maxi maths

Exercices résolus

Mathématiques

Sc Math

1ère Année Baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale

Tome 1

1ère Bac S-Math

- Résumés de Cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse

EDITIONS Plus

MaXi Maths

Exercices résolus

MATHEMATIQUES

Sc Math

1ère année du baccalauréat

Option sciences mathématiques
Section internationale

(Tome 1)

- Résumés de cours
- Exercices variés et progressifs
- Problèmes de synthèse

Auteurs:

Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إيديسيون بلوس

EDITIONS Plus

Maxi.Maths - Exercices résolus

1ère année du baccalauréat

Option sciences mathématiques

Section internationale (Tome 1)

Édition 2019

Dépôt légal: 2018MO4274

ISBN: 978-9954-682-79-1

Préface

Chèr (e) èlève,

Ce livre d'exercices de mathématiques est déstiné aux éléves de la première année baccalauréat branche sciences mathématiques (BIOF-.

Il traite l'ensemble du programme du premier semestre.

Il a été préparé pour vous aider à:

- Maîtriser et développer les connaissances.
- Acquérir la rigueur nécessaire à la réussite aux contrôles continus.
- Se préparer de façon adéquate et continue à poursuivre les études en terminale dans les meilleures conditions.

Ce livre contient les chapitres suivants:

1- Notions de logique **2- Ensembles** **3- Applications**

4- Généralités sur les fonctions **5- Suites numériques** **6- Barycentre**

7- Produit scalaire **8- Trigonométrie** **9- Rotation**

Le contenu de chaque chapitre est conçu de la façon suivante:

- Des résumés de cours organisés suivant chaque paragraphe.
- Des exercices préparatoires pour mieux aborder le programme et en faire un point de départ pour l'élaboration d'une base solide en la matière.
- Des exercices classés, ordonnés et progressifs de chaque partie du cours.
- Des exercices de renfocement et de synthèse pour l'enrichissement personnel; ils combinent méthodes, outils et contenus mathématiques.

Nous souhaitons vivement que ce livre réponde à vos attentes et participe à votre réussite au baccalauréat...

Les auteurs

1 Leçon

Notions de logique

Maxi.

Résumé

1 Les connecteurs logiques

1) **Définitions (1):** Tout énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vrai soit faux est appelé proposition mathématique.

Une proposition est notée par une lettre par exemple: p,q ,... A,B , etc.

- La valeur de vérité d'une proposition p est soit: «vraie», soit «fausse».

2) Négation d'une proposition:

Définition (2):

On note «non p» ou «$\neg p$» ou «$\overline{p}$» la négation d'une proposition p, c'est-à-dire la proposition qui est vraie si p est fausse, et fausse si p est vraie.

3) Disjonction et conjonction de deux propositions:

Définition (3):

• La conjonction de p et q est la proposition notée: « p et q », ou « $p \wedge q$ » (se lit: p et q) et qui est vraie lorsque les propositions p et q sont simultanément vraies.

• La disjonction de p et q est la proposition notée: « p ou q » ou « $p \vee q$ » (se lit: p ou q) et qui est fausse lorsque les propositions p et q sont simultanément fausses.

4) Implication et équivalence de deux propositions:

Définition (4):

Soit p et q deux propositions.

L'implication de q par p, notée $p \Rightarrow q$, se lit « p implique q » est vraie si et seulement si p et q sont vraies ou si p est fausse.

Remarque: Si p est vraie et q est fausse alors $p \Rightarrow q$ et fausse; on dit que le vrai n'implique jamais le faux.

Définition (5):

- Deux propositions p et q sont dites équivalentes (On dit aussi « p est équivalente à q), et on note $p \Leftrightarrow q$ lorsqu'on a: $(p \Rightarrow q$ et $q \Leftrightarrow p)$ est vraie lorsque p et q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

2 Les quantificateurs

1) Fonction propositionnelle:

Définition:

On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique contenant une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable (ou les variables) par un élément (ou des éléments) de E.

Une fonction propositionnelle est notée généralement $A(x)$, $B(x)$, $p(x)$, ... $A(x;y)$, $B(x;y)$, ... $A(x;y;z)$,... etc.

2) Quantificateurs:

- Pour tout élément x de l'ensemble E, on a $A(x)$ est vraie, on écrit:

$$(\forall x \in E)\ ;\ A(x).$$

Le symbole $\forall$ se lit «pour tout» ou «quel que soit» et est appelé quantificateur universel.

- Il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui vérifie $A(x)$, on écrit: $(\exists x \in E)\ ;\ A(x)$.
- Le symbole $\exists$ se lit «il existe au moins» ou tout simplement «il existe» et est appelé quantificateur existentiel.
- Le symbole $\exists!$ se lit «il existe un unique....» ou «il existe un seul....»

3) Négation d'une propostion quantifiée:

a- La négation de la proposition «$(\forall x \in E)\ ;\ p(x)$» est $(\exists x \in E)$; non $p(x)$»

C'est-à-dire: $\overline{(\forall x \in E);p(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E);\overline{p(x)}$

b- La négation de la proposition «$(\exists x \in E);p(x)$» est $(\forall x \in E)$; non $p(x)$»

C'est-à-dire: $\overline{(\exists x \in E);p(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E);\overline{p(x)}$

3 Les lois logiques

1) **Définitions:** Toute proposition construite à partir d'autres propositions liées entre elles par des connecteurs et qui est vraie indépendamment des propositions qui la composent, est une loi logique.

Les lois logiques les plus utiles:

Commutativité:

$(p \text{ et } q) \Leftrightarrow (q \text{ et } p)$

$(p \text{ ou } q) \Leftrightarrow (q \text{ ou } p)$

$(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$

Associativité:

$((p \text{ et } q) \text{ et } r) \Leftrightarrow (p \text{ et } (q \text{ et } r))$

$((p \text{ ou } q) \text{ ou } r) \Leftrightarrow (p \text{ ou } (q \text{ ou } r))$

Distributivité:

p et $(q \text{ ou } r) \Leftrightarrow (p \text{ et } q)$ ou $(p \text{ et } r)$

p ou $(q \text{ et } r) \Leftrightarrow (p \text{ ou } q)$ et $(p \text{ ou } r)$

Lois de Morgan:

$\overline{(p \text{ et } q)} \Leftrightarrow \overline{p} \text{ ou } \overline{q}$;

$\overline{(p \text{ ou } q)} \Leftrightarrow \overline{p} \text{ et } \overline{q}$

Contraposée:

L'implication $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est appelée contraposée de l'implication $(p \Rightarrow q)$ et on a $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

Exercices

Exercice 1

Donner la négation de chacune des propositions suivantes puis déterminer sa valeur de vérité:

1) $P: \frac{4}{9} \neq \frac{2}{3}$.
2) $Q: \sqrt{4+1} < 3$.
3) $R: \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
4) $S: \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la négation des propositions suivantes:

1) $P:$ «$x \leq -5$».
2) $Q:$ «$1 \leq x < 4$».
3) $R:$ «$x \geq 1$ ou $x < -2$».

Exercice 3

Soit x, y et z des nombres réels. Donner la négation des propositions suivantes:

1) $P:$ «$z > x$ ou $z \leq -y$».
2) $Q: z < x \leq y$».
3) $R:$ «$1 \leq x < 2$ et $y > 3$».

Exercice 4

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes:

1) $(\sqrt{16} + \sqrt{25} = \sqrt{16+25})$ et $-3 \notin \mathbb{N}$

4) $\sqrt{3} > 3 \Longrightarrow \sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$

2) $\sqrt{5} > 2$ ou $-\sqrt{3} \in \mathbb{N}$

3) $\left(\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5}\right) \Longrightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$

5) $(a \in \mathbb{N})$; $a^2 = 1 \Longleftrightarrow a = 1$

6) $(a \in \mathbb{Z})$; $a^2 \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{N}$

Exercice 5

Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs et les connecteurs logiques:

1) P : Il existe au moins un nombre réel a tel que pour tout réel x positif on a : $a \leq x$.

2) Q : Pour tous réels a et b on a: $(a+b)^2 \geq 4ab$.

3) R : Pour tout réel x il existe un unique entier relatif p tel que: $p \leq x$.

4) S : Tout nombre entier naturel divisible par 4 est un nombre pair.

5) T : Pour tout réel strictement positif ε, il existe au moins un nombre réel α strictement positif tel que pour tout réel x, si on a: $|x-1| < \alpha$ alors $\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Exercice 6

Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes:

1) Le carré de tout réel est positif.

2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3) Aucun entier naturel n'est supérieur ou égal à tous les autres.

4) Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.

5) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel. (au sens large)

6) Étant donné trois réels, il y en a, au moins deux de même signe.

Exercice 7

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes en utilisant des quantificateurs et des connecteurs logiques:

1) P : Pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un nombre rationnel strictement positif q tel que: $0 < q < \varepsilon$.

2) Q : Pour tout nombre réel x, on a: $x^2 < 0$.

3) R : Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que pour tout entier naturel p on a: $p < m$ implique $p < n+1$.

Exercice 8

Donner la négation de chacune des propositions suivantes puis donner leur valeur de vérité:

1) P : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1} > x$

2) Q : $(\exists p \in \mathbb{Z})$; $p^2 = 2$

3) $R : (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$; $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$

4) $S : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})$; $x + y = 12$

5) $T : (\forall x \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{Z})$; $nx \in \mathbb{Z}$

Exercice 9

Donner la négation de chacune des propositions suivantes puis donner leur valeur de vérité:

1) $P : (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})$; $x + y > 0$.

2) $Q : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$; $x + y > 0$.

3) $R : (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})$; $y^2 > x$.

4) $S : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)$; $|x| < \alpha \Longrightarrow |x^2| < \varepsilon$. (où x est un réel)

Exercice 10

(Lois de MORGAN - Négation d'une implication)

1) Montrer en utilisant la table de vérité que:

a- $(\overline{p \text{ ou } q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ et } \overline{q})$.

b- $(\overline{p \text{ et } q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } \overline{q})$.

2) a- Montrer que: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } q)$.

b- En déduire que: $(\overline{p \Longrightarrow q}) \Longleftrightarrow (p \text{ et } \overline{q})$.

Exercice 11

En utilisant les lois de MORGAN et la négation d'une implication, donner la négation des propositions suivantes:

1) $P : (\forall x \in \mathbb{R})$; $(x \geq 0$ ou $x \leq 0)$.

2) $Q : (\exists x \in \mathbb{R})$; $(x^2 > 5$ et $x \in \mathbb{Z})$.

3) $R : (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})$; $|xy| = xy \Longrightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2$.

4) $S : (\forall a \in \mathbb{R})$; $(a^2 \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow a \in \mathbb{Z}$.

5) $T : (\forall \alpha > 0)(\exists \beta > 0)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|x| < \beta \Longrightarrow \left|\dfrac{x}{x^2+2}\right| < \alpha$.

Exercice 12

Donner la négation de chacune des propositions suivantes:

1) $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$; $x + y > 1$.

2) $Q : (\exists x \in \mathbb{R})$; $x - 1 < \dfrac{x}{x+1} \leq x$.

3) $R : (\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2})$; $\dfrac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow ab > 0$.

4) $S : (\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{5}$.

Exercice 13

1) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-x^2+x-1<0$.

2) On considère la proposition $P: (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): -x^2+x-1 \geq y$.

a- Déterminer la négation de la proposition P.

b- En déduire que la proposition P est fausse.

Exercice 14

On considère la proposition:

$$P: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \ ; \ y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1$$

1) La proposition P est-elle vraie? justifier votre réponse.

2) Déterminer la négation de la proposition P.

Exercice 15

On considère les deux propositions suivantes:

$(P): (\exists x \in \mathbb{R}^*)$; $\sqrt{1+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$(Q): (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})$; $\dfrac{x}{1+x^2} < y$.

1) Donner la négation de chacune des propositions P et Q.

2) a- Montrer que la proposition P est vraie et que la proposition Q est fausse.

b- Donner la valeur de vérité de la proposition:

$(R): \left((\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{x}{1+x^2} \geq y\right) \Longrightarrow \left((\forall x \in \mathbb{R}^*) \ ; \ \sqrt{1+x} \neq \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$.

3) On considère la proposition: $(S): (P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow \overline{Q}$.

a- Donner la négation de la proposition S.

b- Donner la valeur de vérité de la proposition (S).

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$.

On considère les propositions suivantes:

$P: (\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)$; $(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$.

$Q: (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})$; $y = f(x)$.

$R: (\forall \alpha \in \mathbb{R}^*)(\exists \beta \in \mathbb{R})$; $f(\beta) = \alpha$.

1) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $f(x) = 1$.

b- Donner la négation de P.

c- La proposition P est-elle vraie? justifier votre réponse.

2) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $f(x) = a$ où $a \in]-\infty; -1]$.

b- Donner la négation de la proposition Q.

c- Donner la valeur de vérité de chacune des propositions Q et R.

Exercice 17

Soit p, q et r trois propositions. Montrer que toutes les propositions suivantes sont des lois logiques.

1) $[p \text{ et } (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$.

2) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ et } r) \Longrightarrow (q \text{ et } r)]$.

3) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ ou } r) \Longrightarrow (q \text{ ou } r)]$.

Exercice 18

1) Soit p, q et r trois propositions.

Montrer que: $[p \Longrightarrow (q \text{ ou } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ et } \overline{q}) \Longrightarrow r]$.

2) Montrer que: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)$; $(ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Exercice 19

1) Soit p, q et r trois propositions.

Montrer que:

a- $[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$.

b- $[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$.

2) a- Développer $(x-1)(y-2)$.

b- Résoudre le système suivant:

$$(S): \begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ yx^2 - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases}$$

Solutions

Exercice 1

1) • La négation de la proposition:

P : « $\frac{4}{9} \neq \frac{2}{3}$ » est la proposition $\overline{P}$: « $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ »

• Puisque la proposition $\overline{P}$: « $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ » est fausse car: $4 \times 3 \neq 9 \times 2$.

Alors la proposition P est vraie.

2) • La négation de la proposition Q : « $\sqrt{4+1} < 3$ » est la proposition $\overline{Q}$: « $\sqrt{4+1} \geq 3$ ».

• Puisque: $\sqrt{4+1} < 3$ c'est-à-dire $\sqrt{5} < 3$ (car $5 < 9$) alors la proposition Q est vraie.

3) La négation de la proposition R : « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est la proposition $\overline{R}$: « $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ».

- Puisque $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (Démonstration: voir paragraphe du raisonnement par l'absurde) alors $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc la proposition R est fausse.

4) La négation de la proposition S : « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ » est la proposition $\overline{S}$: « $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$ ».

- Puisque tout entier naturel est un entier relatif, alors on a: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, donc la proposition S est vraie.

Exercice 2

Soit x un nombre réel.

1) La négation de la proposition P : « $x \leq -5$ » est la proposition: $\overline{P}$: « $x > -5$ ».

2) On peut exprimer la proposition Q : « $1 \leq x < 4$ » par: « $x \geq 1$ et $x < 4$ », donc la négation de la proposition Q est la proposition $\overline{Q}$: « $x < 1$ ou $x \geq 4$ ».

3) La négation de la proposition R : « $x \geq 1$ ou $x < -2$ » est la proposition $\overline{R}$: « $x < 1$ et $x \geq -2$ ».

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

1) La négation de la proposition P : « $z > x$ ou $z \leq -y$ » est la proposition $\overline{P}$: « $z \leq x$ et $z > -y$ » que l'on peut écrire: $\overline{P}$: « $-y < z \leq x$ ».

2) La négation de la proposition Q : « $z < x \leq y$ » est la proposition $\overline{Q}$: « $z \geq x$ ou $x > y$ ».

3) La négation de la proposition R : « $1 \leq x < 2$ et $y > 3$ » est la proposition $\overline{R}$: « $x < 1$ ou $x \geq 2$ ou $y \leq 3$ ».

Exercice 4

1) La proposition: « $(\sqrt{16} + \sqrt{25} = \sqrt{16 + 25})$ et $-3 \notin \mathbb{N}$ est une proposition fausse car l'une des deux propositions est fausse à savoir: $\sqrt{16} + \sqrt{25} = \sqrt{16 + 25}$ on a: $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 9$ et $\sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$ puisque: $9 \neq \sqrt{41}$ alors $\sqrt{16 + 25} \neq \sqrt{16} + \sqrt{25}$.

2) La proposition: $\sqrt{5} > 2$ ou $-\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ est une proposition vraie car l'une des deux propositions est vraie à savoir: $\sqrt{5} > 2$ (car $(\sqrt{5})^2 > (2)^2$).

3) La proposition: $\left(\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5}\right) \Longrightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$ est une proposition fausse car la proposition: $\sqrt{\frac{6}{5}} \in \mathbb{Q}$ est fausse et la proposition $\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 = \frac{6}{5}$ est vraie

puisqu'on sait que le vrai n'implique pas le faux.

4) La proposition: $\sqrt{3} > 3 \Longrightarrow \sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$ est une proposition vraie car les deux propositions: $\sqrt{3} > 3$ et $\sqrt{3} \neq \sqrt{2} + 1$ sont fausses, puisqu'on sait que le faux implique le faux.

5) Soit $a \in \mathbb{N}$; La proposition: $a^2 = 1 \Longleftrightarrow a = 1$ est une proposition vraie car:

$$\begin{aligned} a^2 = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{a^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow |a| = 1 \\ &\Longleftrightarrow a = 1 \text{ (car } a \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

6) Soit $a \in \mathbb{Z}$. La proposition: $a^2 \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{N}$ est fausse car si on prend par exemple: $a = -1$, on a: $a^2 \in \mathbb{N}$ mais $a \notin \mathbb{N}$.

Exercice 5

Écrivons les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs et les connecteurs logiques:

1) $P : (\exists a \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ a \leq x.$

2) $Q : (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})\ ;\ (a+b)^2 \geq 4ab$

on peut l'écrire: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ (a+b)^2 \geq 4ab$

3) $R : (\forall x \in \mathbb{R});(\exists! p \in \mathbb{Z})\ ;\ p \leq x.$

4) $S : (\forall n \in \mathbb{N})\ ; 4 | n \Longrightarrow 2 | n.$

5) $T : (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ |x-1| < \alpha \Longrightarrow \left| \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Exercice 6

Écrivons à l'aide des quantificateurs les propositions:

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x \geq 0.$

2) $(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ x > x^2.$

3) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})\ ;\ n < p.$

4) $(\exists n \in \mathbb{N});(\forall p \in \mathbb{N})\ ;\ p/n.$

5) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ x < y \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{Q})\ ;\ x \leq z \leq y.$

6) $(\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\ ;\ xy \geq 0$ ou $xz \geq 0$ ou $yz \geq 0.$

Exercice 7

Écrivons la négation des propositions en utilisant des quantificateurs et des connecteurs logiques.

1) $P : (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*});(\exists q \in \mathbb{Q}^{+*})\ ;\ 0 < q < \varepsilon$

Sa négation $\overline{P}$ est: $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*});(\forall q \in \mathbb{Q}^{+*})\ ;\ q \geq \varepsilon$ ou $q \leq 0.$

2) $Q : (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 < 0.$

Sa négation $\overline{Q}$ est: $(\exists x \in \mathbb{R})$; $x^2 \geq 0$.

3) $R: (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})$; $(\forall p \in \mathbb{N})$; $p < m \Longrightarrow p < n+1$.

Sa négation $\overline{R}$ est:

$$(\exists n \in \mathbb{N});(\forall m \in \mathbb{N})s(\exists p \in \mathbb{N});\ p < m \text{ et } p \geq n+1.$$

Exercice 8

Donnons la négation de chacune des propositions puis donnons leur valeur de vérité:

1) $P: (\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1} > x$; Sa négation $\overline{P}$ est: $(\exists x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1} \leq x$.

La proposition P est vraie car: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $x^2 < x^2+1$,

donc: $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ c'est-à-dire $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

Puisque: $|x| \geq x$ alors $x < \sqrt{x^2+1}$.

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{1+x^2} > x$.

2) $Q: (\exists p \in \mathbb{Z});p^2 = 2$; Sa négation $\overline{Q}$ est: $(\forall p \in \mathbb{Z});p^2 \neq 2$.

La proposition Q est fausse car: $p^2 = 2 \Longrightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$.

Puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ alors $(\forall p \in \mathbb{Z})$; $p^2 \neq 2$.

Donc $\overline{Q}$ est vraie d'où la proposition Q est fausse.

3) $R: (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$; $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$.

Sa négation $\overline{R}$ est: $(\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R})$; $2a^2 + 2b^2 < (a+b)^2$.

La proposition R est vraie car: Pour tous réels a et b on a:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ donc: $2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab$.

C'est-à-dire: $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$.

D'où: $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$; $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$.

4) $S: (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})$; $x + y = 12$.

Sa négation $\overline{S}$ est: $(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{N})$; $x + y \neq 12$.

La proposition S est vraie car il suffit de prendre $x = 3$ et $y = 9$ par exemple.

5) $T: (\forall x \in \mathbb{Q});(\exists n \in \mathbb{Z});nx \in \mathbb{Z}$.

Sa négation $\overline{T}$ est: $(\exists x \in \mathbb{Q});(\forall n \in \mathbb{Z});nx \notin \mathbb{Z}$.

La proposition T est vraie car pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il suffit de prendre $n = 0$ et on obtient $nx = 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9

Donnons la négation de chacune des propositions puis donnons leur valeur de vérité.

1) $P: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ x+y>0.$

$\overline{P}: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ x+y\leq 0.$

La proposition $\overline{P}$ est vraie, car pour tout réel x, il suffit de prendre $y=-x$ et on obtient $0\leq 0$, donc la proposition P est fausse.

2) $Q: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ x+y>0.$

$\overline{Q}: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ x+y\leq 0.$

La proposition Q est vraie, car pour tout réel x, il suffit de prendre $y=-x+1$ et on obtient $1>0$.

3) $R: (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ y^2>x.$

$\overline{R}: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ y^2\leq x.$

La proposition R est vraie car si on prend $x=-1$, on a: $(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ y^2>-1$ qui est une proposition vraie.

4) $S: (\forall \varepsilon >0)(\exists \alpha >0)\ ;\ |x|<\alpha \Longrightarrow |x^2|<\varepsilon$; (où $x \in \mathbb{R}$)

$\overline{S}: (\exists \varepsilon >0);(\forall \alpha >0)\ ;\ |x|<\alpha$ et $|x^2|\geq \varepsilon.$

La proposition S est vraie, car il suffit de prendre $\alpha=\sqrt{\varepsilon}$, on a:

$$(\forall \varepsilon >0);(\exists \alpha >0);|x|<\sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow |x|^2<\varepsilon$$

Exercice 10

1) a- Montrons que: $(\overline{p\ ou\ q}) \Longleftrightarrow (\overline{p}\ et\ \overline{q}).$

On a la table de vérité suivante:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p\ ou\ q}$	$\overline{p}$ et $\overline{q}$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

On déduit du tableau que les propositions « $\overline{p\ ou\ q}$ » et « $\overline{p}$ et $\overline{q}$ » ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

D'où: $(\overline{p\ ou\ q}) \Longleftrightarrow (\overline{p}\ et\ \overline{q}).$

b- Montrons que: $(\overline{p\ et\ q}) \Longleftrightarrow (\overline{p}\ ou\ \overline{q}).$

On a:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p \text{ et } q}$	$\overline{p}$ ou $\overline{q}$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

De même que a- on déduit du tableau que: $(\overline{p \text{ et } q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } \overline{q})$.

2) a- Montrons que: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } q)$

On a:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ ou q	$p \Longrightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

On déduit du tableau que les propositions: « $p \Longrightarrow q$ » et « $\overline{p}$ ou q »
ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes, d'où:
$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } q)$.

b- Déduisons que: $(\overline{p \Longrightarrow q}) \Leftrightarrow (p \text{ et } \overline{q})$.

On a: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } q)$.

Donc: $(\overline{p \Longrightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{p} \text{ ou } q})$

$\Leftrightarrow (p \text{ et } \overline{q})$ (D'après les lois de MORGAN)

Exercice 11

Donnons la négation des propositions suivantes:

Rappel:
La négation de $p \Longrightarrow q$
est: (p et $\overline{q}$)

1) $P: (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$

$\overline{P}: (\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ (x < 0 \text{ et } x > 0)$

2) $Q: (\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ (x^2 > 5 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$

$\overline{Q}: (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (x^2 \leq 5 \text{ ou } x \notin \mathbb{Z})$

3) $R: (\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ |xy| = xy \Longrightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2$

$\overline{R}: (\exists x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ |xy| = xy \text{ et } (x+y)^2 < x^2 + y^2$

4) $S: (\forall a \in \mathbb{R})\ ;\ (a^2 \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow (a \in \mathbb{Z})$

$\overline{S} : (\exists a \in \mathbb{R})\ ;\ a^2 \in \mathbb{Z}$ et $a \notin \mathbb{Z}$

5) $T : (\forall \alpha > 0)(\exists \beta > 0)\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ |x| < \beta \Longrightarrow \left|\dfrac{x}{x^2+2}\right| < \alpha$

$\overline{T} : (\exists \alpha > 0);(\forall \beta > 0)\ (\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ |x| < \beta$ et $\left|\dfrac{x}{x^2+2}\right| \geq \alpha$

Exercice 12

Donnons la négation des propositions suivantes:

> Rappel:
> $p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \overline{p}$ ou q

1) $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ x + y > 1$

$\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ x + y \leq 1$

2) $Q : (\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ x - 1 < \dfrac{x}{x+1} \leq x$

$\overline{Q} : (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x - 1 \geq \dfrac{x}{x+1}$ ou $\dfrac{x}{x+1} > x$

3) $R : (\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2})\ ;\ \frac{a}{b} > 0 \Longleftrightarrow ab > 0$

On peut écrire R comme suit:

$$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2})\ ;\ \left(\left(\frac{a}{b} > 0 \Longrightarrow ab > 0\right) \text{ et } \left(ab > 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} > 0\right)\right)$$

c'est-à-dire: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2})\ ;\ \left(\left(\frac{a}{b} \leq 0 \text{ ou } ab > 0\right) \text{ et } \left(ab \leq 0 \text{ ou } \frac{a}{b} > 0\right)\right)$.

Donc sa négation est la proposition $\overline{R}$:

$$(\exists (a;b) \in \mathbb{R}^{*2})\ ;\ \left(\left(\frac{a}{b} > 0 \text{ et } ab \leq 0\right) \text{ ou } \left(ab > 0 \text{ et } \frac{a}{b} \leq 0\right)\right).$$

D'après les lois de MORGAN.

4) $S : (\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\ ;\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{5}$

Que l'on peut écrire comme suit:

$$(\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\ ;\ \left(\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \text{ et } \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{5}\right)$$

Donc sa négation est la proposition $\overline{S}$:

$$(\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3)\ ;\ \left(\frac{x-1}{2} \neq \frac{y+1}{3} \text{ ou } \frac{x-1}{2} \neq \frac{z-2}{5}\right)$$

D'après les lois de MORGAN.

Exercice 13

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ -x^2 + x - 1 < 0$.

Le discriminant Δ du trinôme $-x^2 + x - 1$ est $\Delta = -3$.

Puisque $a = -1$ alors $a < 0$, donc: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ -x^2 + x - 1 < 0$.

2) a- Déterminons la négation de P.

On a: $P : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ -x^2 + x - 1 \geq y$.

Sa négation est $\overline{P} : (\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ -x^2+x-1 < y$.

b- On a: d'après la question a-: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ -x^2+x-1 < 0$.

Donc en prenant $y=0$ dans la proposition $\overline{P}$.

La proposition $\overline{P}$ est vraie, par suite la proposition P est fausse.

Exercice 14

1) Déterminons la valeur de vérité de la proposition P :

On a: $P : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ ;\ y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons si on peut trouver toujours y en fonction de x pour que l'égalité soit vraie.

On a: $y^2 - 3xy^2 + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow y^2(1-3x) = 1-2x^2\ (*)$.

Si on prend $x=\frac{1}{3}$, l'égalité $(*)$ devient: $0=\frac{7}{9}$ ce qui est impossible, donc pour $x=\frac{1}{3}$, il n'y a pas de valeur de y qui vérifie l'égalité $(*)$.

D'où la proposition P est fausse.

2) La négation de la proposition P est la proposition $\overline{P}$:

$$(\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ y^2 - 3xy^2 + 2x^2 \neq 1$$

Exercice 15

1) Donnons la négation de chacune des propositions P et Q :

- $(P) : (\exists x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Sa négation est: $(\overline{P}) : (\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \sqrt{1+x} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

- $(Q) : (\forall y \in \mathbb{R});(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x}{1+x^2} < y$.

Sa négation est: $(\overline{Q}) : (\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x}{1+x^2} \geq y$.

2) a- • Montrons que la proposition (P) est vraie.

La proposition (P) est vraie si on remarque que $x=0$ vérifie (P).

Si non on peut résoudre l'équation: $\sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

En effet: Soit $x > -1$, on a: $\sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Leftrightarrow (\sqrt{1+x})^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x+1=1$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Donc $(\exists x \in \mathbb{R}^{+})\ ;\ \sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

• Montrons que la proposition (Q) est fausse.

Pour cela, il suffit de montrer que la proposition $\overline{Q}$ est vraie.

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2+x+1>0$, car $\Delta<0$ et $a=1$.

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x > -(x^2+1)$

c'est-à-dire: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x}{x^2+1} > -1$. (car $x^2+1>0$)

D'où: si on prend $y=-1$ dans la proposition $\overline{Q}$, cette dernière sera vraie, par suite la proposition Q est fausse.

b- Donnons la valeur de vérité de la proposition R.

On a: (R):

$$\left((\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x}{1+x^2} \geq y\right) \Rightarrow \left((\forall x \in \mathbb{R}^{+})\ ;\ \sqrt{1+x} \neq \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$$

C'est-à-dire: la proposition (R) est: $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Puisque $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ est fausse alors l'implication est fausse car le vrai n'implique pas le faux.

3) a- Donnons la négation de la proposition S.

On a: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \overline{Q} \Leftrightarrow (\overline{P \Rightarrow Q})$ ou $\overline{Q}$

$\Leftrightarrow (\overline{\overline{P}\ ou\ Q})$ ou $\overline{Q}$

$\Leftrightarrow (P\ et\ \overline{Q})$ ou $\overline{Q}$

Rappel:
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p}\ ou\ q)$

Donc: la négation de la proposition S est:

$$\overline{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \overline{Q}} \Leftrightarrow \overline{(P\ et\ \overline{Q})ou\ \overline{Q}}$$
$$\Leftrightarrow (\overline{P}\ ou\ Q)\ et\ Q$$

D'où: $\overline{S} : (\overline{P}\ ou\ Q)$ et Q.

b- Déterminons la valeur de vérité de S.

On a: $\overline{P}$ est fausse et Q est fausse donc $(\overline{P}\ ou\ Q)$ est fausse d'où la proposition $\overline{S}$ est fausse, par suite (S) est une proposition vraie.

Exercice 16

1) **a**- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $f(x)=1 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}-1=1$

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2\\&\Longleftrightarrow x^2+1=4\\&\Longleftrightarrow x^2=3\\&\Longleftrightarrow x=\sqrt{3} \text{ ou } x=-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Donc: $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

b- Donnons la négation de la proposition P:

On a: $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2);\ (f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b)$.

C'est-à-dire: $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ (f(a)\neq f(b)$ ou $a=b)$.

Sa négation est $\overline{P}:(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2);\ (f(a)=f(a)$ et $a\neq b)$.

c- La proposition P est fausse, car la proposition $\overline{P}$ est vraie en effet: On a d'après a-; $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont les solutions de l'équation: $f(x)=1$, cela signifie que: $f(\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})=1$ mais $\sqrt{3}\neq-\sqrt{3}$.

2) **a**- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f(x)=a$, avec $a\in]-\infty;-1]$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $f(x)=a\Longleftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=a$

$$\Longleftrightarrow\sqrt{x^2+1}=a+1 \text{ impossible}$$

car: $(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ \sqrt{x^2+1}>0$ et on a: $a+1\leq 0$.

Donc l'équation: $f(x)=a$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, d'où: $S=\phi$.

b- Donnons la négation de la proposition Q:

On a: $Q:(\forall y\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)=y$.

Sa négation est: $\overline{Q}:(\exists y\in\mathbb{R});(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)\neq y$.

c- • Donnons la valeur de vérité de la proposition Q.

On a d'après la question précédente l'équation $f(x)=a$ avec $a\leq-1$ n'a pas solutions dans $\mathbb{R}$, donc si on prend par exemple $y=-1$,

on a l'équation $f(x)=-1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ cela signifie que:

$(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \neq -1$.

Donc le proposition $\overline{Q}$: $(\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \neq y$ est vraie et par suite la proposition Q est fausse.

• Donnons la valeur de vérité de la proposition R.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, existe t-il $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\beta) = \alpha$?

On a: $f(\beta) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\beta^2+1} - 1 = \alpha$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\beta^2+1} = \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = (\alpha+1)^2 - 1 = \alpha^2 + 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2+2\alpha} \text{ ou } \beta = -\sqrt{\alpha^2+2\alpha}$$

donc l'équation $f(\beta) = \alpha$ où β est l'inconnue admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ d'où la proposition R: $((\forall \alpha \in \mathbb{R}^*)(\exists \beta \in \mathbb{R})$; $f(\beta) = \alpha)$ est vraie.

Exercice 17

Montrons que les propositions suivantes sont des lois logiques.

1) $[p \text{ et } (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$.

On a:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$[p \text{ et } (p \Longrightarrow q)]$	$[p \text{ et } (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Donc la proposition $[p \text{ et } (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$ est une loi logique

2) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ et } r) \Longrightarrow (q \text{ et } r)]$.

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	p et r	q et r
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

0	0	0	1	0	0

$(p \text{ et } r) \Longrightarrow (q \text{ et } r)$	$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ et } r) \Longrightarrow (q \text{ et } r)]$
1	1
1	1
0	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1

Donc la proposition $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ et } r) \Longrightarrow (q \text{ et } r)]$ est une loi logique.

3) De la même façon, on montre que la proposition: $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \text{ ou } q) \Longrightarrow (q \text{ ou } r)]$ est une loi logique.

Exercice 18

1) Montrons que: $[p \Longrightarrow (q \text{ ou } r)] \Longleftrightarrow [(p \text{ et } \overline{q}) \Longrightarrow r]$.

On a: $(p \Longrightarrow (q \text{ ou } r)) \Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ ou } (q \text{ ou } r))$

$$\Longleftrightarrow (\overline{p} \text{ } ou \text{ } q) \text{ ou } r$$

$$\Longleftrightarrow \left(\overline{p \text{ } et \text{ } \overline{q}}\right) \text{ ou } r$$

$$\Longleftrightarrow (p \text{ } et \text{ } \overline{q}) \Longrightarrow r$$

2) Montrons que: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)$; $(ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Pour cela, on va montrer les deux implications.

- On a: $a = 0$ ou $b = 0 \Longrightarrow ab = 0$ est une proposition vraie.

- Montrons que: $(ab = 0 \text{ et } a \neq 0) \Longrightarrow b = 0$. en utilisant le résultat de la question 1)

car: $(ab = 0 \Longrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)) \Longleftrightarrow (ab = 0 \text{ et } a \neq 0) \Longrightarrow b = 0$.

Supposons que: $ab = 0$ et $a \neq 0$.

On a: $ab = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{a}(ab) = 0$ (car $a \neq 0$)

$$\Longrightarrow b = 0$$

Donc: $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

D'où: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)$; $(ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Exercice 19

1) a- Montrons que: $[p \text{ et } (q \text{ ou } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$ en utilisant les tables de vérité.

p	q	r	p et q	p et r	q ou r	p et(q ou r)	(p et q)ou(p et r)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Les propositions « p et $(q$ ou $r)$» et «$[(p \text{ et } q) \text{ ou } (p \text{ et } r)]$ ont les mêmes valeurs de vérité quelles que soient les valeurs des propositions p, q et r. Donc elles sont équivalentes.

b- De la même façon, on montre que: $[p \text{ ou } (q \text{ et } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ ou } q) \text{ et } (p \text{ ou } r)]$.

2) a- Développons: $(x-1)(y-2)$.

On a: $(x-1)(y-2) = xy - 2x - y + 2$.

b- Résolvons le système (S):

On a: $(S): \begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ yx^2 - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ yx^2 - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } y = 2 \\ yx^2 - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases}$

D'après la loi de la distributivité, le système (S) équivaut à:

$(S_1): \begin{cases} x = 1 \\ y - (y^2+1) + y = 0 \end{cases}$ ou $(S_2): \begin{cases} y = 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$

Signifie que: $(S_1): \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ ou $(S_2): \begin{cases} y = 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$

Donc: $(S_1): \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

et $(S_2): \begin{cases} y = 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ (2x-1)(x-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$ (D'après la loi de la distributivité)

D'où l'ensemble des solutions du système (S) est: $\left\{(1;1);\left(\frac{1}{2};2\right);(2;2)\right\}$.

Raisonnement par contre-exemple

Exercices

Exercice 20

Montrer que la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2-5x+6>0$ est une proposition fausse.

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-x+1$.
Montrer que la fonction f est ni paire ni impaire.

Exercice 22

Montrer que la proposition P : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $3\cos x \neq 2\sin^2 x$ est une proposition fausse.

Solutions

Exercice 20

Montrons que la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2-5x+6>0$ est une proposition fausse.

Pour $x=\frac{5}{2}$, on a : $\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+6=\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+6=6-\frac{25}{4}=-\frac{1}{4}$.

Donc $\frac{5}{2}$ ne vérifie pas l'inéquation $x^2-5x+6>0$.

D'où la proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2-5x+6>0$ est une proposition fausse.

Rappel :

Soit f une fonction numérique définie sur son ensemble de définition D.

- f est une fonction paire si on a : $\begin{cases} (\forall x \in D) ; -x \in D \\ (\forall x \in D) ; f(-x)=f(x) \end{cases}$
- f n'est pas une fonction paire si : $(\exists x \in D)$; $(-x \notin D$ ou $f(-x) \neq f(x))$
- f est une fonction impaire si on a : $\begin{cases} (\forall x \in D) ; -x \in D \\ (\forall x \in D) ; f(-x)=-f(x) \end{cases}$
- f n'est pas une fonction impaire si : $(\exists x \in D)$; $(-x \notin D$ ou $f(-x) \neq -f(x))$

Exercice 21

On a : $f(x)=x^2-x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

- On a : $f(-1)=3$ et $f(1)=1$ donc $f(1)\neq f(-1)$.

D'où : f n'est pas une fonction paire.

- On a : $f(-1)\neq -f(1)$, donc f n'est pas une fonction impaire.

D'où : f est une fonction ni paire ni impaire.

Exercice 22

Montrons que la proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 3\cos x\neq 2\sin^2 x$ est une proposition fausse.

Pour cela, on va montrer que sa négation $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})\ ;\ 3\cos x=2\sin^2 x$ est une proposition vraie.

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} 2\sin^2 x=3\cos x &\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)=3\cos x\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\\ &\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x+2)=0\\ &\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\ \text{ou}\ \cos x=-2 \end{aligned}$$

Puisque $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ -1\leq\cos x\leq 1$ alors $\cos x=-2$ est fausse.

Puisque $(\exists x\in\mathbb{R});\cos x=\frac{1}{2}$ est une proposition vraie car il suffit de prendre $x=\frac{\pi}{3}$ alors la proposition : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R});2\sin^2 x=3\cos x$ est une proposition, vraie donc la proposition P est fausse.

4 Raisonnements

Raisonnement par implication - Raisonnement déductif

- Pour montrer que $p\Rightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et on montre que q est vraie

- Le raisonnement déductif est basé sur la loi logique suivante: $(p\ et\ (p\Rightarrow q)\Rightarrow q)$,

C'est-à-dire, si on a: (p est vraie et $(p\Rightarrow q)$ est vraie-, alors on en déduit que q est vraie.

Exercices

Exercice 23

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x-1|<\frac{1}{2}\Longrightarrow 0<\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|<\frac{1}{2}$.

Exercice 24

Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ on a : $x^2+y^2=1\Longrightarrow|x+y|\leq\sqrt{2}$.

Exercice 25

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

1) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$.

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} \geq (2x+1)x^n$.

Exercice 26

Montrer que pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left(|x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y-2| < \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow 1 < \frac{2y}{y-x} < 5.$$

Exercice 27

1) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^{*+})$; $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

2) Soit x et p deux nombres réels strictement positifs.

Montrer que : $x^5 - x^3 + x = p \Longrightarrow x^6 \geq 2p - 1$.

Solutions

Exercice 23

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x-1| < \frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| < 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x-1| < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\
&\Longrightarrow 1 < 2x < 3 \\
&\Longrightarrow 2 < 2x+1 < 4 \text{ et } 0 < 2x-1 < 2 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2} \text{ et } 0 < 2x-1 < 2 \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{2x-1}{2x+1} < 1 \\
&\Longrightarrow \left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| < 1
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|x-1| < \frac{1}{2} \Longrightarrow \left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| < 1$

Exercice 24

Montrons que pour tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$, on a : $x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow |x+y| \leq \sqrt{2}$.

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $(x-y)^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow 1 - 2xy \geq 0 \text{ (car } x^2 + y^2 = 1) \\
&\Longrightarrow 2xy \leq 1 \\
&\Longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (x+y)^2 \leq 2 \text{ (car } x^2+y^2=1)$$
$$\Longrightarrow \sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{2}$$
$$\Longrightarrow |x+y| \leq \sqrt{2}$$

Donc : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $x^2+y^2=1 \Longrightarrow |x+y| \leq \sqrt{2}$

Exercice 25

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

1) Montrons que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$.

Soit $k \in \mathbb{N}$;

On a : $\left(\sqrt{x^k} - \frac{1}{\sqrt{x^k}}\right)^2 \geq 0 \Longrightarrow (\sqrt{x^k})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x^k}}\right)^2 - 2\sqrt{x^k}.\frac{1}{\sqrt{x^k}} \geq 0$

$$\Longrightarrow x^k + \frac{1}{x^k} - 2 \geq 0$$

Donc : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$.

2) • Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1+x+x^2+\cdots+x^{2n} \geq (2x+1)x^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; On a :

$1+x+x^2+\cdots+x^{2n} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n+x^{n+1}+\cdots+x^{2n}$

$$= x^n\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots+x^n\right)$$

On a : d'après la question 1) : $\begin{cases} x+\frac{1}{x} \geq 2 \\ x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2 \\ \vdots \\ x^n+\frac{1}{x^n} \geq 2 \end{cases}$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, ou obtient :

$x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+\cdots+x^n+\frac{1}{x^n} \geq 2n$.

Donc : $x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+\cdots+x^n+\frac{1}{x^n}+1 \geq 2n+1$.

D'où : $x^n\left(x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+\cdots+x^n+\frac{1}{x^n}+1\right) \geq (2n+1)x^n$.

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(1+x+x^2+\cdots+x^{2n}) \geq (2n+1)x^n$.

Exercice 26

Montrons que tout $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$\left(|x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y-2| < \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow 1 < \frac{2y}{y-x} < 5$.

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y-2| < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

et $-\frac{1}{2} < y-2 < \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} < -x < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{3}{2} < y < \frac{5}{2}$$
$$\Longrightarrow 1 < y-x < 3 \text{ et } 3 < 2y < 5$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{y-x} < 1 \text{ et } 3 < 2y < 5$$
$$\Longrightarrow 1 < \frac{2y}{y-x} < 5$$

Donc : Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\left(|x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y-2| < \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow 1 < \frac{2y}{y-x} < 5$.

Exercice 27

1) Montrons que : $(\forall a \in \mathbb{R}^{*+})$; $a + \frac{1}{a} \geq 2$ Voir exercice n°25

2) Soit x et p deux réels strictement positifs.

Montrons que : $x^5 - x^3 + x = p \Longrightarrow x^6 \geq 2p - 1$.

Supposons que : $x^5 - x^3 + x = p$, montrons que : $x^6 + 1 \geq 2p$.

On a : $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$

$$= \frac{x^2+1}{x} \times (x^5 - x^3 + x) = \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x}\right)(p) = \left(x + \frac{1}{x}\right)p$$

On a : $x > 0$ donc d'après la question 1), on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$

signifie que : $\left(x + \frac{1}{x}\right)p \geq 2p$ .Par suite : $x^6 + 1 \geq 2p$.

D'où : $(\forall x > 0)$; $(\forall p > 0)$; $x^5 - x^3 + x = p \Longrightarrow x^6 \geq 2p - 1$.

Raisonnements par équivalences successives

Si $(A \Leftrightarrow B_1)$ et $(B_1 \Leftrightarrow B_2)$ et $(B_2 \Leftrightarrow B_3)$ et ...$(B_n \Leftrightarrow B)$ alors $A \Leftrightarrow B$ (Les équivalences successives)

Si les équivalences suivantes $(A \Leftrightarrow B_1)$ et $(B_1 \Leftrightarrow B_2)$ et $(B_2 \Leftrightarrow B_3)$ et ...$(B_n \Leftrightarrow B)$ sont tous vraies et la proposition A est vraie, alors la proposition B est vraie.

Exercices

Exercice 28

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0$

Exercice 29

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+}); \sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$

Exercice 30

Soit $k \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$

Exercice 31

Montrer que pour tous x et y de l'intervalle $]1; +\infty[$:

$$x + y + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$$

Exercice 32

1) Montrer que : $(\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^{+})^{2}): \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

2) En déduire que : $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15}) \geqslant 8\sqrt{15}$

Exercice 33

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^{2}$

Montrer que : $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2$ et $y = 8$

Exercice 34

Soit $a \in \mathbb{R}$:

Montrer que : $|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$

Exercice 35

Soit $a \in \mathbb{R}$

Montrer que : $|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$

Solutions

Exercice 28

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \geqslant 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^{2}} \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^{2} \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow x^{2} \geqslant 0$$

Puisque la proposition $x^{2} \geqslant 0$ est vraie alors la proposition $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \geqslant 0$ est vraie.

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \geqslant 0$

Exercice 29

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$; on a : $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+1}{5} \geqslant x$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+1 \geqslant 5x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$$

Puisque la proposition $(x-1)^2 \geqslant 0$ est vraie alors la proposition $\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$ est vraie. Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sqrt{\frac{x^2+3x+1}{5}} \geqslant \sqrt{x}$

Exercice 30

Soit $k \in \mathbb{Z}$, montrons que : $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow k \in \{-1;0;1\}$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{2\pi}{3} + k\pi \leqslant \frac{5\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} + k \leq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow k \in \{-1;0;1\} \; (car\; k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $\frac{2\pi}{3} + k\pi \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right] \Leftrightarrow k \in \{-1;0;1\}$

Exercice 31

Montrons que : $(\forall x \in]1;+\infty[)\ (\forall y \in]1;+\infty[) ; x+y+2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$x+y+2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{(x-1)(y-1)} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+y-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})^2 > 0$$

Puisque : $(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})^2 \geqslant 0$ est vraie et $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \neq 0$ est vraie car $x > 1$ et $y > 1$ donc la proposition $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} > 0$ est vraie.

D'où : $(\forall x \in]1;+\infty[\,)(\forall y \in]1;+\infty[) ; x+y+2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$

Exercice 32

1) Montrons que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2}) ; \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

Soit x et y deux réels positifs, on a : $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$$

Puisque la proposition $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ est vraie alors la proposition $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ est vraie donc : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2})$: $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

2) Déduction :

En appliquant la question 1) pour : 1 et $\sqrt{3}$; 1 et $\sqrt{5}$ et 1 et $\sqrt{15}$, on obtient : $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{3}}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{5}}$ et $\frac{1+\sqrt{15}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{15}}$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{15}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{15}}$$

Donc : $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{15}) \geqslant 8\sqrt{15}$

Exercice 33

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geqslant 1$ et $y \geqslant 4$

Montrons que : $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x=2$ et $y=8$

On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x+y$$
$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0$$
$$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1+y-4-4\sqrt{y-4}+4=0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ \sqrt{y-4}-2=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$$

Exercice 34

Soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que : $|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$

Soit $a \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a-2 \leq \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow 4 \leq 3a \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 3a+2 \leq 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}$$

Donc : $(\forall a \in \mathbb{R}); \left(|a-2| \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{3a+2} \leq \frac{1}{6}\right)$

Raisonnement par contraposée

L'implication $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est appelée la contraposée de l'implication $p \Rightarrow q$, et on a: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie il suffit de monter que $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est vraie

Exercices

Exercice 35

Écrire la contraposée de chacune des implications suivantes et les démontrer

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1. n est un nombre premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 36

Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})$: $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

Exercice 37

Soit a et b deux nombres réels non nuls tels que : $b \neq 2a$.

Montrer que : $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$

Exercice 38

Soit x, y et z des nombres réels.

Montrer que : $(x+y \leqslant z) \Rightarrow \left(x \leqslant \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leqslant \frac{1}{2}z\right)$

Exercice 39

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+}); (x \neq 1 \Longrightarrow \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} \neq 1)$

Exercice 40

On pose: $I =]-\infty; -2[$

1) Montrer que: $(\forall a \in I)(\forall b \in I)$; $ab + a + b > 0$

2) En utilisant le raisonnement par contraposée montrer que:

$$(\forall a \in I)(\forall b \in I) ; \left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2}\right)\right]$$

Solutions

Exercice 35

Rappel : Le raisonnement par contraposée se base sur l'équivalence suivante :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$

1) • La contraposée de l'implication : n est un nombre premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair, est l'implication : $n \neq 2$ et n pair $\Rightarrow$ n n'est pas un nombre premier.

• Démontrons la dernière implication

On a : $n \neq 2$ et n est pair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k$ et $k \neq 1$ et $k \neq n$

$\Rightarrow k$ divise n et $k \neq 1$ et $k \neq n$

$\Rightarrow n$ n'est pas premier.

Donc : n est un nombre premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.

2) • La contraposée de l'implication $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0$ et $y \neq 0)$ est l'implication : $(x = 0$ ou $y = 0) \Rightarrow xy = 0$

• Démontrons la dernière implication :

On a : si $x = 0$ alors $xy = 0$ et si $y = 0$ alors $xy = 0$

donc : $(x = 0$ ou $y = 0) \Rightarrow xy = 0$ D'où : $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$

3) • La contraposée de l'implication : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$ est l'implication : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$

• Démontrons la dernière implication :

On a : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

$\Rightarrow 2x = 2y$

$\Rightarrow x = y$

Donc : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 36

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

En utilisant le raisonnement par contraposée, c'est-à-dire :

montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, on a : $\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow 3x = x + 1$

$\Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1$

Exercice 37

soit a et b deux nombres réels non nuls tels que : $b \neq 2a$

Montrons que : $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$ en utilisant le raisonnement par contraposée, c'est-à-dire : montrons que : $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{8}a$

On a : $\frac{a+2b}{2a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(a+2b) = 2(2a-b)$

$$\Rightarrow 3a + 6b = 4a - 2b$$
$$\Rightarrow a = 8b$$
$$\Rightarrow b = \frac{1}{8}a$$

Donc : $b \neq \frac{1}{8}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{2}{3}$

Exercice 38

Soit x, y et z des nombres réels

Montrons que : $(x+y \leqslant z) \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leqslant \frac{1}{2}z\right)$ en utilisant le raisonnement par contraposée, c'est-à-dire : montrons que :

$\left(x > \frac{1}{2}z \text{ et } y > \frac{1}{2}z\right) \Rightarrow (x+y > z)$

On a : $\begin{cases} x > \frac{1}{2}z \\ y > \frac{1}{2}z \end{cases} \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z$

$$\Rightarrow x + y > z$$

Donc : $(x+y \leqslant z) \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z \text{ ou } y \leqslant \frac{1}{2}z\right)$

Exercice 39

Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);(x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{2x+2} - \sqrt{x} \neq 1)$

en utilisant le raisonnement par la contraposée, c'est-à-dire : montrons que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+);(\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x+2} = \sqrt{x} + 1$

$$\Rightarrow 2x + 2 = (\sqrt{x}+1)^2$$
$$\Rightarrow 2x + 2 = x + 2\sqrt{x} + 1$$
$$\Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$$
$$\Rightarrow x = 1$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);(x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{2x+2}-\sqrt{x} \neq 1)$

Exercice 40

1) Montrons que: $(\forall a \in I)(\forall b \in I)\ ;\ ab+a+b>0$

Soit a et b deux éléments de I : On a: $\begin{cases} a \in I \\ b \in I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+1<-1 \\ b+1<-1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -(a+1)>1 \\ -(b+1)>1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (a+1)(b+1)>1$$
$$\Longrightarrow ab+a+b+1>1$$
$$\Longrightarrow ab+a+b>0$$

2) Montrons que: $\forall (a;b) \in I^2\ ,\ \left[(a \neq b) \Longrightarrow \left(\frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2}\right)\right]$

Utilisations le raisonnement par contraposée

Soit $(a;b) \in I^2$, on a:

$$\frac{a+1}{a^2+2a+2}=\frac{b+1}{b^2+2b+2} \Longrightarrow a^2b+a^2+2ab+2a+2b+2=$$
$$ab^2+2ab+2a+b^2+2b+2$$
$$\Longrightarrow ab^2-a^2b+b^2-a^2=0$$
$$\Longrightarrow ab(b-a)+(b-a)(b+a)=0$$
$$\Longrightarrow (b-a)(ab+a+b)=0$$
$$\Longrightarrow b-a=0 (car\ ab+a+b>0)$$
$$\Longrightarrow a=b$$

Donc, d'après le raisonnement par contraposée , on a:

$(\forall (a;b) \in I^2)\ ;\ \left((a \neq b) \Longrightarrow \frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2}\right)$

Raisonnement par disjonction des cas

Lorsque on veut monter une implication de la forme $(p\ ou\ q) \Rightarrow r$; on utilise alors la loi logique suivante: $[(p\ ou\ q) \Rightarrow] \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) et (q \Rightarrow r))$

C'est-à-dire on distingue deux cas:

1er cas: supposer que p est vraie, et montrer que r est vraie

2ème cas: Supposer que q est vraie, et montrer que r est vraie

Généralement on a la loi logique suivante:

$[(A_1\ ou\ A_2\ ou\ A_3\ ou \ldots ou\ A_n) \Rightarrow B] \Leftrightarrow ((A_1 \Rightarrow B))$ et $(A_2 \Rightarrow B)$ et...et $(A_n \Rightarrow B))$

Exercices

Exercice 41

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $4|n^2$ ou $4|n^2-1$

Exercice 42

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $2x^2-|x-3|-4=0$

Exercice 43

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2|x+1|-y=4 \\ |x+2|+2y=6 \end{cases}$

Exercice 44

1) Etudier le signe de la fonction u définie sur $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$ par :

$$u(x)=2x+1+2\sqrt{x^2+x}$$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+2x+2}>x+1$

Solutions

Exercice 41

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4|n^2$ ou $4|n^2-1$

en utilisant un raisonement par disjonction des cas .

Soit $n \in \mathbb{N}$

-1[er] cas : supposons que n est pair

On a : n est pair donc : $(\exists k \in \mathbb{N})/n=2k$

C'est-à-dire : $n^2=4k^2$ d'où n^2 est un multiple de 4 (car $k^2 \in \mathbb{N}$ et par suite : $4|n^2$

- 2[ème] cas : supposons que n est impair

On a : n est impair donc : $(\exists k \in \mathbb{N})/n=2k+1$

C'est-à-dire : $n^2-1=4k^2+4k=4(k^2+k)$

d'où n^2-1 est un multiple de 4 (car $k^2+k \in \mathbb{N}$) et par suite : $4|n^2-1$.

Conclusion : $4|n^2$ ou $4|n^2-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 42

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $2x^2-|x-3|-4=0$

Pour résoudre l'équation (1), il faut l'écrire sans le symbole de la valeur absolue, pour cela, on va distinguer deux cas.

- 1[er] cas : $x \geqslant 3$

Dans ce cas on a : $|x-3|=x-3$ et l'équation devient : $2x^2-x-1=0$

Son discriminant est : $\Delta=9$ et ses solutions sont : $x_1=1$ et $x_2=-\frac{1}{2}$

Puisque $x_1<3$ et $x_2<3$ alors l'équation n'a pas de solutions dans ce cas et donc l'ensemble des solutions de l'équation dans ce cas est : $S_1=\phi$.

- $2^{ème}$ cas : $x\leqslant 3$.

Dans ce cas on a : $|x-3|=-(x-3)$ et l'équation devient : $2x^2+x-7=0$

Son discriminant est $\Delta=57$ et ses solutions sont :

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{57}}{4}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{57}}{4}$.

On a : $x_1\simeq 1,63$ et $x_2\simeq -2,13$ (utiliser la calculatrice-

donc : $x_1\leq 3$ et $x_2\leq 3$ d'où l'ensemble des solutions de l'équation dans ce cas est : $S_2=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{57}}{4},\dfrac{-1-\sqrt{57}}{4}\right\}$

Conclusion: L'ensemble des solutions de l'équation (1) est : $S=S_1\cup S_2=S_2$.

Exercice 43

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}2|x+1|-y=4\\|x+2|+2y=6\end{cases}$

L'existence des deux expressions $|x+1|$ et $|x+2|$ nous ramène à distinguer trois cas pour résoudre ce système à savoir : $x\leq -2$; $-2\leq x\leq -1$ et $x\geqslant -1$.

On utilisera la méthode de CRAMER dans les trois cas

- 1^{er} cas : $x\leq -2$

Dans ce cas, on a : $x+2\leq 0$ et $x+1\leq 0$ et le système devient :

$$\begin{cases}-2(x+1)-y=4\\-(x+2)+2y=6\end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases}2x+y=-6\\x-2y=-8\end{cases}$$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=-5$; $\Delta_x=\begin{vmatrix}-6&1\\-8&-2\end{vmatrix}=20$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}2&-6\\1&-8\end{vmatrix}=-10$

Donc : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=-4$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=2$

Puisque : $x=-4$ et $-4\leq -2$ alors : $S_1=\{(-4;2)\}$

- $2^{ème}$ cas : $-2\leq x\leq -1$

Dans ce cas on a : $x+2\geqslant 0$ et $x+1\leq 0$ et le système devient:

$$\begin{cases}2x+y=-6\\x+2y=4\end{cases}$$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$; $\Delta_x=\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-16$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & 4\end{vmatrix}=14$

Donc : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-\frac{16}{3}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{14}{3}$

On a : $x\simeq-5,33$ c'est-à-dire : $x\notin[-2;-1]$

donc le système n'a pas de solutions dans ce cas d'où : $S_2=\phi$.

- 3ème cas : $x\geqslant-1$

Dans ce cas, on a : $x+2\geqslant0$ et $x+1\geqslant0$ et le système devient : $\begin{cases}2x-y=2\\ x+2y=4\end{cases}$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5$; $\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=8$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=6$

Donc : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{5}$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{6}{5}$

Puisque : $\frac{8}{5}\geqslant-1$ alors $x\in[-1;+\infty[$, donc : $S_3=\left\{\left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)\right\}$

D'où : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{(-4;2),\left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)\right\}$

Exercice 44

1) Etudions le signe de la fonction u définie sur $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$ par : $u(x)=2x+1+2\sqrt{x^2+x}$

Méthode:

- Pour étudier le signe $\sqrt{B}+A$, on utilise le raisonnement par disjonction des cas :

• Si $A\geqslant0$ alors $\sqrt{B}+A\geqslant0$.

• Si $A<0$ alors $\sqrt{B}+A=\frac{B-A^2}{\sqrt{B}-A}$ et dans ce cas le signe de $\sqrt{B}+A$ est celui de $B-A^2$.

- De même, pour étudier le signe de $\sqrt{B}-A$

• Si $A\leq0$ alors $\sqrt{B}-A\geqslant0$.

• Si $A>0$ alors : $\sqrt{B}-A=\frac{B-A^2}{\sqrt{B}+A}$ et dans ce cas le signe de $\sqrt{B}-A$ est celui de $B-A^2$.

Soit $x\in]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$, on a : $2x+1\geqslant0\Leftrightarrow x\geqslant-\frac{1}{2}$

- 1er cas : $x\in[0;+\infty[$ donc $2x+1>0$ et par suite : $2x+1+2\sqrt{x^2+x}>0$ d'où : $(\forall x\in[0;+\infty[)$: $u(x)>0$

- 2ème cas : $x\in]-\infty;-1]$, on a : $2x+1<0$ donc on utilise le conjugué.

On a :

$$u(x)=2\sqrt{x^2+x}+(2x+1)=\frac{4(x^2+x)-(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x}-(2x+1)}=\frac{-1}{2\sqrt{x^2+x}-(2x+1)}$$

Puisque $2x+1<0$ alors $-(2x+1)>0$ c'est-à-dire :

$2\sqrt{x^2+x}-(2x+1)>0$. Donc : $u(x)<0$ d'où : $(\forall x\in]-\infty;-1]);u(x)<0$

Conclusion : $(\forall x\in]-\infty;-1]);u(x)<0$ et $\forall x\in[0;+\infty[;u(x)>0$.

2) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{x^2+2x+2}>x+1$

Méthode 1 : On utilise le raisonnement par disjonction des cas :

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{x^2+2x+2}>x+1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0$

- 1er cas : $x+1\leq0$ c'est-à-dire : $-(x+1)\geqslant0$

donc : $\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0$

D'où : $(\forall x\in]-\infty;-1]);\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0$ **(1)**

car $\sqrt{x^2+2x+2}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

- 2ème cas : $x+1\geqslant0$ c'est-à-dire : $-(x+1)\leq0$

On utilise le conjugué : on a :

$$\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)=\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)}$$

Puisque $x+1\geqslant0$ et $\sqrt{x^2+2x+2}>0$ alors $\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)>0$

donc : $\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0$, d'où :

$(\forall x\in[-1;+\infty[);\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0$ (2)

Par suite, de (1) et (2), on déduit que : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{x^2+2x+2}>x+1$

Méthode 2 : On a : $(\forall x\in\mathbb{R});|x+1|\geqslant x+1$ (1)

et on a : $(\forall x\in\mathbb{R});x^2+2x+2>x^2+2x+1$

c'est-à-dire : $(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2+2x+2>(x+1)^2$

donc : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{x^2+2x+2}>|x+1|$ (2)

de (1) et (2), on déduit que : $(\forall x\in\mathbb{R});\sqrt{x^2+2x+2}>x+1$

(car $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$).

Raisonnement par l'absurde

Pour monter qu'une proposition p est vraie, on suppose que $\overline{p}$ est vraie, et par implications successives on aboutit à une contradiction. Donc $\overline{p}$ est fausse, et par conséquent p est vraie.

Exercices

Exercice 45

Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})$, 6 ne divise pas $2n+11$

Exercice 46

En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que le système suivant :

$$(S):\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x\geqslant 3 \\ y-z\leq 2 \end{cases}$$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 47

1) Montrer par l'absurde que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

2) Soit a et b deux nombres rationnels tels que $a\neq b$

Montrer que : $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 48

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ \dfrac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ \sqrt{n^2+5n+8}\notin\mathbb{N}$

Exercice 49

Soit $a\in\mathbb{R}$, montrer par l'absurde que : $((\forall\varepsilon>0);|a|<\varepsilon)\Rightarrow a=0$.

Solutions

Exercice 45

Montrons par l'absurde que 6 ne divise pas $2n+11$ quel que soit l'entier naturel n.

On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $6|2n_0+11$

Puisque $2|6$ et $6|2n_0+11$ alors $2|2n_0+11$ ce qui est impossible car $2n_0+11$ est un nombre impair.

En effet : $2n_0+11=2(n_0+5)+1=2p+1$ avec $p=n_0+5$ et $p\in\mathbb{N}$.

Donc la supposition est fausse, d'où 6 ne divise pas $2n+11$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 46

Montrons par l'absurde, que le système (S) n'a pa de solutions dans $\mathbb{R}^3$.

On suppose qu'il existe $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant le système, c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x_0-3z_0>3 \\ 3y_0-2x_0\geqslant 3 \\ y_0-z_0\leq 2 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} 2x_0-3z_0>3 \\ 3y_0-2x_0\geqslant 3 \end{cases}$ donc en ajoutant membre à membre ces deux inégalités et après simplification, on obtient : $y_0-z_0>3$ et cela est contradictoire

(Si $(a>b \text{ et } c\geq d)$ alors $a+c>d$)

avec la troisième inéquation du système : $y_0 - z_0 \leq 2$.
Donc la supposition est fausse d'où le système n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 47

1) Montrons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$:

Supposons que : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

On a : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{N})(\exists q \in \mathbb{N}^*) / \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

avec $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur de p et q est égal à 1.

On a : $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p = \sqrt{2}q$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \quad (1)$$

donc p^2 est un nombre pair et par suite p est un nombre pair (car p ne peut pas être un nombre impair).

On a : p est pair donc p s'écrit sous la forme : $2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

On a : d'après (1) : $p^2 = 2q^2$ signifie que : $4k^2 = 2q^2$

c'est-à-dire : $q^2 = 2k^2$

donc q^2 est un nombre pair et par suite q est un nombre pair.

Finalement, on a p et q sont deux nombres pairs, ce qui est contradictoire avec le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, donc la supposition est fausse d'où : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) On a : $a \in \mathbb{Q}$; $b \in \mathbb{Q}$ et $a \neq b$.

Montrons par l'absurde que : $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \notin \mathbb{Q}$:

Supposons que : $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \in \mathbb{Q}$ .On pose $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$

On a : $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = r \Leftrightarrow a + b\sqrt{2} = r(\sqrt{2}+1)$

$$\Leftrightarrow b\sqrt{2} - r\sqrt{2} = r - a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(b-r) = r - a$$

Montrons par l'absurde que $b - r \neq 0$ c'est-à-dire $b \neq r$

Supposons que : $b = r$, on a : $b = r \Leftrightarrow \frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = b$

$$\Leftrightarrow a + b\sqrt{2} = b\sqrt{2} + b$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

ce qui est contradictoire avec le fait que : $a \neq b$

donc la supposition est fausse d'où : $b \neq r$

Par suite on a : $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=r \Leftrightarrow \sqrt{2}(b-r)=r-a$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{2}=\dfrac{r-a}{b-r}$ (car $b\neq r$)

Puisque r, a et b sont des nombres rationnels alors $\dfrac{r-a}{b-r}\in\mathbb{Q}$ donc $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ d'après la question 1).

Donc $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\in\mathbb{Q}$ est une proposition fausse d'où : $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 48

1) Montrons par l'absurde que : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; \dfrac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que : $\dfrac{n_0+1}{n_0+2}\in\mathbb{N}$

On a : $\dfrac{n_0+1}{n_0+2}\in\mathbb{N}\Rightarrow n_0+2\mid n_0+1$ .Puisque $n_0+2>n_0+1$ alors $n_0+1=0$

C'est-à-dire $n_0=-1$ ce qui est contradictoire avec le fait que $n_0\in\mathbb{N}$, donc la supposition est fausse d'où : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; \dfrac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

2) Montrons par l'absurde que $(\forall n\in\mathbb{N}) ; \sqrt{n^2+5n+8}\notin\mathbb{N}$:

Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que : $\sqrt{n_0^2+5n_0+8}\in\mathbb{N}$

On a : $(n_0^2+5n_0+8)-(n_0+2)^2=n_0+4$

Puisque $n_0+4>0$ alors $(n_0+2)^2<n_0^2+5n_0+8$

Donc : $n_0+2<\sqrt{n_0^2+5n_0+8}$ (1)

D'autre part, on a : $(n_0+3)^2-(n_0^2+5n_0+8)=n_0+1$

Puisque $n_0+1>0$ alors $n_0^2+5n_0+8<(n_0+3)^2$

donc $\sqrt{n_0^2+5n_0+8}<n_0+3$ (2)

De (1) et (2), on déduit que : $n_0+2<\sqrt{n_0^2+5n_0+8}<n_0+3$

La dernière proposition est fausse car il n'existe aucun entier naturel compris strictement entre deux entiers naturels consécutifs. Donc la supposition $\sqrt{n_0^2+5n_0+8}\in\mathbb{N}$ est fausse. D'où : $(\forall n\in\mathbb{N}), \sqrt{n^2+5n+8}\notin\mathbb{N}$

Exercice 49

Soit $a\in\mathbb{R}$, montrons par l'absurde que : $((\forall\varepsilon>0) ; |a|<\varepsilon)\Rightarrow a=0$:

On a : $((\forall\varepsilon>0) ; |a|<\varepsilon)$ et montrons que $a=0$

Supposons que $a\neq 0$, on prend : $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$

On a : $\varepsilon>0$, donc par hypothèse, on a : $|a|<\varepsilon$

c'est-à-dire $|a|<\dfrac{|a|}{2}$ signifie que : $1<\dfrac{1}{2}$ (car $|a|>0$) ce qui est impossible, donc la supposition $a \neq 0$ est fausse et par suite on a :

$$((\forall \varepsilon > 0) ; |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$$

Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une proposition $p(n)$ qui dépend de n est vraie pour tout entier naturel n où $n \geq n_0$, on suit les étapes suivantes:

1) Initialisation: Vérifier que $p(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (pour le premier élément)

2) Hérédité: Supposer que $p(n)$ est vraie pour n et montrer que $p(n)$ est vraie pour $n+1$

C'est-à-dire montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, on a: $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

3) Conclusion: d'après le principe de récurrence on: $(\forall_n \geq n_0)$; $p(n)$ est vraie.

Exercices

Exercice 50

Montrer par récurrence que

1) $n^3 - n$ est un multiple de 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $3^{2n} - 1$ est un multiple de 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) 9 divise $4^n + 6n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) 11 divise $3^{2n} + 2^{6n-5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 51

Montrer que $4^{2n+2} - 1$ est divisible par 15 pour tout entier naturel n.

Exercice 52

1) Montrer par récurrence que le nombre $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que le nombre $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 53

Montrer par récurrence que le nombre $3^{2n+1} + 4^{n+1} - 2(-1)^n$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 54

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux propriétés suivantes :

P_n : 3 divise $4^n - 1$ et Q_n : 3 divise $4^n + 1$.

1- Montrer que pour $n \in \mathbb{N} : P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.

2 - Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3- A-t-on Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 55

Montrer par récurrence que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$.

4) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 56

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Exercice 57

Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 58

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 4n^2 \geqslant (n+1)^2$.

2) a- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 4^n \geqslant n^2$.

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4^n \geqslant n^2$.

Exercice 59

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2; 3\} ; n^2 \leq 2^n$

Exercice 60

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 3^n > 2n$.

Exercice 61

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n \geqslant n2^{n-1}$

3) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (1+n)^n \geqslant 2n^n$

Solutions

Exercice 50

Montrons par récurrence que $n^3 - n$ est un multiple de 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, on a : $n^3 - n = 0$ et 0 est un multiple de 6.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n^3 - n$ est un multiple de 6 c'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}) / n^3 - n = 6k$ et montrons que $(n+1)^3 - (n+1)$ est un multiple de 6.

On a : $(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1$

$$=n^3+3n^2+2n$$

$$=n^3-n+3n^2+3n$$

$$=6k+3n(n+1)$$ (d'aprèsl'hypothèse de récurrence)

Puisque $n(n+1)$ est un nombre pair alors : $(\exists p\in\mathbb{N})\,/\,n(n+1)=2p$

Donc : $(n+1)^3-(n+1)=6k+6p=6(k+p)$

Puisque $k+p\in\mathbb{N}$ alors $(n+1)^3-(n+1)$ est un multiple de 6

d'où la propriété est vraie pour $n+1$.

•conclusion : - La propriété est vraie pour $n=0$

- La proposition $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$

Donc d'après le principe de récurrence, n^3-n est un multiple de 6 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrons par récurrence que $3^{2n}-1$ est un multiple de 4 pour tout $n\in\mathbb{N}$:

• Initialisation : Pour $n=0$, on a $3^{2\times0}-1=0$ et 0 est un multiple de 4.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $3^{2n}-1$ est un multiple de 4 c'est-à-dire : $(\exists k\in\mathbb{N})\,/\,3^{2n}-1=4k$ et montrons que $3^{2(n+1)}-1$ est un multiple de 4.

On a : $3^{2(n+1)}-1=3^{2n}\times9-1$

$$=(1+4k)\times9-1 \quad (\text{car } 3^{2n}-1=4k)$$

$$=36k+8$$

$$=4(9k+2)$$

Puisque $9k+2\in\mathbb{N}$ alors $3^{2(n+1)}-1$ est un multiple de 4.

D'où la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion : - La propriété est vraie pour $n=0$.

- La proposition : $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Donc d'après le principe de récurrence, $3^{2n}-1$ est un multiple de 4 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Montrons par récurrence que 9 divise 4^n+6n-1 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n=0$ on a : $4^0+6\times0-1=0$ et 0 est un multiple de 9.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que 4^n+6n-1 est un multiple de 9, c'est-à-dire : $(\exists k\in\mathbb{N})\,/\,4^n+6n-1=9k$ et montrons que $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est un multiple de 9.

On a : $4^{n+1}+6(n+1)-1=4\times4^{n}+6n+5=4(9k-6n+1)+6n+5$

$$=36k-24n+4+6n+5$$

$$=9(4k-2n+1)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence-

Puisque $4k-2n+1\in\mathbb{N}$; car $k\in\mathbb{N}$; $n\in\mathbb{N}$ et $4k-3n+1\geq0$

$(4^{n+1}+6n+5\in\mathbb{N}$ et $4^{n+1}+6n+5=9(4k-3n+1))$

alors $4^{n+1}+6(n+1)-1$ est un multiple de 9, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusions : - La propriété est vraie pour $n=0$.

- La proposition : $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Donc, d'après le principe de récurrence, $4^{n}+6n-1$ est un multiple de 9 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4) Montrons par récurrence que 11 divise $3^{2n}+2^{6n-5}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

• Initialisation : Pour $n=1$ on a $3^{2\times1}+2^{6\times1-5}=9+2=11$ et 11 est un multiple de 11.

• Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $3^{2n}+2^{6n-5}$ est un multiple de 11 c'est-à-dire $(\exists k\in\mathbb{N})\,/\,3^{2n}+2^{6n-5}=11k$ et montrons que $3^{2(n+1)}+2^{6(n+1)-5}$ est un multiple de 11.

On a : $3^{2(n+1)}+2^{6(n+1)-5}=3^{2n}\times9+2^{6n-5}\times64$

$$=9\times(11k-2^{6n-5})+2^{6n-5}\times64$$

$$=99k-9\times2^{6n-5}+64\times2^{6n-5}$$

$$=99k+2^{6n-5}(64-9)$$

$$=(99k+55\times2^{6n-5})=11(9k+5\times2^{6n-5})$$

Puisque $9k+5\times2^{6n-5}\in\mathbb{N}$ alors $3^{2(n+1)}+2^{6(n+1)-5}$ est un multiple de 11, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion : - La propriété est vraie pour $n=1$.

- La proposition : $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Donc, d'après le principe de récurrence, $3^{2n}+2^{6n-5}$ est un multiple de 11 pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 51

Montrons par récurrence que $4^{2n+2}-1$ est divisible par 15 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• Initialisation : Pour $n=0$, on a $4^{2\times0+2}-1=16-1=15$ et 15 est un multiple de 15.

•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $4^{2n+2} - 1$ est un multiple de 15 c'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}) / 4^{2n+2} - 1 = 15k$ et montrons que : $4^{2(n+1)+2} - 1$ est un multiple de 15.

On a : $4^{2(n+1)+2} - 1 = 4^{2n+2} \times 4^2 - 1$

$= 16(15k+1) - 1$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$= 16 \times 15 \times k + 15$

$= 15(16k+1)$

Puisque $16k + 1 \in \mathbb{N}$ alors $4^{2(n+1)+2} - 1$ est un multiple de 15, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion : - La propriété est vraie pour $n = 0$.

- La proposition : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, d'après le principe de récurrence : $4^{2n+2} - 1$ est divisible par 15 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 52

1) Montrons par récurrence que le nombre $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $2^{3\times 0} - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 7.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, c'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}) / 3^{2n} - 1 = 7k$ et montrons que $2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7.

On a : $2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n} \times 2^3 - 1$

$= 8(7k+1) - 1$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$= 8 \times 7 \times k + 7$

$= 7(8k+1)$

Puisque $8k + 1 \in \mathbb{N}$ alors $2^{3(n+1)} - 1$ est un multiple de 7 donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusions : - La propriété est vraie pour $n = 0$

- La proposition $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, d'après le principe de récurrence, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Déduction

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $2^{3n+2} - 4 = 2^{3n} \times 2^2 - 4 = 4(2^{3n} - 1)$

D'après la question 1, on a $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 quelque soit l'entrier naturel n, donc $4 \times (2^{3n} - 1)$ est aussi un multiple de 7. D'où $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7 quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 53

Montrons par récurrence que le nombre $3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : Pour $n=0$, on a : $3^{2\times 0+1}+4^{0+1}-2(-1)^0=3+4-2=5$ et 5 est un multiple de 5.

•Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n$ est un multiple de 5, c'est-à-dire : $(\exists k \in \mathbb{N}) / 3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n=5k$ et montrons que $3^{2(n+1)+1}+4^{(n+1)+1}-2(-1)^{n+1}$ est un multiple de 5.

On a : $3^{2(n+1)+1}+4^{(n+1)+1}-2(-1)^{n+1}=3^{2n+1}\times 3^2+4^{n+1}\times 4+2(-1)^n$

$$
\begin{aligned}
&=9(5k-4^{n+1}+2(-1)^n)+4\times 4^{n+1}+2(-1)^n\\
&=45k-9\times 4^{n+1}+18(-1)^n+4\times 4^{n+1}+2(-1)^n\\
&=45k-5\times 4^{n+1}+20(-1)^n\\
&=5(9k-4^{n+1}+4\times(-1)^n)
\end{aligned}
$$

(d'après l'hypothèse de récurrence-

Posons $k'=9k-4^{n+1}+4\times(-1)^n$.

et on a: $k'=(5k-4^{n+1})+4(k+(-1)^n)$

comme $5k-4^{n+1}\geq 0$ et $4(k+(-1)^n)\geq 0$ alors $k' \in \mathbb{N}$

Puisque : $9k-4^{n+1}+4\times(-1)^n \in \mathbb{N}$ alors $3^{2(n+1)+1}+4^{(n+1)+1}-2(-1)^{n+1}$ est un multiple de 5, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

•Conclusion :- La propriété est vraie pour $n=0$

- La proposition $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre $3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 54

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n est vraie c'est-à-dire :

$(\exists k \in \mathbb{N}) / 4^n-1=3k$ et montrons que P_{n+1} est vraie

On a : $4^{n+1}-1=4\times 4^n-1=4\times(3k+1)-1=12k+3=3(4k+1)$

Puisque $4k+1 \in \mathbb{N}$ alors 3 divise $4^{n+1}-1$, donc la propriété P_{n+1} est vraie, d'où l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que Q_n est vraie c'est-à-dire: $(\exists k \in \mathbb{N}^*)/4^n+1=3k$ et montrons que Q_{n+1} est vraie.

On a: $4^{n+1}+1=4^{n+1}+4-3=4\times(4^n+1)-3$

$$=3(4k-1)$$

Puisque $4k-1 \in \mathbb{N}$ alors 3 divise $4^{n+1}+1$, donc la propriété Q_{n+1} est vraie ; d'où l'implication $Q_n \Longrightarrow Q_{n+1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation: Pour $n=0$, on a: $4^0-1=0$ et 3 divise 0.
- Hérédité: On a: d'après 1) l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) A-t-on Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Pour $n=0$, on a: $4^0+1=2$ et 3 ne divise pas 2, donc la propriété n'est pas vérifiée pour $n=0$ et par suite Q_n n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 55

1) Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Initialisation: Pour $n=1$, on a: $1^2=1$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times 1+1)}{6}=1$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que:

$1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que:

$$1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a: $1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2=\underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

D'autre part, on a: $(n+2)(2n+3)=2n^2+3n+4n+6=2n^2+7n+6$

Donc: $1^2+2^2+\ldots\ldots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

D'où la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion : - La propriété est vraie pour $n=1$

  - L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, d'après le principe de récurrence, on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

- Initialisation: Pour $n = 1$, on a: $1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

et montrons que:

$1^3 + 2^3 + ... + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

On a: $1^3 + 2^3 + ... + (n+1)^3 = \underline{1^3 + 2^3 + ... + n^3} + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence-}$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion: - La propriété est vraie pour $n = 1$

  - L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc, d'après le principe de récurrence , on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3) Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

- Initialisation: Pour $n = 1$, on a: $2 \times 1 + 1 = 3$ et $1 + 3 = (1+1)^2 = 4$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que: $1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

et montrons que: $1 + 3 + 5 + ... + (2(n+1)+1) = (n+2)^2$

On a: $1 + 3 + 5 + ... + (2(n+1)+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+3)$

$$= \underline{1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)} + (2n+3)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence) $= (n+1)^2 + 2n + 3$

$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$$

$$= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Donc la propiríté est vraie pour $n+1$

- Conclusion: - La propriété est vraie pour $n = 1$

  - L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc; d'après le principe de récurrence , on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

4) Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

• Initialisation: Pour $n = 1$, on a: $1\times(1+1) = 2$ et $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que:

$1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ et montrons que:

$1\times 2 + 2\times 3 + ... + (n+1)(n+2) = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

On a:

$1\times 2\times 2\times 3 + ... + (n+1)(n+2) = \underbrace{1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1)} + (n+1)(n+2)$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

$= (n+1)(n+2)\left(\dfrac{n}{3} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Donc la propiréte est vraie pour $n+1$.

• Conclusion : - La propriété est vraie pour $n = 1$

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, d'après le principe de récurrence , on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1\times 2 + 2 + 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 56

Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) ; 1\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

• Initialisation: Pour $n = 2$ on a: $\dfrac{1}{2-1}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, supposons que:

$1\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$ et montrons que:

$1\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

On a:

$1\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n+1} = \underbrace{1\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{n}} + \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n+1}$

$= 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n+1}$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

$= 1 - \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n}\times\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: - La propriété est vraie pour $n = 2$

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout n tel que $n \geq 2$

Donc, d'après le principe de récurrence , on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Exercice 57

Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

- Initialisation: Pour $n = 1$, on a: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$

  et $\frac{1 \times (1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

et montrons que:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

On a:

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$$= \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}(n(n+3)^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)}(n^3 + 6n^2 + 9n + 4)$$

On a: $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 4n + 4$

$$= n^2(n+1) + 5n(n+1) + 4(n+1)$$

$$= (n+1)(n^2 + 5n + 4)$$

$$= (n+1)(n+1)(n+4) = (n+1)^2(n+4)$$

Donc: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$

D'où la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion: - La propriété est vraie pour $n = 1$

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, d'après le principe de la récurrence , on a:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 58

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 4n^2 \geq (n+1)^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $4n^2-(n+1)^2 = 4n^2-(n^2+2n+1)$

$$= 3n^2-2n-1$$

$$= (n-1)(3n+1)$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $n \geq 1$, alors $(n-1) \geq 0$ et $3n+1 > 0$ donc $4n^2 \geq (n+1)^2$ d'où, $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 4n^2 \geq (n+1)^2$

2) a- Montrons pa récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 4^n \geq n^2$

- Initialisation: Pour $n=1$, on a: $4^1=4$ et $(1)^2=1$ donc: $4^1 \geq (1)^2$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que: $4^n \geq n^2$ et montrons que:

$$4^{n+1} \geq (n+1)^2$$

On a: d'après l'hypothèse de récurence: $4^n \geq n^2$ donc:

$4^n \geq n^2 \Longrightarrow 4 \times 4^n \geq 4n^2$

$\Longrightarrow 4^{n+1} \geq (n+1)^2$, car $4n^2 \geq (n+1)^2$.

d'après la question précédente, donc l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion: - La propriété est vraie pour $n=1$

  - L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc, d'après le principe de récurrence, on a: $4^n \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b- Déduction:

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $4^n \geq n^2$ et pour $n=0$, on a: $4^0 \geq (0)^2$ c'est-à-dire $1 \geq 0$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4n \geq n^2$.

Exercice 59

Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\})$; $n^2 \leq 2^n$

- Initialisation: Pour $n=4$, on a $4^2=16$ et $2^4=16$ donc $4^2 \leq 2^4$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$, supposons que: $n^2 \leq 2^n$ et montrons que: $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

on a: $n^2 \leq 2^n \Longrightarrow 2n^2 \leq 2^{n+1}$ (1)

Il suffit de montrer que: $(n+1)^2 \leq 2n^2$

On a: $2n^2-(n+1)^2 = n^2-2n-1 = n(n-2)-1$

On a: $n \geq 4 \Longrightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n-2 \geq 2 \end{cases}$

$\Longrightarrow n(n-2) \geq 8$

$\Longrightarrow n(n-2)-1 \geq 7$

Donc: $(n+1)^2 \leq 2n^2$ (2)

De (1) et (2) , on déduit que: $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$, donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion - La propriété est vraie pour $n=4$.

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$, donc , d'après le principe de récurrence, on a: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}$; $n^2 \leq 2^n$.

Exercice 60

Montrons que récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n > 2n$

• Initialisation: Pour $n=0$, on a: $3^0=1$ et $2 \times 0=0$ donc: $3^0 > 2 \times 0$

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons: $3^n > 2n$ et montrons que: $3^{n+1} > 2(n+1)$

On a: $3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3^n + 3^n + 3^n$

Puisque: $3^n > 2n$ (d'après l'hypothèse de récurrence) et $3^n \geq 1$ et $3^n \geq 1$, alors $3^{n+1} > 2n+1+1$

C'est-à-dire $3^{n+1} > 2(n+1)$, donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: - La propriété est vraie pour $n=0$

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc d'après le principe de récurrence on a: $3^n > 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 61

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ et où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

• Initialisation: Pour $n=0$ on a $(1+\alpha)^0=1$ et $1+0\alpha=1$ donc: $(1+\alpha)^0 \geq 1+0.\alpha$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ et montrons que:

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$$

On a: $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha \Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq (1+n\alpha)(1+\alpha)$ $\quad$ $(car\ 1+\alpha > 0)$

$\Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1+n\alpha+\alpha+n\alpha^2$

$\Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2$ $\quad$ (1)

On a: $n\alpha^2 \geq 0 \Longrightarrow 1+(n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha$ (2)

Donc de (1) et (2), on déduit que: $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: - La propriété est vraie pour $n = 0$

- L'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, d'après le principe de récurrence , on a:

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

Cette inégalité s'appelle: Inégalité de Bernouilli

2) • Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n \geq n2^{n-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $3^n \geq n2^{n-1} \Longleftrightarrow \frac{3^n}{2^n} \geq \frac{n2^{n-1}}{2^n}$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}n$$

$$\Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}n$$

En appliquant l'inégalité de la question précédente et en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, on a: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq 1+\frac{1}{2}n$, donc: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}n$

D'où l'équivalence: $3^n \geq n2^{n-1} \Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}n$ est vraie et $\left(1+\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{2}n$ est vraie, par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n \geq n2^{n-1}$

3) • Déduction:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; en remplaçant α par $\frac{1}{n}$ dans l'inégalité de la question 1), on obtient: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{1}{n}$ C'est-à-dire: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2$ donc: $\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq 2$

D'où: $(n+1)^n \geq 2n^n$ Par suite: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (n+1)^n \geq 2n^n$.

Exercices de synthèse

Exercice 62

Montrer que par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Exercice 63

Montrer par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{1^2}{1\times 3} + \frac{2^2}{3\times 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)\times(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Exercice 64

Montrer par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 2^n \times 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) = (n+1)(n+2) \times ...(n+n)$$

Exercice 65

Soit α un réel positif.

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

2) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$

Exercice 66

Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\}); 3^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Exercice 67

Soit x et y deux réels strictement positifs.

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$

Exercice 68

Soit n un entier naturel

Montrer que si $(2n+1)$ est un carré parfait , alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice 69

Montrer que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$$

(On pourra étudier les cas: $x \leq 0$; $0 < x < 1$ et $x \geq 1$)

Exercice 70

Soit a, b et c des nombres réels tels que: $ab + bc + ca = 3$ et $a + b + c = 5$

Montrer que: $-1 \leq c \leq \frac{13}{3}$

Exercice 71

1) On suppose que pour tout entier naturel n, il existe un unique entier naturel p tel que: $n = 3p$ ou $n = 3p+1$ ou $n = 3p+2$

Montrer que le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

2) Montrer par récurrence que le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel.

Exercice 72

1) Montrer que: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $(x \neq y \Longrightarrow x^3 + x \neq y^3 + y)$

2) a- Montrer que: $((\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2);(|a+b| = |a| + |b|) \Longleftrightarrow ab \geq 0)$

b- En déduire que:

$(\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3)$ $(|a-b| = |a-c| + |c-b|) \Longleftrightarrow a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$.

Exercice 73

Soit a,b et c trois nombres réels de l'intervalle $]0;1[$.

On pose: $A = (ab-1)(bc-1)(ac-1)$

1) Vérifier que: $\frac{A}{abc} = \left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right)$

2) Montrer que: $A < 0$

3) En déduire que: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc < a + b + c + \frac{1}{abc}$

Exercice 74

Soit x et y deux nombres réels tels que: $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| < 1$

Montrer que: $|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}$

Exercice 75

Soit a,b,c et d des entiers naturels tels que: $1 < a < b < c < d$

Montrer que: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{31}{24}$

Exercice 76

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que si $3n+1$ est un carré parfait alors $n+1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Exercice 77

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs.

Le nombre $m = \frac{a+b}{2}$ est appelé la moyenne arithmétique des deux nombres a et b.

Le nombre $g = \sqrt{ab}$ est appelé la moyenne géométrique des deux nombres a et b.

Le nombre $h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ est appelé la moyenne harmonique des deux nombres a et b.

Le nombre $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ est appelé la moyenne quadratique des deux nombres a et b.

1) Montrer que : $h \leq g \leq m \leq q$

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs.

Montrer que :

(1) $a + \frac{1}{a} \geq 2$; (2) $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$; (3) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

(4) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

(5) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$

(6) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$; (7) $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$

(8) $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$; (9) $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(10) $\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$

Exercice 78

1) Montrer que : $(\forall a \in]1;+\infty[)$; $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$

2) Montrer que : $\forall (a;b) \in (]1;+\infty[)^2$; $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$

Exercice 79

Soit x et y deux nombres réels tels que : $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

Montrer que : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Exercice 80

Soit a et b deux nombre réels strictement positifs tels que : $a + b = 1$

Montrer que : $\left(1 + \frac{1}{a^n}\right)\left(1 + \frac{1}{b^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$; où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 81

On note la somme : $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ par : $\sum_{i=1}^{n} a_i$

où $a_i \in IR$ pour tout $i \in \{1;2;\ldots;n\}$

L'écriture : $\sum_{i=1}^{n} a_i$ s'écrit $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_j$ ... ou ...

• Propriétés du symbole $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$ (2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j}$ (4) $\sum_{i=1}^{n} a = na$

1) On pose : $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$

a- Vérifier que : $S_1 = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$

b- En déduire que : $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

c- Calculer : $T_1 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ et $T_2 = \sum_{k=1}^{n}2k$

d- Calculer $T_3 = 1+2+3+\ldots+n-1+n+n-1+\ldots+2+1$.

2) En utilisant l'égalité : $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$

Montrer que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que : $S_3 = \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) a- Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = a_n - a_0$

b- Vérifier que: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c- En déduire que : $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n}$

5) Soit q un élément de $IR^* - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $S = \sum_{k=1}^{n}q^k$

- Calculer $S - qS$ puis en déduire que : $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Calculer la somme : $S' = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n$ où $m \in IN$ et $n > m$.

Exercice 82

- On note le produit $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$ par : $\prod_{i=1}^{n}a_i$

Le nombre $\prod_{i=1}^{n}a_i$ s'écrit $\prod_{j=1}^{n}a_j$ ou $\prod_{k=1}^{n}a_k$ ou ...

- Propriétés :

(1) $\prod_{i=1}^{n}a_ib_i = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)$; (2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n}a_i$

(3) $\prod_{i=1}^{n}a = a^n$; (4) $\prod_{i=1}^{n}a_i = \prod_{i=0}^{n-1}a_{n-i}$

1) a- Vérifier que : $\prod_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}$ où $a_i \in IR^*$ pour tout $i \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$

b- En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n$

2) On pose : $P_n = \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$

En utilisant la formule : $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$

Montrer que : $P_n = \dfrac{\sin x}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}$

3) Vérifier que : $\prod_{k=0}^{n} a^{k} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 83

1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}); \sum_{k=1}^{n-1} k2^{k-1} = (n-1)2^{n} - n2^{n-1} + 1$

2) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \dfrac{1\times 3\times 5\times ...\times 2n-1}{2\times 4\times 6\times ...\times(2n)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Exercice 84

1) Montrer que: $(\forall a \in]0;+\infty[); a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

2) Soit x un nombre réel strictement positif tel que $x \neq 1$

Montrer que: $\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (1+2n)x^{n}$; où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 85

Montrer par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*): \left(1+\dfrac{1}{2\times 0+1}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{2\times 1+1}\right)^2\times ...\times\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^2 \geq 2n+3$

Exercice 86

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (1): (\exists a \in \mathbb{R}_+^*); f(1) = a-1 \\ (2): (\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2); f(x+y)+x+y = (f(x)+x)(f(y)+y) \end{cases}$$

1) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x)+x \geq 0$ (Remarque que: $\frac{x}{2}+\frac{x}{2} = x$)

b- En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x)+x > 0$$

c- Montrer que : $f(0) = 1$

2) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(-x)-x = \dfrac{1}{f(x)+x}$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}); f(nx)+nx = [f(x)+x]^{n}$

c- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{Z}); f(x) = a^{x} - x$

Exercice 87

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$

Le nombre n est appelé la partie du nombre réel x et note $E(x)$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}); E(x) \leq x < E(x)+1$

Exemples :

- $E(\sqrt{2}) = 1$ car : $1 \leq \sqrt{2} < 2$
- $E(-1,3) = -2$ car: $-2 \leq -1,3 < -1$

Remarque : $(\forall x \in \mathbb{Z}); E(x) = x$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); E(\sqrt{n^2+1}) = n$

b- Déterminer $E(\sqrt{n^2+4n})$ où: $n \in \mathbb{N}^*$

2) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}); x-1 < E(x) \leq x$

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists r \in [0;1[); x = E(x) + r$

3) a- Montrer que: $\forall (n;p) \in \mathbb{Z}^2 ; n+1 > p \Leftrightarrow n \geq p$

b- Montrer que: $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x < y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$

4) a- Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}); (\forall p \in \mathbb{Z}), E(x+p) = E(x) + p \quad (1)$

b- Montrer que: $(2) \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; E(x+y) \geq E(x) + E(y)$

$(3) \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

5) Montrer que : $(4) (\forall n \in \mathbb{N}^*); (\forall x \in \mathbb{R}); E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

6) a- Montrer que : (5) $(\forall x \in IR); E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

b- Déterminer la valeur de la somme : $\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)$ en fonction de n et de x.

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$; (2) $E(2x) = x-1$

(3) $E\left(\frac{1}{x}\right) = 3$; (4) $E(x) + |x-1| = x$

Exercice 88

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 89

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$

Exercice 90

Montrer que $3n^5 + 5n^3 + 7n$ est un multiple de 15 pour tout entier naturel.

Solutions

Exercice 62

Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

• Intialisation: Pour $n = 1$, on a: $1^4 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 5}{30} = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que:

$1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ et montrons que:

$$1^4 + 2^4 + ... + (n+1)^4 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}$$

On a: $1^4 + 2^4 + ... + (n+1)^4 = \underbrace{1^4 + 2^4 + ... + n^4} + (n+1)^4$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4$$

(D'après lhypothèse de récurrence)

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)(3n^2+3n-1) + 30(n+1)^3}{30}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{(2n^2+n)(3n^2+3n-1) + 30(n^3+3n^2+3n+1)}{30}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{6n^4+9n^3+n^2-n+30n^3+90n^2+90n+30}{30}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{6n^4+39n^3+91n^2+89n+30}{30}\right]$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned}(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1) &= (2n^2+7n+6)(3n^2+9n+5) \\ &= 6n^4+18n^3+10n^2+21n^3+63n^2+35n+18n^2+54n+30 \\ &= 6n^4+39n^3+91n^2+89n+30\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$. D'où d'après le principe de récurrence, on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^4 + 2^4 + ... + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Exercice 63

Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)\times(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

• Initialisation: Pour $n = 1$, on a $\frac{1^2}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que:

$$\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

et montrons que: $\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + ... + \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$

On a:

$$\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\dots+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\underline{\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

D'après l'hypothèse derécurrence. $=\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2n+3}\right)$

$$=\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{2n^2+5n+2}{2(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{(2n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

- Conclusion: D'après le principe de récurrence , on a:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Exercice 64

Montrons par récurrence que:

$(\forall n\in\mathbb{N}^*); 2^n\times1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)=(n+1)(n+2)\times\dots\times(n+n)$

- Initialisation: Pour $n=1$, on a: $2^1\times1=2$ et $1+1=2$

Donc la propriété est vraie pour $n=1$

- Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*$; supposons que:

$2^n\times1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)=(n+1)(n+2)\times\dots\times(n+n)$

et montrons que:

$2^{n+1}\times1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)=(n+2)(n+3)\times\dots(2n+2)$

On a:

$$2^{n+1}\times1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)=2\Big[\underbrace{2^n\times1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)}_{\text{hypothèse de récurrence}}\Big]\times(2n+1)$$

$$=2((n+1)(n+2)\times\dots\times(2n))\times(2n+1)$$

$$=(2n+2)(n+2)(n+3)\times\dots\times(2n)\times(2n+1)$$

$$=(n+2)(n+3)\times\dots\times(2n)\times(2n+1)(2n+2)$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$.

- Conclusion: D'après le principe de récurrence , on a:

$(\forall n\in\mathbb{N}^*); 2^n\times1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)=(n+1)(n+2)\times\dots\times2n$

Exercice 65

Soit α un nombre réel strictement positif

1) Montrons par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}):(1+\alpha)^n\geq1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

- Initialisation: Pour $n=2$, on a: $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$

et $1 + 2\alpha + \frac{2}{2}\alpha^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ c'est à dire: $(1+\alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha + \frac{2(2-1)}{2}\alpha^2$

donc la propriété est vraie pour $n = 2$.

