$,

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,[(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!\,[(n-1)-p]!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$= \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p!\,(n-p) \times (n-p-1)!}$$

$$= \frac{p \times (n-1)!}{p!\,(n-p)!} + \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{p \times (n-1)! + (n-p) \times (n-1)!}{p!\,(n-p)}$$

$$= \frac{p \times (n-1)! + n \times (n-1)! - p \times (n-1)!}{p!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p.$$

57 Art

1. a. Il y a C_{50}^4, c'est-à-dire 230 300 résultats possibles.

b. Il y a $C_{22}^2 \times C_{28}^2$, c'est-à-dire 87 318 résultats possibles.

c. • L'une des quatre œuvres est celle d'une femme : $C_{22}^3 \times C_{28}^1$ résultats possibles.

• Deux des quatre œuvres sont celles de femmes (voir la réponse au **b.**). $C_{22}^2 \times C_{28}^2$ résultats possibles.

• Trois des quatre œuvres sont celles de femmes : $C_{22}^1 \times C_{28}^3$ résultats possibles.

• Les quatre œuvres sont celles de femmes : C_{28}^4 résultats possibles.

Ainsi, il y a 222 985 résultats possibles pour lesquels au moins une des quatre œuvres est celle d'une femme.

($C_{22}^3 \times C_{28}^1 + C_{22}^2 \times C_{28}^2 + C_{22}^1 \times C_{28}^3 + C_{28}^4 = 222\,985$).

Remarque : On peut également résoudre cette question en soustrayant à tous les résultats possibles (C_{50}^4), les résultats pour lesquels les quatre œuvres sont celles de garçons (C_{28}^4).

On a bien $C_{50}^4 - C_{28}^4 = 222\,985$.

2. a. Il y a A_{50}^4, c'est-à-dire 5 527 200 résultats possibles.

b. Les classements suivant le sexe sont (F, F, G, G), (F, G, F, G), (F, G, G, F), (G, F, F, G), (G, G, F, F), (G, F, G, F), soit 6 classements.

Il y a donc $6 \times A_{22}^2 \times A_{28}^2$, c'est-à-dire 2 095 632 résultats possibles.

c. On peut, par exemple, utiliser la remarque précédente.

Il y a donc $A_{50}^4 - A_{22}^4$, c'est-à-dire 5 351 640 résultats possibles.

58 Répartition des élèves

Pour répondre aux questions posées, on peut réaliser un diagramme comme ci-dessous.

Dans ce diagramme :

• Les nombres en noir sont donnés pour l'énoncé ;

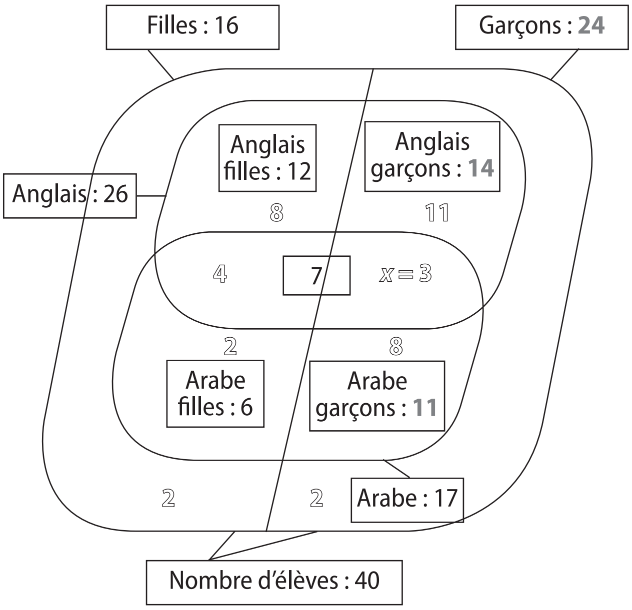
• Les nombres en gris sont déduits très simplement à partir des nombres en noir ;

• Si on pose x le nombre de garçons qui apprennent les deux langues, alors on a l'égalité suivante (qui porte sur le nombre de garçons) :

$24 = (14 - x) + x + (11 - x) + 2$

donc $x = 3$.

• Les nombres en contour sont déduits très simplement en utilisant x et les autres nombres.



a. 4 filles suivent les deux cours de langue.

b. 2 filles ne suivent aucune de ces deux matières.

59 Plus grand que l'Univers

Ces personnes peuvent se placer de 60!, c'est-à-dire environ $8{,}3 \times 10^{81}$ façons de se placer.

Remarque : $8{,}3 \times 10^{81} > 10^{80}$, donc ces 80 personnes ont environ 83 fois plus de façons de se placer qu'il existe d'atomes dans l'Univers (voir exercice 55).

60 Binôme de Newton

a.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Ainsi,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

b. $(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$

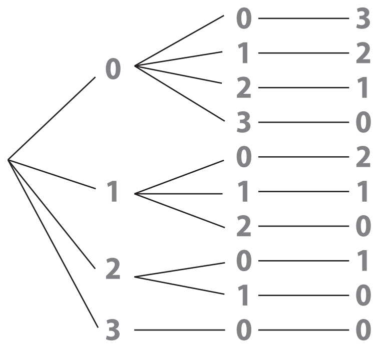
$(1-x)^7 = 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7.$

61 Distribution de cahiers

a. Si chaque enfant reçoit un cahier, alors, il y a 3! c'est-à-dire 6 façons de distribuer les cahiers.

b. Si chaque enfant peut recevoir entre 0 et 3 cahiers, alors, on peut utiliser un arbre.

(En gris : le nombre de cahiers reçus par l'enfant).

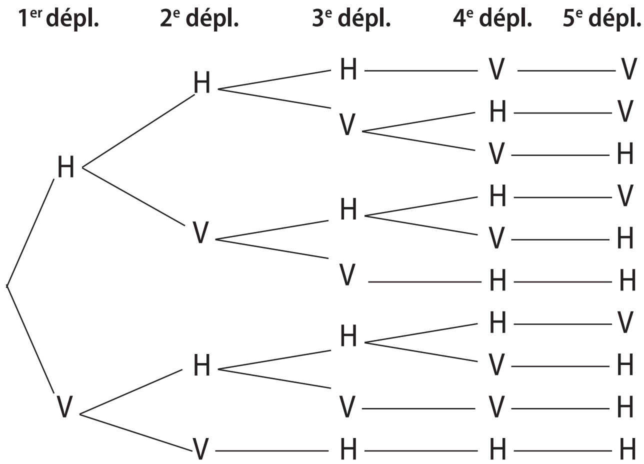


Ainsi, il y a 10 distributions possibles.

62 Déplacement d'un pion

a. Pour aller de la case A à la case B, il faut effectuer trois déplacements : deux déplacements horizontaux et un déplacement vertical.

On peut s'aider d'un arbre pour dénombrer le nombre de déplacements.



Il y a donc dix déplacements possibles.

b. Pour aller de la case B à la case C, il faut effectuer deux déplacements horizontaux et trois déplacements verticaux.

En procédant de même, on trouve qu'il y a dix déplacements possibles.

Problèmes

63 Courses de chevaux

1. a. Avec 18 chevaux au départ, il y a :

• A_{18}^3, c'est-à-dire 4 896 tiercés dans l'ordre possibles ;

• C_{18}^3, c'est-à-dire 816 tiercés dans le désordre possibles.

b. Avec *n* chevaux au départ.

• $A_n^3 = \dfrac{n!}{(n-3)!} = n \times (n-1) \times (n-2)$.

Il y a $n(n-1)(n-2)$ tiercés dans l'ordre possibles.

• $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!\,(n-3)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

Il y a $\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$ tiercés dans le désordre possibles.

2. Pour le quarté :

a. Avec 20 chevaux au départ :

• $A_{20}^4 = 116\,280$ quartés dans l'ordre possibles ;

• $C_{20}^4 = 4\,845$ quartés dans le désordre possibles.

b. Avec *n* chevaux au départ :

• $A_n^4 = \dfrac{n!}{(n-4)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$ quartés dans l'ordre possibles ;

• $C_n^4 = \dfrac{n!}{4!\,(n-4)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{24}$ quartés dans le désordre possibles.

Pour la quinté :

a. Avec 20 chevaux au départ :

• $A_{20}^5 = 1\,860\,480$ quintés dans l'ordre possibles ;

• $C_{20}^5 = 15\,504$ quintés dans le désordre possibles.

b. Avec *n* chevaux au départ :

• $A_n^5 = \dfrac{n!}{(n-5)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$ quintés dans l'ordre possibles.

• $C_n^5 = \dfrac{n!}{5!\,(n-5)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)}{120}$ quintés dans le désordre possibles.

64 Dénombrement d'anagrammes

1. a. • Le mot « mari » a 4!, c'est-à-dire 24 anagrammes.

• Le mot « sortie » a 5!, c'est-à-dire 120 anagrammes.

• Le mot « afrique » a 7!, c'est-à-dire 5 040 anagrammes.

b. Un mot à *n* lettres distinctes a *n*! anagrammes.

2. a. Un mot de 4 lettres distinctes a 4!, c'est-à-dire 24 anagrammes.

b. • Les anagrammes du mot « aida » sont : aida, adia, adai, aiad, aaid, aadi, daai, daia, diaa, iaad, iada, idaa.

• Il y en a 12, c'est-à-dire $\dfrac{4!}{2!}$.

• Les anagrammes du mot « mere » sont : mere, mree, meer, eemr, eerm, emer, emre, erem, erme, reme, reem, rmee.

Il y en a 12, c'est-à-dire $\dfrac{4!}{2!}$.

• Les anagrammes du mot « epee » sont : epee, eepe, eeep, peee.

Il y en a 4, c'est-à-dire $\dfrac{4!}{3!}$.

3. a. • Les anagrammes du mot « bebes » sont : bebes, bebse, besbe, beseb, beebs, beesb, bbees, bbese, bbsee, bseeb, bsebe, bsbee, ebebs, ebesb, ebbes, ebbse, ebsbe, ebseb, esbbe, esbeb, esebb, eebbs, eebsb, eesbb, sebeb, sebbe, seebb, sbbee, sbebe, sbeeb.

• Il y en a 30, c'est-à-dire $\dfrac{5!}{2!\,2!}$.

b. • Les anagrammes du mot « semee » sont : semee, seeme, seeem, smeee, meees, meese, mesee, mseee, emees, emese, emsee, eemes, eemse, eesme, eesem, eeesm, eeems, eseem, eseme, esmee.

Il y en a 20, c'est-à-dire $\dfrac{5!}{3!}$.

• Les anagrammes du mot « creee » sont : creee, ceree, ceere, ceeer, reeec, reece, recee, rceee, eceer, ecere, ecree, ercee, erece, ereec, eecre, eecer, eerce, eerec, eeecr, eeerc.

Il y en a 20, c'est-à-dire $\dfrac{5!}{3!}$.

4. a. • Le mot « partirait » possède 8 lettres, dont 3 lettres reprises deux fois.

