

# Support des activités de l'élève de la classe de 1<sup>ère</sup> D



République du Bénin

\*\*\*\*\*

Ministère des Enseignements Secondaire, Technique et de la Formation  
Professionnelle

\*\*\*\*\*

Enseignement Secondaire Général

**Domaine :** *Science de l'éducation et de la formation*

**Mention :** *Sciences exactes*

**Discipline :** *Mathématique*

**Classe :** *1<sup>ère</sup> D*

*Auteur :*

**Adekoulé Emmanuel ILEDI**

*Professeur Certifié de Mathématiques*

Tel : { +229 67 39 92 89  
+229 95 37 13 89  
+229 44 90 48 35

E-mail : { adekoule.emmanuel@gmail.com  
iledi.emmanuel@yahoo.fr

**Version : SEPTEMBRE 2024**

# PROGRAMME D'ETUDES DE LA CLASSE DE 1<sup>ère</sup> D

## SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

1. Droite orthogonales
2. Droite et plan orthogonaux
3. Plans perpendiculaires
4. Projection orthogonale sur un plan
5. Projection orthogonale sur une droite
6. Vecteurs de l'espace

## SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

1. Equations et inéquations dans  $\mathbb{R}$ .
2. Statistique.
3. Dénombrement
4. Fonctions
5. Limites et continuité
6. Dérivation - Etude de fonction
7. Primitives
8. Suites numériques

## SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

1. Angles orientés - trigonométrie.
2. Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés
3. Cercle dans le plan
4. Isométrie
5. Représentations graphiques de fonctions et transformations du plan.

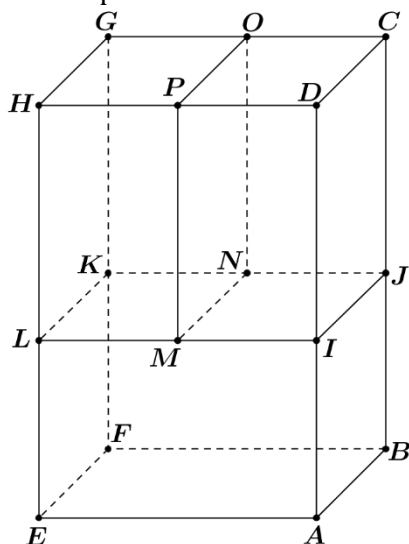
## SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

### Situation de départ :

#### Texte : Une discussion autour du dossier d'une armoire

Coffi est un élève de la classe de 1<sup>ère</sup>. Son tuteur Fako lui demande d'aller retirer auprès du menuisier l'armoire qu'il a commandée, pour y ranger ses habits.

Il dessine le plan de l'armoire sur une feuille de papier qu'il remet à Coffi pour faciliter l'identification chez le menuisier. Voici le plan de cette armoire :



Des camarades de Coffi ont vu ce dessin. L'un d'eux affirme qu'on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. Un autre affirme : « le point A permet de repérer n'importe quel point de l'espace ; il suffit de connaître la distance AS ». Non, rétorque un autre « la distance AS seule ne suffit pas, il faut connaître aussi le sens de A vers S sur la droite (AS) ». Un autre élève apporte une nuance en déclarant ; « encore faut-il que S soit distinct de A ». Jean qui, jusque-là n'est pas intervenu pose la question suivante à ses camarades « s'agit-il des coordonnées géographiques d'un point ? ».

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

### Activité 0

1. Lis le texte de la situation de départ
2. Reformule la situation-problème en tes propres termes.
3. Formule toutes les idées ou questions que t'inspire la situation de départ.

**Stratégie :** Brainstorming

## Séquence n°1 : Droites orthogonales

### Activité 1.1

Pour vérifier l'affirmation : « ...on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. », Coffi s'intéresse aux droites (IA) et (LK) du pavé droit ABFEIJKL du dessin de l'armoire.

#### 1.1 Définition de deux droites orthogonales

##### Consigne 1.1.1 : Découverte

1. Identifie deux droites ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) perpendiculaires respectivement parallèles aux droites (IA) et (LK)

##### Information

On dit que les droites (IA) et (LK) sont orthogonales et on note  $(AI) \perp (LK)$ .

2. Donne trois exemples de droites orthogonales sur le dessin de l'armoire
3. Propose une définition de deux droites orthogonales de l'espace.

**Stratégie :** TI : 5min TG : 3min TC : 5min

#### Exploitation de résultats

$$\begin{cases} (D_1) \parallel (AI) \\ (D_2) \parallel (LK) \\ (D_1) \text{ perpendiculaire à } (D_2) \end{cases} \Rightarrow \{(IA) \text{ orthogonale à } (LK)\}$$

##### Consigne 1.1.2

Donne deux exemples de droites orthogonales et non perpendiculaires en utilisant le dessin.

**Stratégie :** TI : 3min TC : 5min

#### 1.2 Propriétés de droites orthogonales

##### Consigne 1.1.3 : Propriété

( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) sont deux droites orthogonales, ( $\Delta$ )  $\parallel$  ( $D_2$ ).

1. Démontre que ( $\Delta$ ) orthogonale à ( $D_1$ ).
2. Tire une conclusion

**Stratégie :** TI : 7min TG : 3min TC : 10min

##### Consigne 1.1.4 : Approfondissement

On suppose que le compartiment LIJKHDCG de l'armoire est un cube d'arête de longueur 4cm.

1. Réalise une figure du compartiment LIJKHDCG à l'aide du code  $(\frac{1}{2}; 30)$  puis place les points Q et R milieux respectifs des segments [LD] et [DJ].
2. (a) Justifie que les droites (KI) et (GD) sont parallèles.  
(b) Justifie que les droites (QR) et (GD) sont orthogonales en utilisant la définition.
3. Justifie que les droites (LH) et (KJ) sont orthogonales en utilisant une propriété du cours

**Stratégie :** TI : 7min TG : 5min TC : 10min

#### Evaluation formative

ABCDEFGH est un pavé droit.

Justifie de deux manières que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

**Stratégie :** TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### Consigne 1.1.5

$(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites parallèles de l'espace,  $(\Delta) \perp (D_2)$ .

- Démontre que  $(\Delta) \perp (D_1)$ .
- Tire une conclusion.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

## Séquence n°2 : Droite et plan orthogonaux

### 2.1 Droites et plan orthogonaux

#### Activité 1.2

Cédric, un camarade de classe de Coffi sait depuis la classe de 4<sup>ème</sup> que : "Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan".

Ce résultat lui a été enseigné sous forme de définition. Il se demande si une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

### 2.2 Définition de droites et plan orthogonaux

#### Consigne 1.2.1

On considère le dessin de l'armoire. Une droite  $(D)$  est telle que  $(D) \perp (BF)$ ,  $(D) \perp (AB)$  et  $(AB)$  et  $(BF)$  sont sécantes dans le plan  $(ABF)$ .

- Trouve une droite  $(D)$  qui convient

#### Information

On dit que la droite  $(D)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$

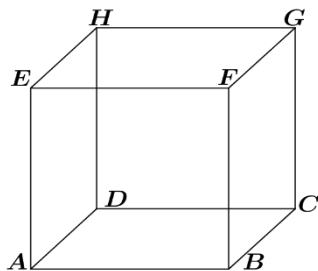
- Propose une définition d'une droite orthogonale à un plan.

Stratégie : TI : 5min

TC : 5min

#### Evaluation formative

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



- Démontre que la droite  $(AB)$  est orthogonale au plan  $(FBC)$ .
- Démontre que la droite  $(FC)$  est orthogonale au plan  $(ABG)$ .

### 2.3 Propriété de droites et plan orthogonaux

#### Consigne 1.2.2

- Combien y a-t-il de droites passant par le point F et perpendiculaire au plan  $(ABC)$  ?
- Combien y a-t-il de plans passant par les points H et orthogonaux à la droite  $(AD)$  ?

Stratégie : TI : 3min

TC : 5min

### Consigne 1.2.3

$(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites parallèles.  $(P)$  est un plan orthogonal à  $(D_1)$ .

Démontre que  $(P)$  est orthogonal à  $(D_2)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### Consigne 1.2.4

$(P_1)$  et  $(P_2)$  sont deux plans parallèles.  $(D)$  est une droite orthogonale à  $(P_1)$ .

Démontre que  $(D)$  est orthogonal à  $(P_2)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### Consigne 1.2.5

$(D_1)$  et  $(D_2)$  sont deux droites perpendiculaires à un plan  $(P)$ . Soit I un point de la droite  $(D_1)$  et  $(\Delta)$  la droite passant par I et parallèle à  $(D_2)$ .

- Justifie que la droite  $(\Delta)$  est orthogonale au plan  $(P)$ .
- (a) Justifie que les droites  $(\Delta)$  et  $(D_1)$  sont confondues.  
(b) Dédus-en alors que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont parallèles.
- Que peux-tu conclure ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### Consigne 1.2.6

$(P_1)$  et  $(P_2)$  sont deux plans perpendiculaire à une droite  $(D)$ . Soit I un point du plan  $(P_1)$  et  $(P_3)$  le plan passant par I et parallèle au plan  $(P_2)$ .

- Justifie que  $(P_3) \perp (D)$ .
- (a) Justifie que les plans  $(P_1)$  et  $(P_3)$  sont confondus.  
(b) Dédus-en que les plans  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont parallèles.
- Que peux-tu conclure ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### Consigne 1.2.7

ABCD est un tétraèdre régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux, I et J sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$

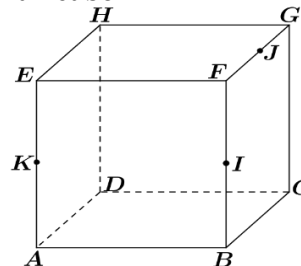
- Démontre que  $(AB)$  est perpendiculaire au plan  $(ICD)$ .
- Démontre que  $(CD)$  est perpendiculaire au plan  $(JAB)$ .
- Dédus-en que la droite  $(IJ)$  est perpendiculaire aux deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

#### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Soit ABCDEFGH un cube.



On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BF], [FG] et [AE]. Démontre que :

- (IK) est orthogonale au plan (ADE) ;
- (BE) est orthogonale au plan (ADG) ;
- (DE) est orthogonale au plan (IJK) ;
- (AC) et (BF) sont orthogonales ;
- (IK) et (CF) sont orthogonales ;
- (IJ) et (ED) sont orthogonales ;

### Exercice 2

ABCD un tétraèdre régulier d'arête  $a$ .

- Soit I le milieu du segment [CD].  
Montre que le plan (AIB) est perpendiculaire à la droite (CD).
- Soit  $A'$  le pied de la hauteur du triangle AIB issue du sommet A.  
(a) Montre que  $(AA') \perp (BCD)$ .  
(b) Quel est alors l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD ?
- Calcule en fonction de  $a$  la distance  $AA'$ .
- (a) Soit K le milieu  $[A'A]$ , calcule en fonction de  $a$ , les distances BK et KI ;  
(b) Déduis-en que le triangle BKI est rectangle.
- Soient E et F les milieux respectifs des segments [BC] et [BD].  
Montre que (EF) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BKI.

### 2.4 Distance d'un point à une droite-Distance d'un point à un plan

#### Activité 1.3

En considérant le plan de l'armoire, on considère :

- le plan (P) passant par A et perpendiculaire à la droite (LM) ;
- la droite (D) passant par A et perpendiculaire au plan (HDC).

#### 2.4.1 Distance d'un point à une droite

##### Consigne 2.8

- Identifie le plan (P) de l'activité 1.3.
- Détermine  $(P) \cap (LM)$ .

##### Information

On dit que la distance AI est la distance du point A à la droite (LM).

- Propose alors une définition de la distance d'un point à une droite (D).

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

#### 2.4.2 Distance d'un point à un plan

##### Consigne 2.9

- Identifie la droite (D) de l'activité 1.3
- Détermine  $(D) \cap (HDC)$ .

##### Information

On dit que la distance AD est la distance du point A au plan (HDC).

- Propose alors une définition de la distance d'un point à un plan (P).

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

## Séquence n°3 : Plans perpendiculaires

### Activité 1.4

En examinant le dessin de l'armoire, Adébola, une fille de 1<sup>ère</sup> D reconnaît deux plans perpendiculaires. Sa camarade Lovia déclare en avoir oublié la définition.

### 3.1 Définition de deux plans perpendiculaires

#### Consigne 1.3.1

- Démontre que la droite (MP) est perpendiculaire au plan (ABE).
- Trouve un plan (Q) qui contient la droite (MP).

#### Information

On dit que les plans (Q) et (ABE) sont perpendiculaires.

- Propose une définition de deux plans perpendiculaires.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

### 3.2 Application de la définition de deux plans perpendiculaires

#### Consigne 1.3.2 : Application

On suppose que le compartiment LIJKHDCG de l'armoire est un cube

- Démontre que les plans (LIJ) et (KID) sont perpendiculaires.
- Démontre que les plans (KCD) et (IHG) sont perpendiculaires

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

#### Consigne 1.3.3 Approfondissement

On considère un trapèze ABCD tel que  $(AB) \parallel (DC)$  et  $(AB) \perp (AD)$ . Soit (D) la droite passant par A et orthogonale au plan (ABCD). Soit E un point de la droite (D) distinct du point A.

- Fais une figure.
- Démontre que  $(CD) \perp (ADE)$ .
- Soit H le projeté orthogonal de A sur (DE).  
Démontre que  $(AH) \perp (CDE)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### Evaluations formatives

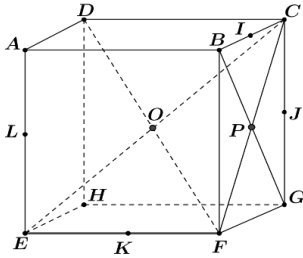
#### Exercice 1

ABCDEFGH est un cube

- (a) Justifie que  $(EA) \perp (FG)$ .  
(b) Justifie que  $(EF) \perp (FBC)$ .
- Justifie que  $(ABC) \perp (EAD)$ .
- Justifie que  $(DG) \perp (EBC)$ .