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, supposons que:

$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$ et montrons que:

$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$

On a: $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 \Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq (1+\alpha)\left(1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\right)$

(On a multiplié les deux membres de l'inégalité par $(1+\alpha)$)

$$\Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \alpha + n\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^3$$

$$\Longrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^3$$

D'autre part, on a:

$$1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^3 \geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

car $\frac{n(n-1)}{2}\alpha^3 \geq 0$

Donc: $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$, d'où la propriété est vraie pour $n+1$

- Conclusion: D'après le principe de récurrence, on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}); \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; on pose : $\alpha = \frac{1}{2n}$ donc $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

En appliquant le résultat de la question 1), on obtient:

$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$ C'est-à-dire: $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{3}{2} + \frac{n-1}{8n}$

Puisque: $\frac{3}{2} + \frac{n-1}{8n} = \frac{3}{2} + \frac{n}{8n} - \frac{1}{8n} = \frac{13}{8} - \frac{1}{8n} = \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$

alors: $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$ D'où: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geq \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$

Exercice 66

Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,3\}); 3^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

- Initialisation, Pour $n = 4$, on a: $3^4 = 81$ et $\frac{4 \times 3 \times 2}{6} = 4$ et $81 \geq 4$

donc la propriété est vraie pour $n=4$

• Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2,3\}$, supposons que: $3^n\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

et montrons que: $3^{n+1}\geq\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

On a: $3^n\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Longrightarrow 3\times 3^n\geq\frac{3n(n-1)(n-2)}{6}$

$$\Longrightarrow 3^{n+1}\geq\frac{3n(n-1)(n-2)}{6}$$

Il suffit de montrer que: $3n(n-1)(n-2)\geq n(n-1)(n+1)$ c'est-à-dire:

$$3(n-2)\geq n+1$$

En effet : $3(n-2)-(n+1)=3n-6-n-1=2n-7=2\left(n-\frac{7}{2}\right)$

Puisque $n\geq 4$ alors $2\left(n-\frac{7}{2}\right)\geq 0$ signifie que: $3(n-2)\geq n+1$

Donc $3^{n+1}\geq\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$, d'où la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence , on a:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1,2,3\})\ ;\ 3^n\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Exercice 67

Montrons par récurrence que:

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ (x+y)^n\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$

• Initialisation: Pour $n=1$, on a: $(x+y)^1=x+y$ et $2^0(x^1+y^1)=x+y$.

Donc la propriété est vraie pour $n=1$

• Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que: $(x+y)^n\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$ et montrons que: $(x+y)^{n+1}\leq 2^n(x^{n+1}+y^{n+1})$

On a: $(x+y)^n\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)\Longrightarrow(x+y)\times(x+y)^n\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)\times(x+y)$

(car $x+y>0$) $\qquad\Longrightarrow(x+y)^{n+1}\leq 2^{n-1}(x^n+y^n)\times(x+y)$

Il suffit de montrer que: $2^{n-1}(x^n+y^n)(x+y)\leq 2^n(x^{n+1}+y^{n+1})$

C'est -à-dire: $(x^n+y^n)(x+y)\leq 2(x^{n+1}+y^{n+1})$

En effet:

$$\begin{aligned}2(x^{n+1}+y^{n+1})-((x^n+y^n)(x+y))&=2x^{n+1}+2y^{n+1}-x^{n+1}-x^ny-xy^n-y^{n+1}\\&=x^{n+1}+y^{n+1}-x^ny-xy^n\\&=x^n(x-y)-y^n(x-y)\\&=(x-y)(x^n-y^n)\\&=(x-y)(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})\\&=(x-y)^2(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})\end{aligned}$$

Puisque: $x > 0$ et $y > 0$ alors $(x-y)^2 \geq 0$ et $x^{n-1}+x^{n-2}y+....+y^{n-1}>0$

donc: $(x+y)^{n+1} \leq 2^n(x^{n+1}+y^{n+1})$, d'où la propriété est vraie pour $n+1$

Remarque: Si x et y sont deux réels strictement positifs alors $x-y$ et x^n-y^n ont le même signe (c'est-à-dire $(x-y)(x^n-y^n) \geq 0$)

- Conclusion: D'après le principe de récurrence , on a:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$

Rappel:

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})$

Exercice 68

Soit n un entier naturel tel que $2n+1$ est un carré parfait.

Montrons que $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

On a: $2n+1$ est un carré parfait donc il existe un entier naturel p tel que:

$$2n+1=p^2$$

Puisque: $2n+1$ est impair alors p^2 est impair donc p est un nombre impair que l'on peut écrire sous la forme: $2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.

D'où: $2n+1=p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$,

Signifie que: $n=2k^2+2k$

donc: $n+1=2k^2+2k+1=k^2+k^2+2k+1=(k+1)^2+k^2$.

D'où $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice 69

Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$

en distinguant trois cas.

1^{er} cas: $x \leq 0$

On a: $x \leq 0 \Longrightarrow x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x \geq 0$

$$\Longrightarrow x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Puisque $\frac{3}{4}>0$ alors: $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$

Donc: $(\forall x \in]-\infty;0]) ; x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$

$2^{ème}$ cas: $0<x<1$

On a: $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}=x^4(x^2-x)+x^2(x^2-x)+(x^2-x)+\frac{3}{4}$

On a: $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

Donc: $0 < x < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < x^2 - x < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - x^2 < \frac{1}{4}$$

On a: $0 < x^2 < 1$ et $0 < x^4 < 1$ donc $0 \leq x^4(x - x^2) < \frac{1}{4}$ et

$0 \leq x^2(x - x^2) < \frac{1}{4}$ et $0 \leq x - x^2 < \frac{1}{4}$

d'où: $-\frac{1}{4} < x^4(x^2 - x) \leq 0$ et $-\frac{1}{4} < x^2(x^2 - x) \leq 0$ et $-\frac{1}{4} < x^2 - x \leq 0$

Par sommation, on a: $-\frac{3}{4} < x^4(x^2 - x) + x^2(x^2 - x) + (x^2 - x) \leq 0$

C'est-à-dire: $-\frac{3}{4} < x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x \leq 0$

D'où: $(\forall x \in]0,1[)$; $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$

3ème cas: $x \geq 1$; On a: $x \geq 1 \Rightarrow x^6 \geq x^5$ et $x^4 \geq x^3$ et $x^2 \geq x$

$$\Rightarrow x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x \geq 0$$

D'où: $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$

Exercice 70

On a: a, b et c sont des nombres réels tels que: $ab + bc + ca = 3$ et $a + b + c = 5$

Montrons que: $-1 \leq c \leq \frac{13}{3}$

On a: $\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5-c \\ ab=3-c(a+b) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=5-c \\ ab=3-c(5-c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=5-c \\ ab=c^2-5c+3 \end{cases} \quad (1)$$

Puisque les réels a, b et c verifient le système (1), alors a et b sont solutions de l'équation: $X^2 - (5-c)X + (c^2 - 5c + 3) = 0$

et par conséquent, le distriminant Δ de cette équation est positif.

On a: $\Delta = (5-c)^2 - 4(c^2 - 5c + 3)$

$= 25 - 10c + c^2 - 4c^2 + 20c - 12$

$= -3c^2 + 10c + 13$

Étudions le signe de Δ :

Calculons son discriminant Δ_1 : On a: $\Delta_1 = 100 + 156 = 256$ et ses solutions sont: $c_1 = -1$ et $c_2 = \dfrac{13}{3}$

Puisque $\Delta \geq 0$: c'est à dire: $-3c^2 + 10c + 13 \geq 0$

alors $-1 \leq c \leq \dfrac{13}{3}$

Exercice 71

1) Montrons que le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n.

On utilisera le raisonnement par disjonction des cas:

- 1^er^ cas: $n = 3p$

On a: $n(n^2+5) = 3p(9p^2+5) = 3k$ où $k = p(9p^2+5)$ et $k \in \mathbb{N}$

Donc $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

- 2^ème^ cas: $n = 3p+1$

On a: $n(n^2+5) = (3p+1)(9p^2+6p+6) = 3(3p+1)(3p^2+2p+2)$

$= 3k'$ où $k' = (3p+1)(3p^2+2p+2)$ *et* $k' \in \mathbb{N}$

Donc $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

- 3^ème^ cas: $n = 3p+2$

On a: $n(n^2+5) = (3p+2)(9p^2+12p+9)$

$= 3(3p+2)(3p^2+4p+3) = 3k''$

où $k'' = (3p+2)(3p^2+4p+3)$ et $k'' \in \mathbb{N}$

Donc $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

D'où dans tous les cas, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3

Par suite $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Montrons par récurrence que le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation: Pour $n = 0$, on a: $0(0^2+5) = 0$ et 0 est un multiple de 3, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 c'est-à-dire: $(\exists k \in \mathbb{N}) / n(n^2+5) = 3k$ et montrons que $(n+1)((n+1)^2+5)$ est un multiple de 3

On a: $(n+1)((n+1)^2+5)=(n+1)(n^2+2n+1+5)$
$$=n(n^2+5)+2n^2+n+n^2+2n+6$$
$$=3k+3n^2+3n+6=3(k+n^2+n+2)=3k'$$

(D'après l'hypothèse de récurrence)

Donc la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence , le nombre $n(n^2+5)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 72

1) Montrons que: $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2).(x\neq y \Longrightarrow x^3+x\neq y^3+y)$ en utilisant le raisonnement par contraposée

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$; montrons que: $x^3+x=y^3+y \Longrightarrow x=y$

On a: $x^3+x^3=y^3+y \Longrightarrow x^3-y^3+x-y=0$
$$\Longrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0$$
$$\Longrightarrow (x-y)\left(\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1\right)=0$$
$$\Longrightarrow x-y=0\left(car\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1>0\right)$$
$$\Longrightarrow x=y$$

Donc: $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)$; $x\neq y \Longrightarrow x^3+x\neq y^3+y$

2) a- Montrons que: $(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2)$; $(|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow ab\geq 0)$ en utilisant le raisonnement par équivalences sucessives.

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. On a: $|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow (|a+b|)^2=(|a|+|b|)^2$
$$\Longleftrightarrow (a+b)^2=a^2+2|ab|+b^2$$
$$\Longleftrightarrow ab=|ab|$$
$$\Longleftrightarrow ab\geq 0$$

Donc: $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$; $|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow ab\geq 0$

b- Déduction: Soit $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Montrons que: $|a-b|=|a-c|+|b-c| \Longleftrightarrow a\leq c\leq b$ ou $b\leq c\leq a$

On a d'après a-: $|x+y|=|x|+|y| \Longleftrightarrow xy\geq 0$

On pose: $x=a-c$ et $y=c-b$, on a: $x+y=a-b$

Donc: $|a-b|=|a-c|+|b-c| \Longleftrightarrow |a-b|=|a-c|+|c-b|$
$$\Longleftrightarrow (a-c)(c-b)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c\geq 0 \\ c-b\geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-c\leq 0 \\ c-b\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c\leq a \\ b\leq c \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a\leq c \\ c\leq b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b\leq c\leq a \text{ ou } a\leq c\leq b$$

Donc:

$(\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3);(|a-b|=|a-c|+|c-b|)\Leftrightarrow a\leq c\leq b$ ou $b\leq c\leq a$

Exercice 73

1) Vérifions que: $\frac{A}{abc}=\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)$

On a: $\frac{A}{abc}=\left(\frac{ab-1}{b}\right)\left(\frac{bc-1}{c}\right)\left(\frac{ac-1}{a}\right)=\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)$

2) Montrons que: $A<0$

Puisque $0<a<1$, $0<b<1$ et $0<c<1$ alors $ab<1$, $ac<1$ et $bc<1$ donc: $ab-1<0$, $ac-1<0$ et $bc-1<0$

Siginifie que: $(ab-1)(ac-1)(bc-1)<0$. D'où : $A<0$

3) Déduction:

On a: $A<0$ et $abc>0$ donc $\frac{A}{abc}<0$ d'où: $\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)<0$

Et puisque: $\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right)$

alors: $abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<a+b+c+\frac{1}{abc}$

Exercice 74

Rappel:
$|ab|=|a|\times|b|$
$|a-b|\leq|a|+|b|$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que: $|x|\leq\frac{1}{2}$ et $|y|<1$

Montrons que: $|4x^2y-y-x|\leq\frac{17}{16}$

On a: $|4x^2y-y-x|=|y(4x^2-1)-x|$. Donc: $|4x^2y-y-x|\leq|y||4x^2-1|+|x|$

Puisque: $|y|<1$ alors $|y||4x^2-1|\leq|4x^2-1|$

D'où: $|4x^2y-y-x|\leq|4x^2-1|+|x|$ or: $|x|\leq\frac{1}{2}$ donc $4x^2-1\leq 0$

par suite $|4x^2-1|+|x|=-4x^2+|x|+1=-4\left(|x|-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{17}{16}$

et comme $-4\left(|x|-\frac{1}{8}\right)^2\leq 0$ alors $|4x^2-1|+|x|\leq\frac{17}{16}$

Ainsi: $|4x^2y-y-x|\leq\frac{17}{16}$

Exercice 75

* Montrons que : $\forall (n;p) \in \mathbb{N} ; (n > p \Leftrightarrow n \geq p+1)$ (1)

Soit : $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, on a : $n > p \Leftrightarrow n - p > 0$

$$\Leftrightarrow (n-p) \in \mathbb{N}^*$$
$$\Leftrightarrow n - p \geq 1$$
$$\Leftrightarrow n \geq p + 1$$

Donc : $(n > p \Leftrightarrow n \geq p + 1)$

* Montrons que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a.b.c.d} \leq \frac{31}{24}$

où a, b, c et d des entiers naturels qui vérifient : $1 < a < b < c < d$.

En utilisant la propriété (1), on a : $a \geq 2$; $b \geq 3$; $c \geq 4$ et $d \geq 5$

(Par exemple : $b > a \geq 2 \Rightarrow b > 2 \Rightarrow b \geq 3$ et $a > 1 \Rightarrow a \geq 2$)

On a donc : $1 < a < b < c < d \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ b \geq 3 \\ c \geq 4 \\ d \geq 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{d} \leq \frac{1}{5} \end{cases} \text{ et } abcd \geq 120$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{120} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{155}{120}$$

et $\frac{155}{120} = \frac{31}{24}$ d'où : $1 < a < b < c < d \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{31}{24}$

Exercice 76

* On va procéder à un raisonnement par disjonction des cas :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que le nombre $3n + 1$ est un carré parfait donc :
$(\exists a \in \mathbb{N}^*) : 3n + 1 = a^2$ et montrons que $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

On a : $\exists! (q;r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; a = 3q + r$ où $r \in \{0;1;2\}$ d'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Puisque : $3n = a^2 - 1$ alors 3 divise le nombre $a^2 - 1$ donc: $r \neq 0$ d'où $r = 1$ ou $r = 2$.

1^{er} cas: $r = 1$

On a : $a = 3q + 1$ donc : $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$

c'est-à-dire : $3n + 3 = 9q^2 + 6q + 3$ d'où : $n + 1 = 3q^2 + 2q + 1$

Par suite : $n + 1 = q^2 + q^2 + (q + 1)^2$

ainsi : $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

$2^{ème}$ cas : $r = 2$

On a : $a = 3q + 2$ donc : $a^2 = 9q^2 + 12q + 4$, d'où : $3n + 3 = 9q^2 + 12q + 6$

c'est-à-dire : $n + 1 = 3q^2 + 4q + 2 = q^2 + (q + 1)^2 + (q + 1)^2$

Donc : $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : si $3n + 1$ est un carré parfait,

alors : $n + 1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Exercice 77

1) Montrons que : $(\forall a > 0)(\forall b > 0)\ \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$

* On va utiliser le raisonnement par équivalences successives :

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$
$$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Puisque la proposition $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ est vraie.

alors : $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ est une proposition vraie donc : $g \leq m$

D'où : $(\forall a > 0)(\forall b > 0)\ \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$

Remarque : cette propriété est vraie si $b \geq 0$ et $a \geq 0$

* On a : $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}}$ (d'après l'inégalité $m \geq g$)

Donc : $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ d'où : $h \leq g$

* Montrons que : $m \leq q$

On va utiliser le raisonnement par équivalences successives :

$$m \leq q \Leftrightarrow \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a + b)^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$
$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

puisque la proposition $(a - b)^2 \geq 0$ est vraie alors $m \leq q$

Donc : $m \leq q$ d'où : $h \leq g \leq m \leq q$

2) Soit a, b et c trois nombres strictement positifs.

(1) Montrons que : $a + \frac{1}{a} \geq 2$

On a : $\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}}$ (car : $m \leq g$) donc : $a + \frac{1}{a} \geq 2$

(2) Montrons que : $\frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4}$

On a : $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a + b}{2}$ (car : $h \leq m$)

Donc : $\frac{2ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{2}$ D'où : $\frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4}$

3) Montrons que: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

On a : $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a + b}{2}$

Donc : $2 \times 2 \leq (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, c'est-à-dire : $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

4) Montrons que: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

On a : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

et on a : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Donc : $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ et $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

D'où : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

5) Montrons que: $\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ac}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}$

On a d'après (2) : $\begin{cases} \frac{ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{4} \\ \frac{bc}{b + c} \leq \frac{b + c}{4} \\ \frac{ac}{a + c} \leq \frac{a + c}{4} \end{cases}$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ac}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}.$$

6) On a : $m \geq g$ donc : $\begin{cases} a + b \geq 2\sqrt{ab} \\ b + c \geq 2\sqrt{bc} \\ c + a \geq 2\sqrt{ac} \end{cases}$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

(7)Puisque : $a^2 + b^2 \geq 2ab > 0$ (car : $(a-b)^2 \geq 0$)

alors : $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$

(8) On a d'après (7) : $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$ et Puisque $a+b>0$

alors: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab}$ Puisque : $\frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$

alors : $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(9) On a d'après (8) : $\begin{cases} \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ \frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \end{cases}$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient:

$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(10) Montrons que : $\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$

On a : $\frac{\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2+1}{b} \times \frac{b^2+1}{a}}$ (car : $m \geq g$)

Puisque : $\sqrt{\frac{a^2+1}{b} \times \frac{b^2+1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2+1}{a} \times \frac{b^2+1}{b}}$

$= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}$

Comme: $\left(a+\frac{1}{a}\right) \geq 2$ et $\left(b+\frac{1}{b}\right) \geq 2$ alors : $\sqrt{\frac{a^2+1}{b} \times \frac{b^2+1}{a}} \geq 2$

Donc : $\frac{\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a}}{2} \geq 2$ D'où : $\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$

Exercice 78

1) Soit a un élément de l'intervalle $]1; +\infty[$

Montrons que : $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$

en utilisant le raisonnement par équivalences successives.

On a : $a > 1$ c'est-à-dire : $a - 1 > 0$

Donc : $\frac{a^2}{a-1} \geq 4 \iff a^2 \geq 4a - 4$

$$\iff a^2 - 4a + 4 \geq 0$$

$$\iff (a-2)^2 \geq 0$$

Puisque la proposition $(a-2)^2 \geq 0$ est vraie alors : $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$ est une proposition vraie.

Donc : $(\forall a \in]1; +\infty[)$; $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$

2) Soit a et b deux éléments de l'intervalle $]1; +\infty[$

Montrons que $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$:

On a : $(\forall x \in IR^{+})(\forall y \in IR^{+})$: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

(D'après l'exercice précédent sur les moyennes)

Puisque : $\frac{a^2}{b-1} > 0$ et $\frac{b^2}{a-1} \geq 0$ alors : $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1} \times \frac{b^2}{a-1}}$

c'est-à-dire: $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a-1} \times \frac{b^2}{b-1}}$

et on a d'après la question 1) : $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$ et aussi : $\frac{b^2}{b-1} \geq 4$

Donc : $\frac{a^2}{a-1} \times \frac{b^2}{b-1} \geq 16$ c'est-à-dire : $\frac{a^2}{b-1} \times \frac{b^2}{a-1} \geq 16$

D'où : $\sqrt{\frac{a^2}{b-1} \times \frac{b^2}{a-1}} \geq 4$ par suite : $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$

Exercice 79

Soit x et y deux nombres réels tels que : $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

On a : $1 - x^2 \geq 0$ et $1 - y^2 \geq 0$

Puisque : $(\forall (a;b) \in (IR^{+})^2)$; $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Alors : $\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{1-x^2+1-y^2}{2}}$

c'est-à-dire : $\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{2}}$

Puisque : $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ alors : $1 - \frac{x^2+y^2}{2} \leq 1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Donc : $\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

D'où : $\frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Par suite : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$

Exercice 80

Soit a et b deux nombre réels strictement positifs tels que : $a + b = 1$ et $n \in \mathbb{N}$

On a : $\forall a > 0 ; \forall b > 0$; $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Donc : $\forall a > 0$; $\forall b > 0$; $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$ D'où : $\dfrac{ab}{1} \leq \dfrac{1}{4}$

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{ab} \geq 4$

D'autre part on a : $\left(1 + \dfrac{1}{a^n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b^n}\right) = 1 + \dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{a^n b^n}$

Puisque : $\forall x \geq 0$; $\forall y \geq 0$; $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Alors : $\dfrac{\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{1}{a^n} \times \dfrac{1}{b^n}}$ c'est-à-dire : $\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a^n b^n}}$

Donc : $\left(1 + \dfrac{1}{a^n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b^n}\right) \geq 1 + 2\sqrt{\dfrac{1}{a^n b^n}} + \dfrac{1}{a^n b^n}$

On a : $\dfrac{1}{ab} \geq 4$ donc : $\dfrac{1}{a^n b^n} \geq 4^n$, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{a^n b^n} \geq (2^n)^2$

donc : $\sqrt{\dfrac{1}{a^n b^n}} \geq 2^n$. D'où : $\left(1 + \dfrac{1}{a^n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b^n}\right) \geq 1 + 2 \times 2^n + (2^n)^2$

Ainsi : $\left(1 + \dfrac{1}{a^n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

Exercice 81

1) On pose : $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$

a- Vérifions que : $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k)$

On a : $\sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1$

$$= 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = S_1$$

b- Déduisons que : $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (On utilisera les propriétés du symbole $\sum$)

On a : $2S_1 = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$

Donc : $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

c- Calculons : $T_1 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$ et $T_2 = \sum_{k=1}^{n} 2k$

On a : $T_1 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2S_1 + (n+1) \times 1$

$$= n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$$

On a: $T_2=\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2S_1 = n(n+1)$

d- Calculons :

On a : $T_3=(1+2+3+...+n-1+n)+(n-1+...+2+1)$

Ainsi: $T_3=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n-1}k=\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k\right)-n=2S_1-n=n(n+1)-n=n^2$

Donc : $T_3=n^2$

2) On a : $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$

Donc : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

C'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3S_2+3S_1+n$

Puisque : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3$

$$=1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3-1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3-1$$

alors : $(n+1)^3-1=3S_2+3S_1+n=3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n$

Donc : $3S_2=(n+1)^3-(1+n)-\frac{3n(n+1)}{2}$

$$=\frac{(n+1)\left[2(n+1)^2-2-3n\right]}{2}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$

D'où : $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Montrons que : $S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
(Voir exercice 55)

4) a- Vérifions que : $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_0$

On a: $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}a_k$

$$=(a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n)-(a_0+a_1+...+a_{n-1})$$

$$=a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n-a_0-a_1-...-a_{n-1}=a_n-a_0$$

b- On a : $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$

Donc : $\frac{1}{k(k+1)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

c- Déduction : On a: $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n}$.

On prend: $a_k=\frac{1}{k}$

5) • Soit $q \in (IR^* - \{1\})$ et $n \in IN^*$. On a : $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$

c'est-à-dire : $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$ donc :

$qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$.

D'où : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, c'est-à-dire : $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$

Puisque : $q \neq 1$ alors : $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ donc : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

• Calculons la somme : $S' = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n$ où $n > m$

On a : $S' = q^m(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-m}) = q^m\left(\frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}\right)$

(Remarquer que $n - m + 1$ est le nombre de termes de la somme S').

Exercice 82

1) a- Vérifions que : $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}$

On a : $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \ldots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Donc après simplification, on a : $\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}$ (1)

b- Déduction : $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \ldots \frac{n-1}{n-2} \times \frac{n}{n-1} = n$$

(On pourra poser $a_k = k$, donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_1} = n$)

2) En utilisant la propriété (1) et puisque : $\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin\alpha}$

alors : $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}$

Donc : $P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times \prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}$ d'où : $P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$

3) On a : $a^n \times a^m = a^{n+m}$

On a : $\prod_{k=0}^{n} a^k = a^0 \times a^1 \times a^2 \times \ldots \times a^n = a^{1+2+3+\ldots+n}$

$$= a^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ (car } 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{)}$$

Exercice 83

1) Soit $n \in IN$ tel que : $n \geq 2$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; \sum_{k=1}^{n-1} k2^{k-1} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$

• Pour $n = 2$, on a : $\sum_{k=1}^{1} k2^{k-1} = 1 \times 2^{1-1} = 1$

et $(2-1) \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 2$

Soit $n \in IN$ et $n \geq 2$, supposons que : $\sum_{k=1}^{n-1} k2^{k-1} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$

et montrons que: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1$

On a : $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k2^{k-1} + n2^{n-1} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 + n2^{n-1}$

$= (n-1)2^n + 1$

D'autre part, on a : $n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = 2n \times 2^n - (n+1)2^n + 1$

$= (2n - n - 1)2^n + 1$

$= (n-1)2^n + 1$

Donc : $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1$

• Conclusion : - La propriété est vraie pour $n = 2$

- L'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$:

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2)$ $\sum_{k=1}^{n-1} k2^{k} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$ et

2) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) P_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in IN^*)$ $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

• Initialisation : Pour $n = 1$ on a : $P_1 = \frac{1}{2}$

et on a : $\frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Hérédité : Soit $n \in IN^*$, supposons que : $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ et montrons que:

$P_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$ c'est-à-dire : $P_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

On a : $P_{n+1} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n \times (2n+2)} = P_n \times \frac{2n+1}{2n+2}$

Puisque : $P_n \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ alors : $P_n \times \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{(2n+1)}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$

c'est-à-dire : $P_{n+1} \leq \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$

Il suffit de montrer que : $\dfrac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}$

c'est-à-dire : $(2n+1)\sqrt{3n+4} \leq (2n+2)\sqrt{3n+1}$

On a : $\left((2n+1)\sqrt{3n+4}\right)^2 = (4n^2+4n+1)(3n+4) = 12n^3+28n^2+19n+4$

$\left((2n+2)\sqrt{3n+1}\right)^2 = (4n^2+8n+4)(3n+1) = 12n^3+28n^2+20n+4$

Donc : $\left((2n+1)\sqrt{3n+4}\right)^2 \leq \left((2n+2)\sqrt{3n+1}\right)^2$

D'où : $(2n+1)\sqrt{3n+4} \leq (2n+1)\sqrt{3n+1}$

c'est-à-dire : $\dfrac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}$ donc : $P_{n+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}$

• Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $P_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ d'après le principe de récurrence.

Exercice 84

1) Soit $a \in]0;+\infty[$, montrons que : $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

On a : $\forall (x,y) \in (]0;+\infty[)^2 ; \dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Donc : $\dfrac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \times \frac{1}{a}}$ c'est-à-dire : $\dfrac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq 1$ donc : $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

2) Soit $x \in]0;+\infty[$ tel que : $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $1 + x + x^2 + ... + x^{2n} = \dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}$

Donc : $\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x} = (1+x+x^2+...+x^n) + (x^{n+1}+x^{n+2}+...+x^{2n})$

$$= x^n\left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + ... + \frac{1}{x} + 1\right) + x^n(x + x^2 + ... + x^n)$$

$$= x^n\left(\left(\frac{1}{x^n} + x^n\right) + \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right) + ... + \left(\frac{1}{x} + x\right) + 1\right)$$

D'où : $\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x} = x^n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + 1\right)$

On a d'après 1) : $\forall k \in \{1,2,...,n\} ; x^k + \dfrac{1}{x^k} \geq 2$ donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} 2$

et on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$. Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \geq 2n$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + 1 \geq 2n + 1$. Puisque : $x^n \geq 0$

alors : $x^n\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + 1\right) \geq (2n+1)x^n$ Donc : $\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geq (1+2n)x^n$

Exercice 85

On pose : $u_n = \prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2$

Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n \geq 2n + 3$

- Initialisation : Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = \prod_{i=0}^{1}\left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

et on a : $\frac{64}{9} \geq 5$ (car : $64 > 45$), donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

Supposons que : $u_n \geq 2n + 3$ et montrons que : $u_{n+1} \geq 2n + 5$

On a : $u_{n+1} = \prod_{i=0}^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 = \prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2\left(1 + \frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2$

$= u_n \times \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^2 = u_n \times \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2$

Puisque : $u_n \geq 2n + 3$ alors : $u_n \times \left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^2 \geq \frac{(2n+4)^2}{2n+3}$

Il suffit de montrer que : $\frac{(2n+4)^2}{2n+3} \geq 2n + 5$

On a : $(2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16$ et $(2n+5)(2n+3) = 4n^2 + 16n + 15$

Donc : $(2n+4)^2 \geq (2n+5)(2n+3)$, d'où : $\frac{(2n+4)^2}{2n+3} \geq 2n + 5$

Par suite : $u_n \times \frac{(2n+4)^4}{(2n+3)^2} \geq 2n + 5$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 2n + 5$.

- Conclusion : - La propriété est vraie pour $n = 1$

- L'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc : $(\forall n \in IN^*) : \prod_{i=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 \geq 2n + 3$, d'après le principe de récurrence.

Exercice 86

1) a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on remplace dans la relation (2) x et y par le nombre $\frac{x}{2}$ et on obtient : $f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right)\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right)$

C'est-à-dire : $f(x) + x = \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right)^2$ donc : $(\forall x \in IR) : f(x) + x \geq 0$

b- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) + x > 0$

On utilisera le raisonnement par l'absurde.

Supposons que : $(\exists x_0 \in \mathbb{R}); f(x_0) + x_0 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la relation (2) on a:

$f(x_0 + (x - x_0)) + x_0 + (x - x_0) = (f(x_0) + x_0)(f(x - x_0) + x - x_0)$:

$f(x) + x = (f(x_0) + x_0)(f(x - x_0) + x - x_0) = 0$

Donc : $(\forall x \in IR); f(x) + x = 0$ d'où : $f(1) + 1 = 0$, c'est-à-dire : $a = 0$.

Ce qui est contradictoire : $a \neq 0$ donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) + x > 0$

c- Montrons que : $f(0) = 1$

On remplace dans la relation (2) x et y par le nombre 0 et on obtient :

$f(0) = (f(0))^2$ donc : $f(0)(1 - f(0)) = 0$

Puisque : $f(0) + 0 > 0$ c'est-à-dire : $f(0) > 0$ alors : $1 - f(0) = 0$ donc : $f(0) = 1$

2) a- Montrons que : $(\forall x \in IR); f(-x) - x = \dfrac{1}{f(x) + x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on remplace y par $-x$ dans la relation (2) et on obtient :

$$f(0) + 0 = f(x + (-x)) + x + (-x) = (f(-x) - x)(f(x) + x)$$

Puisque : $f(0) = 1$ er $f(x) + x > 0$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(-x) - x = \dfrac{1}{f(x) + x}$

b- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}); f(nx) + nx = [f(x) + x]^n$

• soit $x \in \mathbb{R}$;

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $f(0) + 0 = 1$ et $(f(x) + x)^0 = 1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $f(nx) + nx = [f(x) + x]^n$

et montrons que : $f((n+1)x) + (n+1)x = [f(x) + x]^{n+1}$

On a : $f((n+1)x) + (n+1)x = f(nx + x) + nx + x$

$$= (f(nx) + nx)(f(x) + x)$$
$$= (f(x) + x)^n (f(x) + x) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)}$$
$$= (f(x) + x)^{n+1}$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

D'où d'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}); (\forall x \in \mathbb{R}); f(nx) + nx = [f(x) + x]^n$

• Soit $n \in \mathbb{Z}^-$ (c'est-à-dire : $n \leq 0$ où : $n \in \mathbb{Z}$)

On a : $f(nx) + nx = \dfrac{1}{f(-nx) - nx}$

Puisque : $-n \in \mathbb{N}$ alors : $f(-nx) - nx = \left(f(x) + x\right)^{-n}$

donc : $f(nx) + nx = \dfrac{1}{\left(f(x)+x\right)^{-n}} = \left(f(x)+x\right)^{n}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}); f(nx) + nx = \left[f(x) + x\right]^{n}$

c- Déduction :

On a : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}); f(nx) + nx = \left[f(x) + x\right]^{n}$

Pour $x = 1$, on a : $(\forall n \in \mathbb{Z}); f(n) + n = \left(f(1) + 1\right)^{n} = (a - 1 + 1)^{n}$ (d'après 2) b-)

$$= a^{n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{Z}); f(n) = a^{n} - n$,d'où : $(\forall x \in \mathbb{Z}); f(x) = a^{x} - x$

Exercice 87

1) a- On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); n \leq \sqrt{n^2 + 1} < n + 1$ D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); E\left(\sqrt{n^2 + 1}\right) = n$

b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n$ (car $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2$

$$\Rightarrow 2n > 1$$
$$\Rightarrow 4n > 2n + 1$$
$$\Rightarrow n^2 + 4n > n^2 + 2n + 1\ )$$

et on a : $n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4$ donc : $(n+1)^2 < n^2 + 4n < (n+2)^2$

D'où : $n + 1 \leq \sqrt{n^2 + 4n} < n + 2$ signifie que : $E\left(\sqrt{n^2 + 4n}\right) = n + 1$

2) a- Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donc : $E(x) \leq x$ et $x < E(x) + 1$ d'où : $E(x) \leq x$ et $x - 1 < E(x)$, c'est-à-dire : $x - 1 < E(x) \leq x$.

b- Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Donc : $0 \leq x - E(x) < 1$

On pose : $r = x - E(x)$

Donc : $x = E(x) + r$ et $0 \leq r < 1$ d'où : $(\forall x \in IR)(\exists r \in [0;1[); x = E(x) + r$

3) a- Soit: $(n;p) \in \mathbb{Z}^2$

$$n + 1 > p \iff n - p > -1 \quad (\text{car } n - p \in \mathbb{Z})$$
$$\iff n - p \geq 0$$
$$\iff n \geq p$$

Donc : $(\forall (n;p) \in \mathbb{Z}^2);(n \geq p \Longleftrightarrow n+1 > p)$

b- Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On a : $y < E(y)+1$ et $E(x) \leq x$

Donc : $x < y \Rightarrow E(x) \leq x < y < E(y) + 1$

$\Rightarrow E(x) < E(y) + 1$

$\Rightarrow E(x) \leq E(y)$ (car $E(x) \in \mathbb{Z}$ *et* $E(y) \in \mathbb{Z}$)

D'où : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)(x\backslash < y \Rightarrow E(x) \leq E(y))$

4) a- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$

On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donc : $(p + E(x)) \leq x + p < (p + E(x)) + 1$

Puisque : $p + E(x) \in \mathbb{Z}$ alors : $E(x+p) = E(x) + p$

Donc :$(\forall x \in \mathbb{R});(\forall p \in \mathbb{Z});E(x+p) = E(x)+p$ (1)

b- Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $x+y < E(x+y)+1$ et $E(x) \leq x$ et $E(y) \leq y$

Donc : $x+y < E(x+y)+1$ et $E(x) + E(y) \leq x + y$

d'où : $E(x)+E(y) < E(x+y)+1$

Par suite et d'après 3) a- on a : $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$

D'où : $\forall (x;y) \in IR^2 ; E(x) + E(y) \leq E(x + y)$ (2)

On a : $\begin{cases} x < E(x) + 1 \\ y < E(y) + 1 \end{cases}$ et $E(x + y) \leq x + y$

Donc : $x+y < E(x)+E(y)+2$ et $E(x + y) \leq x + y$

d'où : $E(x+y) < E(x)+E(y)+2$

Par suite : $E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$

Donc : $\forall (x;y) \in IR^2 ; E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$ (3)

5) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

On a : $E(x) \leq x \Rightarrow nE(x) \leq nx$

$\Rightarrow nE(x) \leq E(nx)$ (d'après 3) b-)

$\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n}$

$\Rightarrow E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ (d'après 3) b-)

Puisque : $E(x) \leq x$ et une proposition vraie alors : $E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ (Raisonnement déductif-

Rappel : Raisonnement déductif : $[p \; et \; (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ signifie que si p est une proposition vraie et $(p \Rightarrow q)$ est une proposition vraie alors on déduit d'après la définition de l'implication que q est une proposition vraie.

D'autre part on a : $E(nx) \leq nx$ donc : $\frac{E(nx)}{n} \leq x$

D'après la question 3) a- on a : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x)$

Donc : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ (4)

5) a- Soit $x \in \mathbb{R}$, (On utilisera le raisonnement par disjonction des cas)

On a d'après 2) b): $\exists r \in [0;1[; x = E(x) + r$

On a : $2x = 2E(x) + 2r$ donc : $E(2x) = 2E(x) + E(2r)$

Et on a : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(x) + E\left(E(x) + r + \frac{1}{2}\right) = 2E(x) + E\left(r + \frac{1}{2}\right)$

1er cas : $0 \leq r < \frac{1}{2}$:

On a : $0 \leq 2r < 1$ et $\frac{1}{2} \leq r + \frac{1}{2} < 1$ d'où : $E\left(r + \frac{1}{2}\right) = E(2r) = 0$

Par suite : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2E(x) = E(2x)$

c'est-à-dire : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

2ème cas $\frac{1}{2} \leq r < 1$: On a : $1 \leq 2r < 2$ et $1 \leq r + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ d'où : $E(2r) = 1$ et $E\left(r + \frac{1}{2}\right) = 1$

par suite : $E(2x) = 2E(x) + 1$ et $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2E(x) + 1$

Signifie que : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

D'où : $(\forall x \in IR); E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$ (5)

b- Soit $k \in \{0; 1; ...; n\}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right)$

$= E\left(\frac{x}{2^k}\right) - E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$ (d'après la relation (5))

Donc : $\sum_{k=0}^{n} E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(E\left(\frac{x}{2^k}\right) - E\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) = E\left(\frac{x}{2^0}\right) - E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = E(x) - E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

7) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations :

• (1) Résolvons l'équation : $E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2$

Soit $x \in \mathbb{R} : E\left(\frac{x-1}{2}\right) = -2 \iff -2 \leq \frac{x-1}{2} < -1$

$\iff -4 \leq x - 1 < -2$

$\iff -3 \leq x < -1$

Donc : $S = [-3; 1[$

• (2) Résolvons l'équation : $E(2x) = x - 1$

On a : $E(2x) = x - 1 \iff x - 1 \leq 2x < x$ et $x - 1 \in \mathbb{Z}$

$\iff x - 1 \leq 2x$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $x < 0$

$\iff -1 \leq x$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $x < 0$

$\iff -1 \leq x < 0$ et $x \in \mathbb{Z}$

$\iff x = -1$

Donc : $S = \{-1\}$.

(3) Résolvons l'équation : $E\left(\frac{1}{x}\right) = 3$

* L'ensemble de définition de l'équation est $D = \mathbb{R}^*$:

Soit $x \in D$, on a : $E\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \iff 3 \leq \frac{1}{x} < 4$

$\iff \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$

Donc : $S = \left]\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$

(4) $E(x) + |x - 1| = x$, en utilisant le raisonnement par disjonction des cas :

- 1er cas : $x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire : $x \geq 1$

$E(x) + |x - 1| = x \iff E(x) + x - 1 = x$

$\iff E(x) = 1$

$\iff x \in [1; 2[$

- 2ème cas : $x - 1 \leq 0$ c'est-à-dire : $x \leq 1$

$$E(x) + |x-1| = x \Leftrightarrow E(x) + 1 - x = x$$
$$\Leftrightarrow E(x) = 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 \leq x < 2x \text{ et } 2x - 1 \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \text{ et } 2x \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Donc : $S = [1;2[\cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 88

Montrons que par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = 0$ et $(-1)^0 \times \frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$

et montrons que : $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a : $\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2\right) + (-1)^{n+1}(n+1)^2$

$= (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2$ (D'après l'hypothèse de récurrence)

$= (-1)^{n+1}\left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right)$ (car $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$

$= (-1)^{n+1}\left(\frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2}\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(\frac{(n+1)(2(n+1) - n)}{2}\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$, d'où d'après le principe de la récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 89

Montrons que par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$$

• Initialisation :

Pour $n = 1$,

on a : $\sum_{k=1}^{1} k5^k = 1 \times 5^1 = 5$ et $\frac{5+(4\times 1-1)5^2}{16} = \frac{80}{16} = 5$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que : $\sum_{k=1}^{n} k.5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

et montrons que : $\sum_{k=1}^{n+1} k.5^k = \frac{5+(4(n+1)-1)5^{n+2}}{16}$

$$= \frac{5+(4n+3)5^{n+2}}{16}$$

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k.5^k = \left(\sum_{k=1}^{n} k.5^k =\right) + (n+1).5^{n+1}$

$$= \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16} + (n+1).5^{n+1}$$

$$= \frac{5+(4n-1).5^{n+1}+16(n+1)5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5+5^{n+1}(4n-1+16n+16)}{16}$$

$$= \frac{5+5^{n+1}(20n+15)}{16}$$

$$= \frac{5+5^{n+2}(4n+3)}{16}$$

(D'après l'hypothèse de récurrence)

Donc la propriété est vraie pour $n+1$, d'où d'après le principe de la récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} k.5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

Exercice 90

Montrons que $3n^5 + 5n^3 + 7n$ est un multiple de 15 pour tout entier naturel.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $3(0)^5 + 5(0)^3 + 7 \times 0 = 0$

et 0 est un multiple de 115, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $3n^5 + 5n^3 + 7n$ est un multiple de 15 c'est-à-dire :

$(\exists k \in \mathbb{N}); 3n^5 + 5n^3 + 7n = 15k$

Montrons que : $3(n+1)^5 + 5(n+1)^3 + 7(n+1)$ est un multiple de 15.

On a : $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

et

$$\begin{aligned}(n+1)^5 &= (n+1)^3 \times (n+1)^2 \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)(n^2 + 2n + 1) \\ &= n^5 + 2n^4 + n^3 + 3n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 3n^3 + 6n^2 + 3n + n^2 + 2n + 1 \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}3(n+1)^5 + 5(n+1)^3 + 7(n+1) &= 3n^5 + 15n^4 + 30n^3 + 30n^2 + 15n + 3 + 5n^3 + 15n^2 + 15n + 5 + 7n + 7 \\ &= 3n^5 + 5n^3 + 7n + 15n^4 + 30n^3 + 45n^2 + 30n + 15 \\ &= 15k + 15(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1) \\ &= 15k' \text{ où } k' \\ &= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

D'où : $(\exists k' \in \mathbb{N}); 3(n+1)^5 + 5(n+1)^3 + 7(n+1) = 15k'$

par suite la propriété est vraie pour $n + 1$

Donc d'après le principe de la récurrence, le nombre $3n^5 + 5n^3 + 7n$ est divisible par 15 pour tout entier naturel n

2 Leçon — Les ensembles

Maxi.

Résumé

1 Inclusion et égalité de deux ensembles :

- Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
- On dit que A est inclus dans B si chaque élément de A est un élément de B, on note $A \subset B$.

Ainsi : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A ; x \in B$

ou encore : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

- $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$

$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Remarques :

1) A n'est pas inclus dans B $(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in A ; x \notin B)$.

2) $\phi \subset E$ (E est un ensemble quelconque).

3) $A \subset A$.

2 Ensembles des parties d'un ensemble :

- Soit E un ensemble.

On appelle ensemble des parties de E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E.

C'est-à-dire : $\mathcal{P}(E) = \{A / A \subset E\}$

Ainsi : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

Remarques :

1) $\phi \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$

2) $\{\phi\} \subset \mathcal{P}(E)$

3) $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$

Propositions 1 :

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors : $A \subset C$.

2) $(A \subset B$ et $B \subset A) \Leftrightarrow A = B$.

3 Le complémentaire d'une partie d'un ensemble :

• Soit A une partie d'un ensemble E.

L'ensemble $\{x \in E / x \notin A\}$ est appelé le complémentaire de A dans E, on le note : C_E^A ou $\overline{A}$.

Ainsi : $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$. ou encore: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Propositions 2 :

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1) $C_E^{\phi} = E$; $C_E^E = \phi$; $C_E^{\overline{A}} = A$.

2) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Exercices

Exercice 1

Déterminer en extension les ensembles suivants :

$A = \left\{x \in \mathbb{N} / \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 1} \in \mathbb{Z}\right\}$

$B = \left\{x \in \mathbb{Z} / |2x - 1| < \frac{3}{2}\right\}$

$C = \left\{x \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[/ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{4};(k \in \mathbb{Z})\right\}$

$D = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - 4y^2 = 12\}$

Exercice 2

Déterminer en extension l'ensemble suivant :

$E = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\}$

Exercice 3

1) Soit les deux ensembles :

$E = \left\{x \in \mathbb{R} / \left|x - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{3}{2}\right\}$; $F = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 1| > 2\}$

a- Montrer que : $E = \left[-\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right]$

b- Montrer que : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\subset F$

2) Déterminer l'ensemble : $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{x+1}\right\}$

Exercice 4

Soit les deux ensembles : $A = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $E = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1) Montrer que : $A \subset E$.

2) A-t-on $A = E$?

Exercice 5

On considère l'ensemble suivant : $A = \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} / (x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$

1) Montrer que : $0 \notin A$ et que : $\frac{1}{2} \in A$.

2) Montrer que : $A \subset]0;1]$.

Exercice 6

Soit A, B et D trois ensembles.

Montrer que si $A \subset B$ et $B \subset D$ et $D \subset A$ alors : $A = B = D$.

Exercice 7

On considère l'ensemble suivant : $E = \left\{(x;y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}\right\}$

1) a- Vérifier que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*); (x;y) \in E \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$

b- Déterminer en extension l'ensemble E.

2) Soit A une partie de l'ensemble E telle que : $A = \{(10;10),(6;30)\}$

Déterminer $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 8

On considère les ensembles A et B définis par :

$A = \{(x^2 - 2x + 2; x) / x \in [1; +\infty[\}$ et $B = \{(x; 1 + \sqrt{x-1}) / x \in [1; +\infty[\}$

Montrer que : $A = B$.

Exercice 9

On considère les ensembles E et F tels que :

$$E = \{(x; \sqrt{x+1}) / x \in [-1; +\infty[\} \text{ et } F = \{(x^2 - 1; x) / x \in \mathbb{R}^+\}$$

Montrer que : $E = F$

Exercice 10

Soit $I = \left\{\frac{2x}{1+x^2} / x \in \mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que : $\frac{\sqrt{2}}{2} \in I$ et $2 \notin I$.

2) Montrer que : $I \subset [-1;1]$.

3) Montrer que : $(\forall y \in [-1;1]) ; (\exists x \in \mathbb{R}) ; y = \frac{2x}{1+x^2}$ et en déduire que : $I = [-1;1]$.

Exercice 11

Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que: $a<b$.

Montrer que : $[a;b]=\{tb+(1-t)a/t\in[0;1]\}$

Exercice 12

On considère l'ensemble suivant:

$$E=\{x+y\sqrt{2}/(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \text{ et } x^2-2y^2=1\}$$

1) Montrer que : $E\neq\phi$ et que: $0\notin E$.

2) Soit a et b deux éléments de E.

Montrer que : $\frac{1}{a}\in E$ et $ab\in E$.

3) Soit a un élément de E tel que : $a=x+y\sqrt{2}$ et $(x;y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

Montrer que : $a>1 \Leftrightarrow y>0$.

Solutions

Exercice 1

Déterminons en extension les ensembles suivants :

- $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{x^2-2x+6}{x-1}=\frac{(x-1)^2+5}{x-1}$

$$=x-1+\frac{5}{x-1}$$

Donc : $\frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{x-1}\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x-1/5$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\in\{-5;-1;1;5\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-4;0;2;6\}$$

Comme $x\in\mathbb{N}$ alors : $A=\{0;2;6\}$

- $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/|2x-1|<\frac{3}{2}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{Z}$, on a : $|2x-1|<\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<2x-1<\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<2x<\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ (car } x\in\mathbb{Z})$$

D'où : $B=\{0;1\}$

• $C=\left\{x\in\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[/ x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{4};(k\in\mathbb{Z})\right\}$

On a : $x\in C \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})\ x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{4}$ et $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$

et on a : $-\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{4}<\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\frac{2}{3}+\frac{k}{4}<1$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{6}<\frac{k}{4}<\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{14}{3}<k<\frac{4}{3}$$

Comme $k\in\mathbb{Z}$ alors : $k\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$

et donc : $C=\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{12};\frac{2\pi}{3};\frac{11\pi}{12}\right\}$

• $D=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2 / x^2-4y^2=12\}$

Soit $(x;y)\in\mathbb{N}^2$

On a : $x^2-4y^2=12 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y)=12$ et on a : $x-2y\leq x+2y$

Donc : $(1)\begin{cases}x-2y=1\\x+2y=12\end{cases}$ ou $(2)\begin{cases}x-2y=2\\x+2y=6\end{cases}$ ou $(3)\begin{cases}x-2y=3\\x+2y=4\end{cases}$

$(1)\begin{cases}2x=13\\x+2y=12\end{cases}$; donc le système (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

$(2)\begin{cases}2x=8\\x+2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$

$(3)\begin{cases}2x=7\\x+2y=4\end{cases}$; donc le système (3) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

D'où : $D=\{(4;1)\}$

Exercice 2

Déterminons en extension l'ensemble suivant :

$$E=[(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / x^2+xy-2y^2=-5]$$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, on a :

$(x;y)\in E \Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=-5$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)+(xy-y^2)=-5$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+y(x-y)=-5$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=1\\x+2y=-5\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x-y=-5\\x+2y=1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x-y=-1\\x+2y=5\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x-y=5\\x+2y=-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x=-1 \text{ et } y=-2)$ ou $(x=-2 \text{ et } y=2)$ ou $(x=1 \text{ et } y=2)$ ou $(x=3 \text{ et } y=-2)$

Donc : $E=\{(-1;-2);(-2;2);(1;2);(3;-2)\}$

Exercice 3

1) a- On a : $E=\left\{x\in\mathbb{R}/\left|x-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{3}{2}\right\}$

Montrons que : $E=\left[-\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right]$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in E \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq x-\frac{3}{4}\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\leq x\leq\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right]$$

Donc : $E=\left[-\frac{3}{4};\frac{9}{4}\right]$

b- On a : $F=\{x\in\mathbb{R}/|2x-1|>2\}$

Montrons que : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\subset F$

Soit $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$, on a : $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\Rightarrow x<-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2x<-1$$

$$\Rightarrow 2x-1<-2$$

$$\Rightarrow |2x-1|>2$$

$$\Rightarrow x\in F$$

Donc : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\subset F$

2) On a : $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{1}{2}\leq\frac{x-1}{x+1}\right\}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{x-1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow 0\leq\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\frac{2x-2-x-1}{2(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\frac{x-3}{2(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[3;+\infty\right[$$

Donc : $A=\left]-\infty;-1\right[\cup\left[3;+\infty\right[$

Exercice 4

On a: $A=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

$E=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrons que : $A\subset E$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in A \Rightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})/x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})/x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})/x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})/x=\frac{\pi}{2}+\frac{(3k-1)\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (\exists k'\in\mathbb{Z})/x=\frac{\pi}{2}+\frac{k'\pi}{3} \text{ (où } k'=3k-1 \text{ et } k'\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x\in E$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) ; x\in A\Rightarrow x\in E$

D'où : $A\subset E$

2) A-t-on $E=A$?

On a : $\frac{\pi}{2}\in E$ et $\frac{\pi}{2}\notin A$

En effet : s'il existe $k\in\mathbb{Z}$: $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi$

Alors : $k=\frac{1}{3}$ ce qui est absurde et par suite, on a seulement $A\subsetneq E$ c'est-à-dire : $A\subset E$ et $A\neq E$.

Exercice 5

1) Montrons que : $0\notin A$ en utilisant le raisonnement par l'absurde.

On suppose que : $0\in A$

On a : $0\in A \Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* / \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}=0$

$$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* / \frac{x+y-1}{xy}=0$$

$$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* / x+y=1$$

Puisque : $(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ alors : $x\geq 1$ et $y\geq 1$, c'est-à-dire : $x+y\geq 2$, ce qui est contradictoire avec le fait que : $x+y=1$.

Donc : $0\notin A$

* Montrons que : $\frac{1}{2}\in A$

On a : $\frac{1}{2} \in A \Leftrightarrow (\exists(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (\exists(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) / \frac{x+y-1}{xy} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (\exists(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) / 2x + 2y - xy = 2$$
$$\Leftrightarrow (\exists(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) / x(2-y) + 2(y-2) + 4 = 2$$
$$\Leftrightarrow (\exists(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) / (x-2)(y-2) = 2$$

Pour $x = 3$ et $y = 4$, on a la dernière proposition est vraie, donc la proposition : $\frac{1}{2} \in A$ est vraie.

D'où : $\frac{1}{2} \in A$

2) Montrons que : $A \subset]0;1]$

Il suffit de montrer que : $(\forall(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)\ :\ 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq 1$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{x+y-1}{xy}$

Puisque : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ alors : $x \geq 1$ et $y \geq 1$, donc : $x + y \geq 2$

D'où : $x + y > 1$ c'est-à-dire : $x + y - 1 > 0$ et $xy > 0$

Ainsi : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} > 0$ (1)

D'autre part, on a : $1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy}\right) = \frac{xy - x - y + 1}{xy} = \frac{x(y-1) - (y-1)}{xy}$

$$= \frac{(y-1)(x-1)}{xy}$$

Puisque : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ alors: $x - 1 \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$

Donc : $\frac{(x-1)(y-1)}{xy} \geq 0$, d'où : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq 1$ (2)

Par suite, de (1) et (2), on déduit que :

$(\forall(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \leq 1$

Donc : $A \subset]0;1]$

Exercice 6

Soit A, B et D trois ensembles, si $A \subset B$ et $B \subset D$ et $D \subset A$.

On a : $\begin{cases} A \subset B \\ \quad et \\ B \subset D \end{cases}$ donc : $A \subset D$

On a : $A \subset D$ et $D \subset A$ d'où : $A = D$

et on a : $A \subset B$ et $B \subset D$ c'est-à-dire : $A \subset B$ et $B \subset A$

donc : $A = B$ et par suite : $A = B = D$.

Exercice 7

1) a- Vérifions que : $(\forall(x;y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) ; (x;y) \in E \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, on a :

$$\begin{aligned}(x;y) \in E &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}\\ &\Leftrightarrow 5x + 5y - xy = 0\\ &\Leftrightarrow x(5-y) + 5(y-5) + 25 = 0\\ &\Leftrightarrow (y-5)(5-x) = -25\\ &\Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25\end{aligned}$$

Donc : $(\forall(x;y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$; $(x;y) \in E \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$

b- Déterminons en extension l'ensemble E :

On a d'après la question précédente : $x-5$ et $y-5$ sont des diviseurs du nombre 25 dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et pour faciliter l'obtention des éléments E, on se sert du tableau ci-dessous :

$x-5$	1	5	25	-1	-5	-25
$y-5$	25	5	1	-25	-5	-1
x	6	10	30	4	0	-20
y	30	10	6	-20	0	4
					ce cas est impossible	

Donc : $E = \{(6;30);(10;10);(30;6);(4;-20);(-20;4)\}$

2) Déterminons $\mathscr{P}(A)$:

On a : $\mathscr{P}(A) = \{\phi;\{(10;10)\};\{(6;30)\};A\}$.

Exercice 8

Montrons que : $A = B$

Pour cela, on montre que : $A \subset B$ et $B \subset A$

Montrons que $A \subset B$

Soit $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 2;x) &= ((x-1)^2 + 1;x) = ((x-1)^2 + 1;1 + (x-1))\\ &= ((x-1)^2 + 1;1 + (x-1)) = \left((x-1)^2 + 1;1 + \sqrt{(x-1)^2}\right)\\ &= \left((x-1)^2 + 1;1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1 - 1}\right)\end{aligned}$$

En posant $y=(x-1)^2+1$, on a : $y \in [1;+\infty[$ et

$(x^2-2x+2;x)=(y;1+\sqrt{y-1})$ et $(y;1+\sqrt{y-1}) \in B$

Donc : $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $(x^2-2x+2;x) \in B$ d'où : $A \subset B$

Montrons que $B \subset C$

Soit $x \in [1;+\infty[$, on a :

$(x;1+\sqrt{x-1})=((1+\sqrt{x-1})^2-2(1+\sqrt{x-1})+2;1+\sqrt{x-1})$

En posant $y=1+\sqrt{x-1}$, on a : $y \in [1;+\infty[$

et $(x;1+\sqrt{x-1})=(y^2-2y+2;y)$ et $(y^2-2y+2;y) \in A$

Donc : $(\forall x \in [1;+\infty[)$; $(x;1+\sqrt{x-1}) \in A$, d'où : $B \subset A$, par suite : $A=B$.

Exercice 9

Pour montrer que $E=F$, il suffit de montrer que : $E \subset F$ et $F \subset E$.

- Montrons que : $E \subset F$

Soit $x \in [-1;+\infty[$, on a : $(x;\sqrt{x+1})=((\sqrt{x+1})^2-1;\sqrt{x+1})$

En posant $y=\sqrt{x+1}$, on a : $y \in \mathbb{R}^+$ et $(x;\sqrt{x+1})=(y^2-1;y)$

donc : $(x;\sqrt{x+1}) \in F$

D'où : $(\forall x \in [-1;+\infty[);(x;\sqrt{x+1}) \in F$

Par suite : $E \subset F$ (1)

- Montrons que : $F \subset E$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $y=x^2-1$, on a : $y \in [-1;+\infty[$

et $(x^2-1;x)=(y;\sqrt{y+1})$ donc : $(y;\sqrt{y+1}) \in E$

c'est-à-dire : $(x^2-1;x) \in E$ D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);(x^2-1;x) \in E$

Par suite : $F \subset E$ (2)

De (1) et (2), on en déduit que : $E=F$.

Exercice 10

On a : $I=\left\{\frac{2x}{1+x^2} / x \in \mathbb{R}\right\}$

1) • Montrons que : $2 \notin I$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

On a : $\frac{2x}{1+x^2}=2 \Leftrightarrow x=x^2+1$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1=0$$

Le discriminant de x^2-x+1 est : $\Delta=-3$ et $\Delta<0$.

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});2\neq\dfrac{2x}{x^2+1}$ et par suite : $2\notin I$

• Montrons que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in I$:

Existe-t-il x de $\mathbb{R}$ tel que: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2x}{1+x^2}$?

Soit $x\in\mathbb{R}$; On a : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2x}{1+x^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow x^2+1=2\sqrt{2}x$$
$$\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+1=0$$

Pour l'équation $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$, on a : $\Delta=8-4=4$

Donc : $x_1=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$ et $x_2=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$

Ainsi : $(\exists x\in\mathbb{R})/\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2x}{1+x^2}$ et par suite : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in I$

2) Montrons que $I\subset[-1;1]$:

Soit $a\in I$, donc : $(\exists x\in\mathbb{R});a=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$$a\in[-1;1]\Leftrightarrow -1\leq a\leq 1$$
$$\Leftrightarrow -1\leq\frac{2x}{1+x^2}\leq 1$$
$$\Leftrightarrow\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1$$
$$\Leftrightarrow 2|x|\leq x^2+1$$
$$\Leftrightarrow 0\leq x^2-2|x|+1$$
$$\Leftrightarrow 0\leq(|x|-1)^2$$

et comme $(|x|-1)^2\geq 0$, alors : $a\in[-1;1]$

Donc : $\forall a\in I$; $a\in[-1;1]$ C'est-à-dire : $I\subset[-1;1]$

3) Soit $y\in[-1;1]$, existe-t-il $x\in\mathbb{R}$ tel que : $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$?

On a : $\dfrac{2x}{1+x^2}=y\Leftrightarrow 2x=y+yx^2$

$$\Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$$

Si $y=0$ alors : $x=0$

Si $y\neq 0$ alors : $\Delta=4-4y^2=4(1-y^2)$

comme $-1\leq y\leq 1$ alors : $\Delta\geq 0$

D'où : $(\exists x\in\mathbb{R})/y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

Ainsi : $(\forall y \in [-1;1])$; $(\exists x \in \mathbb{R}) / y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

et par suite : $[-1;1] \subset I$

et comme on a : $I \subset [-1;1]$

Alors : $I = [-1;1]$.

Exercice 11

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$.

Montrons que : $[a;b] = \{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\}$

• Soit $x \in [a;b]$.

On a : $x \in [a;b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x - a \leq b - a$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1 \qquad (\text{car } b - a > 0)$$

Posons $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ on a bien : $t \in [0;1]$ et $(b-a)t = x - a$ soit $x = a + tb - ta$

Donc : $x = (1-t)a + tb$

Ainsi : $x \in \{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\}$

Donc : $[a;b] \subset \{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\}$

• Soit $y \in \{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\}$

Donc : $\exists t \in [0;1]; y = tb + (1-t)a$

on a : $y - a = tb - ta = t(b-a)$

comme $b - a > 0$ et $t \geq 0$ alors : $t(b-a) \geq 0$

Donc : $y - a \geq 0$ c'est-à-dire : $y \geq a$

On a : $y - b = tb + (1-t)a - b$

$$= (1-t)a - (1-t)b$$

$$= (1-t)(a-b)$$

On a : $1 - t \geq 0$ et $a - b < 0$

Donc : $(1-t)(a-b) \leq 0$

Ainsi : $y - b \leq 0$ c'est-à-dire : $y \leq b$

D'où : $a \leq y \leq b$ c'est-à-dire : $y \in [a;b]$

Par suite : $\{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\} \subset [a;b]$

D'où : $[a;b] = \{tb + (1-t)a / t \in [0;1]\}$.

Exercice 12

1) • Montrons que : $E \neq \phi$

On a : $1 \in E$ pour $x = 1$ et $y = 0$

Car $(1;0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $(1)^2 - 2(0)^2 = 1$, donc : $E \neq \phi$

• Montrons que : $0 \notin E$ en utilisant le raisonnement par l'absurde.

Supposons que : $0 \in E$

On a : $0 \in E \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / x + y\sqrt{2} = 0$ et $x^2 - 2y^2 = 1$

- Si $y = 0$ alors : $x = 0$ car : $x + y\sqrt{2} = 0$, donc la condition $x^2 - 2y^2 = 1$ n'est pas vérifiée.

- Si $y \neq 0$ alors : $\frac{x}{y} = -\sqrt{2}$ et cela est impossible

car $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc dans les deux cas, il n'existe aucun couple $(x;y)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui vérifie : $x + y\sqrt{2} = 0$ et $x^2 - 2y^2 = 1$ d'où : $0 \notin E$

2) Soit a et b deux éléments de E tels que : $a = x + y\sqrt{2}$ et $b = x' + y'\sqrt{2}$ et $x^2 - 2y^2 = 1$ et $x'^2 - 2y'^2 = 1$ avec: $(x;y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $(x';y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

• On a : $\frac{1}{a} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})}$

$$= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = x - y\sqrt{2} \quad (\text{car: } x^2 - 2y^2 = 1)$$

En posant : $x_1 = x$ et $y_1 = -y$, on a : $\frac{1}{a} = x_1 + y_1\sqrt{2}$ avec $(x_1;y_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

et $x_1^2 - 2y_1^2 = x^2 - 2(-y)^2 = x^2 - 2y^2 = 1$ donc : $\frac{1}{a} \in E$

• On a : $a.b = (x + y\sqrt{2})(x' + y'\sqrt{2}) = xx' + xy'\sqrt{2} + x'y\sqrt{2} + 2yy'$

$$= (xx' + 2yy') + (xy' + x'y)\sqrt{2}$$

Puisque : $(xx' + 2yy';xy' + x'y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

et : $(xx' + 2yy')^2 - 2(xy' + x'y)^2 = x^2x'^2 + 4xx'yy' + 4y^2y'^2 - 2x^2y'^2 - 4xx'yy' - 2x'^2y^2$

$$= x^2(x'^2 - 2y'^2) - 2y^2(x'^2 - 2y'^2)$$

$$= x^2 - 2y^2 = 1$$

Donc : $a.b \in E$

3) Soit a un élément de E tel que : $a = x + y\sqrt{2}$ et $(x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

Montrons que : $a > 1 \Leftrightarrow y > 0$

On a : $a > 1 \Rightarrow a^2 > 1$

$$\Rightarrow x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{2}xy > 1$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 1 + 2y^2 + 2\sqrt{2}xy > 1 \text{ (car } x^2 - 2y^2 = 1)$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 2\sqrt{2}xy > 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}y(x + \sqrt{2}y) > 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}.y.a > 0$$

$$\Rightarrow y > 0 \qquad \text{(car } a > 1)$$

Réciproquement, on a : $y > 0 \Rightarrow y \geq 1$ (car $y \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow y\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x + y\sqrt{2} \geq \sqrt{2} \text{ (car } x \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a > 1 \qquad \text{(car } \sqrt{2} > 1)$$

Donc : $a > 1 \Leftrightarrow y > 0$

4 Intersection - Réunion de deux ensembles :

Soit A et B deux ensembles.

1) L'intersection des ensembles A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble $\{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Ainsi : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

2) La réunion des ensembles A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble $\{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Ainsi : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

Propriétés :

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3) $A \cap \overline{A} = \phi$ et $A \cup \overline{A} = E$.

4) $A \cap \phi = \phi$ et $A \cup \phi = A$

5) $A \cap E = A$ et $A \cup E = E$

6) Distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

7) Lois de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Remarques :

1) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

2) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

3) $X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y$ et $X \cap Y = X$

4) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

5 Différence de deux ensembles :

• La différence des ensembles A et B dans cet ordre, notée $A \backslash B$ est définie par : $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B$

Propriétés :

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1) $A \backslash B = \{x \in E / x \in A$ et $x \in B\}$ ou encore $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

2) $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$

3) $E \backslash A = \overline{A}$

6 Produit cartésien :

Soit E et F deux ensembles non vides.

Le produit cartésien des ensembles E et F, noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

• $(x;y) \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E$ et $y \in F)$.

• $E \times F = \{(x;y) / x \in E$ et $y \in F\}$.

de même : $E \times F \times G = \{(x;y;z) / x \in E$ et $y \in F$ et $z \in G\}$.

$E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(x;y;z)$ tels que : $x \in E$; $y \in F$ et $z \in G$.

Remarques :

1) $E\times E$ se note E^2 et $E\times E\times E$ se note E^3 et $\underbrace{E\times E\times ...\times E}_{n\ fois}$ se note E^n $(n\in \mathbb{N}^*-\{1\})$

E^n est l'ensemble des n-uplets $(x_1;x_2;...x_n)$ ou $x_i\in E(i\in\{1;2;...;n\})$.

2) $E\times F=\phi \Leftrightarrow E=\phi$ ou $F=\phi$.

Exercices

Exercice 13

Déterminer les ensembles E et F tels que :

$E\cap F=\{2;3;4\}$ et $E\cup F=\{1;2;3;4;5\}$ et $1\notin F\setminus E$ et $5\notin E\setminus F$.

Exercice 14

On considère les ensembles A et B tels que :

$A=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Montrer que : $A\cap B=\phi$

Exercice 15

On considère les ensembles E et F définis par :

$E=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Montrer que : $E\cap F=E$

Exercice 16

Soit les deux ensembles : $A=\left\{\frac{2k+1}{4}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{\frac{5m+1}{3}/m\in\mathbb{Z}\right\}$.

1) Vérifier que : $B\cap\mathbb{N}\neq\phi$

2) Montrer que : $A\cap B=\phi$

Exercice 17

Soit A, B et C les trois ensembles suivants :

$A=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$B=\left\{\frac{5\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$C=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\cap B=\phi$

2) Montrer que : $A\cup B=C$

Exercice 18

Soit A, B et C les trois ensembles suivants :

$A=\left\{\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$B=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$C=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{6}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

1) Montrer que : $A\subset B$

2) Montrer que : $B\cap C=\phi$

Exercice 19

Soit E et F les deux ensembles définis par :

$E=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x-7}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{x\in\mathbb{Z}/\frac{x-1}{x-7}\in\mathbb{Z}\right\}$

1) a- Soit $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $(x\in E\Leftrightarrow(x-1)/6)$

b- En déduire E en extension.

2) Déterminer F en extension.

3) Déterminer $E\cap F$.

(NB: a/b **c'est-à-dire** a **divise** b)

Exercice 20

Déterminer les ensembles suivants :

1) $A=\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$

2) $B=\mathbb{R}\setminus[0;1[$

3) $C=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\setminus\mathbb{Z}$

Exercice 21

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

Simplifier X ; Y et Z sachant que :

1) $X=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$

2) $Y=A\cup(B\setminus A)$

3) $Z=A\setminus(A\cap\overline{B})$

Solutions

Exercice 13

On a : $E \cap F \subset E$ et $E \cap F \subset F$, donc : $\{2;3;4\} \subset E$ et $\{2;3;4\} \subset F$

Et on a : $1 \notin F \setminus E$, signifie que : $1 \notin F$ et $1 \in E \cup F$, donc : $1 \in E$

Et on a : $5 \notin E \setminus F$, signifie que : $5 \notin E$ et $5 \in E \cup F$, donc : $5 \in F$

D'où : $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{2, 3, 4, 5\}$

Si on vérifie ces résultats, on trouve que : $E \cap F = \{2, 3, 4\}$ et $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $1 \notin F \setminus E$ et $5 \notin E \setminus F$.

Exercice 14

Montrons que : $A \cap B = \phi$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$

$$\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right)$$

$$\text{et } \left(\exists k' \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k'\pi}{5}\right)$$

$$\iff (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k'\pi}{5}$$

$$\iff (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{2k}{5} - \frac{2k'}{5} = \frac{1}{4}$$

$$\iff (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / k - k' = \frac{5}{8}$$

La proposition $(\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / k - k' = \frac{5}{8}$ est une proposition fausse, donc il n'existe aucun réel x qui vérifie : $x \in A \cap B$, d'où : $A \cap B = \phi$.

Exercice 15

Montrons que : $E \cap F = E$

Pour cela, il suffit de montrer que : $E \subset F$ (car : $E \cap F = E \iff E \subset F$)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in E \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{10} + \frac{(2 + 10k)\pi}{5}$$

En posant : $k' = 2 + 10k$

On a : $k \in \mathbb{Z}$ d'où : $k' \in \mathbb{Z}$

donc : $x \in E \Rightarrow (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{10} + \frac{k'\pi}{5}$

$$\Rightarrow x \in F$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x \in E \Rightarrow x \in F$, c'est-à-dire : $E \subset F$, par suite : $E \cap F = E$.

Exercice 16

1) Vérifions que : $B \cap \mathbb{N} \neq \phi$

On remarque que pour $m = 1$, on a : $\frac{5m+1}{3} = \frac{5+1}{3} = 2$

donc : $2 \in B$ et $2 \in \mathbb{N}$ signifie que : $2 \in B \cap \mathbb{N}$.

D'où : $B \cap \mathbb{N} \neq \phi$

2) Montrons que $A \cap B = \phi$

On a : $A \subset \mathbb{Q}$ et $B \subset \mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{Q}$, on a : $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{2k+1}{4}$$

$$\text{et } (\exists m \in \mathbb{Z}) / x = \frac{5m+1}{3}$$

$$\Rightarrow (\exists (k;m) \in \mathbb{Z}^2) / \frac{2k+1}{4} = \frac{5m+1}{3}$$

$$\Rightarrow (\exists (k;m) \in \mathbb{Z}^2) / 6k + 3 = 20m + 4$$

$$\Rightarrow (\exists (k;m) \in \mathbb{Z}^2) / 2(3k - 10m) = 1$$

$$\Rightarrow (\exists (k;m) \in \mathbb{Z}^2) / 3k - 10m = \frac{1}{2}$$

Puisque : $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors : $(3k - 10m) \in \mathbb{Z}$

et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc la dernière proposition est fausse et par suite, il n'existe aucun rationnel qui appartient à l'ensemble $A \cap B$, d'où : $A \cap B = \phi$.

Exercice 17

1) Montrons que : $A \cap B = \phi$

On a : $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ et $C \subset \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{et } (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\Rightarrow (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\Rightarrow (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / k - k' = \frac{1}{2}$$

Puisque : $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ alors : $(k - k') \in \mathbb{Z}$ et on a : $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Donc la dernière proportion est fausse, ce qui veut dire qu'il n'existe aucun nombre réel qui appartient à l'ensemble $A \cap B$ d'où : $A \cap B = \phi$.

2) Montrons que : $A \cup B = C$

Pour cela, on montre que : $A \cup B \subset C$ et $C \subset A \cup B$.

• Montrons que : $A \cup B \subset C$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})/x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ou } (\exists k' \in \mathbb{Z})/x = \frac{5\pi}{3} + 2k'\pi$$

$$\Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{Z})/x = \frac{2\pi}{3} + k_1\pi$$

$$\text{ou } (\exists k_2 \in \mathbb{Z})/x = \frac{2\pi}{3} + k_2\pi$$

En posant : $k_1 = 2k$ ou $k_2 = 2k' + 1$ avec $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$

donc : $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$

D'où : $A \cup B \subset C$

• Montrons que : $C \subset A \cup B$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in C \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})/x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

On va distinguer deux cas :

1er cas : k est pair.

k est pair $\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/k = 2k'$

Et donc : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$ d'où : $x \in A$

2ème cas : k impair

k est impair $\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z}/k = 2k'' + 1$

et donc : $x = \frac{2\pi}{3} + (2k'' + 1)\pi = \frac{2\pi}{3} + \pi + 2k''\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k''\pi$

d'où : $x \in B$

En conclusion, on a : $x \in C \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$

$$\Rightarrow x \in A \cup B$$

D'où : $C \subset A \cup B$

Par suite : $A \cup B = C$

Exercice 18

1) Montrons que : $A \subset B$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})/x = \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})/x = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$$
$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{4} + \frac{2(k+1)\pi}{6}$$

En posant : $k' = 2(k+1)$, on a : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k'\pi}{6}$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

Donc : $x \in B$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x \in A \Rightarrow x \in B$, signifie que : $A \subset B$

2) Montrons que : $B \cap C = \phi$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B$ et $x \in C$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$$
$$\text{et } (\exists k' \in \mathbb{Z}) / x = \frac{\pi}{3} + \frac{k'\pi}{6}$$
$$\Rightarrow (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{k'\pi}{6}$$
$$\Rightarrow (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / \frac{k-k'}{6} = \frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow (\exists (k;k') \in \mathbb{Z}^2) / k - k' = \frac{1}{2}$$

On a : $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ donc : $k - k' \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

d'où : la dernière proposition est fausse, par suite, il n'existe aucun nombre réel appartenant à l'ensemble $B \cap C$.

Donc : $B \cap C = \phi$.

Exercice 19

1) Montrons que : $(x \in E \Leftrightarrow (x-1) | 6)$

Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a : $x \in E \Leftrightarrow \frac{x-7}{x-1} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-6}{x-1} \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{6}{x-1} \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{x-1} \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x-1 | 6$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; x \in E \Leftrightarrow (x-1) | 6$

b- Déduisons E en extension:

D'après a), on a : $x \in E \Leftrightarrow (x-1)|6$

$$\Leftrightarrow (x-1) \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{-5;-2;-1;0;2;3;4;7\}$$

Donc : $E=\{-5;-2;-1;0;2;3;4;7\}$

2) Déterminons F en extension:

Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a : $x \in F \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-7} \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-7+6}{x-7} \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{6}{x-7} \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow (x-7)|6$$
$$\Leftrightarrow (x-7) \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{1;4;5;6;8;9;10;13\}$$

Donc : $F=\{1;4;5;6;8;9;10;13\}$

3) Déterminons $E \cap F$:

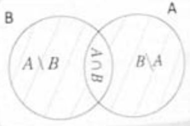
On a d'après ce qui précède : $E \cap F = \phi$

Exercice 20

1) Déterminons A :

On a : $A=\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}=\{x \in \mathbb{Z} / x \notin \mathbb{N}\}=\{-1;-2;-3;...\}$

Donc : $A=\mathbb{Z}^{*-}$



2) Déterminons B :

On a : $B=\mathbb{R} \setminus [0;1[=\{x \in \mathbb{R} / x \notin [0;1[\}$
$=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$

3) Déterminons C :

$$C=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \setminus \mathbb{Z}=\left\{x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] / x \notin \mathbb{Z}\right\}$$
$$=\left\{x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] / x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\right\}$$

Donc : $C=\left[-\frac{3}{2};-1\right[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right]$ ou $C=\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]-\{-1;0;1\}$.

Exercice 21

1) Simplifions X :

On a : $X=(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$
$=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap E=A$ (car $A\subset E$)

2) Simplifions Y :

On a : $Y=A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$
$=(A\cup B)\cap E=A\cup B$ (car $A\cup B\subset E$)

3) Simplifions Z :

On a : $Z=A\setminus(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{(A\cap\overline{B})}=A\cap(\overline{A}\cup B)$
$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B$

Exercices de synthèse

Exercice 22

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier.

1) $A\cap(A\cup B)$

2) $A\cup(A\cap B)$

3) $[A\cup(A\cap B)]\cap B$

4) $A\cup([B\cap(A\cup B)]\cap[A\cup(A\cap B)])$

5) $(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)$

Exercice 23

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1) a- Montrer que : $A\subset B \Leftrightarrow B\cup\overline{A}=E$

b- En déduire que : $A\subset B \Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\phi$

2) Montrer que : $A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$

Exercice 24

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Montrer que : $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$

2) Montrer que : $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)=(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$

3) Montrer que : $A\cup(B\cap(A\cup C))=A\cup(B\cap C)$

4) Montrer que : $A\cap(B\cup(A\cap C))=A\cap(B\cup C)$

Exercice 25

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier.

1) $A\cap(\overline{A}\cup B)$

2) $A\cap B\cap(B\cup\overline{C})$

3) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

4) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

5) $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$

6) $\overline{\left[(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C})\right] \cup A}$

Exercice 26

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que : $A \cap B = A \cap C$ et $B \setminus A = C \setminus A$

Montrer que : $B = C$.

Exercice 27

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Montrer que : $A \subset C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

2) Montrer que : $(A \cap C \neq \phi \text{ et } B \cap C = \phi) \Rightarrow A - B \neq \phi$

3) Montrer que : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

4) Montrer que : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$

Exercice 28

Soit A et B deux ensembles non vides.

1) Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

2) Montrer que :

a- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

3) A-t-on $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 29

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Montrer que : $\begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \Rightarrow A = B \cup C$

2) Montrer que : $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C$

Exercice 30

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On pose : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1) Montrer que : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2) Déterminer : $A \Delta A$; $A \Delta E$; $A \Delta \phi$ et $A \Delta \overline{A}$.

Exercice 31

On considère l'ensemble : $I_r = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| < r\}$ où r est un paramètre réel strictement positif.

1) Comment doit-on choisir le réel r pour que l'on ait : $I_r \subset \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$?

2) Comment doit-on choisir le réel r pour que l'on ait: $I_r \cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \phi$?

Exercice 32

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a \neq b$

On considère les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2ax + b = 0\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2bx + a = 0\}$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $x \in A \cap B \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

2) Montrer que : $A \cap B \neq \phi \Rightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

3) Montrer que : $A \cap B = \phi \Leftrightarrow a + b \neq -\frac{1}{4}$

Exercice 33

Soit A, B, C et D des parties d'un ensemble E, telles que : $A \cap B = C \cap D$ et $C \cup D = E$ et $C \subset A$ et $D \subset B$.

Montrer que : $A = C$ et $B = D$.

Exercice 34

On considère l'ensemble $E = \{1;2;3;a;b;c;d\}$.

A et B deux parties de E telles que : $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{a;b;c;d\}$

1) Déterminer en extension les ensembles : $A \times A$ et $A \times B$.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes:

a- $X \cap A = A$

b- $A \cup X = A$

c- $A \cup X = B$

d- $A \cap X = \{1, 2, a, b\}$

Exercice 35

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

Résoudre dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, l'équation : $A \cap X = B$

Exercice 36

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1) Déterminer une condition suffisante pour qu'un élément X de $\mathscr{P}(E)$ vérifie $A \cup X = B$.

2) Déterminer dans ce cas les solutions de l'équation : $A \cup X = B$ dans $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 37

Soit A et B deux parties d'un ensemble E telles que : $C \subset A \subset B$

On considère dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$, le système suivant : $(S) : \begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

Montrer que : $(B \setminus A) \cup C$ est l'unique solution du système (S) dans $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 38

Soit $A = \{(n;n^2)/n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2n;n)/n \in \mathbb{N}\}$.

Déterminer $A \cap B$.

Solutions

Exercice 22

1) Simplifions $A \cap (A \cup B)$:

On a : $A \subset A \cup B$, donc : $A \cap (A \cup B) = A$

2) Simplifions $A \cup (A \cap B)$:

On a : $(A \cap B) \subset A$, donc : $A \cup (A \cap B) = A$

3) Simplifions $[A \cup (A \cap B)] \cap B$:

On a : $A \cup (A \cap B) = A$ (d'après 2)), donc : $[A \cup (A \cap B)] \cap B = A \cap B$

4) Simplifions $A \cup ([B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)])$:

On a : $B \cap (A \cup B) = B$ car : $B \subset A \cup B$

Et on a : $A \cup (A \cap B) = A$ car : $A \cap B \subset A$

Donc : $[B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)] = A \cap B$

D'où : $A \cup ([B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)]) = A \cup (A \cap B) = A$

car : $A \cap B \subset A$

5) Simplifions $(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A)$:

On a : $$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A) &= (B \cap C) \cap [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \\ &= (B \cap C) \cap [A \cup (B \cap C)] \\ &= B \cap C\end{aligned}$$

(car $B \cap C \subset (A \cup (B \cap C))$)

Exercice 23

1) a- Montrons que : $A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E$

On suppose que : $A \subset B$ et on montrer que : $B \cup \overline{A} = E$

On a : $B \subset E$ et $\overline{A} \subset E$, donc : $B \cup \overline{A} \subset E$ (1)

Réciproquement : Soit $x \in E$.

On a deux cas : soit $x \in B$ ou $x \notin B$

-Si $x \in B$ alors : $x \in B \cup \overline{A}$

-Si $x \notin B$ alors : $x \notin A$ (car : $A \subset B$), signifie que : $x \in \overline{A}$

Donc : $x \in B \cup \overline{A}$

D'où dans les deux cas on a : $x \in E \Rightarrow x \in B \cup \overline{A}$

Par suite : $E \subset B \cup \overline{A}$ (2)

de (1) et (2) on en déduit que : $B \cup \overline{A} = E$

On suppose que : $B \cup \overline{A} = E$ et on montrer que : $A \subset B$

Soit $x \in A$, on a : $x \in A \Rightarrow x \in E$

$$\Rightarrow x \in B \cup \overline{A} \qquad (\text{car } E = B \cup \overline{A})$$
$$\Rightarrow x \in B \qquad (\text{car } x \notin \overline{A})$$

Donc pour tout $x \in A$, on a : $x \in B$, signifie que : $A \subset B$

D'où : $A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E$

b- Déduction :

On a : $A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E$
$$\Leftrightarrow \overline{B \cup \overline{A}} = \overline{E}$$
$$\Leftrightarrow \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \phi$$
$$\Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$$

Donc : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \phi$

2) Montrons que : $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

On a : $A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B = A = B$

Supposons que : $A \cap B = A \cup B$ et montrons que : $A = B$

Soit $x \in E$, on a : $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$
$$\Rightarrow x \in A \cap B$$
$$\Rightarrow x \in B$$

Donc : $A \subset B$

et on a : $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$
$\qquad\qquad\quad \Rightarrow x \in A \cap B$
$\qquad\qquad\quad \Rightarrow x \in A$

Donc : $B \subset A$

D'où : $A = B$

Par suite : $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 24

1) Montrons que : $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cap C)$

On a : $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$

$$= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$$
$$= A \cap (\overline{B \cap C})$$
$$= A \backslash (B \cap C)$$

2) Montrons que : $(A \backslash B) \backslash (A \backslash C) = (A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B$

On a : $(A \backslash B) \backslash (A \backslash C) = (A \cap \overline{B}) \backslash (A \cap \overline{C})$

$$= (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cap \overline{C}})$$
$$= (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)$$
$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$$
$$= \phi \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$$
$$= A \cap \overline{B} \cap C$$

Puisque : $A \cap \overline{B} \cap C = (A \cap C) \cap \overline{B} = (A \cap C) \backslash B$

et $A \cap \overline{B} \cap C = (A \cap \overline{B}) \cap C = (A \backslash B) \cap C$

Alors : $(A \backslash B) \backslash (A \backslash C) = (A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash B$

3) Montrons que : $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$

On a : $A \cup (B \cap (A \cup C)) = (A \cup B) \cap [A \cup (A \cup C)]$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{car } A \cup (A \cup C) = A \cup C)$$
$$= A \cup (B \cap C)$$

Donc : $A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$

4) Montrons que : $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$

On a : $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup [A \cap (A \cap C)]$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$= A \cap (B \cup C) \quad (\text{car} : A \cap (A \cap C) = A \cap C)$$

Donc : $A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 25

1) Simplifions $A \cap (\overline{A} \cup B)$:

On a : $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$
$= \phi \cup (A \cap B)$
$= A \cap B$

Donc : $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

2) Simplifions $A \cap B \cap (B \cup \overline{C})$:

On a : $A \cap B \cap (B \cup \overline{C}) = A \cap [B \cap (B \cup \overline{C}]$
$= A \cap [(B \cap B) \cup (B \cap \overline{C})]$
$= A \cap [B \cup (B \cap \overline{C})]$

Puisque : $B \cup (B \cap \overline{C}) = B$ car : $(B \cap \overline{C}) \subset B$ alors : $A \cap B \cap (B \cup \overline{C}) = A \cap B$

3) Simplifions $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$:

On a : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A$

car : $B \cup \overline{B} = E$ et $A \cap E = A$ donc : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

4) Simplifions $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$:

On a d'après 3): $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Donc : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$
$= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$
$= E \cap (A \cup B)$ (car : $A \cup \overline{A} = E$)
$= A \cup B$ (car : $(A \cup B) \subset E$)

Donc : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

5) Simplifions $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A})$:

On a : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Donc : $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)$

On a : $(\overline{A} \cap \overline{B}) \subset \overline{A}$; donc : $(\overline{A} \cap \overline{B}) \subset \overline{A} \cup C$

D'où : $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C) = \overline{A} \cap \overline{B}$

Par suite : $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

6) Simplifions $\overline{\left[\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)}\right] \cup A}$:

On a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap C} = \overline{A} \cup \overline{C}$

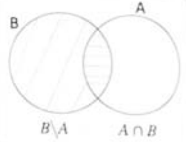
Donc : $\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$
$= \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

D'où : $\left[(\overline{A\cap B})\cap(\overline{A\cap C})\right]\cup A = (\overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C}))\cup A$

$$\begin{aligned} &= (A\cup\overline{A})\cup(\overline{B}\cap\overline{C}) \\ &= E\cup(\overline{B}\cap\overline{C}) \\ &= E \end{aligned}$$

Puisque : $\overline{E}=\phi$ alors : $\overline{\left[(\overline{A\cap B})\cap(\overline{A\cap C})\right]\cup A}=\phi$.

Exercice 26



Montrons que : $B=C$

Pour cela, on montre que : $B\subset C$ et $C\subset B$

Soit $x\in B$, on a deux cas :

Soit $x\in B\backslash A$ ou $x\in B\cap A$

- Si $x\in B\backslash A$ alors : $x\in C\backslash A$,

signifie que : $x\in C$

- Si $x\in A\cap B$ alors : $x\in A\cap C$, signifie que: $x\in C$

Donc dans les deux cas on a : $x\in C$, d'où : $(\forall x\in E)$; $x\in B\Rightarrow x\in C$

C'est-à-dire : $B\subset C$ et on montre de la même façon que : $C\subset B$ par suite : $B=C$.

Exercice 27

1) Montrons que : $A\subset C\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$

On suppose que : $A\subset C$ et on montre que : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$

On a : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$= (A\cup B)\cap C$ (car $A\subset C\Rightarrow A\cup C=C$)

2) Montrons que : $(A\cap C\neq\phi$ et $B\cap C=\phi)\Rightarrow A\backslash B\neq\phi$

On a : $A\cap C\neq\phi\Rightarrow(\exists x_0\in E)/x_0\in A$ et $x_0\in C$

Puisque : $x_0\in C$ et $B\cap C=\phi$ alors : $x_0\notin B$

Donc : $x_0\in A$ et $x_0\notin B$, signifie que : $x_0\in A\backslash B$, d'où : $A\backslash B\neq\phi$

Par suite : $(A\cap C\neq\phi$ et $B\cap C=\phi)\Rightarrow A\backslash B\neq\phi$

3) Montrons que : $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$

* On a : $B\subset A\Rightarrow A\cup B=A$ et $A\subset C\Rightarrow A\cap C=A$

Donc : $A\cup B=A\cap C$

* On a : $\begin{cases} B\subset A\cup B \\ A\cup B=A\cap C \end{cases}\Rightarrow B\subset A\cap C$ (1)

et on a : $A \cap C \subset A$ (2)

de (1) de (2), on en déduit que : $B \subset A$

D'autre part, on a : $\begin{cases} A \cap C \subset C \\ A \cup B = A \cap C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subset C$ (3)

et on a : $A \subset A \cup B$ (4)

de (3) et (4, on en déduit que : $A \subset C$

Donc : $B \subset A \subset C$

Par suite : $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

4) Montrons que : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$

($\Leftarrow$) on a : $B = C \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases}$

($\Rightarrow$) montrons que : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Soit $x \in B$, on a deux cas :

Soit $x \in A$ ou $x \notin A$

1er cas : $x \in A$

On a : $(x \in B$ et $x \in A) \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap C$ (car : $A \cap B = A \cap C$)

$\Rightarrow x \in C$

2ème cas : $x \notin A$

On a : $(x \in B$ et $x \notin A) \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \cup C$ et $x \notin A$

$\Rightarrow x \in C$

Dans les deux cas on a : $(\forall x \in E)$; $x \in B \Rightarrow x \in C$, signifie que : $B \subset C$

De la même façon, on montre que : $C \subset B$

Donc : $B = C$, par suite : $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$

Exercice 28

1) Montrons que : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

• Supposons que $A \subset B$ et montrons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Soit $X \in \mathcal{P}(A)$; on a : $X \in P(A) \Rightarrow X \subset A$

$\Rightarrow X \subset B$ (car $A \subset B$)

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$

Donc : $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

• Supposons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ et montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$, on a : $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A$

$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(B)$ (car $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$)

$\Rightarrow \{x\} \subset B$

$\Rightarrow x \in B$

Donc : $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subset B$.

Conclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

2) a- Montrons que : $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

On a : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

Donc : $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(B)$ (d'après 1))

D'où : $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (1)

Soit X tel que : $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

On a : $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow X \subset A$ et $X \subset B$

$\Rightarrow X \subset A \cap B$

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

Donc : $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$ (2)

De (1) et (2), on en déduit que : $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b- Montrons que : $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

On a : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$,

donc : $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

d'où : $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

3) Contre exemple : Soit $A = \{1\}$ et $B = \{a\}$ où $a \neq 1$

On a : $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\phi, \{1\}, \{a\}\}$

et $A \cup B = \{1; a\}$ donc : $P(A \cup B) = \{\phi; \{1\}; \{a\}; \{1; a\}\}$

D'où : $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Exercice 29

1) Montrons que : $\begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \Rightarrow A = B \cup C$

On a : $B \subset A$ et $C = A \setminus B$

Donc : $B \cup C = B \cup (A \setminus B)$

$= B \cup (A \cap \overline{B})$

$= (B \cup A) \cap (B \cup \overline{B})$

$= (B \cup A) \cap E$

$= B \cup A$ (car $B \cup A \subset E$)

$= A$ (car $B \subset A$)

D'où : $(B \subset A \text{ et } C = A \setminus B) \Rightarrow A = B \cup C$

2) Montrons que : $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \end{cases} \Rightarrow B = C$

On a : $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C \end{cases} \Rightarrow (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C)$

$\Rightarrow B \cap (A \cup \overline{A}) = C \cap (A \cup \overline{A})$

$\Rightarrow B \cap E = C \cap E$

$\Rightarrow B = C$ (car $B \subset E$ et $C \subset E$)

Exercice 30

1) Montrons que : $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$

On a : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})$

$= \phi \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \phi$

$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2) • $A \,\Delta\, A = (A \cup A) \setminus (A \cap A)$

$= A \setminus A = \phi$

• ou d'après 1)

$A \,\Delta\, A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$

$= \phi \cup \phi$

$= \phi$

• $A \,\Delta\, E = (A \cup E) \setminus (A \cap E)$

$= E \setminus A$

$= E \cap \overline{A}$

$= \overline{A}$ (car $\overline{A} \subset E$)

• $A \,\Delta\, \phi = (A \cup \phi) \setminus (A \cap \phi)$

$= A \setminus \phi$

$= A$

- $A \Delta \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \phi = E$

Exercice 31

1) Déterminons r pour que : $I_r \subset \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in I_r \Leftrightarrow |x+1| < r$

$$\Leftrightarrow -r < x+1 < r$$

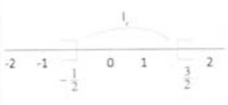
$$\Leftrightarrow -r-1 < x < r-1$$

Donc : $I_r = \left]-r-1;r-1\right[$

D'où : $I_r \subset \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\Leftrightarrow -\frac{1}{2} <- r-1$ et $r-1 < \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow r <- \frac{1}{2} \text{ et } r < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < r < \frac{5}{2} \text{ (car } r > 0\text{)}$$



Donc pour que : $I_r \subset \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$, il faut que : $r \in \left]0;\frac{5}{2}\right[$

2) Déterminons r pour que: $I_r \cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \phi$

On a : $I_r \cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \phi \Leftrightarrow \left]-r-1;r-1\right[\cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \phi$

$$\Leftrightarrow r-1 \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } -r-1 \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{2} \text{ ou } r \leq -\frac{5}{2}$$

Puisque $r > 0$ alors : $I_r \cap \left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[= \phi \Leftrightarrow 0 < r \leq \frac{1}{2}$

Exercice 32

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que : $x \in A \cap B \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

On a : $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$$\Rightarrow x^2 + 2ax + b = 0 \text{ et } x^2 + 2bx + a = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + b - 2bx - a = 0$$

$$\Rightarrow 2x(a-b) - (a-b) = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \qquad \text{(car } a \neq b\text{)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Donc : $x \in A \cap B \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

2) Montrons que : $A \cap B \neq \phi \Rightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

On a : $A \cap B \neq \phi \Rightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{R}) / x_0 \in A \cap B$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ (D'après la question 1))

$\Rightarrow x_0^2 + 2ax_0 + b = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + a + b = 0$

$\Rightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

Donc : $A \cap B \neq \phi \Rightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

3) Montrons que : $A \cap B = \phi \Leftrightarrow a + b \neq -\frac{1}{4}$

On a d'après la question précédente : $A \cap B \neq \phi \Rightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

et par contraposée, on a : $a + b \neq -\frac{1}{4} \Rightarrow A \cap B = \phi$

Reste à montrer que : $A \cap B = \phi \Rightarrow a + b \neq -\frac{1}{4}$

On utilise le raisonnement par contraposée,

c'est-à-dire, on montre que : $a + b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A \cap B \neq \phi$

Supposons que : $a + b = -\frac{1}{4}$ et montrons que : $A \cap B \neq \phi$

c'est-à-dire, montrons qu'il existe $x \in A \cap B$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \cap B \Rightarrow x^2 + 2ax + b = 0$ et $x^2 + 2bx + a = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x(a + b) + (a + b) = 0$ (En additionnant les deux égalités membre à membre)

$\Rightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ (car $a + b = -\frac{1}{4}$)

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{4}$ (Après résolution de l'équation)

Donc : $A \cap B \neq \phi$

D'où : $a + b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A \cap B \neq \phi$

Par suite : $A \cap B = \phi \Rightarrow a + b \neq -\frac{1}{4}$

Ainsi : $A \cap B = \phi \Leftrightarrow a + b = -\frac{1}{4}$

Exercice 33

Montrons que : $A = C$ et $B = D$

On a d'après les énoncés : $C \subset A$ et $D \subset B$, donc il suffit de montrer que : $A \subset C$ et $B \subset D$

• Montrons que : $A \subset C$

Soit $x \in E$, on a : $x \in A \Rightarrow x \in E$ (car $A \subset E$)

$\Rightarrow x \in C \cup D$ (car $C \cup D = E$)

$\Rightarrow x \in C$ ou $x \in D$

- Si $x \in C$ alors c'est vérifié.
- Si $x \in D$ alors $x \in B$ (car $D \subset B$)

Donc : $x \in A \cap B$ d'où : $x \in C \cap D$ (car $A \cap B = C \cap D$), par suite : $x \in C$

Donc : $(\forall x \in E)$; $x \in A \Rightarrow x \in C$, signifie que : $A \subset C$

On déduit que : $A = C$

• Montrons que : $B \subset D$

Soit $x \in E$, on a : $x \in B \Rightarrow x \in E$

$\Rightarrow x \in C \cup D$

$\Rightarrow x \in C$ ou $x \in D$

- Si $x \in D$ alors c'est vérifié.
- Si $x \in C$ alors : $x \in A$ alors : $A = C$, d'où : $x \in A \cap B$, ainsi : $x \in C \cap D$ (car : $A \cap B = C \cap D$)

Par suite : $x \in D$

Donc : $(\forall x \in E)$; $x \in B \Rightarrow x \in D$, signifie que : $B \subset D$

D'où : $B = D$

Exercice 34

1) Déterminons en extension $A \times A$ et $A \times B$

On a : $A \times A = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3)\}$

et on a :

$A \times B = \{(1;a),(1;b),(1;c),(1;d),(2;a),(2;b),(2;c),(2;d),(3;a),(3;b),(3;c)(3;d)\}$

2) a- Résolvons dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ l'équation : $X \cap A = A$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a : $X \cap A = A \Leftrightarrow A \subset X$

$\Leftrightarrow X = A \cup C$ tel que $C \in \mathcal{P}(B)$

Donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \{A \cup C / C \in \mathcal{P}(B)\}$

b- Résolvons dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ l'équation : $A \cup X = A$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a : $A \cup X = A \Leftrightarrow X \subset A$

$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A)$

Donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \mathcal{P}(A)$

c- Résolvons dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ l'équation: $A \cup X = B$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a : $A \cup X = B \Rightarrow A \subset B$ et $X \subset B$

Puisque : $A \not\subset B$ alors l'équation proposée n'admet pas de solutions dans $\mathcal{P}(E)$, donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \phi$

d- Résolvons dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ l'équation: $A \cap X = \{1, 2, a, b\}$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a : $A \cap X = \{1, 2, a, b\} \Rightarrow \{1, 2, a, b\} \subset A$ et $\{1, 2, a, b\} \subset X$

Puisque : $\{1, 2, a, b\} \not\subset A$ alors l'équation proposée n'admet pas de solutions dans $\mathcal{P}(E)$, donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \phi$

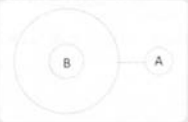
Exercice 35

Résolvons dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $A \cap X = B$

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, tel que : $A \cap X = B$

L'égalité $A \cap X = B$ implique que : $B \subset A$, donc on distinguera deux cas :

1^er Cas: si: $B \not\subset A$ alors : $A \cap X = B$ n'est pas vérifié quel que soit X de $\mathcal{P}(E)$



Donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \phi$

2^ème Cas: si: $B \subset A$ alors dans ce cas, on a :

$A \cap X = B \Leftrightarrow X = B \cup C$ tel que $C \in \mathcal{P}(C_A^B)$

Donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \{B \cup C / C \in \mathcal{P}(C_A^B)\}$

Exercice 36

1) Déterminons une condition suffisante pour que l'équation admette des solutions dans $\mathcal{P}(E)$:

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, tel que : $A \cup X = B$

L'égalité $A \cup X = B$ implique que : $A \subset B$ et $X \subset B$, donc pour que X soit solution de l'équation, il suffit que : $A \subset B$

D'où la condition suffisante pour que l'équation admette des solutions dans $\mathcal{P}(E)$ est: $A \subset B$

2) Déterminons les solutions de l'équation $A \cup X = B$ dans $\mathcal{P}(E)$, sachant que la condition : $A \subset B$ est vérifiée.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, on a : $A \cup X = B \Leftrightarrow X = C_B^A \cup C / C \in \mathcal{P}(A)$

Donc : $S_{\mathcal{P}(E)} = \{C_B^A \cup C / C \in \mathcal{P}(A)\}$

Exercice 37

Soit X une solution du système dans : $\mathcal{P}(E)$

On a : $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \in \{(B \setminus A) \cup Y / Y \in \mathcal{P}(A)\} \\ X \in \{C \cup Z / Z \in \mathcal{P}(B \setminus A)\} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow X \in \{(B \setminus A) \cup Y / Y \in \mathcal{P}(A)\} \cap \{C \cup Z / Z \in \mathcal{P}(B \setminus A)\}$$

Déterminons l'intersection des deux derniers ensembles.