Il a donc $\dfrac{8!}{2!\,2!\,2!} = 7! = 5\,040$ anagrammes.

• Le mot « engendree » possède 9 lettres dont 1 lettre reprise deux fois et une lettre reprise quatre fois.

Il a donc $\dfrac{9!}{2!\,4!} = 7\,560$ anagrammes.

• Le mot « parallele » possède 9 lettres dont 2 lettres reprises deux fois et une lettre reprise trois fois.

Il a donc $\dfrac{9!}{2!\,2!\,3!} = 15\,120$ anagrammes.

b. Un mot de *n* lettres contenant k_1 fois une lettre et k_2 fois une autre lettre possède $\dfrac{n!}{k_1!\,k_2!}$ anagrammes.

c. Il faut $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant n$ et un tel nombre a $\dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$ anagrammes.

65 Les dates d'anniversaires

1. a. On dénombre une liste de 23 dates d'anniversaire dans laquelle des répétitions sont possibles (p-uplets).

1re personne	2e personne	…	23e personne
365 choix	365 choix	…	365 choix

→ Au total, il y a $365 \times 365 \times \ldots \times 365 = 365^{23}$ possibilités.

b. Dans ce cas, il n'y a pas de répétition possible.

1re personne	2e personne	…	23e personne
365 choix	364 choix	…	365 – 22 choix

→ Au total, il y a $365 \times 364 \times \ldots \times (365 - 22)$

$$= \frac{365!}{(365-23)!} = A_{365}^{23} \text{ possibilités.}$$

c. Le contraire est : « Aucune personne n'est née le même jour qu'une autre. » (Voir le b.)

d. Dans un groupe de 23 personnes, les chances qu'il y en ait au moins deux qui soient nées le même jour sont : $\dfrac{365^{23} - A_{365}^{23}}{365^{23}} \times 100 \approx 50{,}73$ %.

2. a. En reprenant le même raisonnement, on trouve 365^n et A_{365}^{n}.

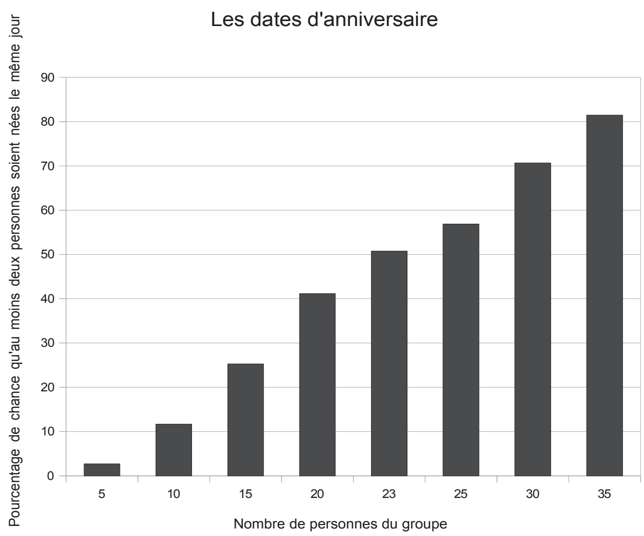
b. En reprenant le même raisonnement, on trouve :

$$\frac{365^n - A_{365}^{n}}{365^n} \times 100 = \left(1 - \frac{A_{365}^{n}}{365^n}\right) \times 100.$$

c.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Nombre de personnes du groupe**	5	10	15	20	23	25	30	35
2	**Pourcentage de chance qu'au moins deux personnes soient nées le même jour**	2,71	11,69	25,29	41,14	50,73	56,87	70,63	81,44

d.



3. Groupe 1 Il y a environ 47,57 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

Groupe 2 Il y a environ 53,83 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

Groupe 3 Il y a environ 77,5 % de chances qu'au moins deux personnes soient nées le même jour.

15 Statistique

Manuel pages 243 à 256

Activités d'introduction

1 Série statistique présentée sous forme de classes

1. Classe de plus grand effectif : [38 ; 43[. Classe modale : [38 ; 43[.

2. a.

Classe	[23 ; 28[	[28 ; 33[	[33 ; 38[	[38 ; 43[	[43 ; 48[	[48 ; 53[
Centre de classe	25,5	30,5	35,5	40,5	45,5	50,5
Effectif	3	4	5	20	14	3

b. Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{3 \times 25{,}5 + \ldots + 3 \times 50{,}5}{49} \approx 40{,}3$.

2 Courbe des effectifs cumulés, des fréquences cumulées

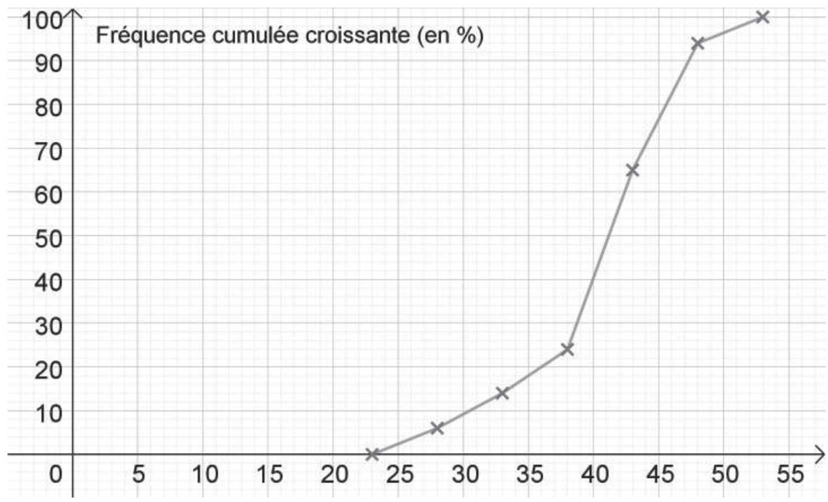
1.

Classe	[23 ; 28[	[28 ; 33[	[33 ; 38[	[38 ; 43[	[43 ; 48[	[48 ; 53[
Effectif	3	4	5	20	14	3
ECC	3	7	12	32	46	49
FCC	0,06	0,14	0,24	0,65	0,94	1

2. • On lit dans les ECC que le numéro du pays est 25, c'est donc le Kenya.

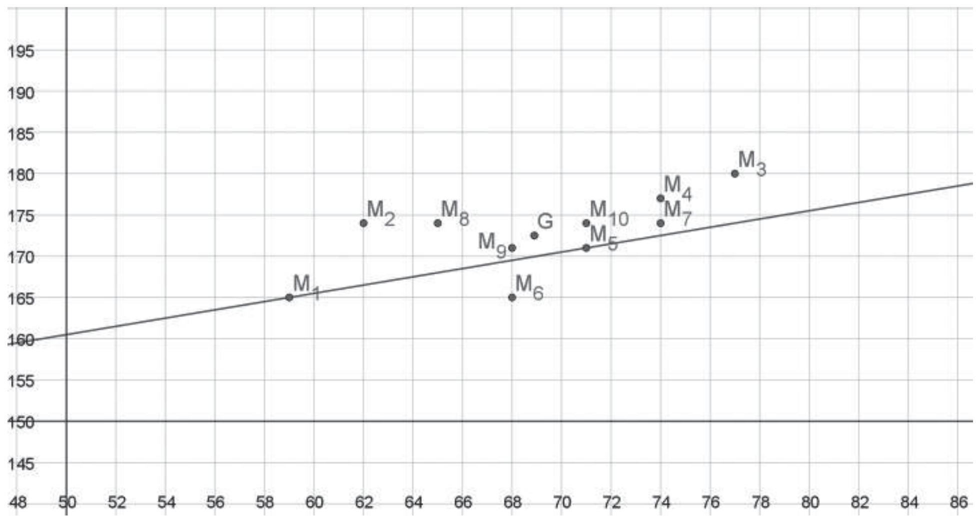
• Il s'agit de la classe [38 ; 43[.

3.



3 Séries statistiques à deux caractères

1., **2. b.** et **3. a.**



2. a. $\bar{x} = \dfrac{59 + 62 + \ldots + 71}{10} = 68{,}9.$

$\bar{y} = \dfrac{165 + 174 + \ldots + 174}{10} = 172{,}5.$

3. b. (M_1M_5) est la droite d'équation $y = ax + b$

avec $a = \dfrac{y_{M_5} - y_{M_1}}{x_{M_5} - x_{M_1}} = \dfrac{171 - 165}{71 - 59} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

et $y_{M_1} = ax_{M_1} + b$

donc $165 = \dfrac{1}{2} \times 159 + b$ d'où $b = 135{,}5$.

Ainsi, $(M_1M_5) : y = \dfrac{1}{2}x + 135{,}5$.

c. • Pour une masse de 80 kg :

$y = \dfrac{1}{2}80 + 135{,}5 = 175{,}5$. La taille serait de 175,5 cm.

• Pour une taille de 145 cm ; $145 = \dfrac{1}{2}x + 135{,}5$

donc $x = 19$. La masse serait de 19 kg.

d. • Pour une masse de 70 kg :

$y = \dfrac{1}{2}70 + 135{,}5 = 165{,}5$. La taille serait de 165,5 cm.

• Pour une taille de 170 cm ; $170 = \dfrac{1}{2}x + 135{,}5$

donc $x = 69$. La masse serait de 69 kg.

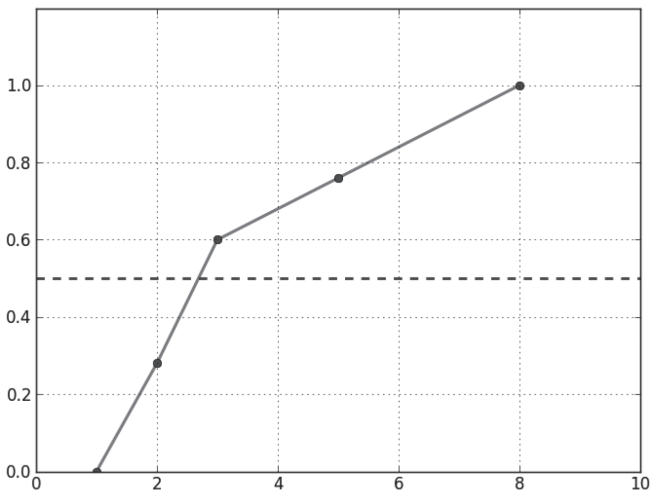
Savoir-faire

2 **1. a.**

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[
Eff.	7	8	4	6
Freq.	$\frac{7}{25} = 0{,}28$	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	$\frac{6}{25} = 0{,}24$
FCC	$\frac{7}{25} = 0{,}28$	$\frac{15}{25} = 0{,}6$	$\frac{19}{25} = 0{,}76$	1

$n = 7 + 8 + 4 + 6 = 25$

b.



Médiane par zoom 2,68.