#### Exercice 2

ABCDEFGH est un cube de centre O, P milieu de la face carrée BCGF et les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [CG], [EF] et [AE] comme l'indique la figure suivante :



- Démontre que la droite (OI) est orthogonale aux droites (AD) et (KL).
- (a) Démontre que la droite (BG) est orthogonale au plan (EFC).  
(b) Déduis-en que (IJ)  $\perp$  (EC).
- (a) Justifie que (EC)  $\parallel$  (PK).  
(b) Déduis-en que (IJ)  $\perp$  (PK).  
(c) Démontre que le triangle KPB est rectangle en P.

### Exercice 3

ABCDEFGH est un cube. I le centre du carré BCGF et J milieu du segment [HG].

- (a) Justifie (DH)  $\perp$  (ABC).  
(b) Déduis-en que (DH)  $\perp$  (AC).
- Démontre que (BAG)  $\perp$  (ADE).
- (a) Démontre que (BH)  $\perp$  (ACF).  
(b) Déduis-en que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires.
- Justifie que le triangle AIJ est rectangle en I.

### Exercice 4

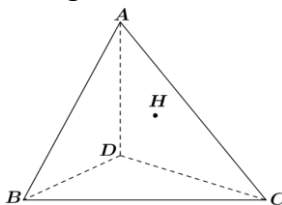
ABCDEFGH est un cube.

- (a) Démontre que (EF)  $\perp$  (BG).  
(b) Déduis-en que (EC)  $\perp$  (GB).
- Prouve que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).

**Indication :** on pourra étudier la position relative de la droite (BD) par rapport au plan (EAC).

### Exercice 5

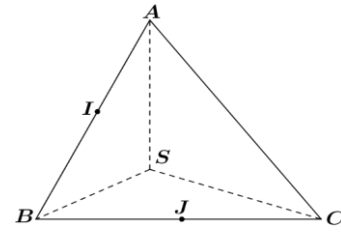
ABCD est un tétraèdre tel que la droite (AD) est orthogonale au plan (BCD). On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.



Démontre que (DH)  $\perp$  (BC).

### Exercice 6

SABC est un tétraèdre régulier tel que les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



- (a) Démontre que (AB)  $\perp$  (SCI) et (BC)  $\perp$  (SAJ).  
(b) Déduis-en que les (AB)  $\perp$  (SC) et (BC)  $\perp$  (SA).
- Démontre que (SB)  $\perp$  (AC).
- Démontre que les plans (ABC) et (SIJ).

## Séquence n°4 : Projection orthogonale sur un plan

### Activité 1.5

Pour mieux comprendre les techniques utilisées par son tuteur pour dessiner le plan de l'armoire, Coffi, s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' du plan (ABE) avec la droite passant par X et perpendiculaire au plan (ABE). Jean affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même et qu'il existe même des points X tels que X et X' soient confondus

#### Consigne 1.4.1

- Le procédé tel que présenté est-il une application de l'espace dans lui-même?

#### Information

Cette application est appelée projection orthogonale sur le plan (ABE).

- Propose une définition d'une projection orthogonale sur un plan.

**Stratégie :** TI : 5min TG : 5min TC : 5min

#### Consigne 1.4.2

On désigne par  $\mathcal{P}$  la projection orthogonale sur le plan (ABE).

- (a) Détermine :  $\mathcal{P}(A)$  ;  $\mathcal{P}(B)$  ;  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}((ABE))$ .  
(b) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que (LH)  $\perp$  (ABE).  
(b) Détermine  $\mathcal{P}(H)$  ;  $\mathcal{P}(L)$  et  $\mathcal{P}((HL))$ .  
(c) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que la droite (LD) n'est pas orthogonale au plan (ABE).  
(b) Détermine  $\mathcal{P}([LD])$  et  $\mathcal{P}((LD))$ .
- Soit I' et J' les milieux respectifs des segments [LD] et [AE].  
(a) Justifie que I' est le milieu de [MP].  
(b) Détermine (MP)  $\cap$  (AE).  
(c) Détermine  $\mathcal{P}(I')$ .  
(d) Que constates-tu ?
- De toutes les questions précédentes, que peux-tu retenir ?

**Stratégie :** TI : 5min TG : 5min TC : 10min

**Consigne 1.4.3 : Approfondissement**

ABCDEFGH est un cube et K est le milieu du segment [FC]. On désigne par  $q$  la projection orthogonale sur le plan (EHG)

a) Détermine  $q(F)$ ,  $q(C)$  et  $q([EC])$ .

b) Détermine et construis l'image  $F'$  du point F par la projection orthogonale sur le plan (ABG).

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

## Séquence n°5 : Projection orthogonale

**Activité 1.6**

Donald, un élève de cette classe de 1<sup>ère</sup> D s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection  $X'$  de la droite (LI) avec le plan passant par X et perpendiculaire à la droite (LI). Joël affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même. Colombe, une élève de la classe déclare qu'il existe des points X tels que X et  $X'$  soient confondus.

**Consigne 1.5.1**

1. Le procédé tel que présenté dans l'activité est-il une application de l'espace dans lui-même ?

**Information**

Cette application est appelée projection orthogonale sur la droite (LI).

2. Propose une définition d'une projection orthogonale sur une droite.

Stratégie : TI : 5min TC : 5min

**Consigne 1.5.2**

On désigne par  $\mathcal{P}$  la projection orthogonale sur la droite (LI).

1. (a) Détermine :  $\mathcal{P}(L)$  ;  $\mathcal{P}(I)$  et  $\mathcal{P}([IL])$ .

(b) Que constates-tu ?

2. (a) Justifie que  $(BC) \perp (LI)$ .

(b) Détermine  $\mathcal{P}([BC])$

(c) Que constates-tu ?

3. (a) Justifie que la droite (KJ) n'est pas orthogonale à la droite (LI).

(b) Détermine  $\mathcal{P}([KJ])$  et  $\mathcal{P}((KJ))$ .

(c) Justifie que  $\mathcal{P}(N) = M$ .

(d) Que constates-tu ?

4. De toutes les questions précédentes, que peux-tu retenir ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

**Consigne 1.5.3 : Approfondissement**

ABCDEFGH est un cube. Le point I est centre du carré BCGF. On désigne par  $q$  la projection orthogonale sur la droite (DH) et par  $p$  la projection orthogonale sur le plan (GFC).

1. Détermine  $p(A)$  ;  $p(B)$  ;  $p(I)$  ;  $p(D)$  ;  $p([AD])$  ;  $p([BH])$  et  $p([DC])$ .

2. Détermine  $q(G)$  ;  $q(F)$  ;  $q([AE])$  ;  $q([BH])$  et  $q([AC])$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

**Evaluation formative**

ABCDEFGH est un cube. On désigne  $p_1$  la projection orthogonale sur le plan (EHG) et par  $p_2$  la projection orthogonale sur la droite (BF).

1. Détermine  $p_1(A)$  ;  $p_1(B)$  ;  $p_1(F)$  ;  $p_1(G)$  et  $p_1(H)$ .

2. Trouve les images par  $p_1$  de [AE] ; [CF] ; [AB] et [DB].

3. On pose  $p_2(J) = K$  avec J milieu de [DH].

Démontre que K est le milieu de [BF].

## Séquence n°6 : Vecteurs de l'espace

**Activité 1.6**

Halim, un élève de cette classe de 1<sup>ère</sup> D, se souvient de la notion de vecteur et affirme :

« Le vecteur  $\overrightarrow{LN}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  tandis que  $\overrightarrow{AL}$  n'est pas une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  ».

Certains de ses camarades s'interrogent sur la notion de combinaison linéaire et affirment n'avoir rien compris à sa déclaration.

**6.1 Caractérisation d'un vecteur****Consigne 1.6.1**

Un vecteur de l'espace se définit de la même manière qu'un vecteur du plan. On note  $\mathcal{W}$  l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Détermine :

1. Les caractéristiques du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

2. Les caractéristiques d'un vecteur quelconque de l'espace

Stratégie : TI : 5min TC : 5min

**6.2 Propriétés de vecteurs de l'espace****Consigne 1.6.2**

On considère le dessin de l'armoire.

1. (a) Sachant que  $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$ , complète les égalités suivantes :  $\overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KN}$  ;  $\overrightarrow{KJ} = \dots \overrightarrow{KN}$  et  $\overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KJ}$ .

(b) Sachant que  $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$ , complète les égalités suivantes :  $\overrightarrow{IJ} = \dots \overrightarrow{DC}$  ;  $\overrightarrow{LK} = \dots \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{IJ} = \dots \overrightarrow{LK}$

2. Complète l'équivalence suivante :  $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KJ}$ .

3. (a) Soit  $I'$  le milieu de [LD] et  $J'$  le milieu de [HI]. Sachant que  $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD}$ , justifie que les points  $I'$  et  $J'$  sont confondus.

(b) Sachant que [LD] et [HI] ont le même milieu  $I'$ , justifie que  $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD}$ .

(c) Complète l'équivalence suivante :  $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD} \Leftrightarrow$  [LD] et [HI] ont le.....

4. En considérant le point L et le vecteur  $\overrightarrow{GC}$  :
- Exprime  $\overrightarrow{LI}$  en fonction de  $\overrightarrow{GC}$ .
  - Peut-on trouver un autre point S différent du point I tel que  $\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{GC}$  ?
  - Complète la phrase suivante pour en faire une propriété : « Pour tout point O et pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un ..... point M de l'espace tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  »

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### 6.3 Opérations sur les vecteurs

#### 6.3.1 Somme de deux vecteurs

##### Consigne 1.6.3

Observe attentivement le dessin de l'armoire.

- Construis le parallélogramme ABFE.
- Construis les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AF}$ .

##### Information

Le vecteur  $\overrightarrow{AF}$  est appelé la somme des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$ .

- Construis la somme des vecteurs  $\overrightarrow{LM}$  et  $\overrightarrow{LK}$ .
- Propose une définition de la somme de deux vecteurs.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

#### 6.3.2 Produit d'un vecteur par un nombre réel

##### Consigne 1.6.4

Observe attentivement le dessin de l'armoire

- Complète l'égalité suivante :  $\overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{LM}$ .

##### Information

On dit que le vecteur  $\overrightarrow{LI}$  est le produit du vecteur  $\overrightarrow{LM}$  par 2.

- Construis le vecteur  $\overrightarrow{ES}$  tel que  $\overrightarrow{ES} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EA}$
- Détermine le produit du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par 0 et le produit du vecteur nul  $\vec{0}$  par un nombre réel  $\beta$ .
- Détermine le produit d'un vecteur quelconque  $\vec{u}$  par 1.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

#### 6.3.3 Combinaison linéaire

##### Définition 1.6.3 : Combinaison linéaire

### 6.4 Vecteurs coplanaires – Vecteurs colinéaires

#### 6.4.1 Vecteurs colinéaires

##### Définition 1.6.4

#### 6.4.2 Vecteurs coplanaires

##### Définition 1.6.5

##### Propriété 1.6.5

##### Consigne 1.6.5 : Consolidation

On considère le compartiment ABFEIJKL de l'armoire

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BF}$  et  $\overrightarrow{KJ}$  sont-ils coplanaires ?
- Démontre que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AI}$  sont non coplanaires.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

### 6.5 Caractérisation vectorielle d'un plan et d'une droite de l'espace

#### Consigne 1.6.6

A et B sont deux points distincts de l'espace, M un point quelconque de l'espace.

Justifie que  $M \in (AB)$  si et seulement si, il existe un nombre réel k tel que :  $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

#### Consigne 1.6.7

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et M un point quelconque de l'espace.

Démontre que  $M \in (ABC)$  si et seulement si il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

### 6.6 Coordonnées d'un vecteur dans une base – Coordonnées d'un point dans un repère

#### Consigne 1.6.8

Observe attentivement le dessin de l'armoire.

- Justifie que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BF}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont non coplanaires.

##### Information

Le triplet de vecteur  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC})$  est appelé base de l'ensemble  $\mathcal{W}$  des vecteurs de l'espace.

- (a) Détermine le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de nombres réels tel que  $\overrightarrow{GD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BF} + \gamma \overrightarrow{BC}$ .  
(b) Peut-on trouver un autre triplet  $(x; y; z) \neq (\alpha, \beta, \gamma)$  tel que  $\overrightarrow{GD} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{BF} + z \overrightarrow{BC}$  ?
- Recopie puis complète la phrase suivante pour en faire une propriété : « Si  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont trois vecteurs de l'espace non coplanaires, alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace, il existe un ..... triplet  $(x; y; z)$  de nombres réels tel que  $\vec{u} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} + \dots \vec{k}$ . »
- Donne une définition d'une base de l'ensemble  $\mathcal{W}$  des vecteurs de l'espace

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

#### Consigne 1.6.9 : Approfondissement

ABCDEFGH est un cube. Soit I le centre du carré EFGH, J et K les milieux respectifs des segments [BF] et [GH].

- Démontre que le quadruplet  $(E, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DH})$  est un repère de l'espace.
- Détermine dans ce repère les coordonnées de tous les points du cube.
- Détermine les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{BK}$  et  $\overrightarrow{IJ}$  dans la base  $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$ .

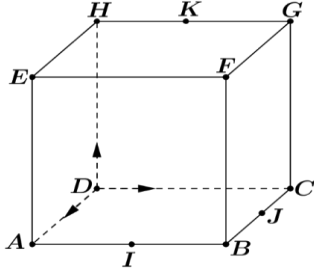
Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 15min

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [HC].

On muni l'espace du repère  $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec  $4\vec{i} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$  et  $4\vec{k} = \overrightarrow{DH}$ .



On donne les points R, U, T et Z tels que IJKR est un parallélogramme ;  $\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{AD} + \frac{5}{2}\overrightarrow{DH}$  ;  $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$  et Z le centre de la face ADHE.

- Justifie que les points D, B et T sont alignés.
- (a) Justifie que le triplet  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$  est une base.  
(b) Détermine les coordonnées des points E, F et G dans le repère  $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  puis dans le repère  $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ .
- Détermine les coordonnées des points R, U et Z dans le repère  $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### Exercice 2

ABCDEFGH est un cube. M est le point tel que  $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$  et N est le point tel que  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .

- Démontre que  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ .
- Les vecteurs  $\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{HB}$  sont-ils coplanaires ?