Soit X un élément de cette intersection, on a : $(\exists Y \in \mathcal{P}(A)) / X = (B \setminus A) \cup Y$ et $(\exists Z \in \mathcal{P}(B \setminus A)) / X = C \cup Z$

Signifie que : $(B \setminus A) \cup Y = C \cup Z$

Puisque : $C \cap (B \setminus A) = \phi$ alors : $Y = C$ et $Z = B \setminus A$

Donc : $(B \setminus A) \cup C$ est le seul élément appartenant à l'intersection des deux ensembles, d'où : $(B \setminus A) \cup C$ est l'unique solution du système (S).

Exercice 38

Déterminons $A \cap B$:

Soit $(x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x;y) \in A \cap B &\Rightarrow (x;y) \in A \text{ et } (x;y) \in B \\
&\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / (x;y) = (n;n^2) \\
&\quad \text{et } \exists p \in \mathbb{N} / (x;y) = (2p;p) \\
&\Rightarrow (\exists (n;p) \in \mathbb{N}^2) \begin{cases} x = n \\ y = n^2 \end{cases} \text{et } \begin{cases} x = 2p \\ y = p \end{cases} \\
&\Rightarrow (\exists (n;p) \in \mathbb{N}^2) \begin{cases} n = 2p \\ n^2 = p \end{cases} \\
&\Rightarrow (\exists (n;p) \in \mathbb{N}^2) 2n^2 = n \;\; et \;\; n = p \\
&\Rightarrow (\exists (n;p) \in \mathbb{N}^2) n(2n - 1) = 0 \;\; et \; n = p \\
&\Rightarrow (\exists (n;p) \in \mathbb{N}^2) \left(n = 0 \text{ ou } n = \frac{1}{2}\right) \text{ et } n = p \\
&\Rightarrow n = 0 \text{ (car } \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \text{) et } p = 0 \\
&\Rightarrow (x;y) = (0;0)
\end{aligned}$$

Donc : $A \cap B = \{(0;0)\}$.

3 Leçon — Les applications

Maxi.

Résumé

1 Définition:

- Soit E et F deux ensembles non vides.

$f:E \to F$ est une application de E dans F si : $(\forall x \in E)$; $(\exists ! y \in F) / y = f(x)$

ou : $(\forall (x;x') \in E^2)$; $(x = x' \Rightarrow f(x) = f(x'))$

2 Égalité de deux applications:

Soit $f:E \to F$ et $g:G \to H$ deux applications.

$f = g \Leftrightarrow (E = G$ et $F = H$ et $(\forall x \in E) ; f(x) = g(x)$

3 Image directe - Image indirecte d'une partie:

Soit $f:E \to F$ une application et $A \subset E$ et $B \subset F$

a- $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$; on a: $f(A) \subset F$

$f(A) = \{y \in F / (\exists x \in A) \; ; \; y = f(x)\}$; $f(\phi) = \phi$

b- $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$; $x \in \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exercices

Exercice 1

Soit f l'application de l'ensemble $\{1;2;3;4\}$ dans lui-même définie par :
$f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$ et $f(4) = 2$.

1) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1;2\}$; $A = \{4\}$.

2) Déterminer $\overset{-1}{f}(A)$ lorsque $A = \{1;2\}$; $A = \{3\}$ et $A = \{4\}$.

Exercice 2

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{-1;0;1\}$ et $A = [-3;3]$

2) Déterminer $\overset{-1}{f}(A)$ lorsque $A = \{1\}$; $A = [1;2]$ et $A = [-1;0[$

Exercice 3

Soit f l'application définie de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$.

1) Montrer que : $f([0;+\infty[) = [2;+\infty[$

2) Montrer que : $\overset{-1}{f}([6;11]) = [2;3]$

Exercice 4

On considère l'application : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^2 - 2x$$

1) Montrer que : $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$

2) Déterminer $\overset{-1}{f}(\{0;3\})$ et $\overset{-1}{f}([2;5])$.

Exercice 5

On considère l'application : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \sqrt{x^2+4}$$

1) Montrer que : $f(\mathbb{R}) = [2; +\infty[$

2) Déterminer $\overset{-1}{f}([2\sqrt{5}; +\infty[)$.

Exercice 6

Montrer que les applications f et g sont égales dans chacun des cas suivants :

1) $f: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x + 1}{\cos x}$; **2)** $g: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

3) $f:]0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; **4)** $g:]0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

Exercice 7

Soit f une application de E dans F et A et B deux parties de F.

Montrer que :

1) $A \subset B \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$

2) $\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$

3) $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$

Exercice 8

Soit f une application de E dans F et A et B deux parties de E.

Montrer que :

1) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4) $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$

Solutions

Exercice 1

On a : $E=\{1;2;3;4\}$

1) Déterminons $f(A)$:

On a : $A=\{1;2\}$ et $f(1)=4$ et $f(2)=1$. Donc : $f(A)=\{1;4\}$

• On a : $A=\{4\}$ et $f(4)=2$. Donc : $f(A)=\{2\}$

2) Déterminons $\overset{-1}{f}(A)$:

• On a : $A=\{1;2\}$

Soit $x\in E$, on a : $x\in\overset{-1}{f}(A)\Longleftrightarrow f(x)\in A$

$$\Longleftrightarrow f(x)\in\{1;2\}$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=1 \text{ ou } f(x)=2$$

$$\Longleftrightarrow x=2 \text{ ou } x=3 \text{ ou } x=4$$

Donc : $\overset{-1}{f}(A)=\{2;3;4\}$

• On a : $A=\{3\}$

Soit $x\in E$, on a : $x\in\overset{-1}{f}(A)\Longleftrightarrow f(x)\in A$

$$\Longleftrightarrow f(x)\in\{3\}$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=3$$

Puisque : $(\forall x\in E)$; $f(x)\neq 3$ alors : $\overset{-1}{f}(A)=\phi$

• On a : $A=\{4\}$

Soit $x\in E$, on a : $x\in\overset{-1}{f}(A)\Longleftrightarrow f(x)\in A$

$$\Longleftrightarrow f(x)\in\{4\}$$

$$\Longleftrightarrow f(x)=4$$

$$\Longleftrightarrow x=1$$

Donc : $\overset{-1}{f}(A)=\{1\}$

Exercice 2

$(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x^2$

1) Déterminons $f(A)$:

• On a : $A=\{-1;0;1\}$ et $f(-1)=f(1)=1$ et $f(0)=0$

Donc : $f(A)=\{0;1\}$

• On a : $A=[-3;3]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in [0;9]$$

Donc : $f(A) = [0;9]$

2) Déterminons $\overset{-1}{f}(A)$:

• On a: $A = \{1\}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in \overset{-1}{f}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Donc : $\overset{-1}{f}(A) = \{-1;1\}$

• On a : $A = [1;2]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in \overset{-1}{f}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

Donc : $\overset{-1}{f}(A) = [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$

• On a : $A = [-1;0[$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in \overset{-1}{f}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x^2 < 0$$

Cette dernière proposition est impossible, donc : $\overset{-1}{f}(A) = \phi$.

Exercice 3

$(\forall x \in [0; +\infty[) : f(x) = x^2 + 2$

1) Montrons que : $f([0; +\infty[) = [2; +\infty[$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a : $x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow f(x) \in [2; +\infty[$$

Donc : $f([0; +\infty[) \subset [2; +\infty[$ **(1)**

Réciproquement : Soit $y \in [2; +\infty[$, existe-t-il $x \in [0; +\infty[$ tel que : $f(x) = y$

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y$

$\Leftrightarrow x^2 = y - 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-2}$ ou $x = -\sqrt{y-2}$

Puisque : $\sqrt{y-2} \geq 0$ alors l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans $[0; +\infty[$, donc : $y \in f([0; +\infty[)$.

d'où : $[2; +\infty[\subset f([0; +\infty[)$ **(2)**

De **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f([0; +\infty[) = [2; +\infty[$

2) Montrons que : $\overset{-1}{f}([6, 11]) = [2; 3]$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a : $x \in \overset{-1}{f}([6; 11]) \Leftrightarrow f(x) \in [6; 11]$

$\Leftrightarrow 6 \leq x^2 + 2 \leq 11$

$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ (car $x \geq 0$)

Donc : $\overset{-1}{f}([6, 11]) = [2; 3]$

Exercice 4

$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrons que : $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 \geq 0$ c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x-1)^2 - 1 \geq -1$

alors : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq -1$

Donc : $f(\mathbb{R}) \subset [-1; +\infty[$ **(1)**

• Montrons que : $[-1; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$

Soit $y \in [-1; +\infty[$, existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = y$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = y + 1$

$\Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y+1}$ ou $x - 1 = -\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} + 1$ ou $x = -\sqrt{y+1} + 1$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$,

Donc : $(\forall y \in [-1; +\infty[); (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = y$ signifie que : $[-1; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$ **(2)**

De **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$

2) • Déterminons $\overset{-1}{f}(\{0;3\})$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in \overset{-1}{f}(\{0;3\}) \Leftrightarrow f(x) \in \{0;3\}$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 3$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x = 0) \text{ ou } (x^2 - 2x = 3)$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \; ou \; x = 2) \text{ ou } (x^2 - 2x - 3 = 0)$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \; ou \; x = 2) \text{ ou } (x = -1 \; ou \; x = 3)$$

Donc : $\overset{-1}{f}(\{0;3\}) = \{-1;0;2;3\}$

• Déterminons $\overset{-1}{f}([2;5])$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in \overset{-1}{f}([2;5]) \Leftrightarrow f(x) \in [2;5]$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x^2 - 2x \leq 5$$

• Résolvons l'inéquation : $x^2 - 2x \geq 2$

On résout l'équation : $x^2 - 2x - 2 = 0$

Son discriminant Δ est **12**; ses solutions sont : $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$

Donc : $x^2 - 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty[$

D'où : $S_1 =]-\infty; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty[$

• Résolvons l'inéquation : $x^2 - 2x \leq 5$

On résout l'équation : $x^2 - 2x - 5 = 0$

Son discriminant Δ est : **24**; ses solutions sont : $x_1 = 1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{6}$

Donc : $x^2 - 2x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1 - \sqrt{6}; 1 + \sqrt{6}]$

D'où : $S_2 = [1 - \sqrt{6}; 1 + \sqrt{6}]$

Par suite : $x \in \overset{-1}{f}([2;5]) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \geq 0$ et $x^2 - 2x - 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x \in S_1 \cap S_2$$
$$\Leftrightarrow x \in [1 - \sqrt{6}; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{6}]$$

Finalement : $\overset{-1}{f}([2;5]) = [1 - \sqrt{6}; 1 - \sqrt{3}] \cup [1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{6}]$

Exercice 5

$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

1) Montrons que : $f(\mathbb{R}) = [2; +\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} \geq 2$$
$$\Rightarrow f(x) \in [2; +\infty[$$

Donc : $f(\mathbb{R}) \subset [2; +\infty[$ **(1)**

• Montrons que : $[2; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$

Soit $y \in [2; +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

On a: $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} = y$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 - 4$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y^2-4} \text{ ou } x = -\sqrt{y^2-4}$$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ d'où :

$y \in f(\mathbb{R})$, ainsi : $[2; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$ **(2)**

Par suite de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f(\mathbb{R}) = [2; +\infty[$

2) Déterminons $f^{-1}([2\sqrt{5}; +\infty[)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in f^{-1}([2\sqrt{5}; +\infty[) \Leftrightarrow f(x) \in [2\sqrt{5}; +\infty[$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} \geq 2\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4 \geq 20$$
$$\Leftrightarrow x^2 \geq 16$$
$$\Leftrightarrow x \geq 4 \text{ ou } x \leq -4$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$$

Donc : $f^{-1}([2\sqrt{5}; +\infty[) =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

Exercice 6

1) Les applications f et g ont le même ensemble de départ qui est $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et le même ensemble d'arrivée qui est $\mathbb{R}$, reste à vérifier si on a :

$\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right); f(x) = g(x)$

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)}$$
$$= \frac{\cos x}{1-\sin x} = g(x)$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right); f(x) = g(x)$

D'où: les applications f et g sont égales.

2) Les applications f et g ont le même ensemble de départ qui est $]0;1]$ et le même ensemble d'arrivée qui est $\mathbb{R}$, reste à vérifier si on a : $(\forall x \in]0;1]) ; f(x) = g(x)$.

Soit $x \in]0;1]$, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = g(x)$$

Donc : $(\forall x \in]0;1]) ; f(x) = g(x)$

D'où : les applications f et g sont égales.

Exercice 7

1) Montrons que : $A \subset B \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$

On suppose que : $A \subset B$ et on montre que : $\overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$

Soit x un élément de E tel que : $x \in \overset{-1}{f}(A)$

On a : $x \in \overset{-1}{f}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

Puisque : $A \subset B$ et $f(x) \in A$ alors : $f(x) \in B$ signifie que : $x \in \overset{-1}{f}(B)$

Donc : $(\forall x \in E) ; x \in \overset{-1}{f}(A) \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(B)$ d'où : $\overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$

2) Montrons que : $\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$

Soit x un élément de E, on a : $x \in \overset{-1}{f}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$

$$\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \text{ ou } x \in \overset{-1}{f}(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$$

Donc : $(\forall x \in E) : \left(x \in \overset{-1}{f}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)\right)$, d'où :

$\overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$

3) Montrons que : $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$

Soit x un élément de E, on a : $x \in \overset{-1}{f}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$$\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \text{ et } x \in \overset{-1}{f}(B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$$

Donc : $(\forall x \in E) : \left(x \in \overset{-1}{f}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)\right)$

D'où : $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$.

Exercice 8

1) Montrons que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

On suppose que : $A \subset B$ et on montre que : $f(A) \subset f(B)$

Soit y un élément de F tel que : $y \in f(A)$

On a : $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A)/y = f(x)$

Puisque : $A \subset B$ et $x \in A$ alors : $x \in B$, donc : $f(x) \in f(B)$, c'est-à-dire : $y \in f(B)$

D'où : $(\forall y \in F); y \in f(A) \Rightarrow y \in f(B)$ par suite : $f(A) \subset f(B)$

Finalement : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) Montrons que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

• On a : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc d'après la question précédente :

$f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$ d'où : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ **(1)**

• Soit y un élément de F tel que : $y \in f(A \cup B)$

On a : $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B)/y = f(x)$

Montrons que : $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$

Le cas où $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ alors $y \in f(A) \cup f(B)$

Supposons que : $y \notin f(A)$, c'est-à-dire : $(\forall z \in A); y \neq f(z)$

On a : $y = f(x)$ donc : $x \notin A$

D'où : $x \in A \cup B$ et $x \notin A$ signifie que : $x \in B$ c'est-à-dire : $f(x) \in f(B)$ donc :

$y \in f(B)$ D'où : $y \in f(A) \cup f(B)$ par suite :

De même si $y \notin f(B)$; on montre de la même manière que $y \in f(A)$

d'où $y \in f(A) \cup f(B)$

$(\forall y \in F); y \in f(A \cup B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$ Ainsi : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ **(2)**

Donc de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) Montrons que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

On a : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc d'après la première question, on a :

$f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$. Donc : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4) Montrons que: $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$

• Soit y un élément de F tel que: $y \in f(A) - f(B)$

On a : $y \in f(A) - f(B) \Leftrightarrow y \in f(A)$ et $y \notin f(B)$

Et on a : $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A)/y = f(x)$

Info :
$A - B = A \setminus B$

Puisque : $y = f(x)$ et $y \notin f(B)$ alors : $x \notin B$ donc : $(\exists x \in A - B)/y = f(x)$

c'est-à-dire : $y \in f(A - B)$ d'où : $(\forall y \in F); y \in f(A) - f(B) \Rightarrow y \in f(A - B)$

Par suite : $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.

4 Application injective - Application surjective - Application bijective:

Soit $f: E \to F$ une application.

a- f est une application injective si et seulement si:

$$(\forall (x;x') \in E^2) ; (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

ou: f est une application injective si et seulement si :

$$(\forall (x;x') \in E^2) ; (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

b- f est une application surjective si et seulement si :

$(\forall y \in F) ; (\exists x \in E) / y = f(x)$ ou : $f(E) = F$

c- f est une application bijective si et seulement si : f est injective et surjective.

f est une application bijective si et seulement si :

$(\forall y \in F) ; (\exists! x \in E) / y = f(x)$

Remarque :

Toute application bijective admet une bijection réciproque notée f^{-1}

et définie de F sur E telle que : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$

et on a : $f^{-1} of = id_E$ et $fof^{-1} = id_F$

Exercices

Exercice 9

Soit f l'application définie par : $f: [1; +\infty[\longrightarrow [2; +\infty[$

$$x \longmapsto x^2 - 2x + 3$$

1) Montrer que l'application f est injective.

2) Montrer que l'application f est surjective.

3) En déduire que l'application f est bijective et définir sa bijective réciproque.

Exercice 10

Soit f l'application définie par : $f: \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2x+3}{x+1}$$

1) Montrer que l'application f est injective.

2) Montrer que l'application f n'est pas surjective.

Exercice 11

On considère l'application f définie par : $f : [1;+\infty[\longrightarrow [-1;+\infty[$
$$x \longmapsto x - 2\sqrt{x}$$

1) Vérifier que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\ ;\ f(x) = (\sqrt{x}-1)^2 - 1$

2) Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 12

On considère l'application f définie par : $f : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$
$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Solutions

Exercice 9

1) Montrons que l'application f est injective :

Soit a et b deux éléments de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$, montrons que : $a = b$.

On a : $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 - 2a + 3 = b^2 - 2b + 3$
$$\Rightarrow (a-1)^2 + 2 = (b-1)^2 + 2$$
$$\Rightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2$$
$$\Rightarrow |a-1| = |b-1|$$
$$\Rightarrow a - 1 = b - 1 \text{ (car } a \geq 1 \text{ et } b \geq 1)$$
$$\Rightarrow a = b$$

Donc : $\forall (a;b) \in ([1;+\infty[)^2\ ;\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

D'où f est une application injective.

2) Montrons que l'application f est surjective :

Soit y un élément de l'intervalle $[2;+\infty[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

On a : $f(x) = y \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 3 = y$
$$\Longleftrightarrow (x-1)^2 = y - 2$$
$$\Longleftrightarrow |x-1| = \sqrt{y-2}$$
$$\Longleftrightarrow x - 1 = \sqrt{y-2} \text{ ou } x - 1 = -\sqrt{y-2}$$

Puisque : $\sqrt{y-2} \geq 0$ alors : $x = 1 + \sqrt{y-2}$ est une solution de l'équation $f(x) = y$ qui appartient à l'intervalle $[1;+\infty[$, donc :

$(\forall y\in[2;+\infty[)(\exists x\in[1;+\infty[)\,/\,f(x)=y$

D'où f est une application surjective.

3) Déduction : On a l'application f est à la fois injective et surjective, donc elle est bijective et sa bijection réciproque est l'application définie par :

$$f^{-1}:[2;+\infty[\longrightarrow[1;+\infty[$$
$$x\longmapsto 1+\sqrt{x-2}$$

Exercice 10

1) Montrons que l'application f est injective :

Soit a et b deux éléments de l'ensemble $\mathbb{R}-\{-1\}$ tels que : $f(a)=f(b)$, montrons que : $a=b$.

On a : $f(a)=f(b)\Rightarrow\dfrac{2a+3}{a+1}=\dfrac{2b+3}{b+1}$

$$\Rightarrow(2a+3)(b+1)=(a+1)(2b+3)$$
$$\Rightarrow 2ab+2a+3b+3=2ab+3a+2b+3$$
$$\Rightarrow a=b$$

Donc : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}-\{-1\})^2\,;\,f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$

D'où f est une application injective.

2) Montrons que f n'est pas surjective :

C'est-à-dire, montrons que : $(\exists y_0\in\mathbb{R})/(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});\,f(x)\neq y_0$

Méthode 1:

On a : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2x+2+1}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$

Puisque : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});\,\dfrac{1}{x+1}\neq 0$

Alors : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});\,f(x)\neq 2$

Donc **2** n'a pas d'antécédents par l'application f.

D'où : f n'est pas surjective.

Méthode 2:

Cherchons un élément y_0 de $\mathbb{R}$ tel que l'équation $f(x)=y$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}-\{-1\}$.

On a : $f(x)=y_0\Longleftrightarrow\dfrac{2x+3}{x+1}=y_0$

$$\Longleftrightarrow 2x+3=xy_0+y_0$$
$$\Longleftrightarrow x(2-y_0)=y_0-3\,(*)$$

Donc : si $y_0=2$ alors (*) devient : $0=-1$

Ce qui est impossible donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$ et par conséquent **2** n'a pas d'antécédents par f.

D'où f n'est pas surjective.

Exercice 11

1) Vérifions que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$

Soit $x \in [1; +\infty[$, on a : $f(x) = x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 - 1$

$$= (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$$

Donc : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$

2) Montrons que l'application f est bijective :

Soit y un élément de l'intervalle $[-1; +\infty[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

On a : $f(x) = y \iff (\sqrt{x} - 1)^2 - 1 = y$

$$\iff (\sqrt{x} - 1)^2 = y + 1$$

$$\iff |\sqrt{x} - 1| = \sqrt{y + 1}$$

$$\iff \sqrt{x} - 1 = \sqrt{y + 1} \text{ ou } \sqrt{x} - 1 = -\sqrt{y + 1}$$

$$\iff \sqrt{x} = 1 + \sqrt{y + 1} \text{ ou } \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y + 1}$$

Puisque $1 + \sqrt{y + 1} \geq 1$ et $1 - \sqrt{y + 1} \leq 1$ alors : $x = (1 + \sqrt{y + 1})^2$ et donc l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$ qui est : $x = (\sqrt{y + 1} + 1)^2$, d'où f est une application bijective de $[1; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$.

• Sa bijection réciproque est définie par : $f^{-1} : [-1; +\infty[\longrightarrow [1; +\infty[$

$$x \longmapsto (\sqrt{x + 1} + 1)^2$$

Exercice 12

Montrons que l'application f est bijective :

Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $\mathbb{R} - \{2\}$.

On a : $f(x) = y \iff \dfrac{x + 1}{x - 2} = y$

$$\iff x + 1 = xy - 2y$$

$$\iff x(1 - y) = -1 - 2y$$

$$\iff x = \frac{-1 - 2y}{1 - y} = \frac{2y + 1}{y - 1} \text{ (car } y \neq 1)$$

De plus on a : $x-2=\frac{2y+1}{y-1}-2=\frac{3}{y-1}$

Puisque : $\frac{3}{y-1}\neq 0$ alors : $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

Donc l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans l'ensemble $\mathbb{R}-\{2\}$ qui est : $x=\frac{2y+1}{y-1}$, d'où : f est une application bijective de $\mathbb{R}-\{2\}$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

- Sa bijection réciproque est définie par : $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}$

$$x\longmapsto\frac{2x+1}{x-1}$$

Exercices de synthèse

Exercice 13

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$; f est-elle injective?

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\geq -1$; f est-elle surjective?

Exercice 14

On considère l'application : $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})$; $f(x)<1$

2) f est-elle surjective?

Exercice 15

On considère l'application : $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

1) Soit x et x' deux éléments de $[0;+\infty[$;

Montrer que si $f(x)=f(x')$ alors $x=x'$ ou $xx'=1$.

2) f est-elle injective?

Exercice 16

On considère les ensembles A et B tels que : $A=[0;2]$ et $B=[-3;5]$.

1) Montrer que si : $x\in A$ alors : $(x^2+2x-3)\in B$

2) On considère l'application : $f:A\to B$

$$x\mapsto x^2+2x-3$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 17

1) Vérifier que : $(\forall x \in [0;+\infty[) ; -1 \leq \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} < 1$

2) On considère l'application : $f : [0;+\infty[\to [-1;1[$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 18

On pose : $E =]2;+\infty[$

1)Montrer que si : $x \in E$ alors : $\frac{2x+1}{x-2} \in E$

2) On considère l'application: $f : E \to E$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$$

a) Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

b) Déterminer $f^{-1}\left(\left]\frac{7}{2};9\right]\right)$.

Exercice 19

On considère l'application: $f : [-1;+\infty[\to [-1;+\infty[$

$$x \mapsto x^2 + 2x$$

1) Montrer que f est un application injective.

2) Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[3;+\infty[$ par l'application f.

3) Montrer que f est bijective et déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$.

Exercice 20

On considère l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + x + 2$$

1) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(-1-x) = f(x)$;

b- En déduire que l'application f n'est pas injective.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{4}$, et en déduire que f n'est pas surjective.

3) Montrer que : $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

Exercice 21

On considère l'application : $f : [1;+\infty[\to [2;+\infty[$

$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 22

On considère l'application : $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$(x;y) \mapsto 2x - y$$

1) Montrer que l'application f n'est pas injective.

2) a- Soit t un nombre réel, vérifier que : $f((t;t)) = t$;

b- En déduire que l'application f est surjective.

3) a- Soit $A = \{1; -2\}$, déterminer $f(A \times A)$.

b- Déterminer l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{1\})$.

Exercice 23

On considère l'application : $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$n \mapsto n + (-1)^n$$

Montrer que l'application f est injective.

Exercice 24

On considère l'application : $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$(n;p) \mapsto 2^n.(1 + 2p)$$

Montrer que l'application f est injective.

Exercice 25

On considère l'application : $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$
$$n \mapsto n^3 - n$$

1) Montrer que f est injective.

2) a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(n)$ est un nombre pair;

b- En déduire que l'application f n'est pas surjective.

Exercice 26

On considère l'application : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^3 + x^2 + x$$

1) a- Montrer que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 > 0$

b- En déduire que l'application f est injective.

2) Déterminer $\overset{-1}{f}([3; +\infty[)$

Exercice 27

1) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[2; +\infty[$ alors : $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{x}$ appartient à l'intervalle $[1; 2[$.

2) On considère l'application : $f:[2;+\infty[\to[1;2[$

$$x\mapsto\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 28

On considère l'application : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto x^4-3x^2-4$$

1) Déterminer $\overset{-1}{f}(\{-4\})$, f est-elle une application injective?

2) Déterminer $f(\mathbb{R})$, f est-elle une application surjective?

Exercice 29

On considère les applications f et g définies par :

$f:[1;+\infty[\to[1;+\infty[$ et $g:[1;+\infty[\to[1;+\infty[$

$x\mapsto1+\sqrt{x-1}$ $\qquad$ $x\mapsto x^2-2x+2$

1) Déterminer les applications fog et gof. Que peut-on conclure?

2) Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 30

On considère les applications f et g définies par : $f:]0;+\infty[\to]-\infty;1[$

et $g:]0;+\infty[\to]0;+\infty[$ $\qquad$ $x\mapsto1-\frac{1}{x^2}$

$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Déterminer l'application fog.

2) Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 31

On considère l'application : $f:[1;+\infty[\to]0;\sqrt{3}]$

$$x\mapsto\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$$

1) Montrer que l'application f est injective.

2) Montrer que : $f([1;+\infty[)=]0;\sqrt{3}]$

3) En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 32

E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

A est une partie de E et B est une partie de F.

1) Montrer que : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)=B\cap f(E)$

2) Montrer que $f\left(A\cap\overset{-1}{f}(B)\right)=f(A)\cap B$

Exercice 33

Soit E et F deux ensembles non vides.

On considère les applications suivantes : $f:E \to F$ et $g:F \to E$ telles que : $fog = id_F$

1) Montrer que l'application f est surjective.

2) Montrer que : $(gof)(E) = g(F)$.

Exercice 34

Soit f une application de E dans F.

1) Montrer que : $(\forall B \in \mathcal{P}(F)) : f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B$

2) Montrer que : f est surjective si et seulement si : $(\forall B \in \mathcal{P}(F)) : f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) = B$

Exercice 35

Soit f une application de E dans F.

1) Montrer que: $(\forall A \in \mathcal{P}(E)) : A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$

2) Montrer que : f est injective si et seulement si : $(\forall A \in \mathcal{P}(E)) : \overset{-1}{f}(f(A)) = A$

Exercice 36

On considère l'application : $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$

$$(x;y) \mapsto (x+y)^2 + y$$

Montrer que l'application f est injective.

Solutions

Exercice 13

1) • Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0$

$$\iff x^2 - 1 = 0$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Donc : $S = \{-1;1\}$

• On a : $f(1) = f(-1) = 0$ et $1 \neq -1$, donc f n'est pas injective.

2) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \geq -1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) + 1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + 1 = \dfrac{x^2-1+x^2+1}{x^2+1} = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Puisque : $2x^2 \geq 0$ et $x^2+1 > 0$ alors : $\dfrac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$, c'est-à-dire : $f(x) + 1 \geq 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \geq -1$

• On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \geq -1$ donc : $f(\mathbb{R}) \subset [-1;+\infty[$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) \neq -2$ (-2 par exemple)

Ainsi le nombre **-2** n'a pas d'antécédents par l'application f et par suite f n'est pas surjective.

Exercice 14

1) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ :\ f(x) < 1$

Soit x un élément de l'ensemble $\mathbb{R}-\{-1\}$, on a :

$$f(x)-1 = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} - 1 = \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{x^2+2x+1} = \frac{-1}{x^2+2x+1} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

Puisque : $\frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ alors : $f(x)-1 < 0$, c'est-à-dire : $f(x) < 1$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ :\ f(x) < 1$

2) f est-elle surjective?

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ :\ f(x) < 1$, donc : $f(\mathbb{R}-\{-1\}) \subset]-\infty;1[$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\})\ :\ f(x) \neq 2$ (**2** par exemple)

D'où **2** n'a pas d'antécédents par l'application f et par suite l'application f n'est pas surjective.

Exercice 15

1) Soit x et x' deux éléments de $[0;+\infty[$, tels que : $f(x) = f(x')$, et montrons que : $x = x'$ ou $xx' = 1$.

On a : $f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x'}}{x'+1}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x'+1)\sqrt{x} - (x+1)\sqrt{x'} = 0\\
&\Rightarrow x'\sqrt{x} - x\sqrt{x'} - (\sqrt{x'} - \sqrt{x}) = 0\\
&\Rightarrow \sqrt{xx'}\,(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x'} - \sqrt{x}) = 0\\
&\Rightarrow (\sqrt{x'} - \sqrt{x})(\sqrt{xx'} - 1) = 0\\
&\Rightarrow \sqrt{x'} - \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{xx'} - 1 = 0\\
&\Rightarrow \sqrt{x'} = \sqrt{x} \text{ ou } \sqrt{xx'} = 1\\
&\Rightarrow x' = x \text{ ou } xx' = 1
\end{aligned}$$

Donc : $f(x) = f(x') \Rightarrow (x = x' \text{ ou } xx' = 1)$

2) f est-elle injective?

On prend $x = 4$ et $x' = \frac{1}{4}$, on a : $f(4) = \frac{2}{5}$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{2}{5}$ c'est-à-dire : $f(4) = f\left(\frac{1}{4}\right)$, et on a : $4 \neq \frac{1}{4}$

Donc f n'est pas injective.

Exercice 16

1) Soit $x \in A$, montrons que : $(x^2 + 2x - 3) \in B$

On a : $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ et $0 \leq 2x \leq 4$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 + 2x \leq 8$$

Donc : $-3 \leq x^2 + 2x - 3 \leq 5$, c'est-à-dire: $(x^2 + 2x - 3) \in B$

2) Montrons que f est bijective :

Soit $y \in B$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans A.

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = y$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = y + 4$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = y + 4$$
$$\Leftrightarrow |x + 1| = \sqrt{y + 4}$$
$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{y + 4} \text{ ou } x = -1 - \sqrt{y + 4}$$

On a : $-1 - \sqrt{y - 4} < 0$

et $-3 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y + 4 \leq 9$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{y + 4} \leq 3$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq -1 + \sqrt{y + 4} \leq 2$$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans A qui est : $-1 + \sqrt{y + 4}$

D'où : $(\forall y \in B), (\exists! x \in A) / f(x) = y$

Par suite f est bijective de A sur B.

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y + 4}$$

Donc la bijection réciproque f^{-1} de f est définie par :

$$f^{-1}: B \to A$$
$$x \mapsto -1 + \sqrt{x + 4}$$

Exercice 17

1) Vérifions que : $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; -1 \leq \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} < 1$

Soit $x \in [0; +\infty[$, on a : $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + 1 = \dfrac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$

Puisque : $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \geq 0$ alors : $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + 1 \geq 0$ c'est-à-dire : $-1 \leq \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$ **(1)**

Et on a : $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \dfrac{\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{-4}{\sqrt{x} + 2}$

Puisque : $\dfrac{-4}{\sqrt{x} + 2} < 0$ alors : $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - 1 < 0$ c'est-à-dire: $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} < 1$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** on déduit que : $-1 \leq \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} < 1$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) \; ; \; -1 \leq \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} < 1$

2) Montrons que f est bijective :

Soit y un élément de l'intervalle $[-1; 1[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = y(\sqrt{x}+2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(1-y) = 2y+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2y+2}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{2y+2}{1-y}\right)^2 \quad \text{(car : } \left((\forall y \in [-1; 1[) \; ; \; 2\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \geq 0\right)\text{)}$$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$ qui est : $\left(\dfrac{2y+2}{1-y}\right)^2$

D'où : $(\forall y \in [-1; 1[), (\exists! x \in [0; +\infty[) / f(x) = y$

Par suite f est bijective de $[0; +\infty[$ sur $[-1; 1[$.

Et on a : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \left(\frac{2y+2}{1-y}\right)^2$$

Donc : $f^{-1} : [-1; 1[\to [0; +\infty[$

$$x \mapsto \left(\frac{2x+2}{1-x}\right)^2$$

Exercice 18

1) Soit $x \in E$, montrons que : $\dfrac{2x+1}{x-2} \in E$ où $E =]2, +\infty[$

On a : $\dfrac{2x+1}{x-2} - 2 = \dfrac{2x+1-2x+4}{x-2} = \dfrac{5}{x-2}$

Puisque : $x > 2$ alors $x - 2 > 0$ donc : $\dfrac{5}{x-2} > 0$

D'où : $\dfrac{2x+1}{x-2} - 2 > 0$, par suite $\dfrac{2x+1}{x-2} > 2$ signifie que : $\dfrac{2x+1}{x-2} \in E$

2) a- Montrons que f est bijective :

Soit $y \in E$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans E.

On a : $f(x) = y \iff \dfrac{2x+1}{x-2} = y$

$$\iff 2x + 1 = xy - 2y$$

$$\iff x(y-2) = 2y + 1$$

$$\iff x = \frac{2y+1}{y-2}$$

Puisque : $y \in E$ alors : $\dfrac{2y+1}{y-2} \in E$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans E qui est : $\dfrac{2y+1}{y-2}$

D'où : $(\forall y \in E), (\exists! x \in E) / f(x) = y$

Par suite f est bijective de E sur E.

Et on a : $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$

$$\iff f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-2}$$

Donc : $f^{-1} : E \to E$ (Remarquer que : $f^{-1} = f$)

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$$

b- Déterminons $f^{-1}\left(\left[\dfrac{7}{2};9\right]\right)$:

Soit x un élément de l'intervalle $]2;+\infty[$, on a :

$$x \in f^{-1}\left(\left[\frac{7}{2};9\right]\right) \iff \frac{7}{2} \leq f(x) \leq 9$$

$$\iff \frac{7}{2} \leq \frac{2x+1}{x-2} \leq 9$$

$$\iff \frac{7}{2} \leq \frac{2x+1}{x-2} \text{ et } \frac{2x+1}{x-2} \leq 9$$

Et on a : • $\dfrac{7}{2} \leq \dfrac{2x+1}{x-2} \iff 7x - 14 \leq 4x + 2$ (car $x - 2 > 0$)

$$\iff x \leq \frac{16}{3}$$

• $\dfrac{2x+1}{x-2} \leq 9 \iff 2x + 1 \leq 9x - 18$ (car $x - 2 > 0$)

$$\iff \frac{19}{7} \leq x$$

Donc : $x \in f^{-1}\left(\left[\dfrac{7}{2};9\right]\right) \iff \dfrac{19}{7} \leq x \leq \dfrac{16}{3}$

$$\iff x \in \left[\frac{19}{7};\frac{16}{3}\right]$$

D'où : $f^{-1}\left(\left[\dfrac{7}{2};9\right]\right) = \left[\dfrac{19}{7};\dfrac{16}{3}\right]$

Exercice 19

1) Montrons que f est une application injective:

Soit x et y deux éléments de $[-1;+\infty[$ tels que : $f(x)=f(y)$

On a : $f(x)=f(y) \Rightarrow x^2+2x=y^2+2y$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=y^2+2y+1$$
$$\Rightarrow (x+1)^2=(y+1)^2$$
$$\Rightarrow |x+1|=|y+1|$$

Puisque : $x\geq -1$ et $y\geq -1$ alors : $x+1\geq 0$ et $y+1\geq 0$

Donc : $f(x)=f(y) \Rightarrow x+1=y+1$
$$\Rightarrow x=y$$

D'où : $\left(\forall (x;y)\in ([-1;+\infty[)^2\right)$; $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$, par suite f est injective..

2) Déterminons $\overset{-1}{f}([3;+\infty[)$:

Soit $x\in[-1;+\infty[$, on a : $x\in \overset{-1}{f}([3;+\infty[) \Longleftrightarrow x\geq -1$ et $f(x)\in[3;+\infty[$

$$\Longleftrightarrow x\geq -1 \text{ et } x^2+2x-3\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow x\geq -1 \text{ et } (x-1)(x+3)\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow x\geq -1 \text{ et } (x\leq -3 \text{ ou } x\geq 1)$$
$$\Longleftrightarrow x\in[1,+\infty[$$

Donc : $\overset{-1}{f}([3;+\infty[)=[1;+\infty[$

3) Montrons que f est bijective :

Soit y un élément de l'intervalle $[-1;+\infty[$, montrons que l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1;+\infty[$.

On a : $f(x)=y \Longleftrightarrow x^2+2x=y$

$$\Longleftrightarrow x^2+2x+1=y+1$$
$$\Longleftrightarrow (x+1)^2=y+1$$
$$\Longleftrightarrow |x+1|=\sqrt{y+1}$$
$$\Longleftrightarrow x=-1+\sqrt{y+1} \text{ ou } x=-1-\sqrt{y+1}$$

Puisque : $-1-\sqrt{y+1}\leq -1$ et $-1+\sqrt{y+1}\geq -1$ alors l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1;+\infty[$ qui est : $-1+\sqrt{y+1}$.

Donc : $(\forall y\in[-1;+\infty[);(\exists! x\in[-1;+\infty[)/f(x)=y$

Et on a : $f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Longleftrightarrow f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y+1}$$

D'où : $f^{-1} : [-1; +\infty[\rightarrow [-1; +\infty[$

$$x \mapsto -1 + \sqrt{x+1}$$

Exercice 20

1) a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(-1-x) = f(x)$ où $f(x) = x^2 + x + 2$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(-1-x) = (-1-x)^2 + (-1-x) + 2 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 2 = x^2 + x + 2 = f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(-1-x) = f(x)$

b) Déduction :

Pour $x = 0$, on a d'après la question précédente $f(-1) = f(0)$ et $-1 \neq 0$, donc f n'est pas injective.

2) • Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = -\frac{1}{4}$

Soit x un nombre réel, on a : $f(x) = -\frac{1}{4} \Longleftrightarrow x^2 + x + 2 = -\frac{1}{4}$

$$\Longleftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = -2$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -2$$

Puisque l'équation : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$, alors l'équation : $f(x) = -\frac{1}{4}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$, donc : $S = \phi$

• Déduction :

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \neq -\frac{1}{4}$ donc le nombre $-\frac{1}{4}$ n'a pas d'antécédents par l'application f.

D'où l'application f n'est pas surjective.

3) Montrons que : $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

• Soit x un nombre réel, on a :

$f(x) = x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Puisque : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ alors : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$ c'est-à-dire : $f(x) \geq \frac{7}{4}$

donc : $f(x) \in \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \in \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$ par suite : $f(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{7}{4}; +\infty\right[$

• Montrons que: $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit y un élément de $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$, montrons que : $y\in f(\mathbb{R})$

On a : $y\in f(\mathbb{R})\Leftrightarrow(\exists x\in\mathbb{R})/y=f(x)$

Donc, montrons que l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On a : $y=f(x)\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=y$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{7}{4}}\text{ ou }x=-\frac{1}{2}-\sqrt{y-\frac{7}{4}}$$

Donc : $\left(\forall y\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\right),(\exists x\in\mathbb{R})/y=f(x)$ d'où : $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Par suite : $f(\mathbb{R})=\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$.

Exercice 21

• Montrons que l'application f est bijective:

Soit y un élément de l'intervalle $[2;+\infty[$, montrons que l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

On a : $f(x)=y\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2=\frac{y^2-4}{4}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}y=\frac{\sqrt{y^2-4}}{2}\text{ ou }x-\frac{1}{2}y=-\frac{\sqrt{y^2-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\text{ ou }x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$$

On a : $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}-1=\frac{y-2+\sqrt{y^2-4}}{2}$

Puisque : $y\geq 2$ (c'est-à-dire : $y-2\geq 0$) alors : $\frac{y-2+\sqrt{y^2-4}}{2}\geq 0$

donc : $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\geq 1$

D'autre part, on a : $\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}-1=\frac{y-2-\sqrt{y^2-4}}{2}=\frac{-2(y-2)}{y-2+\sqrt{y^2-4}}$ (car $y\neq 2$)

Puisque : $y-2>0$ alors : $\dfrac{-2(y-2)}{y-2+\sqrt{y^2-4}}<0$

c'est-à-dire : $\dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}<1$

Donc l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1;+\infty[$ qui est : $\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$

D'où : $(\forall y\in[2;+\infty[),(\exists! x\in[1;+\infty[)/f(x)=y$ signifie que f est une application bijective de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

- Puisque : $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$$

Alors : $f^{-1}:[2;+\infty[\to[1;+\infty[$

$$x\mapsto \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Exercice 22

1) Montrons que l'application f n'est pas injective :

On a : $f((0;0))=0$ et $f((1;2))=0$ donc : $f((0;0))=f((1;2))$

mais $(0;0)\neq(1;2)$ d'où f n'est pas injective.

2) **a-** Vérifions que : $f((t;t))=t$

Soit $t\in\mathbb{R}$

On a : $f((t;t))=2t-t=t$

b- Déduction :

Montrons que : $(\forall z\in\mathbb{R}),(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2)/f((x;y))=z$

Soit z un nombre réel, on prend : $(x;y)=(z;z)$

Donc : $f((x;y))=f((z;z))=z$

Donc l'application f est surjective.

3) **a-** Déterminons $f(A\times A)$:

On a : $A\times A=\{(1;1);(1;-2);(-2;1);(-2;-2)\}$

Puisque : $f((1;1))=1$; $f((1;-2))=4$; $f((-2;1))=-5$ et $f((-2;-2))=-2$

alors : $f(A\times A)=\{1;4;-5;-2\}$

b- Déterminons $f^{-1}(\{1\})$:

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$, on a : $(x;y) \in f^{-1}(\{1\}) \iff f((x;y)) = 1$

$$\iff 2x - y = 1$$
$$\iff y = 2x - 1$$

Donc : $f^{-1}(\{1\}) = \{(x;2x-1)/x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 23

Remarque : Soit n un entier naturel.

- Si n est pair alors : $f(n) = n + 1$ donc : $f(n)$ est impair.
- Si n est impair alors : $f(n) = n - 1$ donc : $f(n)$ est pair.

donc n et $f(n)$ n'ont pas la même parité.

Montrons que l'application f est injective.

Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que : $f(m) = f(n)$

On a : $f(m) = f(n)$ donc : $f(m)$ et $f(n)$ ont la même parité.

D'où : si $f(m) = f(n)$ alors m et n ont la même parité (d'après la remarque précédente).

On a : $f(n) = f(m) \Rightarrow n + (-1)^n = m + (-1)^m$

$$\Rightarrow n - m = (-1)^m - (-1)^n$$

- Si m et n sont pairs alors : $(-1)^m - (-1)^n = 0$ donc : $m = n$.
- Si m et n sont impairs alors : $(-1)^m - (-1)^n = 0$ donc : $m = n$.

D'où : $f(n) = f(m) \Rightarrow n - m = 0$

$$\Rightarrow n = m$$

Par suite : $(\forall (n;m) \in \mathbb{N}^2)$: $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$, ainsi f est injective.

Exercice 24

Montrons que l'application f est injective

Soit $(n;p)$ et $(m;q)$ deux éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que : $f((n;p)) = f((m;q))$

Montrons que : $(n;p) = (m;q)$

On a : $f((n;p)) = f((m;q)) \Rightarrow 2^n.(2p+1) = 2^m.(2q+1)$

- Supposons que : $n > m$ (c'est-à-dire : $n - m \in \mathbb{N}^*$)

On a : $2^n.(2p+1) = 2^m.(2q+1) \iff 2^{n-m}.(2p+1) = 2q+1$

Puisque : $2q + 1$ est un nombre impair alors : $2^{n-m}(2p+1)$ est aussi un nombre impair, ce qui est impossible car 2^{n-m} est pair donc : $2^{n-m}(2p+1)$ est aussi pair.

Donc : $n \leq m$ **(1)**

- Supposons que : $n < m$ (c'est-à-dire : $n - m \in \mathbb{N}^*$)

On a : $2^n.(2p+1) = 2^m.(2q+1) \Leftrightarrow 2^{m-n}.(2q+1) = 2p+1$

Puisque : $2p+1$ est un nombre impair alors : $2^{m-n}(2q+1)$ est aussi un nombre impair, ce qui est impossible.

Donc : $n \geq m$ **(2)**

d'où de **(1)** et **(2)**, on en déduit que : $m = n$

Par suite : $\begin{cases} 2^n.(2p+1) = 2^m.(2q+1) \\ n = m \end{cases} \Rightarrow 2p+1 = 2q+1$

$\Rightarrow p = q$

Donc : $n = m$ et $p = q$ c'est-à-dire : $(n;p) = (m;q)$.

d'où $(\forall((n,p) \in \mathbb{N}^2); \forall(m,q) \in \mathbb{N}^2)\ f((n;p)) = f((m;q)) \Rightarrow (n;p) = (m;q)$

par suite f est injective

Exercice 25

1) Montrons que l'application f est injective :

Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que : $f(n) = f(m)$.

On a : $f(n) = f(m) \Rightarrow n^3 - n = m^3 - m$

$\Rightarrow n^3 - m^3 - (n-m) = 0$

$\Rightarrow (n-m)(n^2 + nm + m^2) - (n-m) = 0$

$\Rightarrow (n-m)(n^2 + nm + m^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow n - m = 0$ ou $n^2 + nm + m^2 - 1 = 0$

Puisque : $n \geq 1$ et $m \geq 1$ alors : $n^2 + nm + m^2 \geq 3$ c'est-à-dire :

$n^2 + nm + m^2 - 1 \geq 2$

donc : $n^2 + nm + m^2 - 1 \neq 0$

D'où : $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

Par suite : $(\forall (n;m) \in (\mathbb{N}^*)^2)$: $f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$

Par conséquent, f est injective.

2) a- Montrons que $f(n)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(n) = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$

- Si n est pair alors : $n(n^2 - 1)$ est un nombre pair,

c'est-à-dire : $f(n)$ est un nombre pair.

- Si n est impair alors : $n + 1$ est un nombre pair.

donc : $n(n+1)(n-1)$ est un nombre pair, c'est-à-dire $f(n)$ est un nombre pair.

D'où : $f(n)$ est un nombre pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déduction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(n)$ est un nombre pair.

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f(n) \neq 1$

D'où **1** n'a pas d'antécédents par l'application f, par suite f n'est pas surjective.

Exercice 26

1) **a**- Montrons que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 > 0$

Soit x et y deux nombres réels, on a :

$x^2 + (1+y)x = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(1 + 2y + y^2)$

Donc : $x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(3y^2 + 2y + 3)$

Puisque le discriminant du trinôme $3y^2 + 2y + 3$ est le nombre : $\Delta = -32$

Alors : $3y^2 + 2y + 3 > 0$ donc : $\left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(3y^2 + 2y + y^2) > 0$

signifie que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 > 0$

b- Déduction :

Soit x et y deux nombres réels tels que : $f(x) = f(y)$.

Montrons que : $x = y$

On a : $f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 + x^2 + x = y^3 + y^2 + y$

$\Rightarrow x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x - y = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y)(x+y) + (x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + x + y + 1) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x^2 + x(y+1) + y^2 + y + 1) = 0$

donc : $f(x) = f(y) \Rightarrow x - y = 0$ ou $x^2 + x(y+1) + y^2 + y + 1 = 0$

Puisque : $x^2 + x(y+1) + y^2 + y + 1 > 0$ c'est-à-dire :

$x^2 + (1+y)x + 1 + y + y^2 \neq 0$

Alors: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$; donc : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$; $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

D'où f est une application injective.

2) Déterminons $\overset{-1}{f}([3; +\infty[)$:

Soit x un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}([3;+\infty[) &\Leftrightarrow f(x) \in [3;+\infty[\\
&\Leftrightarrow f(x) \geq 3 \\
&\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \\
&\Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 1^3 - 1^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 1^3 + x^2 - 1^2 + x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 3) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x \geq 1 \\
&\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[
\end{aligned}$$

Donc : $f^{-1}([3;+\infty[) = [1;+\infty[$

Exercice 27

1) Soit x un élément de l'intervalle $[2;+\infty[$.

Montrons que : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} \in [1;2[$

On a : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} = 1 + \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2}} = 1 + \sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}$

Puisque : $\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} \geq 0$ alors : $1 + \sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} \geq 1$ donc : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} \geq 1$ **(1)**

Et on a : $1 - \dfrac{4}{x^2} < 1$ donc : $\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} < 1$ c'est-à-dire : $1 + \sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} < 2$

d'où : $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} < 2$ **(2)**

Par suite, de **(1)** et **(2)** on a : $1 \leq \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} < 2$

2) Montrons que f est bijective :on a: $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

Soit y un élément de l'intervalle $[1;2[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}} = y$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = y - 1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = (y-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{x^2} = 1 - (y-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{y(2-y)}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{y(2-y)}} \text{ ou } x = \frac{-2}{\sqrt{y(2-y)}}$$

Et on a : $\dfrac{-2}{\sqrt{y(2-y)}} < 0$

et $\dfrac{2}{\sqrt{y(2-y)}} - 2 = \dfrac{2-2\sqrt{y(2-y)}}{\sqrt{y(2-y)}}$

$$= \frac{2-y-2\sqrt{y(2-y)}+y}{\sqrt{y(2-y)}} = \frac{\left(\sqrt{2-y}-\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{y(2-y)}}$$

Puisque : $\dfrac{\left(\sqrt{2-y}-\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{y(2-y)}} \geq 0$ alors : $\dfrac{2}{\sqrt{y(2-y)}} \geq 2$

Donc l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[2;+\infty[$ qui est : $\dfrac{2}{\sqrt{y(2-y)}}$

D'où : $(\forall y \in [1;2[),(\exists! x \in [2;+\infty[)/f(x) = y$, par suite f est une bijection de l'intervalle $[2;+\infty[$ sur l'intervalle $[1;2[$.

Et on a : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2}{\sqrt{y(2-y)}}$$

Donc : $f^{-1} : [1;2[\to [2;+\infty[$

$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

Exercice 28

1) Déterminons $\overset{-1}{f}(\{-4\})$:

Soit x un nombre réel, on a : $x \in \overset{-1}{f}(\{-4\}) \Leftrightarrow f(x) = -4$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -4$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x \in \{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$$

Donc : $\overset{-1}{f}(\{-4\}) = \{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$

• On a : $f(0) = -4$ et $f(\sqrt{3}) = -4$ donc : $f(0) = f(\sqrt{3})$

Mais $0 \neq \sqrt{3}$ donc l'application f n'est pas injective.

2) Déterminons $f(\mathbb{R})$:

Soit x un nombre réel, on a :

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

Puisque : $\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ alors : $\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \geq - \frac{25}{4}$

c'est-à-dire : $f(x) \geq - \frac{25}{4}$ donc : $f(x) \in \left[- \frac{25}{4}; + \infty\right[$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \in \left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[$ signifie que : $f(\mathbb{R}) \subset \left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[$ **(1)**

- Montrons que : $\left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[\subset f(\mathbb{R})$

Soit y un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On a : $y = f(x) \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = y$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2}\right| = \frac{\sqrt{4y + 25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3 + \sqrt{4y + 25}}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{3 - \sqrt{4y + 25}}{2}$$

Puisque : $\frac{3 + \sqrt{4y + 25}}{2} > 0$ alors l'équation : $x^2 = \frac{3 + \sqrt{4y + 25}}{2}$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ qui sont : $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y + 25}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y + 25}}{2}}$.

Donc : $\left(\forall y \in \left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[\right), (\exists x \in \mathbb{R}) / f(x) = y$ signifie que : $\left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[\subset f(\mathbb{R})$ **(2)**

D'où de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{25}{4}; + \infty\right[$

Exercice 23

1) • Déterminons fog et gof :

Soit x un élément de l'intervalle $[1; + \infty[$,

On a : $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= 1 + \sqrt{g(x) - 1} = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

$$= 1 + \sqrt{(x - 1)^2} = 1 + |x - 1| = 1 + x - 1 = x$$

Donc : $(fog)(x) = x$ pour tout x de l'intervalle $[1; + \infty[$.

Et on a : $(gof)(x) = g(f(x))$
$$= (f(x))^2 - 2f(x) + 2$$
$$= (1 + \sqrt{x-1})^2 - 2(1 + \sqrt{x-1}) + 2$$
$$= 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1 - 2 - 2\sqrt{x-1} + 2 = x$$

Donc : $(gof)(x) = x$ pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$.

Par suite : $fog: [1; +\infty[\to [1; +\infty[$ et $gof: [1; +\infty[\to [1; +\infty[$
$$x \mapsto x \qquad\qquad x \mapsto x$$

• Déduction : $fog = gof = id_{[1;+\infty[}$

2) Montrons que l'application f est bijective :

Soit y un nombre réel de l'intervalle $[1; +\infty[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

On a : $y = f(x) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-1} = y$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = (y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow x = y^2 - 2y + 2$$
$$\Leftrightarrow x = (y-1)^2 + 1$$

Puisque : $(y-1)^2 + 1 \geq 1$ alors l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$ qui est : $g(y) = y^2 - 2y + 2$, donc : $(\forall y \in [1; +\infty[), (\exists! x \in [1; +\infty[) / f(x) = y$ signifie que l'application f est bijective.

Et on a : $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2 - 2y + 2$$

Donc : $f^{-1}: [1; +\infty[\to [1; +\infty[$
$$x \mapsto x^2 - 2x + 2$$

(Remarquer que $f^{-1} = g$).

Exercice 10

1) Déterminons fog :

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 1 - \frac{1}{(g(x))^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 - x$$

Donc : $(fog)(x) = 1 - x$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

D'où : $fog:]0; +\infty[\to]-\infty; 1[$
$$x \mapsto 1 - x$$

2) Montrons que f est une application bijective :

Soit y un nombre réel de l'intervalle $]-\infty; 1[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

On a : $y = f(x) \iff y = 1 - \frac{1}{x^2}$

$$\iff x^2 = \frac{1}{1-y}$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \text{ ou } x = \frac{-1}{\sqrt{1-y}}$$

Puisque : $\frac{1}{\sqrt{1-y}} > 0$ et $\frac{-1}{\sqrt{1-y}} < 0$ alors l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$ qui est : $\frac{1}{\sqrt{1-y}}$

Et on a : $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

$$\iff f^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$$

Donc : $f^{-1} :]-\infty; 1[\to]0; +\infty[$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Exercice 31

1) Montrons que f est une application injective:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[1; +\infty[$ tels que : $f(x) = f(y)$

Montrons que : $x = y$

On a : $f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{y+2} - \sqrt{y-1}$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y+2} = \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} = \frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

$$\Rightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} = 0$$

Puisque : $y + 2 > y - 1 \geq 0$ et $x + 2 > x - 1 \geq 0$ alors : $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-1}$ et $\sqrt{y+2} > \sqrt{y-1}$, donc : $\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} > \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} > 0$

c'est-à-dire : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} < 0$

D'où : $x - y = 0$ ainsi : $x = y$

Par suite : $(\forall (x;y) \in [1;+\infty[^2) ; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Donc : f est injective.

2) Montrons que : $f([1;+\infty[) =]0;\sqrt{3}]$

Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$,

on a : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$

Puisque : $x \geq 1$ alors : $x - 1 \geq 0$ et $x + 2 \geq 3$ donc : $\sqrt{x-1} \geq 0$

et $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{3}$. D'où : $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{3}$

C'est-à-dire : $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c'est-à-dire : $\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Donc : $f(x) \leq \sqrt{3}$

Et on a : $\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} > 0$, donc : $f(x) > 0$ d'où : $0 < f(x) \leq \sqrt{3}$

Par suite : $(\forall x \in [1;+\infty[) \ ; \ f(x) \in]0;\sqrt{3}]$ signifie que : $f([1;+\infty[) \subset]0;\sqrt{3}]$ **(1)**

• Soit y un élément de l'intervalle $]0;\sqrt{3}]$.

Montrons que : $(\exists x \in [1;+\infty[) / y = f(x)$

On a : $y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

et on a : $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \frac{3}{y}$$

Donc : $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = y \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+2} = y + \dfrac{3}{y} \\ 2\sqrt{x-1} = \dfrac{3}{y} - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{1}{4}\left(y + \dfrac{3}{y}\right)^2 \\ x - 1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{y} - y\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\left(y^2 + \dfrac{9}{y^2} - 2\right) \\ x = \dfrac{1}{4}\left(y^2 + \dfrac{9}{y^2} - 2\right) \end{cases}$$

Donc : $y = f(x) \iff x = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{y} - y\right)^2$

Puisque : $1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{y} - y\right)^2 \geq 1$ alors : $(\exists x \in [1; +\infty[) | y = f(x)$

signifie que : $y \in f([1; +\infty[)$

Donc : $(\forall y \in]0; \sqrt{3}]) ; (\exists x \in [1; +\infty[) | y = f(x)$

Donc : $]0; \sqrt{3}] \subset f([1; +\infty[)$ **(2)**

D'où de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f([1; +\infty[) =]0; \sqrt{3}]$

3) Déduction :

On a l'application f est injective et surjective car : $f([1; +\infty[) =]0; \sqrt{3}]$.

Donc f est bijective.

Et on a : $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

$$\iff f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{y} - y\right)^2$$

Donc : $f^{-1} :]0; \sqrt{3}] \to [1; +\infty[$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{x} - x\right)^2$$

Exercice 32

1) Montrons que : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) = B \cap f(E)$

Soit y un élément de $f(\overset{-1}{f}(B))$.

On a : $y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \iff \left(\exists x \in \overset{-1}{f}(B)\right) / y = f(x)$

et on a : $\left(x \in \overset{-1}{f}(B) \iff f(x) \in B\right)$ et $y = f(x) \in f(E)$

Donc : $y \in B$ et $y \in f(E)$ signifie que : $y \in B \cap f(E)$

D'où : $(\forall y \in F); \left(y \in f(\overset{-1}{f}(B)) \Rightarrow y \in B \cap f(E)\right)$

Par suite : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B \cap f(E)$ **(1)**

• Soit y un élément de $B \cap f(E)$.

On a : $y \in B \cap f(E) \iff (y \in B$ et $y \in f(E))$

et on a : $y \in f(E) \iff (\exists x \in E) / y = f(x)$

Donc : $y = f(x)$ et $y \in B$ signifie que : $f(x) \in B$

Donc : $x \in \overset{-1}{f}(B)$, d'où : $f(x) \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$ c'est-à-dire : $y = f(x) \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

donc : $(\forall y \in F); y \in B \cap f(E) \Rightarrow y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

signifie que : $B \cap f(E) \subset f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$ **(2)**

d'où de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) = B \cap f(E)$

3) Montrons que : $f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) = f(A) \cap B$

• Soit y un élément de $f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right)$.

On a : $y \in f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) \Longleftrightarrow \left(\exists x \in A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) / y = f(x)$

et on a : $x \in A \cap \overset{-1}{f}(B) \Longleftrightarrow x \in A$ et $x \in \overset{-1}{f}(B)$

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in B$

signifie que : $y \in B$ et $y \in f(A)$ c'est-à-dire : $y \in f(A) \cap B$

Donc : $(\forall y \in F); y \in f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) \Rightarrow y \in f(A) \cap B$

D'où : $f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) \subset f(A) \cap B$

• Soit y un élément de $f(A) \cap B$.

On a : $y \in f(A) \cap B \Longleftrightarrow y \in f(A)$ et $y \in B$

et on a : $y \in f(A) \Longleftrightarrow (\exists x \in A) / y = f(x)$

Donc : $y = f(x) \in B$ signifie que : $x \in \overset{-1}{f}(B)$

D'où : $x \in A$ et $x \in \overset{-1}{f}(B)$ signifie que : $x \in A \cap \overset{-1}{f}(B)$ signifie que :
$y = f(x) \in f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right)$

Donc : $(\forall y \in F); y \in f(A) \cap B \Rightarrow y \in f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right)$

D'où : $f(A) \cap B \subset f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right)$ **(2)** et par suite : $f\left(A \cap \overset{-1}{f}(B)\right) = f(A) \cap B$

Exercice 33

Montrons que l'application f est surjective, c'est-à-dire :
$(\forall y \in F), (\exists x \in E) / y = f(x)$

• Soit y un élément de F, on a g est une application de F dans E.

Donc : $g(y) \in E$

On prend : $x = g(y)$, donc : $f(x) = f(g(y)) = fog(y)$

Puisque : $fog = id_F$ alors : $(fog)(y) = id_F(y) = y$, donc : $f(x) = y$

D'où : $(\forall y \in F), (\exists x \in E) / y = f(x)$

2) Montrons que : $(gof)(E) = g(F)$

• Soit y un élément de E, on a : $y \in (gof)(E) \Leftrightarrow (\exists x \in E)/y = gof(x)$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in E)/y = g(f(x))$$
$$\Leftrightarrow (\exists f(x) \in f(E))/y = g(f(x))$$
$$\Leftrightarrow y \in g(f(E))$$

Donc : $((gof)(E) = g(f(E)))$ et puisque f est surjective alors : $f(E) = F$

D'où : $(gof)(E) = g(F)$

Exercice 34

Soit B un élément de $\mathcal{P}(F)$.

1) Montrons que : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B$

Soit y un élément de F, tel que : $y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

On a : $y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in \overset{-1}{f}(B)\right)/y = f(x)$ et on a : $x \in \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Donc : $f(x) \in B$ et $y = f(x)$ signifie que : $y \in B$

Donc : $(\forall y \in F); y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \Rightarrow y \in B$

Par suite : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B$ d'où : $(\forall B \in \mathcal{P}(F)); f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B$

2) On suppose que l'application f est surjective.

Montrons que : $(\forall B \in \mathcal{P}(F)); f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) = B$

Soit B un élément de $\mathcal{P}(F)$.

On a d'après la question précédente : $f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) \subset B$ **(1)** et montrons que : $B \subset f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

Soit y un élément de B, on a : $B \subset F$ et f est surjective donc :

$(\exists x \in E)/y = f(x)$

D'où : $y = f(x)$ et $y \in B$ signifie que : $f(x) \in B$ c'est-à-dire : $x \in \overset{-1}{f}(B)$

Donc : $f(x) \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$ c'est-à-dire : $y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

Par suite : $(\forall y \in F); y \in B \Rightarrow y \in f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$ c'est-à-dire : $B \subset f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$ **(2)**

De **(1)** et **(2)**, on déduit que : $B = f\left(\overset{-1}{f}(B)\right)$

D'où si f est une application surjective alors pour tout B de $\mathcal{P}(F)$, on a : $f(\overset{-1}{f}(B)) = B$

• On suppose que : $(\forall B \in \mathcal{P}(F)); f\left(\overset{-1}{f}(B)\right) = B$

Montrons que : f est surjective.

On a : $F \in \mathcal{P}(F)$, donc d'après l'hypothèse, on a : $f(\overset{-1}{f}(F)) = F$

Puisque : $\overset{-1}{f}(F) = E$ alors : $f(E) = F$ donc f est surjective.

Par suite : si pour tout élément de $\mathcal{P}(F)$ tel que : $f(\overset{-1}{f}(B)) = B$, alors : f est surjective.

Exercice 35

1) Soit A un élément de $\mathcal{P}(E)$, montrons que : $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$

Soit x un élément de E tel que : $x \in A$

On a : $f(x) \in f(A)$ donc : $x \in \overset{-1}{f}(f(A))$

D'où : $(\forall x \in E);\quad x \in A \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(f(A))$ signifie que : $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$

Donc : $(\forall A \in \mathcal{P}(E)); A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$

2) On suppose que l'application f est injective.

Montrons que : $(\forall A \in \mathcal{P}(E));\quad A = \overset{-1}{f}(f(A))$

Soit A un élément de $\mathcal{P}(E)$.

• On a d'après la question précédente, $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ **(1)** et montrons que : $\overset{-1}{f}(f(A)) \subset A$

Soit x un élément de E tel que : $x \in \overset{-1}{f}(f(A))$

On a : $x \in \overset{-1}{f}(f(A)) \Longleftrightarrow f(x) \in f(A)$ et on a :

$f(x) \in f(A) \Longleftrightarrow (\exists a \in A) / f(x) = f(a)$

Puisque f est injective alors : $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$

Donc : $x \in A$ d'où : $(\forall x \in E);\ x \in \overset{-1}{f}(f(A)) \Rightarrow x \in A$

signifie que : $\overset{-1}{f}(f(A)) \subset A$ **(2)**

De **(1)** et **(2)**, on déduit que : $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$

Par suite si f est injective alors pour tout élément A de $\mathcal{P}(E)$, on a : $\overset{-1}{f}(f(A)) = A$

• On suppose que : $(\forall A \in \mathcal{P}(E)); \overset{-1}{f}(f(A)) = A$

Montrons que l'application f est injective.

Soit a et b deux éléments de E tels que : $f(a) = f(b)$

On a : $\{b\} = \{a\}$ et $\{a\} = \overset{-1}{f}(f(\{a\}))$

Puisque : $f(a) = f(b)$ alors : $\overset{-1}{f}(f(\{b\})) = \overset{-1}{f}(\{f(a)\})$

Donc : $\{b\} = \{a\}$ signifie que : $a = b$

D'où : $(\forall (a;b) \in E^2)$;$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ signifie que : f est injective.

Exercice 35

Montrons que l'application f est injective:

Soit $(x;y)$ et $(z;t)$ deux éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que : $f((x;y)) = f((z;t))$

On a : $f((x;y)) = f((z;t)) \Rightarrow (x+y)^2 + y = (z+t)^2 + t$

• On suppose que : $x+y < z+t$. On a : $x+y < z+t \Rightarrow x+y+1 \leq z+t$

Donc : $(z+t)^2 \geq (x+y+1)^2$ signifie que :

$$(z+t)^2 \geq (x+y)^2 + y + (2x+y+1)$$

(car $(x+y+1)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y) + 1$)

C'est-à-dire : $(z+t)^2 + t \geq (x+y)^2 + y + (2x+y+1+t)$

Donc : $f((z;t)) \geq f((x;y)) + (2x+y+1+t)$

D'où : $f((z;t)) > f((x;y))$ et cela est contradictoire avec le fait que : $f((x;y)) = f((z;t))$

et par suite on a : $x+y \geq z+t$ **(1)**

• On suppose que : $x+y > z+t$

On a : $x+y > z+t \Leftrightarrow x+y \geq z+t+1$ donc : $(x+y)^2 \geq (z+t+1)^2$

C'est-à-dire : $(x+y)^2 \geq (z+t)^2 + t + (2z+t+1)$

C'est-à-dire : $(x+y)^2 + y \geq (z+t)^2 + t + (2z+t+1+y)$

signifie que : $f((x;y)) \geq f((z;t)) + (2z+t+1+y)$

Donc : $f((x;y)) > f((z;t))$ et cela est contradictoire avec le fait que : $f((x;y)) = f((z;t))$.

Par suite : $x+y \leq z+t$ **(2)**

Donc de **(1)** et **(2)**, on déduit que : $x+y = z+t$

Puisque : $(x+y)^2 + y = (z+t)^2 + t$ alors : $y = t$ et donc : $x = z$

Ainsi : $(x;y) = (z;t)$

Finalement : $(\forall (x;y),(z;t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$; $f((x;y)) = f((z;t)) \Rightarrow (x;y) = (z;t)$ signifie que l'application f est injective.

4 Leçon

Généralités sur les fonctions numériques

Maxi.

Résumé

1 Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée - Comparaison de deux fonctions - Extrêmus d'une fonction

1) Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
- On dit que f est une fonction majorée sur I s'il existe un réel M tel que pour tout élément x de I, on a : $f(x) \leq M$

Autrement dit : f est majorée sur I si: $(\exists M \in \mathbb{R});(\forall x \in I); f(x) \leq M$
- On dit que f est une fonction minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout élément x de I, on a : $f(x) \geq m$

Autrement dit : f est minorée sur I si: $(\exists m \in \mathbb{R});(\forall x \in I); f(x) \geq m$
- On dit que f est une fonction bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Proposition : f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^{*});(\forall x \in I); |f(x)| \leq k$

2) a- Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur leur ensemble de définition D_f et D_g.

On a : $f = g$ signifie que : $(D_f = D_g \text{ et } (\forall x \in D_f); f(x) = g(x))$

b- Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a :
- $f \leq g$ signifie que : $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$
- $f \geq g$ signifie que : $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$

Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

1) Vérifier que f est une fonction impaire.

2) a) Montrer que $f(1)$ est le minimum de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) En déduire que : $(\forall x \in]-\infty;0]); f(x) \leq 2$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 - \sqrt{2x-3}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Montrer que $f(2)$ est le minimum absolu de f sur D.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{1+x^2} - x^2$.

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) $\frac{1}{2}$ est-il un maximum pour la fonction f ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x) > -2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $f(x) = -2\sqrt{2}$.

2) Montrer que $-2\sqrt{2}$ est la valeur minimale absolue de f sur D.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; -2[)\,;\, f(x) \geq 3\sqrt{3}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$.

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que la fonction f est bornée sur D.

Exercice 8

Comparer les fonctions suivantes dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ et $g(x) = 10x + 6$.

2) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $g(x) = x + 2$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ et $g(x) = x + 1$.

Solutions

Exercice 1

1) Vérifions que f est une fonction impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $-x \in \mathbb{R}$,

et $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$

D'où : f est une fonction impaire.

2) a- Montrons que $f(1)$ est le minimum de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

Soit x un élément de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :

$$f(x)-f(1)=x^3-3x+2=x^3-1-3x+3=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$$

Puisque $x\geq 0$ alors : $(x-1)^2(x+2)\geq 0$ c'est-à-dire : $f(x)-f(1)\geq 0$.

Donc : $f(x)\geq f(1)$ d'où; $f(1)$ est le minimum de f sur $[0;+\infty[$

Par suite : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f(x)\geq f(1)$.

b- Déduction :

Soit x un élément de l'intervalle $]-\infty;0]$, on a :

$x\leq 0\Rightarrow -x\geq 0$

$\Rightarrow f(-x)\geq f(1)$ (D'après 2)a))

$\Rightarrow f(-x)\geq -2$

$\Rightarrow -f(x)\geq -2$ (car f est impaire)

$\Rightarrow f(x)\leq 2$

Donc : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $f(x)\leq 2$.

Exercice 2

1) Déterminons D l'ensemble de définition de f :

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D\Leftrightarrow 2x-3\geq 0$

$\Leftrightarrow 2x\geq 3$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{3}{2}$

Donc : $D=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) Montrons que $f(2)$ est le minimum absolu de f sur D :

On doit montrer que : $(\forall x\in D)$; $f(x)\geq f(2)$

Soit $x\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$, on a : $x-1>0$ et $f(x)-f(2)=x-1-\sqrt{2x-3}$

Puisque : $(x-1)^2-(\sqrt{2x-3})^2=x^2-4x+4=(x-2)^2$ et $(x-2)^2\geq 0$.

alors: $(\sqrt{2x-3})^2\leq(x-1)^2$ donc: $\sqrt{2x-3}\leq x-1$

c'est-à-dire: $x-1-\sqrt{2x-3}\geq 0$ par suite: $f(x)-f(2)\geq 0$

D'où: $(\forall x\in D)$; $f(x)\geq f(2)$

Exercice 3

1) Montrons que $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\leq\frac{1}{2}$:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x)-\frac{1}{2}=x\sqrt{1+x^2}-x^2-\frac{1}{2}=\frac{2x\sqrt{1+x^2}-2x^2-1}{2}=-\frac{1}{2}(2x^2+1-2x\sqrt{1+x^2})$$
$$=-\frac{1}{2}(x^2+1-2x\sqrt{1+x^2}+x^2)=-\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-x)^2$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-x)^2 \leq 0$ Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $1+x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} - x > 0$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sqrt{1+x^2} - x \neq 0$ C'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \neq \frac{1}{2}$

D'où : $\frac{1}{2}$ n'est pas un maximum de la fonction f.

Exercice 4

1) Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+2x+3}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 \geq 0$$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (x+1)^2 + 2 \geq 0$ donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ D'où : $D = \mathbb{R}$.

2) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > -2$:

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x) + 2 = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

Puisque : $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ et $(x+1)^2 + 2 > (x+1)^2$

alors : $x^2 + 2x + 3 > (x+1)^2$ donc: $\sqrt{x^2 + 2x + 3} > |x+1|$

On a : $|x+1| \geq -(x+1)$ donc: $\sqrt{x^2 + 2x + 3} > -(x+1)$

C'est-à-dire : $\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1) > 0$. Donc : $f(x) + 2 > 0$

D'où : $(\forall x \in D) ; f(x) > -2$

Exercice 5

1) **a-** Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a : $x \in D \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Donc : $D = [-2;2]$.

b- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation: $f(x) = -2\sqrt{2}$.

L'équation est définie sur D. Soit $x \in D$, on a :

$f(x) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x + 2\sqrt{2}$

Puisque : $-2 \leq x \leq 2$ alors : $2\sqrt{2} - 2 \leq x + 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} + 2$

C'est-à-dire : $x + 2\sqrt{2} > 0$,

donc : $f(x) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{4-x^2})^2 = (x + 2\sqrt{2})^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x\sqrt{2} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

Donc : $S=\{-\sqrt{2}\}$.

3) Montrons que $-2\sqrt{2}$ est la valeur minimale absolue de f sur D.

• On a : $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}\in D$

• Soit x un élément de l'intervalle $[-2;2]$, on a :

$$f(x)+2\sqrt{2}=x+2\sqrt{2}-\sqrt{4-x^2}=\frac{(x+2\sqrt{2})^2-(\sqrt{4-x^2})^2}{x+2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{2x^2+4x\sqrt{2}+4}{x+2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(x+\sqrt{2})^2}{x+2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}$$

Puisque : $2(x+\sqrt{2})^2\geq 0$ et $x+2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}>0$,

alors : $\dfrac{2(x+\sqrt{2})^2}{x+2\sqrt{2}+\sqrt{4-x^2}}\geq 0$ C'est-à-dire : $f(x)+2\sqrt{2}\geq 0$.

Donc : $(\forall x\in D);\ f(x)\geq -2\sqrt{2}$

Finalement $-2\sqrt{2}$ est la valeur minimale absolue de f sur D car :

$$f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\ \text{ et } (\forall x\in D);\ f(x)\geq -2\sqrt{2}.$$

Exercice 6

1) Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f : où $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$; on a : $x\in D \Leftrightarrow x+2\neq 0$ *et* $\dfrac{x^3}{x+2}\geq 0$

$$\Leftrightarrow x\neq -2 \text{ et } x^3(x+2)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq -2 \text{ et } x(x+2)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\neq -2 \text{ et } x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right[$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left[0;+\infty\right[$$

Donc : $D=\left]-\infty;-2\right[\cup\left[0;+\infty\right[$.

2) Montrons que $(\forall x\in\left]-\infty;-2\right[);\ f(x)\geq 3\sqrt{3}$:

Soit x un élément de l'intervalle $\left]-\infty;-2\right[$; on a :

$$f(x)-3\sqrt{3}=\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}-3\sqrt{3}=\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}-\sqrt{27}=\frac{\frac{x^3}{x+2}-27}{\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}+\sqrt{27}}=\frac{x^3-27x-54}{(x+2)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}+\sqrt{27}\right)}$$

Puisque -3 est une racine du polynôme $x^3-27x-54$,

alors : $x^3-27x-54=(x+3)(x^2-3x-18)=(x+3)^2(x-6)$

Donc : $f(x)-3\sqrt{3}=\dfrac{(x+3)^2(x-6)}{(x+2)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}+\sqrt{27}\right)}$

On a : $(x+3)^2(x-6)\leq 0$ car $x<-2$ et $(x+2)\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}+\sqrt{27}\right)<0$

Donc : $\dfrac{(x+3)^2(x-6)}{(x+2)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}+\sqrt{27}\right)}\geq 0$ c'est-à-dire : $f(x)-3\sqrt{3}\geq 0$.

D'où : $(\forall x\in\left]-\infty;-2\right[);\ f(x)\geq 3\sqrt{3}$.

Exercice 7

1) Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f : où $f(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow x > 0$

$$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

Donc : $D =]0; +\infty[$.

2) Montrons que la fonction f est bornée sur D :

Soit $x \in D$, on a : $E(x) \leq x < E(x)+1 \Rightarrow 0 \leq x - E(x) < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x-E(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- Si $x = 1$ alors : $f(1) = 0$
- Si $0 < x < 1$ alors $E(x) = 0$ donc : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ D'où : $0 < f(x) < 1$
- Si $x > 1$ alors : $\sqrt{x} > 1$ donc : $\frac{1}{\sqrt{x}} < 1$. D'où : $0 \leq f(x) < 1$

cela signifie que la fonction f est majorée par 1 et minorée par 0, donc elle est bornée.

Exercice 8

1) On a : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 - (10x + 6)$

$$= x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

On remarque que -1 est une racine du polynôme $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.

En utilisant la division euclidienne du polynôme $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ sur $x+1$, on trouve :

$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = (x+1)(x^2 - 4x - 5)$ et on a : $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$

donc : $f(x) - g(x) = (x+1)^2(x-5)$

On a : $f(-1) - g(-1) = 0$ donc : $f(-1) = g(-1)$ de même $f(5) = g(5)$

et $(\forall x \in]-\infty; 5])$; $f(x) \leq g(x)$ et $(\forall x \in [5; +\infty[)$; $f(x) \geq g(x)$.

2) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$.

Soit x un élément de D_f, on a :

$f(x) - g(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} - (x+2) = (x+2)\left(\frac{x^2}{x^2-1} - 1\right) = (x+2)\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{x+2}{x^2-1}$

Tableau de signe de $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$ -2 -1 1 $+\infty$			
$x+2$	- 0 +	+	+	
x^2-1	+	+ 0 -	0 +	
$f(x)-g(x)$	- 0 +		-	+

Donc : $f \leq g$ sur chacun des intervalles $]-\infty; -2]$ et $]-1; 1[$.

$f \geq g$ sur chacun des intervalles $[-2; -1[$ et $]1; +\infty[$.

3) Déterminons D_f :

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

Donc : $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$

• On a : $D_g = \mathbb{R}$. Soit x un élément de D_f, on a :

- si $x \in]-\infty; -2]$, on a: $g(x) < 0$ donc : $f(x) - g(x) > 0$ (car $f(x) \geq 0$).

- si $x \in [0; +\infty[$, on a: $g(x) > 0$, donc :

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - (x+1) = \frac{x^2 + 2x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x+1)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x+1)}$$

Puisque : $\sqrt{x^2 + 2x} + (x+1) > 0$ alors : $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x+1)} < 0$

C'est-à-dire : $f(x) - g(x) < 0$

D'où : $f < g$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et $f > g$ sur l'intervalle $]-\infty; -2]$.

2 Variations d'une fonction

Définition: Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

• f est strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si :
$(\forall (x_1; x_2) \in I^2)$; $(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$

• f est strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si :
$(\forall (x_1; x_2) \in I^2); (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

• f est constante sur l'intervalle I si et seulement si :
$(\forall (x_1; x_2) \in I^2); f(x_1) = f(x_2)$

Remarque : • On peut également étudier la monotonie d'une fonction f sur un intervalle I, en étudiant le signe du taux d'accroissement $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ où x_1 et x_2 sont deux réels distincts de I.

• On dit que f est strictement monotone sur I si elle est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

3 Parité et sens de variations

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à zéro.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ inclus dans D_f et I' le symétrique de I par rapport à zéro.

• Si f est une fonction paire, alors:

- f est strictement croissante sur I, si et seulement si f est strictement décroissante sur I'.

- f est strictement décroissante sur I, si et seulement si f est strictement croissante sur I'.

• Si f est une fonction impaire, alors f a la même monotonie sur les deux intervalles I et I'.

Exercices

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Étudier la parité de la fonction f.

2) Étudier la monotonie de f sur D.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{|x|}$.

1) Montrer que f est une fonction paire.

2) Étudier la monotonie de f sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

3) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) a- Vérifier que f est une fonction impaire.

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 < f(x) < 1$

2) a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); (f(x))^2 = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$

b- Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b- Montrer que : $(\forall x \in]-\infty;0]); f(x) < \dfrac{1}{2}$.

2) a- Soit x et y deux éléments distincts de D.

Montrer que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{f(x)+f(y)-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}}$.

b- Étudier la monotonie de f sur D et dresser son tableau de variations.

c- En déduire que : $(\forall x \in]-\infty;0]); 0 \leq f(x) < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{x^2+2x+1}$.

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); 1 \leq f(x) \leq 2$.

2) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a- Vérifier que : $(\forall x \in D); f(x) = 1 + (g(x))^2$

b- Déterminer la monotonie de la fonction g sur D puis étudier le signe de g sur D.

c- En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ $]-1;1]$ et $]-\infty;-1[$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) Vérifier que f est une fonction paire.

2) a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});(f(x))^2=1+\dfrac{2|x|}{1+x^2}$

b- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});0<(f(x))^2\leq 2$.

c- Montrer que $\sqrt{2}$ est la valeur maximale absolue de f.

3) a- Soit x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^+$:

Montrer que : $\dfrac{(f(x))^2-(f(y))^2}{x-y}=\dfrac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b- En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1) a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\left|x+\frac{1}{2}\right|<\sqrt{x^2+x+1}$.

b- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)>-\frac{1}{2}$

2) a- Soit x et y deux nombres réels distincts;

Montrer que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{f(x)+f(y)+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}$

b- En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x^3$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation : (E): $f(x)=g(x)$

a- Vérifier que 0 est une solution de l'équation (E).

b- Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation (E).

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+m}$.

1) a- Déterminer suivant les valeurs du paramètre m, l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Vérifier que f est une fonction impaire.

2) On suppose que $m>0$.

a- Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{m};+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;\sqrt{m}[$.

b- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$

c- En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});|f(x)|\leq\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$.

Exercice 9

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x)=\sqrt{x^2-2}$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 2$$
$$\Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; +\infty[$$

Donc : $D =]-\infty ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; +\infty[$

b- Étudions la parité de f :

Soit $x \in D$, on a : $-x \in D$ et pour tout x de D, on a :

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-2}=\sqrt{x^2-2}=f(x)$$

Donc : f est une fonction paire.

2) Étudions la monotonie de f sur D :

Puisque f est une fonction paire alors il suffit d'étudier sa monotonie sur l'intervalle $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[\sqrt{2} ; +\infty[$ tels que : $x < y$.

On a : $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2-2 < y^2-2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2} < \sqrt{y^2-2}$$
$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Puisque f est paire, donc elle inverse la monotonie sur l'intervalle $]-\infty ; -\sqrt{2}]$, alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -\sqrt{2}]$.

Exercice 10

1) Montrons que f est une fonction paire. où $f(x)=x^2+\dfrac{2}{|x|}$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et on a :

$f(-x)=(-x)^2+\dfrac{2}{|-x|}=x^2+\dfrac{2}{|x|}=f(x)$ Donc f est une fonction paire.

2) Étudions la monotonie de f sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$:

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $x \neq y$, on a :

$$f(x)-f(y)=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)-\left(y^2+\frac{2}{y}\right)=(x-y)(x+y)+\frac{2}{xy}(y-x)=(x-y)\left(x+y-\frac{2}{xy}\right)$$

Donc : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-\dfrac{2}{xy}$

- Monotonie de f sur l'intervalle $]0;1]$:

On a : $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+y < 2 \\ 0 < xy < 1 \end{cases}$ (car $x \neq y$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x+y < 2 \\ -\frac{2}{xy} < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y-\frac{2}{xy} < 0$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$.

• Monotonie de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$:

On a : $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 2 \\ xy > 1 \end{cases}$ (car $x \neq y$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y > 2 \\ -\frac{2}{xy} > -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y-\frac{2}{xy} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3) Déduction : La fonction f est paire signifie qu'elle inverse la monotonie sur deux intervalles symétriques par rapport à l'origine 0, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$
f	↘ 3 ↗ ↘ 3 ↗

Exercice 11

1) a- Vérifions que f est une fonction impaire: On a : $D=\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ est : $f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

b- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 < f(x) < 1$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $|f(x)|=\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

Puisque : $x^2+1 > x^2$ alors : $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$ C'est-à-dire : $\sqrt{1+x^2} > |x|$

donc : $\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ signifie que : $|f(x)| < 1$ D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 < f(x) < 1$

2) a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); (f(x))^2 = 1-\frac{1}{1+x^2}$

Soit x un nombre réel, on a :

$$(f(x))^2=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2=\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (f(x))^2 = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

b- Étudions la monotonie de f sur $\mathbb{R}$:

Puisque la fonction f est impaire alors il suffit d'étudier sa monotonie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[0;+\infty[$ tels que : $x < y$.

On a : $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 + x^2 < 1 + y^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x^2} < 1 - \frac{1}{1+y^2} \\
&\Rightarrow (f(x))^2 < (f(y))^2 \\
&\Rightarrow |f(x)| < |f(y)|
\end{aligned}$$

Puisque : $f(x) \geq 0$ et $f(y) \geq 0$ (car $x \geq 0$ et $y \geq 0$)

Alors : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ Donc : $(\forall (x;y) \in ([0;+\infty[)^2) ; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

D'où la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et puisque f est impaire donc conserve la même monotonie sur l'intervalle $]-\infty;0]$, par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

1) **a-** Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$

Soit x un nombre réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[
\end{aligned}$$

Donc : $D =]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$

b- Montrons que $(\forall x \in]-\infty;0]) ; f(x) < \frac{1}{2}$:

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;0]$, on a : $f(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x}$

Puisque : $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ alors : $0 \leq x^2 - x < \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Donc : $\sqrt{x^2 - x} < \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2 - x} < \left|x - \frac{1}{2}\right|$

Et on a : $x \leq 0$ donc : $x - \frac{1}{2} < 0$ d'où : $\left|x - \frac{1}{2}\right| = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Par suite : $\sqrt{x^2 - x} < -\left(x - \frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire : $\sqrt{x^2 - x} + x - \frac{1}{2} < 0$

Donc : $f(x) - \frac{1}{2} < 0$ D'où : $(\forall x \in]-\infty;0]) ; f(x) < \frac{1}{2}$.

2) **a-** Montrons que $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) + f(y) - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}$:

Soit x et y deux éléments de D tels que : $x \neq y$, on a :

$$f(x) - f(y) = x + \sqrt{x^2 - x} - y - \sqrt{y^2 - y} = x - y + \frac{x^2 - x - y^2 + y}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{y^2 - y}}$$

$$= x-y+\frac{(x-y)(x+y)-(x-y)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}} = (x-y)\left(1+\frac{x+y-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}}\right)$$

$$= (x-y)\left(\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}+x+y-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}}\right) = (x-y)\left(\frac{f(x)+f(y)-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}}\right)$$

Donc : $(\forall(x;y)\in D^2);(x\neq y)$; $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{f(x)+f(y)-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}}$

b- • Étudions la monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty;0]$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]-\infty;0]$ tels que : $x\neq y$.

On a : $\begin{cases} f(x) < \frac{1}{2} \\ f(y) < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)+f(y) < 1$

$$\Rightarrow f(x)+f(y)-1 < 0$$

et on a : $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y} > 0$, donc : $\dfrac{f(x)+f(y)-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}} < 0$

C'est-à-dire : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

• Étudions la monotonie de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $x\neq y$.

On a : $x\geq 1 \Rightarrow x^2-x\geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x}\geq 0$$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x^2-x}\geq 1$$

$$\Rightarrow f(x)\geq 1$$

et puisque $f(y) > 0$ alors : $\dfrac{f(x)+f(y)-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{y^2-y}} > 0$

C'est-à-dire : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$, donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, par suite le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f		$\searrow$	0		1	$\nearrow$	

c- Déduction : La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$, donc : $x\leq 0 \Rightarrow f(x)\geq f(0)$

$$\Rightarrow f(x)\geq 0$$

Remarque: D'après le tableau de variations: $\forall x\in]-\infty;0]$; $f(x)\geq 0$

D'où : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $f(x)\geq 0$

et on a : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $f(x) < \frac{1}{2}$ (d'après 1)b)).

Donc : $(\forall x\in]-\infty;0])$; $0\leq f(x) < \frac{1}{2}$

Exercice 13

1) **a-** Déterminer D l'ensemble de définition de f : où $f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2+2x+1}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D \Leftrightarrow x^2+2x+1\neq 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\neq -1$$

Donc : $D=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

b- Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);1\leq f(x)\leq 2$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)-1=\frac{2x^2+2}{x^2+2x+1}-1=\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

Puisque : $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\geq 0$, alors : $f(x)\geq 1$ (1)

D'autre part on a : $2-f(x)=2-\frac{2x^2+2}{x^2+2x+1}=\frac{4x}{(x+1)^2}$

Puisque : $\frac{4x}{(x+1)^2}\geq 0$ (car $x\in\mathbb{R}^+$) alors : $f(x)\leq 2$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);1\leq f(x)\leq 2$

2) **a-** Vérifions que : $(\forall x\in D);f(x)=1+(g(x))^2$

Soit x un élément de $\mathbb{R}-\{-1\}$,

on a : $1+(g(x))^2=1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2}{x^2+2x+1}=f(x)$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});f(x)=1+(g(x))^2$

b- Déterminons la monotonie de g sur D :

Soit $x\in D$, on a : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1+\frac{-2}{x+1}$

Donc le tableau de variations de la fonction g est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	↗	‖	↗

• Tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Donc : • $g(x)\geq 0$ si $x\in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$ • $g(x)\leq 0$ si $x\in]-1;1]$

c- Déduction de la monotonie de f :

• Monotonie de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $x<y$,

on a : $x<y \Rightarrow g(x)<g(y)$ (car g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$)

$$\Rightarrow (g(x))^2 < (g(y))^2 \text{ (car } \forall x\in[1;+\infty[\,;g(x)\geq 0)$$
$$\Rightarrow 1+(g(x))^2 < 1+(g(y))^2$$
$$\Rightarrow f(x)<f(y)$$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

• Monotonie de f sur l'intervalle $]-1;1]$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]-1;1]$ tels que : $x<y$,

on a : $x<y \Rightarrow g(x)<g(y)$ (car g est strictement croissante sur $]-1;1]$)

$$\Rightarrow (g(x))^2 > (g(y))^2 \quad \text{(car } \forall x\in\,]-1;1]\,;g(x)\leq 0)$$
$$\Rightarrow 1+(g(x))^2 > 1+(g(y))^2$$
$$\Rightarrow f(x)>f(y)$$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1;1]$.

• Monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]-\infty;-1[$ tels que : $x<y$,

on a : $x<y \Rightarrow g(x)<g(y)$ (car g est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$)

$$\Rightarrow (g(x))^2 < (g(y))^2 \text{ (car } \forall x\in\,]-\infty;-1[\,;g(x)>0)$$
$$\Rightarrow 1+(g(x))^2 < 1+(g(y))^2$$
$$\Rightarrow f(x)<f(y)$$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Exercice 14

1) Vérifions que f est une fonction paire: où

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $-x\in\mathbb{R}$ et : $f(-x)=\dfrac{|-x|+1}{\sqrt{1+(-x)^2}}=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{1+x^2}}=f(x)$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=f(x)$ D'où f est une fonction paire.

2) a- Montrons que $(\forall x\in\mathbb{R});(f(x))^2=1+\dfrac{2|x|}{1+x^2}$:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a:

$$(f(x))^2=\left(\frac{|x|+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{2|x|}{x^2+1}=1+\frac{2|x|}{x^2+1}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});(f(x))^2=1+\dfrac{2|x|}{x^2+1}$

b- Déduction :

Soit x un réel $\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{1+x^2}>0$ et $|x|+1>0$, donc : $\dfrac{|x|+1}{\sqrt{1+x^2}}>0$

C'est-à-dire : $f(x)>0$ (1)

Et on a :

$$(f(x))^2-2=1+\frac{2|x|}{1+x^2}-2=\frac{2|x|}{1+x^2}-1=\frac{-(x^2-2|x|+1)}{1+x^2}=\frac{-(|x|-1)^2}{1+x^2}$$

Puisque : $-(|x|-1)^2\leq 0$ et $1+x^2>0$ alors : $\frac{-(|x|-1)^2}{1+x^2}\leq 0$

C'est-à-dire : $(f(x))^2\leq 2$ (2). De (1) et (2) on en déduit que : $0<(f(x))^2\leq 2$

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R});0<(f(x))^2\leq 2$

c- Montrons que $\sqrt{2}$ est la valeur maximale absolue de f :

- On a : $f(1)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
- Soit x un réel, on a : $0<(f(x))^2\leq 2$ donc : $\sqrt{(f(x))^2}\leq\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $|f(x)|\leq\sqrt{2}$

Puisque : $f(x)>0$ alors : $f(x)\leq\sqrt{2}$ Donc : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)\leq\sqrt{2}$

D'où : $\sqrt{2}$ est la valeur maximale absolue de f.

3) **a-** Montrons que : $(\forall(x;y)\in(\mathbb{R}^*)^2);(x\neq y)$; on a :

$$\frac{(f(x))^2-(f(y))^2}{x-y}=\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^*$ tels que : $x\neq y$, on a :

$$\begin{aligned}(f(x))^2-(f(y))^2&=1+\frac{2|x|}{1+x^2}-1-\frac{2|y|}{1+y^2}=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2y}{1+y^2}\\&=\frac{2(x+xy^2-y-x^2y)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{2(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\end{aligned}$$

Donc : $\frac{(f(x))^2-(f(y))^2}{x-y}=\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b- Étudions la monotonie de f sur $\mathbb{R}$:

f est une fonction paire donc il suffit d'étudier sa monotonie sur $\mathbb{R}^*$.

- Déterminons la monotonie de f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $x\neq y$ on a :

$\begin{cases}x\geq 1\\y\geq 1\end{cases}\Rightarrow xy>1$ (car $x\neq y$)

$\Rightarrow 1-xy<0$

On a : $1+x^2>0$ et $1+y^2>0$ donc : $\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}<0$ Puisque :

$\frac{(f(x))^2-(f(y))^2}{x-y}=(f(x)+f(y)).\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

et $f(x)+f(y)>0$ alors le signe de $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est celui de $\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

donc : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$

D'où : f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Puisque f est paire donc elle inverse la monotonie sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.

• Déterminons la monotonie de f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[-1;0]$:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[0;1]$ tels que : $x \neq y$,

on a :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$$
$$\Rightarrow 1 - xy > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

(car $f(x)+f(y) > 0$)Donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Et puisque f est paire alors f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;0]$.

• Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	

Exercice 15

1) a- Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}); \left|x+\frac{1}{2}\right| < \sqrt{x^2+x+1}$:

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a :
$$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)^2 = x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Donc : $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 > \left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)^2$ D'où : $\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$

Ainsi :$(\forall x \in \mathbb{R}); \left|x+\frac{1}{2}\right| < \sqrt{x^2+x+1}$

b- Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > -\frac{1}{2}$: où $f(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a : $\left|x+\frac{1}{2}\right| \geq -\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Puisque : $\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$ alors : $\sqrt{x^2+x+1} > -\left(x+\frac{1}{2}\right)$

C'est-à-dire : $\sqrt{x^2+x+1} + x > -\frac{1}{2}$ Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > -\frac{1}{2}$

2) a- Montrons que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2);(x \neq y)$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)+f(y)+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}$

On a :

$f(x)-f(y)=x+\sqrt{x^2+x+1}-y-\sqrt{y^2+y+1}=x-y+\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2+y+1}$

$$=x-y+\frac{x^2+x+1-y^2-y-1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}$$

$$=x-y+\frac{(x-y)(x+y)+(x-y)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}=x-y+\frac{(x-y)(x+y+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}$$

$$=(x-y)\left(1+\frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}\right)$$

$$=(x-y)\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}+x+y+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}\right)=(x-y)\left(\frac{f(x)+f(y)+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}\right)$$

Donc : $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);(x\neq y)$; on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{f(x)+f(y)+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}$

b- Déduction:

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $x\neq y$, on a :

d'après la question 1)b) on a : $f(x)>-\frac{1}{2}$ et $f(y)>-\frac{1}{2}$

donc : $f(x)+f(y)>-1$ c'est-à-dire : $f(x)+f(y)+1>0$

et on a : $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}>0$

donc : $\frac{f(x)+f(y)+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2+y+1}}>0$ D'où : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) **a**- Vérifions que le nombre 0 est une solution de l'équation $(E):f(x)=g(x)$

On a : $f(0)=1$ et $g(0)=1$ donc: $f(0)=g(0)$, cela signifie que le nombre 0 est une solution de l'équation (E).

b- Montrons que le nombre 0 est l'unique solution de (E):

On a la fonction $x\mapsto -x^3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc on déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

- $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)$ et $g(x)<g(0)$

  $\Rightarrow f(x)>1$ et $g(x)<1$

  $\Rightarrow g(x)<1<f(x)$

C'est-à-dire : $(\forall x\in]0;+\infty[):f(x)\neq g(x)$.

- $x<0\Rightarrow f(x)<f(0)$ et $g(x)>g(0)$

  $\Rightarrow f(x)<1$ et $g(x)>1$

  $\Rightarrow f(x)<1<g(x)$

C'est-à-dire : $(\forall x\in]0;+\infty[):f(x)\neq g(x)$.

D'où : $(\forall x\in\mathbb{R}^*):f(x)\neq g(x)$, cela signifie que le nombre 0 est l'unique solution de l'équation (E).

Exercice 16

1) a- Déterminons D_m l'ensemble de définition de f : où $f(x)=\dfrac{x}{x^2+m}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $x\in D_m \Leftrightarrow x^2+m\neq 0$ On a trois cas:

- 1er cas: si $m>0$ alors $D_m=\mathbb{R}$
- 2ème cas: si $m=0$ alors $D_0=\mathbb{R}^*$
- 3ème cas: si $m<0$ alors $D_m=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{-m},-\sqrt{-m}\}$

b- Vérifions que f est une fonction impaire.

La proposition: "$\forall x\in D_m\ :-x\in D_m$" est toujours vraie quel que soit la valeur du paramètre m.

et on a pour tout x de D_m : $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+m}=-\dfrac{x}{x^2+m}=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

2) On suppose que $m>0$

a-Étudions la monotonie de f sur chacun des intervalles $[0;\sqrt{m}]$ et $[\sqrt{m};+\infty[$.

Soit x et y deux réels de l'intervalle $[0;+\infty[$ tels que $x\neq y$.

On a:

$$f(x)-f(y)=\frac{x}{x^2+m}-\frac{y}{y^2+m}=\frac{xy^2+xm-x^2y-ym}{(x^2+m)(y^2+m)}=\frac{m(x-y)-xy(x-y)}{(x^2+m)(y^2+m)}$$
$$=\frac{(x-y)(m-xy)}{(x^2+m)(y^2+m)}$$

Donc: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{m-xy}{(x^2+m)(y^2+m)}$

* Monotonie de f sur l'intervalle $[\sqrt{m};+\infty[$.

On a: $\begin{cases}x\geq\sqrt{m}\\ y\geq\sqrt{m}\end{cases}\Longrightarrow xy>m$ (car $x\neq y$)

$$\Longrightarrow m-xy<0$$

Puisque: $(x^2+m)(y^2+m)>0$ alors $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\sqrt{m};+\infty[$.

* Monotonie de f sur l'intervalle $[0;\sqrt{m}]$.

On a: $\begin{cases}0\leq x\leq\sqrt{m}\\ 0\leq y\leq\sqrt{m}\end{cases}\Longrightarrow xy<m$

$$\Longrightarrow m-xy>0$$

Puisque $(x^2+m)(y^2+m)>0$ alors $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;\sqrt{m}]$

b- Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R}^+);0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$

Soit $x\in\mathbb{R}^+$, on a: $x\geq 0$ et $x^2+m>0$ (car $m>0$)

c'est-à-dire $\frac{x}{x^2+m} \geq 0$ Donc $f(x) \geq 0$

D'autre part on a:

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} - f(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{x}{x^2+m} = \frac{x^2+m-2\sqrt{m}\,x}{2\sqrt{m}(x^2+m)} = \frac{(x-\sqrt{m})^2}{2\sqrt{m}(x^2+m)}$$

Puisque: $(x-\sqrt{m})^2 \geq 0$ et $\sqrt{m}(x^2+m) > 0$ alors $\frac{1}{2\sqrt{m}} - f(x) \geq 0$ Donc $f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$

Par suite: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ; 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$

c- Déduction:

- Si $x \in \mathbb{R}^+$ alors $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$ donc $|f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$
- Si $x \in \mathbb{R}^-$ alors $-x \in \mathbb{R}^+$ donc :

$$0 \leq f(-x) \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

c'est-à-dire: $0 \leq -f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$ (car f est impaire)

d'où: $-\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq f(x) \leq 0$ par suite: $|f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$

Ainsi: $(\forall x \in \mathbb{R}); |f(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}$

4 Monotonie de la composée de deux fonctions monotones

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J tels que : Pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$

- Si f est strictement croissante sur I et g strictement croissante sur J, alors la fonction gof est strictement croissante sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I et g strictement décroissante sur J, alors la fonction gof est strictement croissante sur I.
- Si f est strictement croissante sur I et g strictement décroissante sur J, alors la fonction gof est strictement décroissante sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I et g strictement croissante sur J, alors la fonction gof est strictement décroissante sur I.

Exercices

Exercice 17

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x^2-3}{2x^2+1}$

1) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}); -3 \leq f(x) < \frac{1}{2}$

2) Montrer que $f = v \circ u$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 18

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 8}$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b- Montrer que : $(\forall x \in D) ; \frac{1}{2} \leq f(x) < 1$

2) On considère les deux fonctions u et v définies par:

$u(x) = x^2 - 4x + 5$ et $v(x) = \frac{x+1}{x+3}$

a- Donner le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

b- En utilisant les variations des fonctions u et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty ; 2]$ et $[2 ; +\infty[$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + x}$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b- Étudier la parité de f.

2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis en déduire sa monotonie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

3) Montrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; 0 < f(x) < 1$

4) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par: $g(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^4 + 2x^3 + 2}$

a- Montrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[) \; ; \; g(x) = (f \circ f)(x)$

b- En déduire la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 20

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x}{x+1}$

1) a- Dresser le tableau de variations de f.

b- Tracer dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f.

2) Soit g et h deux fonctions définies par:

$g(x) = x^2 + 2x$ et $h(x) = \frac{3x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction h

b- Vérifier que: $(\forall x \in D) ; h(x) = (g \circ f)(x)$

c- Donner le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 21

Soit f et g deux fonctions numériques définies par: $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $g(x) = x\sqrt{x}$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g

b- Montrer que la fonction g est strictement croissante sur D

c- En déduire que: $g([0;1]) \subset [0;1]$ et $g([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Déterminer les variations de la fonction f.

3) En utilisant les variations de chacune des fonctions f et g, étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = x^3 - 2x\sqrt{x} + 2$.

Exercice 22

Soit f et g deux fonctions numériques définies par:

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que: $f(\mathbb{R}) = [-3;+\infty[$

2) Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

3) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par:

$$h(x) = \frac{x - 4\sqrt{x} + 1}{x}$$

a- Vérifier que: $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $h(x) = fog(x)$

b- Donner le tableau de variations de la fonction h.

c- Montrer que: $(\forall x \in [1;+\infty[) ; -2 \leq h(x) < 1$.

Solutions

Exercice 17

1) Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -3 \leq f(x) < \frac{1}{2}$ où $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x^2+1}$

Soit x un nombre réel, on a: $f(x) + 3 = \dfrac{x^2-3}{2x^2+1} + 3 = \dfrac{7x^2}{2x^2+1}$

Puisque $\dfrac{7x^2}{2x^2+1} \geq 0$ alors $f(x) + 3 \geq 0$ donc $f(x) \geq -3$

D'autre part on a: $\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - \dfrac{x^2-3}{2x^2+1} = \dfrac{7}{2(2x^2+1)}$

Puisque $\dfrac{7}{2(2x^2+1)} > 0$ alors $\frac{1}{2} - f(x) > 0$ donc $f(x) < \frac{1}{2}$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; -3 \leq f(x) < \frac{1}{2}$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

2) Montrons que $f = vou$

Soit x unnombreréel,ona: $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x^2+1} = \dfrac{u(x)-3}{2u(x)+1} = v(u(x)) = vou(x)$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = vou(x)$

3) Déduction:- Tableau de variations de u :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u	$\searrow$	0	$\nearrow$

Tableau de variations de v :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
v	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

- Sur l'intervalle $]-\infty;0]$

La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et on a: $(\forall x \in]-\infty;0]) ; u(x) \geq 0$

et la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

- Sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on a: $(\forall x \in [0;+\infty[) ; u(x) \geq 0$ et la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$,

Donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

- Tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	-3	$\nearrow$

Exercice 18

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f. où $f(x) = \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}$

Soit x un réel , on a: $x \in D \Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 \neq 0$

Puisque le discriminant du trinôme $x^2 - 4x + 8$ est le nombre $\Delta = -16$ alors $x^2 - 4x + 8 \neq 0$ Donc : $x \in D \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ D'où: $D = \mathbb{R}$.

b- Montrons que: $(\forall x \in D) ; \frac{1}{2} \leq f(x) < 1$

Soit x un réel , on a:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8} - 1 = \frac{x^2-4x+6-x^2+4x-8}{x^2-4x+8} = \frac{-2}{x^2-4x+8}$$

Puisque $x^2 - 4x + 8 > 0$ car le discriminant du trinôme $x^2 - 4x + 8$ est strictement négatif et le coefficient de x^2 est strictement positif alors $\dfrac{-2}{x^2-4x+8}<0$ C'est-à-dire $f(x)-1<0$ donc $f(x)<1$ (1) et on a:

$$f(x)-\frac{1}{2}=\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}-\frac{1}{2}=\frac{2x^2-8x+12-x^2+4x-8}{2(x^2-4x+8)}$$

$$=\frac{x^2-4x+4}{2(x^2-4x+8)}=\frac{(x-2)^2}{2(x^2-4x+8)}$$

Puisque $(x-2)^2\geq 0$ et $2(x^2-4x+8)>0$ alors $\dfrac{(x-2)^2}{2(x^2-4x+8)}\geq 0$

c'est-à-dire $f(x)-\dfrac{1}{2}\geq 0$ donc $f(x)\geq\dfrac{1}{2}$ (2)

D'où de (1) et (2) on déduit que: $\dfrac{1}{2}\leq f(x)<1$

Par suite: $(\forall x\in\mathbb{R});\ \dfrac{1}{2}\leq f(x)<1$

2) a- * Tableau de variations de la fonction u : Pour tout réel x, on a: $u(x)=1\times(x-2)^2+1$

Puisque $1>0$ alors le tableau de variations de la fonction u est le suivant:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
u		$\searrow$	1	$\nearrow$	

* Tableau de variations de la fonction v : On a: $v(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$ et $D_v=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Pour tout x de D_v, on a: $v(x)=\dfrac{x+3-2}{x+3}=1+\dfrac{-2}{x+3}$

Puisque $-2<0$ alors le tableau de variations de la fonction v est le suivant:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
u		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

b- Étudions les variations de la fonction f : Pour tout réel x, on a:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}=\frac{(x^2-4x+5)+1}{(x^2-4x+5)+3}=\frac{u(x)+1}{u(x)+3}=v(u(x))=(v\circ u)(x)$$

* Monotonie de f sur l'intervalle $]-\infty;2]$:

On a la fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$ donc

$$x\leq 2\Longrightarrow u(x)\geq u(2)$$
$$\Longrightarrow u(x)\geq 1$$

c'est-à-dire $u(]-\infty;2])\subset[1;+\infty[$ On a donc:

- La fonction u est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$
- $u(]-\infty;2]\subset[1;+\infty[)$

• La fonction v est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

D'où: La fonction $f=vou$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$.

• Monotonie de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

donc: $x\geq 2 \Longrightarrow u(x)\geq u(2)$

$\Longrightarrow u(x)\geq 1$

C'est-à-dire : $u([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$

On a donc:

• La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

• $u([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$

• v est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

D'où la fonction $f=vou$ est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Exercice 19

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x)=\dfrac{|x|}{x^3+x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $x\in D \Longleftrightarrow x^3+x\neq 0$

$$\Longleftrightarrow x(x^2+1)\neq 0$$
$$\Longleftrightarrow x\neq 0$$
$$\Longleftrightarrow x\in\mathbb{R}^*$$

Donc $D=\mathbb{R}^*$

b- Études la parité de f

Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a $-x\in\mathbb{R}^*$ et:

$$f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^3+(-x)}=\frac{|x|}{-x^3-x}=-\frac{|x|}{x^3+x}=-f(x)$$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}^*);(-x\in\mathbb{R}^* \; et \; f(-x)=-f(x))$ D'où f est une fonction impaire.

2) • Montrons que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

On a: $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\, f(x)=\dfrac{|x|}{x^3+x}=\dfrac{x}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}$

Soit x et y deux réels de l'intervalle $]0;+\infty[$ tels que $x<y$, on a:

$$x<y\Longrightarrow 0<x^2+1<y^2+1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{y^2+1}<\frac{1}{x^2+1}$$
$$\Longrightarrow f(y)<f(x)$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

• Déduction:

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et f est une fonction impaire donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

3) Montrons que: $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;0 < f(x) < 1$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

On a: $f(x) > 0$, d'autre part, on a: $x > 0 \Longrightarrow x^2+1 > 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x^2+1} < 1$$
$$\Longrightarrow f(x) < 1$$

Donc: $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;0 < f(x) < 1$

4) a- Montrons que: $(\forall x \in]0;+\infty[)\,;g(x)=(fof)(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a:

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{1}{(f(x))^2+1}=\frac{1}{\dfrac{1}{(x^2+1)^2}+1}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2+1}$$

$$=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}=g(x)$$

Donc: $(\forall x \in]0;+\infty[)\,,g(x)=(fof)(x)$

b- Déduction:

On a f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

et $f(]0;+\infty[) \subset]0;+\infty[$ (car $\forall x \in]0;+\infty[\ ;0 < f(x) < 1$)

Donc la fonction $g=fof$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Exercice 20

1) a- Tableau de variations de la fonction f. où $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

On a: $D=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Pour tout $x \in D$, on a : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1+\dfrac{-1}{x+1}$

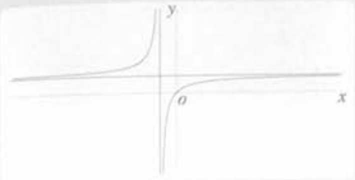
Puisque $-1 < 0$ alors f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$\nearrow$	||	$\nearrow$

• Tableau de quelques valeurs prises par f :

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	2	-1	0	$\frac{1}{2}$



2) **a-** Déterminons D :

On a: $h(x)=\dfrac{3x^2+2x}{(x+1)^2}$

Soit x un réel , on a: $\quad x\in D \Leftrightarrow (x+1)^2\neq 0$

$$\Leftrightarrow x+1\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\neq -1$$

$$\Leftrightarrow x\in \mathbb{R}-\{-1\}$$

Donc: $D=\mathbb{R}-\{-1\}$

b- Vérifions que: $(\forall x\in D)\,;h(x)=(gof)(x)$ où $g(x)=x^2+2x$ et $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Soit $x\in D$, on a:

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^2+2f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x}{x+1}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{2x(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2}=h(x)$$

Donc $(\forall x\in D)\,;h(x)=(gof)(x)$

c- Tableau de variations de la fonction h :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a: $g(x)=x^2+2x=1\times(x+1)^2-1$.

Puisque $1>0$ alors la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

Tableau de variations de g .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g		-1	

* Monotonie de h sur $]-\infty;-1[$
- f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$
- $f(]-\infty;-1[)\subset]1;+\infty[$ (D'après la courbe de f)
- g est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Donc la fonction $h=gof$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

• Résolvons l'équation: $fx = -1$

$$fx = -1 \iff \frac{x}{x+1} = -1$$
$$\iff x = -x - 1$$
$$\iff x = -\frac{1}{2}$$

* Monotonie de h sur $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$
• f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$.
• $f\left(\left]-1; -\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left]-\infty; -1\right]$ (D'après la courbe de f)
• g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -1\right]$

Donc la fonction $h = gof$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-1; -\frac{1}{2}\right]$

* Monotonie de h sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
• f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
• $f\left(\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) \subset \left]-1; +\infty\right[$ (D'après la courbe de f)
• g est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1; +\infty\right[$.

Donc la fonction $h = gof$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Par suite le tableau de variations de la fonction h est:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
h		↗	‖	↘	$h\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$	↗	

Exercice 21

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction g : où $g(x) = x\sqrt{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $x \in D \iff x \geq 0$
$$\iff x \in [0; +\infty[$$

Donc $D = [0; +\infty[$

b- Montrons que la fonction g est strictement croissante sur D:

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $[0; +\infty[$ tels que $x < y$:

On a: $x < y \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{y} \\ 0 \leq x < y \end{cases}$
$$\Longrightarrow x\sqrt{x} < y\sqrt{y}$$
$$\Longrightarrow g(x) < g(y)$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c- Déduction: Soit x un élément de l'intervalle $[0;1]$ on a:

• $x\in[0;1] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Longrightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(1)$

$\Longrightarrow 0 \leq g(x) \leq 1$ (car g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$)

Donc $(\forall x \in [0;1])\,;\, g(x) \in [0;1]$. D'où $g([0;1]) \subset [0;1]$

• $x\in[1;+\infty[\Longrightarrow x \geqslant 1$

$\Longrightarrow g(x) \geqslant g(1)$ (car g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$)

$\Longrightarrow g(x) \geqslant 1$

donc $(\forall x \in [1;+\infty[);g(x) \in [1;+\infty[$

d'où $g([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Déterminons les variations de la fonction f.

Pour tout réel x , on a: $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, donc le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

3) Étudions les variations de h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^{+}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}^{+}$:

$$h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2=(x\sqrt{x})^2-2(x\sqrt{x})+2=(g(x))^2-2g(x)+2$$
$$=f(g(x))=(fog)(x)$$

* Monotonie de h sur l'intervalle $[0;1]$:On a:

- g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$
- $g([0;1]) \subset [0;1]$ (D'après la question 1) c))
- f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc la fonction $h=fog$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

* Monotonie de h sur l'intervalle $[1;+\infty[$:

- g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$
- $g([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$
- f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Donc la fonction $h=fog$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Exercice 22

1) Montrons que $f(\mathbb{R})=[-3;+\infty[$

Soit x un réel , on a: $f(x)=x^2-4x+1=(x^2-4x+4)-3=(x-2)^2-3$

Puisque $(x-2)^2 \geq 0$ alors $(x-2)^2 - 3 \geq -3$ donc $f(x) \geq -3$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \geq -3$ c'est -à-dire: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \in [-3; +\infty[$

Par suite: $f(\mathbb{R}) \subset [-3; +\infty[$ (1)

• Montrons que: $[-3; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$

C'est-à-dire: $(\forall y \in [-3; +\infty[);(\exists x \in \mathbb{R})$; $f(x) = y$

Soit y un élément de l'intervalle $[-3; +\infty[$, montrons que l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On a:
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow (x-2)^2 - 3 = y \\ &\Longleftrightarrow (x-2)^2 = y+3 \\ &\Longleftrightarrow x-2 = \sqrt{y+3} \text{ ou } x-2 = -\sqrt{y+3} \\ &\Longleftrightarrow x = 2+\sqrt{y+3} \text{ ou } x = 2-\sqrt{y+3} \end{aligned}$$

Donc: $(\forall y \in [-3; +\infty[);(\exists x \in \mathbb{R}); f(x) = y$ D'où: $[-3; +\infty[\subset f(\mathbb{R})$ (2)

Par suite de (1) et (2) on déduit que: $f(\mathbb{R}) = [-3; +\infty[$.

2) Montrons que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]0; +\infty[$ tels que $x < y$, on a:
$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{y}} \\ &\Longrightarrow g(x) > g(y) \end{aligned}$$

Donc: $\forall (x;y) \in (]0; +\infty[)^2$; $x < y \Longrightarrow g(x) > g(y)$

D'où la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3) a- Vérifions que $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $h(x) = (fog)(x)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a:
$$(fog)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 4g(x) + 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 1 = \frac{1}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x} + 1 = \frac{1-4\sqrt{x}+x}{x} = h(x)$$

Donc: $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $h(x) = (fog)(x)$

b- Tableau de variations de la fonction h:

- Tableau de variations de la fonction g.

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
g	‖	2 ↘	

- Tableau de variations de la fonction f.

Pour tout réel x , on a: $f(x)=1\times(x-2)^2-3$, donc le tableau de variations de la fonction f est:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

On a: $g(x)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Donc: $0<x\leq\frac{1}{4}\Longrightarrow g(x)\geq g\left(\frac{1}{4}\right)$ (car g est decroissante sur $]0;+\infty[$

$\Longrightarrow g(x)\geq 2$

D'où: $g\left(\left]0;\frac{1}{4}\right]\right)\subset[2;+\infty[$

Par suite: - La fonction g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{4}\right]$

- $g\left(\left]0;\frac{1}{4}\right]\right)\subset[2;+\infty[$

- La fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Donc $h=fog$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{4}\right]$.

Et on a: $x\geq\frac{1}{4}\Longrightarrow g(x)\leq g\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Longrightarrow g(x)\leq 2$

Donc: $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)\subset]-\infty;2]$ Par suite:

- La fonction g est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

- $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)\subset]-\infty;2]$

- La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$

Donc $h=fog$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

D'où le tableau de variations de la fonction h est le suivant:

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
h		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

c- Montrons que: $(\forall x\in[1;+\infty[);-2\leq h(x)\leq 1$

• La fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Donc: $x \geq 1 \Longrightarrow h(x) \geq h(1)$

$$\Longrightarrow h(x) \geq -2 \quad (1)$$

• Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a:

$$h(x)-1=\frac{x-4\sqrt{x}+1}{x}-1=\frac{-4\sqrt{x}+1}{x}$$

Puisque: $x \geq 1$ alors $-4\sqrt{x}+1 \leq -3$ donc $-4\sqrt{x}+1<0$

C'est-à-dire: $h(x)<1$ (2)

D'où de (1) et (2) , on déduit que: $-2 \leq h(x) < 1$

Par suite: $(\forall x \in [1;+\infty[):-2 \leq h(x)<1$

Exercices de synthèse

Exercice 23

Soit f la fonction définie par: $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1) a- Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;|f(x)| \leq 1$

b- Montrer que f est une fonction impaire.

2) a- Soit x et y deux nombres réels distincts.

Montrer que: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b- En déduire la monotonie de f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3) Soit g et h deux fonctions définies par:

$$g(x)=\sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}$$

a- Déterminer la monotonie de la fonction g sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b- Déterminer graphiquement $g([-1;0])$ et $g([0;+\infty[)$.

c- Vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R})\,;h(x)=gof(x)$

d- Dresser le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 24

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Montrer que: $(\forall x \in [1;+\infty[)\,;f(x) \geq 8$

2) On considère la fonction numérique g définie par: $g(x)=\sqrt{x-1}$

a- Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b- Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction g et déterminer graphiquement $g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$.

c- Déterminer la fonction polynôme h du second degré telle que: $(\forall x\in[1;+\infty[);f(x)=hog(x)$, puis étudier les variations de la fonction f .

Exercice 25

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^3+x^2+x$

1) a- Montrer que: $(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2)$; $x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$

b- Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c- Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet au plus une soltution dans $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]-\infty;10]$ par: $g(x)=\sqrt{10-x}$

a- Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;10]$.

b- En déduire que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $h(x)=\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

a- Vérifier que: $(\forall x\in]0;+\infty[);h(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b- En déduire la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 26

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x)=x+2-\sqrt{x+2}$

1) a- Déterminer D l'ensemble de définition da la fonction f.

b- Montrer que: $(\forall x\in D);f(x)\geq-\dfrac{1}{4}$

c- Résoudre dans l'ensemble D l'équation: $f(x)=2$

2) Soit u et v deux fonctions numériques définies par:

$u(x)=x^2-x$ et $v(x)=\sqrt{x+2}$

a- Étudier les variations de la fonction v sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b- Déterminer graphiquement $v\left(\left[-2;-\dfrac{7}{4}\right]\right)$ et $v\left(\left[-\dfrac{7}{4};+\infty\right[\right)$.

c- Dresser le tableau de variations de u.

d- Vérifier que: $(\forall x\in D);f(x)=(uov)(x)$.

e- Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left[-2;-\dfrac{7}{4}\right]$ et $\left[-\dfrac{7}{4};+\infty\right[$.

Exercice 27

On considère l'application: $f:[1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x\longmapsto x-1-2\sqrt{x-1}$$

1) **a-** Déterminer $\overset{-1}{f}(\{0\})$

b- En déduire que l'application f n'est pas injective.

2) Soit u et v deux fonctions numériques définies par:
$u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\sqrt{x-1}$

a- Vérifier que: $(\forall x\in[1;+\infty[)\,;\,f(x)=(uov)(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- En déduire que l'application f n'est pas surjective.

Exercice 28

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

1) **a-** Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Montrer que: $(\forall x\in D)\,;\,f(2-x)=f(x)$

2) Étudier la monotonie de la fonction f sur D.

3) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I=[1;+\infty[$
Montrer g est une bijection de I sur I et déterminer sa bijection réciproque.

4) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par:
$$h(x)=\sqrt{x+3-2\sqrt{x+1}}\ .$$
Étudier la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

Exercice 29

On considére la fonction f définie par: $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$

1) **a-** Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b- Montrer que: $(\forall x\in D)\,;\,0<f(x)\le\sqrt{3}$.

2) **a-** Montrer que:
$$(\forall(x,y)\in D^2)\,;\,x\neq y\,;\,\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right)$$

b- En déduire la monotonie de la fonction f sur D.

3) **a-** Montrer que l'application f définie de D dans $\mathbb{R}$ est injective.

b- Montrer que l'application $f:D\longrightarrow\,]0;\sqrt{3}]$ est bijective.
$$x\longmapsto f(x)$$

4) Montrer que 2 est l'unique solution de l'équation: $x\in\mathbb{R}\,;\,f(x)=\frac{1}{8}x^3$

5) Soit g la fonction numérique définie par: $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$

a- Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

b- Vérifier que: $(\forall x\in D_g)\,;\,g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

c- Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Solutions

Exercice 23

1) a- Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R}); |f(x)| \leq 1$

Soit x un élément de $\mathbb{R}$, on a:

$$|f(x)| - 1 = \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| - 1 = \frac{2|x|}{1+x^2} - 1 = \frac{-(x^2 - 2|x| + 1)}{1+x^2} = -\frac{(|x|-1)^2}{1+x^2}$$

Puisque $-(|x|-1)^2 \leq 0$ et $1+x^2 > 0$ alors $-\frac{(|x|-1)^2}{1+x^2} \leq 0$

C'est-à-dire: $|f(x)| - 1 \leq 0$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}); |f(x)| \leq 1$

b- Montrons que f est une fonction impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a: $-x \in \mathbb{R}$ et: $f(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$

donc: $(\forall x \in \mathbb{R}); -x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$ d'où f est une fonction impaire.

2) a- Soit x et y deux nombres réels distincts, montrons que:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

On a: $f(x) - f(y) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2y}{1+y^2} = \frac{2(x + xy^2 - y - yx^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

$$= \frac{2(x-y-xy(x-y))}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{2(x-y)(1-2xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Donc: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2); \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b- Déduction:

• Monotonie de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

Soit x et y deux éléments distincts de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow xy > 1 \qquad (\text{car } x \neq y)$$

$$\Rightarrow 1 - xy < 0$$

Puisque $(1+x^2)(1+y^2) > 0$

alors $\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} < 0$ C'est-à-dire: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$, donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

• Monotonie de f sur l'intervalle $[0;1]$:

Soit x et y deux éléments distincts de l'intervalle $[0;1]$, on a:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1 \qquad (\text{car } x \neq y)$$

$$\Rightarrow 1 - xy > 0$$

Puisque $(1+x^2)(1+y^2)>0$ alors $\dfrac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}>0$

donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

• Tableau de variations de la fonction f :

La fonction f est impaire et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ et on a f est impaire et strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0]$.

Le tableau de variations de f est le suivant:

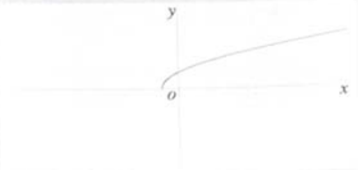
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	$\searrow$	-1 $\nearrow$	1 $\searrow$	

3) a- • Variations de la fonction g :

On a: $Dg=[-1;+\infty[$ et g est strictement croissante sur Dg .

• Courbe de la fonction g : Tableau de quelques valeurs de g

x	-1	0	3
$g(x)$	0	1	2



b- Déterminons graphiquement $g([-1;0])$ *et* $g([0;+\infty[)$

On a: $g([-1;0])=\{g(x)\,/-1\le x\le 0\}=[0;1]$

et $g([0;+\infty[)=\{g(x)\,/\,x\ge 0\}=[1;+\infty[$

c- Vérifions que: $(\forall x\in\mathbb{R})\,;h(x)=(gof)(x)$

Soit x un réel, on a:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}+1}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}=h(x)$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; h(x) = (gof)(x)$

d- Tableau de variations de la fonction h

- On a d'après la question 1) a) : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f(x)| \leq 1$

c'est-à-dire: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \in [-1;1]$ donc $f(\mathbb{R}) \subset [-1;1]$

- On a: • La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$.

• $f([1;+\infty[) \subset [-1;1]$ et $f(]-\infty;-1]) \subset [-1;1]$

• La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

Donc la fonction $h = gof$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.

- On a: • La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

• $f([-1;1]) \subset [-1;1]$

• La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

Donc la fonction $h = gof$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

D'où le tableau de variations de la fonction h est le suivant:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	

Exercice 24

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de f : où $f(x) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8$

Soit x un réel, on a: $x \in D \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$$

Donc $D = [1;+\infty[$

b- Montrons que $(\forall x \in [1;+\infty[) ; f(x) \geq 8$

Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a:

$$f(x) - 8 = 3x - 6\sqrt{x-1} = 3(x - 2\sqrt{x-1}) = 3(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1)$$
$$= 3(\sqrt{x-1} - 1)^2$$

On a: $3(\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$ donc: $f(x) - 8 \geq 0$ D'où: $(\forall x \in [1;+\infty[) ; f(x) \geq 8$

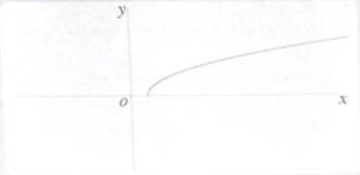
2) a- Tableau de variations de g

On a: $Dg = [1;+\infty[$ et la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc:

x	1	$+\infty$
g	0 $\nearrow$	

b- Courbe de la fonction g : Tableau de quelques valeurs de g :

x	1	2	5
$g(x)$	0	1	2



• Déterminons $g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$:

- $g([1;2]) = \{g(x)/1 \leq x \leq 2\} = [0;1]$
- $g([2;+\infty[) = \{g(x)/x \geq 2\} = [1;+\infty[$

c- • Déterminons le polynôme h :

Soit x un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a: $f(x) = hog(x) = h(g(x))$

On pose: $y = g(x)$ c'est-à-dire $y = \sqrt{x-1}$ donc: $x = y^2 + 1$

D'où: $h(y) = f(x) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8 = 3(y^2+1) - 6y + 8 = 3y^2 - 6y + 11$

Par suite , h est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = 3x^2 - 6x + 11$

• Étudions les variations de la fonction f . Pour tout réel x , on a:

$$h(x) = 3x^2 - 6x + 11 = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 11 = 3(x-1)^2 + 8$$

Puisque $3 > 0$ alors la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h	$\searrow$	8	$\nearrow$

- On a: $g(x) = 1 \iff \sqrt{x-1} = 1$

$\iff x = 2$

Donc: $1 \le x \le 2 \Rightarrow g(1) \le g(x) \le g(2)$ (car g est croissante)

$$\Rightarrow 0 \le g(x) \le 1$$

C'est-à-dire: $(\forall x \in [1;2])\,;\, g(x) \in [0;1]$ cela signifie que: $g([1;2]) \subset [0;1]$.

D'où: • La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$

• $g([1;2]) \subset [0;1]$

• La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$

Par suite la fonction $f = hog$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;2]$.

Et on a: • La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

• $g([2;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

• La fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

Par la suite la fonction $f = hog$ est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

Exercice 25

1) a- Montrons que: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\,;\, x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$

Soit y un nombre réel, on considère le polynôme $p_y(x)$ définie par:

$$p_y(x) = x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1$$

On a $p_y(x)$ est un trinôme de degré 2, donc son signe dépend du signe de son discriminant Δ.

On a: $\Delta = (1+y)^2 - 4(y^2+y+1) = 1 + 2y + y^2 - 4y^2 - 4y - 4$

$= -3y^2 - 2y - 3$

Puisque le discriminant du trinôme $-3y^2 - 2y - 3$ est -32 alors $-3y^2 - 2y - 3 < 0$ c'est-à-dire $\Delta < 0$, donc le discriminant du trinôme $p_y(x)$ est négatif, d'où $P_y(x) < 0$ par suite: $x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0)$

Autre méthode: Soit x et y deux nombres réels, on a:

$x^2 + x(1+y) = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 1)$

Donc: $x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 = \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(y^2 + 2y + 1) + y^2 + y + 1$

$$= \left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(3y^2 + 2y + 3)$$

Puisque le discriminant du trionôme $3y^2 + 2y + 3$ est -32 alors $3y^2 + 2y + 3 > 0$ et $\left(x + \frac{1+y}{2}\right)^2 \ge 0$ donc $x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$

D'où: $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\,;\, x^2 + x(1+y) + y^2 + y + 1 > 0$

b- Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit x et y deux nombres réels distincts , on a:

$$f(x)-f(y)=x^3+x^2+x-y^3-y^2-y=x^3-y^3+x^2-y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y+1)=(x-y)(x^2+x(y+1)+y^2+y+1)$$

Donc: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+x(y+1)+y^2+y+1$

Puisque: $x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$ alors $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=3$

Soit x un nombre réel, on a:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow x^3+x^2+x=3$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2+x-3=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-1+x^2-1+x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \; ou \; x^2+2x+3=0$$

L'équation $x^2+2x+3=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car son discriminant est négatif $(\Delta=-8)$, donc: $f(x)=3 \Leftrightarrow x=1$

D'où l'équation $f(x)=3$ admet 1 comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

2) **a-** Étudions les variations de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;10]$

Soit x et y deux réels de l'intervalle $]-\infty;10]$ tels que $x<y$, on a:

$$x<y \Rightarrow -x>-y$$
$$\Rightarrow 10-x>10-y$$
$$\Rightarrow \sqrt{10-x}>\sqrt{10-y}$$
$$\Rightarrow g(x)>g(y)$$

Donc: $(\forall x,y\in]-\infty,10]) ; x<y \Rightarrow g(x)>g(y)$

D'où la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;10]$.

b- Déduction: L'équation $f(x)=g(x)$ est définie sur l'intervalle $]-\infty;10]$

- On a: $f(1)=g(1)=3$ donc le nombre 1 est une solution de l'équation $f(x)=g(x)$.

- On a: la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;10[$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc: $x<1 \Rightarrow f(x)<f(1) \; et \; g(x)>g(1)$

$$\Rightarrow f(x)<3 \; et \; g(x)>3$$
$$\Rightarrow f(x)<3<g(x)$$

D'où: $(\forall x \in]-\infty;1[)\ ;\ f(x) \neq g(x)$

Cela signifie que l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $]-\infty;1[$.

D'autre part, on a: $1 < x \leq 10 \Longrightarrow f(1) < f(x)\ et\ g(1) > g(x)$

$$\Longrightarrow 3 < f(x)\ et\ 3 > g(x)$$
$$\Longrightarrow g(x) < 3 < f(x)$$

Donc $(\forall x \in]1;10])\ ;\ f(x) \neq g(x)$ cela signifie que l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]1;10]$.

D'où l'équation $f(x) = g(x)$ admet 1 comme unique solution dans l'intervalle $]-\infty;10]$ et par suite dans $\mathbb{R}$

3) a- Vérifions que: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Soit x un élément de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}} = h(x)$$

Donc: $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ h(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b- Déduction: On considère la fonction u définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par: $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc la fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a: $h = f o u$ Donc:

- La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- $u(]0;+\infty[) \subset \mathbb{R}$
- La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où la fonction $h = f o u$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 26

1) a- Déterminons D : où $f(x) = x + 2 - \sqrt{x+2}$

Soit x un réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow x + 2 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow x \geqslant -2$$

Donc : $D = [-2;+\infty[$

b- Montrons que : $(\forall x \in D)\ ;\ f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$

Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty;-2]$; on a :

$f(x) + \frac{1}{4} = (\sqrt{x+2})^2 - \sqrt{x+2} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2}\right)^2$

Puisque : $(\forall x \in [-2; +\infty[) ; \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ alors :

$(\forall x \in [-2; +\infty[) : f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$

c- Résolvons dans D l'équation : $f(x) = 2$

Soit x un élément de l'intervalle $[-2; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x+2} = 0 \; et \; x \geqslant 0 \quad & \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \; et \; x \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \; et \; x \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow (x = -1 \; ou \; x = 2) \; et \; x \geqslant 0 \end{aligned}$$

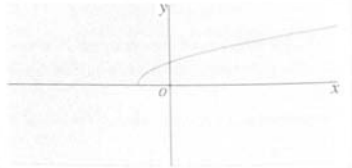
Donc l'ensemble de solutions de l'équation $f(x) = 2$ est $\{2\}$.

2) a- Variations de la fonction v :

- La fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$
- Tableau de variations de la fonction v :

x	-2	$+\infty$
v	0	↗

- Courbe représentative de la fonction v :



b- Déterminons $v\left(\left[-2; -\frac{7}{4}\right]\right)$ et $v\left(\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[\right)$

On a : $v\left(\left[-2; -\frac{7}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $v\left(\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

c- Tableau de variations de la fonction u :

Pour tout réel x, on a : $u(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
u	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

d- Vérifions que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = uov(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $[-2; +\infty[$, on a :

$$(uov)(x) = u(v(x)) = u(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - \sqrt{x+2} = x + 2 - \sqrt{x+2} = f(x)$$

Donc : $(\forall x \in [-2; +\infty[)$; $f(x) = (uov)(x)$

3) Étudions la monotonie de la fonction f :

• Sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{7}{4}\right]$.

- La fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{7}{4}\right]$

- $v\left(\left[-2; -\frac{7}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. (d'après **2) b-**)

- La fonction u est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-2; -\frac{7}{4}\right]$.

• Sur l'intervalle $\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[$.

La fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[$

- $v\left(\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ (d'après **2) b-**)

- La fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[$

Exercice 27

1) a- Déterminons l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{0\})$

On a : $x \in \overset{-1}{f}(\{0\}) \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[\text{ et } f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x \in [1; +\infty[\text{ et } \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; +\infty[\text{ et } (x = 1 \text{ ou } x = 5)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

Donc : $\overset{-1}{f}(\{0\}) = \{1; 5\}$

b- Déduction :

D'après la question précédente, on a : $\overset{-1}{f}(\{0\}) = \{1, 5\}$ signifie que :

$f(1) = 0$ et $f(5) = 0$ Puisque $1 \neq 5$ alors f n'est pas injective.

2) a- Vérifions que : $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $f(x) = (uov)(x)$

Soit x un réel de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a :

$$f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x-1} = (v(x))^2 - 2v(x) = u(v(x)) = (uov)(x)$$

Donc : $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $f(x) = (uov)(x)$

b- Dressons le tableau de variations de f :

On détermine tout d'abord le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

Les fonctions u et v sont deux fonctions usuelles, donc leurs tableaux de variations sont :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
u		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

x	1		$+\infty$
v	0	$\nearrow$	

• On a : $(v(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2)$ et $(1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant v(x) \leqslant 1)$

donc : $v([1;2]) \subset [0;1]$ Puisque : * v est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$.

* $v([1;2]) \subset [0;1]$.

* u est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.

Alors la fonction $f = uov$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;2]$.

On a : $x \geqslant 2 \Leftrightarrow v(x) \geqslant 1$ ce qui signifie que : $v([2;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

Puisque : * v est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

* $v([2;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

* u est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$

alors la fonction $f = uov$ est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

• Tableau de variations de f :

x	1		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

c- Déduction : On a d'après le tableau de variations de la fonction f :
$\forall x \in [1;+\infty[: f(x) \geqslant -1$, cela signifie que le nombre -2 (par exemple) n'a pas d'antécédent par l'application f donc f n'est pas surjective.

Exercice 28

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f où
$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

soit x un nombre réel, on a :

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant -1$$

La dernière proposition est vraie pour tout nombre réel x, donc $D = \mathbb{R}$

b- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(2-x) = f(x)$

Soit x un nombre réel, on a :

$$f(2-x) = \sqrt{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2} = \sqrt{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 2x + 2} = f(x)$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(2-x) = f(x)$

2) Étudions la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}$

On considère les fonctions u et v définies par :

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, u(x) = \sqrt{x}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, v(x) = x^2 - 2x + 2$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x) = uov(x)$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, v(x) = (x-1)^2 + 1$

Donc les tableaux de variations de u et v sont :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
v		$\searrow$	1	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
u	0	$\nearrow$	

- On a la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et $v([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$ et la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

- On a la fonction v est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$ et $v(]-\infty;1]) \subset (]1;+\infty])$ et la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

3) • Montrons que g est une bijection de I sur I et déterminons sa bijection réciproque g^{-1} :

Soit y un élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, existe-t-il un unique élément x de l'intervalle $[1;+\infty[$ tel que $g(x) = y$?

On a : $g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = y$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y^2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y^2-1} + 1 \text{ ou } x = -\sqrt{y^2-1} + 1$$

Puisque : $1 - \sqrt{y^2-1} \notin [1;+\infty[$ et $1 + \sqrt{y^2-1} \in [1;+\infty[$ alors l'équation $g(x) = y$ admet une unique solution dans l'intervalle I qui est : $x = 1 + \sqrt{y^2-1}$.

Donc g est une bijection de I sur I et sa bijection réciproque g^{-1} est définie par : $g^{-1} : I \longrightarrow I$

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2 - 1} + 1$$

4) Étudions la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $[-1; +\infty[$:

Soit x un réel de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a :

$$h(x) = \sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x+1}} = \sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+1} + 2}$$
$$= f(\sqrt{x+1}) = f(\ell(x)) = (f o \ell)(x)$$

où ℓ est la fonction numérique définie par : $(\forall x \in [-1; +\infty[) ; \ell(x) = \sqrt{x+1}$

- Tableau de variations de la fonction ℓ est le suivant :

x	-1	0	$+\infty$
ℓ	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$

On a : $\ell(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc, on va étudier la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $[-1; 0]$ et $[0; +\infty[$.

- Monotonie de h sur l'intervalle $[-1; 0]$:

La fonction ℓ est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 0]$ et $\ell([-1; 0]) \subset [0; 1]$ et la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$ donc la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1; 0[$.

- Monotonie de h sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

La fonction ℓ est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et $\ell([0; +\infty[) \subset [1; +\infty[$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$ donc la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice

1) a- Déterminons D l'ensemble de définition de la fonction f :

on a: $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

Soit x un nombre réel, on a : $x \in D \Leftrightarrow x + 2 \geqslant 0 \; et \; x - 1 \geqslant 0$
$$\Leftrightarrow x \geqslant -2 \; et \; x \geqslant 1$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant 1$$

donc : $D = [1; +\infty[$.

b- Montrons que : $(\forall x \in D) ; 0 < f(x) \leqslant \sqrt{3}$

Soit x un élément de D, on a :

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$$

On a : $(\forall x\in[1;+\infty[) ; \sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}>0$ Donc : $(\forall x\in[1;+\infty[) ; f(x)>0$

D'autre part on a : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x+2\geqslant 3 \; et \; x-1\geqslant 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\geqslant\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\leqslant\sqrt{3}$$

Donc : $(\forall x\in[1;+\infty[) ; f(x)\leqslant\sqrt{3}$ D'où : $(\forall x\in D) ; 0<f(x)\leqslant\sqrt{3}$

2) a- Montrons que:

$$(\forall(x;y)\in D^2);(x\neq y); \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

Soit x et y deux réels de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $x\neq y$, on a :

$$f(x)-f(y)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}-\sqrt{y+2}+\sqrt{y-1}=(\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2})-(\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1})$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

$$=(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right)$$

Donc : $(\forall(x;y)\in D^2);(x\neq y)$; $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$

b- Déduisons la monotonie de f sur D :

Soit x et y deux réels de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que : $x\neq y$, on a :

$$\begin{cases}x+2>x-1\\ y+2>y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}>\sqrt{x-1}\\ \sqrt{y+2}>\sqrt{y-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}>\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}>0 \; (car \; x\neq y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}<\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$$

Donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3) a- Montrons que f est une application injective de D dans $\mathbb{R}$:

Soit x et y deux réels de l'intervalle $[1;+\infty[$ tels que $x\neq y$

On a : soit $x>y$ ou $x<y$

- Si $x>y$ alors $f(x)<f(y)$ donc $f(x)\neq f(y)$
- Si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$ donc $f(x)\neq f(y)$

Donc $(\forall(x;y)\in D^2);(x\neq y)\Rightarrow f(x)\neq f(y)$ et par suite f est une application injective de D vers $\mathbb{R}$.

b- Montrons que f_1 est bijective de D sur $]0;\sqrt{3}]$:

Il suffit de montrer que f_1 est une application surjective de D vers $]0;\sqrt{3}]$.

Soit y un élément de l'intervalle $]0;\sqrt{3}]$, existe-t-il un élément x de D tel que $f_1(x)=y$? On a : $f_1(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+y$$
$$\Leftrightarrow x+2=x-1+y^2+2y\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x-1}=3-y^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{3-y^2}{2y} \quad (\text{car } y\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{(3-y^2)^2}{4y^2}+1$$

On a : $x\in[1;+\infty[$ car $\frac{(3-y^2)^2}{4y^2}+1\geqslant 1$

Donc : $(\forall y\in]0;\sqrt{3}]);(\exists! x\in[1;+\infty[);f_1(x)=y$

D'où : f_1 est une bijection de D sur $]0;\sqrt{3}]$.

4) Montrons que 2 est l'unique solution de l'équation (E) : $x\in\mathbb{R};f(x)=\frac{1}{8}x^3$

L'ensemble de définition de l'équation est l'intervalle $[1;+\infty[$.

On a : $f(2)=1$ et $\frac{1}{8}(2)^3=1$ donc 2 est une solution de l'équation (E).

On suppose que l'équation (E) admet une autre solution α différente de 2 $(\alpha\neq 2)$

On a : Soit $\alpha>2$ ou $\alpha<2$

- Si $\alpha>2$ alors on a : $\alpha>2\Rightarrow \frac{1}{8}\alpha^3>\frac{1}{8}(2)^3$

$$\Rightarrow f(\alpha)>f(2)$$
$$\Rightarrow \alpha<2 \quad (\text{car } f \text{ est strictement décroissante sur } D).$$

Ce qui est contradictoire

De même on montre qu'il y a contradiction dans le cas $\alpha<2$, donc l'équation (E) admet 2 comme solution unique.

5) **a-** Déterminons D_g l'ensemble de définition de la fonction g :

on a: $g(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$

Soit x un nombre réel, on a : $x\in D_g \Leftrightarrow 2x+1\geqslant 0$ et $1-x\geqslant 0$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x\geqslant -\frac{1}{2}$ et $x\leqslant 1$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x\in]0;1]$ Donc : $D_g=]0;1]$.

b- Vérifions que : $(\forall x\in D_g);g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit x un élément de $]0;1]$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{1}{x}+2}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}=\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=g(x)$$

Donc : $(\forall x\in]0;1])\,;\, g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

c- Dressons le tableau de variations de la fonction g :

On a : $(\forall x\in \mathbb{R})\,;\, x\in]0;1] \Leftrightarrow \frac{1}{x}\in [1;+\infty[$

Soit x et y deux éléments de l'intervalle $]0;1]$ tels que : $x<y$; on a :

$$\begin{aligned} x<y &\Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)<f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{(car } f \text{ est décroissante sur } [1;+\infty[\text{)} \\ &\Rightarrow g(x)<g(y) \end{aligned}$$

Donc : la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1]$

Tableau de variations de la fonction g :

x	0	1
g	‖ ↗	$\sqrt{3}$

5 Leçon — Suites numériques

Maxi.

Résumé

1 Généralités

Soit n_0 un élément de $\mathbb{N}$. On pose : $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$

1) Définition et notations :

a- Définition :

Toute fonction numérique u définie de l'ensemble I vers $\mathbb{R}$ est appelée suite numérique.

b- Notations et vocabulaires :

- La suite u est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou tout simplement (u_n).
- L'image de n par la suite (u_n) est notée u_n.
- Les nombres $u_0;u_1;u_2;...$ et u_n sont appelés les termes de la suite (u_n).
- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

2) Monotonie d'une suite :

Soit (u_n) une suite définie sur $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$, on a :

1- • (La suite (u_n) est croissante) $\Leftrightarrow(\forall n\in I):u_{n+1}\geq u_n$.
 • (La suite (u_n) est strictement croissante) $\Leftrightarrow(\forall n\in I):u_{n+1}>u_n$.

2- • (La suite (u_n) est décroissante) $\Leftrightarrow(\forall n\in I):u_{n+1}\leq u_n$.
 • (La suite (u_n) est strictement décroissante) $\Leftrightarrow(\forall n\in I):u_{n+1}<u_n$.

3- • (La suite (u_n) est constante) $\Leftrightarrow(\forall n\in I):u_{n+1}=u_n$.
 • Autrement dit : (u_n) est constante $\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{R});(\forall n\in I):u_n=k$.

Si une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.

3) Suite bornée :

Soit (u_n) une suite définie sur $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$.

- La suite (u_n) est majorée $\Leftrightarrow(\exists M\in\mathbb{R});(\forall n\in I):u_n\leq M$
- La suite (u_n) est minorée $\Leftrightarrow(\exists m\in\mathbb{R});(\forall n\in I):u_n\geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

On dit qu'une suite (u_n) est définie par une expression explicite, si son terme général u_n est donné en fonction de n.

Exemples : **1)** $(\forall n\in\mathbb{N})u_n=n^2-2n+3$ **2)** $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});v_n=\frac{2n-3}{n-1}$

4) Suites récurrentes :

- Une suite qui est définie par son premier terme et par une relation entre u_n et u_{n+1} est appelée une suite récurrente.
- Une suite qui est définie par ses deux premiers termes et par une relation entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} est aussi appelée une suite récurrente.

Exemples :

1) $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n + 3$
2) $u_0 = 1$; $u_1 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Exercices

Exercice 1

Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

a- $u_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b- $v_n = 2n\sqrt{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

c- $w_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ pour tout n de $(\mathbb{N}^* - \{1\})$.

d- $t_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n-4}}$, $(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5)$

Exercice 2

Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n), (v_n), (w_n), (a_n) et (b_n) tels que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
2) $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : v_n = \sqrt{n-2}$
3) $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = n \times 2^n$
4) $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
5) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : b_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Calculer u_{n+2} en fonction de u_n.

Exercice 4

Soit (a_n) la suite numérique définie par : $a_1 = 2$ et $a_n = \dfrac{3a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}$; $n \geq 2$.

1 Calculer a_2 et a_3.

2) a- Écrire a_{n+1} en fonction de a_n.

b- Écrire a_{n+1} en fonction de a_{n-1}.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n > 0$

Exercice 5

Étudier la monotonie de la suite numérique (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3n + 7$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = -5n$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 2^n$

4) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 6

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites numériques définies par :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 1 + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^n}$

$v_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \sqrt{4v_n + 2}$

$w_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = \dfrac{w_n}{w_n + 2^n + 5}$

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) Montrer par récurrence que la suite (v_n) est strictement croissante.

3) a-) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n > 0$

b- Étudier la monotonie de la suite (w_n).

Exercice 7

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = a ; a \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n^2 - \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3} \end{cases}$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Montrer que si $a = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n \leq 3$.

Exercice 9

On considère les suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

- $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1)$
- $v_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$
- $w_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{2 + w_n}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n < \sqrt{3}$

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 < u_n < 2$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$ et en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = (1 + u_n)\sqrt{u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

3) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq 1 + u_n$ et en déduire la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 14

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{4n}{n+1}}$.

2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 15

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \ldots + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

4) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n < 2$

Exercice 16

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

On admet que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$

1) Calculer u_1 et v_1.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq v_n$

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$

1) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 1$

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \frac{1}{2}$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$

Exercice 18

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{31}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 5u_n + 10}{3(u_n - 1)} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 5$

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 5 \leq \frac{1}{10}(u_n - 5)$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 5 \leq \frac{6}{5} \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Exercice 19

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n - 2}{u_n^2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n^2)(u_n - 2)}{u_n^2}$

b- Étudier la monotonie de la suite (u_n), en déduire qu'elle est bornée.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n - 2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2u_n}$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 1$

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{2 + \sqrt{2 + 2u_n}}$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

Solutions

Exercice 1

Déterminons les trois premiers termes de chacune des suites suivantes:

• Chacune des suites proposées est définie par une expression explicite.

a- On a : $u_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$; $n \in \mathbb{N}$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, alors les trois premiers termes de la suite (u_n) sont u_0, u_1 et u_2

et on a : • $u_0 = \sqrt{\dfrac{0}{0+1}} = 0$ • $u_1 = \sqrt{\dfrac{1}{1+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{2+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

d'où : les trois premiers termes de la suite (u_n) sont :

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } u_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

b- On a : $v_n = 2n\sqrt{n-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, alors les trois premiers termes de la suite (v_n) sont v_1, v_2 et v_3.

et on a : $v_1 = 2\sqrt{1-1} = 0$, $v_2 = 2 \times 2\sqrt{2-1} = 4$ et $v_3 = 2 \times 3\sqrt{3-1} = 6\sqrt{2}$

Donc les trois premiers termes de la suite (v_n) sont : $v_1 = 0$, $v_2 = 4$ et $v_3 = 6\sqrt{2}$.

c- On a : $w_n = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$; $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$.

Puisque $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$, alors : le premier terme de la suite (w_n) est w_2.

et on a : $w_2 = 1 \times 2 = 2$, (on a remplacé n par **2)**

$w_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$, (on a remplacé n par **3)**

et $w_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Donc les trois premiers termes de la suite (w_n) sont : $w_2 = 2$, $w_3 = 6$ et $w_4 = 24$.

d- On a : $t_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n-4}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$

Puisque $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$, alors le premier terme de la suite (t_n) est t_5.

et on a : $t_5 = \dfrac{(-1)^5}{\sqrt{5-4}} = -1$; $t_6 = \dfrac{(-1)^6}{\sqrt{6-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $t_7 = \dfrac{(-1)^7}{\sqrt{7-4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

Donc les trois premiers termes de la suite (t_n) sont : $t_5 = -1$, $t_6 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $t_7 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Rappel:
Soit $n \in \mathbb{N}$
si n est pair alors : $(-1)^n = 1$
si n est impair alors : $(-1)^n = -1$

Exercice 2

Déterminons les trois premiers termes de chacune des suites (u_n), (v_n), (w_n), (a_n) et (b_n) :

1) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$, donc les trois premiers termes sont :

$$u_0 = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2},\ u_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \text{ et } u_2 = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : v_n = \sqrt{n-2}$,

donc les trois premiers termes de la suite (v_n) sont : $v_2 = \sqrt{2-2} = 0$;

$v_3 = \sqrt{3-2} = 1$ et $v_4 = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

3) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = n \times 2^n$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, alors les trois premiers termes de la suite (w_n) sont :

$$w_0 = 0 \times 2^0 = 0;\ w_1 = 1 \times 2^1 = 2 \text{ et } w_2 = 2 \times 2^2 = 8$$

4) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

Puisque $\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$; alors les trois premiers termes de la suite (a_n) sont :

$a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ et $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

5) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; b_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1)$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, alors les trois premiers termes sont : b_1, b_2 et b_3.

et on a : $b_1 = 1 \times 2 = 2$, $b_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$,

et $b_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$

Donc les trois premiers termes de la suite (b_n) sont : $b_1 = 2$, $b_2 = 8$ et $b_3 = 20$.

Exercice 3

1) Calculons u_1, u_2 et u_3 :

On a : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$

• Si on remplace n par **0** dans la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$, on obtient :

$u_{0+1} = 2u_0 + 3^0$

c'est-à-dire : $u_1 = 2u_0 + 3^0 = 2 \times 2 + 1 = 5$

• Si on remplace n par **1** dans la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$, on obtient :

$u_2 = 2u_1 + 3^1 = 2 \times 5 + 3$

c'est-à-dire : $u_2 = 13$

• Si on remplace n par **2** dans la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$, on obtient :

$u_3 = 2u_2 + 3^2$

c'est-à-dire : $u_3 = 2 \times 13 + 9 = 35$

$$u_1 = 5;\ u_2 = 13 \text{ et } u_3 = 35$$

2) Calculons u_{n+2} en fonction de u_n :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$

Si on remplace n par $(n+1)$, on obtient : $u_{(n+1)+1} = 2u_{n+1} + 3^{n+1}$

c'est-à-dire : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3^{n+1}$ et puisque : $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$

alors : $u_{n+2} = 2(2u_n + 3^n) + 3^{n+1}$

$$= 4u_n + 2 \times 3^n + 3^{n+1}$$

$$= 4u_n + 3^n(2+3)$$

Donc : $u_{n+2} = 4u_n + 5 \times 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

(a_n) est définie par : $a_1 = 2$ et $a_n = \dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$; $n \geq 2$

1) Calculons a_2 et a_3.

Si on remplace n successivement par **2** et **3** dans l'égalité $a_n = \dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$ **(1)**, on obtient a_2 et a_3.

• On a : $a_2 = \dfrac{3a_1+1}{a_1} = \dfrac{3\times 2+1}{2} = \dfrac{7}{2}$ et $a_3 = \dfrac{3a_2+1}{a_2} = \dfrac{3\times\frac{7}{2}+1}{\frac{7}{2}} = \dfrac{23}{7}$

Donc : $a_2 = \dfrac{7}{2}$ et $a_3 = \dfrac{23}{7}$.

2) a- Éxprimons a_{n+1} en fonction de a_n :

Si on remplace n par $n+1$ dans l'égalité **(1)**, on obtient : $a_{n+1} = \dfrac{3a_{n+1-1}+1}{a_{n+1-1}}$

C'est-à-dire : $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n}$

b- Éxprimons a_{n+1} en fonction de a_{n-1} : On a : $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n}$ et $a_n = \dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$

donc : $a_{n+1} = \dfrac{3\left(\dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}}\right)+1}{\dfrac{3a_{n-1}+1}{a_{n-1}}}$ c'est-à-dire : $a_{n+1} = \dfrac{9a_{n-1}+3+a_{n-1}}{a_{n-1}} \times \dfrac{a_{n-1}}{3a_{n-1}+1}$

D'où : $a_{n+1} = \dfrac{10a_{n-1}+3}{3a_{n-1}+1}$

3) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n > 0$

• Initialisation : Pour $n = 1$ on a : $a_1 = 2$ et $2 > 0$

Donc : $a_0 > 0$ (La propriété est vraie pour $n = 0$)

• Hérédité :Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $a_n > 0$ et montrons que $a_{n+1} > 0$

Puisque: $a_n > 0$ alors : $(3a_n + 1 > 0$ et $a_n > 0)$

Donc : $\dfrac{3a_n+1}{a_n} > 0$ c'est-à-dire : $a_{n+1} > 0$, par suite La propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion:

D'après le principe de la récurrence, on a: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n > 0$

Exercice 5

Étudions la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants:

1) (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3n + 7$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+7) - (3n+7) = 3n+3+7-3n-7 = 3$

Puisque $3 > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc : $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

2) (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = -5n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -5(n+1) - 5n = -5$; Puisque $-5 < 0$ alors:
$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n < 0$ d'où la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) La suite (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 2^n$

1ère méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où la suite (u_n) est strictement croissante.

Rappel:

Soit (u_n) une suite telle que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 0$

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

2ème méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$)
D'où la suite (u_n) est strictement croissante.

4) (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{n}{n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, ona: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ alors : la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 6

1) Étudions la monotonie de chacune des suites suivantes:

- On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Donc : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. D'où : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ et puisque : $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

2) Montrons que la suite (v_n) est strictement croissante :

- On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \sqrt{4v_n + 2}$

Utilisons le raisonnement par récurrence.

- Initialisation :On a : $v_0 = 1$ et $v_1 = \sqrt{4v_0 + 2} = \sqrt{6}$

Donc : $v_1 > v_0$ (La propriété est vraie pour $n = 0$).

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $v_{n+1} > v_n$ et montrons que $v_{n+2} > v_{n+1}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} > v_n &\Rightarrow 4v_{n+1} > 4v_n \\ &\Rightarrow 4v_{n+1} + 2 > 4v_n + 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{4v_{n+1} + 2} > \sqrt{4v_n + 2} \end{aligned}$$

Remarquer que tous les termes de la suite (v_n) sont positifs.

Or : $\sqrt{4v_{n+1} + 2} = v_{n+2}$ et $\sqrt{4v_n + 2} = v_{n+1}$

Donc : $v_{n+2} > v_{n+1}$ (La propriété est vraie pour $n + 1$).

Conclusion:

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} > v_n$

La suite est donc strictement croissante.

3) **a**- Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n > 0$:

On a: $w_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n + 2^n + 5}$

- Initialisation: Pour $n = 0$, on a : $w_0 = 3$ et $3 > 0$

Donc : $w_0 > 0$ (La propriété est vraie pour $n = 0$).

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $w_n > 0$ et montrons que $w_{n+1} > 0$

Puisque $w_n > 0$ alors : $w_n + 2^n + 5 > 0$

Donc: $\frac{w_n}{w_n + 2^n + 5} > 0$ C'est-à-dire: $w_{n+1} > 0$ (Lapropriétéestvraiepour $n + 1$).

Conclusion: $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n > 0$

b- Étudions la monotonie de la suite (w_n):

- **1**[ère] méthode :

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n > 0$, on peut donc comparer le quotient $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ à 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.On a : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{w_n + 2^n + 5}$ et puisque : $w_n > 0$ et $2^n > 0$

alors : $w_n + 2^n + 5 > 1$ donc : $\dfrac{1}{w_n + 2^n + 5} < 1$

d'où : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n > 0$

Par conséquent la suite (w_n) est strictement décroissante.

• 2ème méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{w_n}{w_n + 2^n + 5} - w_n = w_n\left(\dfrac{1}{w_n + 2^n + 5} - 1\right)$

$$= - w_n\left(\frac{w_n + 2^n + 4}{w_n + 2^n + 5}\right)$$

et puisque : $w_n > 0$ et $2^n > 0$ alors $w_{n+1} - w_n < 0$

Donc : $w_{n+1} - w_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où : la suite (w_n) est strictement décroissante.

Exercice 7

1) Montrons que la suite (u_n) est croissante où $u_0 = a$ et

$u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n^2 - \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n^2 - \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}u_n^2 - \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3} - u_n = \dfrac{2}{3}u_n^2 - \dfrac{4}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$

$$= \frac{2}{3}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \frac{2}{3}(u_n - 1)^2$$

et puisque : $\dfrac{2}{3}(u_n - 1)^2 \geq 0$ alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : la suite (u_n) est croissante.

2) Montrons que si $a = 1$ alors la suite (u_n) est constante en utilisant le raisonnement par récurrence.

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n^2 - \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$ et montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 1$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc la propriété pour $n = 0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 1$ et montons que $u_{n+1} = 1$.

d'après la question **(1)**, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}(u_n - 1)^2$

et puisque : $u_n = 1$ alors : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{3}(1 - 1)^2 = 0$ d'où : $u_{n+1} = 1$

Conclusion d'après le principe de récurrence: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1$

C'est-à-dire : la suite (u_n) est constante.

Exercice 8

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$ où $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$

1ère méthode : Soit $n \in \mathbb{N}$,

- On a : $u_n - 2 = \frac{2n+3}{n+1} - 2 = \frac{1}{n+1}$

et puisque : $\frac{1}{n+1} > 0$ alors : $u_n - 2 > 0$ C'est-à-dire : $u_n > 2$ **(1)**

- on a : $3 - u_n = 3 - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

et puisque : $\frac{n}{n+1} \geq 0$ alors : $3 - u_n \geq 0$ C'est-à-dire : $u_n \leq 3$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on en déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$

2ème méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$

donc : $u_n > 2$ car $\frac{1}{n+1} > 0$

et puisque $n \geq 0$ alors : $n + 1 \geq 1$

d'où : $\frac{1}{n+1} \leq 1$ par suite : $2 + \frac{1}{n+1} \leq 3$ c'est-à-dire : $u_n \leq 3$

par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$

Exercice 9

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

- On a : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1)$

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $2 > 1$

Donc : $u_0 > 1$ (La propriété est vraie pour $n = 0$)

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.

On a : $u_n > 1 \Rightarrow u_n + 1 > 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_n + 1) > \frac{1}{2} \times 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 1$$

(La propriété est vraie pour $n + 1$).

Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$:

On a : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \sqrt{6 + v_n}$

- Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $v_0 = 2$ et $0 < 2 < 3$

Donc : $2 < v_0 < 3$ d'où la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

supposons que $0 < v_n < 3$ et montrons que $0 < v_{n+1} < 3$.

On a : $0 < v_n < 3 \Rightarrow 6 < 6 + v_n < 9$

$$\Rightarrow \sqrt{6} < \sqrt{6+v_n} < \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} < v_{n+1} < 3$$

et puisque $0 < \sqrt{6}$ alors $0 < v_{n+1} < 3$.

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < v_n < 3$

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$

On a : $w_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{2 + w_n}$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $w_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$. Donc : $1 \leq w_0 \leq \sqrt{3}$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$ et montrons que $1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}$

On a : $1 \leq w_n \leq \sqrt{3} \Rightarrow 3 \leq 2 + w_n \leq 2 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2+w_n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2+w_n} \leq -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{3} \leq 2 - \frac{1}{2+w_n} \leq 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3}\,\frac{(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 1 \leq w_{n+1} \leq \sqrt{3} \quad ; \quad \text{Car } 1 < \frac{5}{3}$$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq w_n \leq \sqrt{3}$.

Exercice 10

1) Calculons u_2 et u_3 :

- On a : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

donc : $u_2 = (u_1 - 1)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1$ d'où : $u_2 = \frac{5}{4}$

- $u_3 = (u_2 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 < u_n < 2$

- Initialisation :

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $1 < \frac{3}{2} < 2$

Donc : $1 < u_1 < 2$ (La propriété est vraie pour $n = 1$).

- Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $1 < u_n < 2$ et montrons que $1 < u_{n+1} < 2$.

On a : $1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1$

$$\Rightarrow 0 < (u_n - 1)^2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2$$

$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$$

Donc : si la propriété est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$.

- Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 < u_n < 2$

Exercice 11

On a : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1} \end{cases}$

1) Calculons u_1 et u_2 :

On a : $u_1 = \frac{u_0}{3 \times 0 + 1} = 2$ et $u_2 = \frac{u_1}{3 \times 1 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$:

Utilisons le raisonnement par récurrence.

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 2$ et $2 > 0$

Donc : $u_0 > 0$ (la propriété est vraie pour $n = 0$)

- Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_n > 0$ et $n+1 > 0$ donc : $\frac{u_n}{n+1} > 0$

C'est-à-dire : $u_{n+1} > 0$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.

3) Étudions la monotonie de la suite (u_n):

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n\left(\frac{1}{3n+1} - 1\right) = \frac{-3n}{n+1} u_n$

Puisque : $u_n > 0$ et $\frac{-3n}{n+1} \leq 0$

Alors : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$, et par conséquant,

Donc la suite (u_n) est décroissante.

4) • Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1}$ donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3n+1}$

et puisque : $n \in \mathbb{N}^*$ alors : $n \geq 1$ donc : $3n+1 \geq 4$ d'où : $\frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{4}$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$

• Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

1ère méthode :

Utilisons le raisonnement par récurrence.

• Initialisation :

Pour $n = 1$, on a : $u_1 = 2$ et $8\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 2$ et $2 \leq 2$

Donc : $u_1 \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1$ (La propriété est vraie pour $n = 1$).

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $u_n \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

d'après la question précédente, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$ et $u_n > 0$.

donc : $u_{n+1} \leq \frac{1}{4} u_n$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $u_n \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Donc: $u_{n+1} \leq \frac{1}{4} u_n \leq \frac{1}{4} \times 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

D'où : $u_{n+1} \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$

2ème méthode :

On a : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) : \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{4}$ **(1)**

On remplace le nombre k successivement par : **1, 2, 3**, ..., $n-1$ dans l'inégalité **(1)**, on obtient : $\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{u_4}{u_3} \leq \frac{1}{4}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$$ (Remarquer que:$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$)

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes, on trouve :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \ldots \times \frac{u_4}{u_3} \times \frac{u_3}{u_2} \times \frac{u_2}{u_1} \leq \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \ldots \times \frac{1}{4}}_{n-1 \text{ facteurs}}$$

donc : $\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ d'où : $u_n \leq u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et puisque : $u_1 = 2 = 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)$

alors : $u_n \leq 8 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ C'est-à-dire : $u_n \leq 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 12

On a : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = (1+u_n)\sqrt{u_n}$

1) Calculons u_1 et u_2:

• On a : $u_1 = (1+u_0)\sqrt{u_0} = 2$ et $u_2 = (1+u_1)\sqrt{u_1} = 3\sqrt{2}$

2) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$:

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \geq 1$

Donc : $u_0 \geq 1$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que : $u_{n+1} \geq 1$.

On a : $u_n \geq 1 \Rightarrow (1+u_n \geq 2$ et $\sqrt{u_n} \geq 1)$

$$\Rightarrow (1+u_n)\sqrt{u_n} \geq 2$$

$$\Rightarrow (1+u_n)\sqrt{u_n} \geq 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 1$

3) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq 1 + u_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = (1+u_n)\sqrt{u_n}$ et $1 + u_n \neq 0$

Donc : $\frac{u_{n+1}}{1+u_n} = \sqrt{u_n}$

et puisque : $u_n \geq 1$ alors : $\sqrt{u_n} \geq 1$ d'où : $\frac{u_{n+1}}{1+u_n} \geq 1$

Par suite : $u_{n+1} \geq 1 + u_n$

• Déduction :

Puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq 1 + u_n$. Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n \geq 1 > 0$

Donc : La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 13

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n} ; n \in \mathbb{N}$

1) Calculons u_1 et u_2:

On a : • $u_1 = u_0\sqrt{u_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

• $u_2 = u_1\sqrt{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{8}}}{8}$

Donc : $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $u_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{8}}}{8}$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ .Donc : $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \sqrt{u_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n\sqrt{u_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

et puisque : $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq \frac{1}{2}$ alors : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

3) Étudions la monotonie de la suite (u_n):

1ère méthode : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$ et $u_n \neq 0$ donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{u_n}$

et puisque : $u_n \leq \frac{1}{2}$ alors $\sqrt{u_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ d'où : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

et puisque : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème méthode : $u_{n+1} - u_n = u_n\sqrt{u_n} - u_n = u_n(\sqrt{u_n} - 1)$

et puisque : $u_n > 0$ et $\sqrt{u_n} < 1$ (car $u_n < 1$)

Alors : $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 14

On a : $u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}} = ; n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{4n}{n+1}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{4n}{n+1}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{4n}{n+1}}$

2) Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{4n}{n+1}}$

Comparons $\sqrt{\frac{4n}{n+1}}$ et **1**. On a : $\left(\sqrt{\frac{4n}{n+1}}\right)^2 - 1 = \frac{4n}{n+1} - 1 = \frac{3n-1}{n+1}$

et puisque $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\frac{3n-1}{n+1} > 0$ d'où : $\left(\sqrt{\frac{4n}{n+1}}\right)^2 - 1 > 0$

par suite : $\sqrt{\frac{4n}{n+1}} > 1$, C'est-à-dire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

3) Étudions la monotonie de la suite (u_n):

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} > u_n$

et par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 15

On a : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \dots + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times n}$

1) Calculons u_1, u_2 et u_3 :

On a : $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} = \frac{3}{2}$

$u_3 = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

2) Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \dots + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times n}$

et $u_{n+1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \dots + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times n}\right) + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times (n+1)}$

donc : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times (n+1)}$

d'où : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times (n+1)}$

et puisque : $\frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times (n+1)} > 0$

Alors : $u_{n+1} - u_n > 0$; donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} > u_n$

Par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$:

Puisque : $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$ alors : $n \geq 2$

donc : $1 \times \underbrace{2\times 3\times \dots \times n}_{(n-1)\text{ facteurs}} \geq 1 \times \underbrace{2\times 2\times 2\times \dots \times 2}_{(n-1)\text{ facteurs}}$

d'où : $1\times 2\times 3\times \dots \times n \geq 1 \times 2^{n-1}$ pour tout $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$.

Par suite :$(\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\})$; $\frac{1}{1\times 2\times 3\times \dots \times k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

Donc : pour $k = 2$, on a : $\frac{1}{1\times 2} \leq \frac{1}{2}$

pour $k = 3$, on a : $\frac{1}{1\times 2\times 3} \leq \frac{1}{2^2}$

pour $k = 4$, on a : $\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} \leq \frac{1}{2^3}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$

Pour $k = n$, on a: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Par addition membre à membre les inégalités précédentes, on obtient :

$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + ... + \frac{1}{1 \times 2 \times ... \times n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

donc : $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + ... + \frac{1}{1 \times 2 \times ... \times n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

C'est-à-dire : $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$

4) Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} ;$$

• Initialisation :

Pour $n = 2$, on a: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, donc $1 + \frac{1}{2^{2-1}} = 2 - \frac{1}{2^{2-1}}$

La propriété est vraie pour $n = 2$.

• Hérédité :

Soit $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$

Supposons que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

et montrons que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

On a : $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2^n} - \frac{2}{2^n}$

$$= 2 - \frac{1}{2^n}$$

La propriété est donc vraie pour $n + 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Déduction :

Soit $n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$,

On a : $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$ et $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

donc : $u_n \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$; et puisque : $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$, alors : $2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$

d'où : $\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{1\}) ; u_n < 2$

Rappel:
(Si $a \leq b$ et $b < c$) alors : $a < c$

Exercice 16

On a : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

1) Calculons u_1 et v_1 :

On a : • $u_1 = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$ • $v_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

2) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq v_n$:

• **Initialisation :**

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et $1 \leq 2$ .Donc : $u_0 \leq v_0$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $u_n \leq v_n$ et montrons que : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

On a : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2}$

et puisque : $\dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$ alors : $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ C'est-à-dire : $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

La propriété est donc vraie pour $n + 1$;

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq v_n$

3) Montrons que la suite (u_n) est croissante:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$

et puisque : $u_n \leq v_n$ alors : $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n}$

Donc : $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geq 0$ d'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (car $\sqrt{u_n} \geq 0$) d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_{n+1}$

Par conséquent la suite (u_n) est croissante.

4) Montrons que la suite (v_n) est décroissante:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$

et puisque : $u_n \leq v_n$ alors : $u_n - v_n \leq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$,

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} \leq v_n$. Donc : la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 17

On a : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \dfrac{1}{4}$

1)a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 < 1$:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_n < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 1$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 1$.

b- Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \frac{1}{2}$:

• Initilisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $|0| < \frac{1}{2}$ donc : $|u_0| < \frac{1}{2}$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $|u_n| < \frac{1}{2}$ et montrons que $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}$

On a : $|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 1$ (d'après la question précédente)

et on a : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

et puisque : $0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 1$

Alors : $-\frac{1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ C'est-à-dire : $-\frac{1}{2} < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

Donc : $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}$. La propriété est donc vraie pour $n + 1$;

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n| < \frac{1}{2}$

2) Étudions la monotonie de la suite (u_n):

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$

et puisque $|u_n| < \frac{1}{2}$ alors : $u_n^2 < \frac{1}{4}$ donc : $u_n^2 - \frac{1}{4} < 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$

Utilisons le raisonnement par récurrence.

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $2^0 = 1$ donc : $\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^0} = u_0 + \frac{1}{2}$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$ et montrons que :

$u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$. On a : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$

donc : $u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left[\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2 = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

(car $2^n \times 2 = 2^{n+1}$), La propriété est donc vraie pour $n + 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Exercice 18

On a : $u_0 = \frac{31}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5u_n + 10}{3(u_n - 1)}$

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 5$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \frac{31}{5}$ et $\frac{31}{5} > 5$

Donc : $u_0 > 5$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n > 5$ et montrons que : $u_{n+1} > 5$.

On a : $u_{n+1} - 5 = \frac{u_n^2 + 5u_n + 10}{3(u_n - 1)} - 5 = \frac{u_n^2 + 5u_n + 10 - 15u_n + 15}{3(u_n - 1)}$

$$= \frac{u_n^2 - 10u_n + 25}{3(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 5)^2}{3(u_n - 1)}$$

et puisque : $3(u_n - 5)^2 > 0$ et $3(u_n - 1) > 0$

Alors : $u_{n+1} - 5 > 0$ C'est-à-dire : $u_{n+1} > 5$

La propriété est vraie pour $n + 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 5$

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante:

Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 + 5u_n + 10}{3(u_n - 1)} = \frac{3u_n^2 - 3u_n - u_n^2 - 5u_n - 10}{3(u_n - 1)}$

$$= \frac{2u_n^2 - 8u_n - 10}{3(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 5)(2u_n + 2)}{3(u_n - 1)}$$

Et puisque : $u_n > 5$, alors : $u_n - 5 > 0$, $2u_n + 2 > 0$ et $3(u_n - 1) > 0$.

alors : $u_n - u_{n+1} > 0$ donc : $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où la suite (u_n) est strictement décroissante.

3) **a-** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 5 \leq \frac{1}{10}(u_n - 5)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - 5 = \dfrac{(u_n - 5)^2}{3(u_n - 1)}$

Donc : $\dfrac{u_{n+1} - 5}{u_n - 5} = \dfrac{u_n - 5}{3(u_n - 1)}$ Comparons : $\dfrac{u_n - 5}{3(u_n - 1)}$ et $\dfrac{1}{10}$:

On a : $\dfrac{1}{10} - \dfrac{u_n - 5}{3(u_n - 1)} = \dfrac{3u_n - 3 - 10u_n + 50}{3(u_n - 1)} = \dfrac{47 - 7u_n}{3(u_n - 1)}$

Puisque la suite (u_n) est décroissante, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq \frac{31}{5}$ (car $u_n \leq u_0$)

et d'après la question précédente : $u_n \geq 5$.

donc : $5 \leq u_n \leq \frac{31}{5}$ d'où : $3(u_n - 1) > 0$ **(1)** et $7u_n \leq \frac{7 \times 31}{5}$

et puisque : $\frac{7 \times 31}{5} < 47$ alors : $7u_n \leq 47$

Par suite : $47 - 7u_n \geq 0$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** on en déduit que : $\dfrac{1}{10} - \dfrac{u_n - 5}{3(u_n - 1)} \geq 0$

c'est-à-dire : $\dfrac{u_n - 5}{3(u_n - 1)} \leq \dfrac{1}{10}$

par suite : $\dfrac{(u_n - 5)^2}{3(u_n - 1)} \leq \dfrac{1}{10}(u_n - 5)$ (car $u_n - 5 > 0$)

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 5 \leq \frac{1}{10}(u_n - 5)$

b- Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - 5 \leq \frac{6}{5} \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$:

On a : $(\forall m \in \mathbb{N}); u_{m+1} - 5 \leq \frac{1}{10}(u_m - 5)$ (a).Donc :

- Pour $m = 0$, on a : $0 < u_1 - 5 \leq \frac{1}{10}(u_0 - 5)$ (car $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 5$)
- Pour $m = 1$, on a : $0 < u_2 - 5 \leq \frac{1}{10}(u_1 - 5)$
- Pour $m = 2$, on a : $0 < u_3 - 5 \leq \frac{1}{10}(u_2 - 5)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- Pour $m = n - 1$, on a: $0 < u_n - 5 \leq \frac{1}{10}(u_{n-1} - 5)$

En multipliant les termes des inégalités précédentes membre à membre, et après simplification, on obtient : $0 < u_n - 5 \leq \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times ... \times \frac{1}{10}}_{n\ facteurs} \times (u_0 - 5)$

Rappel:
Le nombre de facteurs est le nombre de termes consécutifs de u_1 à u_n c'est donc :
$$n - 1 + 1 = n$$

Donc : $u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(\frac{31}{5} - 5\right)$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \times \frac{6}{5}$

Exercice 19

On a : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{u_n - 2}{u_n^2} ; n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

Utilisons un raisonnement par récurrence.

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 3$ et $3 > 2$

Donc : $u_0 > 2$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n > 2$ et montrons que : $u_{n+1} > 2$.

On a : $u_{n+1} = 2 + \frac{u_n - 2}{u_n^2}$ donc : $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n^2}$ et puisque : $u_n^2 > 0$ et $u_n > 2$

alors : $u_{n+1} - 2 > 0$ C'est-à-dire : $u_{n+1} > 2$

La propriété est vraie pour $n + 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 2$

2) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n^2)(u_n - 2)}{u_n^2}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{u_n - 2}{u_n^2} - u_n = \frac{(u_n - 2)}{u_n^2} - (u_n - 2)$

$$= (u_n - 2)\left(\frac{1}{u_n^2} - 1\right) = \frac{(u_n - 2)(1 - u_n^2)}{u_n^2}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n^2)(u_n - 2)}{u_n^2}$

b- • Étudions la monotonie de la suite (u_n) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n^2)(u_n-2)}{u_n^2}$

et puisque : $u_n > 2$ alors : $u_n - 2 > 0$ et $1 - u_n^2 < 0$ (car $u_n^2 > 4 > 1$)

donc : $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où la suite (u_n) est strictement décroissante.

• Déduisons que la suite (u_n) est bornée:

Puisque la suite (u_n) est décroissante, alors elle est majorée par son premier terme: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq u_0$

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 3$ et puisque :$(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 2$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n \leq 3$ donc la suite (u_n) est bornée.

3) a- Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

donc : $u_{n+1} > 2$ d'où : $u_{n+1} - 2 > 0$.

On a : $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n^2}$; et puisque $u_n > 2$ alors , $u_n^2 > 4$; donc : $\frac{1}{u_n^2} < \frac{1}{4}$

D'où : $\frac{u_n - 2}{u_n^2} < \frac{1}{4}(u_n - 2)$ c'est-à-dire : $u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

b- Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Utilisons le raisonnement par récurrence (on peut aussi utiliser un raisonnement analogue au raisonnement de l'exercice **18** question **3)**b)).

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 - 2 = 1$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ et $0 < 1 \leq 1$

Donc : $0 < u_0 - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,

Supposons que $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Puisque: $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

alors : $0 < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et puisque : $0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2)$

Alors : $0 < u_{n+1} - 2 < \frac{1}{4}(u_n - 2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Donc : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n - 2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 20

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2u_n}$

1) Calculons u_1 et u_2 :

On a : • $u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+2u_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2+2u_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 1$:

• Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < 1$ donc : $u_0 < 1$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n < 1$ et montrons que : $u_{n+1} < 1$

On a : $u_n < 1 \Rightarrow 2u_n < 2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2u_n + 2 < 4 \\
&\Rightarrow \sqrt{2u_n + 2} < 2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2u_n + 2} < 1 \\
&\Rightarrow u_{n+1} < 2
\end{aligned}$$

La propriété est vraie pour $n+1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 1$

3) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2+\sqrt{2+2u_n}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2+2u_n} = \frac{2-\sqrt{2+2u_n}}{2}$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{2+2u_n}\right)\left(2+\sqrt{2+2u_n}\right)}{2\left(2+\sqrt{2+2u_n}\right)} = \frac{4-2-2u_n}{2\left(2+\sqrt{2+2u_n}\right)}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{2\left(2+\sqrt{2+2u_n}\right)} = \frac{1-u_n}{2+\sqrt{2+2u_n}}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2+\sqrt{2+2u_n}}$

b- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{2 + \sqrt{2 + 2u_n}}$

et puisque : $2 + \sqrt{2 + 2u_n} > 2$ alors : $\dfrac{1}{2 + \sqrt{2 + 2u_n}} < \dfrac{1}{2}$

donc : $\dfrac{1 - u_n}{2 + \sqrt{2 + 2u_n}} < \dfrac{1}{2}(1 - u_n)$ (car $1 - u_n > 0$)

D'où : $1 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c- Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$ **(1)**

En remplaçant n successivement par **0, 1, 2, ...**, $(n-1)$ dans **(1)**, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{l}
0 < 1 - u_1 \leq \frac{1}{2}(1 - u_0) \\
0 < 1 - u_2 \leq \frac{1}{2}(1 - u_1) \\
0 < 1 - u_3 \leq \frac{1}{2}(1 - u_2) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}(1 - u_{n-1})
\end{array}$$

En multipliant les inégalités précédentes membre à membre et après simplification on obtient :

$$0 < 1 - u_n \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}}(1 - u_0)$$

Donc : $0 < 1 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ (car $u_0 = \frac{1}{2}$)

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

2 Suites arithmétiques - Suites géométriques :

On pose : $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ tel que n_0 est un élément donné dans $\mathbb{N}$.
Soit (u_n) une suite définie sur I.

Suite arithmétique	Suite géométrique
Définitions	
• (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout élément n de I, on a : $u_{n+1} = u_n + r$ • r est appelé : **raison** de la suite (u_n).	• (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout élément n de I, on a : $u_{n+1} = qu_n$ • q est appelé : **raison** de la suite (u_n).
Expression de u_n en fonction de n	
• $(\forall n \in I) ; u_n = u_0 + nr$ (si $I = \mathbb{N}$) • $\forall(n;p) \in I^2 ; u_n = u_p + (n-p)r$	• $(\forall n \in I) ; u_n = u_0 \times q^n$ (si $I = \mathbb{N}$) • $\forall(n;p) \in I^2 ; u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des termes consécutifs	
• $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)}{2}(u_0 + u_n)$ (si $I = \mathbb{N}$) • $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p + u_n)}{2}$ • Cas particulier : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	• $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} ; q \neq 1$ • $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} ; (q \neq 1)$ • Cas particulier : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} ; q \neq 1$
Moyenne arithmétique : • $(\forall n \in I) ; \frac{u_n + u_{n+2}}{2} = u_{n+1}$	**Moyenne géométrique :** • $(\forall n \in I) ; u_n \times u_{n+2} = (u_{n+1})^2$ • Si (u_n) est positive, alors : $(\forall n \in I) ; u_{n+1} = \sqrt{u_n \times u_{n+2}}$

Remarque :

- Le nombre de termes consécutifs de u_p à u_n où $n > p$ est : $n - p + 1$.
- La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{(1^{er} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$$

- La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est :

$$(1^{er} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \quad ; q \neq 1$$

Exercices

Exercice 21

Déterminer les suites arithmériques parmi les suites suivantes :

1) (u_n) est définie par: $u_n = 2n + 4$
2) (v_n) est définie par: $v_n = n\sqrt{n}$
3) (a_n) est définie par: $a_0 = -1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_{n+1} = a_n - 5$

4) (b_n) est définie par: $b_0=-1$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, b_{n+1}+b_n=\sqrt{3}$

Exercice 22

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=-10$ et de raison $r=3$.

1) Calculer u_{20} et u_{100}.

2) Calculer la somme $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{100}$.

Exercice 23

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

a- Calculer u_0 et u_8 sachant que : $u_1=3$ et $r=-2$.

b- Calculer r et u_1 sachant que : $u_{15}=0$ et $u_7=-16$.

c- Calculer u_5 sachant que : $u_7=-2$ et $u_{15}+u_0=6$.

d- Calculer en fonction de n le nombre $(u_{3n+2}-u_{n+3})$ sachant que : $r=2$.

2) Calculer la somme : $S=1+\frac{8}{5}+\frac{11}{5}+\frac{14}{5}+...+\frac{347}{5}+70$ (justifier)

Exercice 24

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$.

On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, v_n=\frac{1}{1+u_n}$

1) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1.

2) Calculer $v_{n+1}-v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, en déduire la nature de la suite (v_n).

3) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 25

Soit (u_n) une suite numérique et $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ la somme de ses n premiers termes.

On suppose que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\, S_n=\frac{5}{2}n-n^2$.

1) Calculer les termes : u_1, u_2 et u_3.

2) a- Écrire u_n en fonction de n.

b- En déduire que (u_n) est une suite arithmétique.

Exercice 26

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

On pose : $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{54}$

Calculer r puis u_0 sachant que : $u_{10}=-9$ et $S=420$.

Exercice 27

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0=a$ tels que : $a\neq 0$ et $r\neq 0$.

On pose : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_{n-1}$ $(n\neq 0)$

Soit m et n deux entiers naturels non nuls (avec $n \neq m$).

1) Montrer que : $S_n = S_m \Leftrightarrow (n+m-1)r + 2a = 0$

2) En déduire que : $S_n = S_m \Rightarrow S_{m+n} = 0$

Exercice 28

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+2^n u_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$.

1) Calculer u_1 et v_0.

2) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3) Donner v_n puis u_n en fonction de n.

4) Calculer en fonction de $n(n \geq 8)$ la somme $S_n = v_8 + v_9 + v_{10} + ... + v_n$.

Exercice 29

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n - \dfrac{1}{3^{n+1}}$ et $v_n = 3^{n+1} u_n$.

1) Calculer les termes : u_1, u_2 et v_0.

2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$.

3) Écrire v_n en fonction de n, en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \dfrac{1-n}{3^n}$

4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n+1}$.

Exercice 30

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

On pose : $v_n = \dfrac{2}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et v_0.

2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

3) a- Écrire v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n.

b- Étudier la monotonie de la suite (u_n).

4) a- Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{29}$

b- Calculer la somme : $T = \dfrac{4}{u_0 - 1} + \dfrac{4}{u_1 - 1} + \dfrac{4}{u_2 - 1} + ... + \dfrac{4}{u_{29} - 1}$

Exercice 31

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \dfrac{1 + nu_n}{n+1}$.

On pose : $v_n = nu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1) Calculer : u_2 ; v_1 et v_2.

2) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

3) Écrire v_n en fonction de n et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = 1 - \frac{1}{2n}$.

4) Calculer en fonction de n la somme : $S = 1u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 32

Déterminer les suites géométriques, parmi les suites suivantes :

1) (u_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3 \times 2^n$

2) (v_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = (-1)^n$

3) (a_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = 2n$

4) (b_n) est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; b_n = \sqrt{n}$

Exercice 33

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q telle que : $v_0 = 5$ et $v_1 = 10$.

1) Calculer v_4 et v_{10}.

2) Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + ... + v_{10}$

Exercice 34

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

1) Calculer u_4 et u_6 sachant que : $u_0 = 16$ et $q = \frac{1}{2}$.

2) Calculer u_4 et u_9 sachant que : $u_1 = 3$ et $q = -2$.

3) Calculer u_0 sachant que : $u_7 = 18$, $u_5 = 2$ et $q > 0$.

4) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ (en fonction de n), sachant que : $u_0 = 1$ et $q = 5$.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2}{u_n - 1}$.

On admet que u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 2$

2) On pose : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 36

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 4$.

Montrer que : u_1, u_5 et u_{21} sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 37

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = 8 - \dfrac{24}{u_n + 2}$ et $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$.

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante; en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\dfrac{1}{u_n + 2} \leq \dfrac{1}{5}$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

4) a- Montrer (v_n) est une suite géométrique dont déterminera la raison.

b- Donner v_n en fonction de n, en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 4 \times 3^n}{2^n + 3^n}$.

c- Calculer en fonction de n la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{u_k - 2}$.

Exercice 38

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = (1 + 2\sqrt{u_n})^2$ et $v_n = 1 + \sqrt{u_n}$.

1) a- Calculer les termes u_1, u_2, v_0 et v_1.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$.

c- Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en précisant la raison.

3) Exprimer u_n en fonction de n.

4) Calculer en fonction de n, la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}$.

Exercice 39

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

1) Calculer les termes : u_1 et u_2.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$.

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \sqrt{2}| < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$.

c- En déduire une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-3}.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- Déterminer u_n en fonction de n.

Solutions

Exercice 21

Déterminons les suites arithmétiques.

1) On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 2n + 4$.

Donc $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+4) - (2n+4) = 2n + 2 + 4 - 2n - 4 = 2$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

2) Est-ce que (v_n) est une suite arithmétique?

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = n\sqrt{n}$.

- On a: $v_0 = 0, v_1 = 1$ et $v_2 = 2\sqrt{2}$
- On a: $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 2\sqrt{2} - 1$

Comme: $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$, alors la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

3) Est-ce que la suite (a_n) est arithmétique?

On a : $a_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} = a_n - 5$.

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_{n+1} - a_n = -5$.

D'où la suite (a_n) est arithmétique de raison $r = -5$.

4) Est-ce que (b_n) est une suite arithmétique?

On a : $b_0 = -1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_{n+1} + b_n = \sqrt{3}$.

On a : $b_0 = -1$; $b_1 = \sqrt{3} - b_0 = \sqrt{3} + 1$ et $b_2 = \sqrt{3} - b_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = -1$

Donc $b_1 - b_0 = 2 + \sqrt{3}$ et $b_2 - b_1 = -2 - \sqrt{3}$.

Puisque : $b_1 - b_0 \neq b_2 - b_1$ alors la suite (b_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 22

1) Calculons u_{20} et u_{100}.

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -10$. Donc $u_{20} = u_0 + 20 \times r = -10 + 20 \times 3 = 50$

et $u_{100} = u_0 + 100r = -10 + 100 \times 3 = 290$

2) Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.

Rappel :

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

(nombre de termes) × $\left(\dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}\right)$

le nombre de termes de la somme S est $100 - 0 + 1 = 101$.

Rappel : Le nombre de termes de u_p à u_n est $n - p + 1$.

Donc $S = 101\left(\dfrac{u_0 + u_{100}}{2}\right) = 101\left(\dfrac{-10 + 290}{2}\right) = 101 \times 140 = 14140$

Exercice 23

1) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de rayon r.

a) Calculons u_0 et u_8 sachant que $u_1 = 3$ et $r = -2$.

Puisque (u_n) est une suite arithmétique de raison r

alors $u_0 = u_1 - r = 3 - (-2) = 5$ et $u_8 = u_1 + 7r$

D'où : $u_8 = 3 + 7 \times (-2)$,

c'est-à-dire $u_8 = -11$.

Rappel:

$u_n = u_p + (n-p)r$

b- Calculons r et u_1 sachant que $u_{15} = 0$ et $u_7 = -16$.

Puisque (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

• Alors $u_{15} = u_7 + 8r$, donc $r = \dfrac{u_{15} - u_7}{8} = \dfrac{0+16}{8} = 2$.

• On a : $u_7 = u_1 + 6r$.

Donc $u_1 = u_7 - 6r = -16 - 6 \times 2$ c'est-à-dire: $u_7 = -28$.

c- Calculons u_5 sachant que $u_7 = -2$ et $u_{15} + u_0 = 6$.

1ère méthode : Puisque $u_{15} = u_7 + 8r$, et $u_0 = u_7 - 7r$, alors $u_{15} + u_0 = 2u_7 + r$,

c'est-à-dire $6 = 2 \times (-2) + r$.

Donc $r = 10$, et puisque $u_5 = u_7 - 2r$,

alors $u_5 = -2 - 20$, c'est-à-dire $u_5 = -22$.

2ème méthode :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

On a: $u_{15} = u_5 + 10r$; $u_5 = u_0 + 5r$; $u_7 = u_5 + 2r$ et $u_{15} + u_0 = 6$

Donc: $\begin{cases} u_7 = u_5 + 2r \\ (u_5 + 10r) + (u_5 - 5r) = 6 \end{cases}$

D'où: $\begin{cases} -2 = u_5 + 2r \\ 2u_5 + 5r = 6 \end{cases}$ C'est-à-dire $\begin{cases} 5u_5 + 10r = -10 \\ 4u_5 + 10r = 12 \end{cases}$

Par suite $(5u_5 + 10r) - (4u_5 + 10r) = -10 - 12$ finalement $u_5 = -22$.

d- Calculons en fonction de n le nombre $u_{3n+2} - u_{n+3}$.

Puisque (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Alors $u_{3n+2} = u_{n+3} + ((3n+2) - (n+3))r = u_{n+3} + (2n-1) \times 2$

donc $u_{3n+2} - u_{n+3} = 4n - 2$.

2) Calculons la somme: $S = 1 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{11}{5} + \dfrac{14}{5} + \dfrac{347}{5} + 70$.

Posons $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{8}{5}$, $u_2 = \dfrac{11}{5}$ et $u_3 = \dfrac{14}{5}$.

On remarque que: $u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = 70 - \dfrac{347}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Les termes de cette somme sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = \frac{3}{5}$.

Donc $u_n = u_0 + nr = 1 + \frac{3}{5}n$.

Déterminons n sachant $u_n = 70$

$$\begin{aligned} u_n = 70 &\iff 1 + \frac{3}{5}n = 70 \\ &\iff \frac{3}{5}n = 69 \\ &\iff n = 23 \times 5 = 115 \end{aligned}$$

Donc $u_{115} = 70$ et $u_{114} = \frac{347}{5}$ (Vérifier ce résultat).

Calculons $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{115}$ où (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{5}$ et de premier terme u_0.

Le nombre des termes de u_0 à u_{115} est 116.

Donc $S = 116 \times \left(\frac{u_0 + u_{115}}{2}\right) = 116\left(\frac{1 + 70}{2}\right) = 4118$

Exercice 24

On a : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left(u_{n+1} = \frac{-1}{2 + u_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{1 + u_n}\right)$.

1) Calculons u_1, u_2, v_0 et v_1.

On a : • $u_1 = \frac{-1}{2 + u_0} = \frac{-1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}$.

• $u_2 = \frac{-1}{2 + u_1} = \frac{-1}{2 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{7}$.

• $v_0 = \frac{1}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$.