2. a. Centre des classes : 1,5 ; 2,5 ; 4 ; 6,5

b. $\bar{x} = \dfrac{7 \times 1{,}5 + 8 \times 2{,}5 + 4 \times 4 + 6 \times 6{,}5}{25} = \dfrac{85{,}5}{25} = 3{,}42.$

3 **a.**

Classe	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[
Centre des classes	2	4	5,5	6,5
Effectif	15	12	6	2

b. La classe de plus grand effectif est la classe [1 ; 3[
Le mode est 2.

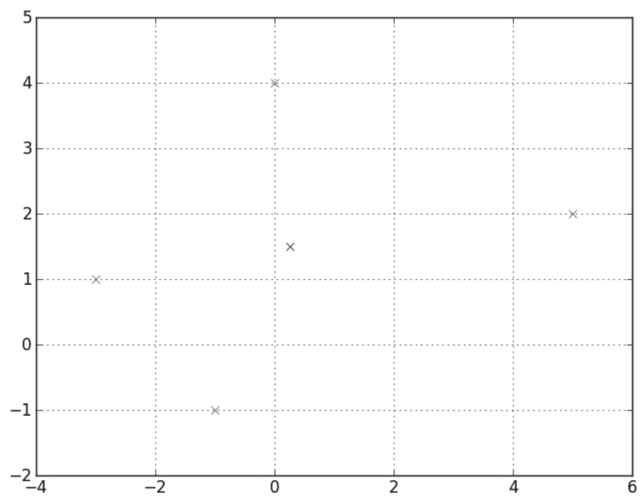
$\bar{x} = \dfrac{15 \times 2 + 12 \times 4 + 6 \times 5{,}5 + 2 \times 6{,}5}{15 + 12 + 6 + 2} = \dfrac{124}{35} \simeq 3{,}54.$

$V = \dfrac{15 \times (2 - 3{,}54)^2 + 12 \times (4 - 3{,}54)^2 + 6 \times (5{,}5 - 3{,}54)^2 + 2 \times (6{,}5 - 3{,}54)^2}{35}$

$= \dfrac{78{,}68}{35} \simeq 2{,}25.$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 1{,}5.$

5 **a.**



b. $\bar{x} = \dfrac{-3 - 1 + 0 + 5}{4} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

$\overline{y} = \dfrac{1 - 1 + 4 + 2}{4} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$

Donc : $G(0{,}25\ ;\ 1{,}5)$

c.

					Somme
x_i	–3	–1	0	5	1
y_i	1	–1	4	2	6
x_i^2	9	1	0	25	35
y_i^2	1	1	16	4	22
x_iy_i	–3	1	0	10	8

$\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{8}{4} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{6}{4} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$

$V(X) = \dfrac{35}{4} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{139}{16} = 3{,}6875$

$a = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \dfrac{13}{8} \times \dfrac{16}{139} = \dfrac{26}{139} \simeq 0{,}19$

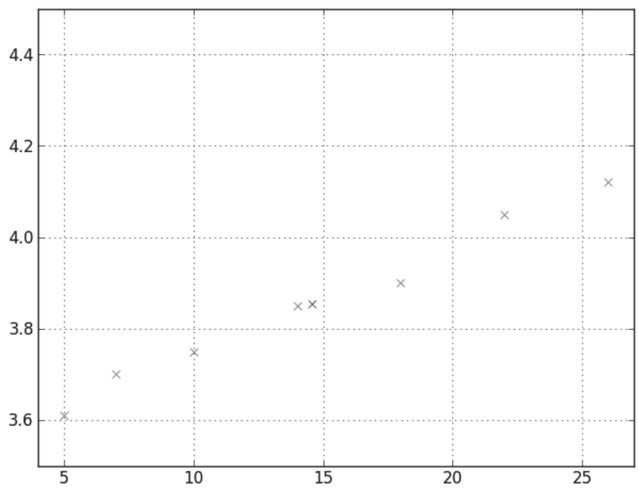
$b = \overline{y} - a\ .\ \text{-}x = 1{,}5 - 0{,}19 \times 0{,}25 \simeq 1{,}45$

Équation de la droite de régression linéaire de y en x :

$y = 0{,}19x + 1{,}45$

d. $r \simeq 0{,}31$. Un ajustement linéaire n'est pas vraiment approprié.

6 **a.**



b. $\overline{x} = \dfrac{5 + 7 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26}{7} = \dfrac{102}{7} \simeq 14{,}57$

$\overline{y} = \dfrac{3{,}61 + 3{,}70 + 3{,}75 + 3{,}85 + 3{,}90 + 4{,}05 + 4{,}12}{7}$

$= \dfrac{26{,}98}{7} \simeq 3{,}85$

								Somme
x_i	5	7	10	14	18	22	26	102
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12	26,98
x_i^2	25	49	100	196	324	484	676	1854
y_i^2	13,03	13,69	14,06	14,82	15,21	16,4	17,97	104,194
x_iy_i	18,05	25,9	37,5	53,9	70,2	89,1	107,12	401,77

$\overline{x} = 14{,}6$ $\quad G(14{,}6\ ;\ 3{,}85)$

$\overline{y} = 3{,}85$ $\quad r = 0{,}993$

c. $\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{401{,}77}{7} - 14{,}6 \times 3{,}85 \simeq 1{,}19$

$V(X) = \dfrac{1\,854}{7} - 14{,}6^2 \simeq 51{,}7$

$a \simeq 0{,}023$

$b = 3{,}85 - 0{,}023 \times 14{,}6 \simeq 3{,}51$

$y = 0{,}023x + 3{,}51$

d. Pour $x = 30$ on évalue $y = 0{,}023 \times 30 + 3{,}51 \simeq 4{,}2$ kg.

Exercices d'entraînement

Séries statistiques présentées sous forme de classes

7 **a.** Effectif total : 23 ;

amplitude des classes : 2 – 2 – 2 – 2 – 2 ;

classe modale : [4 ; 6[;

$\dfrac{23}{2} = 11{,}5$ classe médiane [4 ; 6[.

b. Effectif total : 27 ;

amplitude des classes : 2 – 3 – 2 – 1 – 2 ;

classes modales : [2 ; 5[et [5 ; 7[;

$\dfrac{27}{2} = 13{,}5$ classe médiane [5 ; 7[, car elle contient le 14^e^ individu.

8 Histogramme **b**.

9 **a.**

Classe	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	4	10	1	6

b. Effectif total : 21 = 10 + 1 + 10

Classe médiane [20 ; 30[

Moyenne $\bar{x} = \dfrac{4 \times 15 + 10 \times 25 + 1 \times 35 + 6 \times 45}{21}$

$= \dfrac{615}{21} \simeq 29{,}3.$

10

Classe	[0 ; 40[	[40 ; 80[	[80 ; 120[	[120 ; 160[	[160 ; 200[
Effectif	10	20	45	15	20

Classe modale [80 ; 120[

Effectif total : 110

11 **a.** Effectif total : 40 = 20 + 20

Classe médiane [4 ; 6[

Moyenne $\bar{x} = \dfrac{10 \times 1 + 4 \times 3 + 12 \times 5 + 8 \times 7 + 6 \times 9}{40}$

$= \dfrac{192}{40} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$

b. Effectif total : 37 = 18 + 1 + 18

Classe médiane [3 ; 6[

$\bar{x} = \dfrac{4 \times 0{,}5 + 10 \times 2 + 12 \times 4{,}5 + 8 \times 7 + 3 \times 10}{37} \simeq 4{,}4.$

12 **a.** Classe médiane [1 ; 2[

$\bar{x} = 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 1{,}5 + 0{,}1 \times 4 + 0{,}05 \times 6 + 0{,}15 \times 7{,}5$

$= 2{,}675.$

b. Classe médiane [10 ; 11[

Moyenne :

$\bar{x} = \dfrac{5 \times 4 + 15 \times 6{,}5 + 22 \times 9 + 28 \times 10{,}5 + 30 \times 13}{100}$

$= 9{,}995.$

13 **a.** L'effectif total est 20 = 10 + 10

La classe médiane est [4 ; 6[.

Les effectifs par classes sont : 3 – 4 – 5 – 6 – 2

$\bar{x} = \dfrac{3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 5 + 6 \times 8 + 2 \times 11}{20} = 5{,}5.$

b. Effectif total 40 = 20 + 20

La classe médiane est [3 ; 5[.

Les effectifs par classes sont : 2 – 13 – 8 – 14 – 3

$\bar{x} = \dfrac{2 \times 0{,}5 + 13 \times 1{,}5 + 8 \times 4 + 14 \times 6 + 3 \times 7{,}5}{40}$

$= 3{,}975.$

14 **a.**

Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	5	10	15	20	5

b. $\bar{x} = \dfrac{5 \times 5 + 10 \times 15 + 15 \times 25 + 20 \times 35 + 5 \times 45}{55}$

$= \dfrac{1\,475}{55} \simeq 26{,}8.$

15 **a.**

Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif	5	15	10	0	5	20

b. $\bar{x} = \dfrac{5 \times 5 + 15 \times 15 + 10 \times 25 + 0 \times 35 + 5 \times 45 + 20 \times 55}{55}$

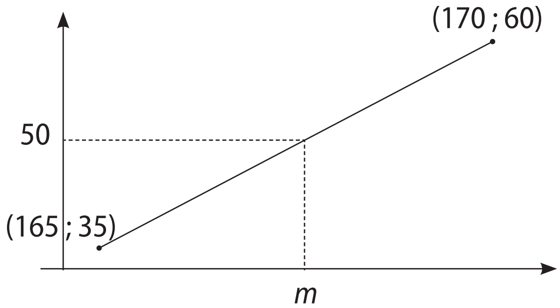
$= \dfrac{1\,825}{55} \simeq 33{,}18.$

16 **a.**

Classe	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[
Effectifs	4	10	10
ECC	4	14	24
FCC	10 %	35 %	60 %

Classe	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
Effectifs	6	6	4
ECC	30	36	40
FCC	75 %	90 %	100 %

b. La médiane correspondant à une fréquence cumulée croissante de 50 % se trouve dans la classe [165 ; 170[.



On s'intéresse au segment liant les points de coordonnées (165 ; 35) et (170 ; 60).

Pente du segment : $a = \dfrac{60 - 35}{170 - 165} = \dfrac{35}{5} = 7.$

$\dfrac{50 - 35}{m - 165} = 7 \Leftrightarrow 15 = 7m - 7 \times 165$

$\Leftrightarrow 7m = 15 + 7 \times 165$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{15}{7} + 165 \Leftrightarrow m \simeq 167{,}14.$

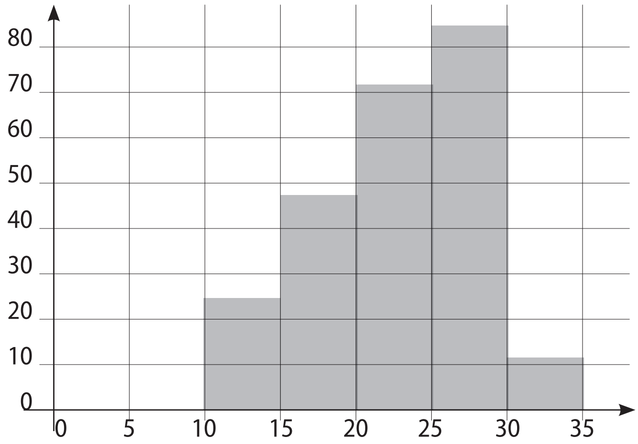
c.