### Exercice 3

ABCDEFGH est un cube.

- Construis les points M et N tels que  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ .
- Justifie que les points A, M et N sont alignés.
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{EC}$  et  $\overrightarrow{BF}$  sont-ils coplanaires ?
- Les vecteurs  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{BH}$  et  $\overrightarrow{BF}$  sont-ils coplanaires ?

### Exercice 4

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1m. Le point I du segment [AE], J le centre de la face CDHG, K et L dont définis par  $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$  et  $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  et T le milieu de [KL].

L'espace est muni du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- Détermine les coordonnées des points I et J.
- Justifie  $K\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$  et  $L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$ .
- Détermine les coordonnées du points T.
- Démontre que les points I, T et J sont alignés.
- Déduis-en que les points I, J, T, K et L sont coplanaires.

## SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

### Situation de départ :

#### Texte : *Le meilleur tireur*

Une société de surveillance organise de façon périodique pour ses agents une séance d'entraînement au tir. Chaque agent est soumis à un test à l'aide d'un dispositif spécial construit à partir d'un carré de 8dm de côté. Ce dispositif génère de façon successive plusieurs carrés concentriques tels que chaque sommet du carré à construire soit sur un côté du carré précédemment construit et à une distance  $x$  de l'une des extrémités de ce côté. A chaque agent, le dispositif construit selon sa taille et son poids un nombre  $N$  donné de carrés dont il doit atteindre au tir un certain nombre  $N'$  ( $N' < N$ ). Melon n'est ni gros ni grand mais trapu, il veut se qualifier meilleur agent tireur de la société. Il consacre plus de 12 heures à son travail et à l'entraînement. Il se demande comment choisir la durée de chacune de ces deux activités de façon que, en s'entraînant trois fois plus que d'habitude, il travaille plus qu'il ne s'entraîne. Il se propose aussi d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela il relève dans les bases de données de la société les poids et les tailles de certains de ses coéquipiers. Il dresse le tableau suivant :

Poids en $kg(x)$	55	68	62,5	62	68	68
Taille en cm ( $y$ )	165	177	174	168	165	171
Poids en $kg(x)$	59	71	74	68	68	71
Taille en cm ( $y$ )	165	177	174	171	165	174
Poids en $kg(x)$	74	71	65	65	62	65
Taille en cm ( $y$ )	174	174	174	174	174	174
Poids en $kg(x)$	68	71	65	74	74	71
Taille en cm ( $y$ )	168	171	174	168	177	174
Poids en $kg(x)$	65	77	74	62	77	68
Taille en cm ( $y$ )	165	180	177	168	180	171

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

#### Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.

- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

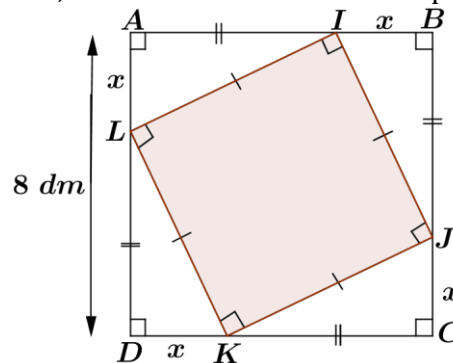
## Séquence n°1 : Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$

### 1.1 Equations du second degré dans $\mathbb{R}$

#### 1.1.1 Polynôme du second degré

##### Activité 2.1

Dans le but de réaliser son dispositif d'entraînement, Melon désire connaître la valeur de  $x$  afin de construire le second carré IJKL pour qu'il ait  $20 dm^2$  d'aire. Pour cela, il fait le dessin suivant du dispositif :



##### Consigne 2.1.1 : Equation du second degré

- (a) Calcule en fonction de  $x$  l'aire du second carré IJKL.
  - (b) Justifie que  $x$  vérifie l'égalité suivante :  $x^2 - 8x + 22 = 0$ .
2. Comment appelle-t-on une telle égalité ?

**Stratégie :** TI : 5min TG : 3min TC : 7min

##### Consigne 2.1.2 : Degré d'un polynôme

Donne le degré de chacun des polynômes ou équations suivantes :

- $P(x) = x + 2x^2 - 4$ .
- $(E_1) : 1 - 2x + x^2\sqrt{2} = 2 + x(2 + x\sqrt{2})$ .
- $(E_2) : (m - 1)x^2 + (2m^2 + 1)x + m + 2 = 0$ .

**Stratégie :** TI : 3min TC : 5min

### 1.1.2 Discriminant d'une équation du second degré

#### Consigne 2.1.3

On considère le polynôme du second degré  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ .

- Démontre que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 
$$P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$
.
- On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .
  - Ecris  $P(x)$  en fonction de  $\Delta$ .

(b) Justifie que :  $P(x)=0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ .

3. Résous l'équation  $P(x)=0$  dans chacun des cas suivants :

- (a)  $\Delta = 0$
- (b)  $\Delta < 0$
- (c)  $\Delta > 0$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

### 1.1.3 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue sans paramètre

#### Consigne 2.1.4

1. Résous dans  $\mathbb{R}$  chacune des équations suivantes :

- (a)  $(E_1) : 2x^2 + 3x - 2 = 0$ .
- (b)  $(E_2) : 4x^2 - 4x + 1 = 0$ .
- (c)  $(E_3) : 2x^2 + 3x + 2 = 0$

2. Factorise si possible chacun des polynômes suivants :

- (a)  $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ .
- (b)  $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$ .
- (c)  $R(x) = 2x^2 + 3x + 2$ .

### 1.1.4 Résolution d'une équation paramétrée

#### Consigne 2.1.5

On considère l'équation  $(E_m) : (m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + m + 1 = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.

1. (a) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_1)$ .  
(b) Détermine la valeur de  $m$  pour que le réel  $-2$  soit solution de  $(E_m)$ .
2. Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_m)$  en discutant suivant les valeurs de  $m$ .

Stratégie : TI : 10min TC : 20min

### 1.1.5 Somme et produits des solutions d'une équation du second degré

#### Consigne 2.1.6 : Propriété

On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions distinctes de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ ). On désigne par  $S$  la somme de ces racines et par  $P$  leur produit.

1. Rappelle l'expression de chacune des solutions  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\Delta$ .
2. Calcule  $S$  et  $P$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

#### Consigne 2.1.7 : Consolidation

1. On considère l'équation suivante :  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .  
(a) Sachant que le réel 1 est une solution de cette équation, détermine l'autre solution sans calculer le discriminant de  $x^2 - 3x - 4$ .  
(b) Vérifie la réponse de la question 1.(a) par calcul du discriminant de  $x^2 - 3x - 4$ .
2. Soit dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2x^2 - 3x - 8 = 0$ . On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les solutions de cette équation. Sans déterminer  $x_1$  et  $x_2$ , calcule  $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;  $B = x_1^2 + x_2^2$  et  $C = x_1^3 + x_2^3$ .

Stratégie : TI : 10min TC : 20min

#### Consigne 2.1.8 : Application

1. Détermine deux nombres réels dont la somme est  $-5$  et le produit est  $-126$ .
2. Résous dans  $\mathbb{R}$  le système d'équation  $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 2 \end{cases}$
3. Détermine les dimensions d'un rectangle de périmètre  $12 m$  et d'aire  $1 m^2$ .
4. Un rectangle peut-il avoir pour périmètre  $6 m$  et pour aire  $4 m^2$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 12min

### 1.1.6 Relation indépendante du paramètre réel $m$ entre les solutions d'une équation du second degré

#### Consigne 2.1.9

Soit  $m$  un paramètre réel. On donne  $(E) : (m+2)x^2 - (m+4)x + 2 - m = 0$  avec  $m \neq -2$ .

1. Etablis une relation indépendante du paramètre réel  $m$  entre les racines  $x_1$  et  $x_2$  de  $(E)$ .
2. Dédus-en les racines doubles.
3. Détermine  $m$  pour que  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 12min

### 1.1.7 Etude de signe des solutions d'une équation du second degré

#### Retenons 2.1.2

#### Consigne 2.1.10 : Consolidation

Soit l'équation  $(E_m) : (m - 2)x^2 + 2(m + 2)x + m - 3 = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de  $m$ , cette équation a deux racines distinctes de signes contraires.
2. Pour quelles valeurs de  $m$ , cette équation a deux racines distinctes de signes négatifs.

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 15min

### 1.1.8 Equations auxiliaires

#### Consigne 2.1.11

1. On désire résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E) : -8t^4 + 8t^2 + 6 = 0$ . Pour cela on donne l'équation  $(E') : -8x^2 + 8x + 6 = 0$ .  
(a) Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $(E')$ .  
(b) En posant  $t^2 = x$ , justifie que l'équation  $(E)$  devient une équation  $(E'')$  qui est équivalente à l'équation  $(E')$  et déduis-en dans  $\mathbb{R}$  les solutions de l'équation  $(E)$ .
2. En posant  $\sqrt{t} = x$  pour  $t \geq 0$ , résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_1) : -8t + 8\sqrt{t} + 6 = 0$ .
3. En posant  $|t| = x$ , résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(E_2) : -8|t|^2 + 8|t| + 6 = 0$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 15min

### 1.1.9 Equations irrationnelles

**Méthode de résolution d'une équation irrationnelle****Consigne 2.1.12 : Consolidation**

Résous dans  $\mathbb{R}$ , les équations irrationnelles suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{x+2} = 2 - 3x \text{ et } (E_2) : \sqrt{x^2 - x - 4} = -x + 7.$$

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 12min

**1.2 Inéquations du second degré dans  $\mathbb{R}$** **Activité 2.2**

Pierre, ayant vu le dispositif d'entraînement de Melon se demande comment choisir  $x$  pour que l'aire du carré IJKL soit égale au moins à deux fois celle du carré ABCD.

**Consigne 2.1.13 : Découverte**

- Rappelle l'aire de chacun des carrés ABCD et IJKL.
- Justifie à partir des informations de l'activité 2.2 que  $x$  vérifie l'inégalité suivante :  $x^2 - 8x - 32 \geq 0$ .
- Comment appelle-t-on l'inégalité obtenue dans la question 2 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

**1.2.1 Signe d'un polynôme du second degré****Consigne 2.1.14 : Etude de signe d'un polynôme du second degré**

On considère le polynôme du second degré défini par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$

- Donne la forme factorisée de  $P(x)$  suivant le signe de  $\Delta$ .
- Étudie le signe de  $P(x)$  dans chaque cas en complétant les phrases suivantes :
  - Si  $\Delta < 0$  alors le signe de  $P(x)$  dépend de celui de ...
  - Si  $\Delta = 0$  alors le signe de  $P(x)$  dépend de celui de ...
  - Si  $\Delta > 0$  alors l'équation  $P(x)=0$  admet deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ . On a donc :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+
$P(x)$	...	0	...	0	...

On suppose que  $x_1 < x_2$

**Consigne 2.1.15 : Résolution d'une inéquation du second degré**

Résous dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$(I_1) : x^2 - 2x - 15 > 0 \quad ; \quad (I_2) : -2x^2 - x - 1 \leq 0 \quad ;$$

$$(I_3) : \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0 ; (I_4) : -2x^2 - x + 1 \leq 0.$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

**1.2.2 Inéquation irrationnelles****Méthode de résolution d'une inéquation irrationnelle****Consigne 2.1.16 : Consolidation**

Résous dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \sqrt{2x^2 - x + 6} < \sqrt{x - 2} ;$$

$$(I_2) : \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x \leq -1 ; (I_3) : \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 9 - x.$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

**1.2.3 Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré****Propriété 2.1.4****Consigne 2.1.17 : Réinvestissement**

- On donne le polynôme  $P(x) = 4x^2 - 3x - 1$ .  
Donne la position du réel 2 par rapport aux racines de  $P(x)$  sans les déterminer
- Soit  $(E_m) : (6-m)x^2 + (3m+1)x - 3 - 9m = 0$  avec  $m$  un paramètre réel.  
Discute suivant les valeurs de  $m$ , la position du réel 1 par rapport aux solutions de l'équation  $(E_m)$ .

**1.3 Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du second degré**

**Activité 2.2** : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du second degré

A travers cette activité, il s'agira de résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou d'une inéquation du second degré.

**Consigne 2.1.18 : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation du second degré**

La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs est 110.

Détermine ces entiers naturels.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

**Consigne 2.1.19 : Problèmes conduisant à la résolution d'une inéquation du second degré**

"Aich-Lingerie" est une société qui fabrique des sous-vêtements S et des draps D. La production journalière de l'usine est donnée par l'inégalité :  $S^2 + 4S + 8D \leq 2496$ .

Détermine le nombre maximum de sous-vêtements que cette usine peut produire en une journée de travail si elle ne produit pas de draps.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

**Evaluations formatives****Exercice 1**

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : -x^2 + 4x + 5 = 0 ; \quad (E_2) : \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0 ; (E_3) :$$

$$x^2 + 2x + 5 = 0 ; \quad (E_4) : (x^2 - 5x + 6)^2 -$$

$$(2x^2 - 5x + 1)^2 = 0 ; \quad (E_5) : \sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$$

$$(I_1) : -5x^2 + 3x - 2 \geq 0 ; \quad (I_2) : -x^2 + 4x + 5 > 0 ;$$

$$(I_3) : x^2 - 8x + 16 > 0 ; \quad (I_4) : \frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2+x}$$

$$(I_5) : (3x + 2)^2 \leq (x^2 + 6x + 2)^2.$$

**Exercice 2**

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{3x+1}=3-x; \quad (E_2) : 1+\sqrt{3x^2-2x-1}=x;$$

$$(E_3) : \sqrt{x^4-12x^2+36}=x; \quad (E_4) : \sqrt{x-3}+\sqrt{x-8}=5;$$

$$(E_5) : \sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1; \quad (E_6) : \sqrt{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}=2;$$

$$(E_7) : x^2-6x-\sqrt{x^2-6x-3}=5;$$

$$(I_1) : \sqrt{3x-4} \leq x+2; \quad (I_2) : x-5 \leq \sqrt{3x-4};$$

$$(I_3) : \sqrt{x^2-3x+2} \leq \sqrt{-x^2+7x}.$$

### Exercice 3

On considère l'équation  $(E_m)$  d'inconnue  $x$  et de paramètre réel  $m : (E_m) : (1-m)x^2 + (2m-3)x + m + 1 = 0$

- (a) Détermine  $m$  pour que 2 soit une solution de  $(E_m)$ .  
(b) Résous  $(E_1)$ .
- On suppose que  $m \neq 1$ .  
(a) Calcule le discriminant  $\Delta_m$  de  $(E_m)$  puis étudie son signe.  
(b) Discute suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $(E_m)$ .
- On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les solutions de  $(E_m)$  lorsqu'elles existent ( $x_1 < x_2$ ). Détermine les valeurs de  $m$  pour que :  
(a)  $x_1$  et  $x_2$  soit opposées.  
(b)  $x_1$  et  $x_2$  soit de signes contraires.  
(c)  $x_1$  et  $x_2$  soit de signes strictement négatifs.
- Trouve une relation indépendant de  $m$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .

### Exercice 4

On considère le polynôme  $P_m$  de variable  $x$  défini par  $P_m(x) = (2-m)x^2 - 2mx + 1$  où  $m$  est un paramètre réel. On désigne par  $x_1$  et  $x_2$  les solutions de  $P_m(x) = 0$  lorsqu'elles existent ( $x_1 < x_2$ ).

- Résous dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (I) :  $-x^2 - x + 2 < 0$ .
- Résous et discute suivant les valeurs de  $m$ , l'équation  $P_m(x) = 0$ .
- Etudie suivant les valeurs de  $m$  le signe de  $x_1$  et  $x_2$  lorsqu'elles existent.
- Dans quels intervalles doit-on trouver les nombres réels  $m$  tels que :  
(a)  $x_1 < x_2 < -1$  ?  
(b)  $x_1 < -1 < x_2$  ?

### Exercice 5

On considère l'équation paramétrique  $(E_m) : (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.

- Etudie suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines  $x_1$  et  $x_2$  de  $(E_m)$ .
- (a) Etablis entre les racines une relation indépendante de  $m$ .  
(b) Déduis - en la valeur de  $x_2$  quand  $x_1 = -2$ .
- Détermine  $m$  de façon que l'on ait :  $5x_1 = -3x_2$ .

### Exercice 6

Etudie la position du réel 3 par rapport aux racines de l'équation  $(E_m) : (m-1)x^2 - (2m+2)x + m + 2 = 0$ .

## 1.4 Systèmes linéaires

### Activité 2.3

Trois agents de la société de surveillance : Melon, Jean et Jacques décident de construire trois carrés distincts.

- Jean veut que la somme de la longueur d'un côté des trois carrés soit égale à 12.
- Melon veut que la somme de la longueur d'un côté de son carré et du double de celle d'un côté du carré de Jean diminuée de celle d'un côté du carré de Jacques soit égale à 6.
- Jacques quant à lui, veut que le double de la longueur d'un côté du carré de Melon augmenté de celle d'un côté du carré de Jean soit égale au triple de celle d'un côté de son carré diminué de 5.

Ces trois agents se demandent donc la valeur à attribuer à la longueur d'un côté de chaque carré pour satisfaire toutes ces conditions.

#### 1.4.1 Définitions - Propriétés

**Définition 2.1.4 : Équations linéaires et système d'équations linéaires à trois inconnues**

**Définition 2.1.5 : Systèmes équivalents**

**Propriété 2.1.5**

#### 1.4.2 Résolution d'un système d'équations linéaires

**Consigne 2.1.20 :** Résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues

- En désignant respectivement par  $x, y$  et  $z$  la longueur du côté du carré de Melon, Jean et Jacques :  
(a) Traduis chacune des informations ci-dessus par une équation à trois inconnues :  $x, y$  et  $z$ .  
(b) Déduis-en un système d'équations (S) vérifié par  $x, y$  et  $z$ .
- On donne le système  $(S_1)$  suivant :
 
$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 12 & (L_1) \\ x + 2y - z = 6 & (L_2) \\ 2x + y - 3z = -5 & (L_3) \end{cases}$$
 (a) En remplaçant  $L_2$  et  $L_3$  respectivement par les opérations  $L_2 - L_1$  et  $L_3 - 2L_1$ , donne un système  $(S_2)$  équivalent au système  $(S_1)$ . (On désignera par  $L'_2$  la ligne contenant la réponse de l'opération  $L_2 - L_1$  et par  $L'_3$  celle contenant la réponse de l'opération  $L_3 - 2L_1$ )  
(b) Justifie que le système  $(S_2)$  équivalent au système  $(S_3)$  suivant :
 
$$(S_3) : \begin{cases} x + y + z = 12 & (L_1) \\ y - 2z = -6 & (L'_2) \\ -7z = -35 & (L'_3) \end{cases}$$
 (c) Déduis-en la valeur de  $z$  à partir de  $L'_3$  puis celle de  $y$  à partir de  $L'_2$  et celle de  $x$  à partir de  $L_1$ .

(d) Déduis-en l'ensemble des solutions du système  $(S_1)$ .

### Information

Tu viens d'achever la résolution du système  $(S_1)$  par la méthode de **pivot de Gauss**.

3. En utilisant une technique similaire à celle précédente, résous le système :

$$(S): \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$$

**Stratégie : TI : 10min TC : 20min**

### Consigne 2.1.21 : Réinvestissement

1. Résous dans  $\mathbb{R}^3$ , par la méthode du pivot de Gauss, les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 7 \end{cases}; \quad (S_2): \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 5y - z = -4 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 7 \end{cases}$$

2. (a) Résous dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant d'inconnues

$$(x, y, z) : (S): \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z = -8 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

(b) Déduis-en l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}^3$  des

$$\text{systèmes suivants : } (S_4): \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y-2} + z + 1 = 0 \\ 2x^2 - \frac{1}{y-2} + 3z = -8 \\ -x^2 + \frac{2}{y-2} + z = -2 \end{cases}$$

$$(S_5): \begin{cases} \sqrt{x} + |y| + \frac{1}{z} + 1 = 0 \\ 2\sqrt{x} - |y| + \frac{3}{z} = -8 \\ -\sqrt{x} + 2|y| + \frac{1}{z} = -2 \end{cases}$$

**Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 20min**

### 1.4.3 Problèmes conduisant à un système d'équations linéaires

#### Consigne 2.1.22

1. Détermine un nombre de trois chiffres sachant que la somme de ces chiffres est égale à 6, le chiffre des unités est égale à la somme des chiffres des dizaines et des centaines. On note de plus que ce nombre lu à l'envers est égale au nombre cherché augmenté de 198.

2. Trois joueurs jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2400 F.

Quels étaient les avoirs initiaux ?

## Séquence n°2 : Statistique

### 2.1 Série statistique des centres et représentation graphiques

#### Activité 2.4

Dans les bases de données de cette société de surveillance, les tailles en cm de certains coéquipiers de Melon se présentent comme suit :

165	177	174	168	165	171
165	177	174	171	165	174
174	174	174	174	174	174
168	171	174	168	177	174
165	180	177	168	180	171

Ainsi, la société vient de définir une série statistique dont elle veut mesurer la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

#### Consigne 2.2.1

1. Reproduis puis complète le tableau suivant :

Classes	[165; 170[	[170; 175[	[175; 180[	[180; 185[	Total
[a ; b[					
Effectif					
$(n_i)$					
Fréquence					
$(f_i)$					
Amplitude					
Densité					
Centre $(c_i)$					

Densité  $d = \frac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$  ; Amplitude  $b - a$  ; Centre  $c_i = \frac{a+b}{2}$

2. Construis l'histogramme de cette série.

3. Construis le polygone des effectifs de cette série groupée en classes.

**Stratégie : TC : 20min**

### 2.2 Effectifs et fréquences cumulées

#### Consigne 2.2.2

En référant au tableau obtenu à la consigne 2.1, réponds aux questions suivantes :

- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
- Construis sur le même graphique le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique.

**Stratégie : TI : 10min TC : 15min**

### 2.3 Caractéristiques de position

#### Activité 2.5

On désire déterminer la classe modale, le mode, la moyenne et la médiane de la série statistique des

centres étudiée dans l'activité 2.4

**Consigne 2.2.3**

1. Reproduis puis complète le tableau suivant :

Classe	[165; 170[	[170; 175[	[175; 180[	[180; 185[	Total
Effectif $n_i$					
Densité $d$					
Centre $c_i$					

2. Quelle est la classe ayant le plus effectif ?

**Information**Cette classe est appelée **classe modale**.

3. Quelle est le centre ayant la plus grande densité ?

**Information**Ce centre est appelé **mode**4. Calcule la moyenne  $\bar{x}$  de cette série statistique en

$$\text{utilisant la formule } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i \times c_i}{\sum_{i=1}^4 n_i}$$

**Stratégie : TI : 10min****TC : 15min****Consigne 2.2.4**

1. En utilisant le graphe des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants construit dans la consigne 2.2, donne l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones. (On fera une projection orthogonale de ce point d'intersection sur l'axe des abscisses et lire la valeur correspondante).

**Information**

Cette valeur trouvée est appelée médiane

2. Retrouve cette valeur par la méthode d'interpolation linéaire.

**Stratégie : TI : 5min****TC : 5min****Consigne 2.2.5 : Application**La taille des élèves d'une classe de 1<sup>ère</sup> scientifique est résumée dans le tableau suivant :

Taille $t$ en cm	Effectifs
[150 ; 160[	2
[160 ; 165[	7
[165 ; 170[	10
[170 ; 175[	6
[175 ; 180[	2
[180 ; 190[	3

1. Déterminer la classe modale ainsi que le mode de cette série statistique.

2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique en remplissant le tableau suivant :

Taille $t$ en cm	Nombre d'élèves de taille inférieure à $t$
150	0
160	2
165	
170	
175	

180	
190	

3. Détermine les coordonnées des points A et B, points extrêmes du segment contenant le point  $M\left(M_e; \frac{N}{2}\right)$  puis détermine la médiane de cette série statistique.**Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 15min****2.4 Paramètre de dispersion****Activité 2.6**

La société veut mesurer à présent la dispersion des valeurs qu'elle a recueillies autour de la moyenne.

**Définition 2.2.6 : Variance - Ecart-type**

- On appelle **variance d'une série statistique groupée** d'effectif total  $N$ , la variance de la série  $(c_i; n_i)$  des centres de classes associée. La variance de la série  $(c_i; n_i)$  est le nombre réel noté  $V(x)$  défini par :

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times (c_i - \bar{x})^2}{N} \text{ ou } V(x) = \left( \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times c_i^2}{N} \right) - \bar{x}^2$$

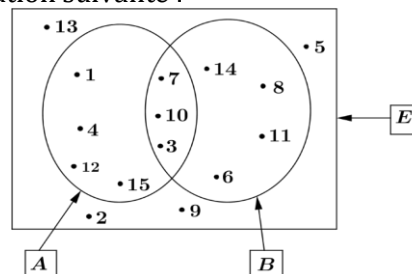
- L'écart type** de cette série est le réel, noté  $\sigma(x)$  tel que  $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

**Consigne 2.2.6**

Détermine la variance et l'écart-type de la série de la activité de 2.4

**Stratégie : TI : 5min TC : 10min****Séquence n°3 : Dénombrement****Activité 2.7 : Vocabulaire des ensembles**

Pour évaluer sa chance de réussite à quelques jours de la compétition, Melon décide de regrouper et d'analyser les différents résultats de ses tirs pour les deux dernières séances d'entraînement. Il obtient la représentation suivante :

**3.1 Notion d'ensemble****Consigne 2.3.1**

- (a) Dresse la liste des éléments de chacun des ensembles A, B et E.  
(b) Donne le nombre d'éléments de chacun des ensembles A, B et E.
- (a) Dresse la liste des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B.  
(b) Dresse la liste des éléments de E qui appartiennent à B et n'appartiennent pas à A.

3. (a) Quels sont les éléments de E qui appartiennent à la fois à A et B ?  
 (b) Quels sont les éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A et B ?

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 10min

### Consigne 2.3.2 Cardinal de la réunion de deux parties

1. (a) En considérant la représentation de l'activité 2.7, donne le cardinal de chacun des ensembles : A, B,  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .  
 (b) Calcule  $card(A) + card(B) - card(A \cap B)$  puis compare-le à  $card(A \cup B)$
2. Soit E et F deux ensembles finis.  
 Démontre que  $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$  (Tu pourras écrire  $E \cup F = (E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E)$ )

Stratégie : TI : 7min TC : 15min

### Consigne 2.3.3 : Consolidation

Sur 83 agents de cette société de surveillance, 62 s'entraînent au tir, 64 s'entraînent au grimpé et 48 font les deux sports d'entraînement.

- Détermine le nombre d'agents qui font au moins un des deux sports d'entraînement.
- Détermine le nombre d'agents qui :
  - s'entraînent uniquement au tir.
  - s'entraînent uniquement au grimpé.
  - font un seul sport d'entraînement.
  - ne font aucun sport d'entraînement.

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

## 3.2 Produit cartésien

### Activité 2.8

Pour accéder au test d'entraînement au tir, chaque agent doit procéder au lancer à la fois de deux dés de couleurs différentes : un rouge et un noir. Le dé rouge a six faces numérotées de 1 à 6 et le dé noir a quatre faces respectivement marquées avec les lettres a ; b ; c et d. Le résultat d'un lancer est le couple formé par le nombre et la lettre inscrits sur la face cachée de chaque dé. L'agent qui obtient un couple formé d'un nombre impair et d'une voyelle accède directement au test. On désigne par A l'ensemble des nombres se trouvant sur les faces du dé rouge et par B celui des lettres se trouvant sur les faces du dé noir.

### Consigne 2.3.4 : Produit cartésien de deux ensembles finis

1. Écris tous les couples de résultats possibles ; x étant un élément de l'ensemble A et y un élément de l'ensemble B. Pour cela, complète le tableau suivant :

$(x; y)$	a	b	c	d
1	(1 ; a)			
2				(2 ; d)
3				
4		(4 ; b)		
5				

6			(6 ; c)	
---	--	--	---------	--

Information : L'ensemble de ces couples se note :  $A \times B$ .