• $v_1 = \frac{1}{1 + u_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

2) Calculons $v_{n+1} - v_n$ et déduisons la nature de (v_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1 + u_{n+1}} - \frac{1}{1 + u_n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-1}{2 + u_n}\right)} - \frac{1}{1 + u_n} = \frac{2 + u_n}{1 + u_n} - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$= \frac{1 + u_n}{1 + u_n} = 1$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_{n+1} - v_n = 1$.

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

3) Déterminons u_n puis un en fonction de n.

Puisque (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

Alors $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + n = \frac{3n+1}{3}$.

On a : $v_n = \frac{1}{1+u_n} \Leftrightarrow 1 + u_n = \frac{1}{v_n}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 1$$

Donc $u_n = \dfrac{1}{\frac{3n+1}{3}} - 1 = \dfrac{3}{3n+1} - 1 = \dfrac{2-3n}{1+3n}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{2-3n}{1+3n}$.

Exercice 25

1) Calculons u_1, u_2 et u_3.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

Donc $S_1 = u_1$; $S_2 = u_1 + u_2$ et $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

D'où : $u_1 = S_1$; $u_2 = S_2 - u_1$ et $u_3 = S_3 - (u_1 + u_2)$.

Or $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \frac{5}{2}n - n^2$.

Donc $S_1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$, $S_2 = \frac{5}{2} \times 2 - 2^2 = 1$ et

$S_3 = \frac{5}{2} \times 3 - 3^2 = \frac{15}{2} - 9 = -\frac{3}{2}$.

Par conséquent : $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ et $u_3 = -\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$.

2) a- Expression de u_n en fonction de n.

On a :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}) + u_n$

$$= S_{n-1} + u_n$$

Donc $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{5}{2}n - n^2 - \frac{5}{2}(n-1) + (n-1)^2$

$$= \frac{5}{2}n - n^2 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2} + n^2 - 2n + 1$$

Par conséquent : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = -2n + \frac{7}{2}$.

b- Déterminons la nature de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + \frac{7}{2} + 2n - \frac{7}{2} = -2n - 2 + \frac{7}{2} + 2n - \frac{7}{2} = -2$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et de raison $r = -2$.

Remarque :

Toute suite (u_n) qui s'écrit sous la forme $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison $r = a$.

Exercice 26

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Déterminons r sachant que $u_{10} = -9$ et $S = 420$.

On a : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{34}$.

Donc $420 = 35\left(\frac{u_0 + u_{34}}{2}\right)$.

Or $u_{34} = u_{10} + 24r = -9 + 24r$, et $u_0 = u_{10} - 10r = -9 - 10r$.

Donc $420 = 35\frac{-9 - 10r + 24r - 9}{2}$.

D'où : $420 = 35 \times (-9 + 7r)$. Par suite $12 = -9 + 7r$,

Conclusion: $r = \frac{21}{7} = 3$ et $u_0 = u_{10} - 10r = -9 - 30 = -39$

Exercice 27

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ et de premier terme $u_0 = a$ $(a \neq 0)$.

1) Montrons que $S_m = S_n \Leftrightarrow (n + m - 1)r + 2a = 0$ (où $m \neq n$).

On a : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

$= n\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right)$; (car (u_n) est une suite arithmétique de raison r).

et on a : $S_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1} = m\left(\frac{u_0 + u_{m-1}}{2}\right)$

On a : $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r = a + (n-1)r$ et $u_{m-1} = a + (m-1)r$.

Donc $S_n = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}$, et $S_m = m\frac{(2a + (m-1)r)}{2}$ **(1)**

D'où : $S_n = S_m \Leftrightarrow n(2a + (n-1)r) = m(2a + (m-1)r)$

$\Leftrightarrow 2na + n(n-1)r = 2ma + m(m-1)r$

$\Leftrightarrow 2a(n-m) + r(n(n-1) - m(m-1)) = 0$

$\Leftrightarrow 2a(n-m) + r(n^2 - m^2 - (n-m)) = 0$

$\Leftrightarrow 2a(n-m) + r((n-m)(n+m) - (n-m)) = 0$

$\Leftrightarrow 2a(n-m) + r((n-m)(n+m-1)) = 0$

$\Leftrightarrow (n-m)(2a + r(n+m-1)) = 0$

et puisque $n \neq m$, alors $2a + r(n + m - 1) = 0$

Donc: $S_n = S_m \Leftrightarrow (n + m - 1)r + 2a = 0$.

2) Déduisons que : $S_n = S_m \Longrightarrow S_{n+m} = 0$.

D'après l'égalité **(1)** on a : $S_{n+m} = (n+m)\left(\dfrac{2a+(n+m-1)r}{2}\right)$.

Or $S_n = S_m \Longrightarrow 2a + (m+n-1)r = 0$.

Donc: $S_n = S_m \Longrightarrow \dfrac{2a+(n+m-1)r}{2} = 0$

$$\Longrightarrow (n+m)\frac{2a+(n+m-1)r}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow S_{n+m} = 0$$

Exercice 28

1) On a : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+2^n u_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Calculons u_1 et v_0.

On a : • $u_1 = \dfrac{u_0}{2+2^0 u_0} = \dfrac{1}{3}$

• $v_0 = \dfrac{1}{2^0 u_0} = 1$.

2) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1} u_{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}\left(\dfrac{u_n}{2+2^n u_n}\right)} = \dfrac{2+2^n u_n}{2^{n+1} u_n} = \dfrac{2(1+2^{n-1}u_n)}{2^{n+1}u_n}$

$$= \frac{1+2^{n-1}u_n}{2^n u_n}$$

Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1+2^{n-1}u_n}{2^n u_n} - \dfrac{1}{2^n u_n} = \dfrac{2^{n-1}u_n}{2^n u_n} = \dfrac{1}{2}$

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

3) Déterminons v_n puis u_n en fonction de n.

Puisque (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Alors $v_n = v_0 + nr = 1 + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n+2}{2}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \dfrac{n+2}{2}$.

• On a : $v_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Donc $u_n = \dfrac{1}{2^n v_n} = \dfrac{1}{2^n\left(\dfrac{n+2}{2}\right)} = \dfrac{2}{2^n(n+2)}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = \dfrac{2}{2^n(n+2)}$.

4) Calculons la somme S_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 8$.

On a $S_n = v_8 + v_9 + v_{10} + \cdots + v_n$,

et puisque (v_n) est une suite arithmétique et le nombre de terme de la somme S_n est $n - 8 + 1 = n - 7$.

Alors $S_n = (n-7)\left(\frac{v_8 + v_n}{2}\right)$.

Or $v_n = \frac{n+2}{2}$, donc $v_8 = \frac{8+2}{2} = 5$

alors: $S_n = (n-7) \times \frac{5 + \frac{n+2}{2}}{2} = \frac{(n-7)(n+12)}{4}$

Exercice 29

On a : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3^{n+1}}$ et $v_n = 3^{n+1}u_n$.

1) Calculons u_1, u_2 et v_0.

On a : • $u_1 = \frac{1}{3}u_0 - \frac{1}{3^{0+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

• $u_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3^{1+1}} = -\frac{1}{9}$.

• $v_0 = 3^{0+1}u_0 = 3 \times 1 = 3$.

2) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1} - v_n = 3^{n+2}u_{n+1} - 3^{n+1}u_n = 3^{n+1}(3u_{n+1} - u_n)$

$$= 3^{n+1}\left(3\left(\frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3^{n+1}}\right) - u_n\right) = 3^{n+1}\left(-\frac{1}{3^n}\right) = -\frac{3^{n+1}}{3^n} = -3$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} - v_n = -3$.

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $v_0 = 3$

3) • Déterminons v_n en fonction de n.

On a : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Donc $v_n = v_0 + nr = 3 - 3n$.

• Déduisons u_n en fonction de n.

On a : $v_n = 3^{n+1}u_n$.

Donc $u_n = \frac{v_n}{3^{n+1}} = \frac{3-3n}{3^{n+1}} = \frac{3(1-n)}{3^{n+1}}$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{1-n}{3^n}$.

4) Calculons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k$.

- La suite (v_n) est une suite arithmétique.
- Le nombre de termes de la somme S_n est $n+1-0+1 = n+2$.

Donc $S_n = (n+2)\left(\frac{v_0 + v_{n+1}}{2}\right)$, et puisque $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 3 - 3(n+1) = -3n$.

Alors $S_n = \frac{(n+2)(3-3n)}{2}$.

Exercice 30

On a : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$ et $v_n = \frac{2}{u_n - 1}$.

1) Calculons u_1 et v_0.

On a : $u_1 = \frac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{5}{3}$

$v_0 = \frac{2}{u_0 - 1} = \frac{2}{2-1} = 2$

2) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1} - 1} = \frac{2}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} = \frac{2(u_n + 1)}{3u_n - 1 - u_n - 1} = \frac{2(u_n + 1)}{2(u_n - 1)}$

Donc: $v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$

D'où : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} - \frac{2}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} - v_n = 1$. et par conséquent, (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 2$.

3) a- Exprimons v_n en fonction de n.

On a : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 2$.

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = v_0 + nr$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = 2 + n$.

• Déduisons u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = \frac{2}{u_n - 1}$, donc : $u_n - 1 = \frac{2}{v_n}$, d'où : $u_n = \frac{2}{v_n} + 1 = \frac{2}{2+n} + 1$.

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{n+4}{n+2}$.

4) a- Calculons la somme $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$.

On a : (v_n) est une suite arithmétique.

Donc $S=(29-0+1)\left(\frac{v_0+v_{29}}{2}\right)$, et puisque $v_0=2$ et $v_{29}=29+2=31$.

Alors $S=30\times\frac{33}{2}=15\times 33=495$.

b- Calculons la somme $T=\frac{4}{u_0-1}+\frac{4}{u_1-1}+\dots+\frac{4}{u_{29}-1}$.

On a : $T=\sum_{k=0}^{29}\frac{4}{u_k-1}=\sum_{k=0}^{29}\frac{2}{u_k-1}\times 2=2\sum_{k=0}^{29}\frac{2}{u_k-1}$

et puisque : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $v_k=\frac{2}{u_k-1}$. Alors $T=2\sum_{k=0}^{29}v_k=2S=2\times 495$

Donc $T=990$.

Exercice 31

On a : $u_1=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_{n+1}=\frac{1+nu_n}{n+1}$, et $v_n=nu_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Calculons u_2, v_1 et v_2.

On a : • $u_2=\frac{1+u_1}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

• $v_1=1u_1=\frac{1}{2}$ • $v_2=2u_2=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

2) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On a : $v_{n+1}-v_n=(n+1)u_{n+1}-nu_n=(n+1)\frac{1+nu_n}{n+1}-nu_n$

$$=1+nu_n-nu_n=1$$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_{n+1}-v_n=1$.

D'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_1=\frac{1}{2}$.

3) Exprimons v_n en fonction de n.

On a (v_n) et une suite arithmétique de premier terme $v_1=\frac{1}{2}$ et de raison $r=1$.

Donc: $v_n=v_1+(n-1)r=\frac{1}{2}+n-1$ .D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=\frac{2n-1}{2}$.

• Déduisons u_n en fonction de n.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On a : $v_n=nu_n$.

Donc $u_n=\frac{v_n}{n}=\frac{2n-1}{2n}=\frac{2n}{2n}-\frac{1}{2n}$. D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=1-\frac{1}{2n}$.

4) Calculons la somme $S=1u_1+2u_2+3u_3+\dots+nu_n$.

On a : $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$; $ku_k = v_k$. Donc $S=\sum_{k=1}^{n} v_k$,

et puisque (v_n) est une suite arithmétique, alors

$S=(n-1+1)\left(\frac{v_1+v_n}{2}\right)=n\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2n-1}{2}\right)}{2}$; (car $v_1=\frac{1}{2}$ et $v_n=\frac{2n-1}{2}$)

c'est-à-dire: $S=\frac{n^2}{2}$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $S=\frac{n^2}{2}$.

Exercice 32

Déterminons les suites géométriques parmi les suites proposées.

1) (u_n) est définie par $u_n = 3\times 2^n$.

Soit $n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}=3\times 2^{n+1}=(3\times 2^n)\times 2=2u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=2$. (On peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).

2) (v_n) est définie par $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=(-1)^n$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n\neq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}=-1$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=-1$.

Si on montre que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_{n+1}=qu_n$ où q est un réel qui ne dépond pas de n, alors (u_n) est une suite géométrique de raison q.

3) On a : (a_n) est définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $a_n=2n$.

Donc $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=4$ et $a_3=6$

puisque $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{a_3}{a_2}$ alors la suite (a_n) n'est pas géométrique.

4) (b_n) est définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $b_n=\sqrt{n}$.

On a : $b_0=0$, $b_1=1$, $b_2=\sqrt{2}$ et $b_3=\sqrt{3}$,

et puisque $\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{b_3}{b_2}$, alors la suite (b_n) n'est pas géométrique.

Exercice 33

(v_n) est une suite géométrique telle que $v_0=5$ et $v_1=10$.

1) Calculons v_4 et v_{10}.

• Puisque (v_n) est une suite géométrique, alors $v_4=v_0\times q^4$ et sa raison q vérifie $q=\frac{v_1}{v_0}=\frac{10}{5}=2$, donc : $v_4=v_0\times q^4=5\times 2^4=80$

$v_{10}=v_4\times q^{10-4}=80\times 2^6=5120$

Rappel:
$u_n=u_p\times q^{n-p}$

2) Calculons la somme $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{10}$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors:

$S = v_0 \dfrac{1-q^{10-0+1}}{1-q}$. Or $v_0 = 5$ et $q = 2$, donc: $S = 5\dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 5(2^{11}-1)$

D'où $S = 10235$

Exercice 34

On a : (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

1) Calculons u_4 et u_8 sachant que $u_0 = 16$ et $q = \dfrac{1}{2}$

On a : $u_4 = u_0 \times q^4 = 16 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 1$ et $u_8 = u_4 \times q^4 = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

2) Calculons u_4 et u_9 sachant que $u_1 = 3$ et $q = -2$.

On a : $u_4 = u_1 \times q^3 = 3 \times (-2)^3 = -24$

et $u_9 = u_4 \times q^5 = -24 \times (-2)^5 = 768$

3) Calculons u_0 sachant que $u_7 = 18$, $u_3 = 2$ et $q > 0$.

On a : $u_7 = u_3 \times q^4$.Donc $q^4 = \dfrac{u_7}{u_3} = \dfrac{18}{2} = 9$.D'où : $q^2 = 3$,

et puisque $q > 0$ alors $q = \sqrt{3}$.

On a : $u_3 = u_0 \times q^3$ donc $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}^3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

4) Calculons la somme S_n sachant que $u_0 = 1$ et $q = 5$.

Puisque (u_n) est une suite géométrique alors:

$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 . \dfrac{1-(q)^{n-0+1}}{1-q}$.

le nombre de termes de cette somme est $(n-0+1) = n+1$.

Donc $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1\dfrac{1-5^{n+1}}{1-5} = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$; (où $u_0 = 1$ et $q = 5$).

Exercice 35

On a : $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \neq 2$.

Utilisons un raisonnement par récurrence.

• Initialisation :

- Pour $n = 0$; on a : $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3}{2} \neq 2$, donc $u_0 \neq 2$ (la propriété est vraie pour $n = 0$).

• Hérédité :

. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n \neq 2$ et montrons que $u_{n+1} \neq 2$.

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2}{u_n - 1} - 2 = \dfrac{2 - 2u_n + 2}{u_n - 1} = 2\dfrac{(2 - u_n)}{u_n - 1}$

et puisque $u_n \neq 2$ alors $2 - u_n \neq 0$. Donc $u_{n+1} - 2 \neq 0$.

D'où : $u_{n+1} \neq 2$ (la propriété est vraie pour $n + 1$).

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \neq 2$.

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$.

a- Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{\dfrac{2}{u_n - 1} + 1}{\dfrac{2}{u_n - 1} - 2} = \dfrac{\dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}}{\dfrac{4 - 2u_n}{u_n - 1}} = \dfrac{u_n + 1}{-2(u_n - 2)}$

Donc $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2} \times v_n$.

D'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = \dfrac{u_0 + 1}{u_0 - 2} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{7}{2}} = \dfrac{1}{7}$.

b- Exprimons v_n en fonction de n.

Puisque (v_n) est une suite géométrique,

alors $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

• Déterminons u_n en fonction de n.

On a : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2} \iff u_n v_n - 2v_n = u_n + 1$

$$\iff u_n v_n - u_n = 1 + 2v_n$$

$$\iff u_n(v_n - 1) = 1 + 2v_n$$

$$\iff u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n - 1}$$; (car $v_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

et puisque $v_n = \dfrac{1}{7} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ alors $u_n = \dfrac{1 + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{7} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{1 + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{7} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

Exercice 36

On a (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 4$.
Montrons que u_1, u_5 et u_{21} sont des termes consécutifs d'une suite géométrique.
Pour cela, il suffit de vérifier que: $u_1 \times u_{21} = u_5^2$.
Calculons u_5 et u_{21}. On a : $u_1 = 4$, et $u_5 = u_1 + 4r = 4 + 4 \times 3 = 16$,
et $u_{21} = u_1 + 20r = 4 + 20 \times 3 = 64$.
Donc $u_1 \times u_{21} = 4 \times 64 = 256$, et $u_5^2 = 16^2 = 256$.
D'où : $u_1 \times u_{21} = u_5^2$.
Par suite u_1, u_{21} et u_5 sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 37

On a : $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} = 8 - \dfrac{24}{u_n + 2}$ et $v_n = \dfrac{u_1 - 4}{u_n - 2}$.

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$.

Utilisons un raisonnement par récurrence.

- Initialisation :
- Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ et $2 < 3 < 4$.
  Donc $2 < u_0 < 4$ d'où la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité :
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $2 < u_n < 3$ et montrons que $2 < u_{n+1} < 4$.

On a : $2 < u_n < 4 \Rightarrow 4 < u_n + 2 < 6$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{u_n + 2} < -\frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow -6 < -\frac{24}{u_n + 2} < -4$$
$$\Rightarrow 2 < 8 - \frac{24}{u_n + 2} < 4$$
$$\Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

- Conclusion: d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$.

2) • Montrons que la suite (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - u_n = 8 - \dfrac{24}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$

Or les solutions de l'équation $-X^2 + 6X - 8 = 0$.

sont **2** et **4** (utiliser le discriminant Δ pour déterminer ces solutions).

Donc $-X^2+6X-8=-(X-2)(X-4)=(X-2)(4-X)$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-2)(4-u_n)}{u_n+2}$,

et puisque $2<u_n<4$, alors $u_n+2>0$, $u_n-2>0$ et $4-u_n>0$.

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n>0$. Par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.

• Déduisons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\dfrac{1}{u_n+2}\leq\dfrac{1}{5}$.

Puisque (u_n) est croissante, alors (u_n) est minorée par son premier terme,

donc: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\geq u_0$.

Donc: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\geq 3$. D'où: $u_n+2\geq 5$. Par conséquent $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\dfrac{1}{u_n+2}\leq\dfrac{1}{5}$.

3) a- Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(4-u_n)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $4-u_{n+1}=4-8+\dfrac{24}{u_n+2}=\dfrac{-4u_n-8+24}{u_n+2}=\dfrac{-4u_n+16}{u_n+2}$

Donc $4-u_{n+1}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}$, et puisque $\dfrac{1}{u_n+2}\leq\dfrac{1}{5}$ et $4(4-u_n)>0$,

alors $\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}\leq\dfrac{4(4-u_n)}{5}$. C'est-à-dire $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(4-u_n)$.

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(4-u_n)$.

b- Déduisons que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $4-u_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

On a : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $0<4-u_{k+1}\leq\dfrac{4}{5}(4-u_k)$. **(1)**

En remplaçant k successivement par $0,1,2,\cdots,n-1$ dans l'inégalité **(1)** on obtient.

$$0<4-u_1\leq\frac{4}{5}(4-u_0)$$
$$0<4-u_2\leq\frac{4}{5}(4-u_1)$$
$$0<4-u_3\leq\frac{4}{5}(4-u_2)$$
$$\vdots$$
$$0<4-u_n\leq\frac{4}{5}(4-u_{n-1})$$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes, et après simplification on obtient : $0<4-u_n<\underbrace{\dfrac{4}{5}\times\dfrac{4}{5}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}}_{n\text{ facteurs}}(4-u_0)$

(Le nombre de facteurs est égal au nombre de termes de u_1 à u_n ou bien de

u_0 à u_{n-1} c'est donc n)

Et puisque $u_0 = 3$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

4) a- Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

Donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 4}{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 2} = \frac{\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}}{6\frac{(u_n - 2)}{u_n + 2}} = \frac{4}{6}\frac{(u_n - 4)}{(u_n - 2)} = \frac{2}{3}v_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme v_0

avec $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = -1$.

b- Déduisons v_n puis u_n en fonction de n.

- Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$. Alors $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

et on a : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Longleftrightarrow u_n v_n - 2v_n = u_n - 4$

$\Longleftrightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n - 4$

$\Longleftrightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 4$

$\Longleftrightarrow u_n = \frac{2v_n - 4}{v_n - 1}$; (car $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \neq 1$)

et puisque $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-2^n}{3^n}$, alors $u_n = \frac{2 \times \frac{-2^n}{3^n} - 4}{-\frac{2^n}{3^n} - 1} = \frac{2^{n+1} + 4 \times 3^n}{2^n + 3^n}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{2^{n+1} + 4 \times 3^n}{2^n + 3^n}$.

c- Calculons la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{u_k - 2}$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} - \frac{2}{u_n - 2} = 1 - \frac{2}{u_n - 2}$

Donc: $\frac{2}{u_n - 2} = 1 - v_n$. D'où: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{u_k - 2} = \sum_{k=1}^{n}(1 - v_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} v_k = n - \sum_{k=1}^{n} v_k$

Or (v_n) est une suite géométrique et le nombre de termes de la somme S_n est n.

alors $S_n = n - v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, et on a $v_1 = -\frac{2}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$.

donc: $S_n = n + \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n = n + 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

Exercice 38

On a : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = (1 + 2\sqrt{u_n})^2$, et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = 1 + \sqrt{u_n}$.

1) a- Calculons u_1, u_2, v_0 et v_1.

On a : $u_1 = (1 + 2\sqrt{u_0})^2 = (1 + 2)^2 = 9$.

$u_2 = (1 + 2\sqrt{u_1})^2 = (1 + 2 \times 3)^2 = 49$.

$v_0 = 1 + \sqrt{u_0} = 2$.

$v_1 = 1 + \sqrt{u_1} = 1 + \sqrt{9} = 4$.

b- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$.

Utilisons le raisonnement par récurrence.

• Initialisation

• Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ et $1 \geq 1$.

Donc $u_0 \geq 1$.

La propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité :

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

On a : $u_n \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{u_n} \geq 1$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{u_n} \geq 2$$
$$\Longrightarrow 1 + 2\sqrt{u_n} \geq 3$$
$$\Longrightarrow (1 + 2\sqrt{u_n})^2 \geq 9 \geq 1$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} \geq 1$$

Donc : La propriété est vraie pour $n + 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$.

c- Étudions la monotonie de la suite (v_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = (1 + \sqrt{u_{n+1}}) - (1 + \sqrt{u_n}) = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{u_n})^2} - \sqrt{u_n}$$
$$= 1 + 2\sqrt{u_n} - \sqrt{u_n} = 1 + \sqrt{u_n}$$

et puisque $1 + \sqrt{u_n} > 0$, alors la suite (v_n) est strictement croissante.

2) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1} = 1 + \sqrt{u_{n+1}} = 1 + \sqrt{(1 + 2\sqrt{u_n})^2} = 1 + 1 + 2\sqrt{u_n} = 2 + 2\sqrt{u_n}$

$$= 2(1 + \sqrt{u_n}) = 2v_n$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = 2v_n$.

D'où, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

3) Exprimons u_n en fonctions de n.

On a : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

Donc $v_n = v_0 q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$,

et puisque $v_n = 1 + \sqrt{u_n}$, alors $\sqrt{u_n} = v_n - 1$.

Donc $u_n = (v_n - 1)^2$. D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = (2^{n+1} - 1)^2$.

4) Calculons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}$.

Puisque $v_n = 1 + \sqrt{u_n}$ alors $\sqrt{u_n} = v_n - 1$.

Donc: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} = \sum_{k=0}^{n} (v_k - 1) = \sum_{k=0}^{n} v_n - \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{k=0}^{n} v_k - (n+1)$

et puisque (v_n) est une suite géométrique, alors:

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2(2^{n+1}-1) = 2^{n+2} - 2$$

Donc $S_n = 2^{n+2} - 2 - n - 1$.

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n = 2^{n+2} - n - 3$.

Exercice 39

On a : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

1) Calculons u_1 et u_2.

On a : • $u_1 = \dfrac{u_0 + 2}{u_0 + 1} = \dfrac{4}{3}$.

• $u_2 = \dfrac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \dfrac{\frac{4}{3} + 2}{\frac{4}{3} + 1} = \dfrac{10}{7}$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$.

Utilisons le raisonnement par récurrence.

• Initialisation

• Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2$ et $2 > 1$.

Donc $u_0 > 1$. (La propriété est vraie pour $n = 0$)

• Hérédité :

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.

1ère méthode :

On a : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} - 1 = \dfrac{1}{u_n + 1}$ et puisque $u_n > 0$ alors $\dfrac{1}{u_n + 1} > 0$.

Donc $u_{n+1} - 1 > 0$, c'est-à-dire $u_n > 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n + 1$.

2ème méthode :

Si $u_n > 0$ alors $u_n + 2 > u_n + 1$. Donc $\dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$

3) a- Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \sqrt{2}| < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1}$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2})u_n + 2 - \sqrt{2}}{u_n + 1} = \frac{(1 - \sqrt{2})u_n - \sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{u_n + 1}$$

$$= \frac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}$$

Donc $|u_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{|1 - \sqrt{2}||u_n - \sqrt{2}|}{u_n + 1}$ (car $u_n + 1 > 0$)

$= \dfrac{\sqrt{2} - 1}{u_n + 1}|u_n - \sqrt{2}|$ (car $1 - \sqrt{2} < 0$)

Pour montrer que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$,

il suffit de montrer que $\dfrac{1}{u_n + 1} < \dfrac{1}{2}$.

On sait que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$.

Donc $u_n + 1 > 2$. D'où $\dfrac{1}{u_n + 1} < \dfrac{1}{2}$,

par conséquent $\dfrac{1}{u_n + 1}(\sqrt{2} - 1)|u_n - \sqrt{2}| < \dfrac{(\sqrt{2} - 1)|u_n - \sqrt{2}|}{2}$.

Car $(\sqrt{2} - 1)|u_n - \sqrt{2}| > 0$.

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \sqrt{2}| < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

b- Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$.

• Initialisation :

Pour $n = 0$; on a : $|u_0 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, et $\left(\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^0 |u_0 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, et puisque $2-\sqrt{2} \leq 2-\sqrt{2}$.

Alors $|u_0-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^0 |u_0-\sqrt{2}|$.

La propriété est vraie pour $n=0$.

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $|u_n-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$,

et montrons que $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\sqrt{2}|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question **3)** a) on a : $|u_{n+1}-\sqrt{2}| < \frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n-\sqrt{2}|$ **(1)**

et d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$|u_n-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$.

Donc $\frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n-\sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$ **(2)**

Car $\frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$, de **(1)** et **(2)** on en déduit que :

$|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\sqrt{2}|$. (La propriété est vraie pour $n+1$).

Remarque : • $(a < b$ et $b \leq c) \Longrightarrow a < c$

• $a < b \Longrightarrow a \leq b$. (les réciproque sont fausses)

• Conclusion: d'après le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_n-\sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$$

c- Déterminons une valeur approcher de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}.

Puisque $|\sqrt{2}-u_n| \leq \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$,

alors u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}|$ près,

et pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3}.

Il suffit que $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |u_0-\sqrt{2}| \leq 10^{-3}$ (a).

A l'aide de la calculatrice, on détermine le plus petit entier n qui vérifie l'inégalité (a), c'est-à-dire $n=5$.

Rappel:
Si $|x-a| \leq r$ alors a est une valeur approchée de x à r près

D'où une valeur approche de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} est u_5 et on a $u_5=\dfrac{140}{99}$.

3) On a : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}$.

a- Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}+\sqrt{2}}$,

et d'après ce qui précède, on a $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}{u_n+1}$.

Calculons $u_{n+1}+\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}+\sqrt{2}&=\frac{u_n+2}{u_n+1}+\sqrt{2}=\frac{u_n+2+\sqrt{2}u_n+\sqrt{2}}{u_n+1}\\&=\frac{u_n(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{u_n+1}=\frac{(1+\sqrt{2})(u_n+\sqrt{2})}{u_n+1}\end{aligned}$$

Donc: $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{(1-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2})}{u_n+1}}{\dfrac{(1+\sqrt{2})(u_n+\sqrt{2})}{u_n+1}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\times\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}v_n$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}v_n$.

Par conséquent la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

b- Déterminons u_n en fonction de n.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ et de premier terme $u_0=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=v_0\times q^n=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}$.

On a : $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}\iff u_nv_n+\sqrt{2}v_n=u_n-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}&\iff u_nv_n-u_n=-\sqrt{2}v_n-\sqrt{2}\\&\iff u_n(v_n-1)=-\sqrt{2}v_n-\sqrt{2}\end{aligned}$$

et puisque $v_n\neq 1$ (car $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\neq 1$) alors $u_n=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}v_n}{v_n-1}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}v_n}{1-v_n}$.

Or $v_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}$. Donc: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}$

Exercices de synthèse

Exercice 40

On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

1) Calculer les termes : u_1 et u_2.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Montrer que : $(\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\})$: $\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$.

4) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$.

Exercice 41

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$
et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}n^2 - n - \frac{1}{2}$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On pose $v_n = u_n + \frac{1}{2}n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

- **a-** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
- **b-** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
- **c-** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **d-** Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 42

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \left(1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1 \end{cases}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 3$.

2) **a-** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}\left(\sqrt{1+u_n} - 2\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3}\right)$.

- **b-** En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3) On pose $v_n = \sqrt{1+u_n} - 2$; $n \in \mathbb{N}$.

- **a-** Montrer que (v_n) est une suite géométrique en précisant sa raison.
- **b-** Exprimer u_n en fonction de n.
- **c-** Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1+u_k}$.

Exercice 43

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$.

2) Soit ℓ un nombre réel strictement positif qui vérifie $\ell = \frac{1}{1+\ell}$.

a- Déterminer ℓ.

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \ell| < \frac{2}{3}|u_n - \ell|$.

c- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 44

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison **2** et en déduire v_n en fonction de n.

2) On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

Calculer S_n puis en déduire u_n en fonction de n.

Exercice 45

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites numériques définies par :

$\begin{cases} u_0 = -1 ; u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $w_n = \frac{u_n}{v_n}$; $(n \in \mathbb{N})$.

1) Montrer (v_n) est une suite géométrique.

2) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Exercice 46

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) a- Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$

b- Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 47

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$;
$3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$

On pose $v_n = u_n - n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

2) Montrer que ; $\sum_{k=0}^{99} u_k = 4953 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$

Exercice 48

Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;

$u_{n+1} = \frac{1}{4}a^2 u_n - (a-1)u_{n-1}$ où a est un nombre réel.

On considère la suite (v_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = u_n - u_{n-1}$

1) On suppose que $a = 2$.

a- Montrer que la suite (v_n) est constante

b- En déduire que la suite (u_n) est arithmétique en précisant sa raison

2) On suppose que $a = -2$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b- Exprimer v_n et la somme $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ en fonction de n

c- En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{3-(-3)^n}{2}$

Exercice 49

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$

1) Calculer u_2 et u_3

2) Soit (v_n) la suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{u_n}$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_{n+1} = 3v_n - 1$

3) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$

a- Déterminer w_n en fonction de n.

b- En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 50

On considère la suite numérique (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 3 ; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer u_2 et u_3

2) On pose $v_n = u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- Calculer v_n en fonction de n, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) On pose $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

a- Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(n+2)$

Exercice 51

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 ; u_1 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

1) a- Calculer les termes: u_2 et u_3

b- Est-ce que la suite (u_n) est arithmétique ? géométrique? (justifier)

2) a- Monter que: $(\forall n \in \mathbb{N});(u_{n+1} - u_n)(u_{n+2} - u_{n+1}) \geq 0$

b- En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_{n+1} - u_n$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b- Écrire v_n en fonction de n

c- En déduire u_n en fonction de n.

4) Montrer que la suite (u_n) est bornée par **1** et **3**

Exercice 52

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2}$

1) Calculer les termes u_1 et u_2.

2) a- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -2n - 1$

b- En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3) On pose: $v_n = 2u_n + 4n - 6$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = 3 - 2n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) Calculer en fonction de n la somme: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

Exercice 53

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 2$ et

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$

On pose: $v_n = u_n + n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Écrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

3) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 54

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1 = 1$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(3nu_n + 4n - 2)$

1) Calculer u_2

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > -2$

3) Étudier la monotone de la suite (u_n)

4) On pose $v_n = n(u_n + 2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on determinera la raison q et le premier terme.

b- Déterminer u_n en fonction de n.

c- Calculer la somme suivante: $S_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k$.

Exercice 55

On considère la suite (u_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{3^n}{n^3}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^3$

2) Montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 7$; on a: $v_n \geq 2$

3) En déduire que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 7$; on a:

$v_7 \times v_8 \times v_9 \times ... \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$; puis $u_n \geq 2^{n-7} \times u_7$

Exercice 56

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{n+1}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en déduire u_n en fonction de n

2) a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); 2^{n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}$ **(1)**

b- Vérifier que l'inégalité **(1)** est vraie pour $n = 1$

c- En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \frac{2}{n}$

3) Calculer en fonction de n le produit $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n (n \in \mathbb{N})$.

Exercice 57

Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 2$

et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)}$

1) Calculer les termes: u_1 et u_2.

2) a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \frac{1}{n+1}$.

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - \frac{1}{n+1}$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b- En déduire u_n en fonction de n.

4) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n \geq \frac{5}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 58

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$

et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = -1 + \sqrt{5 + (u_n + 1)^2}$.

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = (u_n + 1)^2$.

a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

b- Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 59

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 3$.

2) a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_{n+1} < \frac{1}{3}(3 - u_n)$

b- En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(3-u_k)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < S_n < \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

b- En déduire un encadrement de la somme T_n en fonction de n.

Exercice 60

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

2) Soit (v_n) la suite définie par: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a- Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, en déduire v_n en fonction de n.

b- Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 61

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = \sqrt{6}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{5}u_n^2 + 2}$

1) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{5}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{5} \leq u_n \leq \sqrt{6}.$$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose: $v_n = u_n^2 - 5$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

b- Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

4) Calculer en fonction de n, la somme S_n sachant que: $S_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k^2$.

Exercice 62

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n \end{cases}$

On pose $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ et $w_n = 3^n u_n$

1) a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis déterminer v_n en fonction de n

b- Montrer que (w_n) et une suite arithmétique.

c- En déduire u_n en fonction de n.

2) a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 63

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3 + u_n^2}$

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$

b- En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 64

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par:

$$u_0 = 2 \ ; \ v_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}); \left(u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} et v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}\right)$$

1) Calculer u_1 et v_1

2) Calculer $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ en fonction de u_n et v_n.

3) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 65

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques definies par:

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); 3u_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_1 = 12 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); 4v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $w_n = v_n - u_n$ et $t_n = 3u_n + 8v_n$

1) Montrer que la suite (w_n) est géométrique en précisant sa raison.

2) En déduire w_n en fonction de n et que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n < v_n$

3) Montrer que la suite (t_n) est constante.

4) a- Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) est strictement décroissante.

b- Déterminer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 66

1) Montrer que: $\left(\forall x \in \left]0; \frac{1}{4}\right[\right); 0 < \frac{x^2}{1 - 2x^2} < \frac{1}{4}$

2) On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = a; a \in \left]0; \frac{1}{4}\right[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 - 2u_n^2} \end{cases}$

a- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \frac{1}{4}$

b- Montrer que la suite (u_n) est strictement, décoissante.

c- Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < \frac{2}{7} u_n$

d) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < \left(\frac{2}{7}\right)^n a$

Exercice 67

1) Montrer que $(\forall x \in]0;1]); \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)u_{n-1}$$

Calculer u_n en fonction de n.

3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n\sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n\sqrt{n}$

a- Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n < \frac{1}{2\sqrt{1+n}}$$

b- Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante et que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

Solutions

Exercice 40

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$

1) Calculons les termes u_1 et u_2.

On a: $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ et $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4+\sqrt{2}}{4}$

2) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$
$$= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

et puisque $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Montrons que $(\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \neq 1$

On a: $\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{p}}=\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}}=\dfrac{(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})}$

Or $\sqrt{p-1}\leq\sqrt{p}$ donc $\sqrt{p-1}+\sqrt{p}\leq 2\sqrt{p}$ et $\sqrt{p}\times\sqrt{p-1}\leq\sqrt{p}^2$

d'où $0<\dfrac{1}{2\sqrt{p}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}}$ et $0<\dfrac{1}{p}\leq\dfrac{1}{\sqrt{p}\times\sqrt{p-1}}$

on obtient: $\dfrac{1}{2\sqrt{p}}\times\dfrac{1}{p}\leq\dfrac{1}{\sqrt{p-1}+\sqrt{p}}\times\dfrac{1}{\sqrt{p}\times\sqrt{p-1}}$

(En multipliant les inégalités précédentes membre à membre)

C'est-à-dire $\dfrac{1}{2p\sqrt{p}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{p}}$

donc $(\forall p\in\mathbb{N}^*-\{1\}):\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{p}}\geq\dfrac{1}{2p\sqrt{p}}$

4) Déduisons que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1\leq u_n\leq 3+\dfrac{2}{n}$

On a: $(\forall p\in\mathbb{N}^*-\{1\}):\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{p}}\geq\dfrac{1}{2p\sqrt{p}}$

pour $p=2$; on a: $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{2(2\sqrt{2})}$

pour $p=3$; on a: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\geq\dfrac{1}{2(3\sqrt{3})}$

Pour $p=4$; on a: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\geq\dfrac{1}{2(4\sqrt{4})}$

Pour $p=n$; on a: $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\dfrac{1}{2(n\sqrt{n})}$

Par addition membre à membre ,et après simplification,

on obtient $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

donc $2-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\geq\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ d'où $1+2-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\geq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ $\left(car\ 1=\dfrac{1}{1\sqrt{1}}\right)$

C'est-à-dire $3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}\geq u_n$

par conséquent $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n\leq 3-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et puisque $n\in\mathbb{N}^*$ alors $n\geq 1$

donc $n\geq\sqrt{n}$ (car $n-\sqrt{n}=\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)$

d'où $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ par suite $-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq -\frac{2}{n}$ donc $3-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 3-\frac{2}{n}$

par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 3-\frac{2}{n}$ **(1)**

et puisque $u_n = 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+....+\frac{1}{n\sqrt{n}}$ alors $u_n \geq 1$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on en déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3-\frac{2}{n}$

Exercice 41

On a: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}n^2 - n - \frac{1}{2}$

1) Calculons u_1 et u_2

On a: $u_1 = \frac{2}{3}u_0 - \frac{1}{6}\times 0^2 - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

- $u_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{6}\times 1^2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{14}{9}$

2) On a: $v_n = u_n + \frac{1}{2}n^2$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}n^2 - n - \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^2$

$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n^2 = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{1}{2}n^2\right) = \frac{2}{3}v_n$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 = 1$

b) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

On a: $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et puisque $v_n = u_n + \frac{1}{2}n^2$ alors $u_n = v_n - \frac{1}{2}n^2$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}n^2$

c) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **Initialisation:** pour $n = 1$ on a: $1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$

- **Héridité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= (n+1)\left[\dfrac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right] = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

et puisque $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$

alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Donc: la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d) Calculons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

on a: $(\forall k \in \mathbb{N}); u_k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^k - \dfrac{1}{2}k^2$

donc $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^k - \dfrac{1}{2}k^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k - \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2$

Or $\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$, et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = 3\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

Exercice 42

On a: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1 \end{cases}$

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 3$

Utilisons le raisonnement par récurrence

• Intialisation

Pour $n = 0$ on a: $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 3$

donc $0 \leq u_0 \leq 3$

d'où la propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

On a: $0 \leq u_n \leq 3 \Longrightarrow 1 \leq 1 + u_n \leq 4$

$$\Longrightarrow 1 \leq \sqrt{1+u_n} \leq 2$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{1+u_n}}{2} \leq 1$$
$$\Longrightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2} \leq 2$$
$$\Longrightarrow \frac{9}{4} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 \leq 4$$
$$\Longrightarrow \frac{5}{4} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1 \leq 3$$

et puisque $1 \leq \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = \left(1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1$ alors $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

donc la propiété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 3$

2) a) Vérifions que $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(\sqrt{1+u_n} - 2)\left(\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1 - u_n = 1 + \frac{1+u_n}{4} + \sqrt{1+u_n} - 1 - u_n$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}u_n + \sqrt{1+u_n}$$

Comparons $-\frac{3}{4}(\sqrt{1+u_n} - 2)\left(\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3}\right)$ et $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}u_n + \sqrt{1+u_n}$

posons $X = -\frac{3}{4}(\sqrt{1+u_n} - 2)\left(\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3}\right)$

On a: $X = -\frac{3}{4}\left(\sqrt{1+u_n}^2 + \frac{2}{3}\sqrt{1+u_n} - 2\sqrt{1+u_n} - \frac{4}{3}\right)$

donc: $X = -\frac{3}{4}\left(1 + u_n + \left(\frac{2}{3} - 2\right)\sqrt{1+u_n} - \frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{1+u_n} + u_n\right)$

$$= \frac{1}{4} + \sqrt{1+u_n} - \frac{3}{4}u_n$$

donc $X = \frac{1}{4} + \sqrt{1+u_n} - \frac{3}{4}u_n = u_{n+1} - u_n$

C'est-à-dire que: $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(\sqrt{1+u_n} - 2)\left(\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3}\right)$

b) Déduisons la monotonie de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $1 \leq \sqrt{1+u_n} \leq 2$ (car $1 \leq u_n \leq 3$) et $-\frac{4}{3} < 0$

donc $\sqrt{1+u_n} - 2 \leq 0$ et $\sqrt{1+u_n} + \frac{2}{3} \geq 0$,donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \geq 0$

d'où la suite (u_n) est croissante.

3) On a: $v_n = \sqrt{1+u_n} - 2$, pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = \sqrt{1+u_{n+1}} - 2 = \sqrt{1+\left(1+\frac{\sqrt{1+u_n}}{2}\right)^2 - 1} - 2$

$$= 1 + \frac{\sqrt{1+u_n}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{1+u_n}-2}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+u_n}-2) = \frac{1}{2}v_n$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \sqrt{1+u_0} - 2 = -1$

b) Exprimons u_n en fonction de n.

On a: (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$

donc $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2^n}$ et puisque $v_n = \sqrt{1+u_n} - 2$

alors $v_n + 2 = \sqrt{1+u_n}$ donc $1 + u_n = (v_n+2)^2$

d'où $u_n = (v_n+2)^2 - 1 = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - 1$ et par conséquent:

$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - 1$

c) Calculons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1+u_k}$

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}); v_k = \sqrt{1+u_k} - 2$ donc $\sqrt{1+u_k} = v_k + 2$

d'où $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+u_k} = \sum_{k=0}^{n}(v_k+2) = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} 2$

Le nombre de termes de cette somme est $n - 0 + 1 = n + 1$ et puisque (v_n) est un suite géométrique,

alors: $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+u_k} = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 2(n+1)$

Rappel:
$\sum_{k=p}^{n} a = a(n-p+1)$

donc $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+u_k} = -1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 2n + 2$

d'où: $S_n = 2n + 2 - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. Par conséquent $S_n = 2n + \frac{1}{2^n}$

Exercice 43

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$

Utilisons le raisonnement par récurrence

- Initialisation

Pour $n = 0$ on a: $u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$

La propriété est vraie pour $n = 0$

- Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supossons que, $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Longrightarrow u_n + 1 > 1 \\ &\Longrightarrow u_n + 1 > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{u_n + 1} > 0 \end{aligned}$$

donc: $u_{n+1} > 0$

La propriété est vraie pour $n + 1$

- Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 0$

2) a) Déterminons ℓ sachant que $\ell = \dfrac{1}{1+\ell}$

On a: $\ell = \dfrac{1}{1+\ell} \Longleftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

donc $\ell = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et puisque $\ell > 0$ alors $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}): |u_{n+1} - \ell| < \frac{2}{3}|u_n - \ell|$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $|u_{n+1} - \ell| = \left|\dfrac{1}{1+u_n} - \ell\right|$ et puisque $\ell = \dfrac{1}{1+\ell}$

alors: $|u_{n+1} - \ell| = \left|\dfrac{1}{1+u_n} - \dfrac{1}{1+\ell}\right| = \left|\dfrac{1+\ell-1-u_n}{(1+u_n)(1+\ell)}\right| = \dfrac{|\ell - u_n|}{|1+u_n||1+\ell|}$

$$= \frac{|u_n - \ell|}{|1+u_n||1+\ell|}$$

et comme $u_n > 0$, alors $1 + u_n > 1$ donc: $\dfrac{1}{|1+u_n|} < 1$

Calculons $1 + \ell$

$1 + \ell = 1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc: $|1+\ell| = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

et on a: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} > \dfrac{3}{2}$ d'où $\dfrac{1}{|1+\ell|} < \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{|1+u_n|} < 1$ donc: $\dfrac{1}{|1+l||1+u_n|} < \dfrac{2}{3}$

Par conséquent $|u_{n+1} - \ell| < |u_n - \ell| \times \dfrac{2}{3}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}): |u_{n+1} - \ell| < \frac{2}{3}|u_n - \ell|$

c) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$

• Initialisation:

Pour $n = 0$, on a: $|u_0 - \ell| = \left|1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ et puisque $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, alors $|u_0 - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^0$

• Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $|u_n - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a: $|u_{n+1} - \ell| < \frac{2}{3}|u_n - \ell|$ **(1)** et $|u_n - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** on en déduit que: $|u_{n+1} - \ell| < \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $|u_{n+1} - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

d'où la propriété est vraie pour $n+1$ par conséquent:

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \ell| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 44

On a: $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n - u_{n+1} = 2(u_{n+1} - u_n)$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = 2v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

Déduisons v_n en fonction de n.

On a: $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 2^n$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2^n$

3) On a: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$

Calculons S_n en déduire u_n en fonction de n

• (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$

donc $S_n = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

d'où $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ d'autre part on a: $(\forall p \in \mathbb{N}); v_p = u_{p+1} - u_p$

pour $p = 0$ on a: $v_0 = u_1 - u_0$

pour $p=1$ on a: $v_1 = u_2 - u_1$

pour $p=2$ on a: $v_2 = u_3 - u_2$

• • •

• • •

pour $p=n-1$ on a: $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

Par addition membre à membre, et après simplification on obtient

$S_n = u_n - u_0$, et puisque $S_n = 2^n - 1$ et $u_0 = 0$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 2^n - 1$

Exercice 45

On a: $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n, n \in \mathbb{N} \; et \; v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{2}u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$

$= \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n\right) = \dfrac{1}{2}v_n$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$

d'où (v_n) est suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = 1$

2) Montrons que (w_n) est suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n}$ et puisque $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$

alors $w_{n+1} - w_n = \dfrac{2u_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_n}{v_n}$ donc $w_{n+1} - w_n = \dfrac{2u_{n+1} - u_n}{v_n}$

or $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{2u_{n+1} - u_n}{2}$

d'où $2u_{n+1} - u_n = 2v_n$ par conséquent $w_{n+1} - w_n = \dfrac{2v_n}{v_n} = 2$

donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme

$w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$

3) Déduisons u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} \Leftrightarrow u_n = v_n.w_n$ et puisque (v_n) est une suite géométrique et (w_n) est une suite arithmétique alors $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ et $w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$

donc $u_n = (-1 + 2n) \times \frac{1}{2^n}$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Exercice 46

On a: $u_0 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

1) Calculons u_1 et u_2

On a: $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

$u_2 = (u_1 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$

2) a) Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n \leq \frac{3}{2}$

• Initialisation

Pour $n = 0$ on a: $u_0 = \frac{3}{2}$ et $1 < \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$ donc $1 < u_0 \leq \frac{3}{2}$

La propriété est vraie pour $n = 0$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$ et montrons que $1 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $1 < u_n \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow 0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow 0 < (u_n - 1)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow 1 < (u_n - 1)^2 + 1 \leq \frac{5}{4}$$

et puisque $\frac{5}{4} \leq \frac{3}{2}$ alors $1 < (u_n - 1)^2 + 1 \leq \frac{3}{2}$ C'est-à-dire $1 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < u_n \leq \frac{3}{2}$

b) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

soit $n \in \mathbb{N}$, on a:

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n = (u_n - 1)^2 - (u_n - 1) = (u_n - 1)(u_n - 2)$

et puisque $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ alors $u_n - 1 \geq 0$ et $u_n - 2 \leq 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq 0$; par conséquent la suite (u_n) est decroissante

3) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 = (u_n - 1)(u_n - 1)$

et puisque $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$ alors $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$

donc $0 < (u_n - 1)(u_n - 1) \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$ (car $u_n - 1 > 0$)

d'où $u_{n+1}-1 \leq \frac{1}{2}(u_n-1)$ et comme $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 1$ alors $u_{n+1}-1>0$

d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_{n+1}-1 \leq \frac{1}{2}(u_n-1)$

b) Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

On a: $(\forall p \in \mathbb{N}); 0 < u_{p+1}-1 \leq \frac{1}{2}(u_p-1)$

pour $p=0$ on a: $0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0-1)$

pour $p=1$ on a: $0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_1-1)$

pour $p=2$ on a: $0 < u_3 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_2-1)$

• • •

• • •

• • •

pour $p=n-1$ on a: $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1}-1)$

Pour le produit membre à membre et après simplification, on obtient:

$$0 < u_n - 1 \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ facteurs}}(u_0-1)$$

donc $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}-1\right)$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 47

On a: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); 3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$ et $v_n = u_n - n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1\right) - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$

$$= \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 = 1$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

puisque (v_n) est une suite géométrique alors $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et puisque $v_n = u_n - n$ alors $u_n = v_n + n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

2) Calculer $\sum_{k=0}^{99} u_k$

On a: $\sum_{k=0}^{99} u_k = \sum_{k=0}^{99}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k + k\right) = \sum_{k=0}^{99}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{99} k$

Or $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

et $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ avec $q \neq 1$

alors: $\sum_{k=0}^{99} u_k = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{100} - 1}{\frac{2}{3} - 1} + \frac{99(99+1)}{2} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right) + 99 \times 50$

donc: $\sum_{k=0}^{99} u_k = 4950 + 3 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 4953 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$

Exercice 48

On a: $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = \frac{1}{4}a^2 u_n - (a-1)u_{n-1}$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$

1) On suppose que $a = 2$

a) Montrons que (v_n) est une suite constante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$; et $u_{n+1} = \frac{1}{4} \times 8u_n - (2-1)u_{n-1} = 2u_n - u_{n-1}$

donc $v_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} - u_n = u_n - u_{n-1} = v_n$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_{n+1} = v_n$

par conséquent ; (v_n) est une suite constante.

b) Déduisons que la suite (u_n) est arithmétique.

$v_{n+1} = v_n = u_n - u_{n-1} = u_n - u_{n-1} = ... = u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = 2$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = 2$

c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = 2$

par suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$

Rappel:

Si $a = 2$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$

donc $u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$, d'où (u_n) est une suite arithmétique

2) On suppose que $a = -2$ donc $u_{n+1} = -2u_n + 3u_{n-1}$

a) Montrons que (v_n) une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n = -2u_n + 3u_{n-1} - u_n = -3u_n + 3u_{n-1}$
$= -3(u_n - u_{n-1}) = -3v_n$
donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_{n+1} = -3v_n$
d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = 2$

a) Exprimons v_n en fonction de n

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $v_1 = 2$,
donc $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times (-3)^{n-1}$

• Calculons $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n; (n \in \mathbb{N}^*)$

On a: $S_n = v_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = 2\dfrac{1-(-3)^n}{4}$ donc $S_n = \dfrac{1-(-3)^n}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

b) Déduisons u_n en fonction de n

on a: $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $v_k = u_k - u_{k-1}$

pour $k = 1$ on a: $v_1 = u_1 - u_0$

pour $k = 2$ on a: $v_2 = u_2 - u_1$

pour $k = 3$ on a: $v_3 = u_3 - u_2$

• • •

• • •

pour $k = n$ on a: $v_n = u_n - u_{n-1}$

Par addition membre à membre et après simplification, on obtient
$v_1 + v_2 + ... + v_n = u_n - u_0$
donc $S_n = u_n - 1$ (car $u_0 = 1$) d'où: $u_n = S_n + 1 = \dfrac{1-(-3)^n}{2} + 1$

par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \dfrac{3-(-3)^n}{2}$. Pour $n = 0$, on a: $u_0 = 1$

et $\dfrac{3-(-3)^0}{2} = 1$ alors $u_0 = \dfrac{3-(-3)^0}{2}$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \dfrac{3-(-3)^n}{2}$

Exercice 49

On a: $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n}$

1) Calculons u_2 et u_3

On a: $u_2 = \dfrac{u_1}{3-u_1} = \dfrac{1}{2}$

$$u_3 = \frac{u_2}{3-u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

2) On pose: $v_n = \frac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} = 3v_n - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a: $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{3-u_n}}$

C'est à dire: $v_{n+1} = \frac{3-u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} = 3v_n - 1$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} = 3v_n - 1$

3) On pose $w_n = v_n - \frac{1}{2}$

a) Calculons w_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2} = (3v_n - 1) - \frac{1}{2} = 3v_n - \frac{3}{2} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right)$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*); w_{n+1} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right) = 3w_n$

d'où (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

et de premier terme $w_1 = v_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

donc $w_n = w_1 \times q^{n-1}$ d'où $w_n = \frac{1}{2} \times (3)^{n-1}$

b) Déduisons v_n en fonction de n.

On a: $w_n = v_n - \frac{1}{2}$ donc: $v_n = w_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$

• Déduisons u_n en fonction de n

On a: $v_n = \frac{1}{u_n} \Longrightarrow u_n = \frac{1}{v_n}$ (car $v_n \neq 0$) donc $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)}$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{2}{3^{n-1}+1} = \frac{6}{3^n + 3}$

Exercice 50

On a: $u_0 = 3$; $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n$; $(n \in \mathbb{N})$

1) Calculons u_2 et u_3.

On a: $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{4}{9}u_0 = \frac{4}{3} \times 3 - \frac{4}{9} \times 3 = \frac{8}{3}$

$u_3 = \frac{4}{3}u_2 - \frac{4}{9}u_1 = \frac{4}{3} \times \frac{8}{3} - \frac{4}{9} \times 3 = \frac{20}{9}$

2) On pose $v_n = u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n - \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n$

$= \frac{2}{3}\left(u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n\right) = \frac{2}{3}v_n$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - \frac{2}{3}u_0 = 1$

b) Calculons v_n en fonction de n:

• On a (v_n) est une suite géométrique,

donc $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

• Déduction: on a: $v_n = u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$ donc: $u_{n+1} = v_n + \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) On pose $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que (w_n) est une suite arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $w_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} u_{n+1}$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{3}u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ (d'après la question **2)** b)

donc $w_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_n + \frac{3}{2}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}), w_{n+1} = w_n + \frac{3}{2}$

par conséquent la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 u_0 = 3$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(n+2)$

puisque (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 3$

alors $w_n = w_0 + nr = 3 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}(n+2)$ or $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n u_n$

donc: $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{3}{2}(n+2)$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(n+2)$

Exercice 51

On a: $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1) Calculons u_2 et u_3

On a: $u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{5}{2}$

$u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 2 = \frac{11}{4}$

b) la suite (u_n) est-elle arithmétique? Est-elle géométrique?

On a: $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{5}{2}$

et puisque $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, alors la suite (u_n) n'est pas arithmétique

et puisque $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, alors la suite (u_n)

n'est pas géométrique.

2) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N});(u_{n+1} - u_n)(u_{n+2} - u_{n+1}) \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a: $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$

et puisque $\frac{1}{2} > 0$, alors $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ ont le même signe

(ou bien $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)^2$)

et puisque $\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)^2 \geq 0$ alors $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n) \geq 0$

donc $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n) \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Déduisons la monotonie de la suite (u_n) (utilisons le raisonnement par récurrence)

• Initialisation

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc $u_1 \geq u_0$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Si $u_{n+1} \geq u_n$ alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et puisque $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+1} - u_n) \geq 0$

alors $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence , $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n$; donc la suite (u_n) est croissante

3) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = u_1 - u_0 = 1$

b) Déterminons v_n en fonction de n.

puisque (v_n) est une suite géométrique

alors $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{2^n}$

c) Déduisons u_n en fonction de n.

On a: $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet$

$v_2 = u_3 - u_2$

$v_1 = u_2 - u_1$

$v_0 = u_1 - u_0$

Par addition membre à membre et après simplification, on obtient:

$v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$

donc $u_n = (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}) + u_0$ et puisque (v_n) est une suite géométrique

alors $u_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} + u_0$ où $v_0 = 1$ et $u_0 = 1$

d'où: $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1$ donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

4) Montrons que la suite (u_n) est bornée

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et puisque $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$ alors $3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

donc $u_n < 3$ et puisque (u_n) est croissante alors, $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq u_0$

C'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$ par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < 3$

Exercice 52

On a: $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2}$

1) Calculons u_1 et u_2.

On a: $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{-7}{4}$

2) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq -2n - 1$

utilisons le raisonnement par récurrence

• Intialisation

Pour $n=0$ on a: $u_0=0$ et $0\geq -2\times 0-1$

donc la propriété est vraie pour $n=0$

• Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $u_n\geq -2n-1$ et montrons que $u_{n+1}\geq -2(n+1)-1$

C'est-à-dire $u_{n+1}\geq -2n-3$

On a: $u_{n+1}-(-2n-3)=\frac{1}{2}u_n-n-\frac{1}{2}+2n+3=\frac{1}{2}u_n+n+\frac{5}{2}$

$$=\frac{1}{2}(u_n+2n+1)+2$$

et puisque $u_n\geq -2n-1$ et $2\geq 0$ alors $\frac{1}{2}(u_n+2n+1)+2\geq 0$

C'est-à-dire $u_{n+1}\geq -2n-3$

d'où la propriété est vraie pour $n+1$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence , $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\geq -2n-1$

b) Déduisons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n\in\mathbb{N}$

On a: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-n-\frac{1}{2}-u_n=-\frac{1}{2}u_n-n-\frac{1}{2}=-\frac{(u_n+2n+1)}{2}$

et puisque $u_n+2n+1\geq 0$ alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n\leq 0$

donc la suite (u_n) est décroissante.

3) On pose $v_n=2u_n+4n-6$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a: $v_{n+1}=2u_{n+1}+4(n+1)-6=u_n-2n-1+4n+4-6=u_n+2n-3$

$$=\frac{1}{2}(2u_n+4n-6)=\frac{1}{2}v_n$$

donc $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=-6$

b) Déduisons que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=3-2n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Puisque (v_n) est une suite géométrique

alors $v_n=v_0\times q^n=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et puisque: $v_n=2u_n+4n-6$

alors $u_n=\frac{1}{2}(v_n-4n+6)=\frac{1}{2}v_n-2n+3=\frac{1}{2}\times(-6)\left(\frac{1}{2}\right)^n-2n+3$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = 3 - 2n - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) Calculons la somme S_n

On a: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

C'est-à-dire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_k = 3 - 2k - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

donc: $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(3 - 2k - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} k - 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Or $\sum_{k=0}^{n} 3 = 3(n+1) = 3n + 3$ et $\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

et $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

donc: $S_n = 3n + 3 - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3 \times 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$= 3n + 3 - n(n+1) - 6 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2n - n^2 - 3 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Exercice 53

On a: $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$ et $v_n = u_n + n - 1$

1) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) + (n+1) - 1$

$= \frac{1}{5}u_n - \frac{4}{5}n - \frac{1}{5} + n = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(u_n + n - 1) = \frac{1}{5}v_n$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

d'où (v_n) est suite géométrique que de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$

2) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.

- puisque (v_n) est une suite géométrique, alors $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$
- On a: $v_n = u_n + n - 1$

donc $u_n = v_n - n + 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n - n + 1$

3) Calculons la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

On a: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^k - k + 1\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

Or: $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

et $\sum_{k=0}^{n} k = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

donc:

$$S_n = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) - \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n + 1$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

Exercice 54

On a: $u_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(3nu_n + 4n - 2)$

1) Calculons u_2

On a: $u_2 = \frac{1}{1+1}(3u_1 + 4 - 2) = \frac{1}{2}\times 5 = \frac{5}{2}$

2) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > -2$

• Initialisation

Pour $n = 1$, on a: $u_1 = 1$ et $1 > -2$

donc $u_1 > -2$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons que, $u_n > -2$ et montrons que $u_{n+1} > -2$

On a: $u_{n+1} + 2 = \frac{1}{n+1}(3nu_n + 4n - 2) + 2 = \frac{3nu_n + 4n - 2 + 2n + 2}{n+1}$

C'est-à-dire $u_{n+1} + 2 = \frac{3n(u_n + 2)}{n+1}$

et puisque $u_n > -2$ alors $u_n + 2 > 0$

donc $u_{n+1} + 2 > 0$ (car: $\frac{3n}{n+1} > 0$) d'où $u_{n+1} > -2$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n > -2$

3) Étudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}(3nu_n + 4n - 2) - u_n = \frac{(3n-(n+1))u_n + 4n - 2}{n+1}$

$$= \frac{(2n-1)u_n + 2(2n-1)}{n+1} = \frac{(2n-1)(u_n+2)}{n+1}$$

et puisque $u_n + 2 > 0$ et $2n - 1 > 0$ (car $n \geq 1$)

alors $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n \geq 0$

d'où la suite (u_n) est croissante

4) On pose $v_n = n(u_n + 2); n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $v_{n+1} = (n+1)(u_{n+1} + 2)$ et $u_{n+1} + 2 = \dfrac{3n(u_n + 2)}{n+1}$

donc: $v_{n+1} = \dfrac{(n+1) \times 3n(u_n + 2)}{n+1} = 3n(u_n + 2) = 3v_n$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = 3v_n$

par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_1 = 1(u_1 + 2) = 3$

b) Déterminons u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $v_n = n(u_n + 2)$ donc $\frac{v_n}{n} = u_n + 2$ d'où $u_n = \frac{v_n}{n} - 2$

et puisque (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_1 = 3$

alors $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ donc $u_n = \dfrac{3^n}{n} - 2$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \dfrac{3^n - 2n}{n}$

Calculons en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k$

On a: $S_n = \sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k \times \dfrac{3^k - 2k}{k} = \sum_{k=1}^{n}(3^k - 2k) = \sum_{k=1}^{n} 3^k - \sum_{k=1}^{n} 2k$

$$= 3 \times \frac{1-3^n}{1-3} - 2n\frac{(n+1)}{2} = \frac{3}{2}(3^n - 1) - n(n+1)$$

donc: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \frac{3}{2}(3^n - 1) - n(n+1)$

Exercice 55

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^3$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \times \dfrac{n^3}{3^n} = 3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3 = 3\left(\dfrac{n+1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\right)^3$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^3$

2) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); n \geq 7 \Longrightarrow v_n \geq 2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 7$

On a: $n \geq 7 \Longrightarrow n+1 \geq 8$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow 1-\frac{1}{n+1} \geq \frac{7}{8}$$

$$\Longrightarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \geq \left(\frac{7}{8}\right)^3$$

$$\Longrightarrow 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \geq 3\times\left(\frac{7}{8}\right)^3$$

$$\Longrightarrow 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \geq \frac{1029}{512}$$

et puisque $\frac{1028}{512} \geq 2$ alors: $3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 \geq 2$ donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \geq 2$

3) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq 7 \Longrightarrow v_7 \times v_8 \times v_9 \times \ldots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}); (k \geq 7 \Longrightarrow v_k \geq 2)$

donc: $\begin{cases} v_7 \geq 2 \\ v_8 \geq 2 \\ \\ v_{n-1} \geq 2 \end{cases}$

Par produit membre à membre on obtient:

$v_7 \times v_8 \times v_9 \times \ldots\ldots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$; (le nombre de termes de v_7 à v_{n-1} est $(n-7)-1+1=n-7$)

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq 7 \Longrightarrow v_7 \times v_8 \times \ldots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$

• Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq 7 \Longrightarrow u_n \geq 2^{n-7} \times u_7$

on a: $(\forall k \in \mathbb{N}^*); v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$

et $v_7 \times v_8 \times v_9 \times \ldots\ldots \times v_{n-1} \geq 2^{n-7}$

donc $\frac{u_8}{u_7} \times \frac{u_9}{u_8} \times \frac{u_{10}}{u_9} \times \ldots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 2^{n-7}$; (où $n \geq 7$)

après simplification , on obtient: $\frac{u_n}{u_7} \geq 2^{n-7}$

d'où $u_n \geq u_7 \times 2^{n-7}$; (car $u_7 > 0$)

par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}); (n \geq 7 \Longrightarrow u_n \geq 2^{n-7} \times u_7)$

Exercice 56

On a; $u_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}u_n$ et $v_n=\frac{u_n}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) • Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n\in\mathbb{N}$: on a: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+2}=\frac{(n+2)}{2(n+1)}u_n\times\frac{1}{(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{u_n}{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

donc: $(\forall n\in\mathbb{N}); v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

et de premier terme $v_0=\frac{u_0}{1}=\frac{1}{2}$ .Déduisons v_n puis u_n en fonction de n

on a: $(\forall n\in\mathbb{N}); v_n=v_0\times q^n$ où $q=\frac{1}{2}$ et $v_0=\frac{1}{2}$

donc $(\forall n\in\mathbb{N}), v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et puisque $v_n=\frac{u_n}{n+1}$

alors $u_n=(n+1)\times v_n=(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

donc $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n=(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

2) a) Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}); 2^{n+1}\geq\frac{n(n+1)}{2}$

Utilisons le raisonnement par récurrence

• Initialisation: Pour $n=2$ on a $2^{2+1}=8$ et $\frac{2(2+1)}{2}=3$

et puisque $8\geq 3$ alors $2^{2+1}\geq\frac{2(2+1)}{2}$

• Hérédité: Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Supposons que $2^{n+1}\geq\frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $2^{n+2}\geq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a $2^{n+1}\geq\frac{n(n+1)}{2}$ donc: $2\times 2^{n+1}\geq n(n+1)$

C'est-à-dire $2^{n+2}\geq n(n+1)$

pour montrer que $2^{n+2}\geq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Il suffit de montrer que $n(n+1)\geq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a: $2n(n+1)-(n+1)(n+2)=(n+1)(n-2)$

et puisque $n\geq 2$ alors $2n(n+1)\geq(n+1)(n+2)$

donc: $2^{n+2}\geq\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

• Conclusion: d'après le principe de récurrence, $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}), 2^{n+1}\geq\frac{n(n+1)}{2}$

b) Vérification pour $n=1$

Pour $n=1$ on a: $2^{1+1}=4$ et $\frac{1(1+1)}{2}=1$ et puisque $4>1$

alors l'inégalité **(1)** est vraie pour $n=1$.

par conséquent: $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 2^{n+1}\geq\dfrac{n(n+1)}{2}$

c) Déduisons que: $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 0<u_n\leq\dfrac{2}{n}$

d'après la question: on a: $u_n=(n+1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c'est à dire $u_n=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$; donc $u_n>0$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

On a: $2^{n+1}\geq\dfrac{n(n+1)}{2}$ donc: $\dfrac{1}{2^{n+1}}\leq\dfrac{2}{n(n+1)}$ d'où $\dfrac{n+1}{2^n}\leq\dfrac{2(n+1)}{n(n+1)}$

par conséquent: $u_n\leq\dfrac{2}{n}$

Conclusion: $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 0<u_n\leq\dfrac{2}{n}$

3) Calculons le produit $p_n=v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n$

On a $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

donc: $v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times...\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+3+...+(n+1)}$

$$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

d'où: $(\forall n\in\mathbb{N}), p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

Exercice 57

On a: $u_0=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{2}{3(n+2)}-\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)}$

1)a) Calculons u_1 et u_2 On a: $u_1=\dfrac{1}{3}u_0+\dfrac{2}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

$$u_2=\dfrac{1}{3}u_1+\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{18}=\dfrac{4}{9}$$

2) Montrons que: $(\forall n\in\mathbb{N}); u_n>\dfrac{1}{n+1}$

Utilisons le raisonnement par récurrence

- Initialisation

Pour $n=0$ on a: $u_0=2$ et $2>\dfrac{1}{0+1}$ donc $u_0>\dfrac{1}{0+1}$

- Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$; supposons que $u_n>\dfrac{1}{n+1}$ et montrons que $u_{n+1}>\dfrac{1}{n+2}$

On a: $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{2}{3(n+2)}-\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)}$ et $u_n>\dfrac{1}{n+1}$

donc $u_{n+1}>\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{3(n+2)}-\dfrac{1}{3(n+1)(n+2)}$

C'est à dire: $u_{n+1} > \dfrac{(n+2)+2(n+1)-1}{3(n+1)(n+2)}$

donc $u_{n+1} > \dfrac{3(n+1)}{3(n+1)(n+2)}$ d'où $u_{n+1} > \dfrac{1}{n+2}$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence , $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > \dfrac{1}{n+1}$

2) a) Montrons que la suite (u_1) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left[u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] - u_n = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{n+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 2u_n\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2(n+1)-1}{(n+1)(n+2)} - 2u_n\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} - 2u_n\right]$$

donc $u_{n+1} - u_n < \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{n+1} - u_n\right]$ et puisque $u_n > \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

alors $\dfrac{1}{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

donc la suite (u_n) est strictement décroissante

3) On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3(n+2)} - \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{n+2}$

$$= \frac{1}{3}u_n + \frac{2(n+1)-1-3(n+1)}{3(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3}u_n + \frac{-2-n}{3(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{1}{3}u_n - \frac{(n+2)}{3(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3}\left[u_n - \frac{1}{n+1}\right]$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$

d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{0+1} = 1$

b) Déduison u_n en fonction de n

On a: $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et puisque $v_n = u_n - \dfrac{1}{n+1}$

alors $u_n = v_n + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{3^n}$

4) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n \geq \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

On a: $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $u_k = \left(\dfrac{1}{3}\right)^k + \dfrac{1}{k+1}$

donc $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$ et on a: $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

et $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}$

et puisque $1 \geq \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n+1}$$
$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$$

alors $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \geq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1}}_{(n+1)\text{termes}}$ d'où $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \geq (n+1)\times\frac{1}{n+1}$

c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \geq 1$ par conséquent $S_n \geq \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+1$

c'est-à-dire $S_n \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 58

On a: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = -1 + \sqrt{5+(u_n+1)^2}$

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 1$

Utilisons le raisonnement par récurrence

- Initialisation: Pour $n = 0$, on a: $u_0 = 1$ et $1 \geq 1$ donc $u_0 \geq 1$
- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$

On a: $u_n \geq 1 \Longrightarrow u_n + 1 \geq 2$

$$\Longrightarrow (u_n+1)^2 \geq 4$$
$$\Longrightarrow 5+(u_n+1)^2 \geq 9$$
$$\Longrightarrow \sqrt{5+(u_n+1)^2} \geq 3$$
$$\Longrightarrow \sqrt{5+(u_n+1)^2} - 1 \geq 2$$

et puisque $2 \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq 1$

- Conclusion: d'après le principe de récurrence ,$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq 1$

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante

1ère méthode:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = -1 + \sqrt{5 + (u_n + 1)^2}$ d'où $(u_{n+1} + 1)^2 = 5 + (u_n + 1)^2$ (*)

par suite $(u_{n+1} + 1)^2 - (u_n + 1)^2 = 5$ et puisque $5 > 0$

alors $(u_{n+1} + 1)^2 \geq (u_n + 1)^2$

donc $u_{n+1} + 1 \geq u_n + 1$ (car $u_{n+1} + 1 > 0$ et $u_n + 1 > 0$) donc $u_{n+1} > u_n$

d'où la suite (u_n) est strictement croissante.

2ème méthode:

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{5 + (u_n + 1)^2} - 1 - u_n$

posons $X = u_{n+1} - u_n$

On a: $X = \dfrac{\left[\sqrt{5 + (u_n + 1)^2} - (u_n + 1)\right]\left[\sqrt{5 + (u_n + 1)^2} + (u_n + 1)\right]}{\sqrt{5 + (u_n + 1)^2} + (u_n + 1)}$

$$= \frac{5 + (u_n + 1)^2 - (u_n + 1)^2}{\sqrt{5 + (u + 1)^2} + (u_n + 1)} = \frac{5}{\sqrt{5 + (u_n + 1)^2} + u_n + 1}$$

et puisque $u_n + 1 > 0$, $\sqrt{5 + (u_n + 1)^2} \geq 0$ et $5 > 0$ alors $X > 0$

C'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante

3) a) On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = (u_n + 1)^2$

Montrons que (v_n) est une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + 1)^2 - (u_n + 1)^2$

et d'après (*) on a: $(u_{n+1} + 1)^2 = 5 + (u_n + 1)^2$

donc $(u_{n+1} + 1)^2 - (u_n + 1)^2 = 5$ c'est-à-dire $v_{n+1} - v_n = 5$

d'où la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $v_0 = (u_0 + 1)^2 = 4$

b) Exprimons u_n en fonction de n

On a: $v_n = v_0 + nr = 4 + 5n$ et puisque $v_n = (u_n + 1)^2$

alors $u_n + 1 = \sqrt{v_n}$ donc $u_n = \sqrt{v_n} - 1 = \sqrt{5n + 4} - 1$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sqrt{5n + 4} - 1$

Exercice 59

On a: $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 3$

Utilisons le raisonnement par récurrence

• Initialisation

Pour $n = 0$; on a: $u_0 = 2$ et $0 < 2 < 3$ donc: $0 < u_0 < 3$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $2 < u_n < 3$ et montrons que $2 < u_{n+1} < 3$

On a: $2 < u_n < 3 \Longrightarrow 8 < 6 + u_n < 9$

$$\Longrightarrow 2\sqrt{2} < \sqrt{6+u_n} < 3$$

et puisque $2 < 2\sqrt{2}$ alors $2 < u_{n+1} < 3$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence , $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 < u_n < 3$

2) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_{n+1} < \frac{1}{3}(3 - u_n)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

• Puisque $3 > u_n$ alors $3 - u_n > 0$

On a: $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{(3-\sqrt{6+u_n})(3+\sqrt{6+u_n})}{3+\sqrt{6+u_n}} = \dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}}$

Or $3 + \sqrt{6+u_n} > 3$ (car $\sqrt{6+u_n} > 0$) donc $\dfrac{1}{3+\sqrt{6+u_n}} < \dfrac{1}{3}$

d'où $\dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} < \frac{1}{3}(3-u_n)$ (car $3 - u_n > 0$)

par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_{n+1} < \frac{1}{3}(3 - u_n)$

b) Déduisons que: $0 < 3 - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

on a: $(\forall k \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_{k+1} < \frac{1}{3}(3 - u_k)$

donc:

• Pour $k = 0$: on a $0 < 3 - u_1 < \frac{1}{3}(3 - u_0)$

• Pour $k = 1$: on a $0 < 3 - u_2 < \frac{1}{3}(3 - u_1)$

• Pour $k = 2$: on a $0 < 3 - u_3 < \frac{1}{3}(3 - u_2)$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

Pour $k=n-1$ on a: $0<3-u_n<\frac{1}{3}(3-u_{n-1})$

Par produit membre à membre et après simplification, on obtient:

$0<3-u_n<\underbrace{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times....\times\frac{1}{3}}_{n\ facteurs}(3-u_0)$

donc $0<3-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (car $u_0=2$) d'où $(\forall n\in\mathbb{N});0<3-u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) On a: $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(3-u_k)$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$

a) Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N});0<S_n<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

On a: $(\forall k\in\mathbb{N});0<3-u_k<\left(\frac{1}{3}\right)^k$

et puisque:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+....+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

alors: $0<\sum_{k=0}^{n-1}(3-u_k)<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

donc: $(\forall n\in\mathbb{N});0<S_n<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

b) Déduisons un encadrement de T_n

on a: $0<S_n<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ c'est à dire $0<\sum_{k=0}^{n-1}(3-u_k)<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

donc: $0<\sum_{k=0}^{n-1}3-\sum_{k=0}^{n-1}u_k<\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

d'où $-\left(\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)^n\right)<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}3<0$

par suite: $\sum_{k=0}^{n-1}3-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)<\sum_{k=0}^{n-1}u_k<\sum_{k=0}^{n-1}3$

et puisque $\sum_{k=0}^{n-1}u_k=T_n$ et $\sum_{k=0}^{n-1}3=3n$ alors $3n-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)<T_n<3n$

Exercice 60

On a: $u_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)$

1) Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$

- Initialisation:

Pour $n=0$, on a: $u_0=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}>0$ donc: $u_0>0$

- Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Si $u_n > 0$ alors $u_n + \frac{1}{u_n} > 0$ donc: $u_{n+1} > 0$

• Conclusion: d'après le principe de récurrence ,$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$

2) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a) • Calculons v_{n+1} en fonction de v_n

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - 1 = \frac{1}{2}\frac{(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$

et $u_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 + 2u_n + 1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{(u_n + 1)^2}{u_n}$

donc: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{u_n + 1}{u_n}\right)^2} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right)^2 = v_n^2$

d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = v_n^2$

• Déterminons v_n en fonction de n

Méthode:

(v_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

Calculons certains termes de (v_n), pour conjecturer la relation qui

qui determine le terme général de la suite (v_n).

on a: $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$

$v_1 = (v_0)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

$v_2 = (v_1)^2 = \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2\times 2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2^2}$

$v_3 = \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{2^2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^2\times 2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^3}$

On remarque que $v_0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^0}$

$v_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^1}$; $v_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^2}$ et $v_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^3}$ on peut conjecturer: $v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

Montrons ce résultat par récurrence

• Initialisation

Pour $n = 0$ on a: $v_0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^0}$ (car $2^0 = 1$)

• Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ et montrons que $v_{n+1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

on a: $v_{n+1} = v_n^2$

et puisque $v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ alors: $v_{n+1} = \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n \times 2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

b) Déterminons u_n en fonction de n

soit $n \in \mathbb{N}$

on a: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff u_n v_n + v_n = u_n - 1$

$$\iff v_n + 1 = u_n(1 - v_n)$$

$$\iff u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} \qquad \text{(car } v_n \neq 1\text{)}$$

donc: $u_n = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n} + 1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{2^n}}$

Exercice 61

On a: $u_0 = \sqrt{6}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{5}u_n^2 + 2}$

1) Montrons que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{5}$

Utilisons le raisonnement par récurrence

• Initialisation

Pour $n = 0$ on a: $u_0 = \sqrt{6}$ et $\sqrt{6} \geq \sqrt{5}$ donc: $u_0 \geq \sqrt{5}$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_n \geq \sqrt{5}$ et montrons que $u_{n+1} \geq \sqrt{5}$

on a: $u_n \geq \sqrt{5} \Longrightarrow u_n^2 \geq 5$

$$\Longrightarrow \frac{3}{5}u_n^2 \geq 3$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{5}u_n^2 + 2 \geq 5$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{3}{5}u_n^2 + 2} \geq \sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{5}$$

Donc: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \sqrt{5}$

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n\right)}{\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n}$

$$=\frac{\frac{3}{5}u_n^2+2-u_n^2}{\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n}=\frac{10-2u_n^2}{5\left(\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n\right)}=\frac{2(5-u_n^2)}{5\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n}$$

et puisque $u_n\geq\sqrt{5}$ alors $u_n^2\geq 5$ alors $5-u_n^2\leq 0$ et $\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}+u_n>0$

d'où $u_{n+1}-u_n\leq 0$ par conséquent la suite (u_n) est décroissante

• Déduction

Puisque la suite (u_n) est décroissante alors $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\leq u_0$

donc $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\leq\sqrt{6}$ et puisque $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\geq\sqrt{5}$

alors $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{5}\leq u_n\leq\sqrt{6}$

3) On a: $v_n=u_n^2-5$

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n\in\mathbb{N}$.

on a: $v_{n+1}=u_{n+1}^2-5=\left(\sqrt{\frac{3}{5}u_n^2+2}\right)^2-5=\frac{3}{5}u_n^2+2-5$

$$=\frac{3}{5}u_n^2-3=\frac{3}{5}(u_n^2-5)=\frac{3}{5}v_n$$

donc $(\forall n\in\mathbb{N});v_{n+1}=\frac{3}{5}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0=u_0^2-5=1$ (car $u_0=\sqrt{6}$)

b) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n

on a: $v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et puisque $v_n=u_n^2-5$

alors $u_n=\sqrt{v_n+5}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}$ donc $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}$

4) Calculons la somme $S_n=\sum_{k=0}^{2n}u_k^2$

On a: $S_n=\sum_{k=0}^{2n}u_k^2$ et $v_k=u_k^2-5$

donc: $S_n=\sum_{k=0}^{2n}v_k+5=\sum_{k=0}^{2n}v_k+\sum_{k=0}^{2n}5=v_0\dfrac{1-q^{2n+1}}{1-q}+5(2n+1)$

où $v_0=1$ et $q=\frac{3}{5}$ donc $S_n=\dfrac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}}{1-\frac{3}{5}}+10n+5$

d'où: $(\forall n\in\mathbb{N});S_n=\frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}\right)+10n+5=10n+\frac{15}{2}-\frac{5}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}$

Exercice 62

on a: $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n \end{cases}$

et on pose: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ et $w_n = 3^n u_n$

1) a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a: $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1}$

$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right)$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

• Déduction:

on a: $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) Montrons que (w_n) est une suite arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a: $w_{n+1} - w_n = 3^{n+1}u_{n+1} - 3^n u_n = 3^{n+1}\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right)$

et puisque $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = v_n$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

alors $w_{n+1} - w_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3$

donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $w_0 = 3^0 u_0 = 0$

c) Déduisons u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = 3^n u_n$ donc $u_n = \frac{w_n}{3^n}$

et puisque (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $w_0 = 0$

alors $w_n = w_0 + nr = 3n$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{3n}{3^n}$

c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{n}{3^{n-1}}$

2) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$

On a: $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^n}$ (car $u_n = \frac{n}{3^{n-1}}$)

donc $\frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{2}{3}\frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{2n-n-1}{3^n} = \frac{n-1}{3^n}$

et puisque $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{n-1}{3^n} \geq 0$ d'où $\frac{2}{3}u_n - u_{n+1} \geq 0$

par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

b) Déduisons que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}^*); 0 < u_{k+1} \leq \frac{2}{3}u_k$

donc

• Pour $k = 1$; on a: $0 < u_2 \leq \frac{2}{3}u_1$

• Pour $k = 2$; on a: $0 < u_3 \leq \frac{2}{3}u_2$

• Pour $k = 3$; on a: $0 < u_4 \leq \frac{2}{3}u_3$

• • •

• • •

• • •

• Pour $k = n-1$; on a: $0 < u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

Si on multiplie les inégalités précédentes membre à membre et après simplification .

On obtient $0 < u_n \leq \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots \frac{2}{3}}_{(n-1)\ facteurs} u_1$

et puisque $u_1 = 1$ alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 63

On a: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3 + u_n^2}$

1) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

• Initialisation: Pour $n = 0$ on a: $u_0 = 1$ et $0 < 1 \leq 1$

donc $0 < u_0 \leq 1$

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $0 < u_n \leq 1$ et montrons que: $0 < u_{n+1} \leq 1$

On a: $u_{n+1} > 0$ car $u_n^2 > 0$ et $3 + u_n^2 > 0$

et on a: $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3 + u_n^2} = \frac{u_n^2 + 3}{3 + u_n^2} - \frac{3}{3 + u_n^2} = 1 - \frac{3}{3 + u_n^2}$

et puisque $\frac{3}{3 + u_n^2} > 0$ alors $1 - \frac{3}{3 + u_n^2} \leq 1$

donc: $u_{n+1} \leq 1$ d'où: $0 < u_{n+1} \leq 1$

Par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$

Méthode **1**:

On a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n^2}{3+u_n^2} \times \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{3+u_n^2}$ et on a: $0 < u_n < 1$ et $3 < 3 + u_n^2 \leq 4$

donc $0 < u_n < 1$ et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+u_n^2} < \frac{1}{3}$

d'où $0 < \frac{u_n}{3+u_n^2} \leq \frac{1}{3} \leq 1$ par suite $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

donc la suite (u_n) est décroissante

Méthode **2**: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{3+u_n^2} - u_n = u_n \frac{(u_n - 3 - u_n^2)}{3+u_n^2} = \frac{-u_n(u_n^2 - u_n + 3)}{u_n^2+3}$

$$= \frac{-u_n\left(\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right)}{u_n^2+3}$$

et puisque $u_n > 0$ et $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ et $u_n^2 + 3 > 0$ alors: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc (u_n) est une suite décroissante

3) a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

d'après la question précédente (Méthode **1**)

On a: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$ donc: $u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$ (car $u_n > 0$) d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$

b) Déduisons que $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Utilisons le raisonnement par récurrence

- Initialisation

Pour $n = 0$, on $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ et $1 \leq 1$ donc: $u_{0+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$

- Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et montrons que $u_{n+2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

On a: $u_{n+2} \leq \frac{1}{3} u_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc: $u_{n+2} \leq \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

C'est-à-dire: $u_{n+2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ d'où: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 64

On a: $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$

1) Calculons u_1 et v_1

On a: $u_1 = \dfrac{u_0^2}{u_0 + v_0} = \dfrac{4}{3}$

$$v_1 = \frac{v_0^2}{u_0 + v_0} = \frac{1}{3}$$

2) Calculons $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ en fonction de $u_n + v_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a: $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} - \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = u_n - v_n$

et $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}}{\dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2$

3) Déterminons u_n et v_n en fonction de n

On a: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - v_n = u_{n-1} - v_{n-1} = ... = u_0 - v_0 = 1$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n - v_n = 1$

et on a: $(\forall n \in \mathbb{N}); \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2 = \left(\left(\dfrac{u_{n-1}}{v_{n-1}}\right)^2\right)^2$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}); \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\dfrac{u_0}{v_0}\right)^{2^n} = 2^{2^n}$

(Vérifier ce résultat par récurrence)

donc $\begin{cases} u_n - v_n = 1 \\ \dfrac{u_n}{v_n} = 2^{2^n} \end{cases}$

d'où $\begin{cases} u_n = v_n + 1 \\ \dfrac{v_n + 1}{v_n} = 2^{2^n} \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} u_n = v_n + 1 \\ 1 + \dfrac{1}{v_n} = 2^{2^n} \end{cases}$

Or $1 + \dfrac{1}{v_n} = 2^{2^n} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{v_n} = 2^{2^n} - 1$

$$\Longleftrightarrow v_n = \frac{1}{2^{2^n} - 1} \qquad (\text{car } 2^{2^n} - 1 \neq 0)$$

D'où: $\begin{cases} v_n = \dfrac{1}{2^{2^n} - 1} \\ u_n = 1 + v_n = 1 + \dfrac{1}{2^{2^n} - 1} = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1} \end{cases}$

par conséquent: $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^{2^n} - 1}$

Exercice 65

On a: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); 3u_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$; $\begin{cases} v_1 = 12 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); 4v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$

$w_n = v_n - u_n$ et $t_n = 3u_n + 8v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) Montrons que la suite (w_n) est géométrique:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right) - \left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right)$

$$= \frac{-1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12}w_n$$

Puisque: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$ alors la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et de premier terme

$w_1 = v_1 - u_1 = 12 - 1 = 11$

2) • Déduisons w_n en fonction de n.

On a: (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_1 = 11$ et de raison $q = \frac{1}{12}$

donc: $w_n = w_1 \times q^{n-1} = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = \frac{11}{12^{n-1}} = 11 \times 12^{1-n}$

• Montrons que $v_n > u_n$

On a: $w_n = \frac{11}{12^{n-1}}$ et $\frac{11}{12^{n-1}} > 0$ donc $v_n - u_n > 0$ (car $w_n = v_n - u_n$)

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n < v_n$

3) Montrons que la suite (t_n) est constante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) + 8\left(\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n\right)$

$$= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$$

on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); t_{n+1} = t_n$

donc la suite (t_n) est constante , et on a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); t_n = t_1 = 99$

4) a) Montrons que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

et puisque $v_n > u_n$

alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - u_n > 0$

donc la suite (u_n) est strictement croissante

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

et puisque $v_n > u_n$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_{n+1} - v_n < 0$

donc la suite (v_n) est strictement décroissante

b) Déterminons u_n et v_n en fonction de n

On a: $\begin{cases} w_n = v_n - u_n \\ t_n = 3u_n + 8v_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3w_n = 3v_n - 3u_n \\ t_n = 8v_n + 3u_n \end{cases}$

$$\Longrightarrow 3w_n + t_n = 11v_n$$

$$\Longrightarrow v_n = \frac{3}{11}w_n + \frac{1}{11}t_n$$

et puisque $w_n = \frac{11}{12^{n+1}}$ et $t_n = 99$

alors $v_n = \frac{3}{11} \times \frac{11}{12^{n+1}} + \frac{1}{11} \times 99 = 9 + \frac{3}{12^{n+1}}$

et puisque $w_n = v_n - u_n$ alors $u_n = v_n - w_n$

donc $u_n = 9 + \frac{3}{12^{n+1}} - \frac{11}{12^{n+1}} = 9 - \frac{8}{12^{n+1}}$

par conséquent: $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = 9 - \frac{8}{12^{n+1}}$ et $v_n = 9 + \frac{3}{12^{n+1}}$

Exercice 66

1) Montrons que: $\left(\forall x \in \left]0; \frac{1}{4}\right[\right); 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{4}$

Soit x un nombre réel:

on a: $0 < x < \frac{1}{4} \Longrightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{16}$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{8} < -2x^2 < 0 \; et \; 0 < x^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Longrightarrow \frac{7}{8} < 1 - 2x^2 < 1 \; et \; 0 < x^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Longrightarrow 1 < \frac{1}{1-2x^2} < \frac{8}{7} \; et \; 0 < x^2 < \frac{1}{16}$$

$$\Longrightarrow 0 < x^2 \times \frac{1}{1-2x^2} < \frac{8}{7} \times \frac{1}{16}$$

$$\Longrightarrow 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{14} < \frac{1}{4}$$

donc $\left(\forall x \in \left]0; \frac{1}{4}\right[\right); 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{4}$

2) on a: $\begin{cases} u_0 = a \text{ où } a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} \end{cases}$

a) Montrons que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \frac{1}{4}$

Utilisons le raisonnement par récurrence

- Initialisation

Pour $n=0$ on a $u_0=a$ et $0<a<\frac{1}{4}$ donc $0<u_0<\frac{1}{4}$

- Hérédité

Soit $n\in\mathbb{N}$: Supposons que $0<u_n<\frac{1}{4}$ et montrons que $0<u_{n+1}<\frac{1}{4}$

d'après la question **1)** on a: $0<u_n<\frac{1}{4}\Longrightarrow 0<\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}<\frac{1}{4}$

or $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}$ donc $0<u_n<\frac{1}{4}\Longrightarrow 0<u_{n+1}<\frac{1}{4}$

d'où $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_n<\frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante

Soit $n\in\mathbb{N}$

on a: $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n}{1-2u_n^2}$ (car $u_n\neq 0$)

or $0<u_n<\frac{1}{4}$ et $1<\frac{1}{1-2u_n^2}<\frac{8}{7}$ donc $0<\frac{u_n}{1-2u_n^2}<\frac{2}{7}$

d'où $0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{2}{7}$ et comme $\frac{2}{7}<1$, alors $(\forall n\in\mathbb{N});0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ (*)

par conséquent la suite (u_n) est strictement décroissnte.

c) Montrons que $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}\leq\frac{2}{7}u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$: d'après (*) on a: $0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{2}{7}$

donc $u_{n+1}<\frac{2}{7}u_n$ (car $u_n>0$) d'où $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}<\frac{2}{7}u_n$

d) Déduisons que: $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}\leq\left(\frac{2}{7}\right)^n a$

on a: $(\forall k\in\mathbb{N});0<u_{k+1}\leq\frac{2}{7}u_k$ donc:

pour $k=0$, on a: $0<u_1\leq\frac{2}{7}u_0$

pour $k=1$ on a: $0<u_2\leq\frac{2}{7}u_1$

pour $k=2$ on a: $0<u_3\leq\frac{2}{7}u_2$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$

pour $k=n-1$ on a: $0<u_n\leq\frac{2}{7}u_{n-1}$

pour $k=n$ on a: $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{7}u_n$

Si on multiplie les inégalités précédentes membre à membre on obtient:

$0<u_{n+1}<\underbrace{\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\ldots\times\frac{2}{7}}_{n\ \text{facteur}}\times u_0$

(le nombre de facteurs est le nombre de termes de u_1 à u_n ou bien de u_0 à u_{n-1} c'est n)

donc $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a$ (car $u_0 = a$)

Exercice 67

1) Montrons que: $(\forall x \in]0;1]); \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Soit $x \in]0;1]$

on a: $0 < x \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -x < 0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}x < 1$$

Donc : $1 - \frac{1}{2}x > 0$

• Comparons $1 - \frac{1}{2}x$ et $\sqrt{1-x}$:

On a : $\left(1 - \frac{1}{2}x\right) - \sqrt{1-x} = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - (\sqrt{1-x})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \sqrt{1-x}} = \dfrac{1 + \frac{1}{4}x^2 - x - 1 + x}{\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \sqrt{1-x}}$

$$= \frac{\frac{1}{4}x^2}{\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + \sqrt{1-x}}$$

et puisque : $\frac{1}{4}x^2 > 0$ et $1 - \frac{1}{2}x > 0$ et $\sqrt{1-x} > 0$

alors : $\left(1 - \frac{1}{2}x\right) > \sqrt{1-x}$ **(1)**

Comparons les deux nombres positifs $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$:

Étudions le signe de : $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$

On a : $A = \frac{1}{x+1} - \left(1 + \frac{1}{4}x^2 - x\right) = \dfrac{1 - x - 1 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x^2 + x}{x+1}$

$$= \frac{-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2}{(x+1)} = \frac{x^2(3-x)}{4(x+1)}$$

et puisque : $4(x+1) > 0$ et $3 - x > 0$ et $x^2 > 0$

Alors : $A > 0$ donc : $\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 > \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$

d'où : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \frac{1}{2}x$ **(2)** (car ces deux nombres sont positifs).

de **(1)** et **(2)** on en déduit que : $(\forall x \in]0,1]) : 0 < \sqrt{1-x} < 1 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

2) On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)u_{n-1}$

Calculons u_n en fonction de n :

On a: $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; u_k = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) u_{k-1}$ c'est-à-dire : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; u_k = \frac{2k-1}{2k} u_{k-1}$

Donc :

- Pour $k = 1$ on a: $u_1 = \frac{1}{2} u_0$
- Pour $k = 2$ on a: $u_2 = \frac{3}{4} u_1$
- Pour $k = 3$ on a: $u_3 = \frac{5}{6} u_2$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

- Pour $k = n-1$ on a: $u_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} u_{n-2}$
- Pour $k = n$ on a: $u_n = \frac{2n-1}{2n} u_{n-1}$

Si on multiplie membre à membre les égalités précédentes et on simplifie, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \times u_0$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2n-1}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2n} \times \frac{1}{2}$

Rappel:
$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ se note : $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

3) On a: $v_n = u_n \sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n \sqrt{n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

a) • Montrons que (v_n) est strictement décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On a: $v_{n+1} = u_{n+1} \sqrt{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) u_n \sqrt{n+2}$

donc :

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) \sqrt{n+2}\, u_n - u_n \sqrt{n+1} = u_n \sqrt{n+2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)$$

$$= u_n \sqrt{n+2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}}\right) = u_n \sqrt{n+2} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}}\right)$$

et d'après la **1**ère question, on a : $(\forall x \in]0;1])$; $\left(1 - \frac{1}{2}x\right) < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$,

et comme $\frac{1}{n+1} \in]0;1]$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Alors $1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}$.

C'est-à-dire $1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}}<0$, et puisque $u_n\sqrt{n+2}>0$.

alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_{n+1}-v_n<0$.

Donc (v_n) est une suite strictement décroissante.

• Déduisons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n<\frac{1}{2\sqrt{1+n}}$.

Puisque (v_n) est strictement décroissante,

alors $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $v_n<v_0$.

Or $v_n=u_n\sqrt{n+1}$ et $v_0=\frac{1}{2}$. Donc $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n<\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

b) Montrons que la suite (w_n) est strictement croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

On a : $w_{n+1}-w_n=u_{n+1}\sqrt{n+1}-u_n\sqrt{n}=\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)\sqrt{n+1}\,u_n-u_n\sqrt{n}$

$$=u_n\sqrt{n+1}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=u_n\sqrt{n+1}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$$

$$=u_n\sqrt{n+1}\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(n+1)}-\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}\right)$$

Or $(\forall x\in\,]0;1])$; $\sqrt{1-x}<1-\frac{1}{2}x$,

et puisque $\frac{1}{n+1}\in\,]0;1]$ pour tout n de $\mathbb{N}$,

alors $\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}<1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}$.

Donc $1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}-\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}>0$. D'où : $w_{n+1}-w_n>0$.

Par conséquent la suite (w_n) est strictement croissante.

• Déduisons que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n>\frac{1}{4\sqrt{n}}$.

Puisque (w_n) est strictement croissante,

alors $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $w_n\geq w_1$ où $w_n=u_n\sqrt{n}$ et $w_1=u_1\sqrt{1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)u_0=\frac{1}{4}$.

Donc $u_n\sqrt{n}\geq\frac{1}{4}$. D'où : $u_n\geq\frac{1}{4\sqrt{n}}$.

Par conséquent $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n\geq\frac{1}{4\sqrt{n}}$

6 Leçon

Barycentre dans le plan

Maxi.

Résumé

1 Barycentre de deux points pondérés

1- Point pondéré

Soit A un point du plan et a un nombre réel. Le couple $(A;a)$ s'appelle un point pondéré, et le réel a s'appelle la masse du point A (on dit aussi que le point A est affecté du coefficient a).

Propriété et définition

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que $a+b\neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.