Centre de classe	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5
Effectif	4	10	10	6	6	4

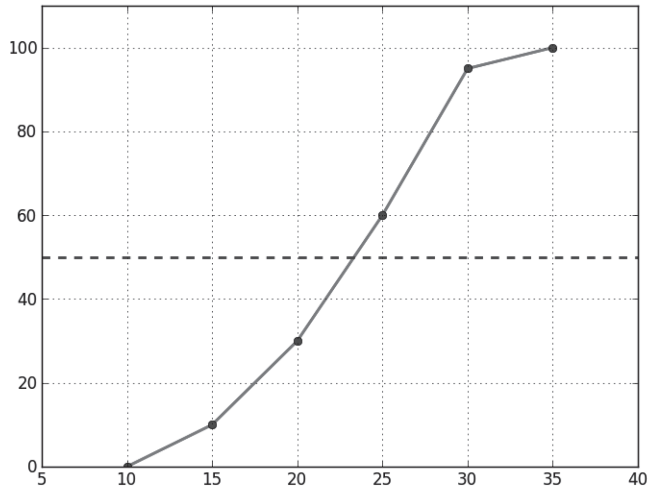
$$\bar{x} = \frac{4 \times 157{,}5 + 10 \times 162{,}5 + 10 \times 167{,}5 + 6 \times 172{,}5 + 6 \times 177{,}5 + 4 \times 182{,}5}{40} = \frac{6\,760}{40} = 169.$$

17 **a.** Effectif total $n = 240$.

b.



c.

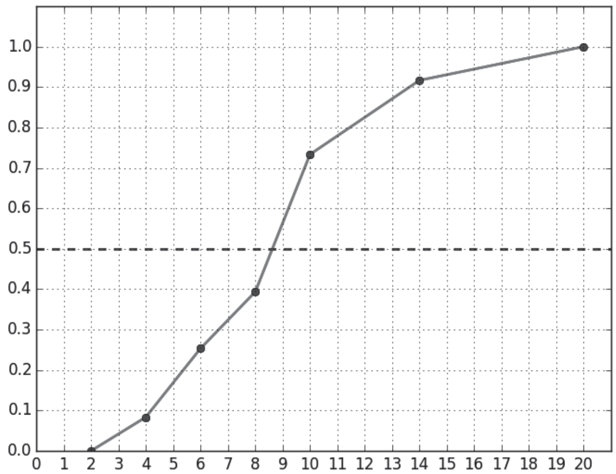


d. Valeur approchée de la médiane par zoom : $m \simeq 23{,}3$.

18 **a.** Effectif total : 600. Classe médiane : [8 ; 10[.

Moyenne : $$\bar{x} = \frac{50 \times 3 + 102 \times 5 + 84 \times 7 + 204 \times 9 + 110 \times 12 + 50 \times 17}{600} = 8{,}76.$$

b.



c. Graphique par zoom $m \simeq 8{,}62$

d. La classe [10 ; 14[correspond à une fréquence cumulée comprise entre 73,3 % et 91,7 %, ou à un effectif cumulé croissant compris entre 440 et 550. On raisonne avec les effectifs.

$550 \times 0{,}75 = 450$

Le segment correspondant limité par les points $M(10\,;440)$ et $M'(14\,;550)$ a une pente :

$$a = \frac{550 - 440}{14 - 10} = \frac{110}{4} = 27{,}5$$

Pour une note $n = 12{,}3$ on obtient l'effectif

$$\frac{y - 440}{12{,}3 - 10} = 27{,}5 \Rightarrow y = 27{,}5 \times 2{,}3 + 440 = 503{,}25.$$

503,25 correspond à 83,4 % de la population testée.

L'étudiant a raison.

19 $\bar{x} = \dfrac{126\,040}{6\,000} \simeq 21.$ $\sigma = \sqrt{\dfrac{2\,685\,520}{6\,000} - 21^2} \simeq 2{,}57.$

20 **a.**

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectif	6	12	17	15
Centre de classe	2,5	6,5	9	11

$n = 6 + 12 + 17 + 15 = 50$

$\bar{x} = \dfrac{411}{50} \simeq 8{,}22$

$\sum x^2 = 3\,736{,}5.$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{6 \times |2{,}5 - 8{,}22| + 12 \times |6{,}5 - 8{,}22| + 17 \times |9 - 8{,}22| + 15 \times |11 - 8{,}22|}{50} = \frac{109{,}92}{50} \simeq 2{,}1984.$$

$$V = \frac{6 \times 2{,}5^2 + 12 \times 6{,}5^2 + 17 \times 9^2 + 15 \times 11^2}{50} - 8{,}22^2 = \frac{3\,736{,}5}{50} - 8{,}22^2 \simeq 7{,}16.$$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 2{,}68.$

b.

Classe	[10 ; 14[	[14 ; 18[	[18 ; 20[	[20 ; 22[
Effectif	11	20	32	15
Centre de la classe	12	16	19	21

Effectif total $n = 11 + 20 + 32 + 15 = 78.$

$$\bar{x} = \frac{11 \times 12 + 20 \times 16 + 32 \times 19 + 15 \times 21}{78} = \frac{1\,375}{78} = 17{,}63.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{11 \times |12 - 17{,}63| + 20 \times |16 - 17{,}63| + 32 \times |19 - 17{,}63| + 15 \times |21 - 17{,}63|}{78} = \frac{188{,}92}{78} \simeq 2{,}42.$$

$$V = \frac{11 \times 12^2 + 20 \times 16^2 + 32 \times 19^2 + 15 \times 21^2}{78} - 17{,}63^2 = \frac{24\,871}{78} - 17{,}63^2 \simeq 8.$$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 2{,}8.$

21 a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 7[	[7 ; 10[	[10 ; 13[	[13 ; 17[
Effectif	334	96	51	12	7
Centre de la classe	2	5,5	8,5	11,5	15

Effectif total $n = 334 + 96 + 51 + 12 + 7 = 500$

$$\bar{x} = \frac{334 \times 2 + 96 \times 5{,}5 + 51 \times 8{,}5 + 12 \times 11{,}5 + 7 \times 15}{500} = \frac{1\,872{,}5}{500} = 3{,}745.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{(334 \times |2 - 3{,}745| + 96 \times |5{,}5 - 3{,}745| + 51 \times |8{,}5 - 3{,}745| + 12 \times |11{,}5 - 3{,}745| + 7 \times |15 - 3{,}745|)}{500}$$

$$= \frac{1\,165{,}66}{500} \simeq 2{,}33.$$

$$V = \frac{334 \times 2^2 + 96 \times 5{,}5^2 + 51 \times 8{,}5^2 + 12 \times 11{,}5^2 + 7 \times 15^2}{500} - 3{,}745^2 = \frac{11\,086{,}75}{500} - 3{,}745^2 \simeq 8{,}148$$

donc $\sigma = \sqrt{V} \simeq 2{,}85.$

b.

Classe	[25 ; 28[	[28 ; 31[	[31 ; 34[	[34 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 43[	[43 ; 46[
Effectif	8	20	57	99	81	27	8
Centre de la classe	26,5	29,5	32,5	35,5	38,5	41,5	44,5

Effectif total : $n = 300$

$$\bar{x} = \frac{8 \times 26{,}5 + 20 \times 29{,}5 + 57 \times 32{,}5 + 99 \times 35{,}5 + 81 \times 38{,}5 + 27 \times 41{,}5 + 8 \times 44{,}5}{300} = \frac{10\,764}{300} = 35{,}88.$$

Écart moyen :

$$e_m = \frac{(8 \times |26{,}5 - 35{,}88| + 20 \times |29{,}5 - 35{,}88| + 57 \times |32{,}5 - 35{,}88| + 99 \times |35{,}5 - 35{,}88| + 81 \times |38{,}5 - 35{,}88| + 27 \times |41{,}5 - 35{,}88| + 8 \times |44{,}5 - 35{,}88|)}{300}$$

$$= \frac{865{,}84}{300} \simeq 2{,}89$$

$$V = \frac{(8 \times 26{,}5^2 + 20 \times 29{,}5^2 + 57 \times 32{,}5^2 + 99 \times 35{,}5^2 + 81 \times 38{,}5^2 + 27 \times 41{,}5^2 + 8 \times 44{,}5^2)}{300} - 35{,}88^2$$

$$= \frac{390\,399}{300} - 35{,}88^2 \simeq 13{,}9556.$$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 3{,}74.$

22 **a.** $\bar{x} = \dfrac{9{,}9 \times 10^6}{39\,115} \simeq 253{,}0998 \simeq 253{,}1$ min

$\bar{x} \simeq 4{,}22$ h.

b. $V = \dfrac{2{,}6 \times 10^9}{39\,115} - 253{,}1^2 = 2\,411{,}053$

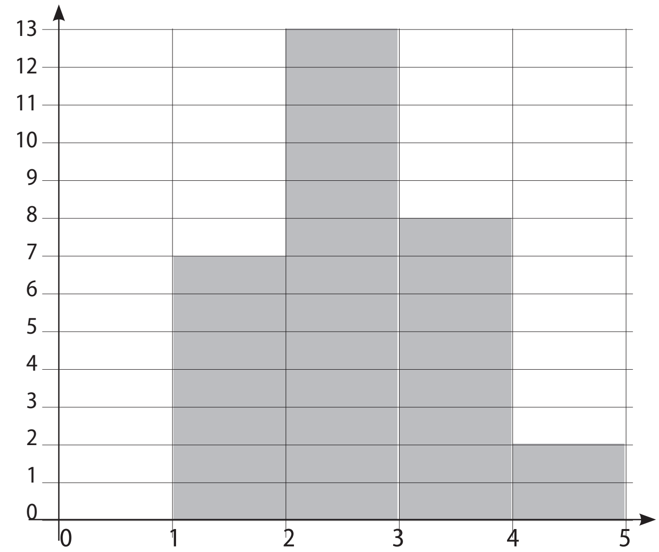
$\sigma = \sqrt{V} \simeq 49{,}1$ en min $\simeq 0{,}82$ h.

23 $\bar{x} = \dfrac{2\,926}{52} \simeq 56{,}27$;

$V = \dfrac{166\,148}{52} - 56{,}27^2 \simeq 28{,}84$.

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 5{,}37$.

24 **a.**



b. Classe modale [2 ; 3[.

c.

Effectif	7	13	8	2
Centre de la classe	1,5	2,5	3,5	4,5

$\bar{x} = \dfrac{7 \times 1{,}5 + 13 \times 2{,}5 + 8 \times 3{,}5 + 2 \times 4{,}5}{30} = \dfrac{80}{30}$

$\simeq 2{,}667$.