2. (a) Donne  $card(A)$ ,  $card(B)$  et  $card(A \times B)$ .  
 (b) Calcule  $card(A) \times card(B)$ . Que constates-tu ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

### Consigne 2.3.5 Application

- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?
- Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 12min

## 3.3 p-listes

### Consigne 2.3.6 : Découverte

On considère l'ensemble  $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

1. Donne trois triplets constitués des éléments de A deux à deux distincts ou non.

### Information

On dit que ces triplets formés à partir des éléments de A deux à deux distincts ou non sont des 3 – lites de l'ensemble A

2. Combien de triplet d'éléments de A peux-tu former au total ?

### Consigne 2.3.7 : Consolidation

- Détermine le nombre de numéros à 08 chiffres qu'on peut former sur un cadran de téléphone.
- Combien de numéros à huit chiffres commençant par 67 peut-on former sur un cadran de téléphone ?
- Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 1 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

## 3.4 Arrangement et permutation

### Activité 2.9

Pour diriger cette société de surveillance, 4 postes doivent être occupés par des agents. Suite à l'annonce, 10 volontaires se sont présentés pour ces 4 postes. Par ailleurs, les règles imposent qu'un agent choisi doit gérer un et un seul poste. Melon veut trouver alors le nombre de bureaux possibles de 4 membres qu'on peut former avec ces 10 volontaires.

### Consigne 2.3.8 : Découverte

1. Détermine le nombre de possibilités qu'il y a pour choisir :
- le premier membre de ce bureau ;
  - le deuxième membre de ce bureau ;
  - le troisième membre de ce bureau ;
  - le quatrième membre de ce bureau.

2. Détermine alors le nombre de bureaux de 04 membres qu'on peut former.

### Consigne 2.3.9 : Application

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

### Consigne 2.3.10 : Approfondissement

1	2	3
4	5	6
A	B	C

Le clavier ci-contre de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

- Combien de codes différents peut-on former ?
- Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
- Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
- Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
- Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

### Permutation

#### Consigne 2.3.11

En considérant la situation de l'activité 2.9 précédent, détermine le nombre de bureaux qu'on peut former s'ils doivent comporter 10 membres.

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

#### Consigne 2.3.12 : Application

- Le groupe de 18 élèves d'une classe de première D doit s'inscrire dans l'ordre au concours " Miss Mathématiques". Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ?
- Les nombres 4, -2 et 1 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

### 3.5 Anagramme d'un mot

#### Consigne 2.3.13

- Trouve tous les mots qui ont un sens ou non que l'on puisse former avec toutes les lettres de « CAS »

#### Information

Ces mots trouvés par permutation des lettres sont des anagrammes du mot « CAS »

- Trouve tous les mots qui ont un sens ou non que l'on puisse former avec toutes les lettres de « TATA »

#### Information

Ces mots trouvés par permutation des lettres sont des anagrammes du mot « TATA »

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### Consigne 2.3.14 : Approfondissement

- Combien y a-t-il d'anagrammes des mots ANAGRAMME ; PATRICE et SPECTACULAIRES ?
- Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
  - commençant et finissant par une consonne ;
  - commençant et finissant par une voyelle ;
  - commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
  - commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

### 3.6 Combinaison

#### Activité 2.10

On considère l'ensemble  $E = \{a, b, c, d, e\}$ . On désire trouver une formule permettant d'avoir le nombre de tous les sous-ensembles à 3 éléments de E qu'on peut former.

#### Consigne 2.3.15

- (a) Dresse la liste de tous les sous-ensembles à 4 éléments de E qu'on peut former.  
(b) Combien sont-ils au total ?
- Combien de 3-arrangements de E peut-on avoir
- Calcule  $\frac{A_3^3}{3!}$  et compare le résultat à celui du résultat de la question 1.(b).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

#### Consigne 2.3.16 : Propriété

Soit  $n$  et  $p$  des entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n - 1$ . Démontre que :

- $C_n^n = 1$  et  $C_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$  et  $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^{n-p} = C_n^p$
- $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Stratégie : TI : 7min TC : 15min

#### Consigne 2.3.17 : Application

Dans une classe de 30 élèves dont 16 garçons, on veut former un comité de 5 membres.

- Combien de comités possibles peut-on former ?
- Quel est le nombre de comité comportant :
  - exactement 3 filles ?
  - au plus 2 filles ?
  - au moins 1 garçons ?

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

### 3.7 Triangle de Pascal – Formule de binôme de Newton

#### Définition 2.3.9 : Triangle de Pascal

**Propriété 2.3.10****Consigne 2.3.18 : Consolidation**

- Développe, réduis et ordonne suivant les puissances décroissantes de  $x$  le nombre  $(x + 1)^5$
- (a) Résous dans  $\mathbb{N}^*$  l'équation :  $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$   
(b) Résous dans  $\mathbb{N}$  l'équation :  $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

**Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min**

**Consigne 2.3.19 : Consolidation**

Une urne contient 5 boules noires ; 7 boules vertes et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard 4 boules de cette urne.

**1<sup>er</sup> cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement sans remise**

- Détermine le nombre de tirages possibles.
- Détermine le nombre de tirages comportant :
  - 2 boules noires et 2 boules rouges.
  - 2 boules noires et 2 boules rouges dans cet ordre.
  - exactement 3 boules vertes.
  - une boule verte et 2 boules rouges.
  - des boules unicolores.
  - des boules de différentes couleurs.
  - au moins 2 boules noires.
  - au plus 3 boules vertes.
  - 3 boules noires et 1 boule rouge dans cet ordre.

**2<sup>ème</sup> cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement avec remise**

Reprends les mêmes questions précédentes.

**3<sup>ème</sup> cas : on suppose que les tirages s'effectuent simultanément**

Reprends les mêmes questions précédentes.

**Stratégie : TI : 15min TG : 7min TC : 20min**

**Evaluations formatives****Exercice 1**

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

- Combien de comités peut-on constituer ?
- Combien de comités peut-on constituer sachant que le secrétaire est une fille ?
- Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?
- Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
- Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

**Exercice 2**

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

- De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

- Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
  - uniquement des hommes ;
  - des personnes de même sexe ;
  - au moins une femme et au moins un homme.

**Exercice 3**

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

**Exercice 4**

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.

Détermine le nombre de tirages permettant d'obtenir

- le tirage est effectué avec remise.
  - 4 boules jaunes ;
  - 4 boules vertes ;
  - 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
  - 3 jaunes et une verte ;
  - 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
  - deux jaunes et deux vertes ;
  - au moins 3 vertes ;
  - au plus 3 jaunes.
- le tirage est effectué sans remise. Reprendre les questions précédentes

**Exercice 5**

**Adoukè** et **Adouni** font partie d'un club de 18 personnes.

On veut constituer un bureau de 5 personnes

- Quel est le nombre de bureaux possibles à former ?
- Quel est le nombre de bureaux possibles où **Adoukè** est présente ?
- Adoukè** et **Adouni** ne pouvant pas se supporter, quel est le nombre de bureaux où **Adoukè** et **Adouni** ne se retrouvent pas ensemble ?

**Exercice 6**

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

- 4 boules jaunes ;
- 4 boules vertes ;
- 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
- 3 jaunes et une verte ;
- 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
- deux jaunes et deux vertes ;
- au moins 3 vertes ;
- au plus 3 jaunes.

On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

**Exercice 7**

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois  
Combien doit-on organiser de matchs ?

**Exercice 8**

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

- On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer le nombre de possibilité :
  - de ne tirer que 3 jetons verts ;
  - de ne tirer aucun jeton vert
  - de tirer au plus 2 jetons verts ;
  - de tirer exactement 1 jeton vert.
- On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions 1.(a), 1.(b), 1.(c) et 1.(d).

## Séquence n°4 : Fonctions et applications

### 1.1 Généralité sur les fonctions

#### 1.1.1 Fonction et ensemble de définition d'une fonction

**Définition 2.4.1 : Fonction et ensemble de définition d'une fonction**

Retenons

#### Consigne 2.4.1

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 5x - 12};$$

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x+4}}{x^2 - 9}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 4};$$

$$u: \mathbb{R} \rightarrow ]-2; +\infty[ \quad x \mapsto x^2 - 3x;$$

$$v: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \quad x \mapsto \frac{x-3}{x-1}$$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

#### 1.1.2 Restriction et prolongement

#### Consigne 2.4.2 : Restriction et prolongement

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x+1|} \quad \text{et} \quad g: ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x - 1$$

- Détermine l'ensemble de définition de  $f$  et  $g$ .
- Écris  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.
- Compare  $f(x)$  et  $g(x)$  pour tout réel  $x$  de  $]-1; +\infty[$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

#### Consigne 2.4.3 : Application

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{|x| - 3};$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x - 3} \quad \text{et}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto |2x - 3| - |x + 4|$$

- Détermine le domaine de définition des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

- Détermine la restriction de  $f$  :
  - à l'intervalle  $]3; +\infty[$
  - à l'intervalle  $] -\infty; -3[$
- Démontre que  $f$  est un prolongement de  $g$  à  $\mathbb{R}$ .
- Détermine la restriction de  $h$  à  $\left[-4; \frac{3}{2}\right]$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

### 1.1.3 Comparaison de deux fonctions

#### Consigne 2.4.4 : Comparaison de deux fonctions

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 - x - 1 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -x^2 + 2x + 1$$

- Détermine le domaine de définition des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Calcule  $f(x) - g(x)$  pour tout réel  $x$ .
- Etudie le signe de  $f(x) - g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Déduis-en la comparaison de  $f$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

### 1.1.4 Majorant, minorant, maximum et minimum d'une fonction

#### Définition 2.4.4 : Minorant, majorant d'une fonction

#### Définition 2.4.5 : Minimum, maximum relatifs d'une fonction

#### Consigne 2.4.5 : Consolidation

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x^2 + 2}$

- Justifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 - \frac{7}{x^2 + 2}$
- Justifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 4$ .
  - Justifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \frac{1}{2}$ .
- Précise un minorant et un majorant de  $f$  et donne si possible le minimum et le maximum de  $f$ .
- Peut-on dire que  $f$  est bornée ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 1.1.5 Opérations sur les fonctions

#### Définition 2.4.6 : Somme, produit et quotient de fonctions

#### Consigne 2.4.6 : Composée de deux fonctions

Melon désire effectuer certaines opérations sur les fonctions numériques à variable réelle. Pour cela, il considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x + 1; \quad g(x) = -3x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = -3(2x + 1)^2$$

- Complète les tableaux suivants :

$f$		$g$		$h$	
$x$	$f(x)$	$x$	$g(x)$	$x$	$h(x)$
-1		$f(-1)$		-1	
0		$f(0)$		0	
2		$f(2)$		2	
$\beta$		$f(\beta)$		$\beta$	

- Déduis-en une comparaison de :

(a)  $g[f(-1)]$  et  $h(-1)$

(b)  $g[f(0)]$  et  $h(0)$

(c)  $g[f(\beta)]$  et  $h(\beta)$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

**Consigne 2.4.7 : Consolidation**

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 2 \quad ; \quad x \mapsto \frac{3x-2}{2x} \quad ; \quad x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \quad \text{et}$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$$

1. Détermine le domaine de définition de la fonction  $x \mapsto (g \circ f)(x)$ .(b) Détermine une expression de  $(g \circ f)(x)$ 2. Calcule  $h \circ f$  ;  $k \circ f$  ;  $f + g$  ;  $gh$  et  $\frac{g}{k}$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

**1.2 Applications****Retenons****Consigne 2.4.8 : Consolidation**

On considère les fonctions ci-dessous :

$$f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2+1}{x-3} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x^2+1}$$

Vérifie si ces fonctions sont des applications

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

**Consigne 2.4.9 : Commutativité ou non de la composée d'applications - Associativité de la composée d'applications**On considère les applications suivantes définies de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x)=x-1$  ;  $g(x)=3x^2$  et  $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 1. Détermine  $f \circ g$  et  $g \circ f$  puis compare-les.2. Détermine  $f \circ (g \circ h)$  et  $(f \circ g) \circ h$  puis compare-les.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

**1.2.1 Application injective****Propriété 2.4.2****Consigne 2.4.10 : Application**

Montre que les fonctions suivantes sont des applications

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\text{injectives :} \quad x \mapsto \frac{3x+2}{x-2} \quad ; \quad x \mapsto x^2$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

**1.2.2 Application surjective****Propriété 2.4.3****Consigne 2.4.11 : Application**

Montre que l'application suivante est surjective :

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \sqrt{9-x^2}$$

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

**1.2.3 Application bijective****Propriété 2.4.4****Remarque****Consigne 2.4.12 : Application**

On considère l'application suivante :

$$g: ]-\infty; \frac{1}{2}] \rightarrow ]-\infty; \frac{1}{4}]$$

$$x \mapsto -x^2 + x$$

Montre que l'application  $g$  est bijective puis définis sa bijection réciproque  $g^{-1}$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

**1.2.4 Application identique****Consigne 2.4.13**

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{On considère la fonction :} \quad x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$$

1. Justifie que  $f$  est une application2. Montre que l'application  $f$  est bijective puis définis sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .3. (a) Explicite  $(f \circ f^{-1})(x)$  pour tout  $x$  élément d'un ensemble  $D_1$  à préciser.(b) Explicite  $(f^{-1} \circ f)(x)$  pour tout  $x$  élément d'un ensemble  $D_2$  à préciser.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

**1.2.5 Propriétés****Consigne 2.4.14**Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  et  $g$  une application de  $F$  vers  $G$ .1. Démontre que si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.2. Démontre que si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.3. Déduis-en que  $g \circ f$  est bijective et montre que  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  (On pourra montrer que  $(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = Id_G$ )

Stratégie : TI : 10min

TC : 20min

**Consigne 2.4.15 : Représentation graphique de la courbe d'une fonction et de la courbe de sa réciproque**Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .Soit  $f$  une bijection de  $E$  vers  $F$  ;  $E$  et  $F$  étant des parties de  $\mathbb{R}$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y=x$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  les représentations graphiques respectives de  $f$  et  $f^{-1}$ . Soit les points  $A(a; b)$  et  $A'(b; a)$ .1. (a) On suppose que  $a = b$ . Démontre que  $A$  et  $A'$  sont symétriques par rapport à la droite  $(\Delta)$ .(b) On suppose maintenant que  $a \neq b$ . Soit  $M(x; y)$  un point du plan.Démontre que  $M \in (\Delta) \Leftrightarrow MA=MB$ .2. Démontre que  $A$  appartient à  $(\mathcal{C})$  si et seulement si  $A'$  appartient à  $(\mathcal{C}')$ . (On pourra utiliser  $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ ).