2- Propriétés du barycentre de deux points

a) Homogénéité :

- Si G est le barycentre de $(A;a)$; $(B;b)$ alors G est aussi le barycentre de $(A;ka)$; $(B;kb)$ pour tout réel k non nul.
- le barycentre ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Pour la démonstration, remarquer que pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow (ka)\overrightarrow{GA}+(kb)\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

b) Propriété caractéristique :

Propriété

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que : $a+b\neq 0$.
G est le barycentre des deux points pondérés $(A;a);(B;b)$
si et seulement si pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

2 Barycentre de trois points pondérés

Propriété et définition

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés tels que : $a+b+c\neq 0$.
Il existe un et un seul point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

- Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.

Cas particulier : (isobarycentre)

Si $a=b=c$, alors le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$

est appelé l'isobarycentre des points A; B et C. C'est le centre de gravité du triangle ABC (dans le cas où les points A; B et C ne sont pas alignés).

Propriété de l'homogénéité

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ alors, pour tout réel k non nul; G est aussi le barycentre des points pondérés $(A;ka)$; $(B;kb)$ et $(C;kc)$.

Propriété caractéristique

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ des points pondérés du plan tels que $a+b+c\neq 0$ et G un point du plan.

G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ si, et seulement si, pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

Conséquence :

Pour $M=A$, dans la propriété caractéristique, on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Cette relation permet la construction du point G.

Associativité du barycentre

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ des points pondérés du plan tels que : $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$

Si G est le barycentre des points $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ et H est le barycentre des points $(A;a)$ et $(B;b)$, alors G est le barycentre des points $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

3 Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit $(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)$ et $(D;d)$ des points pondérés et $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$.

a) Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$, alors les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$

b) Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$, alors les coordonnées du point G sont : $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$

Exercices

Exercice 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

Déterminer dans le cas où c'est possible, deux nombres réels a et b tels que le point G soit le barycentre du système pondéré $\{(A;a),(B;b)\}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{GA}$

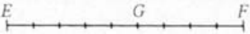
2) A est le milieu du segment $[BG]$

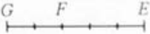
3) $(\sqrt{3}-2)\overrightarrow{GA}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

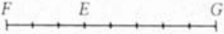
4) $\overrightarrow{BG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Montrer que le point G est le barycentre des points E et F affectés à deux coefficients à déterminer dans chacun des cas suivants :

1) 

2) 

3) 

Exercice 3

Soit A, B et C trois points distincts tels que A est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$.

1) Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha+\beta=1$ et que le point B soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(C;\beta)$.

2) Déterminer deux réels x et y tels que $x+y=-2$ et que le point C soit le barycentre des points pondérés $(B;x)$ et $(A;y)$.

Exercice 4

Soit E et F deux points distincts du plan et G est le barycentre des points pondérés $(E;-1)$ et $(F;4)$.

Soit H le barycentre des points pondérés $\left(E;\dfrac{1}{3}\right)$ et $(F;x)$ tels que $x\neq-\dfrac{1}{3}$.

Déterminer la valeur de x dans les deux cas suivants :

1) H et G sont confondus.

2) $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{EF}$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle.

Construire le point G dans chacun des cas suivants :

1) G est le barycentre des points pondéré $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$.

2) G est le centre de gravité du triangle ABC .

3) G est le barycentre des points pondérés $(A;54)$, $(B;-36)$ et $(C;6)$.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

Déterminer chacun des ensembles dans les cas suivants :

1) E_1 est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
$\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

2) E_2 est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.

3) E_3 est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ sont colinéaires.

4) E_4 est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
$3 \leq \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\| \leq 6$.

5) E_5 est l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| \geq \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$.

Exercice 7

En s'inspirant de la figure, déterminer dans chacun des cas suivants, les nombres a, b et c pour que le point G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

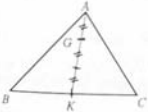


figure 1

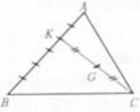


figure 2

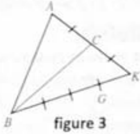


figure 3

Exercice 8

En s'inspirant de la figure, déterminer dans chacun des cas suivants, les nombres a, b, c et d pour que le point G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$, $(C;c)$ et $(D;d)$.

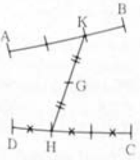


figure 1

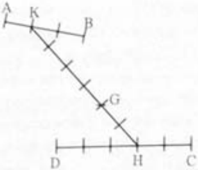


figure 2

Exercice 9

Le plan est rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points : $A(1;2)$, $B(-3;2)$ et $C(2;4)$.

1) Déterminer les coordonnées du point G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-3)$ et $(C;1)$.

2) Soit G_m le barycentre des points pondérés $(A;3m+1)$, $(B;-2m-3)$ et $(C;-m+3)$ où $m \in \mathbb{R}$.

a- Vérifier que le point G_m existe pour tout réel m.

b- Déterminer les coordonnées du point G_m en fonction de m.

c- En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit A, B et C trois points du plan.

On considère la transformation T du plan qui à chaque point M on lui associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = 7\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1) Soit G le barycentre des points pondérés $(A;7)$, $(B;-2)$ et $(C;-1)$.

Montrer que : $T(G) = G$.

2) En écrivant $\overrightarrow{GM'}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$, déterminer la nature de la transformation T et ses éléments caractéristiques.

Exercice 11

Soit E, F et H trois points du plan.

On considère la transformation T du plan qui à chaque point M on lui associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MH}$.

Montrer que T est une symétrie centrale.

Exercices de synthèse

Exercice 12

$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu du segment $[BC]$ et m un nombre réel.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;4)$, $(B;-m)$ et $(C;m)$.

1) Construire le point G dans le cas où $m = 4$.

2) a- Écrire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et m.

b- Déterminer m pour que G soit le milieu du segment $[AD]$.

3) On suppose dans cette question que $m \neq 4$ et $m \neq -4$.

Soit H le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;-m)$,

et K le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(C;m)$

Montrer que les points I, H et K sont alignés

Exercice 13

$ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu du segment $[AD]$, E est le centre de gravité du triangle ACD, K est le milieu du segment $[EB]$ et F est le point défini par la relation : $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{BF}$.

1) Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;3)$, $(C;1)$ et $(D;1)$.

2) Montrer que les points I, F et K sont alignés.

3) Soit L le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;3)$ et M est le milieu du segment $[CD]$.

Montrer que les points L, K et M sont alignés.

Exercice 14

Soit ABC un triangle.

On considère les points Q,I,R et G tels que:

- $4\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC}$
- I est le milieu du segment $[BC]$
- R est le projeté du point Q sur (AB) parallélement à (BC)
- G est le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;1)$ et $(C;1)$

1) Vérifier que le point Q est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;1)$

2) En déduire que les points B,G et Q sont alignés.

3) a- Montrer que: $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

b- En déduire que: $G \in (CR)$

4) Montrer que les droites (CR), (BQ) et (AI) son G concourantes.

Exercice 15

Soit ABC un triangle.

On considère les points K,I,J et G tels que:

- K est le milieu du segment $[AB]$
- $4\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
- $4\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CA}$
- G est le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;1)$

1) Montrer que le point I est le barycentre des points B et C affectés à des coefficients à déterminer.

2) Montrer que le point J est le barycentre des points A et C affectés à des coefficients à déterminer.

3) Montrer que les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont concourantes

4) Soit H le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;2)$ et L le barycentre des points pondérés
$(B;3)$ et $(C;2)$.
Montrer que les droites (IJ), (CK) et (AL) sont concourantes.

Exercice 16

Soit $ABDC$ un parallèlogramme.
On considére les points J, I, I' et K tels que:
- J est le milieu du segment $[AC]$
- $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AI'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ - $AIKJ$ est un parallélogramme.

1) Montrer que les droites (BJ) et (CI) se coupent au point G barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$

2) a- Montrer que le point D est le barycentre des points A, B et C affectés à des coefficients à déterminer.

b- Montrer que le point K est le barycentre des points A, B et C affectés à des coefficients à déterminer.

c- En déduire chacun des vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

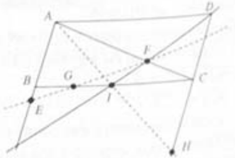
d- En utilisant les résultats précédants, montrer que les droites (CI), (BJ) et (DK) sont concourantes.

3) Montrer que les points G, D et I' sont alignés.

Exercice 17

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
I est le milieu du segment $[BC]$ et E est le point défini par la relation: $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{AB}$ où $k\in\mathbb{R}^{*}$.

Les droites (ID) et (AC) se coupent au point F.
Les droites (EF) et (BC) se coupent au point G.



1) Montrer que le point B est le barycentre des points A et E affectés à des coefficients à déterminer.

2) Soit H le symétrique du point D par rapport au point C.

a- Montrer que le point I est le milieu du segment $[AH]$.

b- En déduire que le point F est le centre de gravité du triangle ADH.

3) a- Montrer que le point G est le barycentre des points pondérés $(A;k)$, $(E;1)$, $(D;k)$ et $(H;k)$.

b- Montrer que le point G est le barycentre des points B et C affectés à des coefficients à déterminer.

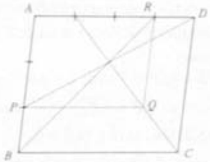
c- En déduire la valeur du rapport $\frac{GC}{GB}$ en fonction de k.

Exercice 18

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

On considére les points P, Q et R définis par:

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $PQRA$ est un parallélogramme.



1) a- Montrer que le point P est le barycentre des points A et B affectés à des coefficients à déterminer.

b- Montrer que le point R est le barycentre des points A et D affectés à des coefficients à déterminer.

2) Soit I le point d'intersection des droites (BR) et (DP).

Montrer que le point I est le barycentre des points A, B et D affectés à des coefficients à déterminer.

3) Montrer que le point Q est le barycentre des points pondérés $(A;-5)$, $(B;8)$ et $(D;9)$.

4) En déduire que Q est le milieu du segment $[CI]$ et que les droites (CQ), (BR) et (DP) sont concourantes.

Exercice 19

ABC est un triangle.

On associe à chaque nombre réel m, le point G_m barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;m)$ et $(C;-m)$

Soit O le milieu du segment $[BC]$.

1) Déterminer (Δ), l'ensemble des points G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

2) a- Construire G_2 et G_{-2}

b- On suppose que $m \neq 2$ et $m \neq -2$

Soit G_m un point de (Δ) distinct des points A, G_2 et G_{-2}

- Montrer que la droite (BG_m) coupe la droite (AC) en un point I et que la droite (CG_m) coupe la droite (AB) en un point J.

3) Le plan est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

a- Déterminer les coordonnées des points I et J.

b- En déduire que les points O, I et J sont alignés.

c- Déterminer deux nombres réels a et b pour que le point O soit le barycentre des points pondérés $(I;a)$ et $(J;b)$

Solutions

Exercice 1

Pour déterminer deux nombres réels a et b tels que G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ il suffit d'établir une relation de l'une des deux formes :

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ avec $a + b \neq 0$ ou $a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} = \vec{0}$ avec $a + b \neq 0$.

1) • On a : $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{GA}$ donc : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{BG} - 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$

c'est-à-dire : $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

Puisque $4 + 3 \neq 0$ alors le point G est le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;3)$ donc : $a = 4$ et $b = 3$.

• Construction du point G :

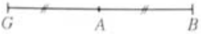
G est le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

2) • On a A est le milieu du segment $[BG]$ donc $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$,

d'où : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ c'est-à-dire : $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

Par suite G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;-1)$ (car : $2 + (-1) \neq 0$) donc : $a = 2$ et $b = -1$.

• Construction du point G :



3) On a : $(\sqrt{3} - 2)\overrightarrow{GA} + \frac{1}{\sqrt{3}+2}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (*)

et $(\sqrt{3} - 2) + \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)+1}{\sqrt{3}+2} = \frac{-1+1}{\sqrt{3}+2} = 0$.

Donc il n'existe aucun point G vérifiant la relation (*) et par suite, on ne peut pas trouver les deux réels a et b.

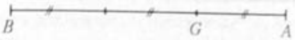
4) • On a : $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc : $3\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

c'est-à-dire : $3\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

D'où : $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

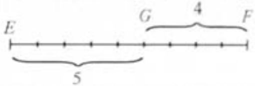
Par suite G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$ (car $2+1 \neq 0$).

• Construction du point G :



Exercice 2

1) D'après la lecture de la figure, on déduit que :



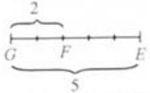
$\overrightarrow{EG} = \frac{5}{9}\overrightarrow{EF}$ c'est-à-dire : $9\overrightarrow{EG} - 5\overrightarrow{EF} = \vec{0}$,

donc : $9\overrightarrow{EG} - 5\overrightarrow{EG} - 5\overrightarrow{GF} = \vec{0}$,

d'où : $4\overrightarrow{EG} + 5\overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

Ainsi G est le barycentre des points pondérés $(E;4)$ et $(F;5)$.

2) D'après la lecture de la figure, on déduit que :



$\overrightarrow{GF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GE}$ donc : $5\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

D'où G est le barycentre des points pondérés $(E;-2)$ et $(F;5)$.

3) D'après la lecture de la figure, on déduit que :

$\overrightarrow{GE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{GF}$ c'est-à-dire : $8\overrightarrow{GE} - 5\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

Donc G est le barycentre des points pondérés $(E;8)$ et $(F;-5)$.

Exercice 3

1) Déterminons les réels α et β tels que $\alpha + \beta = 1$ et que B soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(C;\beta)$.

On a : A est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$,

donc : $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ c'est-à-dire : $2\overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$,

d'où : $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, cela signifie que le point B est le barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(C;-3)$.

On a : $5+(-3)=2$, cherchons α et β tels que : $\alpha+\beta=1$ et que B soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(C;\beta)$.

D'après la propriété de l'homogénéité du barycentre, on a B est aussi barycentre des points pondérés $(A;5k)$ et $(C;-3k)$ où $k\in\mathbb{R}^*$.

On pose : $\alpha=5k$ et $\beta=-3k$

On a: $\alpha+\beta=1 \iff 5k-3k=1$

$$\iff 2k=1$$

$$\iff k=\frac{1}{2}$$

Donc : $\alpha=\frac{5}{2}$ et $\beta=-\frac{3}{2}$

D'où : B est aussi barycentre des points pondérés $\left(A;\frac{5}{2}\right)$ et $\left(C;-\frac{3}{2}\right)$.

2) Déterminons les réels x et y tels que $x+y=-2$ et que C soit le barycentre des points pondérés $(A;y)$ et $(B;x)$.

On a : A est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$,

donc : $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ c'est-à-dire : $2(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$,

On a : $-2+5=3$, cherchons x et y tels que $x+y=-2$ et C est le barycentre des points $(A;y)$ et $(B;x)$.

D'après la propriété de l'homogénéité du barycentre, on a C est aussi le barycentre des points pondérés $(A;5k)$ et $(B;-2k)$ où $k\in\mathbb{R}^*$.

On pose : $x=-2k$ et $y=5k$.

On a : $x+y=-2 \iff -2k+5k=-2$

$$\iff 3k=-2$$

$$\iff k=-\frac{2}{3}$$

D'où : $x=\frac{4}{3}$ et $y=-\frac{10}{3}$.

Ainsi C est le barycentre des points pondérés $\left(A;-\frac{10}{3}\right)$ et $\left(B;\frac{4}{3}\right)$.

Exercice 4

1) Déterminons la valeur de x telle que : $G=H$.

On a : G est le barycentre de $(E;-1)$ et $(F;4)$ donc G est aussi le barycentre de $\left(E;\frac{1}{3}\right)$ et $\left(F;-\frac{4}{3}\right)$ (D'après la propriété de l'homogénéité).

Puisque H est le barycentre de $\left(E;\frac{1}{3}\right)$ et $(F;x)$ où $x\neq-\frac{1}{3}$,

alors : $G=H \iff x=-\frac{4}{3}$.

2) Déterminons la valeur de x pour que l'on ait : $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{EF}$.

On a : G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;4)$ donc : $\overrightarrow{EG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$, et H est le barycentre des points $\left(E;\frac{1}{3}\right)$ et $(F;x)$ donc : $\overrightarrow{EH}=\dfrac{x}{x+\frac{1}{3}}\overrightarrow{EF}$.

D'où : $\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{EH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}-\dfrac{x}{x+\frac{1}{3}}\overrightarrow{EF}=\left(\frac{4}{3}-\frac{3x}{3x+1}\right)\overrightarrow{EF}$.

C'est-à-dire : $\overrightarrow{HG}=\dfrac{3x+4}{9x+3}\overrightarrow{EF}$.

Ainsi : $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{EF}\iff\dfrac{3x+4}{9x+3}=2$

$$\iff 3x+4=18x+6$$
$$\iff 15x=-2$$
$$\iff x=-\frac{2}{15}$$

Donc : $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{EF}\iff x=-\dfrac{2}{15}$.

Exercice 5

1) Construisons le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$.

Méthode 1 : Utiliser l'associativité du barycentre.

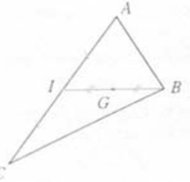
On remarque que les points A et C sont affectés au même coefficient, donc I le milieu du segment $[AC]$ est le barycentre des points $(A;1)$ et $(C;1)$.

Puisque G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(C;1)$ et $(B;2)$, alors d'après l'associativité du barycentre.

G est le barycentre des points pondérés $(I;2)$ et $(B;2)$.

Puisque les points I et B sont affectés au même coefficient, alors le point G est le milieu du segment $[BI]$; d'où la construction du point G.

Méthode 2 : Utiliser une relation vectorielle.



- Utiliser la définition du barycentre:

On a : $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}\iff$

$\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

$\iff 4\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

- Utiliser la propriété caractéristique du barycentre en remplaçant M par A par exemple.

G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$, donc d'après la propriété caractéristique du barycentre de trois points, on a : $(\forall M\in(P))$: $(1+2+1)\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

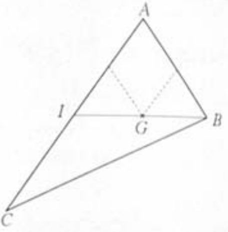
En prenant $M = A$, on a : $4\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

2) Construisons le point G le centre d gravité du triangle ABC.

Méthode 1 : Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes.

Rappel : La médiane d'un triangle est la droite qui passe par l'un de ses sommets et par le milieu du segment opposé à ce sommet.



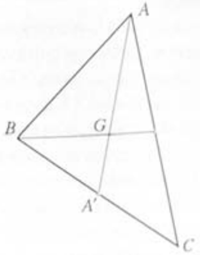
Pour construire le point G, il suffit de construire deux médianes.

Méthode 2 : Utiliser le barycentre.

G est le centre de gravité du triangle ABC signifie que G est le barycentre $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$ donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

On peut aussi utiliser l'associativité du barycentre en considérant le point A' le milieu du segment $[BC]$.

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.



3) Construisons le point G, le barycentre des points pondérés $(A;54)$, $(B;-36)$ et $(C;6)$.

Simplifions les coefficients des points pondérés :

On remarque que : $\frac{54}{6} = 9$, $\frac{-36}{6} = -6$ et $\frac{6}{6} = 1$.

D'après la propriété de l'homogénéité, on a G est le barycentre des points pondérés $(A;9)$, $(B;-6)$ et $(C;1)$.

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{-6}{9-6+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9-6+1}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

D'où la construction du point G.

Remarque : Pour construire le point G le barycentre des points pondérés $(A;9)$, $(B;-6)$ et $(C;1)$ on peut aussi utiliser :

- L'associativité du barycentre une seule fois :

Soit H le barycentre de $(A;9)$, $(B;-6)$ donc G est le barycentre de $(H;3)$

et $(C;1)$.

Par suite, on construit le point H en utilisant la relation : $\overrightarrow{AH}=\frac{-6}{-6+9}\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}$.

Puis on construit le point G en utilisant la relation : $\overrightarrow{CG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$.

- L'associativité du barycentre deux fois :

Soit H le barycentre $(A;9)$ et $(B;-6)$ et soit K le barycentre de $(A;9)$ et $(C;1)$.

Donc d'après l'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de $(H;3)$, $(C;1)$ et G est le barycentre de $(K;10)$ et $(B;-6)$.

D'où : $G\in(CH)$ et $G\in(BK)$.

Ainsi : G est le point d'intersection des droites (BK) et (CH).

Exercice 6

1) Déterminons $E_1=\{M\in P/\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|\}$:

- Soit G le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;-3)$ (car $-3+1\neq 0$).

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$.

- Soit K le barycentre des points $(C;1)$ et $(D;1)$ (K est le milieu du segment $[CD]$).

Donc : $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MK}$.

On a : $M\in E_1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

$$\Leftrightarrow \|-2\overrightarrow{MG}\|=\|2\overrightarrow{MK}\|$$

$$\Leftrightarrow 2MG=2MK$$

$$\Leftrightarrow MG=MK$$

D'où E_1 est la médiatrice du segment $[GK]$.

2) Déterminons l'ensemble E_2 :

- Simplifions la somme : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

Soit G_1 le barycentre des points $(A;2)$, $(B;1)$ et $(C;-1)$ (car $2+1-1\neq 0$).

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre, on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$.

- Simplifions la somme : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

On a : $1+1-2=0$, donc ces points pondérés n'admettent pas de barycentre, mais on peut considérer le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;1)$ ou $(A;1)$ et $(C;-2)$.

Soit I le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;1)$.

Donc : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

On a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{CI}$.

D'où : $M\in E_2 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\|=\|2\overrightarrow{CI}\|$

$\Leftrightarrow MG_1=CI$

Donc E_2 est le cercle de centre G_1 et de rayon CI .

3) Déterminons l'ensemble E_3 :

- Simplifions la somme : $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

Soit G_2 le barycentre des points $(A;3)$, $(B;-2)$ et $(C;1)$ (car $3-2+1\neq 0$), donc :

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_2}$.

On a : $M\in E_3 \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{R})/3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=k.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{R})/2\overrightarrow{MG_2}=k.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{R})/\overrightarrow{MG_2}=\frac{k}{2}.\overrightarrow{BC}$

Donc E_3 est la droite passant par le point G_2 et parallèle à la droite (BC).

4) Déterminons l'ensemble E_4 :

- Simplifions la somme : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}$.

Soit G_3 le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-3)$, $(C;1)$ et $(D;4)$ (car $1-3+1+4\neq 0$), donc : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG_3}$.

On a : $M\in E_4 \Leftrightarrow 3\leq\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MD}\|\leq 6$

$\Leftrightarrow 3\leq\|3\overrightarrow{MG_3}\|\leq 6$

$\Leftrightarrow 3\leq 3MG_3\leq 6$

$\Leftrightarrow 1\leq MG_3\leq 2$

Donc E_4 est la partie du plan limitée par les deux cercles de centre G_3 et de rayons respectifs 1 et 2.

5) Déterminons E_5 :

- Simplifions le somme : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;-3)$ (car $1+1-3\neq 0$), donc :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MG}$.

- Simplifions la somme : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$.

Soit K le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(C;-1)$ (car $2-1\neq 0$), donc : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MK}$.

On a : $M \in E_5 \Leftrightarrow \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \| \geq \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \|$

$\Leftrightarrow \| -\overrightarrow{MG} \| \geq \| \overrightarrow{MK} \|$

$\Leftrightarrow MG \geq MK$

Donc E_5 est le demi-plan fermé

Exercice 7

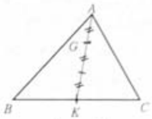


figure 1

Dans cette figure, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$, donc $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$,

c'est-à-dire G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(K;1)$.

On a K est le milieu du segment $[BC]$, donc K est le barycentre des points $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{1}{2}\right)$ (car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$).

D'où G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{1}{2}\right)$.

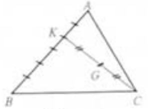


figure 2

Dans cette figure, on a : K est le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;2)$ et on a G est le milieu du segment $[KC]$, donc G est le barycentre des points pondérés $(K;6)$ et $(C;6)$, d'où G est le barycentre des points pondérés $(A;4)$, $(B;2)$ et $(C;6)$.

C'est-à-dire G est le barycentre de $(A;2)$, $(B;1)$ et $(C;3)$.

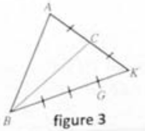


figure 3

Dans cette figure, on a : G est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(K;3)$ et K est le barycentre des points pondérés $(A;-2)$ et $(C;4)$ (On peut utiliser la relation : $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$).

Déterminons un réel k tel que K est le barycentre des points pondérés $(A;-2k)$ et $(C;4k)$ et $-2k+4k=3$.

On a : $-2k+4k=3 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$.

Donc K est le barycentre des points pondérés $(A;-3)$ et $(C;6)$.

D'où et d'après l'associativité du barycentre, on a G est le barycentre des points pondérés $(A;-3)$, $(B;1)$ et $(C;6)$.

Exercice 8

On a K est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$ et H est le barycentre des points $(C;1)$ et $(D;2)$.

Puisque G est le milieu du segment $[HK]$ alors G est le barycentre des points $(H;3)$ et $(K;3)$.

Donc G est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$, $(C;1)$ et $(D;2)$.

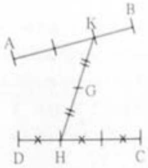


figure 1

On a K est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;1)$ et H est le barycentre des points $(C;3)$ et $(D;2)$ et G est le barycentre des points $(K;2)$ et $(H;4)$ (1)

- Déterminons le réel k tel que : K soit le barycentre des points pondérés $(A;2k)$ et $(B;k)$ avec $2k+k=2$.

On a : $2k+k=2 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$.

Donc K est aussi barycentre des points pondérés $\left(A;\frac{4}{3}\right)$ et $\left(B;\frac{2}{3}\right)$ (2)

(on a : $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$).

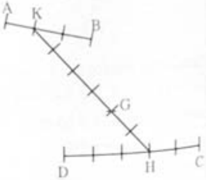


figure 2

- Déterminons le réel h tel que : H soit le barycentre des points pondérés $(C;3h)$ et $(D;2h)$ avec $3h+2h=4$.

On a : $3h + 2h = 4 \Leftrightarrow 5h = 4$

$$\Leftrightarrow h = \frac{4}{5}$$

Donc H est le barycentre des points pondérés $\left(C; \frac{12}{5}\right)$ et $\left(D; \frac{8}{5}\right)$ (3)

(on a : $\frac{12}{5} + \frac{8}{5} = 4$).

De (1), (2) et (3), on déduit que le point G est le barycentre des points pondérés $\left(A; \frac{4}{3}\right)$, $\left(B; \frac{2}{3}\right)$, $\left(C; \frac{12}{5}\right)$ et $\left(D; \frac{8}{5}\right)$.

Exercice 9

1) Déterminons les coordonnées du point G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-3)$ et $(C;1)$

On a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A - 3x_B + x_C}{1+(-3)+1} = \dfrac{1+9+2}{-1} = -12 \\ y_G = \dfrac{y_A - 3y_B + y_C}{1+(-3)+1} = \dfrac{2-6+4}{-1} = 0 \end{cases}$

Donc : $G(-12;0)$.

2) **a-** Vérifions que le point G_m existe pour tout m de $\mathbb{R}$.

G_m existe si et seulement si la somme des coefficients est non nulle.

On a : $(3m+1) + (-2m-3) + (-m+3) = 1$.

Donc G_m existe quel que soit la valeur de m.

b- Déterminons les coordonnées du point G_m.

On : $\begin{cases} x_G = \dfrac{(3m+1)x_A + (-2m-3)x_B + (-m+3)x_C}{(3m+1)+(-2m-3)+(-m+3)} \\ y_G = \dfrac{(3m+1)y_A + (-2m-3)y_B + (-m+3)y_C}{(3m+1)+(-2m-3)+(-m+3)} \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x_G = (3m+1) - 3(-2m-3) + 2(-m+3) \\ y_G = 2(3m+1) + 2(-2m-3) + 4(-m+3) \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x_G = 7m + 16 \\ y_G = -2m + 8 \end{cases}$

D'où : $G_m(7m+16; -2m+8)$.

c- Déduisons l'ensemble des points G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

On a : $\begin{cases} x_G = 7m + 16 \\ y_G = -2m + 8 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} 2x_G = 14m + 32 \\ 7y_G = -14m + 56 \end{cases}$

donc : $2x_G + 7y_G - 88 = 0$.

D'où l'ensemble des points G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ est la droite d'équation : $2x+7y-88=0$.

Exercice 10

1) Montrons que $T(G)=G$

On pose $T(G)=G'$

On a: $\overrightarrow{GG'}=7\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}$

Puisque le point G est le barycentre des points pondérés $(A;7)$, $(B;-2)$ et $(C;-1)$ alors on a:

$7\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Donc: $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ c'est-à-dire $G'=G$

D'où: $T(G)=G$

2) Écrivons $\overrightarrow{GM'}$ en fonction de $\overrightarrow{GM}$

Puisque G est le barycentre des points pondérés $(A;7)$; $(B;-2)$ et $(C;-1)$ alors d'après la propriété caratéristique du barycentre on a:

$4\overrightarrow{MG}=7\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

Donc: $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=4\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=-3\overrightarrow{GM}$

- Nature de la transformation T :

On a: $(\forall M\in P)$; $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=-3\overrightarrow{GM}$ signifie que la transformation T est l'homothétie de centre G et de rapport -3.

Exercice 11

Montrons que T est une symétrie centrale.

Soit G le barycentre des points pondérés $(E;4)$, $(F,-1)$ et $(H;-1)$.

Pour tout point M du plan, on a: $4\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MG}$.

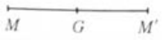
Donc: $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MH}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow$ (G est le milieu du segment $[MM']$)



Puisque le point G est fixe (ne dépend pas de M), alors la transformation T est la symétrie centrale de centre G.

Exercice 12

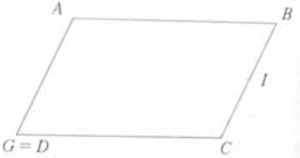
1) Construction du point G dans le cas où $m = 4$

On a G est le barycentre des points $(A;4)$, $(B;-4)$ et $(C;4)$

Donc: $\overrightarrow{AG} = \frac{-4}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{4}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

Puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ est un parallélogramme alors

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD}$ d'où: $G = D$



2) a- Écrivons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et m.

On a G est le barycentre des points $(A;4)$, $(B;-m)$ et $(C;m)$

Donc: $\overrightarrow{AG} = \frac{-m}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

D'où: $\overrightarrow{AG} = \frac{m}{4}\overrightarrow{BC}$

b- Déterminons m pour que G soit le milieu du segment $[AD]$.

On a: $\overrightarrow{AG} = \frac{m}{4}\overrightarrow{BC}$ et puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ alors $\overrightarrow{AG} = \frac{m}{4}\overrightarrow{AD}$.

Donc: (G est le milieu du segment $[AD]$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

D'où: G est le milieu du segment $[AD]$ si et seulement $m = 2$.

3) Montrons que les points I, H et K sont alignés.

On a: K est le barycentre des points $(A;4)$ et $(C;m)$ et

H est le barycentre des points $(A;4)$ et $(B;-m)$.

C'est-à-dire H est aussi barycentre des points $(A;-4)$ et (B,m).

- Si $m = 0$ alors $A = H$ et $A = K$ donc $H = K$ d'où

Les points I, H, K sont alignés (car deux points sont toujours alignés)

- Si $m \neq 0$ alors I est le barycentre des points (B,m) et $(C;m)$

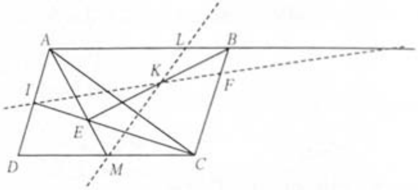
et donc I est le barycentre des points: $\underbrace{(A;4)\ et\ (C;m)}_{(K;4+m)}$ et $\underbrace{(A;-4)\ et\ (B;m)}_{(4;m-4)}$

D'où I est le barycentre des points $(K;4+m)$ et $(H;4-m)$

(car $4+m\neq 0$ et $4-m\neq 0$), par suite les points I,H et K sont alignés.
En résumé, les points I,H et K sont alignés pour tout m de $\mathbb{R}\setminus\{-4;4\}$.

Exercice 13

1) Montrons que K est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;3)$, $(C;1)$ et $(D;1)$.



On a: E est le centre de gravité du triangle ACD donc E est le barycentre des points $(A;1)$, $(C;1)$ et $(D;1)$

On a: K est le milieu du segment $[BE]$ donc K est le barycentre des points $(B;3)$ et $(E;3)$

D'où K est le barycentre des points $(A;1)$, $(C;1)$, $(D;1)$ et $(B;3)$.

2) Montrons que les points I,K et F sont alignés.

On a: $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BF}$ (car $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$)

D'où: $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}-4\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ c'est-à-dire: $\overrightarrow{FC}+3\overrightarrow{FB}=\vec{0}$.

Donc F est le barycentre des points $(C;1)$ et $(B;3)$.

Puisque I est le barycentre des points $(A;1)$ et $(D;1)$ et K est le barycentre des points $(A;1)$, $(D;1)$, $(C;1)$ et $(B;3)$ alors K est le barycentre des points $(I;2)$ et $(F;4)$

donc les points I,K et F sont alignés.

3) Montrons que les points L,K et M sont alingés.

On a K est le barycentre des points $(A;1)$, $(C;1)$, $(D;1)$ et $(B;3)$

Puisque M est le milieu du segment $[CD]$ alors M est le barycentre des points $(C;1)$ et $(D;1)$ et on a L est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;3)$ donc K est le barycentre des points $(M;2)$ et $(L;4)$ (D'après l'associativité du barycentre), d'où les points K,L et M sont alignés.

Exercice 14

1) Vérifions que Q est le barycentre des points $(A;3)$ et $(C;1)$

On a: $4\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{1+3}\overrightarrow{AC}$

D'où Q est le barycentre des points $(A;3)$ et $(C;1)$.

On peut aussi utiliser la relation de Chasles et la définition du barycentre: $4\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\Longrightarrow 3\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$

2) Déduisons que les points B,G et Q sont alignés.

On a G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;1)$ et $(C;1)$ et on a Q est le barycentre des points $(A;3)$ et $(C;1)$ donc d'après l'associativité du barycentre, on a: G est le barycentre des points $(B;1)$ et $(Q;4)$ d'où: $G\in(BQ)$.

Par suite les points B,G et Q sont alignés.

3) a- Montrons que: $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Rappel: La projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

On considère la projection p sur la droite (AB), parallélement à la droite (BC).

On a: $p(A)=A$, $p(C)=B$ et $p(Q)=R$ et $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et la projection p conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs donc $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Remarque: On peut utiliser le théoréme de Thalès.

b- Déduisons que: $G\in(CR)$.

On a: $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc: $4\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{RB}=\vec{0}$

C'est-à-dire: $3\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BR}=\vec{0}$.

D'où R est le barycentre des points $(A;3)$ et $(B;1)$.

Puisque G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;1)$ et $(C;1)$ alors G est le barycentre des points $(R;4)$ et $(C;1)$ d'après l'associativité du barycentre. D'où $G\in(CR)$.

4) Montrons les droites (CR), (BQ) et (AI) sont concourantes.

On a: $G\in(BQ)$ (d'après la question 2) et on a $G\in(CR)$ (d'après la question 3) b-), il suffit de montrer que: $G\in(AI)$.

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$, alors I est le barycentre $(B;1)$ et $(C;1)$ et on a G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;1)$ et $(C;1)$ donc G est le barycentre des points $(A;3)$ et $(I;2)$ (d'après l'associativité du barycentre).

D'où: $G \in (AI)$ et par suite les droites (AI), (CR) et (BQ) sont concourantes au point G.

Exercice 15

1) Montrons que I est le barycentre des points B et C

On a: $4\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ donc $4\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

C'est-à-dire: $3\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ d'où I est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$.

2) Montrons que J est le barycentre des points A et C.

On a: $4\overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CA}$ donc $4\overrightarrow{CJ} - 3\overrightarrow{CJ} - 3\overrightarrow{JA} = \vec{0}$.

C'est-à-dire: $\overrightarrow{CJ} + 3\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$ d'où J est le barycentre des points pondérés $(C;1)$ et $(A;3)$.

3) Montrons que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

On a: G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;1)$.

Puisque I est le barycentre des points $(C;1)$ et $(B;3)$ alors G est le barycentre des points $(A;3)$ et $(I;4)$,

donc $G \in (AI)$ (1).

D'autre part, on a J est le barycentre des points $(C;1)$ et $(A;3)$.

Donc G est le barycentre $(B;3)$ et $(J;4)$, donc $G \in (BJ)$ (2)

• On a K est le milieu du segment $[AB]$ donc K est le barycentre des points $(A;3)$ et $(B;3)$ et puisque G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;1)$ alors G est le barycentre des points $(K;6)$ et $(C;1)$ donc $G \in (CK)$ (3).

D'où: De (1), (2) et (3), on déduit que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes au point G.

4) Montrons que les droites (IJ), (CK) et (AL) sont concourantes.

- On a: L est le barycentre des points $(B;3)$ et $(C;2)$ et H est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;2)$ donc H est le barycentre des points $(A;3)$ et $(L;5)$ d'où $H \in (AL)$ (4)

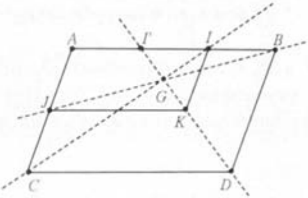
- On a: K est le barycentre des points $(A;3)$ et $(B;3)$ et H est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;2)$ donc H est le barycentre des points $(K;6)$ et $(C;2)$ d'où $H \in (CK)$ (5).

- On a: I est le barycentre des points $(B;3)$ et $(C;1)$ et J est le barycentre des points $(A;3)$ et $(C;1)$.

Puisque H est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$ et $(C;2)$ alors H est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;3)$, $(C;1)$ et $(C;1)$ donc H est le barycentre des points $(J;4)$ et $(I;4)$ d'où $H \in (IJ)$ (6).

De (4), (5) et (6) on déduit que les droites (AL) , (CK) et (IJ) sont concourantes au point H .

Exercice 16



1) Montrons que les droites (BJ) et (CI) se coupent en G.

- On a G est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$.

Puisque J est le milieu du segment $[AC]$ alors J est le barycentre des points $(A;1)$ et $(C;1)$, donc d'après l'associativité du barycentre , on a: G est le barycentre des points $(J;2)$ et $(B;2)$, d'où $G \in (BJ)$ (1).

- On a: $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc: $3\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})$.

C'est-à-dire: $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$

d'où I est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$.

Puisque G est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;1)$,

alors G est le barycentre de $(I;3)$ et $(C;1)$ donc $G \in (CI)$ (2).

De (1) et (2) , on déduit que les droites (BJ) et (CI) se coupent au point G.

2) **a-** Montrons que le point D est le barycentre des points A, B et C affectés à des coefficients à déterminer.

On a: $ABDC$ est un parallélogramme , donc: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}$ d'où: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Puisque: $1 + 1 - 1 \neq 0$ alors D est le barycentre des points $(A;-1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$.

b- Montrons que le point K est le barycentre des points A, B et C affectés à des coefficients à déterminer.

On a: $AIKJ$ est un parallélogramme donc: $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{JA}$

d'où: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JA}$

Puisque: $\overrightarrow{JA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

donc: $6\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CA}$

C'est-à-dire: $6\overrightarrow{KA} + 4\overrightarrow{AK} + 4\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{CK} + 3\overrightarrow{KA}$

d'où: $\overrightarrow{AK} - 4\overrightarrow{BK} - 3\overrightarrow{CK} = \vec{0}$

Puisque: $1-4-3 \neq 0$ alors K est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;-4)$ et $(C;-3)$.

c- Écrivons $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

- On a: K est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;-4)$ et $(C;-3)$

donc, d'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout point M du plan:

$\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (1-4-3)\overrightarrow{MK}$

En remplaçant M par G, on obtient:

$\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = -6\overrightarrow{GK}$

Donc: $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

- On a D est le barycentre des points $(A;-1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre, on a pour tout point M du plan:

$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$

En remplaçant M par G, on obtient : $\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

d- Montrons que les droites (CI), (BJ) et (DK) sont concourantes.

D'après la question 1), on a les droites (CI) et (BJ) sont concourantes au point G.

Il suffit de montrer que $G \in (DK)$

On a: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

et on a: $\begin{cases} 6\overrightarrow{GK} = -\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} \\ -2\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} \end{cases}$

En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient:

$6\overrightarrow{GK} - 2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc: $\overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GK}$ c'est-à-dire: $G \in (DK)$

D'où les droites (CI), (BJ) et (DK) sont concourantes au point G.

3) Montrons que les points G, D et I' sont alignés.

Puisque G est le barycentre des points:

$$(A;1) \qquad ; \qquad (B;2) \qquad \text{et} \quad (C;1)$$

Alors G est le barycentre des points:

$$(A;-1) \quad (A;2) \quad (B;1) \quad (B;1) \quad \text{et} \quad (C;1)$$

Donc G est le barycentre des points:

$$\underbrace{(A;-1) \text{ et } (B;1) \text{ et } (C;1)}_{(D;1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{(A;2) \text{ et } (B;1)}_{(I';3)}$$

D'où G est le barycentre des points pondérés $(D;1)$ et $(I';3)$

c'est-à-dire $G \in (DI')$, par suite les points G, D et I' sont alignés.

Exercice 17

1) Montrons que le point B est le barycentre des points A et E affectés à des coefficients à déterminer.

On a: $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{BE} + k\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Puisque $k > 0$ alors $1 + k \neq 0$, donc B est le barycentre des points $(E;1)$ et $(A;k)$.

2) a- Montrons que le point I est le milieu du segment $[AH]$.

On a H est le symétrique du point D par rapport au point C

donc: $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DC}$ et puisque $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CH}$

donc $ABHC$ est un parallélogramme, d'où ses diagonales $[AH]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

On a I est le milieu de $[BC]$, donc I est le milieu de $[AH]$.

b- Déduisons que le point F est le centre de gravité du triangle ADH.

On a: I est le milieu de $[AH]$ et C est le milieu de $[DH]$ donc (DI) et (AC) sont des médianes du triangle ADH et puisqu'elles se coupent au point F, alors F est le centre de gravité du triangle ADH.

3) a- Montrons que G est le barycentre des points $(A;k)$, $(E;1)$, $(D;k)$ et $(H;k)$.

Soit G' le barycentre des points $(A;k)$, $(E;1)$, $(D;k)$ et $(H;k)$

(G' existe car: $k+1+k+k \neq 0$).

Puisque B est le barycentre des points $(E;1)$ et $(B;k)$ et C est le barycentre des points $(D;k)$ et $(H;k)$ (car C est le milieu de $[DH]$) alors G' est le barycentre des points $(B;1+k)$ et $(C;2k)$ ⊛ (D'après l'associativité du barycentre) donc $G' \in (BC)$ (1)

D'autre part , on a F est le barycentre des points $(A;k)$; $(D;k)$ et $(H;k)$ (car F est le centre de gravité du triangle ADH).

Puisque G' est le barycentre des points $(A;k)$, $(D;k)$; $(H;k)$ et $(E;1)$ alors G' est le barycentre des points $(F;3k)$ et $(E;1)$ donc $G' \in (EF)$ (2).

De (1) et (2) on déduit que: $G' = G$ car G est le point d'intersection des droites (BC) et (EF), donc G est le barycentre des points $(A;k)$, $(E;1)$, $(D;k)$ et $(H;k)$.

b- Montrons que le point G est le barycentre des points B et C affectés à des coefficients à déterminer.

D'après la donnée ⊛ , et $G' = G$, on déduit que G est le barycentre des points $(B;1+k)$ et $(C;2k)$

c- Déduisons en fonction de k la valeur de $\frac{GC}{GB}$.

On a G est le barycentre des points $(B;1+k)$ et $(C;2k)$

donc: $2k\overrightarrow{GC} + (1+k)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

c'est-à-dire: $\overrightarrow{GC} = -\frac{(1+k)}{2k}\overrightarrow{GB}$

D'où: $GC = \frac{1+k}{2k}GB$ (car $\frac{1+k}{2k} > 0$)

Par suite : $\frac{GC}{GB} = \frac{1+k}{2k}$

Exercice 18

1) **a-** Montrons que P est le barycentre des points A et B affectés à des coeffecients à déterminer.

On a: $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

d'où: $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} = \vec{0}$ (En utilisant la relation de chasles).

Donc P est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$

b- Montrons que R est le barycentre des points A et D affectés à des coefficients à déterminer.

On a: $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ donc R est le barycentre des points $(A;1)$ et $(D;3)$.

2) Montrons que I est le barycentre des points A , B et D affectés à des coefficients à déterminer.

On a I est le point d'intersection des droites (BR) et (DP).

On a: P est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$ et R est le barycentre des points $(A;1)$ et $(D;3)$

Considérons le point G , le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(D;3)$.

D'après l'associativité du barycentre , on a:

- G est le barycentre des points $(P;3)$ et $(D;3)$ donc $G\in(PD)$

et - G est le baycentre des points $(R;4)$ et $(B;2)$ donc $G\in(BR)$

Cela signifie que G est le point d'intersection des droites (PD) et (BR) donc $G=I$.

D'où I est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(D;3)$.

3) Montrons que le point Q est le barycentre des points $(A;-5)$, $(B;8)$ et $(D;9)$.

On a: $PQRA$ est un parallélogramme donc: $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA}$

c'est-à-dire: $\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QA}=\vec{0}$

Cela signifie que Q est le barycentre des points $(R,1)$, $(P;1)$ et $(A;-1)$

donc Q est le barycentre des points $(A;-1)$, $\left(A;\frac{1}{3}\right)$, $\left(B;\frac{2}{3}\right)$, $\left(A;\frac{1}{4}\right)$ et $\left(D;\frac{3}{4}\right)$.

En multipliant les coefficients par 12, on obtient :

Q est le barycentre des points $(A;-12)$, $(A;4)$, $(B;8)$, $(A;3)$ et $(D;9)$.

D'où Q est le barycentre des points $(A;-5)$, $(B;8)$ et $(D;9)$.

4) • Montrons que Q est le milieu du segment $[CI]$.

Puisque $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ (car $ABCD$ est un parallélogramme) alors C est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(D;-1)$ c'est-à-dire C est le barycentre des points $(A;6)$, $(B;-6)$ et $(D;-6)$

Puisque I est le barycentre des points $(A;1)$, $(B;2)$ et $(D;3)$ et Q est le barycentre des points $(A;-5)$, $(B;8)$ et $(D;9)$ alors Q est le barycentre des points $(A;-6)$, $(A;1)$, $(B;6)$, $(B;2)$, $(D;6)$, et $(D;3)$

c'est-à-dire Q est le barycentre des points $(I;6)$ et $(C;6)$ donc Q est le milieu du segment $[CI]$.

* Déduction: - On a Q est le milieu du segment $[CI]$ donc $I \in (CQ)$ et I est le point d'intersection des droites (BR) et (DP) , donc les droites (CQ) et (BR) et (DP) sont concourantes en I .

Exercice 19

1) Déterminons (Δ)

On a G_m est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;m)$ et $(C;-m)$,

donc: $\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{m}{2}\overrightarrow{AC}$

donc: $\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{2}\overrightarrow{CB}$

Puisque $\frac{m}{2}$ prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des points G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ est

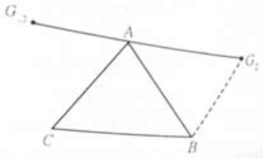
la droite (Δ) qui passe par le point A et parallèle à la droite (BC).

2) a- Construisons les points G_2 et G_{-2}

- Cas où $m = 2$, G_2 est le barycentre des points $(A;2)$, $(B;2)$ et $(C;-2)$, donc $\overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{CB}$

- Cas où $m = -2$: $\overrightarrow{AG_{-2}} = -\overrightarrow{CB}$

b- On a: $m \neq 2$ et $m \neq -2$ et $G_m \in (\Delta) - \{A, G_2, G_{-2}\}$



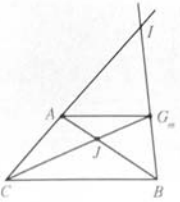
Montrons que (BG_m) coupe (AC) en un point I et la droite (CG_m) coupe (AB) en un point J .

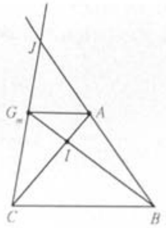
On a: $\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{2}\overrightarrow{CB}$ donc $(CB) /\!/ (AG_m)$

Puisque $m \neq 2$ et $m \neq -2$ alors $\left|\frac{m}{2}\right| \neq 1$ donc $AG_m \neq CB$ d'où (BG_m) et (AC) se coupent en un point I .

De même (CG_m) et (AB) se coupent en un point J .

(voir les deux figures)





3) On considère le repére $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

a- Déterminons les coordonnés des points I et J.

- On a: $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$
- I est le point d'intersection des droites (AC) et (BG_m)
- G_m est le barycentre des points $(A;2)$, $(B;m)$ et $(C;-m)$

donc : $\begin{cases} x_{G_m} = \dfrac{2x_A + mx_B - mx_C}{2} = -\dfrac{m}{2} \\ y_{G_m} = \dfrac{2y_A + my_B - my_C}{2} = -\dfrac{m}{2} \end{cases}$

d'où: $G_m\left(\frac{m}{2};\frac{m}{2}\right)$

- $I(x;y) \in (AC) \Longleftrightarrow x = 0$ ((AC) est l'axe des ordonnées donc $(AC): x = 0$)
- $I(x;y) \in (BG_m) \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BG_m}) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & \frac{m}{2}-1 \\ y-0 & -\frac{m}{2}-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{m}{2}(x-1) - y\left(\frac{m}{2}-1\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow mx + y(m-2) - m = 0$$

- $I(x;y) \in (AC) \cap (BG_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ mx + y(m-2) - m = 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{m}{m-2} \end{cases} (car\ m \neq 2)$$

Donc $I\left(0;\dfrac{m}{m-2}\right)$

- J est le point d'intersection de (AB) et (CG_m)

$J(x;y)\in(AB) \Longleftrightarrow y=0$ ((AB) est l'axe des abscisses donc (AB): $y=0$)

On a: $J(x;y)\in(CG_m) \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{CJ};\overrightarrow{CG}m)=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & \frac{m}{2}-0 \\ y-1 & -\frac{m}{2}-1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(-\frac{m}{2}-1\right)x-\frac{m}{2}(y-1)=0$$

$$\Longleftrightarrow (m+2)x+my=m$$

Donc: $J(x;y)\in(AB)\cap(CG_m) \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (m+2)x+my=m \end{cases}$

Donc $J\left(\frac{m}{m+2};0\right)$ (car $m\neq-2$)

b- Déduisons que les points O, I et J sont alignés

On a O est le milieu du segment $[BC]$ donc:

$$\begin{cases} x_0=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1}{2} \\ y0=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

On a: $\overrightarrow{OI}\left(-\frac{1}{2};\frac{m}{m-2}-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OJ}\left(\frac{m}{m+2}-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Donc: $\det(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{m}{m-2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{m+2}-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{m^2}{m^2-4}-\frac{m}{2(m-2)}-\frac{m}{2(m+2)}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{2m^2-m(m+2)-m(m-2)}{2(m^2-4)}=\frac{-2m+2m}{2(m^2-4)}=0$$

D'où $\det(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})=0$ par suite les points O, I et J sont alignés.

c- Déterminons a et b pour que le point O soit le barycentre des points pondérés $(I;a)$ et $(J;b)$

On a: O est le barycentre des points $(I;a)$ et $(J;b)$ (avec $a+b\neq0$)

Donc $\begin{cases} x_0=\frac{ax_I+bx_J}{a+b} \\ y_0=\frac{ay_I+by_J}{a+b} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \frac{a\times0+b\left(\frac{m}{m+2}\right)}{a+b}=\frac{1}{2} \\ \frac{a\left(\frac{m}{m-2}\right)+b\times0}{a+b}=\frac{1}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire: $\begin{cases} \dfrac{2bm}{m+2} = a+b \\ \dfrac{2am}{m-2} = a+b \end{cases}$

D'où: $\dfrac{2bm}{m+2} = \dfrac{2am}{m-2}$

Par suite: $b = \left(\dfrac{m+2}{m-2}\right)a$ (car $m \neq 2$ et $m \neq -2$

Donc O est le barycentre des points pondérés $(I;a)$ et $\left(J; \dfrac{m+2}{m-2}a\right)$

7 Leçon

Produit scalaire dans le plan

Maxi.

Résumé

1 Expression analytique du produit scalaire - Distance entre deux points - Norme d'un vecteur :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan; $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
- Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
(appelée expression analytique du produit scalaire).
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
- La distance entre deux points A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2 Expression de $\cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ et $\sin(\overline{\vec{u};\vec{v}})$:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, on a :

$$\cos(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad ; \quad \sin(\overline{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

3 Inégalité de Cauchy Schwarz :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- Il y a égalité dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

4 Inégalité triangulaire :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Il y a égalité dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercices

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ dans chacun des cas suivants :

a- $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(4;-2)$

b- $\vec{u}(5;0)$ et $\vec{v}(3;4)$

c- $\vec{u}(\sqrt{2}+1;\sqrt{3}-2)$ et $\vec{v}(\sqrt{3}+2;\sqrt{2}-1)$

2) Calculer AB ; AC et BC, puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes dans chacun des cas suivants :

a- $A(-2;1)$, $B(3;0)$ et $C(-1;2)$

b- $A(1;1)$, $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $C(6;-4)$

Exercice 2

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé direct.

On considère les vecteurs et les points suivants :

$\vec{u}(3;0)$, $\vec{v}=-4\vec{i}+4\vec{j}$, $A(1;1)$, $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $C(6;-4)$.

1) Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ et en déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

2) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit a ; b ; c et d des nombres réels strictement positifs.

On considère les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{a};\sqrt{b})$; $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$; $\vec{w}(a;b)$; $\vec{x}(d-b;a-c)$.

1) En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, montrer que :

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$$

2) En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz avec $\vec{w}$ et $\vec{x}$.

Montrer que : $\dfrac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}\leq(a-c)^2+(b-d)^2$

3) En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que :

$$\sqrt{(a+\sqrt{a})^2+(b+\sqrt{b})^2}\leq\sqrt{a+b}+\sqrt{a^2+b^2}$$

Exercice 4

On considère les points : $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Calculer $\vec{i}.\overrightarrow{OA}$.

3) En déduire que : $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 5

On considère les points : $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(3;4)$ et $D(1;2)$ et soit I le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

2) Calculer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}}\right)$

Exercice 1

1) a- $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(4;-2)$:

• $\vec{u}.\vec{v}=(-1)\times 4+3\times(-2)=-10$ • $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

• $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

b- $\vec{u}(5;0)$ et $\vec{v}(3;4)$:

• $\vec{u}.\vec{v}=15$ • $\|\vec{u}\|=5$ • $\|\vec{v}\|=\sqrt{9+16}=5$

c- $\vec{u}(\sqrt{2}+1;\sqrt{3}-2)$ et $\vec{v}(\sqrt{3}+2;\sqrt{2}-1)$:

• $\vec{u}.\vec{v}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)(\sqrt{2}-1)$
$=\sqrt{6}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2=4+2\sqrt{6}$

• $\|\vec{u}\|=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{10+2\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$

• $\|\vec{v}\|=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{10-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$

2) a- $A(-2;1)$, $B(3;0)$ et $C(-1;2)$:

On a : $\overrightarrow{AB}(5;-1)$; $\overrightarrow{AC}(1;1)$; $\overrightarrow{BC}(-4;2)$

Donc : • $AB=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

• $AC=\sqrt{2}$ et $BC=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux façons :

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(5\times 1)+(-1)\times 1=4$

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}[AB^2+AC^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2]$

$=\frac{1}{2}[AB^2+AC^2-BC^2]$

$=\frac{1}{2}[26+2-20]=4$

b- $A(1;1)$, $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $C(6;-4)$:

On a : $\overrightarrow{AB}(1+\sqrt{3};\sqrt{3}-1)$; $\overrightarrow{AC}(5;-5)$; $\overrightarrow{BC}(4-\sqrt{3};-4-\sqrt{3})$

Donc : • $AB=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

• $AC=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$

• $BC=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2+(4+\sqrt{3})^2}=\sqrt{38}$

Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux façons :

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(1+\sqrt{3})\times 5+(\sqrt{3}-1)\times(-5)=10$

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}[AB^2+AC^2-BC^2]=\frac{1}{2}[8+50-38]=10$

Exercice 2

1) • Calculons $\cos(\vec{u};\vec{v})$:

On a : $\vec{u}(3;0)$ et $\vec{v}(-4;4)$, donc : $\vec{u}.\vec{v} = 3\times(-4)+0\times 4 = -12$

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2} = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2+(4)^2} = 4\sqrt{2}$

D'où : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{-12}{3\times 4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Calculons $\sin(\vec{u};\vec{v})$:

On a : $\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$

Donc : $\sin(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{12}{3\times 4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Déduction :

On a : $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et puisque : $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Alors : $(\vec{u};\vec{v}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

2) Déterminons une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$:

On a : $A(1;1)$; $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $C(6;-4)$

Donc : $\overrightarrow{AB}(1+\sqrt{3};\sqrt{3}-1)$ et $\overrightarrow{AC}(5;-5)$

On a : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$

et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (1+\sqrt{3})\times 5 + (\sqrt{3}-1)\times(-5) = 10$

et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 5 \\ \sqrt{3}-1 & -5 \end{vmatrix} = -5-5\sqrt{3}-5\sqrt{3}+5 = -10\sqrt{3}$

Donc : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{10}{2\sqrt{2}\times 5\times\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB\times AC} = \dfrac{-10\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\times 5\times\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Puisque $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors : $-\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

Exercice 3

On considère les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{a};\sqrt{b})$, $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ et $\vec{w}(a;b)$ dans le plan vectoriel muni d'une base orthonormé $(\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrons que $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{*+})^2;(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$:

On a : $\|\vec{u}\|=\sqrt{a+b}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ et $|\vec{u}.\vec{v}|=\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{1}{\sqrt{b}}=2$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a : $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

C'est-à-dire : $\sqrt{a+b}.\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geq 2$

D'où : $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ pour tous $a>0$ et $b>0$.

2) Montrons que
$\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R};\frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}\leq(a-c)^2+(b-d)^2$:

On considère les vecteurs $\vec{w}(a;b)$ et $\vec{x}(d-b;a-c)$.

On a : $|\vec{x}.\vec{w}|=|a(d-b)+b(a-c)|=|ad-bc|$

et $\|\vec{w}\|.\|\vec{x}\|=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

Donc : d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$|\vec{x}.\vec{w}|\leq\|\vec{w}\|.\|\vec{x}\|\Rightarrow|ad-bc|\leq\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\Rightarrow(ad-bc)^2\leq(a^2+b^2)((a-c)^2+(b-d)^2)$

Puisque : $a\neq 0$ et $b\neq 0$ alors : $a^2+b^2\neq 0$, donc :

$\frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}\leq(a-c)^2+(b-d)^2$

3) En appliquant l'inégalité triangulaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$, on a :

$\|\vec{w}+\vec{u}\|\leq\|\vec{w}\|+\|\vec{u}\|$

Puisque : $\vec{w}+\vec{u}(a+\sqrt{a};b+\sqrt{b})$ alors : $\|\vec{w}+\vec{u}\|=\sqrt{(a+\sqrt{a})^2+(b+\sqrt{b})^2}$

et on a : $\|\vec{u}\|=\sqrt{a+b}$ et $\|\vec{w}\|=\sqrt{a^2+b^2}$

Donc : $\sqrt{(a+\sqrt{a})^2+(b+\sqrt{b})^2}\leq\sqrt{a+b}+\sqrt{a^2+b^2}$

Exercice 4

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) On a : $\overrightarrow{OA}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc : $OA=\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$ et $OB=\|\overrightarrow{OB}\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ signifie que $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

On a : $OA = OB$ et $(OA) \perp (OB)$, donc le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

2) Calculons $\vec{i}.\overrightarrow{OA}$:

On a : $\overrightarrow{OA}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{i}(1;0)$

Donc : $\overrightarrow{OA}.\vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Déduisons que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$:

On a : $\cos\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\vec{i}.\overrightarrow{OA}}{\|\vec{i}\|\times\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (car $\|\vec{i}\| = \|\overrightarrow{OA}\| = 1$)

et $\sin\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\det\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)}{\|\vec{i}\|\times\|\overrightarrow{OA}\|} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

Puisque : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ alors : $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 5

1) Montrons que $ABCD$ est un rectangle en utilisant deux méthodes:

Tout d'abord, il faut montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

On a : $\overrightarrow{AB}(2;2)$ et $\overrightarrow{DC}(2;2)$.

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où : $ABCD$ est un parallélogramme (1).

Méthode 1: Montrons que : $(AB) \perp (AD)$

On a : $\overrightarrow{AB}(2;2)$ et $\overrightarrow{AD}(-1;1)$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 2\times(-1) + 2\times(1) = 0$

D'où : $(AB) \perp (AD)$ (2)

Par suite de (1) et (2), on conclut que $ABCD$ est un rectangle.

Méthode 2: Montrons que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur.

On a : $\overrightarrow{AC}(1;3)$ donc : $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

et $\overrightarrow{BD}(-3;-1)$ donc : $BD = \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

D'où : $AC = BD$ (3)

Par suite de (1) et (3), on conclut que $ABCD$ est un rectangle.

2) Calculons $\cos\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)$:

On a : $\overrightarrow{AC}(1;3)$ et $\overrightarrow{DB}(3;1)$ et I milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$

Donc : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(3+3) = \frac{3}{2}$

et on a : $IB = \frac{DB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ et $IC = \frac{\sqrt{10}}{2}$

D'où : $\cos(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}) = \frac{\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}}{IB \times IC} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

5 Vecteur normal à une droite :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

- On appelle vecteur normal à une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à un vecteur directeur de (D).
- Si (D) est une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$, alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D), et $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (D).
- Si (Δ) est une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors $(\Delta) = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\}$.

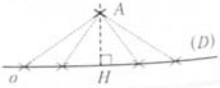
6 Distance d'un point à une droite :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit (D) une droite du plan et $A(x_A;y_A)$ un point du plan.

- On appelle distance du point A à la droite (D), la plus petite distance entre le point A et tous les points de (D) notée $d(A;(D))$.
- La distance du point A à la droite (D) est la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur la droite (D) : $d(A;(D)) = AH$.
- Si (D) a pour équation $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$

Alors : $d(A;(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Exercices

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 6

1) Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a- $(D): 3x - 2y + 1 = 0$ b- $(D): -x + (\sqrt{3} - 1)y + \sqrt{2} = 0$

c- $(D): y=-\frac{5}{2}x+2$ d- $(D): x=-\sqrt{5}$

e- (D) passe par les points $A(2;-3)$ et $B(-1;5)$.

f- $(D): 3y=7$

2) Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$.

a- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n_1}$ normal à (Δ) dont les coordonnées sont négatives.

b- Déterminer le vecteur $\vec{n_2}$ normal à (Δ) de norme 2, colinéaire à $\vec{n_1}$ et de sens contraires.

Exercice 7

Déterminer une équation de la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a- (D) passe par le point $A(-4;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5;-2)$.

b- (D) passe par le point $A(-1;-2)$ et parallèle à la droite $(\Delta): x-3y+1=0$.

c- (D) passe par le point $A(2;-5)$ et perpendiculaire à la droite $(\Delta): -2x+5y-3=0$.

d- (D) est la médiatrice du segment $[AB]$, où $A(3;2)$ et $B(1;5)$.

e- (D) est la hauteur issue du point B du triangle ABC où : $A(4;1)$; $B(-3;7)$ et $C(-1;-5)$.

Exercice 8

Calculer la distance du point A à la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

a- $A(3;-1)$ et $(\Delta): 2x+y-5=0$

b- $A(-2;4)$ et $(\Delta): y=\frac{1}{3}x-1$

c- $A(\sqrt{2};3)$ et $(\Delta): y=-5$

d- $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ et $(\Delta): x=-\sqrt{2}$

e- $A(2;3)$ et $(\Delta)=(BC)$ avec $B(6;1)$ et $C(1;-5)$

Solutions

Exercice 6

1) a- On a : $(D): 3x-2y+1=0$

Donc : $\vec{n}(3;-2)$ est un vecteur normal à la droite (D).

b- On a : $(D): -x+(\sqrt{3}-1)y+\sqrt{2}=0$

Donc : $\vec{n}(-1;\sqrt{3}-1)$ est un vecteur normal à la droite (D).

c- On a : $(D): y=-\frac{5}{2}x+2$ c'est-à-dire : $5x+2y-4=0$

Donc : $\vec{n}(5;2)$ est un vecteur normal à la droite (D).

d- On a : $(D): x=-\sqrt{5}$ c'est-à-dire : $x+\sqrt{5}=0$

Donc : $\vec{n}(1;0)$ est un vecteur normal à la droite (D).

e- (D) passe par les points : $A(2;-3)$ et $B(-1;5)$, donc $\overrightarrow{AB}(-3;8)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

D'où : $\vec{n}(8;3)$ est un vecteur normal à la droite (D).

f- On a : $(D): 3y = 7$ c'est-à-dire : $3y - 7 = 0$

Donc : $\vec{n}(0;3)$ est un vecteur normal à la droite (D).

2) **a-** On a : (Δ) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(3;-4)$.

Donc : $\vec{n}(-4;-3)$ est un vecteur normal à la droite (Δ).

D'où le vecteur normal unitaire $\vec{n_1}$ à la droite (Δ) est : $\vec{n_1}\left(\frac{-4}{\|\vec{n}\|};\frac{-3}{\|\vec{n}\|}\right)$ c'est-à-dire : $\vec{n_1}\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$. ($\vec{w}$ est unitaire signifie que $\|\vec{w}\| = 1$)

b- Soit : $\vec{n_2}(x;y)$ le vecteur normal à la droite (Δ), de norme 2, colinéaire à (Δ) et de sens contraires.

On a :

$$\begin{cases} \|\vec{n_2}\| = 2 \\ (\exists\alpha \in \mathbb{R}^*)/\vec{n_2} = \alpha\vec{n_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ (x;y) = \left(-\frac{4}{5}\alpha;-\frac{3}{5}\alpha\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{16}{25}\alpha^2+\frac{9}{25}\alpha^2} = 2 \\ x = -\frac{4}{5}\alpha \\ y = -\frac{3}{5}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = 2 \\ x = -\frac{4}{5}\alpha \\ y = -\frac{3}{5}\alpha \end{cases}$$

Puisque : $\alpha < 0$ alors : $\alpha = -2$

Donc : $\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$

D'où : $\vec{n_2}\left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)$

Exercice

a- On a : (D) passe par le point $A(-4;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5;-2)$, donc une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $5x - 2y + c = 0$

On a : $A(-4;3) \in (D) \Leftrightarrow 5\times(-4) - 2\times(3) + c = 0 \Leftrightarrow c = 26$

Donc : $(D): 5x - 2y + 26 = 0$

b- On a : (D) passe par le point $A(-1;-2)$ et parallèle à la droite (Δ) d'équation : $x - 3y + 1 = 0$, donc une équation cartésienne de (D) s'écrit sous la forme : $x - 3y + c = 0$

On a : $A(-1;-2) \in (D) \Leftrightarrow -1 + 6 + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$

Donc : $(D): x - 3y - 5 = 0$

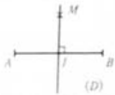
c- On a : (D) passe par le point $A(2;-5)$ et perpendiculaire à la droite

(Δ): $-2x+5y-3=0$, donc le vecteur directeur $\vec{u}(-5;-2)$ de la droite (Δ) est un vecteur normal à la dorme (D) d'où une équation cartésienne de (D) s'écrit sous forme : $-5x-2y+c=0$

On a : $A(2;-5)\in(D) \Leftrightarrow -10+10+c=0 \Leftrightarrow c=0$

Donc : (D): $-5x-2y=0$

d- On a : (D) est la médiatrice du segment $[AB]$, donc (D) passe par le milieu I du segment $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB) c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à la droite (D).



On a : $I\left(2;\frac{7}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-2;3)$

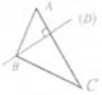
Soit $M(x;y)$ un point du plan,

on a : $\overrightarrow{IM}\left(x-2;y-\frac{7}{2}\right)$

Donc : $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow -2(x-2)+3\left(y-\frac{7}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -2x+3y-\frac{13}{2}=0$

Donc : (D): $2x-3y+\frac{13}{2}=0$

e- On a : (D) est la hauteur issue du point B, donc le vecteur $\overrightarrow{AC}(-5;-6)$ est un vecteur normal à la droite (D).



D'où une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $-5x-6y+c=0$

On a : $B(-3;7)\in(D) \Leftrightarrow 15-42+c=0 \Leftrightarrow c=27$

Donc : (D): $5x+6y-27=0$

Exercice 8

a- On a : $A(3;-1)$ et (Δ): $2x+y-5=0$

Donc : $d(A;(\Delta))=\frac{|2x_A+y_A-5|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{|6-1-5|}{\sqrt{5}}=0$

b- On a : $A(-2;4)$ et (Δ): $y=\frac{1}{3}x-1$ c'est-à-dire : $x-3y-3=0$

Donc : $d(A;(\Delta))=\frac{|-2-12-3|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}=\frac{|17|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{170}}{10}$

c- On a : $A(\sqrt{2};3)$ et (Δ): $y=-5$ c'est-à-dire: $y+5=0$

Donc : $d(A;(\Delta))=\frac{|3+5|}{\sqrt{(1)^2}}=8$

d) On a : $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ et (Δ): $x=-\sqrt{2}$ c'est-à-dire : $x+\sqrt{2}=0$

Donc : $d(A;(\Delta))=\frac{|1+\sqrt{2}|}{\sqrt{(1)^2}}=1+\sqrt{2}$

e- On a : $A(2;3)$ et $(\Delta)=(BC)$ avec $B(6;1)$ et $C(1;-5)$

Déterminons une équation cartésienne de la droite (BC).

On a : $\overrightarrow{BC}(-5;-6)$ est un vecteur directeur de la droite (BC), donc une équation de la droite (BC) s'écrit sous la forme : $-6x+5y+c=0$.

On a : $B(6;1)\in(BC) \Leftrightarrow -36+5+c=0 \Leftrightarrow c=31$

Donc : (BC): $6x-5y-31=0$

D'où : $d(A;(BC))=\dfrac{|6\times 2-5\times 3-31|}{\sqrt{(6)^2+(-5)^2}}=\dfrac{34}{\sqrt{61}}=\dfrac{34\sqrt{61}}{61}$

7 Équation cartésienne d'un cercle :

- Soit $\Omega(a;b)$ un point du plan et R un nombre réel strictement positif $(R>0)$.

- Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M=R$.

- Le cercle $(\mathscr{C})$ a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ qui s'écrit aussi : $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$

- Soit A et B deux points distincts du plan.

- Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

- Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ a pour équation :
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

8 Représentation paramétrique d'un cercle :

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.

Le système : $\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases}$; $\theta\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 9

Déterminer une équation du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1) $(\mathscr{C})$ est de centre $\Omega(-2;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) $(\mathscr{C})$ est de centre $\Omega(3;5)$ et passant par le point $I(1;2)$.

3) $(\mathscr{C})$ est de diamètre $[AB]$ où $A(3;-2)$ et $B(1;4)$.

Exercice 10

Déterminer l'ensemble E des points $M(x;y)$ qui verifient l'égalité dans chacun des cas suivants :

1) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

2) $x^2+y^2-6y+7=0$

3) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

4) $x^2+y^2+6x+2y+11=0$

Exercice 11

1) Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

a- $(\mathscr{C})$ a pour équation : $x^2+y^2-3x-2\sqrt{2}y-\frac{3}{4}=0$

b- $(\mathscr{C})$ a pour centre $I(-\sqrt{3};4)$ et passe par le point $J(2;3)$.

2) Déterminer l'ensemble E des points $M(x;y)$ qui vérifient le système dans chacun des cas suivants:

a- $\begin{cases} x=\sqrt{3}+3\cos\alpha \\ y=-\frac{1}{2}+3\sin\alpha \end{cases};\alpha\in\mathbb{R}$

b- $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=5+\sin\theta \end{cases};\theta\in\mathbb{R}$

Solutions

Exercice 9

Déterminons une équation du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1) $(\mathscr{C})$ est de centre $\Omega(-2;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$:

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$M(x;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{3}\Leftrightarrow \Omega M^2=3\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=3\Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y+2=0$

Donc : $x^2+y^2+4x-2y+2=0$ est une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.

2) $(\mathscr{C})$ est de centre $\Omega(3;5)$ et passant par le point $I(1;2)$:

Le rayon de $(\mathscr{C})$ est : $R=\Omega I=\sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

puisque $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega(3;5)$ et de rayon $r=\sqrt{13}$ alors $(\mathscr{C})$ a pour équation réduite $(x-3)^2+(y-5)^2=\sqrt{13}^2$

D'où $M(x;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+21=0$

Donc: $x^2+y^2-6x-10y+21=0$ est une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.

3) $(\mathscr{C})$ est de diamètre $[AB]$ où $A(3;-2)$ et $B(1;4)$:

Méthode 1: Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ a pour équation :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

C'est-à-dire : $(x-3)(x-1)+(y+2)(y-4)=0$

Donc : $x^2+y^2-4x-2y-5=0$ est une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.

Méthode 2: Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu du segment $[AB]$ c'est-à-dire $\Omega(2;1)$ et pour rayon :

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$$

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$M(x;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2-10=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-5=0$

Donc : $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-2y-5=0$

Exercice 10

Déterminons l'ensemble E des points $M(x;y)$ dans chacun des cas suivants :

1) Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y-2=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y-2=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2-1+(y+1)^2-1-2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4=(2)^2$$

Donc : E est le cercle de centre $\Omega_1(1;-1)$ et de rayon 2.

2) Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+7=0\Leftrightarrow(x-0)^2+(y-3)^2-9+7=0$$
$$\Leftrightarrow(x-0)^2+(y-3)^2=2=(\sqrt{2})^2$$

Donc : E est le cercle de centre $\Omega_2(0;3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3) Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y+13=0\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+4y+13=0$$
$$\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+13=0\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+13=0$$
$$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0\ et\ (y+2)^2=0\Leftrightarrow x=3\ et\ y=-2$$

Donc : $E=\{\Omega(3;-2)\}$

4) Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^{+2}$
$a+b=0\Leftrightarrow a=0\ et\ b=0$

$$M(x;y)\in E\Leftrightarrow x^2+y^2+6x+2y+11=0\Leftrightarrow x^2+6x+y^2+2y+11=0$$
$$\Leftrightarrow(x+3)^2-9+(y+1)^2-1+11=0\Leftrightarrow(x+3)^2+(y+1)^2=-1$$

La dernière égalité est impossible, donc : $E=\phi$

Exercice 11

1) Déterminons une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

a- Déterminons le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$:

On a :

$$M\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2\sqrt{2}y-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow x^2-3x+y^2-2\sqrt{2}y-\frac{3}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y-\sqrt{2})^2-2-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-\sqrt{2})^2=5=(\sqrt{5})^2$$

Donc : $(\mathscr{C})$ a pour centre le point $\Omega\left(\frac{3}{2};\sqrt{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

D'où : une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ est :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \sqrt{5}\cos\theta \\ y = \sqrt{2} + \sqrt{5}\sin\theta \end{cases} /\theta \in \mathbb{R}$$

b- $(\mathscr{C})$ a pour centre le point $I(-\sqrt{3};4)$ et a pour rayon :

$R = IJ = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Donc une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ est :

$$\begin{cases} x = -\sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos\theta \\ y = 4 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sin\theta \end{cases} /\theta \in \mathbb{R}$$

2) Déterminons l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a- Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x,y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + 3\cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2} + 3\sin\alpha \end{cases} /\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-\sqrt{3})^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 9(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 9 = (3)^2$$

Donc les points $M(x;y)$ décrivent le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega\left(\sqrt{3};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon 3.

La réciproque est vraie: Si $M(x,y) \in \mathscr{C}(\Omega,3)$ alors $M \in E$

b- Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 5 + \sin\theta \end{cases} /\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-0)^2 + (y-5)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 = (1)^2$$

Donc les points $M(x;y)$ décrivent le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(0;5)$ et de rayon 1.

9 Intérieur et extérieur d'un cercle :

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R. Soit M un point du plan.

- M est sur le cercle $(\mathscr{C})$ si $\Omega M = R$.
- M est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si $\Omega M < R$.
- M est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si $\Omega M > R$.

Remarque :

Si $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R, $(R > 0)$ alors :

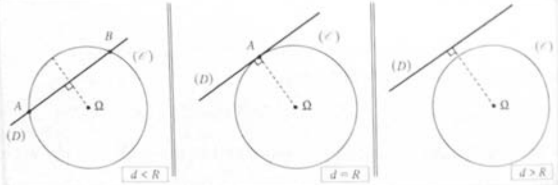
- $(M(x;y)$ est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})) \Leftrightarrow ((x-a)^2 + (y-b)^2 < R)$.
- $(M(x;y)$ est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})) \Leftrightarrow ((x-a)^2 + (y-b)^2 > R)$.

10 Positions relatives d'une droite et d'un cercle :

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R.

Soit (D) une droite du plan. On pose : $d = d(\Omega;(D))$.

- Si $d < R$, alors la droite (D) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points distincts.
- Si $d = R$, alors la droite (D) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$:$(D)\cap(\mathscr{C}) = \{A\}$.
- Si $d > R$, alors la droite (D) est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$:$(D)\cap(\mathscr{C}) = \phi$.



11 Équation de la tangente à un cercle en un point :

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R, et soit A un point de $(\mathscr{C})$.

Soit (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A.

- $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$
- Une équation de la tangente (T) est donnée par :
  $(x - x_A)(x_A - x_\Omega) + (y - y_A).(y_A - y_\Omega) = 0$

Exercices

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(3;-4)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Parmi les points suivants, préciser ceux qui sont sur le cercle; ceux qui sont à l'intérieur de $(\mathscr{C})$, et ceux qui sont à l'extérieur de $(\mathscr{C})$: $A\left(2;-\frac{9}{2}\right)$; $B(4;-3)$; $C(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ et $E(\sqrt{5};-2)$.

2) Déterminer graphiquement, l'ensemble des points $M(x;y)$ dans chacun des cas suivants :

a- $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + y + 1 < 0$

b- $x^2 + y^2 + x - 3y + \frac{1}{2} > 0$

Exercice 13

Déterminer la position relative de la droite (D) et du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1) $(D): x+2y-1=0$ et $(\mathscr{C}): x^2+y^2+2x-6y-6=0$

2) $(D): x-2y+2=0$ et $(\mathscr{C}): x^2+y^2-8x+2y+8=0$

3) $(D): -2x+2y+5=0$ et $(\mathscr{C}): 4x^2+4y^2+4x-8y-27=0$

Exercice 14

1) Donner une équation de la tangente (T) au cercle $(\mathscr{C})$ au point $A(2-\sqrt{2};-4)$ où $(\mathscr{C})$ a pour équation : $x^2+y^2-4x+10y+26=0$.

2) Montrer que les axes de coordonnées sont tangents au cercle $(\mathscr{C})$ d'équation : $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

3) Donner les équations des tangentes au cercle $(\mathscr{C})$ passant par le point $I(2;1)$ où $(\mathscr{C})$ a pour équation : $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

Solutions

Exercice 12

1) $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre $\Omega(3;-4)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

- Pour le point $A\left(2;-\frac{9}{2}\right)$:

On a : $A\Omega=\sqrt{(3-2)^2+\left(-4+\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}<\sqrt{2}$

Donc : $A\Omega<R$; le point A est donc à l'intérieur de $(\mathscr{C})$.

- Pour le point $B(4;-3)$:

On a : $B\Omega=\sqrt{2}=R$ donc : $B\in(\mathscr{C})$

- Pour le point $C(-\sqrt{2};\sqrt{2})$:

On a : $C\Omega=\sqrt{29+14\sqrt{2}}$, donc : $C\Omega>R$; le point C est donc à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$.

- Pour le point $E(\sqrt{5};-2)$:

On a : $\Omega E=\sqrt{18-6\sqrt{5}}$, donc : $\Omega E>R$; le point E est donc à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$.

2) a- Déterminons l'ensemble E_1 des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$x^2+y^2-2\sqrt{2}x+y+1<0$

$M(x;y)\in E_1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\sqrt{2}x+y+1<0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{5}{4}$

Donc : E_1 le disque ouvert de centre $\Omega\left(\sqrt{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$

c'est-à-dire les points situés à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega\left(\sqrt{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b- Déterminons l'ensemble E_2 des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$x^2+y^2+x-3y+\frac{1}{2}>0$

$M(x;y)\in E_2 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-3y+\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2>2$

Donc : E_2 est l'ensemble des points du plan situés à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$.

Exercice 13

Déterminons la position relative de la droite (D) et le cercle $(\mathscr{C})$.

1) Déterminons d'abord le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$:

$x^2+y^2+2x-6y-6=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=16$

Donc : $\Omega(-1;3)$ est le centre de $(\mathscr{C})$ et $R=4$ son rayon.

- Calculons $d(\Omega;(D))$ où $(D): x+2y-1=0$

$d(\Omega;(D))=\frac{|-1+6-1|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Comme $\frac{4}{\sqrt{5}}<4$ alors : $d(\Omega;(D))<R$

Donc la droite coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points distincts.

2) Déterminons le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$:

$x^2+y^2-8x+2y+8=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+1)^2=9$

Donc : $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega(4;-1)$ et de rayon $R=3$.

- Calculons $d(\Omega;(D))$ où $(D): x-2y+2=0$

On a : $d(\Omega;(D))=\frac{|4+2+2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$, et comme $\frac{8}{\sqrt{5}}>3$, alors $d(\Omega;(D))>R$ donc la droite (D) se trouve à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$: c'est-à-dire : $(\mathscr{C})\cap(D)=\phi$.

3) Déterminons le centre et le rayon de $(\mathscr{C})$:

$4x^2+4y^2+4x-8y-27=0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-2y-\frac{27}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=8$

Donc : $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

- Calculons $d(\Omega;(D))$ où $(D): -2x+2y+5=0$

$d(\Omega;(D))=\frac{\left|-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(2\times1)+5\right|}{\sqrt{4+4}}=\frac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

et comme $d(\Omega;(D))=R$, alors la droite (D) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$: (D) et $(\mathscr{C})$ se coupent en un seul point.

Exercice 14

1) • $x^2+y^2-4x+10y+26=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=3=\sqrt{3}^2$

Donc : $\Omega(2;-5)$ est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.

$R=\sqrt{3}$ est son rayon

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2+\sqrt{2}\\y+4\end{pmatrix}$

On a : $A\Omega=\|\overrightarrow{A\Omega}\|=\sqrt{3}$ donc $A\in(\mathscr{C})$

• Equation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point $A(2-\sqrt{2};-4)$:

$M(x;y)\in(T)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(x-2+\sqrt{2})-(y+4)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x-2\sqrt{2}+2-y-4=0$

Donc : (T): $\sqrt{2}x-y-2-2\sqrt{2}=0$

2) Montrons que les axes de coordonnées sont tangents au cercle $(\mathscr{C})$:

on a: $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-6x-6y+9=0$ donc $(\mathscr{C})$: $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

d'où le centre de $(\mathscr{C})$ est $\Omega(3;3)$, son rayon est $R=3$.

comme $d(\Omega;(Ox))=3=R$ et $d(\Omega;(Oy))=3=R$, alors les axes de coordonnées sont tangents au cercle $(\mathscr{C})$.

3) Déterminons les tangents à $(\mathscr{C})$ passant par $I(2;1)$:

on a: $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ donc $(\mathscr{C})$: $(x-2)^2+(y+3)^2=4=2^2$

• Remarquer d'abord que le point I n'appartient pas au cercle $(\mathscr{C})$ (on peut vérifier que I est à l'extérieur de $(\mathscr{C})$).

• Le centre du cercle $(\mathscr{C})$ est $\Omega(2;-3)$, son rayon est $R=2$.

Soit (T) une tangente à $(\mathscr{C})$ passant par le point I.

(T): $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$

• $I(2;1)\in(T)\Leftrightarrow 2a+b=-c$

Donc une équation de (T) s'écrit : $ax+by-2a-b=0$

• (T) est tangente à $(\mathscr{C})$ si et seulement si $d(\Omega;(T))=R=3$.

Or, $d(\Omega;(T))=\dfrac{|2a-3b-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{4|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$d(\Omega;(T))=3 \Leftrightarrow 4|b|=3\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 7b^2=9a^2$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{7}}{3}b \quad \text{ou } a=-\frac{\sqrt{7}}{3}b.$$

• Pour $a=\dfrac{\sqrt{7}}{3}b$; on obtient : (T_1): $\dfrac{\sqrt{7}}{3}bx+by-\dfrac{2\sqrt{7}}{3}b-b=0$

On peut remplacer b par n'importe quelle valeur non nulle.

par exemple : $b=3\sqrt{7}$

On obtient : (T_1): $7x+3\sqrt{7}y-14-3\sqrt{7}=0$

• Pour $a=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}b$; on obtient : (T_2): $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}bx+by+\dfrac{2\sqrt{7}}{3}b-b=0$

pour $b=3\sqrt{7}$, on obtient : (T_2): $-7x+3\sqrt{7}y+14-3\sqrt{7}=0$.

Exercice 15

On considère les points $A(2;1)$, $B(1;-2)$ et $C(-1;2)$

1) a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC)

b- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

2) a- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

b- Montrer que la droite (Δ) d'équation: $x+2y+5=0$ est tangente au cercle (C) puis déterminer les coordonnées du point E, le point de contact de (C) avec (Δ).

3) a- Déterminer les coordonnées du point F le point d'intersection de (Δ) et (BC).

b- Montrer que l'équation de la deuxième tangente (Δ_1) au cercle (C) qui passe par F est: $11x-2y-25=0$

Exercice 16

On considère les points $\Omega(1,2)$ et $D(-2;-2)$

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et qui passe par le point D.

2) On considère les points $A(-3;5)$ et $B(5;-1)$.
Vérifier que $[AB]$ est un diamètre du cercle (C).

3) Soit (Δ) la droite d'équation: $4x-3y+27=0$
Montrer que (Δ) est tangente au cercle (C) en A

4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point D.

5) Vérifier que les tangentes (Δ) et (T) au cercle (C) se coupent au point $I(-6;1)$.

6) a- Calculer les distances BD et ΩI

b- Calculer les produits scalaires: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}$

c- Calculer $\det(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})$ et $\det(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I})$

7) Montrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}})$ ont même mesure modulo 2π.

Exercice 17

Déterminer une équation du cercle (C) telle que son centre appartient à la droite d'équation: $2x+y=0$ et les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives: $4x-3y-30=0$ et $4x-3y+10=0$ sont tangentes à (C).

Exercice 18

On considère les points $A(-1;-1)$, $B(3;-1)$, $C(1;-1+2\sqrt{3})$ et $E(0;-1+3\sqrt{3})$.

1) Donner une équation cartésienne du cercle (C) de centre A et de rayon $r=4$

2) a- Vérifier que les points B et C appartiennent au cercle (C) et que le point E se trouve à l'extérieur de (C).

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point E et orthogonale à la droite (BC)

c- Montrer que la droite (D) est tangente à (C) au point $F(-3;-1+2\sqrt{3})$.

3) a- Construire le cercle (C), la droite (BC) et la droite (D)

b- Montrer que: $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}=AE^2-r^2$

Exercice 19

On considère les points $A(1;-1)$, $B(4;2)$ et $C(1;5)$

1) a- Montrer que les points A,B et C ne sont pas alignés.

b- Déterminer une équation cartésienne du cercle (Γ) passant par les points A,B et C.

2) a- Vérifier que le point $E(-1;-1)$ se trouve à l'extérieur du cercle (Γ).

b- Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes à (Γ) passant par le point E.

Exercice 20

On considère le triangle ABC tel que $A(1;2)$ et les droites définies par les équations:

$3x+2y=0$ et $8x+5y-1=0$ respectivement la hauteur et la médiane du triangle ABC passant par le point C.

1) Déterminer les coordonnées du point C.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

3) Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment $[AB]$ et en déduire les coordonnées du point B.

4) Calculer la distance du point C à la droite (AB)

5) Soit (Δ) la droite d'équation: $3x+2y=0$

Montrer que le nombre MA^2-MB^2 est constant quel que soit le point M de la droite (Δ).

Exercice 21

On considère les points $A(2;0)$, $B(-2;0)$ et $C(3;3)$

1) Soit D le point du plan défini par: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

a- Déterminer les coordonnées du point D.

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AD)

c- Soit α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}})$.

Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ et en déduire la valeur de α.

d- Calculer l'aire du triangle ABD.

e- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABD qui passe par le point B.

f- Calculer de deux façons différentes la distance du point B à la droite (AD)

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que:

(1): $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=AM^2$

a- Montrer que: $M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b- On pose: $M(x;y)$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$ en fonction de x et y.

c- En déduire que (Δ) est une droite dont on déterminera une équation cartésienne.

3) a- Montrer que les droites (Δ) et (AD) sont orthogonales

b- Calculer la distance du point A à la droite (Δ).

Exercice 22

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(-2;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et les points $A(-4;1)$ et $B(-2;0)$

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C)

2) a- vérifier que le point A appartient au cercle (C)

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle (C) en A.

3) a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (ΩA).

b- Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point B et orthogonale à la droite (ΩA).

c- Déterminer les coordonnées du point I, intersection de (Δ) et (ΩA).

4) a- Montrer que le triangle $I\Omega B$ est rectangle

b- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C') circonscrit au triangle $I\Omega B$.

c- Etudier l'intersection de (C') et (D).

5) Résoudre graphiquement le système: $(S):\begin{cases}x^2+y^2\leq-4x+4y-3\\2x+y+4\geq0\end{cases}$

Exercice 23

On considère les points $A(2;-1)$, $B(-4;-3)$ et $C(1;-3)$

1) a- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b- Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et en déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

2) Soit (Δ) la droite passant par le point B et orthogonale à la droite (AC).

a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ)

b- Calculer la distance du point A à la droite (Δ)

3) Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

a- Montrer que: $x^2+y^2+2x+4y-5=0$ est une équation cartésienne du cercle (C) .

b- Montrer que la droite (Δ') d'équation: $x-3y+5=0$ est tangente au cercle (C).

4) a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) la médiatrice du segment $[AC]$

b- Déterminer une équation cartésienne du cercle (Γ) qui passe par les points A et C et dont le centre appartient à la droite (D') d'équation: $2x-y=0$.

Exercice 24

Soit $(\mathscr{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que: $(1): x^2+y^2-4(m+2)x-2(m-1)y+10m+9=0$ où m est un paramètre réel.

1) Montrer que l'ensemble $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle quelque soit le réel m

2) Montrer qu'il existe un seul cercle parmi tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$ qui passe par le point $A(1;2)$ dont on déterminera le centre et le rayon.

3) Existe-t-il un cercle parmi tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$, dont le centre appartient à l'axe des ordonnées?

- Existe-t-il un cercle parmi tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$ de centre O origine du repère?

4) Déterminer l'ensemble des centres des cercles $(\mathscr{C}_m)$ lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

5) Existe-t-il des cercles $(\mathscr{C}_m)$ de rayon $r=6$?

6) Existe-t-il des cercles $(\mathscr{C}_m)$ de rayon r, où $r\in\mathbb{R}^{*+}$?

7) Existe-St-il des points du plan (P) qui n'appartiennent à aucun cercle parmi les cercles $(\mathscr{C}_m)$?

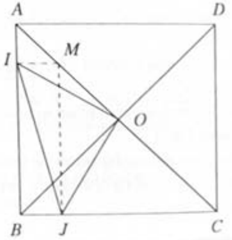
8) Montrer que tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$ passent par deux points fixes I et J.

9) Déterminer les cercles $(\mathscr{C}_m)$ tangents à la droite (Δ) d'équation: $x+y-4=0$.

Exercice 25

Soit $ABCD$ un carré de centre O , de côté a $(a \in \mathbb{R}^{*+})$, et M un point du segment $[AC]$.

I et J sont les projetés orthogonaux respectifs du point M sur $[AB]$ et $[BC]$.



Ont veut déterminer la nature du triangle OIJ de deux façons différentes:

Méthode géométrique

1) a- Montrer que: $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$

b- Que peut-on conclure pour les droites (OI) et (OJ)?

2) En utilisant le théorème d'Al Khashi dans les triangles OJC et AOI, montrer que: $OJ=OI$ puis en déduire la nature du triangle OIJ.

Méthode analytique:

En considérant le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ où: $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$, montrer que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

Exercice 26

Soit $ABCD$ un carré tel que: $AB=2cm$

1) Déterminer les réels a,b et c pour que A soit le barycentre du système pondéré $\{(D;a),(B,b),(C,c)\}$

2) Déterminer $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M tels que:

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}^2=0$ puis construire $(\mathscr{C})$.

Exercice 27

Soit A et B deux points du plan tels que $AB=4$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$ et $\vec{u}$ un vecteur tel que: $\|\vec{u}\|=2$
Déterminer chacun des ensembles suivants:

$E_1=\{M\in(P)/\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\}$
$E_2=\{M\in(P)/\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=2\}$
$E_3=\{M\in(P)/\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=4\}$
$E_4=\{M\in(P)/MA^2-MB^2=0\}$
$E_5=\{M\in(P)/MA^2-MB^2=2\}$
$E_6=\{M\in(P)/MA^2+MB^2=10\}$
$E_7=\{M\in(P)/-3\leq\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}\leq 5\}$
$E_8=\{M\in(P)/-2\leq\overrightarrow{AM}.\vec{u}\leq 12\}$

Exercice 28

On considère dans le plan (P), le triangle isocèle ABC en A tel que:
$AB=AC=3a$ et $BC=2a(a\in\mathbb{R}^{+*})$
Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;1),(B;-1),(C;3)\}$
On pose: $g(M)=MA^2-MB^2+3MC^2$ pour tout point M du plan
1) Montrer que pour tout point M du plan, on a: $g(M)=3MG^2+g(G)$
2) Montrer que $g(G)=2a^2$
3) Déterminer $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan tels que: $g(M)=50a^2$

Exercice 29

Soit ABC un triangle tel que $AB=AC=5$ et $BC=6$ et soit G le barycentre du système pondéré $\{(A;2),(B;3),(C;3)\}$.
1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et AG.
2) On considère l'application f définie du plan (P) dans $\mathbb{R}$ par:
$f(M)=2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
a- Montrer que: $f(M)=4MG^2+f(G)$ pour tout point M du plan
b- Déterminer et représenter l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que:
$$f(M)=f(A)$$
c- Déterminer et représenter l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que:
$(14\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

Exercice 30

Soit ABC un triangle équilatéral et I le point défini par: $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{CB}$. (On pose: $AB=a$)
1) Exprimer IA^2 , IB^2 et IC^2 en fonction de a.
2) Déterminer les nombres α,β et γ pour que le point I soit le barycentre du système pondéré $\{(A;\alpha),(B,\beta),(C;\gamma)\}$
3) On considère l'ensemble (Γ) tel que:
$(\Gamma)=\{M\in(P)/MA^2+2MB^2-2MC^2=ka^2\}$ où $k\in\mathbb{R}$
a- Déterminer la valeur du réel k pour que $B\in(\Gamma)$
b- Montrer dans ce cas que (Γ) est un cercle tel que les droites (AC) et (AB) lui sont tangentes.

Exercice 15

1) a- Déterminons une équation cartésienne de la droite (BC)

On a: $\overrightarrow{BC}(-2;4)$

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a:

$$M(x;y)\in(BC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y+2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)+2(y+2)=0 \Leftrightarrow 4x+2y=0$$

Donc: $2x+y=0$ est une équation cartésienne de (BC).

b- Montrons que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

Pour montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A, il suffit de montrer que: $AB=AC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

On a: $\overrightarrow{AB}(-1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;1)$

Donc: $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$ et

$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}$

et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-3)+(-3)\times(1)=3-3=0$

Donc $AB=AC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

2) a- Déterminons une équation cartésienne du cercle (C)

Le triangle ABC est rectangle en A, donc le cercle (C) circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et de rayon $r=\frac{BC}{2}$ (car $[BC]$ est un diamétre du cercle (C)).

On a: $\Omega(0;0)$ c'est-à-dire: $\Omega=O$ et $r=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{4+16}}{2}=\sqrt{5}$

Donc une équation cartésienne du cercle (C) est: $x^2+y^2=5$

b- Montrons que la droite (Δ) est tangente à (C).

Calculons $d(O;(\Delta))$.

On a: $d(O;(\Delta))=\frac{|5|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r$

Donc (Δ) est tangente au cercle (C).

- Déterminons les coordonnées du point E:

E est le point d'intersection de (C) avec (Δ), donc le couple des coordonnées du point E est la solution du système: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

On a: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5+2y)^2+y^2=5 \\ x=-2y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2+20y+20=0 \\ x=-2y-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+4y+4=0 \\ x=-2y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+2)^2=0 \\ x=-2y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Donc $(-1;-2)$ est le couple des coordonnées du point E

3) **a-** Déterminons les coordonnées du point F:

F est le point d'intersection des deux droites (Δ) et (BC) , donc le couple des coordonnées du point F est la solution du système: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=-5 \end{cases}$

On a: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y-10+y=0 \\ x=-2y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{10}{3} \\ x=\frac{20}{3}-5=\frac{5}{3} \end{cases}$

Donc $\left(\frac{5}{3};-\frac{10}{3}\right)$ est le couple des coordonnées du point F.

b- Montrons que F se trouve à l'extérieur de (C).

On a: $OF=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{100}{9}}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$

Puisque $\frac{5\sqrt{5}}{3}>\sqrt{5}$ alors $OF>r$ donc le point F se trouve à l'extérieur du cercle (C).

On sait que par tout point qui se trouve à l'extérieur d'un cercle , passent seulement deux droites tangentes à ce cercle:

Dans cette question, on a la droite (Δ) passe par le point F et tangente au cercle (C), donc il suffit de montrer que la droite (Δ_1) d'équation: $11x-2y-25=0$ passe par le point F et tangente à (C).

On a:

$11x_F-2y_F-25=11\times\frac{5}{3}-2\times\left(-\frac{10}{3}\right)-25=\frac{55}{3}+\frac{20}{3}-25=25-25=0$

Donc $F\in(\Delta_1)$

et on a: $d(O;(\Delta_1))=\frac{|-25|}{\sqrt{(11)^2+(-2)^2}}=\frac{25}{\sqrt{125}}=\frac{25}{5\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r$

Donc (Δ_1) est la deuxième tangente au cercle (C) qui passe par F.

Exercice 16

1) Déterminons une équation cartésienne du cercle (C).

(C) est le cercle de centre $\Omega(1;2)$ et qui passe par le point D

donc son rayon r est ΩD.

On a: $\overrightarrow{\Omega D}(-3;-4)$ donc $r = \Omega D = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

D'où une équation cartésienne du cercle (C) est:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (5)^2$ c'est-à-dire: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

2) Vérifions que $[AB]$ est un diamètre du cercle (C).