$V = \dfrac{7 \times 1{,}5^2 + 13 \times 2{,}5^2 + 8 \times 3{,}5^2 + 2 \times 4{,}5^2}{30} - 2{,}667^2$

$= \dfrac{235{,}5}{30} - 2{,}67^2 \simeq 0{,}73$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 0{,}85$

d.

ECC	7	20	28	30

Classe médiane [2 ; 3[

Pente du segment : $a = \dfrac{20 - 7}{2 - 1} = 13$.

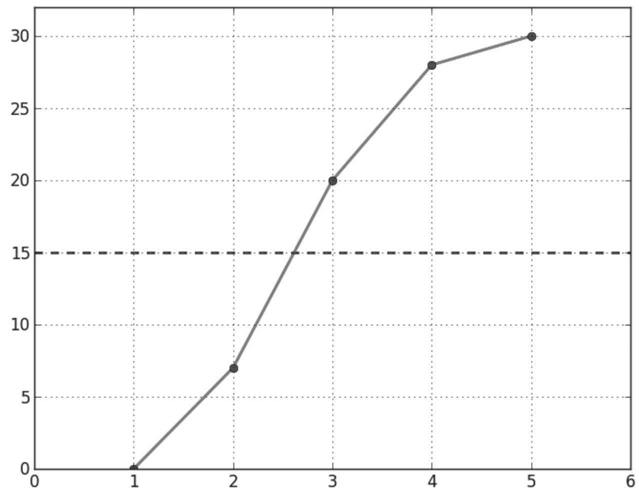
Médiane $a = \dfrac{15 - 7}{m - 2} = 13 \Leftrightarrow 8 = 13(m - 2)$

$\Leftrightarrow 8 = 13m - 13 \times 2$

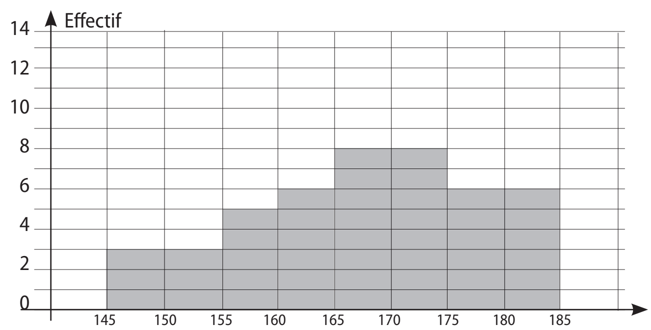
$\Leftrightarrow 13m = 8 + 26 = 34$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{34}{13} \simeq 2{,}6$

Médiane calculée 2,6.



25 **a.**



b. Deux classes modales [165 ; 170[et [170 ; 175[

c.

Centre de la classe	150	157,5	162,5	167,5	172,5	180
Effectif	3	5	6	8	8	6

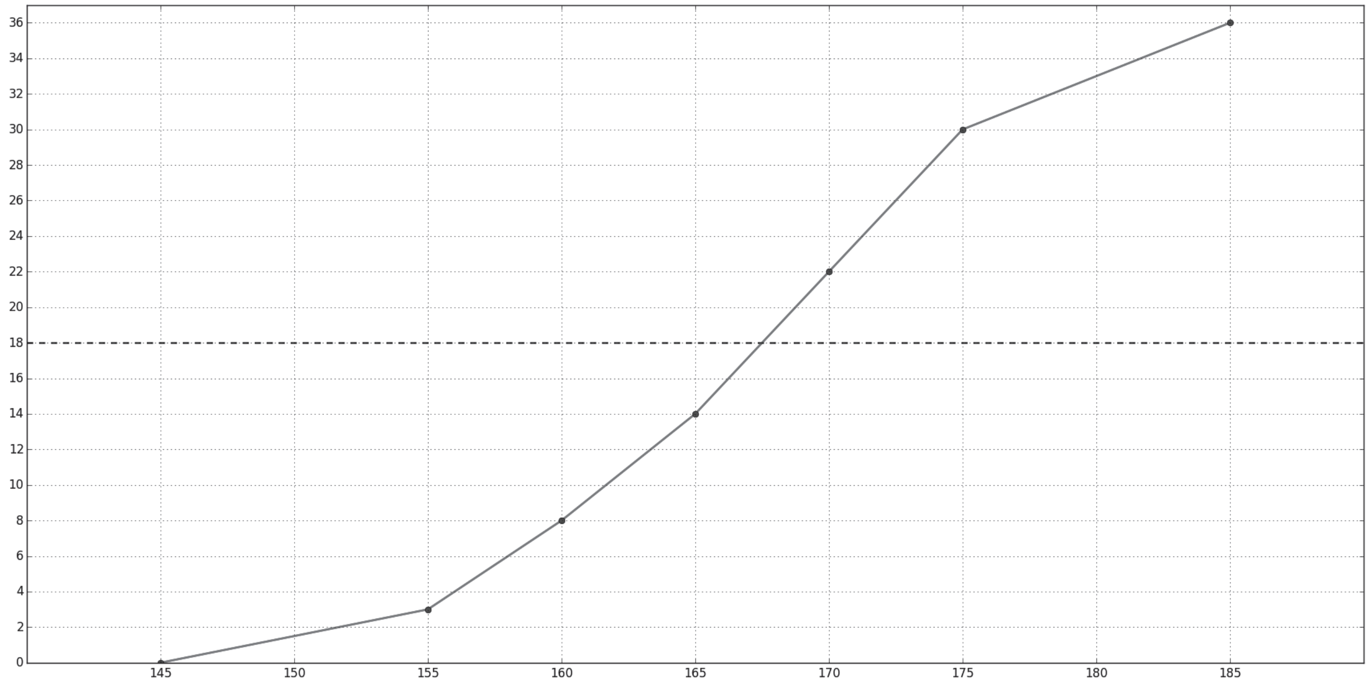
Effectif total : 36.

$\bar{x} = \dfrac{3 \times 150 + 5 \times 157{,}5 + 6 \times 162{,}5 + 8 \times 167{,}5 + 8 \times 172{,}5 + 6 \times 180}{36} = \dfrac{6\,012{,}50}{36} \simeq 167{,}014$

$V = \dfrac{3 \times 150^2 + 5 \times 175{,}5^2 + 6 \times 162{,}5^2 + 8 \times 167{,}5^2 + 8 \times 172{,}5^2 + 6 \times 180^2}{36} - 167{,}014^2 = \dfrac{1\,006\,868{,}75}{36} - 167{,}01^2$

$V \simeq 74{,}89$. $\sigma = \sqrt{V} \simeq 8{,}65$.

d.



La médiane se situe dans la classe [165 ; 170[

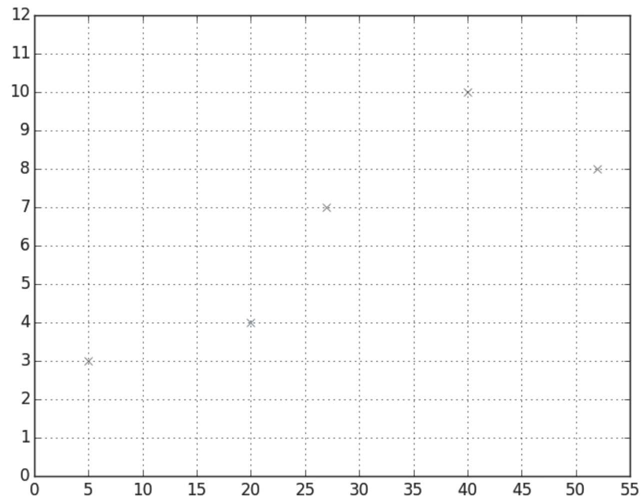
Pente : $a = \frac{8}{5} = 1{,}6$.

ECC : 3 / 8 / 14 / 22

$a = \frac{18-14}{m-165} = \frac{4}{m-165} = 1{,}6 \Rightarrow 4 = 1{,}6m - 165 \times 1{,}6 \Rightarrow m = \frac{4}{1{,}6} + 165 = 167{,}5$.

Ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères

26 **a.**



b. $\bar{x} = \frac{5+20+27+40+52}{5} = 28{,}8$

$\bar{y} = \frac{3+4+7+10+8}{5} = 6{,}4$

Donc : $G(28{,}8 ; 6{,}4)$.

27 **a.** Figure 1.

b. $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$

$\bar{y} = \frac{10+14+13+22+21}{5} = 16$

Donc : $G(6 ; 16)$.

28 **a.** $\bar{x} = \frac{98}{7} = 14$

$\bar{y} = \frac{174}{7} = 24{,}857$

Donc : $G(14 ; 24{,}86.)$

b. $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1\,924}{7} - 14 \times \frac{174}{7} \simeq -73{,}143$

$V(X) = \frac{1\,484}{7} - 14^2 = 16.$

c. $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \simeq -4{,}57$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \simeq 88{,}86.$

Équation de la droite de régression de y en x :

$y = -4{,}57x + 88{,}86.$

29 **a.** $\bar{x} = \dfrac{975}{7} \simeq 132{,}29$

$\bar{y} = \dfrac{1\,716}{7} \simeq 245{,}14$

Donc : $G(132{,}3\ ;\ 245{,}1)$.

b. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{189\,578}{7} - \dfrac{975}{7} \times \dfrac{1\,716}{7} \simeq -7\,062{,}33$

$V(X) = \dfrac{146\,385}{7} - \left(\dfrac{975}{7}\right)^2 \simeq 1\,511{,}63.$

c. $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)} \simeq -4{,}67$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \simeq 895{,}88$

$y = -4{,}67x + 895{,}88$

d. On calcule les valeurs y_i^2

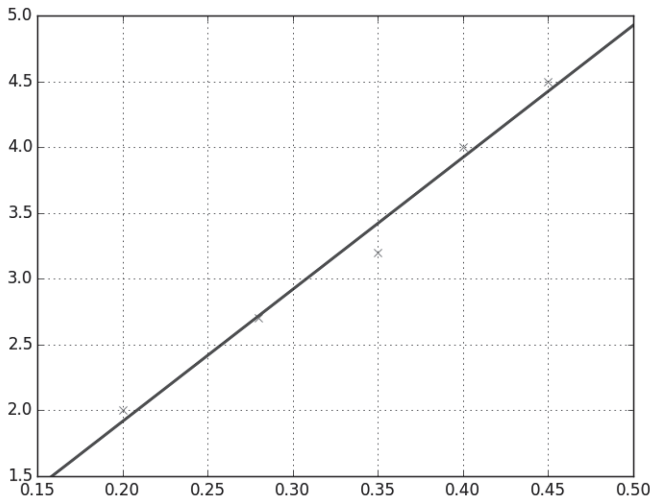
	y_i^2
	289 444
	204 304
	110 889
	36 100
	13 689
	4 225
	441
Total	659 092

Alors $V(Y) = \dfrac{659\,092}{7} - \left(\dfrac{1\,716}{7}\right)^2 \simeq 34\,060{,}98.$

$r = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\,\sqrt{V(Y)}} \simeq -0{,}98$ proche de 1.