3. Que peut-on dire alors de  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  par rapport à  $(\Delta)$  ?

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

### Consigne 2.4.16 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Soit l'application  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$   
 $x \mapsto \sqrt{x}$

- Justifie que l'application  $f$  est bijective puis détermine sa bijection réciproque  $f^{-1}$ .
- (a) Construis la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .  
(b) Dédus-en la construction sur le même graphique de la courbe représentative  $(\mathcal{C}')$  de  $f^{-1}$ .

Stratégie : TI : 10min TC : 15min

### Consigne 2.4.17 : Approfondissement

Soit l'application  $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$   
 $x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

- Ecris l'application  $h$  comme la composée de deux applications  $f$  et  $g$ .
- (a) Montre que  $f$  est bijective et détermine sa bijection réciproque.  
(b) Montre que  $g$  est bijective et détermine sa bijection réciproque.  
(c) Dédus-en que  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$  et détermine sa bijection réciproque.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

## 1.2.6 Image directe – Image réciproque d'un ensemble par une application

### Consigne 2.4.18 : Image directe – Image réciproque

On considère l'application  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x + 1$  et l'ensemble  $A = ]1; 3[$ .

- Démontre que  $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in ]-8; -2]$

**Information :** On dit que  $] - 8; - 2]$  est l'image directe de  $]1; 3[$  par  $f$  et on note :  $f(]1; 3[) = ] - 8; - 2]$

- Démontre que  $f(x) \in A \Leftrightarrow x \in \left] - \frac{2}{3}; 0 \right]$

**Information :** On dit que  $\left] - \frac{2}{3}; 0 \right]$  est l'image réciproque de  $]1; 3[$  par  $f$  et on note :  $f^{-1}(]1; 3[) = \left] - \frac{2}{3}; 0 \right]$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### Consigne 2.4.19 : Consolidation

On considère les applications suivantes :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x^2 - x$  ;  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

- Détermine l'image directe de  $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$  par  $f$ .
- Détermine l'image réciproque de  $]1; 4[$  par  $g$ .
- (a) Montre que  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ,  $h(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$   
(b) Détermine  $h(] - \infty; -1])$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## Evaluations formatives

### Exercice 1

On considère les applications suivantes :  
 $f: ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$  et  $g: ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$   
 $x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$  et  $x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$  et

$h: ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2$

- Détermine  $f(]2; 4])$  et  $g^{-1}(\{9\})$ .
- Montre que  $f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et détermine sa bijection réciproque.
- (a) Vérifie que  $\forall x \in ]1; +\infty[$ ,  $g(x) = [f(x)]^2$ .  
(b) Dédus-en que  $g$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]1; +\infty[$  et détermine sa bijection réciproque.

### Exercice 2

- Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

(a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (b)  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  (c)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto n + 1$   $x \mapsto n + 1$   $x \mapsto x^2$   
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- On considère l'application  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$   
(a)  $f$  est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?  
(b) Montre que  $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ .  
(c) Montre que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[-1; 1]$  est une bijection.

### Exercice 3

- Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  et  $g \circ g$  pour les fonctions  $f$  et  $g$  définies de la façon suivante :  
(a)  $f(x) = 2x^2 - x$  et  $g(x) = 3x + 2$ .  
(b)  $f(x) = 1 - x^3$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .  
(c)  $f(x) = \sqrt{2x + 3}$  et  $g(x) = x^2 + 2$
- Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions  $fg$ ,  $g + f$ ,  $f/g$  et  $g/f$  pour les fonctions  $f$  et  $g$  définies de la façon suivante :  
(a)  $f(x) = 2x^2 - x$  et  $g(x) = 3x + 2$ .  
(b)  $f(x) = 1 - x^3$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .  
(c)  $f(x) = \sqrt{2x + 3}$  et  $g(x) = x^2 + 2$
- Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction  $f \circ g \circ h$  pour les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies de la façon suivante :  
(a)  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = 2x$  et  $h(x) = x - 1$ .  
(b)  $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ,  $g(x) = x^2 + 2$  et  $h(x) = x + 3$

### Activité 2.11

Melon voudrait tracer une courbe qui permettra de voir l'évolution de la longueur des deux carrés construits. Pour cela il se rend compte qu'il a besoin des notions de limite, de continuité et de dérivation afin de bien construire cette courbe.

#### 5.1 Limite finie d'une fonction en un point

##### Consigne 2.5.1 : Découverte de la notion de limite et continuité

On considère la fonction suivante :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x + 4$

- Détermine le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
- Reproduis et complète le tableau suivant :
 

$x$	2,99	2,999	3,001	3,002
$f(x)$				
- Pour  $x$  prenant des valeurs voisines de 3,  $f(x)$  est proche de quelle valeur ?
- Compare cette valeur trouvée dans la question n°3 à  $f(3)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

##### Consigne 2.5.2 : Consolidation

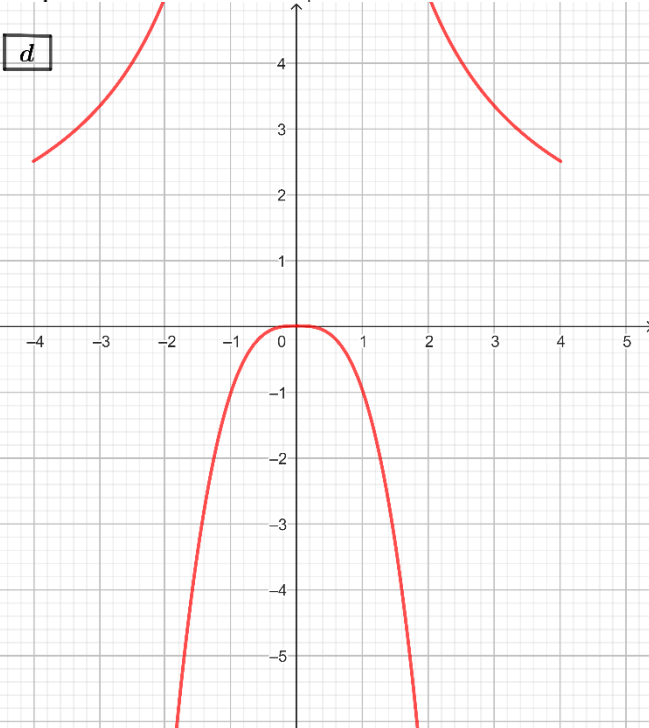
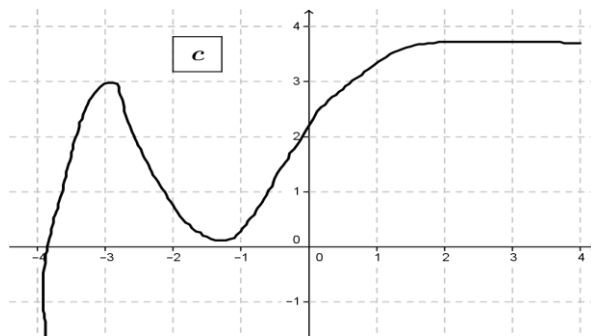
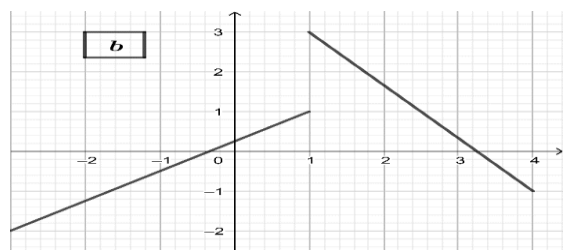
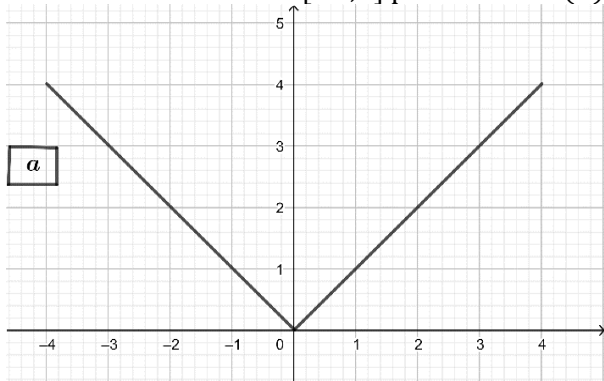
On considère les fonctions suivantes :  $f(x) = x^2 - 3x + 2$   
 et  $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Vérifie si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues en 1 et en 2.

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

##### Consigne 2.5.3 : Reconnaissance graphique d'une fonction continue en un point

Dans chacun des cas suivants, la fonction  $f$  est représentée sur l'intervalle  $[-4;4]$  par la courbe (C).



- Indique dans quel(s) cas, la courbe (C) de la fonction  $f$  peut-être tracée sans lever le crayon.

**Information :** Dans ce(s) cas, on dit que la fonction  $f$  est continue sur  $[-4;4]$ .

- Lorsque la fonction  $f$  n'est pas continue, précise l'abscisse  $x_0$  d'un point où le crayon est levé.

**Information :** Dans ce cas on dit que la fonction  $f$  n'est pas continue en  $x_0$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

##### Consigne 2.5.4 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes :  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$  ;  
 $g(x) = x - 2$  et  $h(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ .

- Détermine les domaines de définition des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
- Justifie que  $h$  est continue sur son domaine de définition.
- (a) Justifie que les fonctions  $f$  et  $g$  coïncident sur un intervalle que tu préciseras.  
 (b) Etudie la continuité de  $g$  en  $-3$ .  
 (c) Déduis-en  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

##### Consigne 2.5.5 : Consolidation

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $f(x) = x^2 \sin(x)$  et  $g(x) = 2x - \sin x$

- Justifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$  et  $2x - 1 \leq g(x) \leq 2x + 1$ .
- Déduis-en la limite de  $f$  en 0 et celle de  $g$  en  $+\infty$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### Consigne 2.5.6

On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x + 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- Détermine le domaine de définition de  $f$ .
- (a) Détermine  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  pour  $x \in [2; +\infty[$ .  
(b) Détermine  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  pour  $x \in ]-\infty; 2[$ .  
(c) Compare les résultats obtenus dans les questions 2.(a) et 2.(b).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### Consigne 2.5.7 : Consolidation

On considère la fonction  $g$  définie par

$$\begin{cases} g(x) = 2x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x - b & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1$$

- Etudie la continuité de  $g$  en 0.
- Détermine les réels  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en 0.

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

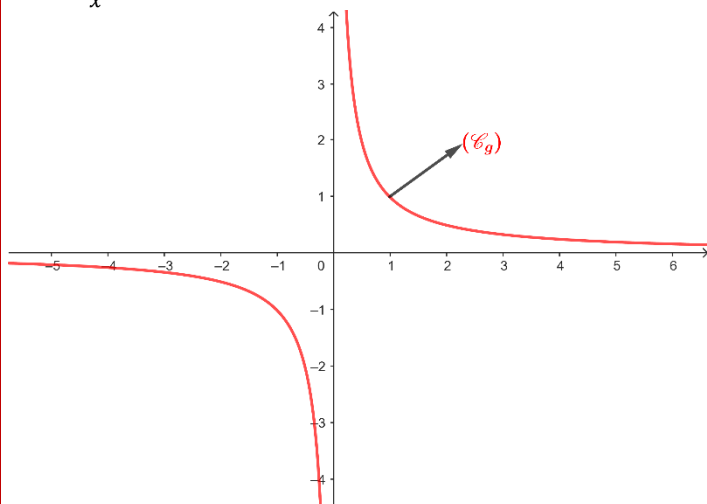
## 5.2 Extension de la notion de limite

### 5.2.1 Limite infinie en un point

#### Consigne 2.5.8

Melon s'intéresse à la courbe  $(C_g)$  de la fonction

$g(x) = \frac{1}{x}$  représentée ci-dessous.