$[AB]$ est un diamètre du cercle (C) si Ω est le milieu du segment $[AB]$ et $r = \dfrac{AB}{2}$.

On a: le milieu du segment $[AB]$ a pour couple de coordonnées

$\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ c'est-à-dire $(1;2)$ donc Ω est le milieu du segment $[AB]$.

et on a: $\overrightarrow{AB}(8,-6)$ donc: $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 = r$

D'où $[AB]$ est un diamètre du cercle (C).

3) Montrons que (Δ) est tangente à (C) en A:

On a: $4x_A - 3y_A + 27 = 4 \times (-3) - 3(5) + 27 = -12 - 15 + 27 = 0$

Donc $A \in (\Delta)$

et on a: $d(\Omega;(\Delta)) = \dfrac{|4x_\Omega - 3y_\Omega + 27|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{|4 \times 1 - 3 \times 2 + 27|}{5} = \dfrac{25}{5} = 5 = r$

Donc $d(\Omega;(\Delta)) = r$ et $A \in (C)$ et $A \in (\Delta)$

D'où (Δ) est tangente à (C) en A

4) Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point D:

On a: $\overrightarrow{\Omega D}(-3;-4)$ est un vecteur normal à la droite (T) , donc une équation cartésienne de (T)

s'écrit sous la forme: $-3x - 4y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$

On a: $D(-2;-2) \in (T) \Leftrightarrow 6 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -14$

Donc: $3x + 4y + 14 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (T).

5) Montrons que: $(T) \cap (\Delta) = \{I\}$ où $I(-6;1)$

On résout le système suivant: $\begin{cases} 4x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = -14 \end{cases}$

On a: $\Delta=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=16+9=25$, donc $\Delta\neq 0$ d'où le système (S) est un système de CRAMER

et on a: $\Delta_x=\begin{vmatrix}-27 & -3\\ -14 & 4\end{vmatrix}=-108-42=-150$

et $\quad\Delta_y=\begin{vmatrix}4 & -27\\ 3 & -14\end{vmatrix}=-56+81=25$

Donc: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-150}{25}=-6$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{25}{25}=1$

D'où: $I(-6;1)$ est le point d'intersection des deux droites (Δ) et (T)

6) a- Calculons BD et ΩI

On a: $\overrightarrow{BD}(-7;-1)$ donc: $BD=\|\overrightarrow{BD}\|=\sqrt{(-7)^2+(1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

et on a: $\overrightarrow{\Omega I}(-7;-1)$ donc: $\Omega I=5\sqrt{2}$

b- • Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$

On a: $\overrightarrow{BA}(-8;6)$ et $\overrightarrow{BD}(-7;-1)$

Donc: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=(-8)\times(-7)+(6)\times(-1)=56-6=50$

• Calculons $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}$

On a: $\overrightarrow{\Omega I}(-7;-1)$ et $\overrightarrow{\Omega A}(-4;3)$

Donc: $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}=(-4)\times(-7)+(3)\times(-1)=28-3=25$

c- • Calculons $\det(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})$

On a: $\det(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})=\begin{vmatrix}-8 & -7\\ 6 & -1\end{vmatrix}=8+42=50$

• Calculons $\det(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I})$

On a: $\det(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I})=\begin{vmatrix}-4 & -7\\ 3 & -1\end{vmatrix}=4+21=25$

7) Montrons que les angles $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}})$ ont la même mesure (modulo 2π)

• On a: $\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}}{BA\times BD}=\dfrac{50}{10\times 5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\quad\sin(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\det(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})}{BA\times BD}=\dfrac{50}{10\times 5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

• On a: $\cos(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I})=\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}}{\Omega A\times\Omega I}=\dfrac{25}{5\times 5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin(\overline{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I})}{\Omega A \times \Omega I} = \dfrac{25}{5\times 5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc: $(\overline{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où: $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}) \equiv (\overline{\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}})[2\pi]$

Exercice 17

Soit Ω le centre du cercle (C) ; on pose $\Omega(a;b)$

On a: Ω appartient à la droite d'équation: $2x+y=0$, donc $2a+b=0$

C'est-à-dire: $b=-2a$, d'où $\Omega(a;-2a)$

Puisque les droites (D_1) et (D_2) sont tangentes au cercle (C),

alors: $d(\Omega;(D_1)) = d(\Omega;(D_2))$

C'est-à-dire: $\dfrac{|4a+6a-30|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|4a+6a+10|}{\sqrt{16+9}}$

D'où:

$d(\Omega,(D_1)) = d(\Omega;(D_2)) \Leftrightarrow 2|a-3| = 2|a+1| \Leftrightarrow a-3=a+1 \text{ ou } a-3=-a-1 \Leftrightarrow a=1$

Par suite le point $\Omega(1;-2)$ est le centre du cercle (C)

- Calculons R le rayon du cercle (C)

On a: $R = d(\Omega;(D_1)) = 2|1-3| = 4$

- Déterminons l'équation cartésienne de (C):

On a (C) est le cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $R=4$

Donc:

Une équation du cercle est $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ c'est-à-dire:

$x^2+y^2-2x+4y-11=0$

Donc: $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ est une équation cartésienne du cercle (C).

Exercice 18

1) Déterminons une équation cartésienne du cercle (C).

Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $A(-1;-1)$ et de rayon $r=4$ est: $(x+1)^2+(y+1)^2=(4)^2$

Que l'on peut écrire aussi sous la forme: $x^2+y^2+2x+2y-14=0$

2) a- • Vérifions que les points B et C appartiennent à (C).

On a: $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(4)^2+(0)^2} = \sqrt{16} = 4 = r$ donc $B \in (C)$

et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4 = r$ donc $C \in (C)$

- Vérifions que le point E se trouve à l'extérieur de (C).

On a: $\overrightarrow{AE}(1;3\sqrt{3})$ donc $AE=\|\overrightarrow{AE}\|=\sqrt{1+27}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

Puisque $2\sqrt{7}>4$ c'est-à-dire $AE>r$ alors le point E se trouve à l'extérieur du cercle (C).

b- Déterminons une équation de la droite (D):

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a: $\overrightarrow{EM}(x;y+1-3\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{BC}(-2;2\sqrt{3})$

Donc: $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow-2x+2\sqrt{3}(y+1-3\sqrt{3})=0\Leftrightarrow x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}+9=0$

Donc $x-\sqrt{3}y+9-\sqrt{3}=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

c- Montrons que la droite (D) est tangente au cercle (C):

On a: $d(A;(D))=\dfrac{|-1+\sqrt{3}+9-\sqrt{3}|}{\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{4}}=4=r$

Donc la droite (D) est tangente au cercle (C) et par suite, la droite (D) coupe le cercle (C) en un seul point.

- Vérifions que le point F est le point de contact de (C) avec (D).

On a:

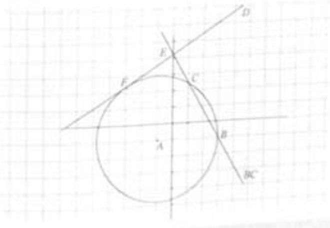
$x_F-\sqrt{3}y_F+9-\sqrt{3}=-3-\sqrt{3}(-1+2\sqrt{3})+9-\sqrt{3}=-3+\sqrt{3}-6+9-\sqrt{3}=0$

donc $F\in(D)$

et on a: $AF=\|\overrightarrow{AF}\|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$ donc $F\in(C)$

D'où la droite (D) est tangente au cercle (C) au point F

3| a-



b- On a: $\overrightarrow{EC}(1;-\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{EB}(3;-3\sqrt{3})$

Donc $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}=3+9=12$, d'autre part on a: $AE=2\sqrt{7}$

(D'après 2) a)), par suite , on a: $AE^2-r^2=28-16=12$

D'où: $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}=AE^2-r^2$.

Exercice 19

1) a- Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a: $\overrightarrow{AB}(3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(0;6)$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18$

donc $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \neq 0$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Déterminons une équation cartésienne du cercle (Γ).

Le cercle est circonscrit au triangle ABC, donc Ω le centre du cercle (Γ) est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$,$[AC]$ et $[BC]$ et son rayon R est ΩA (ΩB *ou* ΩC).

Pour déterminer les coordonnées de Ω, il suffit de déterminer le point d'intersection de deux médiatrices seulement.

• Soit (Δ_1) la médiatrice du segment $[AB]$ et I est le milieu du segment $[AB]$.

On a: $\overrightarrow{AB}(3;3)$ et $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$.

On a: $\overrightarrow{AB}(3;3)$ est un vecteur normal à la suite (Δ_1) donc une équation cartésienne de (Δ_1) s'écrit sous la forme: $3x+3y+c=0$

On a: $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right) \in (\Delta_1) \Leftrightarrow \frac{15}{2}+\frac{3}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-9$

Donc: $(\Delta_1): x+y-3=0$

• Soit (Δ_2) la médiatrice du segment $[AC]$ et J est le milieu du segment $[AC]$.

On a: $\overrightarrow{AC}(0;6)$ et $J(1;2)$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a:

$M(x;y) \in (\Delta_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (x-1)\times 0+(y-2)\times 6=0 \Leftrightarrow y-2=0$

Donc: $(\Delta_2): y-2=0$.

- Déterminons les coordonnées de Ω.

$$\Omega(x;y) \in (\Delta_1)\cap(\Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Donc $\Omega(1;2)$ est le centre du cercle (Γ).

- Déterminons R le rayon du cercle (Γ).

On a: $\overrightarrow{\Omega A}(0;-3)$ donc $R=\Omega A=\|\overrightarrow{\Omega A}\|=\sqrt{(-3)^2}=3$

Par suite une équation cartésienne du cercle (Γ) est:

$(x-1)^2+(y-2)^2=(3)^2$

Que l'on peut écrire sous la forme: $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

2) a- Vérifions que le point E se trouve à l'extérieur de (Γ).

On a: $\overrightarrow{\Omega E}(-2;-3)$ donc $\Omega E=\|\overrightarrow{\Omega E}\|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

Puisque $\sqrt{13}>3$ c'est-à-dire $\Omega E>R$ alors le point E se trouve à l'extérieur du cercle (Γ).

b- Déterminons une équation cartésienne de chacune des tangentes au cercle (Γ) passant par le point E.

Soit (Δ) une droite tangente au cercle (Γ) et qui passe par E et soit: $ax+by+c=0$ une équation de (Δ) avec $(a;b)\neq(0;0)$.

On a: $E\in(\Delta)$ donc: $-a-b+c=0$ c'est-à-dire $c=a+b$.

Donc l'équation de (Δ) s'écrit sous la forme: $ax+by+a+b=0(*)$

On a:

((Δ) est tangente au cercle (Γ))

$\Leftrightarrow d(\Omega;(\Delta))=3\Leftrightarrow\dfrac{|a+2b+a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow|2a+3b|=3\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 4a^2+9b^2+12ab=9a^2+9b^2\Leftrightarrow 5a^2-12ab=0\Leftrightarrow a(5a-12b)=0$

$\Leftrightarrow a=0\ ou\ a=\dfrac{12}{5}b$

Donc on obtient une équation cartésienne de chacune des deux tangents en remplaçant dans (*):

$y+1=0$ (car $b\neq0$) et $\dfrac{12}{5}x+y+\dfrac{17}{5}=0$

Exercice 20

1) Déterminons les coordonnées du point C:

On a la hauteur et la médiane du triangle ABC données passent toutes les deux par le point C, donc C est leur point d'intersection donc le couple des coordonnées du point C est la solution du système: $\begin{cases}8x+5y=1\\3x+2y=0\end{cases}$

On a: $\begin{cases}8x+5y=1\\3x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x+5y=1\\y=-\dfrac{3}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-\dfrac{15}{2}x=1\\y=-\dfrac{3}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Donc $(2;-3)$ est le couple des coordonnées du point C.

2) Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).

On a: $3x+2y=0$ est l'équation de la droite (Δ_C), la hauteur du triangle

ABC issue du point C, donc

$\vec{n}(3;2)$ est un vecteur normal à (Δ_c).

Puisque (Δ_c) est orthogonale à (AB) alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a: $\overrightarrow{AM}(x-1, y-2)$

Donc:

$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x-3y+4=0$

D'où: $2x-3y+4=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

3) Déterminons les coordonnées du point I.

La médiane du triangle ABC issue du point C est la droite (D_c) qui passe par les points I et C où I est le milieu du segment $[AB]$, donc I est le point d'intersection des droites (D_c) et (AB), d'où le couple des coordonnées du point I est la solution du système: $\begin{cases} 8x+5y=1 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

On a: $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -24-10 = -34$ donc $\Delta \neq 0$, d'où le système admet une seule solution:

Puisque $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 17$ et $\Delta y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -34$

Alors: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17}{-34} = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1$

Donc: $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$

- **Déduction:**

On a: $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}$

Puisque: $\overrightarrow{OA}(1;2)$ et $\overrightarrow{OI}\left(-\frac{1}{2};1\right)$

alors: $x_B = -1-1 = -2$ et $y_B = 2-2 = 0$

C'est-à-dire: $(-2;0)$ est le couple des coordonnées de B

4) Calculons $d(C;(AB))$.

On a: $(AB): 2x-3y+4=0$ et $C(2;-3)$

donc: $d(C;(AB)) = \frac{|2\times 2 - 3\times(-3)+4|}{\sqrt{4+9}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$

D'où: $d(C;(AB)) = \frac{17\sqrt{13}}{13}$

5) Montrons que le nombre $MA^2 - MB^2$ est constant quelque soit le point M de (Δ).

Soit $M(x;y)$ un point de la droite (Δ), on a:

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow 3x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x$

Donc: $M\left(x; -\frac{3}{2}x\right)$

Et on a:

$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

Puisque: $\overrightarrow{MI}\left(-\frac{1}{2} - x ; 1 + \frac{3}{2}x\right)$ et $\overrightarrow{BA}(3;2)$

Alors: $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = (-1 - 2x) \times 3 + (2 + 3x) \times 2 = -3 - 6x + 4 + 6x = 1$

Donc: $(\forall M \in (\Delta)) ; MA^2 - MB^2 = 1.$

Exercice 21

1) a- Déterminons le couple de coordonnées du point D :

On pose $D(x;y)$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-4;0)$, $\overrightarrow{AC}(1;3)$ et $\overrightarrow{AD}(x-2;y)$;

donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(-3;3)$;

d'où : $x - 2 = -3$ et $y = 3$; car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire : $x = -1$ et $y = 3$.

Ainsi : $D(-1;3)$

b- Déterminons une équation cartésienne de la droite (AD).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{AM}(x-2;y)$ et $\overrightarrow{AD}(-3;3)$

$$\begin{aligned} M \in (AD) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-2) + 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc $x + y - 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AD).

c- • Calculons $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$:

On a : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \alpha[2\pi]$.

Donc : $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{AD \times AB}$ et $\sin\alpha = \frac{\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})}{AD \times AB}$

Puisque : $\overrightarrow{AD}(-3;3)$ et $\overrightarrow{AB}(-4;0)$ alors :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 12$ et $AB = 4$ et $AD = 3\sqrt{2}$ et $\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12$;

donc : $\cos\alpha = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• **Déduction :**

On a : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et puisque $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

alors $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ c'est-à-dire : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

d- Calculons l'aire du triangle ABD.

On a : $S = \frac{1}{2}AB \times AD \sin\hat{A} = \frac{1}{2}AB \times AD \times |\sin(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})|$.

Donc : $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

e- Déterminons l'équation de la hauteur du triangle ABD qui passe par le point B.

Soit (Δ_B) la hauteur du triangle ABD qui passe par B.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{BM}(x+2;y)$.

Puisque $(\Delta_B) \perp (AD)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AD}(-3;3)$ est un vecteur normal à la droite (Δ_B), donc :

$$\begin{aligned} M \in (\Delta_B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AD} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3(x+2) + 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Donc $x - y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de la hauteur (Δ_B).

f- Calculons $d(B;(AD))$ par deux méthodes.

Méthode 1 :

Soit H le projeté orthogonale du point B sur la droite (AD).

On a : $d(B;(AD)) = BH$ et puisque : $\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$ alors

$BH = AB \times \sin\alpha = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$;

donc : $d(B;(AD)) = 2\sqrt{2}$.

Méthode 2 :

On a : $(AD) : x + y - 2 = 0$ et $B(-2;0)$.

Donc : $d(B;(AD)) = \frac{|-2+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

2) a- Montrons que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Soit M un point du plan, on a : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = AM^2$.

Puisque :

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = AM^2 - \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= AM^2 - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \text{ (car } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}\text{)}.$$

Alors : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow AM^2 - \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b- Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$

• Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-4;0)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-4 \times 1) + (0 \times 3) = -4$.

• Calculons $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$.

On a : $\overrightarrow{AD}(-3;3)$ et $\overrightarrow{AM}(x-2;y)$.

Donc : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = -3(x-2) + 3y = -3x + 3y + 6$

c- Déduction :

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = AM^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow -3x + 3y + 6 = -4$

$\Leftrightarrow -3x + 3y + 10 = 0$

Donc (Δ) est la droite d'équation : $-3x + 3y + 10 = 0$.

3) a- Montrons que : $(\Delta) \perp (AD)$.

On a : $\overrightarrow{AD}(-3;3)$ est un vecteur directeur de la droite (AD);

et $\vec{u}(-3;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Puisque : $\vec{u}.\overrightarrow{AD} = (-3) \times (-3) + (3) \times (-3) = 9 - 9 = 0$.

Alors : $\vec{u} \perp \overrightarrow{AD}$, donc $(\Delta) \perp (AD)$.

b- Calculons $d(A;(\Delta))$.

On a : $(\Delta): -3x + 3y + 10 = 0$ et $A(2;0)$.

Donc :

$$d(A;(\Delta)) = \frac{|-3x_A + 3y_A + 10|}{\sqrt{(-3)^2 + (3)^2}} = \frac{|-3 \times 2 + 3 \times 0 + 10|}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 22

1) Déterminons une équation cartésienne du cercle (C).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a $\overrightarrow{\Omega M}(x+2;y-2)$.

Donc $M \in (C) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$$

Donc $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ est une équation cartésienne du cercle (C).

2) **a-** Vérifions que : $A \in (C)$:

On a : $A(-4;1)$, donc

$(x_A)^2 + (y_A)^2 + 4x_A - 4y_A + 3 = 16 + 1 - 16 - 4 + 3 = 0$;

donc $A \in (C)$

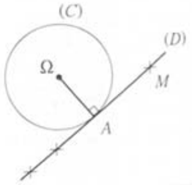
b- Déterminons une équation cartésienne de la tangente (D) à (C) au point A.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{A\Omega}(2;1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+4;y-1)$.

Donc : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+4) \times 2 + (y-1) \times 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + y + 7 = 0$$

Donc : $2x + y + 7 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle (C) en A.



3) **a-** Déterminons une équation cartésienne de la droite (ΩA).

Puisque $(\Omega A) \perp (D)$ et $\vec{u}(-1;2)$ est un vecteur directeur de la droite (D), alors $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite (ΩA).

Donc une équation cartésienne de (ΩA) s'écrit sous la forme :

$-x + 2y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

On a : $A \in (A\Omega) \Leftrightarrow -x_A + 2y_A + c = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + 2 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -6$$

Donc : $x - 2y + 6 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (ΩA).

b- Déterminons une équation cartésienne de la droite (Δ).

On a : $(\Delta) \perp (\Omega A)$ et $(D) \perp (\Omega A)$ donc $(\Delta) /\!/ (D)$.

D'où une équation cartésienne de la droite (Δ) s'écrit sous la forme :
$2x + y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

On a : $$B \in (\Delta) \Leftrightarrow 2x_B + y_B + c = 0$$
$$\Leftrightarrow -4 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 4$$

Donc : $2x + y + 4 = 0$ est une équation cartésienne de (Δ).

c- Déterminons les coordonnées du point I.

On pose $I(a;b)$, on a :

$$I \in (\Delta) \cap (\Omega A) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + 6 = 0 \\ 2a + b + 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 6 \\ 4b - 12 + b + 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 6 \\ b = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{14}{5} \\ b = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Donc : $I\left(-\dfrac{14}{5}; \dfrac{8}{5}\right)$.

4) **a-** Vérifions que $I\Omega B$ est un triangle rectangle.

On a : $(A\Omega) \perp (\Delta)$ et $(\Delta) \cap (A\Omega) = \{I\}$ et $B \in (\Delta)$;

donc $(I\Omega) \perp (IB)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{IB} = 0$.

D'où la triangle $I\Omega B$ est rectangle en I.

b- Déterminons une équation cartésienne du cercle (C').

Puisque le triangle $I\Omega B$ est rectangle en I, alors le cercle circonscrit au triangle $I\Omega B$ est le cercle de diamètre $[\Omega B]$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{\Omega M}(x+2; y-2)$ et $\overrightarrow{BM}(x+2; y)$.

Donc : $$M \in (C') \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{BM} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y(y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$$

D'où $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ est une équation cartésienne de (C').

c- Étudions l'intersection de (C') avec (D).

On a : $x^2+y^2+4x-2y+4=0 \iff (x+2)^2+(y-1)^2=1$.

Donc $\Omega_1(-2;1)$ est le centre du cercle (C') et $r'=1$ son rayon;

et on a : $(D):2x+y+7=0$, donc :

$$d(\Omega_1;(D))=\frac{|2x_{\Omega_1}+y_{\Omega_1}+7|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{|-4+1+7|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

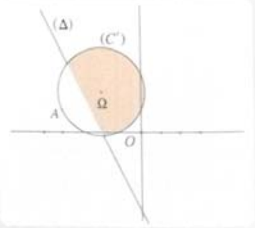
Puisque $\frac{4\sqrt{5}}{5}>1$ alors $d(\Omega_1;(D))>r'$; donc $(C')\cap(D)=\phi$.

5) Résolvons graphiquement le système (S).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2\leq -4x+4y-3 \\ 2x+y+4\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+4x-4y+3\leq 0 \\ 2x+y+4\geq 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est l'ensemble des points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du cercle (C) et se trouvent dans le demi-plan (positif) de bord la droite (Δ) et qui contient le point O.



Exercice 23

1) a- Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-6;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-2)$.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-6)\times(-1)+(-2)\times(-2)=6+4=10$.

b- • Calculons $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

On a : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$;

et $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

Donc : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{10}{2\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Calculons $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

On a : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$.

Donc : $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{10}{2\sqrt{10}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Déduction :

On a : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ c'est-à-dire : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) a- Déterminons une équation cartésienne de la droite (Δ).

Puisque $(\Delta) \perp (AC)$ alors $\overrightarrow{AC}(-1;-2)$ est un vecteur normal à la droite (Δ), donc une équation cartésienne de (Δ) s'écrit sous la forme : $-x-2y+c=0$ où $c \in \mathbb{R}$.

On a : $B \in (\Delta) \iff -x_B - 2y_B + c = 0$

$\iff 4 + 6 + c = 0$

$\iff c = -10$

D'où : $x + 2y + 10$ est une équation cartésienne de (Δ).

b- Calculons $d(A;(\Delta))$.

On a : $d(A;(\Delta)) = \dfrac{|x_A + 2y_A + 10|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}, \dfrac{|2-2+10|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

3) a- Déterminons une équation cartésienne du cercle (C).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{AM}(x-2;y+1)$ et $\overrightarrow{BM}(x+4;y+3)$.

Donc : $M \in (C) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\iff (x-2)(x+4) + (y+1)(y+3) = 0$

$\iff x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

Donc : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ est une équation cartésienne du cercle (C).

b- Montrons que (Δ') est tangente au cercle (C).

On a : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ est le couple des coordonnées du point Ω, le centre du cercle (C) ((C) est de diamètre $[AB]$).

c'est-à-dire : $\Omega(-1;-2)$.

Le rayon du cercle (C) est : $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$.

On a : $d(\Omega;(\Delta'))=\dfrac{|x_\Omega-3y_\Omega+5|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-1+6+5|}{\sqrt{10}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$.

Donc la droite (Δ') est tangente au cercle (C).

4) a- Déterminons une équation cartésienne de la droite (D).

On a $\left(\frac{3}{2};-2\right)$ est le couple des coordonnées du point I, milieu du segment $[AC]$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-2)$.

(D) est la médiatrice du segment $[AC]$ donc : $(D)\perp(AC)$ et $I\in(D)$.

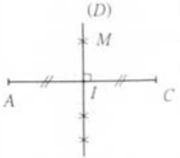
Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a : $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{3}{2};y+2\right)$.

Donc : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)(-1)+(y+2)\times(-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -x-2y+\frac{3}{2}-4=0$$

$$\Leftrightarrow x+2y+\frac{5}{2}=0$$



Donc : $x+2y+\frac{5}{2}=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

b- Déterminons une équation cartésienne du cercle (Γ).

Soit $\Omega_1(a;b)$ le centre du cercle (Γ).

On a les points A et C appartiennent au cercle (Γ) donc $\Omega_1A=\Omega_1C$ c'est-à-dire que Ω_1 appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ c'est-à-dire : $\Omega_1\in(D)$ donc : $a+2b+\frac{5}{2}=0$.

On a aussi : $\Omega_1\in(D')$ donc : $2a-b=0$.

D'où : $\Omega_1\in(D)\cap(D')\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+\frac{5}{2}=0\\2a-b=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\a+4a+\frac{5}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$$

Donc : $\Omega_1\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ est le centre du cercle (Γ).

Le rayon du cercle (Γ) est : $\Omega_1A=\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+(-1+1)^2}=\frac{5}{2}$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M\in(\Gamma) \Leftrightarrow \Omega_1 M=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow \Omega_1 M^2=\frac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x+2y-5=0$$

Donc : $x^2+y^2+x+2y-5=0$ est une équation cartésienne du cercle (Γ).

Exercice 24

1) Montrons que $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle pour tout $m\in\mathbb{R}$.

Soit $m\in\mathbb{R}$ et $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y)\in(\mathscr{C}_m) \Leftrightarrow x^2+y^2-4(m+2)x-2(m-1)y+10m+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2(m+2))^2+(y-(m-1))^2-4(m+2)^2-(m-1)^2+10m+9=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2(m+2))^2+(y-(m-1))^2=5m^2+4m+8$$

Puisque $(\forall m\in\mathbb{R})$; $5m^2+4m+8>0$ (car $\Delta<0$ et $a>0$).

Alors, pour tout nombre réel m on a $(\mathscr{C}_m)$ est un cercle de centre $\Omega_m(2m+4;m-1)$ et de rayon $r_m=\sqrt{5m^2+4m+8}$

2) Montrons qu'il existe un cercle $(\mathscr{C}_m)$ passant par le point $A(1;2)$.

Soit $m\in\mathbb{R}$, on a :

$$A(1;2)\in(\mathscr{C}_m) \Leftrightarrow 1+4-4(m+2)-4(m-1)+10m+9=0$$
$$\Leftrightarrow 2m+10=0$$
$$\Leftrightarrow m=-5$$

Donc $A(1;2)\in(\mathscr{C}_{-5})$ et par suite $(\mathscr{C}_{-5})$ est le seul cercle passant par le point A parmi les cercles $(\mathscr{C}_m)$.

3) • Déterminons m pour que : $\Omega_m(2m+4;m-1)$ le centre du cercle $(\mathscr{C}_m)$ appartient à $D(O;\vec{j})$.

Donc : $\Omega_m\in D(O;\vec{j}) \Leftrightarrow x_{\Omega_m}=0$
$$\Leftrightarrow 2m+4=0$$
$$\Leftrightarrow m=-2$$

D'où le cercle $(\mathscr{C}_{-2})$ est le seul cercle parmi les cercles $(\mathscr{C}_m)$ dont le centre appartient à l'axe des ordonnées.

• Déterminons m pour que O soit le centre d'un cercle $(\mathscr{C}_m)$.

Soit $m \in \mathbb{R}$; on a :

$\Omega_m = O \iff x_{\Omega_m} = 0$ et $y_{\Omega_m} = 0$

$$\iff \begin{cases} 2m+4=0 \\ m-1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$$

Ceci est impossible, donc il n'existe aucun cercle $(\mathscr{C}_m)$ dont le centre est O l'origine du repère.

4) Déterminons l'ensemble des centres Ω_m.

Soit $m \in \mathbb{R}$, on a : $\Omega_m(2m+4; m-1)$ est le centre du cercle $(\mathscr{C}_m)$ donc :

$\begin{cases} x_{\Omega_m} = 2m+4 \\ y_{\Omega_m} = m-1 \end{cases}$ c'est-à-dire Ω_m appartient à la droite (Δ) définie par sa représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = 4+2m \\ y = -1+m \end{cases}$ $/ m \in \mathbb{R}$ et chaque point de la droite (Δ) est un centre d'un cercle $(\mathscr{C}_m)$, donc l'ensemble des centres Ω_m est la droite (Δ) d'équation: $y = \frac{1}{2}x - 3$.

5) Déterminons m pour que : $r_m = 6$.

Soit $m \in \mathbb{R}$, le rayon du cercle $(\mathscr{C}_m)$ est : $r_m = \sqrt{5m^2+4m+8}$.

Donc : $r_m = 6 \iff 5m^2 + 4m - 28 = 0$.

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 576$ et ses solutions sont 2 et $-\frac{14}{5}$, d'où les cercles $(\mathscr{C}_m)$ dont le rayon est 6 sont : $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_{-\frac{14}{5}})$.

6) Déterminons m pour que : $r_m = r$ où r est un réel strictement positif donné.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{*+}$ donné.

On a : $r_m = r \iff 5m^2 + 4m + 8 = r^2$

$$\iff 5m^2 + 4m + 8 - r^2 = 0$$

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 4(5r^2 - 36)$.

On a : - Si : $0 < r < \frac{6\sqrt{5}}{5}$ alors $\Delta < 0$, donc il n'existe aucun cercle $(\mathscr{C}_m)$ de rayon r dans ce cas.

- Si $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ alors $\Delta = 0$, donc il existe un seul cercle $(\mathscr{C}_m)$ de rayon r et c'est le cercle $(\mathscr{C}_{-\frac{2}{5}})$.

- Si $r > \frac{6\sqrt{5}}{5}$ alors $\Delta > 0$, donc il existe deux cercles $(\mathscr{C}_m)$ de rayon r et ce sont : $(\mathscr{C}_{m_1})$ et $(\mathscr{C}_{m_2})$ avec : $m_1 = \dfrac{-2+\sqrt{5r^2-36}}{5}$ et $m_2 = \dfrac{-2-\sqrt{5r^2-36}}{5}$.

7) Déterminons les points du plan qui n'appartiennent à aucun cercle $(\mathscr{C}_m)$.

Soit $A(a;b)$ un point du plan et $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$A \in (\mathscr{C}_m) \Leftrightarrow a^2+b^2-4(m+2)a-2(m-1)b+10m+9=0$$
$$\Leftrightarrow (-4a-2b+10)m = 8a-2b-a^2-b^2-9 \quad ⊛$$

Pour que le point A n'appartienne à aucun cercle $(\mathscr{C}_m)$ il faut que l'équation ⊛ du premier degré en m n'admette pas de solutions dans $\mathbb{R}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} -4a-2b+10=0 \\ 8a-2b-a^2-b^2-9 \neq 0 \end{cases}$

Les solutions du système : $\begin{cases} -4a-2b+10=0 \\ 8a-2b-a^2-b^2-9=0 \end{cases}$ sont : $(2;1)$ et $(4,4;-3,8)$ donc les points $A(a;b)$ qui n'appartiennent à aucun cercle $(\mathscr{C}_m)$ sont tels que : $b=5-2a$ avec $a \neq 2$ et $a \neq 4,4$.

8) Montrons que tous les points $(\mathscr{C}_m)$ passent par deux points fixes.

Soit $A(a;b)$ un point de l'espace et $m \in \mathbb{R}$, on a :

$A \in (\mathscr{C}_m) \Leftrightarrow (-4a-2b+10)m = 8a-2b-a^2-b^2-9$.

Tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$ passent par le point A si et seulement si :

(S) : $\begin{cases} -4a-2b+10=0 \\ 8a-2b-a^2-b^2-9=0 \end{cases}$ (S) s'écrit: $\begin{cases} b=5-2a \\ (a-4)^2+(6-2a)^2=8 \end{cases}$

ma deuxième équation du système s'écrit $5a^2-32a+44=0$

D'après la question 7), les solutions du système (S) sont : $(2;1)$ et $(4,4;-3,8)$.

Donc tous les cercles $(\mathscr{C}_m)$ passent par les deux points $I(2;1)$ et $J(4,4;-3,8)$.

9) Déterminons les cercles $(\mathscr{C}_m)$ tangents à la droite (Δ).

Soit m un nombre réel, on a: $\Omega_m(2m+4;m-1)$ et $r_m=\sqrt{5m^2+10m+9}$

et ((Δ) est tangent à $(\mathscr{C}_m)$) $\Leftrightarrow d(\Omega_m;(\Delta)) = r_m$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_{\Omega_m}+y_{\Omega_m}-4|}{\sqrt{2}} = r_m$$
$$\Leftrightarrow \frac{|3m-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5m^2+4m+8}$$
$$\Leftrightarrow (3m-1)^2 = 2(5m^2+4m+8)$$
$$\Leftrightarrow m^2+14m+15=0$$

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 136$ et ses solutions sont :

$m_1 = -7+\sqrt{34}$ et $m_2 = -7-\sqrt{34}$.

Donc les cercles $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_m)$ sont les seuls cercles tangents à la droite (Δ) parmi les cercles $(\mathscr{C}_m)$.

Exercice 25

Méthode géométrique

1) a- Montrons que : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MI}).(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BJ}$

$= \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JB}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{JB}.\overrightarrow{BJ}$ (car $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{JB}$)

$= \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ}.(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{JB}) = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$ car $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{JM} = 0((BJ) \perp (JM))$

Donc : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$.

b- Déduction :

On a : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$ et puisque $(OM) \perp (OB)$ (car $ABCD$ est un carré) alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = 0$ donc $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = 0$,

d'où $(OI) \perp (OJ)$.

2) • Montrons que : $OI = OJ$.

- En appliquant le théorème d'AL Kashi dans le triangle OJC, on a :

$OJ^2 = CJ^2 + CO^2 - 2CJ \times CO \times \cos(\widehat{JCO})$.

- En appliquant le théorème d'AL Kashi dans le triangle AOI, on a :

$OI^2 = AO^2 + AI^2 - 2AO \times AI \times \cos(\widehat{IAO})$.

Puisque : $\widehat{JCO} = \widehat{IAO} = \frac{\pi}{4}$ et $AO = CO$, alors :

$OI^2 - OJ^2 = (AI - CJ)(AI + CJ) + \sqrt{2}CO(CJ - AI) = (AI - CJ)(a - \sqrt{2}AO)$ (car $\sqrt{2}AO = a$)

$= 0$

• Nature du triangle OIJ :

On a : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$, donc le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Méthode analytique :

On considère le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.

On a : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$, donc le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

Dans le repère, on a : $A(0;0)$, $B(a;0)$, $D(0;a)$, $C(a;a)$ et $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

L'équation réduite de la droite (AC) est : $y = x$.

On pose : $M(m;m)$ ou $m \in [0;a]$ (car $M \in [AC]$).

On a : I est le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ donc $I(m;0)$,

et J est le projeté orthogonal de M sur $[BC]$ donc $J(a;m)$.

Donc : $OI = \sqrt{\left(m - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ et $OJ = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(m - \frac{a}{2}\right)^2}$,

c'est-à-dire : $OI = OJ$,

et $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \left(m - \frac{a}{2}\right) \times \frac{a}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(m - \frac{a}{2}\right) = 0$.

D'où : $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$, par suite le triangle OIJ est un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 26

1) Montrons que A est le barycentre des points B, C et D :

Puisque $ABCD$ est un carré alors $ABCD$ est un parallélogramme, donc :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

D'où : A est le barycentre du système pondéré $\{(B;1),(D;1),(C;-1)\}$

avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

2) • Déterminons $(\mathscr{C})$:

Soit M un point du plan, on a :

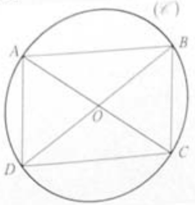
$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = 0$

Puisque A est le barycentre du système $\{(B;1),(D;1),(C;-1)\}$.

alors : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$ (car $1 + 1 - 1 = 1$)

Donc : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$

D'où : $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AC]$ c'est-à-dire $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au carré $ABCD$.



Exercice 27

• Déterminons l'ensemble E_1 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Donc l'ensemble E_1 est le cercle de diamètre $[AB]$.

• Déterminons l'ensemble E_2 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = 2$ (où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)).

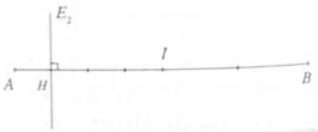
Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et ont le même sens (car $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} > 0$),

alors : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow AH \times AB = 2$

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{2}{AB}$

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{1}{2}$ (car $AB = 4$)

Donc l'ensemble E_2 est la droite orthogonale à la droite (AB) au point H défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ (car $AH = \frac{1}{2}$, $AB = 4$ et $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens)



• Déterminons E_3 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 4$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 4$ (ou bien $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$)

$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 4$

$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 4$ (car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$)

$\Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 4$

$\Leftrightarrow MI^2 = 8$

$\Leftrightarrow MI = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I; 2\sqrt{2})$

Donc E_3 est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$.

• Déterminons E_4 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_4 \Longleftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$

$\Longleftrightarrow MA = MB$

Donc l'ensemble E_4 est la médiatrice du segment $[AB]$.

• Déterminons E_5 :

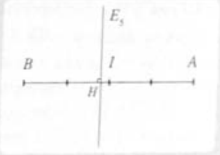
Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_5 \Longleftrightarrow MA^2 - MB^2 = 2$

$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2$

$\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 2$ (car I est le milieu du segment $[AB]$)

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 1$ (où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB)).



Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens alors :

$M \in E_5 \Longleftrightarrow IH \times AB = 1$

$\Longleftrightarrow IH = \dfrac{1}{AB}$

$\Longleftrightarrow IH = \dfrac{1}{4}$

Donc l'ensemble E_5 est la droite orthogonale à la droite (AB) au point H du segment $[IB]$ tel que : $IH = \dfrac{1}{4}$.

• Déterminons E_6 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_6 \Longleftrightarrow MA^2 + MB^2 = 10$

$\Longleftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2 = 10$ (D'après le théorème de la médiane)

$\Longleftrightarrow 2MI^2 = 10 - 8$

$\Longleftrightarrow MI^2 = 1$

$\Longleftrightarrow M \in \mathscr{C}(I;1)$

Donc E_6 est le cercle de centre I et de rayon 1.

• Déterminons E_7 :

Soit M un point du plan.

On a : $M \in E_7 \Longleftrightarrow -3 \leq \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} \leq 5$

$\Longleftrightarrow -3 \leq MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 \leq 5$ (voir la solution de E_3)

$\Longleftrightarrow 1 \leq MI^2 \leq 9$

$\Longleftrightarrow 1 \leq MI \leq 3$

Donc E_7 est l'ensemble des points M situés entre les deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ de centre I et de rayon 1 et 3 respectifs.

• Déterminons E_8 :

Soit M un point du plan.

Pour le vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 2$, il existe un unique point C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

On a : $M \in E_8 \Leftrightarrow -2 \leq \overrightarrow{AM}.\vec{u} \leq 12$

$\Leftrightarrow -2 \leq \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} \leq 12$

$\Leftrightarrow -2 \leq \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} \leq 12$ (où H est le projeté orthogonal de M sur (AC)).

$\Leftrightarrow -2 \leq \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} \leq 0$ ou $0 < \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} \leq 12$

- Si $-2 \leq \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} \leq 0$ alors $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires et $-AH \times AC \geq -2$ c'est-à-dire $AH \leq 1$ (car $AC = \|\vec{u}\| = 2$).

Soit J le point défini par : $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, on a : $H \in [AJ]$.

Donc le ruban (Δ_1) limité par les droites (d_1) et (d_2) orthogonales à (AC) aux points A et J respectivement.

- Si $0 < \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} \leq 12$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens et $AH \times AC \leq 12$ c'est-à-dire $AH \leq 6$.

Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AC}$, on a : $H \in [AK]$.

Donc l'ensemble des points M du plan tel que $0 < \overrightarrow{AM}.\vec{u} \leq 12$ est le ruban (Δ_2) limité par les droites (d_2) et (d_3) orthogonales à (AC) aux points J et K.

Conclusion : E_8 est la réunion des deux rubans (Δ_1) et (Δ_2) c'est-à-dire le ruban limité par les droites (d_2) et (d_3) orthogonales à (AC) et passant par les points J et K respectivement.

Exercice 28

1) Montrons que : $(\forall M\in(P))$; $g(M)=3MG^2+g(G)$.

Soit M un point du plan, on a :

$$g(M)=MA^2-MB^2+3MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$$
$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC})+g(G)$$

Puisque G est le barycentre du système pondéré $\{(A;1),(B;-1),(C;3)\}$,
alors : $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D'où : $g(M)=3MG^2+g(G)$ pour tout point M du plan (P).

2) Montrons que : $g(G)=2a^2$.

On a : $g(A)=3AG^2+g(G)$ donc : $g(G)=g(A)-3AG^2$.

D'autre part on a : $g(A)=-AB^2+3AC^2=-9a^2+27a^2=18a^2$.

- Calculons AG^2 :

On a : $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc : $AG^2=\frac{1}{9}AB^2+AC^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,

et on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(9a^2+9a^2-4a^2)=7a^2$.

D'où : $AG^2=a^2+9a^2-\frac{14}{3}a^2=\frac{16}{3}a^2$.

Par suite : $g(G)=18a^2-16a^2=2a^2$.

3) Déterminons l'ensemble $(\mathscr{C})$.

Soit M un point du plan, on a :

$$\begin{aligned}M\in(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow g(M)=50a^2\\ &\Leftrightarrow 3MG^2+g(G)=50a^2\\ &\Leftrightarrow 3MG^2+2a^2=50a^2\\ &\Leftrightarrow MG^2=16a^2\\ &\Leftrightarrow MG=4a\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre G et de rayon $4a$.

Exercice 29

1) • Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

On a : $BC^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(25+25-36)=7$.

D'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=7$.

• Calculons AG :

On a G est le barycentre du système pondéré $\{(A;2),(B;3),(C;3)\}$.

Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

D'où : $AG^2 = \frac{9}{64}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \frac{9}{64}(25 + 25 + 2 \times 7) = 9$.

Ainsi : $AG = 3$.

2) a- Montrons que : $(\forall M \in (P))$; $f(M) = 4MG^2 + f(G)$.

Soit M un point du plan on a :

$$\begin{aligned}
f(M) &= 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\\
&= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})\\
&= 2[MG^2 + \overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}] + MG^2 + \overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\\
&\qquad + MG^2 + \overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}\\
&= 4MG^2 + \overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA}) + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}\\
&= 4MG^2 + f(G) \text{ (car : } 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}\text{)}
\end{aligned}$$

Donc : $(\forall M \in (P))$; $f(M) = 4MG^2 + f(G)$.

b- Déterminons l'ensemble des points M tes que : $f(M) = f(A)$.

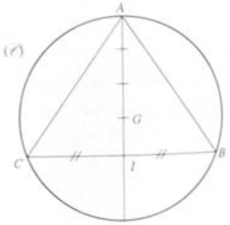
On a : $f(A) = 4AG^2 + f(G)$.

Soit M un point du plan, on a :

$$\begin{aligned}
f(M) = f(A) &\Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = 4AG^2 + f(G)\\
&\Leftrightarrow MG = AG = 3\\
&\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(G;3)
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M tel que $f(M) = f(A)$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre G et de rayon 3.

Construction de $(\mathscr{C})$:



3) Déterminons l'ensemble (Δ)

Soit M un point du plan, on a :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}$ (où I est le milieu du segment $[BC]$)

donc $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$

Soit K le barycentre du système pondéré $\{(A;14),(B;-3),(C;-3)\}$.

On a : $14\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 8\overrightarrow{MK}$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } M \in (\Delta) &\Leftrightarrow (14\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}).(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0\\
&\Leftrightarrow 8\overrightarrow{MK}.2\overrightarrow{IA} = 0\\
&\Leftrightarrow (MK) \perp (IA)
\end{aligned}$$

D'où (Δ) est la droite passant par le point K et orthogonale à la droite (AI).

Exercice 30

1) Exprimons IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a.

- On a : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$ donc $AI^2 = 4CB^2 = 4a^2$ car : $BC = a$, d'où $IA^2 = 4a^2$

- On a : $IB^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB})^2 = IA^2 + 2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AB} + AB^2 = 5a^2 - 4\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ (car $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$)

$= 5a^2 - 4BC \times BA\cos(\widehat{ABC}) = 5a^2 - 4a^2 \times \dfrac{1}{2} = 3a^2$ (car : $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$).

Donc : $IB^2 = 3a^2$.

- On a : $IC^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})^2 = 5a^2 + 4\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 5a^2 + 2a^2 = 7a^2$.

2) Déterminons les réels α, β et γ pour que le point I soit barycentre du système $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$.

On a : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{CI} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} - 2\overrightarrow{CI} = \vec{0}$

Puisque : $1 + 2 - 2 \neq 0$ alors le point I est le barycentre des points pondérés $\{(A;1),(B;2),(C;-2)\}$.

On prend : $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -2$.

3) a- Déterminons la valeur de k pour que : $B \in (\Gamma)$.

On a : $B \in (\Gamma) \Leftrightarrow BA^2 + 2BB^2 - 2BC^2 = ka^2$

$\Leftrightarrow ka^2 = -a^2$

$\Leftrightarrow k = -1$

Donc le point B appartient à l'ensemble (Γ) si et seulement si $k = -1$.

b- On prend : $k = -1$ et montrons que (Γ) est un cercle tangent aux droites (AB) et (AC).

On a : $k = -1$ donc $B \in (\Gamma)$.

Soit M un point du plan, on a :

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = -a^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = -a^2$

$\Leftrightarrow MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}) + IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 = -a^2$

On a : $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ car I est le barycentre du système pondéré $\{(A;1),(B;2),(C;-2)\}$,

et on a : $IA^2 + 2IB^2 - 2IC^2 = -4a^2$ (d'après la question 1).

Donc : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 = 3a^2$

$M \in (\Gamma) \quad \Leftrightarrow MI = a\sqrt{3}$ (car $a > 0$)

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(I; a\sqrt{3})$

Donc (Γ) est le cercle de centre I et de rayon $a\sqrt{3}$.

• Montrons que le droite (AB) est tangente à (Γ)

On a : $IA^2 = 4a^2$, $AB^2 = a^2$ et $IB^2 = 3a^2$ donc : $AB^2 + IB^2 = IA^2$.

D'où le triangle ABI est rectangle en B.

On a : $(AB) \perp (IB)$ et $B \in (\Gamma)$ et I est le centre du cercle (Γ) donc la droite (AB) est tangente à (Γ) au point B.

• Montrons que la droite (AC) est tangente à (Γ).

Soit F le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

On a : $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$ donc $(AI) /\!/ (BC)$ d'où $\widehat{ABC} = \widehat{IAB}$ (Angles alternes internes).

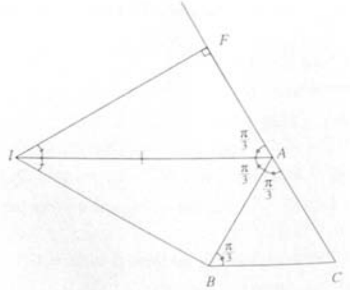
Puisque $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ alors $\widehat{IAF} = \pi - \widehat{IAC} = \frac{\pi}{3}$. (car $A \in [FC]$)

Donc $\widehat{IAF} = \widehat{IAB}$ c'est-à-dire la demi-droite $[AI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FAB}$.

Par suite le point I est équidistant (se trouve à la même distance) aux demi-droites $[AB)$ et $[AF)$.

Donc : $IF = IB = a\sqrt{3}$ donc $F \in \mathscr{C}(I, a\sqrt{3})$ et $(IF) \perp (AC)$.

D'où la droite (AC) est tangente au cercle (Γ) au point F.



Leçon 8 Calcul trigonométrique

Maxi.

Résumé

1 Relations entre les lignes trigonométriques

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$ $\sin(x + k2\pi) = \sin x ; k \in \mathbb{Z}$ $\tan(x + k\pi) = \tan x ; k \in \mathbb{Z}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

2 Formules de transformation

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \alpha)$ tel que : $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$ $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$	$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$ $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$ $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$ $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$

Exercices

Exercice 1

1) En écrivant : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$; calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$ puis en déduire $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2) a- Calculer $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$ (Remarquer que : $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$)

b- En écrivant : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 2

1) En utilisant : $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

2) En déduire $\cos\frac{3\pi}{8}$; $\sin\frac{5\pi}{8}$ et $\cos\frac{7\pi}{8}$

Exercice 3

Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

2) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

3) $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$

Exercice 4

1) Soit x un nombre réel.

Calculer $\cos^4 x$ en focntion de $\cos 2x$ et $\cos 4x$

2) En déduire la valeur de A : $A = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Exercice 5

1) Vérifier que : $\frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ et $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$

2) En déduire que : $2\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = \sin\frac{\pi}{12}$ et $2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24} = \sin\frac{5\pi}{12}$

3) Montrer que : $16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$

(Remarquer que : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$)

Exercice 6

Soit x un nombre réel.

Ecrire sous forme de produit, les deux expressions suivantes :

$$A = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

Exercice 7

Transformer les produits suivants en sommes :

$$A = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$C = \cos(3x)\sin(7x)$$

$$D = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 8

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (1)

$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (2)

2) En déduire que $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} = 4$

Exercice 9

On pose : $P = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$ et $S = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}$

1) Montrer que : $S + 2P = 0$

2) En calculant : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \times P$, déduire que: $P = \frac{-1}{4}$ et $S = \frac{1}{2}$

3) Déterminer la valeur de chacun des nombres $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{5}$.

Exercice 10

1) Montrer que : $(\forall x \in IR) ; \cos(5x) = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$

2) Montrer que : $(\forall x \in IR) ; 1 - \cos(5x) = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$

3) En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation : $(E) : 4x^2 + 2x - 1 = 0$

puis calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{30}$ (Remarquer que : $\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}$)

Exercice 11

Soit x et y deux nombres réels.

1) Montrer que : $\sin^2(x + y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y \cos(x + y)$

2) Soit z un nombre réel tel que : $x + y + z = \pi$.

Montrer que : $\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y \cos z = 1$.

Exercice 12

Soit α un nombre réel.

Montrer que : $\sin\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$

Exercice 13

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ tel que : $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

Calculer $\tan\frac{\alpha}{4}$.

Exercice 14

Soit α et β deux nombres de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tels que : $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ et $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

1) Calculer $\tan 2\beta$.

2) En déduire que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 15

1) Montrer que : $(\forall x\in IR);\cos 3x=\cos x.(4\cos^2x-3)$

2) a) Soit x un nombre réel tel que : $k\in\mathbb{Z}\,;x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Montrer que : $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos 3x}{4\cos x}$.

b) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$

Exercice 16

Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que : $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\tan\alpha$

Exercice 17

Soit α un nombre réel.

1) Montrer que si $\alpha\in\left]0;\pi\right[$ alors : $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}\times\sin\alpha=\sqrt{2}$

2) Montrer que si $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ alors: $\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=-\frac{2}{\sin 2\alpha}$

3) Montrer que si $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ alors:

$\sqrt{1+\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\cos 2\alpha}+\sqrt{2}\,(\cos\alpha+\sin\alpha)=2\sqrt{2}\sin\alpha$

Exercice 18

1) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

2) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

3) Calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$

4) Montrer que : $\sin\frac{\pi}{15} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)\right)$

Solutions

Exercice 1

1) On a : $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 6\pi}{24} = \frac{10\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

C'est-à-dire : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Et on a : $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

On a : $\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

Donc : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$

2) a- On a : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b- On a : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Et on a : $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

Donc : $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 2

1) On a : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$ (car: $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$)

Puisque : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors : $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Et on a : $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, d'où: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (car: $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$)

D'où : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

Donc : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Puisque : $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ alors : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Méthode 2: $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

(Car: $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$)

Puisque : $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ alors : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) Déduction:

- $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{4\pi + \pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

- $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 3

1) Montrons que : $(\forall x \in IR); \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(3x) = \cos(x + 2x)$

$$\begin{aligned}
&= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\
&= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1) - \sin(x)(2\sin(x)\cos(x)) \\
&= (2\cos^3(x) - \cos x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= (2\cos^3(x) - \cos x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x)
\end{aligned}$$

2) Montrons que: $(\forall x \in IR); \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $\sin(3x) = \sin(x + 2x)$

$$\begin{aligned}
&= \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x) \\
&= \sin(x)\cos(2x) + 2\cos^2(x)\sin x \\
&= \sin(x)(1 - 2\sin^2(x)) + 2(1 - \sin^2(x)\sin(x)) \\
&= \sin(x) - 2\sin^3(x) + 2\sin x - 2\sin^3(x) \\
&= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)
\end{aligned}$$

3) Montrons que: $(\forall x \in IR); \cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4 x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos(x + 3x) \\
&= \cos x\cos(3x) - \sin x\sin(3x) \\
&= \cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) - \sin x(3\sin x - 4\sin^3 x) \\
&= 4\cos^4 x - 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 4\sin^4 x \\
&= \cos^4 x + 3\cos^2 x(\cos^2 x - 1) - 3\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \sin^4 x \\
&= \cos^4 x - 3\cos^2 x\sin^2 x - 3\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x \\
&= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x
\end{aligned}$$

Exercice 4

1) On a : $(\forall a \in IR), \cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$

Donc : $\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 = \left(\dfrac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2$

$$= \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} = \frac{1 + 2\cos(2x) + \dfrac{1+\cos(4x)}{2}}{4}$$

$$= \frac{2 + 4\cos(2x) + 1 + \cos(4x)}{8}$$

D'où : $\cos^4(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

2) Déduction:

- On remplace x par $\frac{\pi}{8}$ et on obtient :

$$\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}$$

- On remplace x par $\frac{3\pi}{8}$ et on obtient:

$$\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}$$

- D'autre part on a : $\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos^4\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}$

$$\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}$$

(car : $(\cos^4(\pi - \alpha) = (\cos(\pi - \alpha))^4 = (-\cos\alpha)^4 = \cos^4\alpha$

D'où : $A = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$$= 2\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}\right) + 2\left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{3}{2}$$

Exercice 5

1) On a : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} = \frac{12\pi - \pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$

Et on a aussi : $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24} = \frac{12\pi - 5\pi}{24} = \frac{7\pi}{24}$

2) Déduction :

On a : $2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right)$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{24}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Et on a : $2\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}\right)$

$$= 2\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{24}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

3) On pose : $A = 16\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)$

On a : $A = 4\left(2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\right)\left(2\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right)$

D'après la question (2); A s'écrit: $A = 4\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Et on a : $A = 2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc : $A = 2\left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2}$

D'où : $A = 1$

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}$:

• En appliquant la relation suivante :

(1) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On obtient les égalités suivantes :

$A = (\cos(x) + \cos(3x)) + (\cos(2x) + \cos(4x))$

$A = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)$

$A = 2\cos(2x)\cos(x) + 2\cos(3x)\cos(x)$

$A = 2\cos(x)(\cos(2x) + \cos(3x))$

$A = 2\cos(x)\,2\cos\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right)$

$A = 4\cos(x)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

• En appliquant la relation suivante : (2) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

On obtient les égalités suivantes :

$$B = (\sin x + \sin(3x)) + (\sin 2x + \sin 4x)$$
$$= 2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)$$
$$= 2\sin(2x)\cos x + 2\sin 3x\cos(x)$$
$$= 2\cos x(\sin(2x) + \sin(3x))$$
$$= 2\cos x\left(2\sin\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right)\right)$$
$$= 4\cos x\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 7

- En appliquant la relation : $\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

On obtient : $A = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \frac{1}{2}\right)$

(car : $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$)

- En appliquant la relation : $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

On obtient : $B = \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \frac{1}{2}\right)$$

- En appliquant la relation : $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

On obtient: $C = \sin(7x)\cos(3x)$

$$= \frac{1}{2}(\sin(10x) + \sin(4x))$$

- En appliquant la relation : $\cos a\sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

On obtient: $D = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(4x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2}(\sin(4x) - 1)$$

Exercice 8

1) On a : $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{18}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{3\pi - \pi}{18}\right)$$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (1)

Et on a : $2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{18}\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ (2) (car: $2\sin x\cos x = \sin(2x)$)

2) Déduction :

On a : $T = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$

De (1) et (2); T devient : $T = \dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$

Puisque : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \neq 0$ (car: $0 < \frac{\pi}{9} < \pi$) alors : $T = \dfrac{2}{\frac{1}{2}}$ c'est-à-dire : $T = 4$

Exercice 9

1) On a :

$S = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Et puisque : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\frac{3\pi}{5}$

Alors : $S = -2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ c'est-à-dire : $S = -2P$ donc : $S + 2P = 0$

2) On a : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \times P = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

(car : $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ (*)) et on a : $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \times P = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$

$$= -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

Puisque : $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$

Alors : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \times P = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \pi$ alors $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$

donc : $P = -\frac{1}{4}$

Et on a : $S + 2P = 0$ donc : $S = \frac{1}{2}$

3) On pose : $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

On a d'après la question 1) $S = a + b = \frac{1}{2}$ et $P = ab = -\frac{1}{4}$

Donc a et b sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$, c'est-à-dire les solutions de l'équation : $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ qui sont : $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Puisque : $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ (car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$) et $\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ (car $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$)

Alors : $a = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $b = \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

Exercice 10

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos(4x + x)\\ &= \cos x\cos 4x - \sin x\sin 4x\\ &= \cos x(2\cos^2(2x) - 1) - \sin x(2\sin 2x\cos 2x)\end{aligned}$$

Rappel : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$; $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ et $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

Donc : $\cos(5x) = \cos x(2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1) - 4\sin^2 x\cos x(2\cos^2 x - 1)$

$$= \cos x\left[(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - 4(1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1)\right]$$

$$= \cos x(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 - 12\cos^2 x + 8\cos^4 x + 4)$$

D'où : $\cos(5x) = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$

2) On pose $t = \cos x$

Vérifier que : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)$.

On a : $(1-t)(4t^2+2t-1)^2 = (1-t)(16t^4+4t^2+1+16t^3-4t-8t^2)$

$$= (1-t)(16t^4+16t^3-4t^2-4t+1)$$
$$= -16t^5+20t^3-5t+1$$
$$= 1-t(16t^4-20t^2+5)$$

Donc en remplaçant t par $\cos x$, on obtient :

$(1-\cos x)(4\cos^2 x+2\cos x-1)^2 = 1-\cos(5x)$

3) On a : $1-\cos\left(5.\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1-\cos(2\pi) = 0$

Donc : $\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)\left(4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)^2 = 0$ et puisque $1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \neq 0$

alors : $4\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)-1 = 0$ signifie que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation : $4x^2+2x-1=0$. On a les solutions de l'équation $4x^2+2x-1=0$ sont : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Puisque : $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ alors : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Et on a : $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

Donc : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}$

Puisque : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ alors : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(car : $(\sqrt{5}+1)^2 = 6+2\sqrt{5}$) on a : $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0$ (car : $0 < \dfrac{\pi}{5} < \pi$)

et $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}$

D'où : $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

On a : $\cos\left(\dfrac{\pi}{30}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}$$

Donc : $\cos\left(\dfrac{\pi}{30}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

Exercice 11

1) Montrons que : $\sin^2(x+y) = \cos^2 x+\cos^2 y-2\cos x\cos y\cos(x+y)$

On a : $\sin(x+y) = \sin x\cos y+\sin y\cos x$

Donc : $\sin^2(x+y) = (\sin x\cos y + \sin y\cos x)^2$

$$= \sin^2 x\cos^2 y + 2\sin x\cos y\sin y\cos x + \sin^2 y\cos^2 x$$

$$= (1-\cos^2 x)\cos^2 y + 2\sin x\cos y\sin y\cos x + (1-\cos^2 y)\cos^2 x$$

$$\sin^2(x+y) = \cos^2 y - \cos^2 x\cos^2 y + 2\sin x\cos y\sin y\cos x + \cos^2 x - \cos^2 y\cos^2 x$$

$$= \cos^2 y + \cos^2 x - 2\cos^2 x\cos^2 y + 2\sin x\cos y\sin y\cos x$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

Puisque: $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

Alors : $\sin^2(x+y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y\cos(x+y)$

2) Montrons que : $\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x\cos y\cos z = 1$

On a : $x + y + z = \pi$ donc : $x + y = \pi - z$

D'où d'après le résultat de question 1), on a :

$\sin^2(\pi - z) = \sin^2(x+y)$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x\cos y\cos(\pi - z)$$

Puisque : $\cos(\pi - z) = -\cos z$ et $\sin(\pi - z) = \sin z$ et $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$

Alors : $1 - \cos^2 z = \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x\cos y\cos z$

Signifie que : $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x\cos y\cos z = 1$

Exercice 12

Soit α un nombre réel.

On pose : $A = \sin\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

Montrons que : $A = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

On a : $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Puisque : $\begin{cases} \frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \\ \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Alors : $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(2\cos 2\alpha + 1)$$

Donc : $A = \sin(\alpha) \times \frac{1}{4}(2\cos 2\alpha + 1) = \frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha)$

En appliquant la formule précédente, on a :

$\sin\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sin 3\alpha + \sin(-\alpha)) = \frac{1}{2}(\sin 3\alpha - \sin\alpha)$

C'est-à-dire : $2\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha$

Donc : $A = \frac{1}{4}(\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

Exercice 13

- Calculons $\tan\frac{\alpha}{4}$:

On a : $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{3\pi}{8}$, donc : $\tan\frac{\alpha}{4} > 0$.

En appliquant les formules : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On a : $\tan^2\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}$ donc : $\tan\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}$

- Calculons $\cos\frac{\alpha}{2}$:

On a : $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ et $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, car: $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

Donc : $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, d'où : $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Pars suite:

$$\tan\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2}{20}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Exercice 14

1) Calculons $\tan 2\beta$:

On a : $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ c'est-à-dire : $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

Puisque : $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ alors : $\cos\beta > 0$, donc : $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$.

Et on a : $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ donc : $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

D'où : $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{1}{3}$

Par suite : $\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$

2) Déduction :

On a : $\tan(\alpha + 2\beta)\dfrac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan\alpha\tan 2\beta}$ donc : $\tan(\alpha + 2\beta) = \dfrac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{3}{4}} = 1$

D'où : $\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Puisque : $0 < 2\beta < \pi$ et $\tan 2\beta > 0$ alors : $0 < 2\beta < \dfrac{\pi}{2}$

Et on a : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, donc : $0 < \alpha + 2\beta < \pi$

Par suite : $0 < \dfrac{\pi}{4} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} < k < \dfrac{3}{4}$ par suite : $k = 0$.

Donc : $\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 15

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons que : $\cos 3x = \cos x.(4\cos^2 x - 3)$

On a : $\cos 3x = \cos(2x + x)$

$$= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$$

Puisque : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Alors : $\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$$

$$= (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x)\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$$

Donc : $(\forall x \in IR) ; \cos 3x = \cos x.(4\cos^2 x - 3)$

2) a- Montrons que : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\cos 3x}{4\cos x}$

On a : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x$

$$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$$

et $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$$

Donc :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}(\cos x + \sqrt{3}\sin x)(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = \frac{1}{4}(\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x))$$

$$= \frac{1}{4}(4\cos^2 x - 3)$$

Puisque : $\cos 3x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$ et $\cos x \neq 0$ (car : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$);

Alors : $4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$ donc : $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos 3x}{4\cos x}$

b- Déduction :

Pour $x = \frac{9}{4}$, on a d'après la question précédente :

$$\cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{4\cos\frac{\pi}{9}}$$

Signifie que: $\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{\frac{1}{2}}{4\cos\frac{\pi}{9}}$, d'où : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$

Exercice 16

Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On a : $1 - \sin\alpha > 0$ et $1 + \sin\alpha > 0$

Donc :
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} &= \frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}} - \frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}}\\ &= \frac{1+\sin\alpha-(1-\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}}\\ &= \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\text{car } \cos\alpha > 0)\\ &= 2\tan\alpha\end{aligned}$$

D'où : $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = 2\tan\alpha$ pour tout α de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 17

1) Soit $\alpha \in \left]0;\pi\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha} &= \frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}\\ &= \frac{2}{1-\cos^2(\alpha)}\\ &= \frac{2}{\sin^2(\alpha)}\end{aligned}$$

Puisque : $\sin\alpha > 0$ alors : $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$

Donc : $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}} \times \sin\alpha = \sqrt{2}$

2) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, on a :

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha)}+\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha)}=\frac{1}{(\cos\alpha\sin\alpha)^2}=\frac{4}{(2\cos\alpha\sin\alpha)^2}$$
$$=\frac{4}{\sin^2(2\alpha)}$$

Puisque : $-\pi<2\alpha<0$, alors : $\sin(2\alpha)<0$

Donc : $\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=-\frac{2}{\sin 2\alpha}$

3) Soit : $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, on a : $1-\cos(2\alpha)=2\sin^2(\alpha)$ et $1+\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)$

Puisque : $\cos\alpha<0$ et $\sin\alpha>0$ alors :

$\sqrt{1+\cos(2\alpha)}+\sqrt{1-\cos(2\alpha)}=-\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha$

Donc : $\sqrt{1+\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\cos 2\alpha}+\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=2\sqrt{2}\sin\alpha$

Exercice 18

1) On pose : $A=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$

$$\sin\frac{\pi}{5}\times A=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$$

D'où : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\times A=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ Puisque : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\neq 0$ alors : $A=\frac{1}{4}$

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$

2) Déduisons que : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$

On a : $-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$

3) Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$:

On pose : $a=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $b=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

On a : $0<\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ donc : $0<\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)<\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)<1$

D'où : $0<b<a<1$ et on a d'après 1) et 2) : $\begin{cases}a-b=\frac{1}{2}\\ ab=\frac{1}{4}\end{cases}$

Donc : $a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $b = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(car : $a = b + \frac{1}{2}$ et $4b^2 + 2b - 1 = 0$)

Signifie que : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

4) Montrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right)$

On a: $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right)$$

3 Equations trigonométriques

1) Équation du type: $\cos x = a$

soit a un nombre réel. On considère l'équation: $(E_1): \cos x = a$

- Si: $|a| > 1$, alors l'équation (E_1) n'admet aucune solution.
- Si: $|a| \leq 1$, alors il existe un réel x_0 tel que: $a = \cos x_0$ d'où les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) sont les réels $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) Équations du type : $\sin x = a$

Soit a un nombre réel.

On considère l'équation: (E_2): $\sin x = a$

- Si $|a| > 1$, alors l'équation (E_2) n'admet aucune solution.
- Si $|a| \leq 1$, alors il existe un réel x_0 tel que: $a = \sin x_0$, donc les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_2) sont les nombres réels $x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{R}$

3) Équations du type : $\tan x = a$

Soit a un nombre réel. On considère l'équation: $(E_3): \tan x = a$

Il existe un réel x_0 tel que: $a = \tan x_0$,où $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_3) sont les nombres réels: $x_0 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, chacune des équations suivantes:

1) $2\cos x = 1$
2) $\sqrt{3} + 2\sin x = 0$
3) $3\tan x + \sqrt{3} = 0$
4) $\cos x + \sin x = 0$
5) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$
6) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$
7) $\cos 3x = 0$
8) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$
9) $\sin 2x = 1$
10) $\cos 5x = -1$
11) $2\sin(3x) - 1 = 0$
12) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$
13) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right) + 1 = 0$
14) $2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$
15) $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$
2) $\sqrt{2}\cos 2x = \cos x + \sin x$
3) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
4) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$
5) $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 4x$
6) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$

Exercice 21

Résouodre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $2\sin^2 x = \sin x$
2) $2\cos^2 x + (2 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$
3) $4\sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 4$
4) $\frac{1}{\cos^2 x} + (1 - \sqrt{3})\tan x = \sqrt{3} + 1$
5) $3 - 4\sin^2 x = 2\cos x(4\sin^2 x - 3)$
6) $\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2}\sin 13x$
7) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$
8) $2\cos^2 x + \cos 5x = 1$
9) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right.$

Exercice 22

1) Factoriser les expressions : $\sin 5x - \sin 3x$ et $\sin 5x + \sin 3x$.
2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x . \sin 8x$
3) En déduire les solutions de l'équation : $2\sin^2 5x + \cos 6x - 1 = 0 ; x \in \mathbb{R}$.

Exercice 23

Soit α un nombre de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

1) a) Montrer que : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ et que : $\cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

b) Vérifier que α est une solution de l'équation : $\cos 4x = \sin x$.

2) a) Résoudre dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation : $\cos 4x - \sin x = 0$

b) En déduire la valeur de α.

Exercice 24

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $\sin 3x + \sin 2x = 0$

1) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ l'équation (E).

2) a) Montrer que : $(\forall x \in IR)$; $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$.

b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation :
$\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

c) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$

Exercice 25

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E): $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de l'équation (E).

2) a) Montrer que : $(\forall x \in IR)$; $\cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

b) En déduire que : $(\forall x \in D)$; $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{2}{\cos 2x}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Exercice 26

1) Soit x un nombre réel.

a) Montrer que : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) En déduire que : $1 - \frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 2 - \sqrt{2}$

Exercice 27

1) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$
on a : $\sqrt{1 + \sin 2x} = -\cos x - \sin x$

2) Résoudre dans l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, l'équation : $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 3x)$

3) En déduire les solutions de l'équation : $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$; $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 28

1) a) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. b) Calculer : $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes:

a) $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x - 2 = 0$ (1)

b) $\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x} = 2-\sqrt{3}$ (2)

Exercice 29

1) Soit x un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$; on pose : $A(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

a) Vérifier que : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$

b) Montrer que : $A(x) = \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$, puis en déduire que : $A\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$

c) Montrer que : $A(x) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$, puis en déduire que : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$.

2) On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $\cos x - (\sqrt{2}-1)\sin x = 1$

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Exercice 30

1) Déterminer D l'ensemble des nombres réels x tels que : $\cos x + \sin x \neq 0$

2) On considère dans l'ensemble D l'équation :

(E): $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}{\sin x + \cos x} = 3(1 - \sin x \cos x)$

a) Montrer que : $(E) \iff \frac{1}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x$

b) On pose : $t = \cos x + \sin x$

Montrer que : $(E) \iff t^3 - 3t + 2 = 0$

c) En déduire les solutions de l'équation (E) dans D.

Solutions

Exercice 19

1) Résolvons l'équation (E_1): $2\cos x = 1$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

On a : $2\cos x = 1 \iff \cos x = \frac{1}{2}$

$\iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est: $S = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.

2) Résolvons l'équation (E_2): $\sqrt{3} + 2\sin x = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{3} + 2\sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Longleftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est : $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right\}$.

3) Résolvons l'équation (E_3): $3\tan x + \sqrt{3} = 0$

Soit x un élément de l'ensemble $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On a : $3\tan x + \sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Longleftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est : $S = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

4) Résolvons l'équation (E_4): $\cos x + \sin x = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

On a : $\cos x + \sin x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -\sin x$

$$\Longleftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ est: $S = \left\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

5) Résolvons l'équation (E_5): $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x$

Puisque : $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$

Alors les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ne sont pas des solutions de l'équation (E_5).

On peut considérer que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ c'est-à-dire : $\cos x \neq 0$

Donc : $(E_5) \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_5) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ est : $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right\}$.

6) Résolvons l'équation (E_6): $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-x+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+x+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \ ; \ k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) dans $\mathbb{R}$ est:

$S=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-7\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right\}$.

7) Résolvons l'équation (E_7): $\cos 3x=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos 3x=0 \iff 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

$$\iff x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_7) dans $\mathbb{R}$ est:

$$S=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est:

$$S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6};-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right\}$$

8) Résolvons l'équation (E_8): $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=0 \iff 2x+\frac{\pi}{8}=\pi+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

$$\iff x=\frac{7\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_8) dans $\mathbb{R}$ est:

$S=\left\{\frac{7\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est:

$S=\left\{-\frac{9\pi}{16};-\frac{\pi}{16};\frac{7\pi}{16};\frac{15\pi}{16}\right\}$.

Remarque: on peut résoudre l'équation précédente en utilisant l'équivalence suivante: $\sin X = 0 \Longleftrightarrow X = k\pi \;; k \in \mathbb{Z}$

9) Résolvons l'équation (E_9): $\sin 2x = 1$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $\sin 2x = 1 \Longleftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_9) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est: $S = \left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

10) Résolvons l'équation (E_{10}): $\cos 5x = -1$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $\cos 5x = -1 \Longleftrightarrow 5x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{10}) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est:

$S = \left\{-\frac{\pi}{5}; -\frac{3\pi}{5}; \frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}; \pi\right\}$

11) Résolvons l'équation (E_{11}): $2\sin(3x) - 1 = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $\sin 3x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \;; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \;; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{11}) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est: $S = \left\{\frac{\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; -\frac{11\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}\right\}$.

12) Résolvons l'équation (E_{12}): $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a: $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 2x-\frac{\pi}{5}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{13\pi}{30}+k\pi \ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\frac{7\pi}{30}+k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{12}) dans $\mathbb{R}$ est:

$$S=\left\{\frac{13\pi}{30}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{7\pi}{30}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est:

$$S=\left\{\frac{13\pi}{30};-\frac{17\pi}{30};-\frac{7\pi}{30};\frac{23\pi}{30}\right\}$$

13) Résolvons l'équation (E_{13}): $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{7}-3x\right)+1=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{7}-3x\right)+1=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}-3x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}-3x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{7}-3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ \frac{\pi}{7}-3x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11\pi}{84}+\frac{2k\pi}{3} \ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\frac{31\pi}{84}+\frac{2k\pi}{3} \ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{13}) dans $\mathbb{R}$ est:

$$S=\left\{\frac{11\pi}{84}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{31\pi}{84}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est:

$$S=\left\{\frac{11\pi}{84};\frac{67\pi}{84};-\frac{45\pi}{84};-\frac{31\pi}{84};\frac{25\pi}{84};\frac{81\pi}{84}\right\}.$$

14) Résolvons l'équation (E_{14}): $2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a: $2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\pi x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ \pi x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12} + 2k \ ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{5}{12} + 2k \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{14}) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \left\{\frac{1}{12} + 2k; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{12} + 2k; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est: $S = \left\{-\frac{23}{12}; \frac{1}{12}; \frac{25}{12}; -\frac{19}{12}; \frac{5}{12}; \frac{29}{12}\right\}$

15) Résolvons l'équation (E_{15}): $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Longleftrightarrow \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Longleftrightarrow \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\pi x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2\pi x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(E_{15}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{24} + k \ ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{1}{24} + k \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_{15}) dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{\frac{7}{24} + k; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{1}{24} + k; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et l'ensemble de ses solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est :

$S = \left\{-\frac{65}{24}; -\frac{41}{24}; -\frac{17}{24}; \frac{7}{24}; \frac{31}{24}; \frac{55}{24}; -\frac{71}{24}; -\frac{47}{24}; -\frac{23}{24}; \frac{1}{24}; \frac{25}{24}; \frac{49}{24}; \frac{73}{24}\right\}$

Pour déterminer ces solutions, on part de l'encadrement : $-\pi < \frac{7}{24} + k \leq \pi$ puis, on obtient les valeurs de k telles que : $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ (de même pour les nombres $\frac{1}{24} + k$).

Exercice 20

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Donc : $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x \Longleftrightarrow 3(1 - \sin x) = 2(1 - \sin^2 x)$

$$\Longleftrightarrow 3(1 - \sin x) = 2(1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$\Longleftrightarrow (1 - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin x = 1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

Puisque : $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

et $\sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\iff \left(x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) Résolvons l'équation $\sqrt{2}\cos 2x = \cos x + \sin x$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $\sqrt{2}\cos 2x = \cos x + \sin x \iff \cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\iff \begin{cases} 2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2x = -x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) Résolvons l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin 3x + \sin x = 2\sin\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 2\sin 2x\cos x$

Donc : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \iff \sin 2x + 2\sin 2x\cos x = 0$

$$\iff (1 + 2\cos x)\sin 2x = 0$$

$$\iff \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin 2x = 0$$

Puisque : $\sin 2x = 0 \iff 2x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$$\iff x = \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

et $\cos x = -\frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4) Résolvons l'équation $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 2\sin 2x \cos x$$

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 2\cos 2x \cos x$$

Donc l'équation équivaut à : $(\cos 2x + \sin 2x).\cos x = 0$ signifie que : $\cos x = 0$ ou $\cos 2x + \sin 2x = 0$.

Et on a : $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

Et : $\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

5) Résolvons l'équation $(E') : \cos^4 x + \sin^4 x = \cos 4x$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$

Puisque : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ alors : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

Et on a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ donc : $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

D'où : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

Et on a : $\cos 4x = \cos(2 \times 2x) = 1 - 2\sin^2 2x$

Par suite l'équation (E') équivaut à : $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

c'est-à-dire : $\sin^2 2x = 0$ c'est-à-dire : $\sin 2x = 0$

On a : $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \,;\, k \in IZ$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\left\{\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) Résolvons l'équation $2\sin^3x-\cos 2x-\sin x=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos 2x=1-2\sin^2x$

Donc : $2\sin^3x-\cos 2x-\sin x=0 \Leftrightarrow -\sin x(1-2\sin^2x)-\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow -\sin x\cos 2x-\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=0 \text{ ou } \sin x=-1$$

Et on a : $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$$

Et: $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 21

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1): $2\sin^2x=\sin x$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $2\sin^2x=\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ ou } \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x=k\pi;k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ ; k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ ; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est:

$S=\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2): $2\cos^2x+(2-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on pose : $X=\cos x$

L'équation (E_2) devient : $2X^2+(2-\sqrt{3})X-\sqrt{3}=0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$, et les solutions sont : -1 et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $(E_2) \iff \cos x = -1$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\iff (x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est:

$S = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3): $4\sin^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 4$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $(E_3) \iff 4(1 - \cos^2 x) + 2(1 - \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 4$

$$\iff -4\cos^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$$

On pose : $X = \cos x$, l'équation (E_3) devient : $-4X^2 + 2(1 - \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$

Le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta' = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$, et ses solutions sont: $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $(E_3) \iff \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\iff \left(\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}\right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}\right)$$

D'où l'ensemble solutions de l'équation (E_3) est :

$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E_4): $\frac{1}{\cos^2 x} + (1 - \sqrt{3})\tan x = 1 + \sqrt{3}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation (E_4) est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Soit x un élément de : $IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On a : $(E_4) \iff \tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$ car $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

On pose $X = \tan x$, l'équation (E_4) devient : $X^2 + (1 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$ et ses solutions sont: -1 et $\sqrt{3}$.

Donc : $(E_4) \iff \tan x = -1$ ou $\tan x = \sqrt{3}$

$$\iff \left(x = -\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right) \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$$

Ces nombres appartiennent tous à $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est :

$S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E_5): $3-4\sin^2x=2\cos x(4\sin^2x-3)$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $(E_5)\iff(3-4\sin^2x)(1+2\cos x)=0$

$$\iff\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\right)(1+2\cos x)=0$$

$$\iff \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ou }\cos x=-\frac{1}{2}\text{ ou }\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff\left(\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\end{cases}\right)\text{ ou }\left(\begin{cases}x=\frac{-7\pi}{6}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\end{cases}\right)$$

$$\text{ou }\left(\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\end{cases}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) est :

$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-7\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_6): $\cos 5x+\sin 5x=\sqrt{2}\sin 13x$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos 5x+\sin 5x=\sqrt{2}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $(E_6)\iff\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 13x$

$$\iff\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-13x\right)$$

$$\iff\begin{cases}5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-13x+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 5x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+13x+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{9}\ ;k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}\ ;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est :
$S=\left\{\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{9};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}$.

7) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_7): $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$:

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $(E_7)\iff\cos 3x=\cos\left(\pi-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$\iff\begin{cases}3x=-x+\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 3x=x-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_7) est:
$S=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

8) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E_8): $2\cos^2 x+\cos 5x=1$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $2\cos^2 x-1=\cos 2x$

Donc : $(E_8)\iff\cos 2x+\cos 5x=0$

$\iff\cos 5x=\cos(\pi-2x)$

$$\iff\begin{cases}5x=\pi-2x+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 5x=-\pi+2x+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_8) est :
$S=\left\{\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$

9) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

(E_9): $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $(E_9) \Leftrightarrow \left(2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$

On pose : $X = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ et l'équation devient : $4X^2 - X - 5 = 0$.

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 81$ et ses solutions sont : -1 et $\frac{5}{4}$,

puisque : $-1 \leq X \leq 1$, alors : $X = -1$

donc: $(E_9) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ car $\frac{5}{4} > 1$

$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_9) est:

$$S = \left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 22

1) - Factorisons $\sin 5x - \sin 3x$:

En appliquant la formule : $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On a : $\sin 5x - \sin 3x = 2\cos 4x \sin x$

- Factorisons $\sin 5x + \sin 3x$:

En appliquant la formule : $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On a : $\sin 5x + \sin 3x = 2\sin 4x.\cos 2x$

2) Montrons que : $(\forall x \in IR); \sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x \sin 8x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin^2 5x - \sin^2 3x = (\sin 5x - \sin 3x)(\sin 5x + \sin 3x)$

On obtient d'après laquestion précédente :

$\sin^2 5x - \sin^2 3x = (2\cos 4x \sin x)(2\sin 4x \cos x) = (2\sin x \cos x)(2\sin 4x \cos 4x)$

En appliquant la formule : $2\sin a \cos a = \sin 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On a : $2\sin x \cos x = \sin 2x$ et $2\sin 4x \cos 4x = \sin 8x$

Donc : $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x \sin 8x$

D'où : $(\forall x \in IR)$; $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x \sin 8x$

3) Déduction : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos 6x = \cos(2 \times 3x) = 1 - 2\sin^2 3x$

c'est-à-dire : $\cos 6x - 1 = -2\sin^2 3x$

Donc : $2\sin^2 5x + \cos 6x - 1 = 2\sin^2 5x - 2\sin^2 3x = 2(\sin^2 5x - \sin^2 3x)$

$$= 2\sin 2x \sin 8x$$

D'où : $2\sin^2 5x + \cos 6x - 1 = 0 \iff 2\sin 2x \sin 8x = 0$

$\iff \sin 2x = 0$ ou $\sin 8x = 0$

Puisque : $\sin 2x = 0 \iff 2x = k\pi ; k \in Z$

$$\iff x = \frac{k\pi}{2} ; k \in Z$$

et $\sin 8x = 0 \iff 8x = k\pi ; k \in Z$

$$\iff x = \frac{k\pi}{8} ; k \in Z$$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation : $S = \left\{\frac{k\pi}{2} ; k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{8} ; k \in Z\right\}$

Exercice 23

1) a- Montrons que : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ c'est-à-dire : $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Puisque : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors : $\cos\alpha > 0$; donc : $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

et on a : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, donc :

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

- Montrons que : $\cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

On a : $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Donc : $\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

b- Vérifions que α est une solution de l'équation : $\cos 4x = \sin x$

On a : $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$ et $\cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

Donc : $\cos 4\alpha = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

D'où : $\cos 4\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ par suite : $\cos 4\alpha = \sin\alpha$

Donc α est une solution de l'équation : $\cos 4x = \sin x$.

2) a- Résolvons l'équation $\cos 4x = \sin x$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Soit x un élément de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos 4x = \sin x \iff \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\iff \left(4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right) \text{ ou } \left(4x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\iff \left(x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right.$$

et on a : $0 < \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \iff 0 < 1 + 4k < 5$ et $k \in \mathbb{Z}$

$\iff -\frac{1}{4} < k < 1$ *et* $k \in \mathbb{Z}$

$\iff k = 0$

et on a : $0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \iff 0 < -1 + 4k < 3$ *et* $k \in \mathbb{Z}$

$\iff \frac{1}{4} < k < 1$ *et* $k \in \mathbb{Z}$ impossible

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\cos 4x = \sin x$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ est $S = \left\{\frac{\pi}{10}\right\}$

b- Déduction :

Puisque α est une solution de l'équation $\cos 4x = \sin x$ et $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et on a ; $\frac{\pi}{10}$ est l'unique solution de cette équation dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\alpha = \frac{\pi}{10}$

Exercice 24

1) Résolvons dans l'intervalle $\left]-\pi, \pi\right]$ l'équation (E): $\sin 3x + \sin 2x = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

on a : $\sin 3x + \sin 2x = 0 \iff \sin 3x = \sin(-2x)$

$\iff (3x = \pi - 2x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

ou $3x = -2x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z})$

$\iff \left(x = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{5} ; k \in \mathbb{Z}\right)$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{4\pi}{5}\right\}$$

2) a- Montrons que : $\sin 3x = \sin(4\cos^2 x - 1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$$= 2\sin x.\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1).\sin x$$

$$= \sin x.(2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1) = \sin x.(4\cos^2 x - 1)$$

Donc : $(\forall x \in IR); \sin 3x = \sin x.(4\cos^2 x - 1)$

b- Déduction :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Longleftrightarrow \sin x(4\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$$

Donc l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

c- Déduction : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a d'après la question précédente :

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Longleftrightarrow \sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

et on a : $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

D'après la question 1) les solutions de l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ sont les nombres : $\frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}$

(Vérifier que $k\pi / k \in \mathbb{Z}$ n'est pas solution de l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$)

3) Résolvons l'équation : $(F): 4X^2 + 2X - 1 = 0$

Le discriminant réduit de cette équation est : $\Delta' = 1 + 4 = 5$

ses solutions sont : $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

- Déduction : En posant $X = \cos x$, l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ devient $4X^2 + 2X - 1 = 0$

D'après ce qui précède, on a : $\cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Et on a les solutions de l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ appartenant à $[0, \pi]$ sont : $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$;

On a : $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ et $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$.

Donc : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

Exercice 25

1) Déterminons D:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Donc : $D = IR - \left(\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

2) a- Montrons que : $\cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

D'après la formule suivante :

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 : \cos a \ \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4} - x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + \cos(-2x)\right] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

Donc : $(\forall x \in IR)$; $\cos 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

b- Déduction :

Soit $x \in D$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} + x\right)}{\frac{1}{2}\cos 2x} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos 2x} = \frac{2}{\cos 2x}$$

Donc : $(\forall x \in D)$; $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos 2x}$

3) Résolvons l'équation (E) dans D:

Soit $x \in D$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\cos 2x} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & ;k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & ;k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi & ;k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{-\pi}{8} + k\pi & ;k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 26

1) **a-** Montrons que : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c'est-à-dire : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b- Déduction :

On a : $1 - \frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

En utilisant la formule : $1 - 2\sin^2 a = \cos 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Donc : $1 - \frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 2 - \sqrt{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - \frac{1}{2}(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

équivaut à : $2 - (\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

équivaut à : $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 2 - 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

Donc : $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)^2 = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - 2\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ 2x - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11\pi}{24} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{\frac{11\pi}{24} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{24} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 27

1) Montrons que : $\sqrt{1 + \sin 2x} = -\cos x - \sin x$

Soit x un réel dans l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

On a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc : $1 + \sin 2x = \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x = (\cos x + \sin x)^2$

D'où : $\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = |\cos x + \sin x|$

Puisque : $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ alors: $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$

Donc : $\cos x + \sin x < 0$. D'où : $|\cos x + \sin x| = -(\cos x + \sin x)$

Par suite : $\left(\forall x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right)$: $\sqrt{1 + \sin 2x} = -\cos x - \sin x$

2) Résolvons l'équation : $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$; $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 3x)$

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 3x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - 3x + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\pi + 3x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}\ ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Déterminons les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

On a : $\begin{cases} \pi < \dfrac{5\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2} < \dfrac{3\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 16 < 5 + 8k < 24 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11}{8} < k < \dfrac{19}{8} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow k = 2$$

et: $\begin{cases} \pi < \dfrac{3\pi}{8} + k\pi < \dfrac{3\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 < 3 + 8k < 12 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{8} < k < \dfrac{9}{8} \\ k = 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation : $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 3x)$

dans l'intervalle $\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ est : $S = \left\{\dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{21\pi}{16}\right\}$

3) Déduction : Soit x un réel de l'intervalle $\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, on a :

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = -\cos x - \sin x$$

Donc : $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0 \Leftrightarrow -\cos x - \sin x - \sqrt{2}\cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = -\sqrt{2}\cos 3x$$

Puisque : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin x\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Alors : $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 3x)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation proposée est : $S = \left\{\dfrac{11\pi}{8}; \dfrac{21\pi}{16}\right\}$

Exercice 28

1) **a-** Montrons que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. On a : $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{4\pi - 3\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$

Donc : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b- Calculer $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$

On a : $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

et on a : $\tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$

2) **a-** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x - 2 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x-2=0 \iff (\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=2$$
$$\iff (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2\sqrt{2}$$
$$\iff \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\cos x+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x=\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\iff \begin{cases} x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+2k\pi & ;\ k\in\mathbb{Z} \\ ou & \\ x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi & ;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi & ;\ k\in\mathbb{Z} \\ ou & \\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi & ;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (2) : $\dfrac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}=(2-\sqrt{3})$

L'équation (2) est définie si et seulement si : $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}\right)$ et $\sqrt{3}-\tan x\neq 0$. Et on a : $\sqrt{3}-\tan x=0 \iff \tan x=\sqrt{3}$

$$\iff \tan x=\tan\frac{\pi}{3}$$
$$\iff x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Donc l'équation est définie sur l'ensemble D tel que :

$$D=IR-\left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$$

Soit x un élément de D, on a :

$$\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan x}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x}=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan x}=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc : $\dfrac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}=2-\sqrt{3} \iff \tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{12}$

$$\iff x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est :

$$S=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 29

1) a- Vérifions que : $(\cos x+\sin)^2=1+\sin 2x$

On a : $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x$

Puisque : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$ alors :

$(\cos x+\sin x)^2=1+\sin 2x$

b- On a : $0\leq x<\frac{\pi}{4}$ donc : $\cos x>0$ et $\sin x\geq 0$

c'est-à-dire : $\cos x+\sin x>0$ d'où : $\cos x+\sin x\neq 0$

Donc : $A(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\dfrac{1+\sin 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

Puisque : $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ alors : $A(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

- Déduction :

On a : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$

c- On a : $0\leq x<\frac{\pi}{4}$ donc : $\cos x>0$ c'est-à-dire : $\cos x\neq 0$

Donc : $A(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{\cos x(1+\tan x)}{\cos x(1-\tan x)}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

- Déduction :

On a : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}\Leftrightarrow\left(1-\tan\frac{\pi}{8}\right)A\left(\frac{\pi}{8}\right)=1+\tan\frac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{\pi}{8}\right)-1=\left(1+A\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\tan\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8}=\frac{A\left(\frac{\pi}{8}\right)-1}{A\left(\frac{\pi}{8}\right)+1}$$

Et on a : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+1$ donc : $\tan\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

2) a- Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos\frac{\pi}{8}\neq 0$

Donc : $\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}\Leftrightarrow\cos x\cos\frac{\pi}{8}-\sin x\sin\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos x-\tan\frac{\pi}{8}\sin x\right)=\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow\cos x-\tan\frac{\pi}{8}\sin x=1$$

Et on a: $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, donc :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} \Longleftrightarrow \cos x - (\sqrt{2} - 1)\sin x = 1$

b- Résolvons l'équation (E): $\cos x - (\sqrt{2} - 1)\sin x = 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos x - (\sqrt{2} - 1)\sin x = 1 \Longleftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

$$(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$S = \{2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 30

1) Déterminons l'ensemble D des réels x tels que : $\cos x + \sin x \neq 0$

Résolvons dans, l'équation : $\cos x + \sin x = 0$

On a :

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x = 0 &\Longleftrightarrow \cos x = -\sin x \\ &\Longleftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right) \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right) \\ &\Longleftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc : $\cos x + \sin x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in IR - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

D'où : $D = IR - \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) a- Montrons que : $(E) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x$

Soit x un élément de D, on a :

$$\begin{aligned} (\cos x + \sin x)^3 &= \cos^3 x + 3\cos^2 x \sin x + 3\cos x \sin^2 x + \sin^3 x \\ &= \cos^3 x + \sin^3 x + 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

Donc : $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)^3 - 3\cos x \sin x(\cos x + \sin x)$

D'où :

$$\frac{\sin^3x+\cos^3x+2}{\sin x+\cos x}=\frac{(\cos x+\sin x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)+2}{\sin x+\cos x}$$
$$=(\sin x+\cos x)^2-3\sin x\cos x+\frac{2}{\sin x+\cos x}$$
$$=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x-3\sin x\cos x+\frac{2}{\sin x+\cos x}$$
$$=1-\sin x\cos x+\frac{2}{\sin x+\cos x}$$

Donc : $(E)\Leftrightarrow 1-\sin x\cos x+\dfrac{2}{\sin x+\cos x}=3(1-\sin x\cos x)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin x+\cos x}=2-2\sin x\cos x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$$

b- Montrons que : $(E)\Leftrightarrow t^3-3t+2=0$

On pose $t=\sin x+\cos x$, on a : $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x$
$$=1+2\sin x\cos x$$

Donc : $t^2=1+2\sin x\cos x$ .D'où : $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}$

Par suite, on a : $(E)\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t}=1-\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1=t-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t$$
$$\Leftrightarrow t^3-3t+2=0$$

c- Déduisons les solutions de l'équation (E):

Soit $x\in D$, on a : $(E)\Leftrightarrow t^3-3t+2=0$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t-2)=0$$
$$\Leftrightarrow t=1\ ou\ t^2+t-2=0$$

(On remarque que 1 est une solution évidente de l'équation : $t^3-3t+2=0$ puis on factorise par $t-1$).

Puisque l'équation : $t^2+t-2=0$ admet deux solutions : $t_1=1$ et $t_2=-2$.

Alors : $(E)\Leftrightarrow t=1$ ou $t=-2$

c'est-à-dire : $(E)\Leftrightarrow(\cos x+\sin x=1\ ou\ \cos x+\sin x=-2$

(car : $t=\cos x+\sin x$)

Puisque :

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Alors : $\cos x + \sin x = 1 \iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\iff \left(x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\iff (x = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,; k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

et on a : $\cos x + \sin x = -2 \iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

Impossible car : $(\forall x \in IR) ; -1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ et $-\sqrt{2} < -1$

Donc : $S_2 = \phi$ puisque : $S_1 \subset D$ et $S_2 = \phi$. Alors : $S = S_1 \cup S_2 = S_1$

4 Inéquations trigonométriques

1- Inéquations: $\sin x \ge a$ et $\sin x \le a$

La résolution de ce type d'inéquations se fait sur le cercle trigonométrique.

Exemple:

Résolvons dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation: $\sin x \ge \frac{1}{2}$

On a: $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

Soit M le point du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ ayant pour abscisse curviligne principale $\frac{\pi}{6}$.

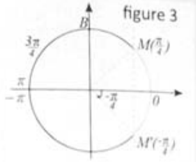
figure 1

Soit M' le point du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ ayant pour abscisse curviligne principale $\frac{5\pi}{6}$.

Les solutions de l'inéquation $\sin x \ge \frac{1}{2}$ sont les abscisses curvilignes comprises entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; soit les points du cercle $(\mathscr{C})$ situés sur l'arc rouge (voir figure 1). Donc l'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi[$ de l'inéquation $\sin x \ge \frac{1}{2}$ est $S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

2- Inéquations: $\cos x \geq a$ et $\cos x \leq a$

Exemple:



Résolvons dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation:

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

On considère les points $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $M'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$.

Les solutions de l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les abscisses curvilignes comprises entre $-\pi$ et π des points de $(\mathscr{C})$ situés sur l'arc rouge (voir figure 3). Donc $S = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

3- Inéquations: $\tan x \geq a$ et $\tan x \leq a$

La résolution de ce type d'inéquation se base sur le cercle trigonométrique.

Exemple :

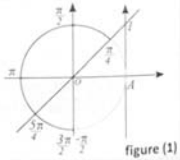


figure (1)

Résolvons dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ l'inéquation:

$\tan x \geq 1$

On a: $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

En utilisant la figure (1); l'ensemble des solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ de l'inéquation $\tan x \geq 1$ est:

$S = \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Exercices

Exercice 31

Résoudre dans l'intervalle I, les inéquations suivantes :

1) $I = [-\pi;3\pi]$; $\sqrt{3}\tan x + 1 \geq 0$

2) $I = \left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$; $2\sin x\cos x < -\sqrt{3}\sin x$

3) $I = \left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$; $\frac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$

4) $I = [-\pi;3\pi]$; $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos x - 1} \leq 0$

5) $I = \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$; $2\sin 2x \leq \sqrt{3}$

6) $I = [0;\pi]$; $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \geq 1$

7) $I = \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$; $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 > 0$

8) $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$; $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$

9) $I=\left[-\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{3}\right]$; $\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq -1$

10) $I=[-\pi;2\pi]$; $4\sin^2x-(2-2\sqrt{3})\cos x<4-\sqrt{3}$

11) $I=\left]-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$; $-4\cos^2x+(2\sqrt{2}-2)\sin x-\sqrt{2}+4<0$

Exercice 32

1) Montrer que : $(\forall x\in IR); 1+\sin 8x=2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$ l'inéquation : $\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{1}{2}$

Exercice 33

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E): 2\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x-1=0$

1) a) Montrer que : $2\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x-1=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

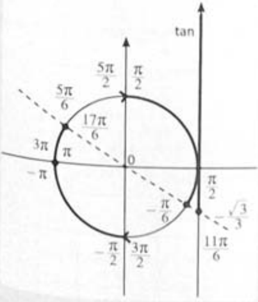
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E).

2) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation :

$2\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x-1\geq 0$

Solutions

Exercice 31



1) Résolvons dans l'intervalle $I=[-\pi;3\pi]$ l'inéquation:

(I_1): $\sqrt{3}\tan x+1\geq 0$

Soit $x\in I$, tel que : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$,

On a :

$\sqrt{3}\tan x+1\geq 0\iff\tan x\geq-\frac{\sqrt{3}}{3}$

et $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\tan x=\frac{-\pi}{6}+k\pi$

En utilisant le cercle trigonométique (observer les arcs colorés), on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$ est:

$$S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{17\pi}{6}; 3\pi\right[$$

2) Résolvons dans l'intervalle $I = \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$:

l'inéquation : (I_2): $2\sin x\cos x < -\sqrt{3}\sin x$

Soit $x \in I$, on a : $2\sin x\cos x < -\sqrt{3}\sin x \iff \sin x(2\cos x + \sqrt{3}) < 0$

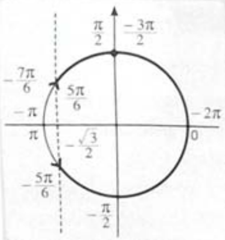
* Le tableau de signe de $\sin(x)$ sur l'intervalle $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ est:

x	-2π		$-\pi$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	+	0	-	0	+	

Et on a : $\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3} = 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \left(x = -\frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6}\right)$

On a : $\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3} > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in I \end{cases}$

$$\iff x \in \left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$$



Donc le tableau de signe de $2\cos x + \sqrt{3}$ est :

x	-2π		$-\frac{7\pi}{6}$		$-\frac{5\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos + \sqrt{3}$		+	0	-	0	+	

Le tableau de signe de : $\sin x(2\cos x + \sqrt{3})$ sur l'intervalle I.

x	-2π		$-\frac{7\pi}{6}$		$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$2\cos + \sqrt{3}$		+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$\sin x(2\cos x + \sqrt{3})$	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

D'où l'ensemble de solutions de l'inéquation $\sin x(2\cos x+\sqrt{3})<0$ sur l'intervalle $\left[-2\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ est : $\left]-\frac{7\pi}{6};-\pi\right[\cup\left]-\frac{5\pi}{6};0\right[$

3) Résolvons dans l'intervalle $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, l'inéquation : (I_3): $\frac{\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}\geq 0$

Soit $x\in I$, on a :

l'inéquation (I_3) est définie si et seulement si : $\sin x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$

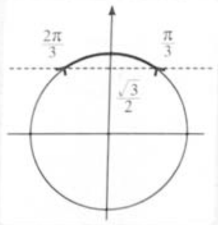
On a : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

Donc l'inéquation (I_3)

est définie sur $I-\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$



* Signe de $2\sin x-\sqrt{3}$ sur $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

On a : $\begin{cases}2\sin x-\sqrt{3}>0\\ x\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x\in I\end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$

Donc le tableau de signe de $2\sin x-\sqrt{3}$ est :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$2\sin x-\sqrt{3}$		-	0	+	0	-	

* Signe de $\cos x$ sur l'intervalle $I=\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	0	+	0	-	0	+	

D'où le signe du quotient $\dfrac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}}$ sur l'intervalle I est :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	0	+	|	+	0	-	|	-	0	-	
$2\sin x - \sqrt{3}$		-	0	+		+	0	-		-	
$\dfrac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}}$	0	-	||	+	0	-	||	+	0	-	

Par suite l'ensemble de solutions de l'inéquation $\dfrac{\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ est : $S = \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

4) Résolvons dans l'intervalle $I = [-\pi; 3\pi]$ l'inéquation: (I_4): $\dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos x - 1} \leq 0$

* L'inéquation est définie si et seulement si : $\sqrt{2}\cos x - 1 \neq 0$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Résolvons l'équation $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$:

Soit $x \in I$, on a : $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\iff \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble de solutions de l'équation $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$ est : $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right\}$

D'où l'inéquation (I_4) est définie sur : $I - \left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}\right\}$

* Résolvons l'inéquation (I_4):

* Signe de : $\tan x - \sqrt{3}$ sur l'intervalle I :

Soit $x \in I - \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}$.

- On a : $\tan x - \sqrt{3} = 0 \iff \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi \;\; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right\} \quad (\text{car } x \in I)$$

- On a : $\tan x - \sqrt{3} > 0 \iff \tan x > \sqrt{3}$

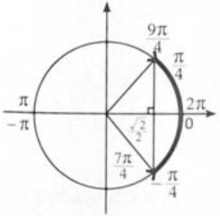
$$\iff x \in \left]-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}\right[$$

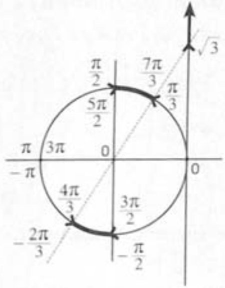
* Signe de : $\sqrt{2}\cos x - 1$ sur l'intervalle I :

Soit $x \in I$:

On a : $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \iff \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\iff x \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right[$$





* Tableau de signe de $\dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos x - 1}$:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{3}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$\tan x - \sqrt{3}$		-	0	+	‖	-		-		-	0	+	‖	-	0	+	‖	-		-	0	+		+	‖	-	
$\sqrt{2}\cos x - 1$		-		-		-	0	+	0	-		-		-		-		-	0	+		+	0	-		-	
$\frac{\tan x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos x - 1}$		+	0	-	‖	+	‖	-	‖	+	0	-	‖	+	0	-	‖	+	‖	-	0	+	‖	-	‖	+	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cos x - 1} \leq 0$ sur l'intervalle I est :

$$S = \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}\right[$$

5) Résolvons dans l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ l'inéquation (I_5): $2\sin 2x \leq \sqrt{3}$:

Soit $x \in I$, on pose : $X = 2x$, donc : $X \in [-\pi, 2\pi]$

On a : $\begin{cases} 2\sin 2x \leq \sqrt{3} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin X \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\pi \leq X \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow X \in \left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) dans l'intervalle I est :
$S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

6) Résolvons dans l'intervalle $I = [0; \pi]$, l'inéquation : (I_6): $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \geq 1$

Soit $x \in I$, on a : $X = x - \frac{\pi}{8}$, donc : $X \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$

On a : $\begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \geq 1 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin X \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\pi}{8} \leq X \leq \frac{7\pi}{8} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_6) dans l'intervalle I est:
$S = \left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$

7) Résolvons dans l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation
(I_7): $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 > 0$

Soit $x \in I$, on pose : $X = 4x - \frac{\pi}{3}$, donc : $-\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{3}$

On a : $\begin{cases} 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 > 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos X > \frac{1}{2} \\ -\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{3}$$

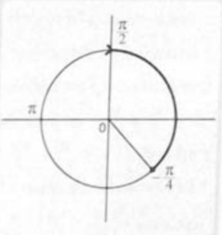
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < 4x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) dans l'intervalle I est:
$S = \left]0; \frac{\pi}{6}\right[$

8) Résolvons dans l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ l'inéquation:
(I_8): $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Soit $x \in I$, on a : $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ on pose $X = \frac{x}{2}$ et $Y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

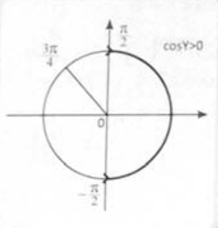


- On a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \cos X > 0 \\ -\frac{\pi}{4} \leq X \leq \pi \end{cases}$

$$\iff -\frac{\pi}{4} \leq X < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$$

Et on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ x \in I \end{cases} \iff x = \pi$



- On a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \cos Y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < Y < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

Et on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} \cos Y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\iff Y = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } Y = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

Donc le tableau de signe du produit $\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle I :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		π		2π
$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$		+		+	0	-	
$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	0	+	0	-		-	
$\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$	0	+	0	-	0	+	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_8) dans l'intervalle I est:

$S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup [\pi; 2\pi]$

9) Résolvons dans l'intervalle $I = \left[-\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation(I_9): $\sqrt{3}\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$

* Ensemble de définition :

L'inéquation (I_9) est définie si et seulement si :

$2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

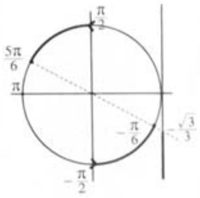
c'est-à-dire : $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

* Résolvons l'inéquation (I_9):

Soit $x \in I - \left\{\frac{\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right\}$ $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \in I \iff k = 0\right.$ ou $\left.k = -1\right)$

On pose : $X = 2x + \frac{\pi}{3}$,

donc : $-\frac{\pi}{2} < X \leq \pi$ avec $X \neq \frac{\pi}{2}$



On a : $\begin{cases} \sqrt{3}\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -1 \\ x \in \left(I - \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{12}\right\}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} \tan X \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ X \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < X \leq -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < X \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\iff -\frac{5\pi}{12} < x \leq -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{12} < x \leq \frac{\pi}{4}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_9) dans l'intervalle I est:

$S = \left]-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}\right]$

10) Résolvons dans l'intervalle $I = [-\pi; 2\pi]$ l'inéquation (I_{10}):

Soit $x \in I$, on a : $(I_{10}) \iff 4(1 - \cos^2 x) - (2 - 2\sqrt{3})\cos x < 4 - \sqrt{3}$

$$\iff 4\cos^2 x + (2 - 2\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} > 0$$

On pose : $X = \cos x$, l'inéquation (I_{10}) devient : $4X^2 + (2 - 2\sqrt{3})X - \sqrt{3} > 0$

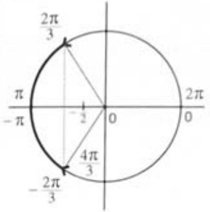
Le discriminant de l'équation $4X^2 + (2 - 2\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$est :

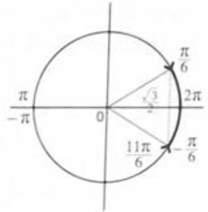
$\Delta = 16 + 8\sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{3})^2$ et ses solutions sont: $-\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $4X^2 + (2 - 2\sqrt{2})X - \sqrt{3} > 0 \iff X < -\frac{1}{2}$ ou $X > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\iff \cos x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Puisque l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x < -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ est: $S = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right[$ et l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ est : $S = \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$





Alors l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_{10}) dans l'intervalle $[-\pi; 2\pi]$ est:

$S = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

11) Résolvons dans l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ l'inéquation (I_{11}):

Soit $x \in I$,

on a : $(I_{11}) \iff -4(1-\sin^2 x) + (2\sqrt{2}-2)\sin x - \sqrt{2} + 4 < 0$

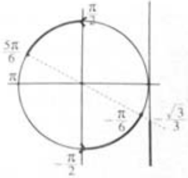
$\iff 4\sin^2 x + (2\sqrt{2}-2)\sin x - \sqrt{2} < 0$

On pose : $X = \sin x$, l'inéquation (I_{11}) : $4X^2 + (2\sqrt{2}-2)X - \sqrt{2} < 0$

Le discriminant du polynôme $4X^2 + (2\sqrt{2}-2)X - \sqrt{2}$ est :

$\Delta = 12 + 8\sqrt{2} = (2+2\sqrt{2})^2$

est ses solutions sont : $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



Donc :

$$4X^2 + (2\sqrt{2}-2)X - \sqrt{2} < 0 \iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < X < \frac{1}{2}$$

$$\iff -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation

(I_{11}) est : $S = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice 32

1) Montrons que : $1+\sin 8x = 2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule : $2\cos^2 a = 1+\cos 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,

On a :

$$2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) = 1+\cos\left(2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1+\cos\left(8x-\frac{\pi}{2}\right) = 1+\sin 8x$$

Donc : $(\forall x \in IR); 1+\sin 8x = 2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résolvons dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$ l'inéquation : $\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$, on a : $\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1+\sin 8x \leq 1$$

Puisque : $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow -\pi \leq 8x \leq \pi \Leftrightarrow \sin 8x \leq 0$

alors : $\begin{cases} \sin 8x \leq 0 \\ -\pi \leq 8x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow (-\pi \leq 8x \leq 0 \text{ ou } 8x = \pi)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-\pi}{8} \leq x \leq 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{8}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left[\frac{-\pi}{8};0\right] \cup \left\{\frac{\pi}{8}\right\}$

Exercice 33

1) a- Montrons que : $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc :

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$$

$$= 2\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

D'où : $(\forall x \in IR); 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

b- Résolvons l'équation (E).

Soit $x \in \mathbb{R}$,

on a : $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\Longleftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est: $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Résolvons dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation :

$2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 \geq 0$

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, on a : $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

et $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow 0 \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$

Puisque : $\begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \\ 0 \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \pi \end{cases} \Longleftrightarrow 0 \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Longleftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$$

alors : $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}\right]$

Exercices de synthèse

Exercice 34

Soit le polynôme : $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$

On pose : $a = \cos\frac{\pi}{9}$; $b = \cos\frac{7\pi}{9}$ et $c = \cos\frac{13\pi}{9}$

1) Montrer que les nombres a, b et c sont racines du polynôme $P(x)$.

2) En déduire la valeur de chacun des nombres suivants :

$A = \cos\frac{\pi}{9} . \cos\frac{7\pi}{9} . \cos\frac{13\pi}{9}$

$B = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$

$C = \cos\frac{\pi}{9} . \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9} . \cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} . \cos\frac{13\pi}{9}$

Exercice 35

Soit α et β deux réels différents de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\tan\alpha$ et $\tan\beta$ sont les solutions de l'équation: $x \in IR$; $x^2 + px + q = 0$ avec $q \neq 1$.

1) Montrer que : $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{p}{q-1}$

2) Montrer que : $\cos^2(\alpha + \beta) = \dfrac{(q-1)^2}{p^2 + (q-1)^2}$

3) En déduire que :

$\sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta).\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta) = q$

Exercice 36

Soit α et β deux réels différents de $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On pose : $a = \sin\alpha + \sin\beta$ et $b = \cos\alpha + \cos\beta$

1) Montrer que : $\tan\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

2) Montrer que : $\dfrac{a}{b} = \tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

3) Montrer que : $\tan\dfrac{\alpha}{2} + \tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{4a}{a^2 + b^2 + 2b}$

Exercice 37

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$

2) $B = \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}$

3) $C = \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta$

4) $D = \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

5) $E = \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$

Exercice 38

ABC est un triangle d'angles $\hat{A}$; $\hat{B}$ et $\hat{C}$ de mesures respectives $\frac{\pi}{7}$; $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{4\pi}{7}$.

On pose : $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

1) Montrer que : $2\cos\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{b}{a}$

2) Montrer que : $\cos\dfrac{\pi}{7}.\cos\dfrac{2\pi}{7}.\cos\dfrac{4\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}$

Exercice 39

Montrer que : (1) $\sin\dfrac{\pi}{9}.\sin\dfrac{2\pi}{9}.\sin\dfrac{3\pi}{9}.\sin\dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{3}{16}$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{9}.\cos\dfrac{2\pi}{9}.\cos\dfrac{3\pi}{9}.\cos\dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{1}{16}$

(3) $\dfrac{1}{2} + \cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{6\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 0$

Exercice 40

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x$

1) Montrer que : $(\forall x \in IR)$; $g(x) = \sin 2x \sin 3x$

2) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'inéquation : $g(x) > 0$

3) a) Vérifier que : $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$

b) Soit ABC un triangle tel que : $B\hat{A}C = \frac{4\pi}{7}$ et $A\hat{B}C = \frac{2\pi}{7}$

On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

Exercice 41

Pour tout nombre réel x, on pose : $A(x) = \cos(6x) - 5\cos(2x)$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos(6x) - \cos(2x) = -4\sin^2(2x).\cos(2x)$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $A(x) = -4\cos(2x)(1 + \sin^2(2x))$

2) a) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ l'équation : $A(x) = 0$.

b) Résoudre dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right[$ l'inéquation: $A(x) \geq 0$.

Exercice 42

Pour tout nombre réel x, on pose : $A(x) = 2\cos^3 x - \cos x + 2\sin x - 2\sin^3 x$.

1) a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :

$\sin x - \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos x$ et $2\cos^3 x - \cos x = \cos 2x \cos x$

b) En déduire que : $(\forall x \in IR)$: $A(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).\cos x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$

3) Montrer que : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$; $A(x) \geq 0$.

Exercice 43

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\cos^2 x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x \cos x$

1) Montrer que : $(\forall x \in IR)$: $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2}$

2) Calculer $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$

3) Montrer que : $(\forall x \in IR)$: $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$

Exercice 44

Pour tout nombre réel x on pose : $A(x) = \sqrt{3}\sin 4x - 8\sin^2 x\cos^2 x$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2\cos x - 1 = 0$

2) a) Montrer que : $(\forall x \in IR) ; 1 - \cos 4x = 8\sin^2 x\cos^2 x$

b) En déduire que : $(\forall x \in IR) ; A(x) = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $A(x) = 0$.

b) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation $A(x) \leq 0$.

Exercice 45

1) Montrer que pour tout réel x, on a :

$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 3x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2) Résoudre dans l'équation : $\sin x + 2\sin 3x - \sqrt{3}\cos x = 0$

3) Résoudre dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $\sin x + 2\sin 3x - \sqrt{3}\cos x \leq 0$.

Exercice 46

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

1) a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Vérifier que f est impaire et que : $(\forall x \in D) ; f(\pi - x) = -f(x)$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in D) ; f(x) = \tan x$

b) Résoudre dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $f(x) > 1$.

Exercice 47

Pour tout nombre réel x, on pose : $P(x) = \sin 2x + \cos 2x - 1 + \sin x - \cos x$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sin 2x + \cos 2x - 1 = 2\sin x(\cos x - \sin x)$

b) Montrer que: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pour tout réel x.

c) En déduire que : $P(x) = \sqrt{2}(2\sin x - 1)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, pour tout réel x.

2) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation : $P(x) = 0$.

3) Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 48

Pour tout nombre réel x, on pose : $A(x) = \cos 3x + 2\cos x\sin 2x - 3\sin x$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; A(x) = (\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 3)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'inéquation : $A(x) \leq 0$.

Exercice 49

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes : (E_1): $\sin(7x) - \sin(x) = \sin(3x)$

(E_2): $\cos(2x) - (\sqrt{3} + 4)\cos x + 1 = -2\sqrt{3}$, puis donner les solutions de l'équation (E_2) dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: (E): $m\cos x - \sin x = m + 1$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 50

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation : $\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}$ (1)

Exercice 51

1) Soit x un nombre réel.

Montrer que : $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^6 2x + \sin^6 2x = \frac{13}{16}$.

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ l'inéquation: $\cos^6 x + \sin^6 x \leq \frac{7}{16}$.

Exercice 52

1) Soit a un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$\cos(a)\cos(2a)\cos(4a)\ldots\cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$

2) En déduire la valeur du produit : $\cos\frac{\pi}{17}.\cos\frac{2\pi}{17}.\cos\frac{4\pi}{17}.\cos\frac{8\pi}{17}$

Solutions

Exercice 34

1) On pose : $x = \cos t$

$$\begin{aligned}
P(x) &= 8\cos^3 t - 6\cos t - 1 \\
&= 2(4\cos^3 t - 3\cos t) - 1 \\
&= 2\cos t(4\cos^2 t - 3) - 1 \\
&= 2\cos t(2\cos^2 t - 1 + 2\cos^2 t - 2) - 1 \\
&= 2\cos t(\cos(2t) - 2\sin^2 t) - 1 \\
&= 2(\cos t\cos 2t - 2\cos t\sin t\sin t) - 1 \\
&= 2(\cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t) - 1 \\
&= 2\cos(3t) - 1
\end{aligned}$$

$$2\cos 3t - 1 = 0 \iff \cos 3t = \frac{1}{2}$$
$$\iff 3t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } 3t = -\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\iff t = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Pour : $t = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$, on a :

- Pour $k = 0$, on a : $t = \frac{\pi}{9}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{9}$ est une solution de l'équation $P(x) = 0$

- Pour $k = 1$, on a : $t = \frac{7\pi}{9}$

Donc : $\cos\frac{7\pi}{9}$ est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

- Pour $k = 2$, on a : $t = \frac{13\pi}{9}$

Donc : $\cos\frac{13\pi}{9}$ est une solution de l'équation $P(x) = 0$

Par suite, les nombres a, b et c sont des solutions de l'équation $P(x) = 0$ et puisque $\deg P = 3$, alors l'équation $P(x) = 0$ a pour ensemble de solutions : $S = \{a, b, c\}$.

2) Déduisons les valeurs de A, B et C :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = 8(x-a)(x-b)(x-c)$
$$= 8(x^2 - (a+b)x + ab)(x-c)$$
$$= 8x^3 - 8(a+b+c)x^2 + 8(ab+bc+ca)x - 8abc$$

et on a : $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$

Donc : $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ 8(ab+bc+ac) = -6 \\ -8abc = -1 \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ ab+bc+ac = -\frac{3}{4} \\ abc = \frac{1}{8} \end{cases}$

Par suite : $\begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = 0 \\ C = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Exercice 35

1) Montrons que : $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{p}{q-1}$

On a : $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ sont les solutions de l'équation : $x^2+px+q=0$ donc :

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-p\\ \tan\alpha\tan\beta=q\end{cases}$$

Puisque : $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, alors : $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{-p}{1-q}=\dfrac{p}{q-1}$

2) On a : $\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{p^2}{(q-1)^2}}=\dfrac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$

3) Déduction :

On pose : $A=\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$

On a : $A=\cos^2(\alpha+\beta)(\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q)$

Donc : $$A=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}\times\left(\frac{p^2}{(q-1)^2}+\frac{p^2}{q-1}+q\right)$$
$$=\frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}\times\left(\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{p^2+(q-1)^2}\left(q(p^2+(q-1)^2\right)=q$$

Donc : $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q$

Exercice 36

1) On a : $$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right)}$$
$$=\frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Donc : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \dfrac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

2) Montrons que : $\frac{a}{b} = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

3) Montrons que : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \dfrac{4a}{a^2+b^2+2b}$

$$\frac{4a}{a^2+b^2+2b} = \frac{4(\sin\alpha + \sin\beta)}{2 + 2\cos(\alpha-\beta) + 2(\cos\alpha + \cos\beta)}$$

$$= \frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{1 + \cos(\alpha-\beta) + \cos\alpha + \cos\beta}$$

$$= \frac{4\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Exercice 37

Remarque : Ces expressions seront simplifiées dans leur ensemble de définition, c'est pour cela que le réel α est pris dans l'ensemble de définition.

1) Simplifions l'expression A:

On a : $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Donc : $A = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) \times \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$

2) Simplifions l'expression B:

$$\begin{aligned}B &= \frac{2\cos^2(\alpha)-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)}\\ &= \frac{\cos(2\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}\\ &= 1\end{aligned}$$

3) Simplifions l'expression C :

On a :

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2\\ &= 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha)\cos(2\beta) &= (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\\ &= \cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta\end{aligned}$$

Donc : $C = \cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta$

$= (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\beta+\sin^2\beta) = 1$

4) Simplifions l'expression D:

On a :
$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha &= \sin 3\alpha+(\sin\alpha+\sin 5\alpha)\\ &= \sin 3\alpha+2\sin 3\alpha\cos(2\alpha)\\ &= \sin(3\alpha)(1+2\cos(2\alpha))\end{aligned}$$

et :
$$\begin{aligned}(\cos\alpha+\cos 5\alpha)+\cos 3\alpha &= 2\cos 3\alpha\cos 2\alpha+\cos(3\alpha)\\ &= \cos(3\alpha)(1+2\cos(2\alpha))\end{aligned}$$

Donc :
$$\begin{aligned}D &= \frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}\\ &= \frac{\sin 3\alpha(1+2\cos(2\alpha))}{\cos 3\alpha(1+2\cos(2\alpha))} = \tan(3\alpha)\end{aligned}$$

$\sin p+\sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

5) Simplifions l'expression E :

On a : $\sin\alpha + \sin 7\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 3\alpha$

et : $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 2\sin 4\alpha \cos\alpha$

Donc : $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 2\sin(4\alpha)(\cos 3\alpha + \cos\alpha)$

De la même façon on trouve:

$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha = 2\cos(4\alpha)(\cos 3\alpha + \cos\alpha)$

D'où : $E = \tan(4\alpha)$

Exercice 38

1) Montrons que : $2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{b}{a}$

On a : $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{a} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{b} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{b}$

Donc : $\frac{b}{a} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$; $\left(0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \neq 0\right)$

2) Montrons que : $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

On a : $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{b} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{c} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{c}$

Donc : $\frac{c}{b} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

Et on a : $\frac{c}{a} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}$

D'où : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \frac{b}{2a} \times \frac{c}{2b} \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{c}{a} \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

Puisque : $\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \neq 0$

Alors : $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

Exercice 39

• Montrons que : (1) $\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{3\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$

On a : $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{9}\right)$

Puisque : $\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

Alors : $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\right)$

Et on a : $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right)\right)\right)$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Or : $\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)=\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{9}\right)=\sin\frac{4\pi}{9}$

D'où : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{9}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{8}\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{16}$

D'où : (1) $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$

• Montrons que : (2) $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{3\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$

On pose : $A=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\times A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right)\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

Et on a : $\sin\frac{8\pi}{9}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{9}$ et $\sin\frac{\pi}{9}\neq 0$ donc : $A=\frac{1}{8}$

Puisque : $\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, alors : $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$

• Montrons que : (3) $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)=0$

On a : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

$\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

D'où : $B = \frac{1}{2} + \left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right)$

$= \frac{1}{2} + 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)$

Puisque : $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

Alors : $B = \frac{1}{2} + 4\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$

$= \frac{1}{2} - 4\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{8}\right) = 0$

(car : $A = \frac{1}{8}$)

Exercice 40

1) Montrons que : $(\forall x \in IR)$; $g(x) = \sin 2x \sin 3x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \sin x(\sin 4x + \sin 2x)$

$$= \sin x\left(2\sin\left(\frac{4x + 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x - 2x}{2}\right)\right)$$
$$= \sin x(2\sin 3x \cos x)$$
$$= \sin 3x(2\sin x \cos x)$$
$$= \sin 3x . \sin 2x$$

Donc : $(\forall x \in IR); g(x) = \sin 2x \sin 3x$

2) Résolvons dans l'intervalle $[0; \pi]$ l'inéquation : $g(x) > 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin 2x$	0	+		+	0	-		-	0
$\sin 3x$	0	+	0	-		-	0	+	0
$g(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > 0$ dans l'intervalle $[0; \pi]$ est: $S = \left]0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$

3) a- Vérifions que : $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7} . \sin\frac{4\pi}{7}$

On a : $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

Donc : $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

b- Montrons que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

On pose : $k = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{a} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{b} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{c}$ (D'après les relations du sinus dans un triangle) donc: $ka = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right); kb = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $kc = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

Puisque : $g\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ alors :

$\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

Donc : $k^2ac + k^2bc = k^2ba$, c'est-à-dire : $ac + bc = ab$

D'où : $\frac{ac}{abc} + \frac{bc}{abc} = \frac{ab}{abc}$, signifie que : $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c}$

Exercice 41

1) a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(6x) - \cos(2x) = -4\sin^2(2x).\cos(2x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$;

En appliquant la formule : $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On a : $\cos(6x) - \cos(2x) = -2\sin(4x).\sin(2x)$

Puisque : $\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2\sin(2x).\cos(2x)$

Alors : $\cos(6x) - \cos(2x) = -4\sin^2(2x).\cos(2x)$

Donc : $(\forall x \in IR); \cos(6x) - \cos(2x) = -4\sin^2(2x)\cos(2x)$

b- Déduction : Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$A(x) = (\cos(6x) - \cos(2x)) - 4\cos(2x) = -4\sin^2(2x)\cos(2x) - 4\cos(2x)$

$= -4\cos(2x)(\sin^2(2x) + 1)$

Donc : $(\forall x \in IR); A(x) = -4\cos(2x)(\sin^2(2x) + 1)$

2) a- Résolvons dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ l'équation $A(x) = 0$:

Soit $x \in]-\pi, \pi[$,

on a : $A(x) = 0 \Leftrightarrow -4\cos(2x)(1 + \sin^2(2x)) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $1 + \sin^2(2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ (Car : $1 + \sin^2(2x) > 0$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Puisque : $x \in]-\pi,\pi[$, alors : $\cos(2x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans l'intervalle $]-\pi,\pi[$ est: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$

b- Résolvons dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ l'inéquation : $A(x) \geq 0$

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$, on a : $1 + \sin^2(2x) > 0$, donc :

$$\begin{aligned} A(x) \geq 0 &\iff -4\cos(2x)(1+\sin^2(2x)) \geq 0 \\ &\iff -4\cos(2x) \geq 0 \\ &\iff \cos(2x) \leq 0 \end{aligned}$$

Et on a : $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2}$

Donc : $\cos 2x \leq 0 \iff \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2}$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation : $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Exercice 42

1) **a-** Montrons que : $\sin x - \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin 2x \cos x$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, donc : $\frac{1}{2}\sin 2x \cos x = \sin x \cos^2 x$

et on a : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc :

$\frac{1}{2}\sin 2x \cos x = \sin x(1 - \sin^2 x) = \sin x - \sin^3 x$

- Montrons que : $2\cos^3 x - \cos x = \cos 2x \cos x$ pour tout réel x.

On a : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ donc :

$\cos(2x).\cos x = (2\cos^2 x - 1)\cos x = 2\cos^3 x - \cos x$

b- Déduction :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= (2\cos^3 x - \cos x) + 2(\sin x - \sin^3 x) = \cos 2x \cos x + \sin 2x \cos x \\ &= (\cos 2x + \sin 2x)\cos x \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin 2x &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Alors : $A(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x$ donc :

$(\forall x \in IR); A(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $A(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $A(x) = 0 \iff \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x = 0$

$$\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ou } \cos x = 0$$

Et on a : $\bullet \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $A(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) Montrons que $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]\right); A(x) \geq 0$

Puisque $\cos x > 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$ alors le signe de $A(x)$ est celui de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ On a : $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\iff -\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ d'où : $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]\right); A(x) \geq 0.$

Exercice 43

1) Montrons que : $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\cos^2 x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})\sin^2 x + 2\sin x\cos x$

$$= \sqrt{2}(\cos^2 + \sin^2 x) + \sqrt{3}(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin 2x$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3}(\cos 2x) + \sin 2x$$

$$= \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2}$$

(car: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ et $2\sin x\cos x = \sin 2x$)

2) Calculons $f\left(\frac{37\pi}{8}\right)$ et $f\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$:

On a : $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2}$

Donc : $f\left(\frac{37\pi}{8}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{37\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{37\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = \sqrt{3}\cos\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}$

$$= \sqrt{3}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = -\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}$$

$$= -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

D'où : $f\left(\frac{37\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

$f\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) + \sin\left(2\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) + \sqrt{2}$

$\cos\left(2 \times \left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) = \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(2 \times \left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Donc : $f\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$

3) Montrons que : $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$

$$f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + \sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sqrt{2}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right) + \sqrt{2} = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}$

4) a- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Longleftrightarrow 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{24} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

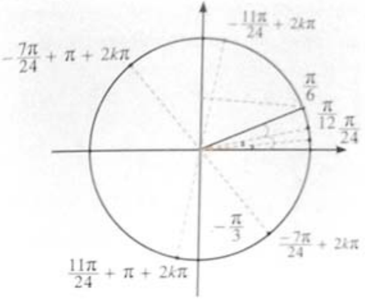
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{\frac{11\pi}{24} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{24} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Représentons les solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique:

$\frac{11\pi}{24} = \frac{12\pi - \pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$

$-\frac{7\pi}{24} = \frac{-8\pi + \pi}{24} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{24}$



Pour représenter $\frac{\pi}{24}$ on représente $\frac{\pi}{6}$ puis $\frac{\pi}{12}$ puis $\frac{\pi}{24}$ en utilisant la bissectrice d'un angle.

Les nombres $\frac{11\pi}{24} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont les abscisses currilignes de deux points diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique aussi pour les nombres $-\frac{7\pi}{24} + k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

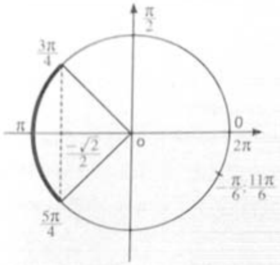
b- Résolvons l'inéquation $f(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[0, \pi]$:

Soit $x \in [0, \pi]$: $f(x) \leq 0 \iff 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} \leq 0$

$$\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose : $X = 2x - \frac{\pi}{6}$

$$x \in [0, \pi] \iff 0 \leq x \leq \pi$$
$$\iff 0 \leq 2x \leq 2\pi$$
$$\iff -\frac{\pi}{6} \leq X \leq 2\pi - \frac{\pi}{6}$$



Donc :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq 0 \\ x \in [0, \pi] \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \cos X \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] \end{array}\right.$$

Les images des solutions de l'inéquation $\cos X \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont représentées par l'arc coloré sur le cercle trigonométrique.

$$\left.\begin{array}{l}\cos X \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ X \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]\end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq X \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{24} \leq x \leq \frac{17\pi}{24}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ est: $S = \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}\right]$

Exercice 44

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2\cos x - 1 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) a- Montrons que : $1 - \cos 4x = 8\sin^2 x \cos^2 x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

En appliquant la formule : $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$1 - \cos 4x = 1 - \cos(2\times 2x) = 2\sin^2 2x$ et puisque : $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

Alors : $1 - \cos 4x = 8\sin^2 x.\cos^2 x$

Donc : $(\forall x \in IR); 1 - \cos 4x = 8\sin^2 x \cos^2 x$.

b- Déduction :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $A(x) = \sqrt{3}\sin 4x - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$$= \sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x\right) - 1$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4x\right) - 1$$

$$= 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

Donc : $(\forall x \in IR); A(x) = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

3) a- Résolvons dans $\mathbf{R}$, l'équation : $A(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$A(x) = 0 \iff 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$$

$$\iff \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \left(4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\iff \left(x = \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $A(x) = 0$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

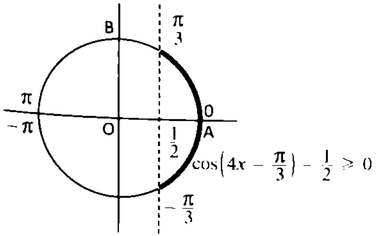
b- Résolvons l'inéquation $A(x) \leq 0$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, on a : $A(x) \leq 0 \iff \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \leq 0$.

- Tableau de signe de $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$:

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$X = 4x - \frac{\pi}{3}$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.



Exercice 45

1) Montrons que : $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 3x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Soit $x\in\mathbb{R}$, en appliquant la formule suivante :

$\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right);\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

On a : $\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}+3x\right)=2x-\frac{\pi}{6}\\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}-3x\right)=-x-\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Donc : $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 3x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où : $(\forall x\in IR);\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 3x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x+2\sin 3x-\sqrt{3}\cos x=0$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\sin x+2\sin 3x-\sqrt{3}\cos x=0\iff 2\sin 3x+2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\iff \sin 3x+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\iff 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\iff \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \text{ ou } \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

Puisque : • $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0\iff 2x-\frac{\pi}{6}=k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

$$\iff x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,;k\in\mathbb{Z}$$

et $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0\iff x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

$$\iff x=\frac{\pi}{3}+k\pi\quad;k\in\mathbb{Z}$$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

3) Résolvons l'inéquation : $\sin x + 2\sin 3x - \sqrt{3}\cos x \leqslant 0$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\sin x + 2\sin 3x - \sqrt{3}\cos x \leq 0 \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$$

- Tableau de signe de $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$X = 2x - \frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$		$-$	0	$+$	$\Vert$

- Tableau de signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$X = x + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$		$+$	0	$-$	$\Vert$

- Tableau de signe de $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 46

1) **a-** Déterminons D :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in D \iff \sin 2x \neq 0$

Et on a : $\sin 2x = 0 \iff 2x = k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

$$\iff x = \frac{k\pi}{2} \;;\, k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $D = IR - \left\{\frac{k\pi}{2} \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b- Montrons que f est impaire :

Pour tout $x \in D$, on a : $-x \in D$

et $f(-x) = \dfrac{1-\cos(-2x)}{\sin(-2x)} = \dfrac{1-\cos 2x}{-\sin 2x} = -\left(\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right) = -f(x)$

Donc : f est une fonction impaire.

- Montrons que : $(\forall x \in D)$; $f(\pi - x) = -f(x)$

Soit $x \in D$, on a : $\sin(2(\pi - x)) = \sin(2\pi - 2x) = \sin(-2x) = -\sin(2x)$

Et puisque : $\sin 2x \neq 0$ alors : $\sin(2(\pi - x)) \neq 0$ c'est-à-dire : $\pi - x \in D$

Donc :

$f(\pi - x) = \dfrac{1-\cos(2(\pi - x))}{-\sin 2x} = -\left(\dfrac{1-\cos(2\pi - 2x)}{\sin 2x}\right) = -\left(\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right) = -f(x)$

D'où : $(\forall x \in D)$; $f(\pi - x) = -f(x)$.

2) a- Montrons que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = \tan x$

Soit $x \in D$, on a : $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

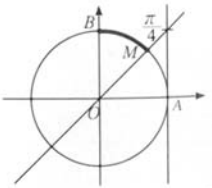
c'est-à-dire : $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

Et puisque : $\sin x \neq 0$ alors : $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

Donc : $(\forall x \in D)$; $f(x) = \tan x$.

b- Résolvons l'inéquation : $f(x) > 1$ dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ un point du cercle trigonométrique.



On a : $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$, donc les solutions de l'inéquation: $\tan x > 1$ sont les abscisses currilignes des points appartenant à l'arc orienté $\widehat{MB}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ est: $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 47

1) a- Montrons que : $\sin 2x + \cos 2x - 1 = 2\sin x(\cos x - \sin x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

c'est-à-dire : $\cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x)$

Donc : $\sin(2x) + \cos(2x) - 1 = 2\sin x \cos x - 2\sin^2(x)$

$= 2\sin x(\cos x - \sin x)$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sin 2x + \cos 2x - 1 = 2\sin x(\cos x - \sin x)$

b- Montrons que : $(\forall \in IR); \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

On a :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $(\forall x \in IR); \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

c- Déduction :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(x) = (\sin 2x + \cos 2x - 1) - (\cos x - \sin x)$$
$$= 2\sin x(\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x) = (\cos x - \sin x)(2\sin x - 1)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(2\sin x - 1)$$

Donc : $(\forall x \in IR); P(x) = \sqrt{2}(2\sin x - 1)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résolvons dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation: $P(x) = 0$.

Soit $x \in [0, 2\pi]$, on a : $P(x) = 0 \iff \sqrt{2}(2\sin x - 1)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\iff \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Et on a : $\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

et $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

3) Résolvons dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'inéquation: $P(x) \leq 0$.

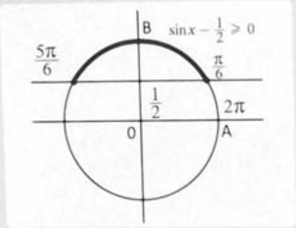
Soit $x \in [0, 2\pi]$, on a : $P(x) = 2\sqrt{2}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

- Tableau de signe de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		π
$X = x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\pi+\frac{\pi}{4}$
$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$		+	0	-	0	+	

- Tableau de signe de $\sin x - \frac{1}{2}$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
$\sin x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	



- Tableau de signe de $P(x)$ sur $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$S = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$

Exercice 48

1) a- Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x . \sin 2x$

Puisque : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Alors : $\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$

$= (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x)\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$

Donc : $(\forall x \in IR)$; $\cos 3x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$

b- Déduction :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

Donc : $2\sin 2x . \cos x - 3\sin x = 4\cos^2 x . \sin x - 3\sin x = (4\cos^2 x - 3)\sin x$

D'où : $A(x) = \cos 3x + 2\cos x . \sin 2x - 3\sin x = (4\cos^2 x - 3)\cos x + (4\cos^2 x - 3)\sin x$

Par suite : $(\forall x \in \mathbf{R})\,;\, A(x) = (\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 3)$

2) a- Résolvons dans $\mathbf{R}$ l'équation : $A(x) = 0$

Soit $x \in \mathbf{R}$, on a : $A(x) = 0 \iff (\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 3) = 0$

$$\iff \cos x + \sin x = 0 \text{ ou } 4\cos^2 x - 3 = 0$$

$$\iff \cos x + \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et on a : • $\cos x + \sin x = 0 \iff \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}$$

$$\iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}$$

• $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

• $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \iff \left(x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\right)$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $A(x) = 0$ dans $\mathbf{R}$ est :

$$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\}$$

b- Résolvons dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'inéquation : $A(x) \leq 0$.

Soit $x \in [0, \pi]$, on a : $A(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(4\cos^2 x - 3)$.

-Tableau de signe de $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

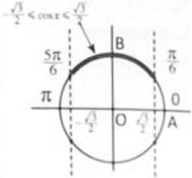
x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$X = x - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \frac{\pi}{4}$
$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$		+	0	-	

- Tableau de signe de $4\cos^2(x)-3$:

On a : $4\cos^2 x - 3 \leq 0 \iff \cos^2 x \leq \frac{3}{4}$

$$\iff |\cos x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Donc :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$4\cos^2(x)-3$		+	0	−	0	+	

- Tableau de signe de $A(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$A(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

Exercice 49

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) : $\sin(7x) - \sin(x) = \sin(3x)$

On a : $\sin 7x - \sin x = 2\cos 4x \sin 3x$

Donc : $(E_1) \iff \sin 3x(2\cos(4x) - 1) = 0$

$$\iff \sin 3x = 0 \text{ ou } \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

- $\sin 3x = 0 \iff 3x = k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

$$\iff x = \frac{k\pi}{3} ; (k \in \mathbb{Z})$$

- $\cos 4x = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z}) \\ ou \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$$\iff x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; (k \in \mathbb{Z})$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est :

$S = \left\{\frac{k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Résolvons dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ l'équation (E_2):

(E_2): $\cos(2x)-(\sqrt{3}+4)\cos(x)+1=-2\sqrt{3}$

On a : $1+\cos(2x)=2\cos^2 x$

Donc : $(E_2) \Leftrightarrow 2\cos^2 x-4\cos x-\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x-2)-\sqrt{3}(\cos x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x-\sqrt{3})(\cos x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (car } -1\leq \cos x\leq 1)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\,;(k\in\mathbb{Z})$$

D'où : $S_{[0;2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : (E): $m\cos x-\sin x=m+1$

On pose : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ avec : $x\neq\pi+2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$

On a : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dans quels cas les nombres $x=\pi+2k\pi$ sont des solutions de (E):

On a : $(\forall k\in\mathbb{Z})$; $\cos(\pi+2k\pi)=-1$ et $\sin(\pi+2k\pi)=0$

Les nombres $x=\pi+2k\pi$ sont solutions de $(E) \Leftrightarrow -m=m+1$

$$\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

- 1er cas : $m=-\frac{1}{2}$

L'équation devient $-\frac{1}{2}\cos x-\sin x=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $\cos x+2\sin x+1=0$

On a : $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ et $1+\cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $1+\cos x+2\sin x=0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z} \text{ ou } \tan\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \text{ ou } \frac{x}{2}=\alpha+k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$$

(tels que : $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$)

$\begin{cases} x=2\alpha+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z} \\ \tan\alpha=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x=\pi+k2\pi;k\in\mathbb{Z})$ ou

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est (E) dans ce cas est :

$S = \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

tel que : $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

- 2ème cas : $m \neq -\frac{1}{2}$:

Dans ce cas les nombres $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas des solutions de l'équation (E):

On peut donc poser : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $(E) \Leftrightarrow (2m+1)t^2 + 2t + 1 = 0$

$$\Delta = 4 - 4(2m+1) = -8m$$

- si $m > 0$ alors : $\Delta < 0$ donc l'équation (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- si $m = 0$ alors : $t = -1$, donc : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$, d'où : $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire : $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$ Par suite : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- si $m < 0$, alors : $\Delta > 0$, donc : $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{-2m}}{2m+1}$ et $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{-2m}}{2m+1}$

On a : $\exists! \alpha_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \tan\alpha_1 = t_1$ et $\exists! \alpha_2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \tan\alpha_2 = t_2$

Donc : $(E) \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = \tan\alpha_1$ ou $\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha_2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \alpha_1 + k\pi$ ou $\frac{x}{2} = \alpha_2 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = 2\alpha_1 + 2k\pi$ ou $x = 2\alpha_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

D'où : $S = \{2\alpha_1 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\alpha_2 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 50

- Ensemble de définition de l'inéquation: $\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\sin x}; x \in [0; 2\pi\,]$

Soit $x \in [0; 2\pi]$;

L'inéquation est définie si et seulement si : $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$

On a : $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{2}\,; k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2}\,; k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$

Sur $[0; 2\pi\,]$ les solutions sont $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$ et 2π

D'où : $\cos x \neq 0$ ou $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z})$

Par suite l'ensemble de définition de l'équation (1) est :

$D = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\cup \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$

• Résolvons dans D l'inéquation (1):

On a: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x} < 0$

Or: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Donc : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Soit $x \in D$, on a : $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x} < 0$

- Signe de $\sin 2x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

On a : $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi; (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2}; (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$2x$	0		π		2π		3π		4π
$\sin 2x$	0	+	0	-	0	+	0	-	0

- Signe de $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

On a : $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

Donc : $\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$x - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$		0		π		$\frac{7\pi}{4}$
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$		-	0	+	0	-	

- Signe de $\dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin(2x)}$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$		-	0	+		+		+	0	-		-	
$\sin 2x$	0	+		+	0	-	0	+		+	0	-	0
$\dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin(2x)}$	||	-	0	+	||	-	||	+	0	-	||	+	||

D'où les solutions de l'inéquation (1) dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ est :

$S = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 51

1) Montrons que : $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

[Rappel : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 ; (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$].

On a : $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3 = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)$

Puisque : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ alors : $\cos^6 x \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x \sin^2 x$

Et on a : $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ donc : $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$ et en appliquant la formule : $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

On a : $\frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

Donc : $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

2) Résolvons l'équation : $\cos^6 2x + \sin^6 x = \frac{13}{16}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^6 2x + \sin^6 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$.

Donc : $\cos^6 2x + \sin^6 2x = \frac{13}{16} \Longleftrightarrow \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{13}{16}$

$$\Longleftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

Et on a : $\cos 8x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \cos 4x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\Longleftrightarrow \left(4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(x = \frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z} \text{ou } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right)$$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation est : .

$S = \left\{\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) Résolvons l'inéquation : $\cos^2(2x) + \sin^6(2x) \leq \frac{7}{16}$

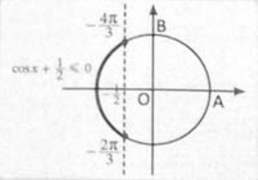
Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x \leq \frac{7}{16} \Longleftrightarrow \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \leq \frac{7}{16}$

$$\Longleftrightarrow \cos 4x + \frac{1}{2} \leq 0$$

- Tableau de signe de $\cos 4x + \frac{1}{2}$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$X = 4x$	-2π		$-\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
$\cos 4x + \frac{1}{2}$		+	0	-	0	+	

Donc l'ensemble de solutions de l'inéquation est : $S = \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$.



Exercice 52

1) Soit $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \cos(a)\cos(2a)\cos(4a)...\cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1} a)}{2^{n+1}\sin a}$$

• **Initialisation :** pour $n = 0$, on a : $\frac{\sin(2^{0+1}a)}{2^{0+1}\sin a} = \frac{\sin(2a)}{2\sin a} = \cos a$

(car : $\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$), donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que :

$$\cos(a)\cos(2a)\cos(4a)...\cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

et montrons que : $\cos(a)\cos(2a)\cos(4a)...\cos(2^n a)\cos(2^{n+1}a) = \frac{\sin(2^{n+2}a)}{2^{n+2}\sin a}$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\cos a.\cos 2a.\cos 4a...\cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

Donc : $\cos a\cos 2a\cos 4a...\cos(2^n a)\cos(2^{n+1}a) = \frac{\cos(2^{n+1}a)\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2 \times 2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

$$= \frac{\sin(2^{n+2}a)}{2^{n+2}\sin(a)}$$

• Conclusion :

$$(\forall n \in IN): (\cos a\cos 2a\cos 4a...\cos(2^n a)) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$$

2) Déduisons la valeur du produit :

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$

On prend : $a = \frac{\pi}{17}$ et $n = 3$, on obtient :

$$P = \frac{\sin\left(2^4\frac{\pi}{17}\right)}{2^4\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{16\pi}{17}\right)}{16\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{17}\right)}{16\sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{1}{16}$$

9 Leçon

Rotation dans le plan

Maxi.

Résumé

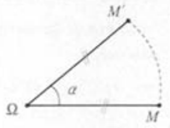
1 Rotation et rotation réciproque

1- Rotation :

a) Définition :

Soit Ω un point du plan orienté positivement et α un nombre réel.

La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation qui laisse le point Ω invariant et qui à tout point M (distinct de Ω) associe le point M' défini par: $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi]$.



Ω est un point invariant, c'est-à-dire l'image de Ω est lui-même.

b) Notation :

- La rotation r de centre Ω et d'angle α est notée $r(\Omega;\alpha)$.
- Si M' est l'image de M par la rotation r, on dit que la rotation transforme M en M' et on note $r(M) = M'$

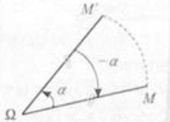
c) Remarques :

- La rotation $r(\Omega;\alpha)$ est la même que la rotation $r(\Omega;\alpha + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- La rotation $r(\Omega;\pi)$ est la symétrie centrale de centre Ω.
- La rotation $r(\Omega;2\pi) = I_d$ est la transformation définie par $r(M) = M$ pour tout point M du plan.

2- Rotation réciproque d'une rotation :

Définition :

- La rotation réciproque de la rotation de centre r et d'angle α et la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$.
- La réciproque de la rotation r est notée r^{-1}.



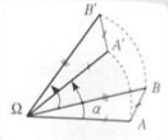
- $r^{-1}(\Omega;\alpha) = r(\Omega;-\alpha)$
- $r(M) = M' \Leftrightarrow r^{-1}(M') = M$

3- Propriétés :

Propriété 1 : Conservation de la distance :

Soit r une rotation, A et B deux points du plan.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors : $AB = A'B'$.



Propriété 2 :

Soit r une rotation d'angle α. A et B deux points distincts.

si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha[2\pi]$.

Propriété 3: Conservation des mesures des angles orientés

Soit A, B et C et D quatre points du plan tels que :

$A \neq B$ et $C \neq D$ et r une rotation.

Si $r(A) = A'$; $r(B) = B'$; $r(C) = C'$ et $r(D) = D'$ alors : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'})$

Exercices d'application

Dans tous les exercices, le plan est orienté positivement

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est positif. On construit à l'extérieur de ce triangle deux triangles équilatéraux MAB et NAC.

Montrer que : $NB = MC$.

Exercice 2

Soit OAB et OCD deux triangles rectangles isocèles en O tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Montrer que : $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit à l'extérieur de ce parallélogramme :

le carré $BEFC$ et le triangle rectangle isocèle IAB en I tels que : $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que : $r(D) = E$.

Exercice 4

On considère dans le plan orienté un triangle ABC rectangle isocèle de sommet C tel que : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit I le milieu du segment $[AB]$ et E le point du plan tel que : C est le milieu du segment $[BE]$.

On considère la rotation r de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que : $r(A) = C$ et $r(C) = B$

2) Soit F l'image du point E par la rotation r.

a- Montrer que : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b- Déterminer la nature du quadrilatère $ACFB$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit D le symétrique du point A par rapport au point B.

On désigne par r la rotation qui transforme C en B et transforme A en D.

1) Construire le point Ω centre de la rotation r et déterminer son angle.

2) Montrer que $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible.

Exercice 6

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ est positif.

On construit à l'extérieur de ce triangle, les triangles ABD et ACE qui sont rectangles isocèles en A tels que : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I et J sont les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[BE]$.

1) Montrer que : $DC = BE$ et $(DC) \perp (BE)$.

2) Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle en A.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit M un point quelconque de la droite (CD). (M distinct de C et de D).

La droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite (AM) coupe la droite (BC) en N.

Soit r la rotation de centre A et qui transforme D en B.

1) Montrer que : $r((DC)) = (BC)$

2) a- Montrer que : $r(M) = N$

b- En déduire que le triangle AMN est rectangle isocèle.

Exercice 8

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a- Déterminer $r(A)$ et $r(C)$.

b- Déterminer l'image de la droite (BC) par la rotation r.

2) Soit E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Montrer que le triangle EFI est rectangle isocèle.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,

I et J sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

On désigne par E le point d'intersection des droites (AI) et (CD) et par F le point d'intersection des droites (AD) et (BJ).

Montrer que : $(AJ) \perp (EF)$.

Exercice 10

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

I et J sont deux points tels que : • I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;1)$.

• J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$.

On considère le point K tel que le triangle KBI soit isocèle et $(\overrightarrow{KB};\overrightarrow{KI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer que le point O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$.

2) Montrer que le triangle AKJ est rectangle isocèle.

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ tel que :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ qui ne contient pas le point B (M distinct de A et de C), et soit I le point qui appartient au segment $[MB]$ tel que : $IM = AM$.

1) Montrer que le triangle AIM est équilatéral.

2) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

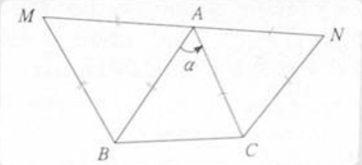
a- Déterminer $r(B)$ et $r(I)$.

b- En déduire que : $MA + MC = MB$

Solutions

Exercice 1

Montrons que $NB = MC$:



Soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ telle que : $\alpha \in]0;\pi[$

Considérons la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• Puisque le triangle AMB est équilatéral direct,

alors : $\begin{cases} AM = AB \\ (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

C'est-à-dire : $r(M) = B$

• Et puisque le triangle ACN est équilatéral direct,

alors : $\begin{cases} AC = AN \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

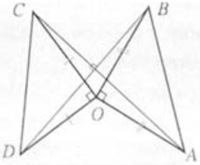
C'est-à-dire : $r(C) = N$

et puisque la rotation conserve la distance et $r(M) = B$ et $r(C) = N$,

alors : $BN = MC$.

Exercice 2

Montrons que $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$:



On a: OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles de sommet commun O.

Ceci nous conduit à considérer la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

• Puisque : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} OC = OD \\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

alors : $r(A) = B$ et $r(C) = D$

et puisque la rotation conserve la distance,

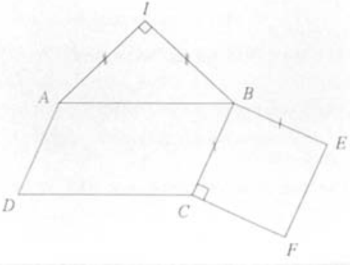
alors : $AC = BD$

Comme l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ et $r(A) = B$ et $r(C) = D$, alors : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ce qui signifie que $(AC) \perp (BD)$.

Exercice 3

Montrons que $r(D) = E$:



On a : $\begin{cases} (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ IA = IB \end{cases}$ c'est-à-dire : $r(A) = B$

où r est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit D' le point tel que : $r(D) = D'$.

On a : $\begin{cases} r(D) = D' \\ r(A) = B \end{cases}$, donc : $AD = BD'$ (1) (La rotation conserve les distances)

et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (2) ($\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation).

et comme $ADCB$ est un parallélogramme,

alors : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ par suite : $AD = BC$

donc (2) devient $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et (1) devient : $BC = BD'$.

or $BCFE$ est un carré,

donc : $\begin{cases} (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ BC = BE \end{cases}$

- On a : $BC = BE$ et $BC = BD'$

donc : $BE = BD'$ (3)

- et on a : $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BD'}) = (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD'})$ (d'après la relation de Chasles).

et puisque : $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

alors : $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BD'}) \equiv 0[2\pi]$ (4)

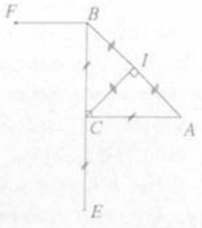
de (3) et (4) on en déduit que $D' = E$.

Donc : $r(D) = E$

Exercice 4

1) Montrons que $r(A) = C$ et $r(C) = B$:

Soit r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



Puisque le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet C et I milieu du segment $[AB]$, alors IAC et IBC sont deux triangles rectangles isocèles de sommet I.

donc :

$\begin{cases} IA = IC \\ (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} IC = IB \\ (\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

d'où : $r(A) = C$ et $r(C) = B$

2) a- Montrons que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$:

On a: $r(E) = F$ et $r(C) = B$ et l'angle de la rotation est $-\frac{\pi}{2}$.

donc : $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et puisque C est le milieu de $[BE]$.

alors : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$

donc : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b- Déterminons la nature du quadrilatère $ACFB$:

Puisque : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors : $(BC) \perp (BF)$ (1)

et puisque le triangle BCA est rectangle en C.

alors : $(BC) \perp (CA)$ (2)

de (1) et (2) on en déduit que : $(BF)//(CA)$ (a)

et puisque : $r(E) = F$ et $r(C) = B$

alors : $EC = FB$ (La rotation conserve la distance).

et comme C est le milieu de $[AE]$

alors : $CE = CA$

donc : $CA = FB$ (b)

d'où : de (a) et (b) on en déduit que $ACFB$ est un parallélogramme.

Exercice 5

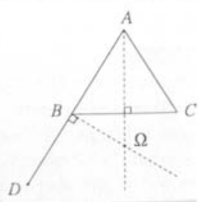
1) • Construisons le point Ω :

On a : $r(A) = D$ et $r(C) = B$

alors : $\Omega A = \Omega D$ et $\Omega C = \Omega B$

donc Ω appartient à la médiatrice du segment $[AD]$ et à la médiatrice du segment $[BC]$.

D'où : la construction du point Ω



• Déterminons l'angle de la rotation r :

Soit α l'angle de la rotation r.

Puisque $r(A) = D$ et $r(C) = B$.

alors : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB}) \equiv \alpha\,[2\pi]$

et puisque : B est le milieu du segment $[AD]$,

alors : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ donc : $(\overrightarrow{AC};-\overrightarrow{AB}) \equiv \alpha\,[2\pi]$

et comme $(\overrightarrow{AC};-\overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + \pi\,[2\pi]$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi\,[2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$$

par conséquent $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de la rotation r.

2) Montrons que le quadrilatère $AB\Omega C$ est inscrit dans un cercle (inscriptible) :

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrons que : $\Omega \in (\mathscr{C})$

On a : $r(C) = B$, donc : $(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

C'est-à-dire : $B\widehat{\Omega}C = \frac{2\pi}{3}$

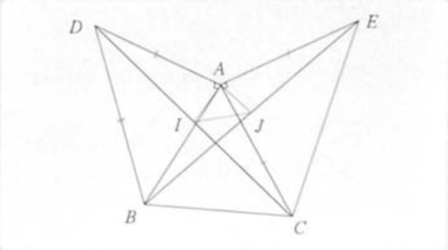
et puisque : $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{3}$

alors : $B\widehat{\Omega}C + A\widehat{B}C = \pi$

donc le point Ω appartient au cercle $(\mathscr{C})$ d'où $AB\Omega C$ est un quadrilatère inscriptible.

Exercice 6

1) Montrons que $DC = BE$ et $(DC) \perp (BE)$:



Les triangles ABD et ACE sont deux triangles rectangles en A.

Ceci nous conduit à considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Puisque : $\begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ alors : $r(D) = B$

et puisque : $\begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$, alors : $r(C) = E$

On a : $r(D) = B$ et $r(C) = E$

donc : $DC = BE$ (1) (La rotation conserve la distance) et la mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BE})$ est la mesure de l'angle de la rotation r.

d'où : $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ (2)

d'où: (1) et (2) on en déduit que et $DC = BE$ et $(DC) \perp (BE)$.

2) Montrons que le triangle AIJ est rectangle isocèle en A :

On a : $r([DC]) = [r(D)r(C)]$

$= [BE]$ (l'image d'un segment par une rotation est un segment)

Puisque I est le milieu du segment $[DC]$ et la rotation conserve le milieu d'un segment , alors $r(I)$ est le milieu du segment $[BE]$.

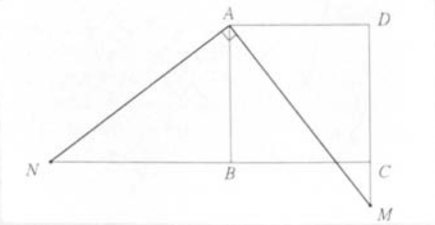
Donc : $r(I) = J$

Par suite : $\begin{cases} AI = AJ \\ (\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle AIJ est rectangle isocèle en A.

Exercice 7

1) Montrons que $r((DC)) = (BC)$:



On a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AB = AD$

donc : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AD = AB$

et puisque r est la rotation de centre A et transforme D en B,

alors r est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre A.

C'est-à-dire : $r = r\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$

L'image de la droite (DC) par la rotation r est la droite qui passe par $r(D)$ et perpendiculaire à la droite (DC) (car l'angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$).

et puisque $r(D)=B$ et $(BC)\perp(DC)$

alors : $r((DC))=(BC)$

2) a- Montrons que $r(M)=N$:

Posons $M'=r(M)$

On a : $r((DC))=(BC)$ et $M\in(DC)$

donc : $r(M)\in(BC)$

C'est-à-dire : $M'\in(BC)$

et puisque : $r(M)=M'$, alors : $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})\equiv-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

C'est-à-dire : M' appartient à la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à la droite (AM).

Par conséquent : $M'\in(\Delta)\cap(BC)$

or : $(\Delta)=(AN)$

d'où : $M'\in(AN)\cap(BC)$

C'est-à-dire : $M'=N$

donc : $r(M)=N$

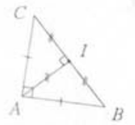
b- Déduction :

On a : $r(M)=N$ signifie que : $\begin{cases}AM=AN\\(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN})\equiv-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$

Donc le triangle AMN est rectangle isocèle en A.

Exercice 8

1) a- Déterminons $r(A)$ et $r(C)$:



Puisque : ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu du segment $[BC]$.

Alors : $IA=IB=IC$

et puisque le triangle ABC est isocèle de sommet A et I est le milieu de $[BC]$

alors (AI) est la médiatrice du segment $[BC]$,

donc : $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IA})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$,

d'où : $\begin{cases}IA=IB\\(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$ et $\begin{cases}IC=IA\\(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IA})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{cases}$

Par suite : $r(A)=B$ et $r(C)=A$.

b- Déterminons l'image de la droite (BC) par la rotation r :

On a : $r(C) = A$ et $r(I) = I$

donc : $r((CI)) = (AI)$

et puisque : $(CI) = (BC)$ (car $I \in (BC)$)

alors : $r((BC)) = (AI)$

2) Montrons que le triangle EIF est rectangle isocèle :

Posons : $r(E) = E'$

On a : $r(A) = B$ et $r(C) = A$ et $r(E) = E'$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

alors : $\overrightarrow{BE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ (car la rotation conserve le coefficient de colinéarité)

On a : $\overrightarrow{BE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

donc : $\overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{BF}$

d'où : $E' = F$

par conséquent : $r(E) = F$

Par suite : $\begin{cases} IE = IF \\ (\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IF}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Donc le triangle EIF est rectangle isocèle de sommet I.

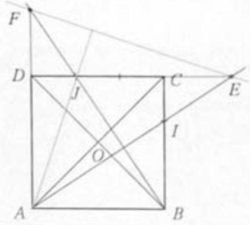
Exercice 9

Montrons que $(AJ) \perp (EF)$:

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $ABCD$ est un carré de centre O et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

donc : $r(A) = B$.



Posons $r(I) = I'$

On a: $r(B)=C$, $r(C)=D$ et $r(I)=I'$ et $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,

et puisque la rotation conserve le coefficient de la colinéarité,

alors : $\overrightarrow{CI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

or : $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CI'}$

d'où : $I'=J$

par conséquent : $r(I)=J$

On a : $r(A)=B$; $r(I)=J$ et l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$,

donc : $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{BJ})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où : $(AI)\perp(BJ)$

et puisque: $(AI)=(AE)$ (car $I\in(AE)$)

et $(BJ)=(FJ)$ (car $F\in(BJ)$)

alors : $(AE)\perp(FJ)$

donc : (FJ) est une hauteur du triangle AEF issue de F ,

d'autre part on a : $(EJ)\perp(AF)$

donc : (EJ) est une hauteur du triangle AEF issue de E

et puisque : $(EJ)\cap(FJ)=J$

alors J est l'intersection des hauteurs du triangle AEF .

Donc la hauteur du triangle AEF issue de A passe par le point J ,

d'où : $(AJ)\perp(EF)$

Exercice 10

1) Montrons que le point O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$:

On a : $ABCD$ un carré de centre O et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ceci nous conduit à choisir la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Puisque : $\begin{cases} OA=OB \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, alors : $r(A)=B$.

et puisque : $\begin{cases} OB=OC \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, alors : $r(B)=C$.

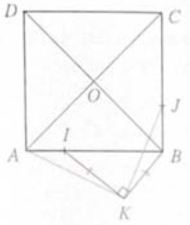
et puisque : I est le barycentre des points pondérés : $(A;3)$ et $(B;1)$ et la rotation conserve le barycentre de deux points, alors : $r(I)$ est le barycentre des points pondérés $(r(A);3)$ et $(r(B);1)$.

C'est-à-dire : $r(I)$ est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$.

donc : $r(I)=J$ (car J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$).

On a : $r(I)=J$ donc : $OI=OJ$

Par conséquent O appartient à la médiatrice du segment $[IJ]$.



2) Montrons que le triangle AKJ est rectangle isocèle:

Soit r' la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $KB=KI$ et $(\overline{\vec{KB};\vec{KI}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $r'(B)=I$

Posons : $r'(J)=J'$

Puisque la rotation r' conserve la distance, et l'angle de r' est égal à $\frac{\pi}{2}$,

alors : $BJ=IJ'$ et $(\overline{\vec{BJ};\vec{IJ'}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et puisque : $\vec{AI}=\frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{BJ}=\frac{1}{4}\vec{BC}$ et $AB=BC$ (car I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;1)$ et J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$).

alors : $AI=BJ$

donc : $IJ'=AI$

et puisque : $(BJ)\perp(IA)$

alors : $(\overline{\vec{BJ};\vec{IA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : $(\overline{\vec{IA};\vec{IJ'}})\equiv(\overline{\vec{IA};\vec{BJ}})+(\overline{\vec{BJ};\vec{IJ'}})[2\pi]$ (Relation de Chasles)

donc : $(\overline{\vec{IA};\vec{IJ'}})\equiv-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d'où : $(\overline{\vec{IA};\vec{IJ'}})\equiv 0[2\pi]$

Par conséquent les vecteurs $\vec{IA}$ et $\vec{IJ'}$ sont colinéaires et de même sens et comme $IJ'=IA$.

alors : $J'=A$

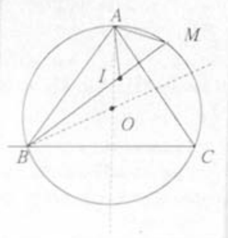
donc : $r'(J)=A$

d'où : $\begin{cases} KJ = KA \\ (\overrightarrow{KJ};\overrightarrow{KA}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Par conséquent le triangle AKJ est rectangle isocèle de sommet K.

Exercice 11

1) Montrons que le triangle AIM est équilatéral:



On a : $IA = IM$, donc le triangle AIM est isocèle de sommet M.

- Les angles $\widehat{AMI}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

donc : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MI}) \equiv (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\,[2\pi]$

et puisque le triangle ABC est équilatéral.

alors : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

d'où : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MI}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

On a : le triangle AMI est isocèle et l'un de ses angles mesure $\frac{\pi}{3}$, donc le triangle AMI est équilatéral.

2) **a-** Déterminons $r(I)$ et $r(B)$:

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} AI = AM \\ (\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$

alors : $r(B) = C$ et $r(I) = M$.

b- Déduisons que $MA + MC = MB$:

On a : $I \in [BM]$, donc : $BM = IB + IM$ (1)

et on a : $r(B) = C$ et $r(I) = M$.

alors : $IB = MC$ (2) (La rotation conserve la distance)

et puisque le triangle AIM est équilatéral,

alors : $IM = MA$ (3)

de (1), (2) et (3) on en déduit que : $MA + MC = IM + IB = BM$

1- Composée de deux rotations :

Soit $r(\Omega;\alpha)$ et $r'(\Omega';\alpha')$ deux rotations d'angles non nuls.

• si $\Omega = \Omega'$ alors $r'or$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \alpha'$ et on a : $ror' = r'or$.

• si $\Omega \neq \Omega'$ et $((\forall k \in \mathbb{Z}) ; \alpha + \alpha' \neq 2k\pi)$ alors $r'or$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

• si $\Omega = \Omega'$ et $\alpha + \alpha' \equiv 0[2\pi]$ alors $r'or$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega''}$ tel que $\Omega' = r'or(\Omega) = r'(\Omega)$.

2- Décomposition d'une rotation en produit de deux symétries axiales :

• La composée de deux symétries axiales d'axe (D) et (D') qui se coupent en un point Ω est une rotation de centre Ω et d'angle $2(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ tel que : $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite (D').

• Toute rotation de centre Ω peut se décomposer en deux symétries axiales, ayant des axes qui se coupent au point Ω.

Exercices d'application

Exercice 12

Soit A et B deux points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

On considère un point M du cercle $(\mathscr{C})$ distinct de A et B.

Les droites (D) et (D') sont respectivement les médiatrices des segments $[AM]$ et $[BM]$.

1) Déterminer la nature de la transformation $S_{(D')}oS_{(D)}$ (où $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ sont les symétries axiales d'axes respectifs (D) et (D')).

2) Déterminer la nature de $S_{(BM)}oS_{(AM)}$.

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABM.

On désigne par A'; B' et M' les images respectives des points A; B et M par $S_{(D')}oS_{(D)}$.

Déterminer $S_{(D')}oS_{(D)}(G)$.

Exercice 13

On considère dans le plan orienté le carré $EFGH$ de centre O tel que : $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. I est le symétrique de E par rapport à F.

- r_1 est la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- r_2 est la rotation de centre F et d'angle π.
- r_3 est la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $r_1 o r_2 o r_3$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

Exercice 14

Soit ABC un triangle tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \beta\,[2\pi]$ et que : $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés $AHIB$; $BDEC$; $ACFG$ et les parallélogrammes $BIJD$ et $CEKF$.

Soit O le centre du carré $BDEC$ et (Δ) la droite passant par O et parallèle à la droite (BC).

1) Faire une figure.

2) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, et r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Donner la nature de chacune des transformations $S_{(\Delta)} o S_{(BC)}$ et $S_{(BC)} o S_{(AB)}$ en précisant leurs éléments caractéristiques.

b- Déterminer la nature de tor.

c- Déterminer $tor(A)$, en déduire la nature du triangle AOJ.

3) a- Montrer que le triangle OAK est rectangle isocèle.

b- En déduire que le triangle AKJ est rectangle isocèle en A.

Exercice 15

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est positif.

On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles rectangles isocèles O_1BC et O_2AB tels que :

$(\overrightarrow{O_1C};\overrightarrow{O_1B}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{O_2B};\overrightarrow{O_2A}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Soit O le milieu du segment $[AC]$.

On désigne par r_1 la rotation de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre O_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Quelle est l'image du point C par la transformation $r_2 o r_1$?

2) Déterminer la nature de la transformation $r_2 o r_1$.

3) Montrer que le triangle OO_1O_2 est rectangle isocèle (Décomposer r_1 et r_2 en produit de symétries axiales convenables).

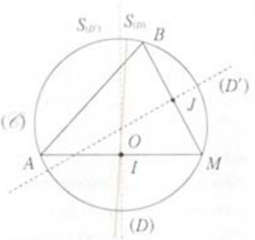
Solutions

Exercice 12

1) Déterminons la nature de la transformation $S_{(D')}oS_{(D)}$.

On a : $(D)\cap(D')=\{O\}$ où O est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.

Donc $S_{(D)}oS_{(D')}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)$ où I et J sont respectivement les milieux des segments $[AM]$ et $[BM]$,



et on a :

$\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]$,

et puisque le triangle OAM est isocèle de sommet O et (OI) est la médiatrice du segment $[AM]$ alors, $[OI)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$.

Donc $\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}}\right)[2\pi]$,

de même $\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$.

Par suite : $2\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]$

$$\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$

Donc $S_{(D)}oS_{(D')}$ est la rotation de centre A et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$.

2) Déterminons la nature de $S_{(BM)}oS_{(AM)}$.

Les axes (AM) et (BM) se coupent en M,

alors $S_{(AM)}oS_{(BM)}$ est la rotation de centre M et d'angle $2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$.

Puisque $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)$ est un angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$,

alors $2\left(\overline{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$.

Par conséquent : $S_{(AM)}oS_{(BM)}$ est la rotation de centre M et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$.

3) Déterminons l'image du point G par $S_{(D')}oS_{(D)}$.

Posons $S_{(D')}oS_{(D)}=r$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$.

On a : $r(A)=A'$, $r(B)=B'$ et $r(M)=M'$,

et puisque G est le centre de gravite du triangle ABM et la rotation conserve le centre de gravité d'un triangle,

alors $r(G)=G'$ qui est le centre de gravite du triangle $A'B'M'$.

Exercice 13

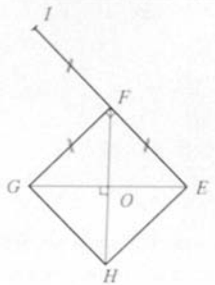
Montrons que $r_1 o r_2 o r_3$ est une translation.

On a : $r_2 = r(F;\pi)$ et $r_3 = r\left(G;\frac{\pi}{2}\right)$,

et puisque $F \neq G$ alors $r_2 o r_3$ est une rotation d'angle $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. (Car $\pi + \frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$),

et on a : $r_1 o (r_2 o r_3)$ est la composée de deux rotations qui n'ont pas le même centre (vérifier ce résultat).

Et puisque $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi\,(k=1)$ alors $r_1 o r_2 o r_3$ est une translation.



- Déterminons le vecteur de translation.

Posons $t = r_1 o r_2 o r_3$.

On a : $r_1 = r\left(H;\frac{\pi}{2}\right)$, $r_2 = r(F;\pi)$

et $r_3 = r\left(G;\frac{\pi}{2}\right)$.

Le triangle IGE est rectangle isocèle de sommet G (car $FI = FE = FG$, $F \in [IG]$ et $(FG) \perp (EI)$).

Donc $\begin{cases} GE = GI \\ \left(\overrightarrow{GE};\overrightarrow{GI}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$.

D'où : $r_3(E) = I$,

et puisque $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FI};\overrightarrow{FE}\right) = \pi[2\pi] \\ FI = FE \end{cases}$ alors $r_2(I) = E$

et puisque $\begin{cases} HE = HG \\ \left(\overrightarrow{HE};\overrightarrow{HG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ alors $r_1(E) = G$.

Par suite : $t(E) = r_1 o r_2 o r_3(E)$

$$\begin{aligned} &= r_1 o r_2((r_3(E)) \\ &= r_1 o r_2(I) \\ &= r_1(r_2(I)) \\ &= r_1(E) \\ &= G \end{aligned}$$

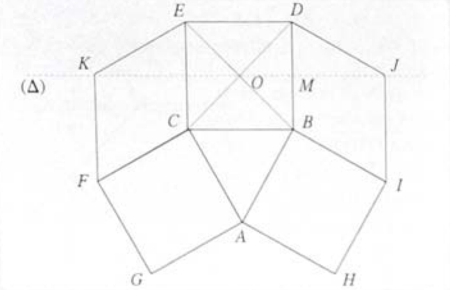
Donc $t(E) = G$.

D'où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

C'est-à-dire $t = t_{\overrightarrow{EG}}$.

Exercice 14

1) figure



2) a- • Déterminons la nature de $S_{\Delta}oS_{(BC)}$.

On a : (Δ) est la médiatrice du segment $[BD]$.

Donc : $S_{\Delta}oS_{BC}(B) = S_{\Delta}(S_{(BC)}(B))$

$= S_{\Delta}(B)$

$= D$

et puisque $(\Delta) \mathbin{/\!/} (BC)$ alors $S_{\Delta}oS_{(BC)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

D'où $S_{(\Delta)}oS_{(BC)} = t$ où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

• Déterminons la nature de $S_{(BC)}oS_{(BE)}$.

On a : les axes (BE) et (BC) se coupent en B.

Donc $S_{(BC)}oS_{(BE)}$ est la rotation le centre B et d'angle $2\left(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Or $\left(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Alors $S_{(BC)}oS_{(BE)}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre B.

b- Déterminons la nature de tor.

On a : $tor = (S_{\Delta}oS_{(BC)})o(S_{(BC)}oS_{(BE)})$

$= S_{\Delta}o(S_{(BC)}oS_{(BC)})oS_{(BE)}$

$= S_{\Delta}oS_{(BE)}$ (car $S_{(BC)}oS_{(BC)} = I_d$)

et puisque (Δ) et (BE) se coupent en O,

alors $S_{\Delta}oS_{(BE)}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right)$ où M est le milieu de $[BD]$.

Et puisque $2(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}) \equiv (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD})[2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

alors $S_\Delta o S_{(BD)}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O.

C'est-à-dire $tor = r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$.

c- Déterminons $tor(A)$.

On a : $tor(A) = t(r(A))$,

et puisque r est la rotation de centre B, et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors $r(A) = I$ (il vient du fait que $BA = BI$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$).

Donc $tor(A) = t(r(A)) = t(I) = J$.

Car t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IJ}$.

D'où : $tor(A) = J$.

• Déduisions la nature du triangle AOJ.

On a : $tor = r\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ et $tor(A) = J$,

alors $\begin{cases} OA = OJ \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Par conséquent le triangle AOJ est rectangle isocèle de sommet O.

3) a- Montrons que le triangle OAK est rectangle isocèle.

On a : $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DB}$.

Donc F est l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$.

Posons $t' = t_{\overrightarrow{DB}}$.

On a : $t'(K) = F$,

et on a : $CF = CA$ et $(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc A est l'image de F par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Posons $r' = r\left(C;\frac{\pi}{2}\right)$.

On a : $r'(F) = A$.

Donc $r'ot'(K) = r'(t'(K)) = r'(F) = A$,

et on a : $S_{(OC)} o S_{(BC)} = r\left(C;\frac{\pi}{2}\right) = r'$.

$S_{(BC)} o S_{(\Delta)} = t'$.

Donc $r'ot' = (S_{(OC)} o S_{(BC)}) o (S_{(BC)} o S_{(\Delta)}) = S_{(OC)} o (S_{(BC)} o S_{(BC)}) o S_{(\Delta)} = S_{(OC)} o S_{(\Delta)}$

et puisque (OC) et (Δ) se coupent en O, alors $S_{(OC)}oS_{(\Delta)}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OD})$, ($M$ est le milieu de $[BD]$)

et puisque $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

alors $2(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Par conséquent :

$r'ot'$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Or $r'ot'(K) = A$.

Donc $OK = OA$ et $(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'où la triangle OKA est rectangle isocèle de sommet O.

b- Déduisons que le triangle AKJ est rectangle isocèle de sommet A.

On a : $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AK}) \equiv (\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AK})[2\pi]$,

et puisque le triangle AOJ est rectangle isocèle de sommet O alors $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ de même, le triangle AOK est rectangle isocèle de sommet O, donc : $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AK}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Par suite $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AK}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

C'est-à-dire $(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AK}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (1)

dans les triangles rectangles isocèles OAJ et OAK, on a : $AJ = \sqrt{2}OA$ et $AK = \sqrt{2}OA$.

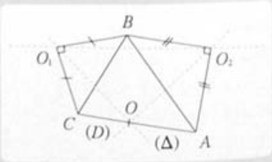
Donc $AJ = AK$ (2)

d'où de (1) et (2) on en déduit que le triangle AJK est rectangle isocèle en A.

Exercice 15

1) Déterminons l'image de C par la transformation r_2or_1.

Soit $r_1 = r\left(O_1;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2 = r\left(O_2;\frac{\pi}{2}\right)$.



On a : $\begin{cases} O_1C = O_1B \\ (\overrightarrow{O_1C};\overrightarrow{O_1B}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

alors $r_1(C) = B$

et on a : $\begin{cases} O_2B = O_2A \\ (\overrightarrow{O_2B};\overrightarrow{O_2A}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

alors $r_2(B) = A$

Donc $r_2 o r_1(C) = r_2 o(r_1(C)) = r_2(B) = A$.

D'où : $r_2 o r_1(C) = A$.

2) Déterminons la nature de $r_2 o r_1$.

On a $r_1 = r\left(O_1; \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_2\left(O_2; \frac{\pi}{2}\right)$.

Puisque $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \neq 2k\pi$ et $O_1 \neq O_2$,

alors $r_2 o r_1$ est la symétrie centrale qui transforme C en A.

Donc le centre de cette symétrie est le point O milieu du segment $[AC]$.

3) Montrons que le triangle OO_1O_2 est un triangle rectangle isocèle.

Décomposons chacune des rotations r_1 et r_2 en deux symétries axiales.

- Soit (D) et (Δ) deux droites qui se coupent en O_2 telles que $r_2 = S_{(D)} o S_{(\Delta)}$ (1)
- Choisissons (D') telle que (D') et (Δ) se coupent en O_1 et $r_1 = S_{(\Delta)} o S_{(D')}$ (2)
- Puisque $r_2 o r_1 = S_O$ où S_O est la symétrie centrale de centre O,

alors $(S_{(D)} o S_{(\Delta)}) o (S_{(\Delta)} o S_{(D')}) = S_O$.

Donc $S_{(D)} o (S_{(\Delta)} o S_{(\Delta)}) o S_{(D')} = S_O$,

c'est-à-dire $S_{(D)} o S_{(D')} = S_O$ (car $S_{(\Delta)} o S_{\Delta} = I_d$).

D'où (D) et (D') se coupent en O, (3)

de (1),(2) et (3) on en déduit que :

- (Δ) passe par les points O_1 et O_2.
- (D') passe par les points O et O_1.
- (D) passe par les points O et O_2.

c'est-à-dire $(\Delta) = (O_1O_2)$, $(D) = (OO_2)$ et $(D') = (OO_1)$.

Donc $r_1 = S_{(\Delta)} o S_{(D')} = S_{(O_1O_2)} o S_{(OO_1)}$,

et $r_2 = S_{(D)} o S_{(\Delta)} = S_{(OO_2)} o S_{(O_1O_2)}$

et puisque r_2 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O_2

et r_1 est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O_1.

Alors $2(\overrightarrow{O_2O_1}; \overrightarrow{O_2O}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (a)

et $2(\overrightarrow{O_1O}; \overrightarrow{O_1O_2}) \equiv \frac{\pi}{2}$ (b)

de (a) et (b) on en déduit que :

$(\overrightarrow{O_2O_1}; \overrightarrow{O_2O}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, et $(\overrightarrow{O_1O}; \overrightarrow{O_1O_2}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Par suite le triangle OO_1O_2 est isocèle de somment O ayant deux angles qui mesurent chacun $\frac{\pi}{4}$.

Donc le triangle OO_1O_2 est rectangle isocèle de sommet O.

Exercices de synthèse

Exercice 16

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I et J sont respectivement les milieux des segments $[OC]$ et $[OD]$.

Montrer que $BI = CJ$ et $(BI) \perp (CJ)$.

Exercice 17

Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sommet A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I est le milieu du segment $[BC]$.

On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer $r(A) = B$ et $r(C) = A$.

2) Soit (Γ) le cercle de centre C et qui passe par le point I.

a- Construire le cercle (Γ') image du cercle (Γ) par la rotation r.

b- Le cercle (Γ) coupe le segment $[AC]$ en E, et le cercle (Γ') coupe le segment $[AB]$ en F.

Montrer que $r(E) = F$.

Exercice 18

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le point défini par $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AD}$ où k est un nombre réel non nul.

La droite passant par D et perpendiculaire à la droite (IC) coupe (AB) en J.

1) Montrer que la droite (DJ) est l'image de la droite (IC) par une rotation de centre O en précisant son angle.

2) a- En déduire que $r(I) = J$.

b- Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

Exercice 19

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et D le point défini par $\overrightarrow{ID} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AI}$.

1) Montrer que $AB = ID$.

2) Soit r la rotation qui transforme A en I et transforme B en D.

a- Déterminer l'angle de la rotation r.

b- Construire le centre Ω de la rotation r.

3) On pose $r(C) = C'$.

Montrer que le triangle IDC' est équilatéral puis construire le point C'.

Exercice 20

$ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit r le rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Construire les points M, N et P images respectives des points B, C et D par la rotation r.

2) Montrer que le triangle MNP est rectangle isocèle.

3) Montrer que $(AN) \perp (MP)$.

4) Soit I le point d'intersection des droites (AN) et (MP).

Montrer que $r(O) = I$, en déduire la nature du triangle OAI.

Exercice 21

Soit $ABCD$ un carré de centre I tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A.

On désigne par S la symétrie centrale de centre I.

I) Soit M un point du plan distinct des points B et N tel que B, soit le milieu du segment $[MN]$.

On pose $r(M) = E$, $S(M) = F$, $r(N) = G$ et $S(N) = H$.

1) Faire une figure convenable.

2) Soit f la transformation définie par $f = Sor$.

a- Déterminer la nature de f.

b- Déterminer $f(B)$, en déduire les éléments caractéristiques de f.

c- En déduire que B est l'unique point qui vérifie $r(B) = S(B)$.

3) a- Montrer que le point D est le milieu des segments $[EG]$ et $[HF]$ et que $EB = HF$.

b- Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FH}})$.

c- En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

4) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquelles le côté du carré $ABCD$

et le côté du carré $EFGH$, ont la même longueur.

II) Réciproquement, soit $EFGH$ un carré de centre D tel que $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Montrer qu'il existe un point M du plan qui vérifie $r^{-1}(E) = S^{-1}(F) = M$ et qu'il existe un point N du plan tel que $r^{-1}(G) = S^{-1}(H) = N$.

(Vous pouvez utiliser la rotation r' de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$).

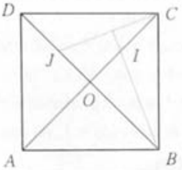
2) Montrer que B est le milieu du segment $[MN]$.

Solutions

Exercice 16

Montrons que $BI = CJ$ et $(BI) \perp (CJ)$.

Soit r la rotation le centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



On a : $\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc $r(B) = C$,

et on a : $\begin{cases} OC = OD \\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc $r(C) = D$,

et puisque I est le milieu du segment $[OC]$ et la rotation conserve le milieu alors $r(I)$ est le milieu du segment $[r(O)r(C)]$

c'est-à-dire $r(I)$ est le milieu du segment $[OD]$.

Donc $r(I) = J$ (car J est le milieu du segment $[OD]$).

On a : $r(I) = J$ et $r(B) = C$.

Donc $BI = CJ$ (la rotation conserve la distance) et $(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r).

Finalement $BI = CJ$ et $(BI) \perp (CJ)$.

Exercice 17

1) Montrons que $r(A) = B$ et $r(C) = A$.

On a ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A et I est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$.

Donc $IA = IB = IC$, $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ (car (AI) est une hauteur du triangle ABC.

D'où : $r(A) = B$ et $r(C) = A$.

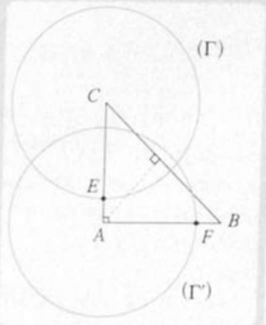
2) a- figure

Puisque $r(C)=A$.

Alors l'image du cercle (Γ) de centre C et de rayon CI est le cercle (Γ') de centre $r(C)$ et de rayon CI.

Or $r(C)=A$.

Donc (Γ') est le cercle de centre A et de rayon CI (voir figure).



b- Montrons que $r(E)=F$.

On a : $r([AC])=[r(A)r(C)]$.

Donc $r([AC])=[BA]$,

et on a $r(\Gamma)=(\Gamma')$

et puisque $E\in([AC]\cap(\Gamma))$.

Alors $r(E)\in(r([AC])\cap r(\Gamma))$,

c'est-à-dire $r(E)\in([AB]\cap(\Gamma'))$.

Or (Γ') coupe $[AB]$ en F.

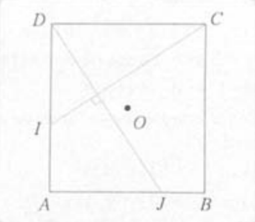
Donc $r(E)=F$.

Exercice 18

1) Montrons que $r((IC))=(DJ)$ où r est une rotation de centre O.

On a : $\begin{cases} OC=OD \\ (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc $r(C)=D$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Puisque $r(C)=D$ alors l'image de la droite (IC) par la rotation r est la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire à la droite (IC).

Comme l'unique droite passant D et perpendiculaire à (IC) est la droite (DJ).

Donc $(\Delta)=(DJ)$.

Par conséquent $r((IC))=(DJ)$

Où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) Déduisons que $r(I) = J$ et exprimons $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

• On a : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A) = B$,

et on a : $\begin{cases} OD = OA \\ (\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D) = A$.

Par suite $r((AD)) = (BA)$,

et puisque $I \in ((AD) \cap (IC))$ alors $r(I) \in (r((AD)) \cap r((IC)))$.

C'est-à-dire $r(I) \in (BA) \cap (DJ)$.

Or $(BA) \cap (DJ) = \{J\}$.

Donc $r(I) = J$.

• On a : $r(A) = B$, $r(D) = A$, $r(I) = J$ et $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AD}$.

Et puisque la rotation conserve le coefficient de colinéairté, alors $\overrightarrow{BJ} = k\overrightarrow{BA}$.

Exercice 19

1) Montrons que $AB = ID$.

On a : $\overrightarrow{ID} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AI}$, donc $ID = \frac{2}{\sqrt{3}}AI$.

Dans le triangle rectangle AIB on a: (AI) est une médiane, médiatrice et hauteur, et bissectrice de l'angle $B\widehat{A}C$

et on a : $\frac{AI}{AB} = \cos\frac{\pi}{6}$ donc $AI = AB\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

D'où : $ID = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}AB = AB$.

2) Déterminons une mesure de l'angle de la rotation r.

On a : $r(A) = I$ et $r(B) = D$.

Soit α une mesure de l'angle de la rotation r.

On a: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ID}) \equiv \alpha[2\pi]$,

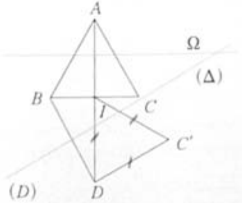
et puisque $\overrightarrow{ID} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AI}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}} > 0$.

Alors les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens

par suite $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}) \equiv \alpha[2\pi]$

et on a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})[2\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.



Par conséquent $\alpha \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$\frac{\pi}{6}$ est une mesure de l'angle de la rotation r.

b- Construisons le centre Ω de la rotation r.

On a : $r(A) = I$ et $r(B) = D$.

Donc $\Omega A = \Omega I$ et $\Omega B = \Omega D$.

D'où Ω appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[AI]$ et à la médiatrice (D) du segment $[BD]$.

(Voir construction).

3) Montrons que le triangle IDC' est équilatéral.

On a: $r(A) = I$, $r(B) = D$ et $r(C) = C'$,

et la rotation r conserve la mesure de l'angle orienté.

Alors $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IC'})[2\pi]$.

Donc $(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IC'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ (1).

On a : $ID = AB$ et $IC' = AC$ (la rotation conserve la distance).

Et puisque $AB = AC$ alors $ID = IC'$ (2), alors

de (1) et (2) on en déduit que le triangle IDC' est équilatéral.

D'où la construction point C'.

Exercice 20

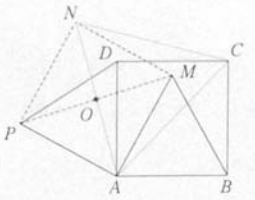
1) Construisons les points M, N et P tels que : $r(B) = M$, $r(C) = N$ et $r(D) = P$.

On a : $r = r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$.

Donc : • $r(B) = M \Longleftrightarrow AB = AM$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

• $r(C) = N \Longleftrightarrow AC = AN$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AN}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

• $r(D) = P \Longleftrightarrow AD = AP$ et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AP}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



Donc les triangles ABM, ACN et ADP sont équilatéraux.

D'où la construction.

2) Montrons que le triangle MNP est rectangle isocèle.

On a : $r(B) = M$ et $r(C) = N$ et $r(D) = P$.

Donc $BC = MN$, $CD = NP$ et $BD = MP$.

(Car la rotation conserve la distance)

et puisque $BC = CD$ alors $MN = NP$ (1)

On sait que la rotation conserve la mesure de l'angle orienté.

Donc $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{NP};\overrightarrow{NM})[2\pi]$,

et puisque $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Alors $(\overrightarrow{NP};\overrightarrow{NM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, (2)

de (1) et (2) on en déduit que le triangle MNP est rectangle isocèle en N.

3) Montrons que $(AN) \perp (MP)$.

Puisque $r(A) = A$, $r(B) = M$, $r(C) = N$ et $r(D) = P$.

Alors $r((AC)) = (AN)$ et $r((BD)) = (MP)$.

On a : $(AC) \perp (BD)$ (diagonales d'un carré) et la rotation conserve l'orthogonalité.

Donc $r((AC)) \perp r((BD))$.

C'est-à-dire $(AN) \perp (MP)$.

4) Montrons que $r(O) = I$, et déduisons la nature du triangle OAI.

- On a : $r((AC)) = (AN)$ et $r((BD)) = (MP)$,

et puisque $O \in (AC) \cap (BD)$.

Alors $r(O) \in (AN) \cap (MP)$,

et puisque $(AN) \cap (MP) = \{I\}$.

Alors $r(O) = I$.

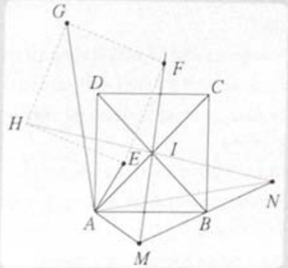
- Déduction.

Puisque $r(O) = I$ alors $\begin{cases} AO = AI \\ (\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$.

Donc le triangle OAI est équilatéral.

Exercice 21

1) Constructions



2) **a-** Déterminons la nature de f où $f = Sor$.

On a : S est la symétrie centrale de centre I, donc S est la rotation de centre I et d'angle π

et r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

et comme $\frac{\pi}{2} + \pi \neq 2k\pi$.

alors Sor est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

b- Déterminons $f(B)$ et déduisons les éléments caractéristiques de f.

On a : $f(B) = Sor(B)$

$= S(r(B))$

$= S(D)$

$= B$ (car I milieu de $[BD]$).

Donc $f(B) = B$.

D'où f est la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

c - Déduisons que B est l'unique point vérifiant $r(B) = S(B)$.

On a : $r(B) = D$ et $S(B) = D$, donc $r(B) = S(B)$.

Soit B' un autre point qui vérifie $r(B') = S(B')$.

On a: $r(B') = S(B') \Longrightarrow Sor(B') = SoS(B')$,

et puisque $Sor = f$ et $SoS = Id$.

Alors $f(B') = B'$,

et puisque f est une rotation, alors elle admet un seul point invariant, c'est son centre B.

Donc $B' = B$.

Donc B est l'unique point qui vérifie $r(B) = S(B)$.

3) **a-** Montrons que le point D est le milieu des segments $[EG]$ et $[HF]$ et que $EG = HF$.

On a : $r(M) = E$, $r(N) = G$ et $r(B) = D$, et puisque B est le milieu du segment $[MN]$.

Alors $r(B)$ est le milieu du segment $[EG]$, (Car la rotation conserve le milieu).

Par conséquent D est le milieu du segment $[EG]$.

Donc $S(M)=F$, $S(N)=H$ et $S(B)=D$,

et puisque B est le milieu du segment $[MN]$ et la symétrie centrale conserve le milieu.

Alors D est le milieu du segment $[HF]$.

Par conséquent le point B est le milieu des segments $[HF]$ et $[EG]$.

- On a : $r(M)=E$ et $r(N)=G$ donc $MN=EG$ (a)

(La rotation conserve la distance).

• Et on a : $S(M)=F$ et $S(N)=H$ donc $MN=HF$ (b)

(La symétrie centrale conserve la distance)

de (a) et (b) on en déduit que $HF=EG$.

b- Déterminons une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FH}})$.

On a : $r=r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$.

Donc $r^{-1}=r\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$ où r^{-1} est la rotation réciproque de r.

Et on a : S est la rotation d'angle π et de centre I.

Sor^{-1} est la rotation d'angle $\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ et de centre D, car $Sor^{-1}(D)=S(r^{-1}(D))=S(B)=D$.

On a : • $Sor^{-1}(E)=S(r^{-1}(E))=S(M)=F$.

(Car $r(M)=E \Leftrightarrow r^{-1}(E)=M$).

Donc $Sor^{-1}(E)=F$,

et on a : $Sor^{-1}(G)=S(r^{-1}(G))=S(N)=H$.

Donc $Sor^{-1}(G)=H$,

et puisque $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation Sor^{-1}.

Alors $(\overline{\overrightarrow{EG};\overrightarrow{FH}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c- Déterminons la nature du quadrilatère $EFGH$.

- Puisque les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu, alors $EFGH$ est un parallélogramme,

- et puisque $EG=FH$ et $(EG)\perp(FH)$.

On en déduit que $EFGH$ est un carré.

4) Déterminons l'ensemble des points M.

On a : le côté du carré $ABCD$ et le côté du carré $EFGH$ ont même longueur si et seulement si les diagonales $[BD]$ et $[FH]$ ont même longueur.

C'est-à-dire $FH = BD$.

Puisque $FH = MN$ et $BD = MN$ et B est le milieu de $[MN]$.

Alors $BM = \frac{BD}{2} = BI$.

Posons $BI = R$ donc $BM = R$.

L'ensemble des points M tels que $ABCD$ et $EFGH$ soient isométrique est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon $R = BI$.

II) 1) Montrons qu'il existe un point M tel que : $r^{-1}(E) = S^{-1}(F) = M$.

On a : $r^{-1} = r\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$,

et $Sor^{-1}(D) = S(r^{-1}(D)) = S(B) = D$

Donc D est un point variant par l'application Sor^{-1} :

- S est la rotation de centre I et d'angle π (car $S = S_I$).
- r^{-1} est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Donc Sor^{-1} est la rotation d'angle $\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ et de centre D.

Notons $r' = Sor^{-1}$ où $r' = r\left(D; -\frac{\pi}{2}\right)$,

puisque D est le milieu des diagonales $[H;F]$ et $[EG]$ alors D est le centre du carré $EFGH$.

Donc $\left(\overline{\vec{DE};\vec{DF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,

et puisque $DE = DF$.

Alors $r'(E) = F$,

c'est-à-dire $Sor^{-1}(E) = F$.

Donc $SoSor^{-1}(E) = S(F)$.

D'où : $r^{-1}(E) = S(F)$ car $SoS = I_d$

Posons $S(E) = M$.

Donc il existe un point M tel que $r^{-1}(E) = S^{-1}(F) = M$.

- Par le même raisonnement on montre qu'il existe un point N tel que $r^{-1}(G) = S^{-1}(H) = N$.

2) Montrons que B est le milieu du segment $[MN]$.

On a : $r^{-1}(E) = M$, $r^{-1}(G) = N$ et $r^{-1}(D) = B$,

et puisque D est le milieu du segment $[EG]$ et la rotation conserve le milieu, alors $r^{-1}(D)$ est le milieu du segment $[r^{-1}(E)r^{-1}(G)]$.

C'est-à-dire B est le milieu du segment $[MN]$.

Sommaire

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) - Casablanca