Donc l'ajustement affine est pertinent.

30 **a.**



b. $\bar{t} = \dfrac{1{,}68}{5} = 0{,}336$ $\qquad \bar{v} = \dfrac{16{,}4}{5} = 3{,}28$

Donc : $G(0{,}336\ ;\ 3{,}28)$.

c. $\mathrm{Cov}(t, v) = \dfrac{5{,}901}{5} - 0{,}34 \times 3{,}88 \simeq 0{,}078$

$V(t) = \dfrac{0{,}6034}{5} \simeq 0{,}0078$

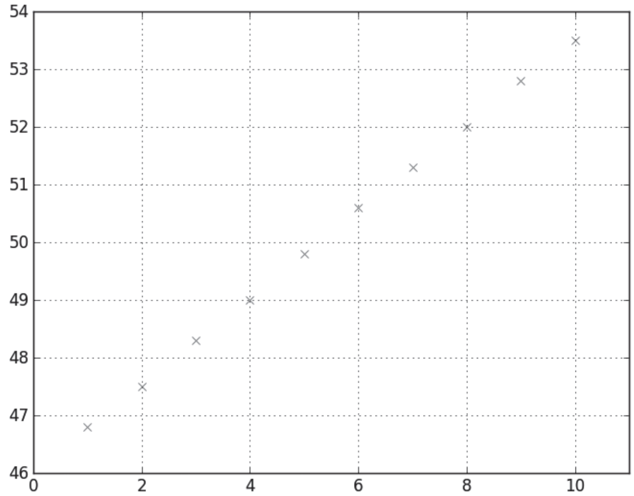
$a = \dfrac{\mathrm{Cov}(t, v)}{V(t)} \simeq 10{,}036$

$b = \bar{v} - a\bar{t} \simeq -0{,}092$

D'où : $v \simeq 10{,}036t - 0{,}092$.

d. On a : $g \simeq 10$.

31 **a.**



b. $\bar{x} = \dfrac{55}{10} = 5{,}5$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{501{,}6}{10} = 50{,}16$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{2\,820{,}6}{10} - 5{,}5 \times 50{,}16 \simeq 6{,}18$

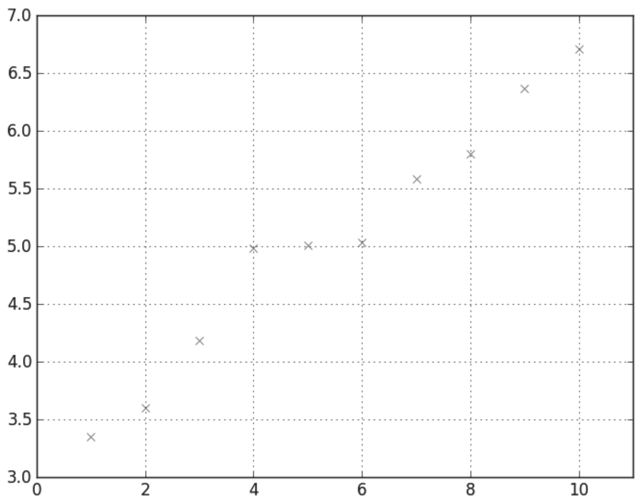
$V(X) = \dfrac{100}{10} - 5{,}5^2 \simeq 8{,}25$

$a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)} \simeq 0{,}749$ $\qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \simeq 46{,}04$

Donc : $y = 0{,}749x + 46{,}04$.

c. L'année 2020 sera repérée par $x = 16$.
Alors : $y = 0{,}749 \times 16 + 46{,}04 \simeq 58{,}024$.
D'où l'estimation : 58,0 % de population urbaine en 2020.

32 **a.**



b. $\bar{x} = 5{,}5$ $\qquad \bar{y} = \dfrac{50{,}61}{10} = 5{,}061$

$\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{308{,}13}{10} \simeq 30{,}813$

$V(X) = \dfrac{100}{10} - 5{,}5^2 = 8{,}25$

$a = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \simeq 0{,}361 \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \simeq 3{,}076.$

D'où l'équation : $y = 0{,}361x + 3{,}076$

c. Estimation en 2016 pour $x = 12$:

$y = 0{,}361 \times 12 + 3{,}076 \simeq 7{,}408.$

Estimation des dépenses en 2012 : 7,41 millions de dollars.

Estimation en 2020 pour $x = 16$:

$y = 0{,}361 \times 16 + 3{,}076 \simeq 8{,}852.$

Estimation des dépenses en 2020 : 8,85 millions de dollars.

Se tester

33 **1.** Vra i; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Faux.

34 **1.** Faux. On a la répartition en classes suivante :

Classe	[20; 25 [	[25; 30 [	[30; 35 [	[35; 40 [	[40; 45 [
Effectif	6	8	12	3	1

La classe modale est la classe [30; 35 [.

2. Vrai.

$\bar{x} = \dfrac{6 \times 22{,}5 + 8 \times 27{,}5 + 12 \times 32{,}5 + 3 \times 37{,}5 + 1 \times 42{,}5}{6 + 8 + 12 + 3 + 1}$

$= 30.$

3. Faux. 30 = 15 + 15. 6 + 8 = 14. La classe médiane est la classe [30;35 [. Donc la valeur médiane est strictement supérieure à 30.

4. Vrai.

$V = \dfrac{6 \times 22{,}5^2 + 8 \times 27{,}5^2 + 12 \times 32{,}5^2 + 3 \times 37{,}5^2 + 1 \times 42{,}5^2}{30} - 30^2$

$= 26{,}25.$

$\sigma = \sqrt{26{,}25} = 5{,}12 \approx 5{,}1.$

35 **1.** c. ; **2.** b. ; **3.** c.

36 **1.** c. $\bar{x} = \dfrac{50 + 100 + 150 + 200 + 250 + 300}{6} = 175.$

$\bar{y} = \dfrac{2{,}8 + 2{,}5 + 2{,}2 + 2 + 1{,}6 + 1{,}5}{6}.$

2. c. $a = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)} = \dfrac{-39{,}17}{85{,}39^2} \approx -5{,}37 \times 10^{-3}.$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 3{,}04$.

3. a. Pour $x = 500$, on calcule :

$y = -5{,}37 \times 10^{-3} \times 500 + 3{,}04 \approx 0{,}355 \approx 0{,}36.$

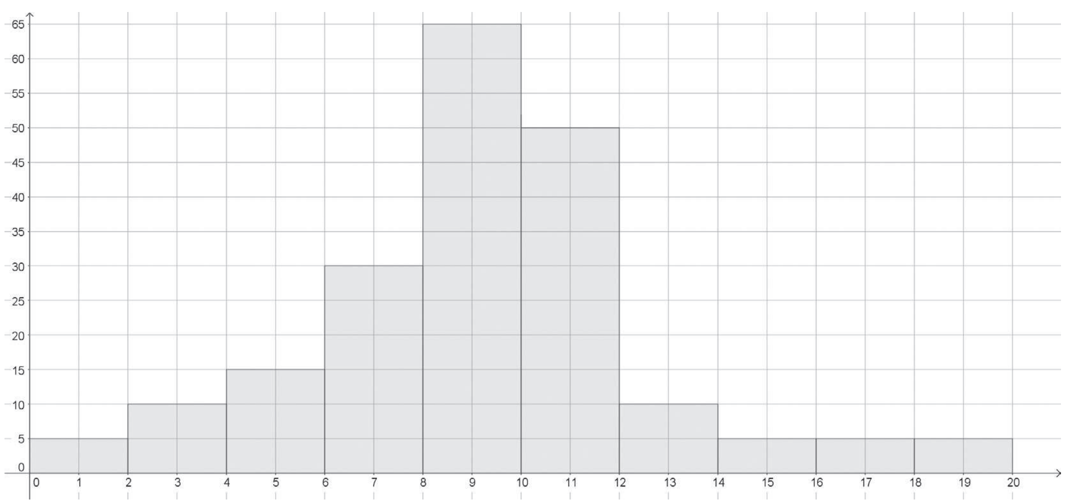
Exercices d'approfondissement

37 **Exploiter un histogramme**

a.

Note	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 20[
ECC	5	15	30	60	125	175	185	190	195	200
Effectif	5	10	15	30	65	50	10	5	5	5

b.



c. • Nombre de candidats ayant une note supérieure ou égale à 10 : $50 + 10 + 3 \times 5 = 75$. Soit : $\frac{75}{200} = 0{,}375$.

37,5 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 10.

• Nombre de candidats ayant une note entre 12 et 16 exclu : $10 + 5 = 15$. Soit : $\frac{15}{200} = 0{,}075$.

7,5 % des candidats ont une note entre 12 et 16 exclu.

d. Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{5 \times 1 + 10 \times 3 + 15 \times 5 + 30 \times 7 + 65 \times 9 + 50 \times 11 + 10 \times 13 + 5 \times 15 + 5 \times 17 + 5 \times 19}{200} = 9{,}2.$$

$V = \frac{19\,320}{200} - 9{,}2^2 \simeq 11{,}96.$

$\sigma \simeq 3{,}46.$

38 Population féminine au Sénégal

a. Moyenne : $m = \frac{199\,975}{8\,122} \simeq 24{,}62.$ $V \simeq 342{,}565.$ $\sigma \simeq 18{,}5.$

b. Effectif total $n = 8\,122$ (en milliers) $= 4\,011 + 4\,011.$ La médiane est dans la classe [10 ; 20[

Détermination de la médiane : recherche de l'équation du segment joignant $A(10\,;\,2\,194)$ à $B(20\,;\,4\,019)$

$a = \frac{4\,019 - 2\,194}{10} = \frac{1\,825}{10} = 182{,}5$

Médiane M : $\frac{4\,011 - 2\,194}{M - 10} = a \Rightarrow 182{,}5(M - 10) = 1\,817 \Rightarrow M = \frac{1\,817}{182{,}5 + 10} \simeq 19{,}96.$

c. La moitié des femmes aurait un âge inférieur ou égal à 19,96, alors que l'âge moyen sera de 24,62.
L'affirmation est vraie.
Nombre de femmes ayant au moins 50 ans : $486 + 278 + 124 + 34 + 3 = 925.$

$\frac{925}{8\,122} \simeq 0{,}114$ soit 11,4 % de la population. Un cinquième fait 20 %, l'affirmation est fausse.

39 Classes d'amplitudes différentes

a.