- Détermine le domaine de définition de  $g$ .
- (a) Complète le tableau suivant :

$x$	$-10^{-6}$	$-10^{-5}$	$-10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$
$g(x)$						

(b) Que remarque-tu de la valeur de  $g(x)$  lorsque  $x$  se rapproche de plus en plus de 0 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### Consigne 2.5.9 : Consolidation

Calcule les limites suivantes :

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{(x-2)^6} \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{(x-4)^3} \quad (c) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{2x+4}{x+1}$$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

## 5.2.2 Limite finie ou non d'une fonction en l'infini

### Consigne 2.5.10

On considère la fonction  $g(x) = \frac{1}{x}$  de représentation graphique  $(C_g)$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Détermine le domaine de définition de  $g$ .
- Complète le tableau suivant :

$x$	-10000	-1000	-100	100	1000	10000
$g(x)$						

- Que constates-tu la valeur de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers les grandes valeurs négatives ?
- Que constates-tu la valeur de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers des grandes valeurs positives ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

### Consigne 2.5.11 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes  $f(x) = x + \cos x$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2} \sin x$

- Démontre que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  
 $x - 1 \leq x - \cos x$  et  $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \sin x \leq \frac{1}{x^2}$
- Déduis-en  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

## 5.2.3 Opérations sur les limites

Les tableaux suivants donnent les limites en  $x_0$  des fonctions  $f + g$ ;  $f \times g$  et  $\frac{1}{g}$  connaissant les limites en  $x_0$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

**Propriété 2.5.18 : Limite de la somme de deux fonctions**

**Propriété 2.5.19 : Limite du produit de deux fonctions**

**Propriété 2.5.20 : Limite de l'inverse d'une fonction**

**Propriété 2.5.21: Limite du produit de deux fonctions**

**Remarque**

**Retenons**

**Remarque**

**Retenons**

**Propriété 2.5.22**

**Consigne 2.5.12 : Consolidation**

Calcule les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \right)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} \right)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{2x^2 - 3x + 3}{9 - x^2} \right)$$

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x - 2} \right)$$

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{3x} - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \right)$$

$$L_6 = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{8}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \right)$$

**Stratégie : TI : 15min****TC : 30min****Consigne 2.5.13 : Consolidation**

Calcule les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 + 2) \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 3x + 1)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 3} \right)$$

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 3}{3 - x^3} \right)$$

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad L_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3x - 1})$$

$$L_7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}) \quad L_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x} \right)$$

$$L_9 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{2x^2 + 3x - 1})$$

**Stratégie : TI : 15min****TC : 40min****Consigne 2.5.14 : Consolidation**

Calcule les limites suivantes

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \right)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 2x}{\tan 5x} \right)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x} \right)$$

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} \right)$$

**Stratégie : TI : 10min****TC : 20min****Evaluations formatives****Exercice 1**Dans chacun des cas suivants, étudie la limite de la fonction  $f$  en  $x_0$ .

$$1. f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}; x_0 = 2$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}; x_0 = -2$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}; x_0 = 1$$

$$4. f(x) = \frac{5}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}; x_0 = 2$$

$$5. f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}; x_0 = 0$$

**Exercice 2**On considère les fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $u$  définies

$$\text{comme suit : } \begin{cases} f(x) = x^2 + x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 7 & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) = 3x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) = \frac{x+4}{2x+3} & \text{si } x \leq 0 \\ h(x) = x^2 - x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{si } x > 1 \\ u(x) = l & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Détermine le domaine de définition des fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $u$ .2. Etudie la continuité de  $f$  et  $g$  en 2.3. Etudie la continuité de  $h$  en 0 suivant les valeurs du nombre réel  $a$ .4. Détermine la valeur du nombre réel  $l$  pour laquelle  $i$  est continue en 1.**Exercice 3**

Calcule les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 1); \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x + 2)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3x - 2); \quad L_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6 - x + 1)$$

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x); \quad L_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{E(x)}{x} \right)$$

$$L_7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 5}} - x); \quad L_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cos x - 1}{x} \right)$$

$$L_9 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \right); \quad L_{10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$L_{11} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{|x-2|}{x-2} \right); \quad L_{12} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x^2 - 4} \right)$$

$$L_{13} = \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{5}}{x+2} \right); \quad L_{14} = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 2} \right)$$

$$L_{15} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{4x+1} - 5}{x + \sqrt{x+2} - 4} \right); \quad L_{16} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \right)$$

$$L_{17} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-1 + \sqrt{x^2-1}}{x-1} \right) \quad L_{18} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2+7} - 5}{x^2-1} \right)$$

**Exercice 4**Soit la fonction  $f$  définie sur  $D = [0; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

1. Démontre que, pour tout  $x$  de  $D$ , on a :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

2. Démontre que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ .3. En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .**Exercice 5**

$$\text{Soit } f(x) = \sqrt{x^2 - x} - 1$$

Etudie la continuité de  $f$  en  $\frac{1}{2}$  et en 5.**Exercice 6**

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Détermine  $D_g$  et  $D_f$ .2. Etudie la continuité de  $g$  en 0 ; en -1 ; en -2 et en 1.3. Etudie la continuité de  $f$  en 0.**Séquence n°6 : Dérivation-Etude de fonction****6.1 Dérivation****6.1.1 Dérivabilité d'une fonction en un point**

### Activité 2.12

Pour apprécier les chances de réussite de Melon, Pierre se préoccupe d'étudier la variation du nombre  $N_1$  des carrés qu'il doit atteindre au tir par rapport à la variation de sa distance  $x$  du dispositif. À cet effet, il définit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 4$  et il pose  $T_2(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  avec 2 dam la distance maximale de chaque agent tireur de son dispositif.

#### Consigne 2.6.1 : Taux de variation d'une fonction et dérivabilité en un point.

- Détermine le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- Détermine le domaine de définition  $D$  de la fonction  $T_2$ .
- Détermine l'expression de  $T_2$  pour tout  $x \in D$ .
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} T_2(x)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

#### Consigne 2.6.2 : Consolidation

On considère la fonction  $f$  définie par  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{-2x+8}{x-2}$

- Etudie la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ .
- Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Propriété 2.6.1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $K$  et  $a$  un élément de  $K$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  et à droite en  $a$  et les nombres dérivés à gauche et à droite en  $a$  sont égaux.

Autrement dit :

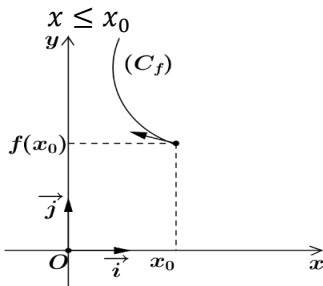
$$(f \text{ est dérivable en } a) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a)$$

#### Interprétation géométrique

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $K$ ;  $x_0$  un élément de  $K$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

- Si  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ , alors sa courbe admet au point  $M(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente  $(T_g)$  de coefficient directeur  $f'_g(x_0)$  définie par :

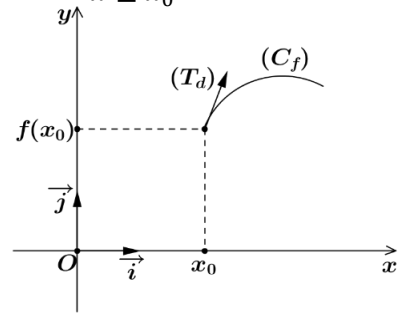
$$(T_g): \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



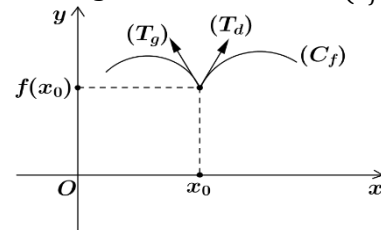
- Si  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , alors sa courbe admet au point  $M(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente

$(T_d)$  de coefficient directeur  $f'_d(x_0)$  définie par :

$$(T_d): \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



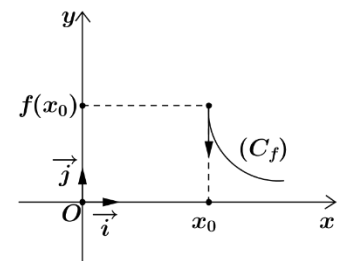
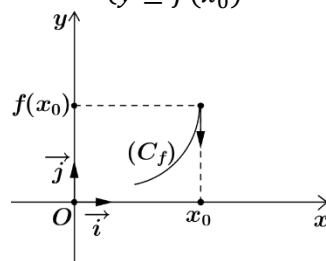
- Si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et  $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$  alors le point  $M(x_0; f(x_0))$  est appelé point anguleux de la courbe  $(C_f)$



- Lorsque la limite à gauche ou à droite en  $x_0$  de la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est infinie, la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $x_0$ . Dans ce cas, la courbe  $(C_f)$  admet au point  $M(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente verticale.

✓ Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ ,

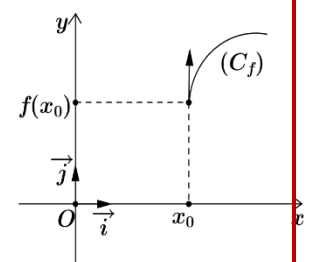
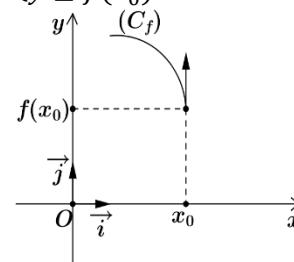
alors la courbe  $(C_f)$  admet au point  $M(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente verticale définie par :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$$


✓ Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ,

alors la courbe  $(C_f)$  admet au point  $M(x_0; f(x_0))$  une demi-tangente verticale définie par :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$$



#### Consigne 2.6.3 : Application

Soit  $g$  la fonction numérique de variable réelle définie

$$\text{par } \begin{cases} g(x) = x + \sqrt{2x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x \sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Etudie la dérivabilité de  $g$  en 0.
2. Donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### Consigne 2.6.4 : Application

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x|$

Etudie la dérivabilité de  $f$  en 0.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

### 6.1.2 Fonction dérivée

#### Définition 2.6.5 : Fonction dérivée

#### Propriété 2.6.3 : Dérivée des fonctions élémentaires

#### Propriété 2.6.4

#### Propriété 2.6.5

#### Propriété 2.6.6 : Dérivées des fonctions usuelles

### Consigne 2.6.5 : Consolidation

Dérive chacune des fonctions ci-dessous sur leurs domaines de dérivabilité  $I$

1.  $f(x) = 4x^6 - 2x^4 + x + 2$ ;  $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \frac{4x-3}{-5x+2}$ ;  $I = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$
3.  $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+2}$ ;  $I = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 7}$ ;  $I = \mathbb{R}$
5.  $f(x) = (-3x^2 + 4)\sqrt{3x^2 - 2x + 7}$ ;  $I = \mathbb{R}$
6.  $f(x) = (7x^5 - 2x^3 - 3x + 1)^3$ ;  $I = \mathbb{R}$
7.  $f(x) = \cos(-3x + 1)$ ;  $I = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

### Consigne 2.6.6 : Dérivée seconde d'une fonction

On considère la fonction  $f(x) = 6x^7 + 3x^2 + x - 1$

Détermine la dérivée seconde de  $f$

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

### 6.2 Etude de fonction

#### Retenons

#### Propriété 2.6.7

#### Remarque

#### Propriété 2.6.8 : Extrémum relatif d'une fonction

#### Retenons

### Tableau de variation

#### Consigne 2.6.7 : Consolidation

Etudie les variations de chacune des fonctions ci-dessous. On précisera dans chaque cas si possible les extrémums de ces fonctions.

1.  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1.$

2.  $g(x) = \frac{3x+2}{2x-1}.$

3.  $h(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}.$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

1. Soit la fonction  $f(x) = x|x - 1|$

$f$  est-elle dérivable en 1 ?

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $] -\infty; 1]$  par

$$g(x) = x\sqrt{1-x}$$

Etudie la dérivabilité de  $g$  en 1 puis donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

#### Exercice 2

Soit la fonction  $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

1. Etudie la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en 0.

2. Etudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.

#### Exercice 3

Soit la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x \leq -3 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 10x + 21} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

Etudie la dérivabilité de  $f$  en  $-3$  puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

#### Exercice 4

1. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sa fonction dérivée :

(a)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^7 + 2x + 2$

(b)  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$

(c)  $f(x) = \sqrt{-2x^3 + x + 1}$

(d)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{-x+1}}$

(e)  $f(x) = (-2x + 2)^2(-5x + 4)^6$

(f)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

2. Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Ecrire une équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $a$ .

(a)  $f(x) = x^6 - x^5 + 1$   $a = 1$

(b)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$   $a = 0$

#### Exercice 5

Soit la fonction  $h(x) = x^3 - 3x$

Détermine les extrémums de  $h$

### Exercice 6

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ .

- Détermine les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
- Montre que  $g$  est dérivable et calcule  $g'(x)$ .
- Dresse le tableau des variations de  $g$ .

### Exercice 7

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

- Calcule  $f'(x)$ .
- Détermine les réels  $a, b$  et  $c$  sachant que  $f$  admet en 1 pour extrémum 0 et en  $-3$  pour extrémum 2.

## Séquence n°7 : Primitives

### Activité 2.13

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3$ . On désire trouver les fonctions  $F$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ .

### 7.1 Notion de primitive

#### Consigne 2.7.1 : Découverte-Définition

- On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^4 + x^3 + 3x + 2$ .
  - Détermine  $g'(x)$ .
  - Que constates-tu ?
- Trouve une fonction  $h$  différente de la fonction  $g$  et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $h'(x) = f(x)$ .
- Déduis-en alors la forme générale des fonctions  $F$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

#### Consigne 2.7.2 Consolidation

Détermine une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $K$  dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = x^2$   $K = \mathbb{R}$
- $f(x) = -x^5$   $K = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### Consigne 2.7.3 : Application

Détermine la primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $K$  qui vérifie la condition indiquée :

- $f(x) = 2x^3$   $K = \mathbb{R}$   $F(1) = 2$
- $f(x) = -x^2$   $K = \mathbb{R}$   $F(-1) = 0$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

#### Consigne 2.7.4 : Application

Détermine une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $K$  indiqué.

$$f(x) = 3x^2 + 5 \quad ; \quad K = \mathbb{R}$$

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

## 7.2 Primitive des fonctions élémentaires

### Propriété 2.7.5

#### Consigne 2.7.5 : Consolidation

Détermine une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $K$  indiqué :

- $f(x) = 4x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6$   $K = \mathbb{R}$
- $f(x) = (-3x + 2)(x^2 - 1)$   $K = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{5}{2}x - 6\sqrt{x}$   $K = ]0; +\infty[$
- $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{x^5}$   $K = ]0; +\infty[$
- $f(x) = -7\sin x + 5\cos x + 3$   $K = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

## Séquence n°8 : Suites numériques

### 8.1 Généralités sur les suites numériques

#### Définition 2.8.1 : Suite numérique

#### Remarque

#### 8.1.1 Suite définie par une formule explicite

#### Définition 2.8.2

#### Consigne 2.8.1

On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\frac{3n-2}{n+1}$

- Détermine les quatre premiers de la suite  $(V_n)$ .
- Détermine le 15<sup>ème</sup> terme de la suite  $(V_n)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### 8.1.2 Suite définie par une formule de récurrence

#### Définition 2.8.3

#### Consigne 2.8.2 : Consolidation

Soit  $(U_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 1 \end{cases}$$

- Précise le domaine de définition de la suite  $(U_n)$ .
- Détermine les trois premiers termes de la suite  $(U_n)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### 8.2 Représentation graphique des termes d'une suite

#### 8.2.1 Suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

#### Méthode de représentation graphique

#### Consigne 2.8.3 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 2n + 1$

- Détermine une fonction  $f$  telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .
- Dans un repère, trace la courbe représentative ( $C_f$ ) de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et place  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sur le graphique.