Classe	[28 ; 30[	…											[52 ; 54[
Centre de la classe	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
Effectif	3	31	23	45	98	137	155	158	91	51	24	10	2

$n = 800$

$\sum n_i x_i = 32\,916$

$\sum n_i x_i^2 = 1\,367\,000$ donc $\bar{x} = \frac{32\,916}{800} \simeq 41{,}15$

$V \simeq 15{,}84$

$\sigma \simeq 3{,}98.$

b. Nouveau regroupement :

Classe	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[	[40 ; 44[	[48 ; 48[	[48 ; 52[	[52 ; 54[
Centre de la classe	30	34	38	42	46	50	53
Effectif	6	68	235	313	142	34	2

$\sum n_i x_i = 32\,906$

Nouvelle moyenne $\bar{x}' = \frac{32\,906}{800} \simeq 41{,}13$

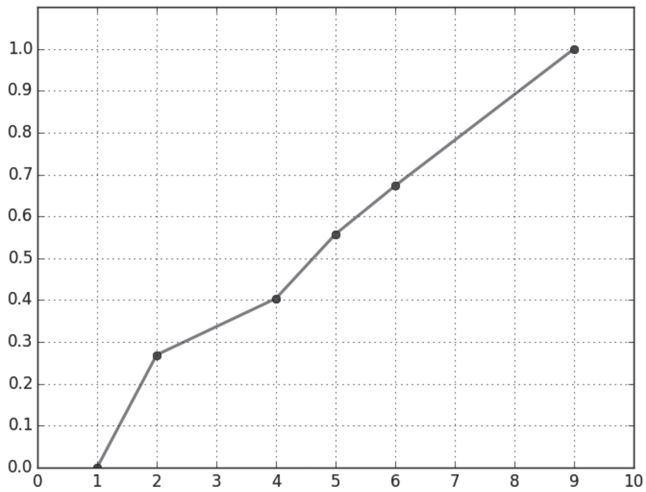
Nouvelle variance $V' \simeq 16{,}33$

Nouvel écart-type $\sigma' \simeq 4{,}04.$

c. Si on se contente de valeurs approchées au dixième, les résultats sont similaires.

40 Fréquences cumulées croissantes

1.



2. $n = 104 = 52 + 52$

$28 + 14 = 42$

$28 + 14 + 16 = 58$

La médiane se trouve dans la classe [4 ; 5[.

Équation du segment joignant $A(4 ; 42)$ et $B(5 ; 58)$:

$$a = \frac{58 - 42}{5 - 4} = 16$$

$$\frac{50 - 42}{m - 4} = a = 16 \Leftrightarrow 8 = 16m - 64$$
$$\Leftrightarrow 16m = 8 + 64$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{72}{16} \simeq 4{,}5.$$

3. a. On utilise le segment joignant $M(2 ; 28)$ à $A(4 ; 42)$

$$a_1 = \frac{42 - 28}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Pour $x = 3$, y vérifie $\dfrac{y - 28}{3 - 2} = 7 \Leftrightarrow y - 28 = 7$
$$\Leftrightarrow y = 35.$$

35 % des individus ont une modalité inférieure à 3.

b. $x = 3$ donne $f = 35$ % ; 5,3 est dans la classe [5 ; 6[.

On utilise le segment joignant $B(5 ; 58)$ à $M_2(6 ; 70)$

$$a_2 = \frac{70 - 58}{6 - 5} = 12$$

$$\frac{y - 58}{5{,}3 - 5} = 12 \Leftrightarrow y = 58 + 12 \times 0{,}3 = 61{,}6$$

et $61{,}6 - 35 = 26{,}6$.

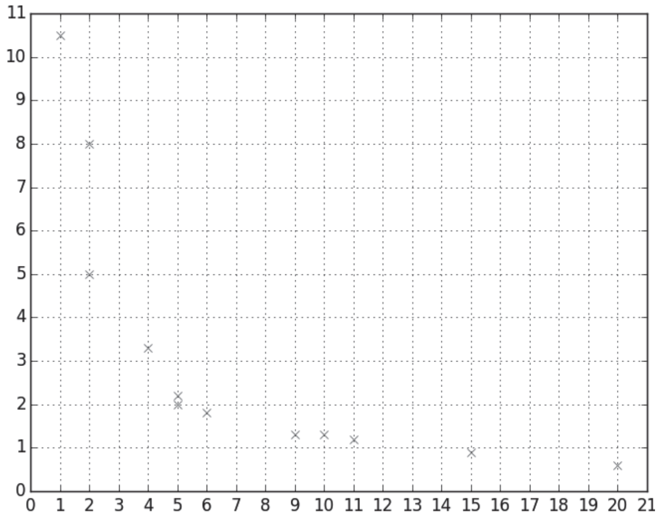
Donc 26,6 % des individus ont une modalité comprise entre 3 et 5,3.

c. $100 - 61{,}6 = 38{,}4$ %. 38,4 % des individus ont une modalité supérieure à 5,3.

4. $\sum n_i x_i = 477$; $n = 104$ donc $\bar{x} = \dfrac{477}{104} \simeq 4{,}59$.

$V \simeq 5{,}78$ et $\sigma \simeq 2{,}4$.

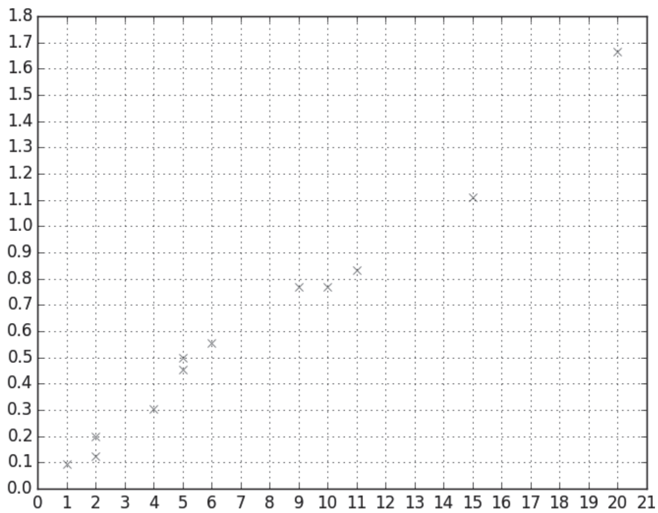
41 Ajustement non linéaire



a. Un ajustement linéaire ne semble pas approprié.

b. Valeurs du caractère Z :

[0,303 | 1,667 | 0,095 | 0,769 | 0,769 | 0,455 | 0,2 | 0,125 | 0,556 | 0,5 | 0,833 | 1,111]



c. $\mathrm{Cov}(X, Z) \simeq 2{,}373$

$a_2 \simeq 0{,}078$

$b_2 \simeq 0{,}027$

$z = 0{,}078x + 0{,}027$

d. $r_{xy} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(x)\,V(y)}} \simeq -0{,}71$ assez éloigné de 1.

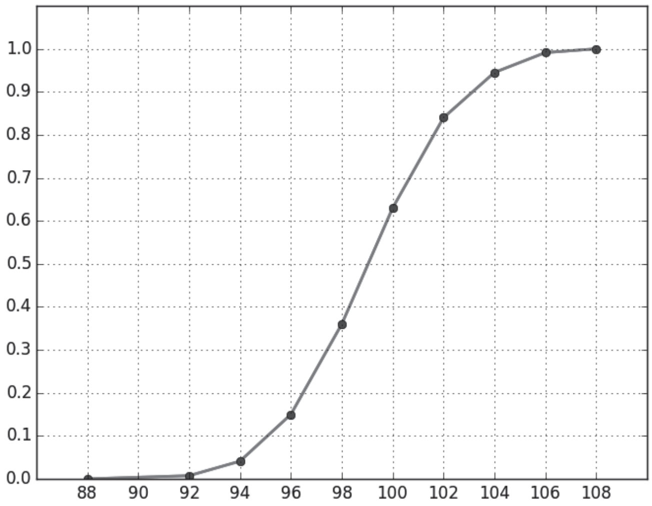
$r_{xz} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\sqrt{V(x)\,V(z)}} \simeq 0{,}99$; la régression linéaire est pertinente pour les caractères X et Z.

42 Contrôle de qualité

a. $\bar{x} = 99{,}0625$

$V = 9{,}144$ donc $\sigma \simeq 3{,}02$

b.



c. $\bar{x} - \sigma \simeq 99{,}06 - 3{,}02 \simeq 96{,}04$

$\bar{x} + \sigma \simeq 99{,}06 + 3{,}02 \simeq 102{,}08$

La valeur $\bar{x} - \sigma$ est dans l'intervalle [96 ; 98[, et $\bar{x} + \sigma$ dans [102 ; 104[.

On utilise les deux segments de la courbe de fréquences cumulées croissantes pour déterminer f_1 correspondant à $x_1 = \bar{x} - \sigma$ et f_2 correspondant à $x_2 = \bar{x} + \sigma$.

Le premier segment est limité par $A_1(96 ; 15)$ et $B_1(98 ; 36)$.

Pente du 1er segment : $a_1 = \dfrac{36 - 15}{2} = 10{,}5$

alors $\dfrac{f_1 - 15}{\bar{x} - \sigma - 96} = a_1$

$\Rightarrow f_1 = a_1(\bar{x} - \sigma - 96) + 15 = 10{,}5(96{,}04 - 96) + 15$
$= 15{,}42.$

Le second segment est limité par $A_2(102 ; 84)$ et $B_2(104 ; 94{,}5)$

Pente du second segment : $a_2 = \dfrac{94{,}5 - 84}{104 - 102} = 5{,}25$

alors $f_2 = a_2(\bar{x} + \sigma - 102) + 84$
$= 5{,}25(102{,}08 - 102) + 84 = 84{,}42.$

d. $f_2 - f_1 = 84{,}42 - 15{,}42 = 69 > 68.$
Donc la chaîne fonctionne correctement.

43 Tests à 1, 2 ou 3 sigmas

a. $n = 800$

$\bar{x} = 5{,}99$

$\sigma \simeq 0{,}228 \approx 0{,}23$

b. La condition sur $\bar{x}$ est vérifiée.

La condition sur σ est vérifiée.

Condition numéro 3 :

$\bar{x} - \sigma \approx 5{,}76$ et $\bar{x} + \sigma \approx 6{,}22$

$\bar{x} - \sigma \approx [5{,}7 ; 5{,}8[$ et $\bar{x} + \sigma \approx [6{,}2 ; 6{,}3[$

$M_1(\bar{x} - \sigma, f_1)$ appartient au segment limité par $A_1(5{,}7 ; 9{,}375)$ et $B_1(5{,}8 ; 19{,}5)$

$a_1 = \dfrac{19{,}5 - 9{,}375}{0{,}1} = 101{,}25$ donc $\dfrac{f_1 - 9{,}375}{5{,}76 - 5{,}6} = 101{,}25$

donc $f_1 = 101{,}25 \times 0{,}16 + 9{,}375 = 15{,}45$

$M_1'(\bar{x} + \sigma, f_1')$ appartient au segment limité par $A_1'(6{,}2 ; 81{,}75)$ et $B_1'(6{,}3 ; 90{,}75)$

$a_1' = \dfrac{9}{0{,}1} = 90$ donc $\dfrac{f_1' - 81{,}75}{6{,}22 - 6{,}2} = 90$

donc $f_1' = 81{,}75 + 90 \times 0{,}02 = 83{,}55$

$f_1' - f_1 = 83{,}55 - 15{,}45 = 68{,}1.$

La troisième condition est vérifiée.

Condition numéro 4 :

$\bar{x} - 2\sigma \simeq 5{,}53$ et $\bar{x} + 2\sigma \simeq 6{,}45$

$\bar{x} - 2\sigma \approx [5{,}5 ; 5{,}6[$ et $\bar{x} + 2\sigma \approx [6{,}4 ; 6{,}5[$

$M_2(\bar{x} - 2\sigma, f_2)$ appartient au segment limité par $A_2(5{,}5 ; 1{,}375)$ et $B_2(5{,}6 ; 3{,}375)$

$a_2 = \dfrac{2}{0{,}1} = 20$ donc $\dfrac{f_2 - 1{,}375}{5{,}53 - 5{,}5} = 20$

donc $f_2 = 1{,}375 + 20 \times 0{,}03 = 1{,}975.$

$M_2'(\bar{x} + 2\sigma, f_2')$ appartient au segment limité par $A_2'(6{,}4 ; 95{,}75)$ et $B_2'(6{,}5 ; 98{,}88)$

$a_2' = \dfrac{98{,}88 - 95{,}75}{0{,}1} = 31{,}3$ donc $\dfrac{f_2' - 95{,}75}{6{,}45 - 6{,}4} = 31{,}3$

donc $f_2' = 95{,}75 + 31{,}3 \times 0{,}05 = 97{,}315$

$f_2' - f_2 = 97{,}315 - 1{,}975 = 95{,}34.$

La quatrième condition est vérifiée.

Condition numéro 5 :

$\bar{x} - 3\sigma \simeq 5{,}3$ et $\bar{x} + 3\sigma \simeq 6{,}68$

Pour $\bar{x} - 3\sigma$ on connait $f_3 = 0{,}125$

$\bar{x} + 3\sigma \approx [6{,}7 ; 6{,}8[$

$M_3'(\bar{x} + 3\sigma, f_3')$ appartient au segment limité par $A_3'(6{,}6 ; 99{,}75)$ et $B_3'(6{,}7 ; 99{,}88)$.

$a_3' = \dfrac{99{,}88 - 95{,}75}{0{,}1} = 1{,}3$ donc $\dfrac{f_3' - 99{,}75}{6{,}68 - 6{,}6} = 1{,}3$

donc $f_3' = 99{,}75 + 1{,}3 \times 0{,}08 = 99{,}854$

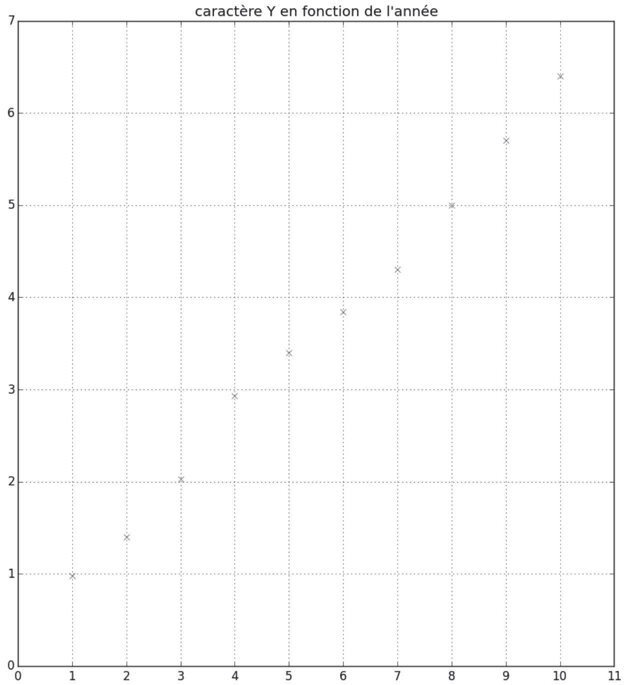
$f_3' - f_3 = 99{,}854 - 0{,}125 = 99{,}729.$

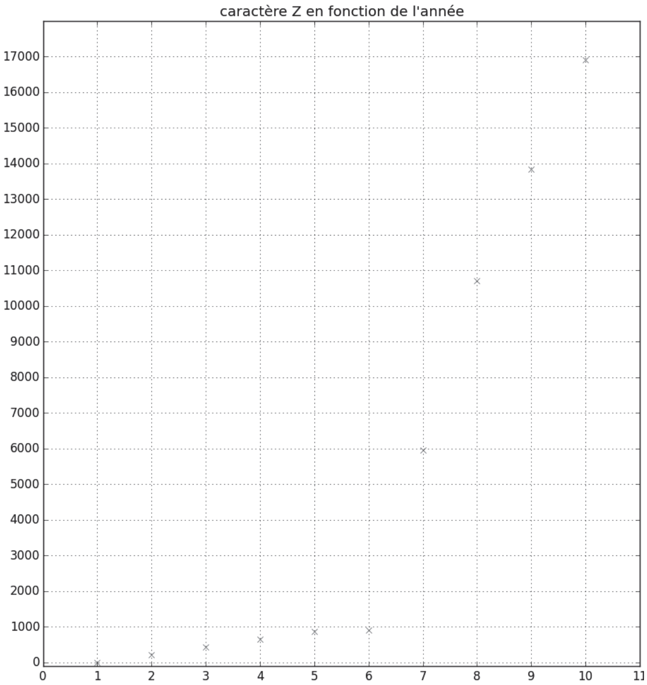
La cinquième condition est vérifiée.

Toutes les exigences de qualité sont satisfaites.

44 Interpolation et prévisions

1.





2. a. $\overline{x} = 5{,}50$ et $\overline{y} = 3{,}60$

$\text{Cov}(X, Y) = 4{,}914$ et $V(X) = 8{,}25$

alors $a \simeq 0{,}596$ et $b \simeq 0{,}322$

Une équation de la droite de régression linéaire de y en x est : $y = 0{,}596x + 0{,}322$

b. L'année 2020 est repérée par $x = 17$

alors $y = 0{,}596 \times 17 + 0{,}322 \simeq 10{,}454$

En 2020, on prévoit que 10,45 % de la population utilisera Internet.

3. a. On limite les données aux valeurs de rang $X \geqslant 6$.

Alors $\overline{x}' = 8$ et $\overline{z}' = 9\,662{,}6$ $\quad$ $\text{Cov}(X, Z) = 7\,978{,}4$ et $V(X) = 2$ $\quad$ $a' \simeq 3\,989{,}2$ $\quad$ $b' \simeq -22\,251$

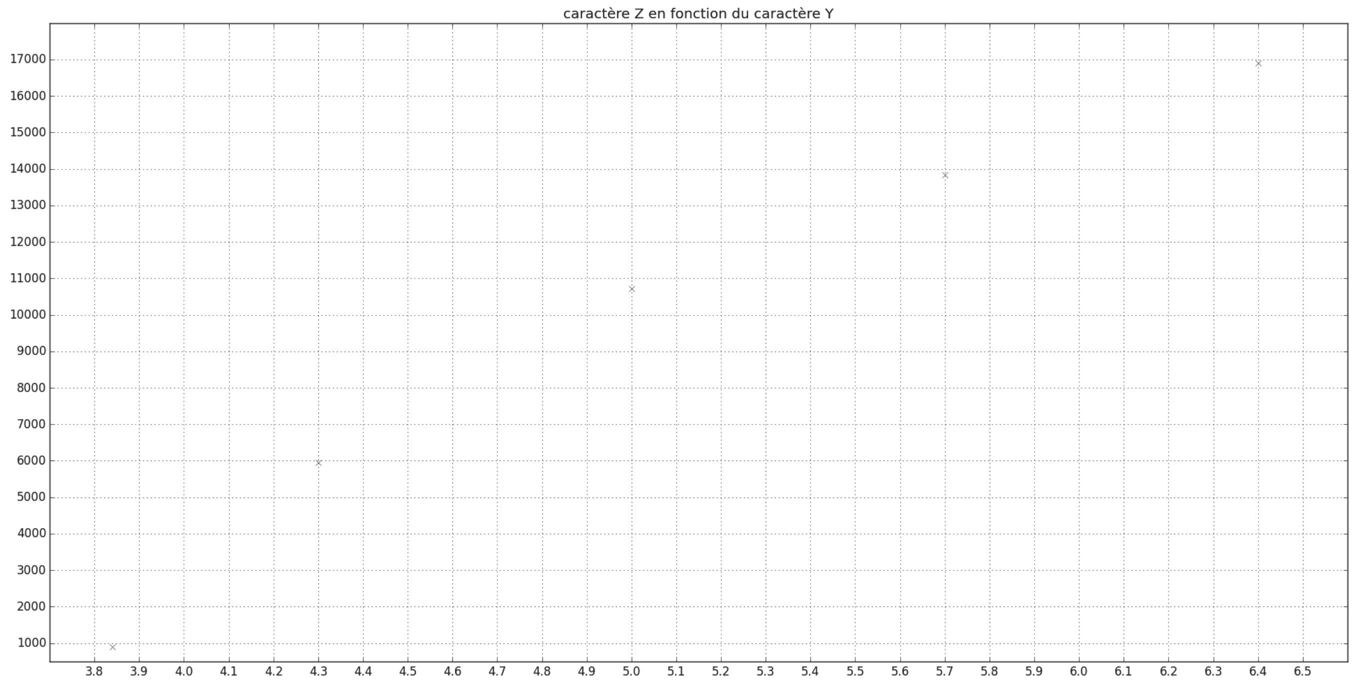
Une équation de la droite de régression linéaire de z en x pour les données de 2009 à 2013 est :

$z = 3\,989x - 22\,251$.

b. Pour $x = 17$ on calcule $z = 3\,989 \times 17 - 22\,251 = 45\,562$.

On prévoit qu'en 2020, 45 562 personnes auront un accès Internet haute vitesse.

4. a.



b. $\overline{y}' = 5{,}05$ et $\overline{z}' = 9\,662{,}6$

$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 5\,164{,}27$ et $V(Y) = 0{,}855$

$a'' = 6\,041{,}4$

$b'' = -20\,834{,}3$

Une équation de la droite de régression linéaire de z en y pour les données de 2009 à 2013 est :

$z = 6\,041y - 20\,834$

c. Pour $y = 10$ on a

$z = 6\,041 \times 10 - 20\,834 = 39\,576$

On estime que lorsque 39 576 personnes auront un accès Internet haute vitesse, 10 % de la population utilisera Internet.

5. a. $r_{X'Y'} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X', Y')}{\sqrt{V(X')\,V(Y')}} \simeq 0{,}997$

$r_{XZ} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X', Z')}{\sqrt{V(X')\,V(Z')}} \simeq 0{,}993$

$r_{YZ} = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y', Z')}{\sqrt{V(Y')\,V(Z')}} \simeq 0{,}983$

On note X', Y' et Z' les données restreintes aux années 2009 à 2013.

Les trois coefficients de corrélation linéaire sont proches de 1, on peut conclure que les réponses données aux questions **2.b.**, **3.b.** et **4.c.** sont pertinentes et fiables.