Stratégie : TI : 7min

TC : 15min

### 8.2.2 Suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ Méthode représentation graphique

#### Consigne 2.8.4 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Soit
 $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

- Détermine une fonction  $f$  telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- Détermine les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- Dans un repère, trace la droite  $(\Delta)$  et la courbe représentative ( $C_f$ ) de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  puis place  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  sur le graphique.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 8.3 Suites majorées – suites minorées – suites bornées

#### Consigne 2.8.5 : Découverte

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_n = \frac{3n+2}{2n+4}$ .

- (a) Justifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n$ .  
(b) Que peux-tu conclure ?
- (a) Justifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{3}{2}$ .  
(b) Que peux-tu conclure ?
- Quel conclusion peux-tu tirer à partir des réponses des questions 1.(b) et 2.(b) ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Consigne 2.8.6 : Consolidation

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$ La suite  $(U_n)$  est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### 8.4 Sens de variation d'une suite numérique

#### Consigne 2.8.7 : Découverte

On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $V_n = -3n + 4$ .Montre que  $V_{n+1} - V_n < 0$ 

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### Consigne 2.8.8 : Consolidation

On considère les suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies respectivement par  $U_n = n^2 + 2n - 5$  et  $V_n = \frac{2n+1}{n+1}$ Etudie le sens de variation des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$ 

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 8.5 Suites arithmétiques – Suites géométriques

#### 8.5.1 Suites arithmétiques

##### Définition 2.8.4 : Suite arithmétique

#### Consigne 2.8.9 : Application

Justifie que la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -7n + \frac{2}{5}$  est arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

#### Consigne 2.8.10 : Consolidation

 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique tel que  $u_8 = -5$  et  $u_{15} = 37$ .Détermine la raison  $r$  et le 1<sup>er</sup> terme de cette suite puis détermine l'expression du terme générale de la suite  $(u_n)$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

#### Consigne 2.8.11 : Consolidation

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{-1}{U_n+2} \end{cases}$$
On suppose que  $U_n \neq -1$  et on pose  $V_n = \frac{1}{U_n+1}$ 

- Démontre que  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
- Exprime  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
- Calcule la somme  $S_1 = V_5 + V_6 + V_7 + \dots + V_{17}$ .

(c) Calcule en fonction de  $n$ , la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Stratégie : TI : 10min TC : 15min

#### 8.5.2 Suites géométriques

##### Définition 2.8.5 : Suite géométrique

#### Remarque

#### Remarque : Sens de variation d'une suite arithmétique

#### Consigne 2.8.12 : Application

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ .Démontre que la suite  $(u_n)$  est géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### Consigne 2.8.13 : Consolidation

 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique tel que  $u_3 = -8$  et  $u_6 = 27$ .Détermine la raison  $r$  et le 1<sup>er</sup> terme de cette suite puis détermine l'expression du terme générale de la suite  $(u_n)$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Consigne 2.8.14

Soit  $(V_n)$  la suite numérique définie par  $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \frac{3V_n+2}{V_n+2} \end{cases}$

On pose  $t_n = \frac{V_{n+1}}{V_n-2}$

- Démontre que  $(t_n)$  est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
- Exprime  $t_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$
- Calcule la somme  $S_1 = t_3 + t_4 + t_5 + \dots + t_{19}$ .
- Calcule en fonction de  $n$ , la somme

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 125min

## 8.6 Convergence d'une suite numérique

### Activité 2.14

Melon désire étudier le comportement des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , définies par  $u_n = 4n^2 + 2n - 1$  et  $v_n = \frac{5n+2}{n-4}$ , lorsque  $n$  prend de grandes valeurs positives.

### Consigne 2.8.15 : Convergence d'une suite

Calcule :

(a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

### Consigne 2.8.16 : Consolidation

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_n = \frac{1}{2n+1}$

Démontre que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

### Consigne 2.8.17 : Consolidation

Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{4n^2-3}{3n+1}$

- (a) Détermine une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  telle que pour tout  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .
- (b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Déduis-en la convergence de la suite  $(u_n)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

## 8.7 Etude d'une suite

### Propriété 2.8.9 : Etude d'une suite

### Consigne 2.8.18 : Consolidation

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable

réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$  par  $f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$

- (a) Étudie le sens de variation de  $f$  sur  $I$ .
- (b) Démontre que  $\forall x \in I; f(x) \in I$ .

2.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$$

(a) Démontre que  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in I$ .

(b) Étudie le sens de variation de  $(u_n)$ .

(c) Déduis-en que la suite  $(u_n)$  est convergente et calcule sa limite.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

## Evaluations formatives

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-9u_n+4}{3} \end{cases}$  ;

$n \geq 1$ . On pose  $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

- Calcule  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$ .
- Démontre que la suite  $(v_n)$  est géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
- Calcule  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (a) Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$   
(b) Déduis-en la convergence de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 2

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$u_n = 3n - 5 \text{ et } v_n = -7n + 2.$$

- Etudie le sens de variation de chacune des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
- Montre que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites arithmétiques dont on précisera leurs raisons et leurs premiers termes.
- Calcule en fonction de  $n$ ,  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  et  $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

### Exercice 3

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 0$  et

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + 3. \text{ On pose } u_n = v_n - 4.$$

- Calcule les quatre premiers termes de la suite  $(v_n)$ .
- Montre que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont tu préciseras la raison  $q$  et le premier terme.
- Etudie la convergence des  $(u_n)$  puis de  $(v_n)$ .
- Calcule  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .
- Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

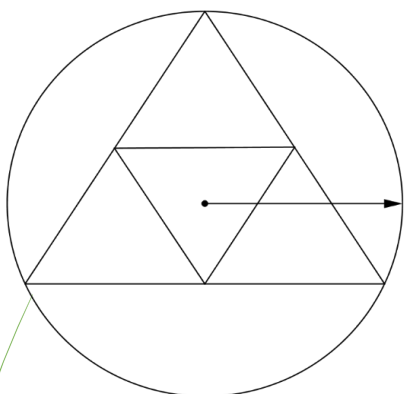
## SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

### Situation de départ

#### Texte : La sirène du lycée

C'est la rentrée. Les murs de façade du lycée ont été repeints. Des objets d'embellissement qui suscitent la curiosité des élèves ont été placés à divers endroits de l'établissement. L'un de ces objets a retenu l'attention de Zoé, élève en classe de 1<sup>re</sup>. Cet objet est un disque sur lequel est fixée une plaque transparente ayant la forme d'un triangle équilatéral, inscrit dans sa bordure. Au centre du disque est fixée une aiguille de longueur égale au rayon du disque.

Cette aiguille est accolée à une autre plaque triangulaire de même nature dont les sommets coïncident avec les milieux des côtés de la première plaque. Un bouton électrique fait tourner l'aiguille dans le plan du disque. Celle-ci entraîne dans sa course la petite plaque triangulaire et déclenche aussitôt la sirène du lycée. Voici une représentation de la position de repos de l'aiguille :



L'aiguille actionnée par le bouton, tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en émettant une jolie brillance circulaire qui évolue régulièrement à partir du centre du disque vers son bord ; c'est-à-dire que la surface de la brillance évolue à vitesse constante en fonction du temps. Quand on cesse d'appuyer sur le bouton, l'aiguille revient au repos en sens opposé et la jolie brillance s'estompe.

Émerveillé par ce dispositif, Zoé se propose de rechercher la variation du rayon de la brillance et le rapport qui lie les triangles du dispositif de la sirène.

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

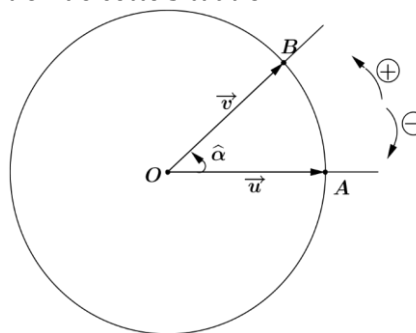
- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

## Séquence n°1 : Angles orientés et leurs propriétés

### Activité 3.1

L'aiguille actionnée par le bouton fait un écart angulaire  $\alpha$  avec sa position initiale puis revient en sens inverse quand on cesse d'appuyer sur le bouton.

Zoé caractérise respectivement la position initiale et la position finale de cette aiguille par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  puis désire étudier les propriétés géométriques liées à cette situation après l'avoir représenté. Voici une représentation de cette situation :



### 1.1 Angle orienté – Mesure principale

#### Consigne 3.1.1

1. Donne deux écritures de l'angle orienté  $\hat{\alpha}$ .
2. Donne le sommet, le côté origine et le côté extrémité de l'angle orienté  $\hat{\alpha}$ .

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

### 1.2 Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

#### Méthode de détermination de la mesure principale d'un angle orienté

#### Consigne 3.1.2 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est  $x$  :

1.  $x = \frac{119\pi}{4}$
2.  $x = \frac{37\pi}{3}$
3.  $x = -\frac{2017\pi}{5}$
4.  $x = 47\pi$
5.  $x = 108\pi$
6.  $x = \frac{25\pi}{4}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 1.3 Somme, différence de deux angles orientés

#### Définition 3.1.6

#### Remarque

#### Propriété 3.1.2 : Relation de Chasles

#### Consigne 3.1.3 : Propriété

Soit  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$  et  $\vec{v}'$  quatre vecteurs et  $k$  un nombre réel. Démontre que :

1.  $(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u})$ .
2.  $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}'; \vec{v}') \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{u}') = (\vec{v}; \vec{v}')$
3. Si  $k > 0$  alors  $(k\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$ .

4. Si  $k < 0$  alors  $(\widehat{k\vec{u}; \vec{v}}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### Consigne 3.1.4 : Consolidation 1

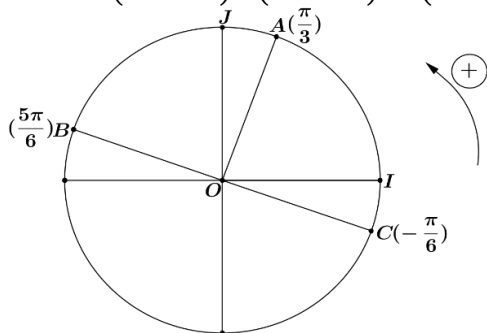
On considère un carré ABCD de sens indirect et O est le centre de ABCD. Détermine la mesure des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$ ;  $(\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{DC})$ ;  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CA})$ ;  $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$ ;  
 $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC})$ ;  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})$  et  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB})$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### Consigne 3.1.5 : Consolidation 2

Le plan orienté est muni du repère (O, I, J). Sur le cercle ci-dessous, A, B et C sont les points tels que :  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{5\pi}{6}$  et  $-\frac{\pi}{6}$  soient les mesures principales respectives des angles orientés :  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA})$ ;  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$  et  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC})$



- Détermine la mesure principale de chacun des angles  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ ;  $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$  et  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$ .
- Vérifie que  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

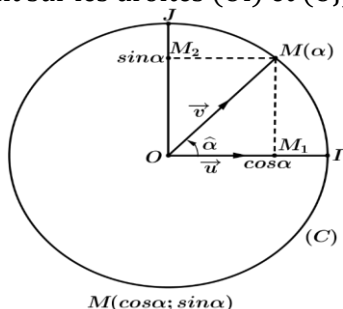
## Séquence n°2 : Trigonométrie

### 2.1 Ligne trigonométrique d'un angle orienté

#### 2.1.1 Sinus et cosinus d'un angle orienté

##### Définition 3.2.1 : Sinus et cosinus d'un angle orienté

Soit un angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$  dont une mesure est  $\alpha$  et soit M le point-image de  $\alpha$  sur le cercle trigonométrique (C). (C) est le cercle de centre O et de rayon  $r = 1$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J). Soit  $M_1$  et  $M_2$  les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (OI) et (OJ).



- On appelle cosinus de  $(\vec{u}; \vec{v})$  ou de  $\alpha$ , l'abscisse de M et on note :  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos\alpha = \overline{OM_1}$ .
- On appelle sinus de  $(\vec{u}; \vec{v})$  ou de  $\alpha$ , l'ordonnée de M et on note :  $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \sin\alpha = \overline{OM_2}$ .

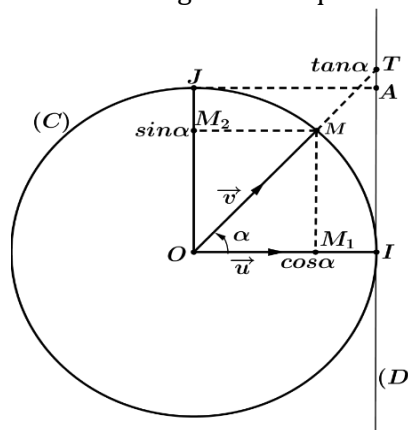
### 2.1.2 Tangente et cotangente d'un angle orienté

#### Définition 3.2.2 : Tangente et cotangente d'un angle orienté

##### Remarque

#### Consigne 3.2.1

On considère le cercle trigonométrique suivant :



Démontre que :

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

#### Consigne 3.2.2

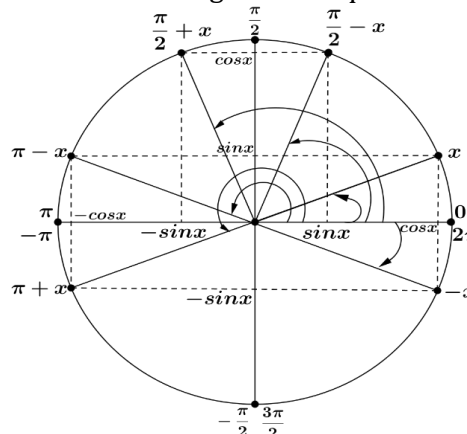
- On donne  $\sin x = \frac{5}{13}$  avec  $x \in ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$   
Détermine  $\cos x$  et  $\tan x$
- On donne  $\tan x = -\sqrt{3}$  avec  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$   
Calcule  $\cos x$  et  $\sin x$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 2.1.3 Lignes trigonométriques d'angles associés

#### Consigne 3.2.3 : Propriété

On considère le cercle trigonométrique suivant :



- Démontre graphiquement que pour tout nombre réel  $x$ , on a :  
 (a)  $\cos(-x) = \cos x$       (b)  $\sin(-x) = -\sin x$

$$\begin{array}{ll} \text{(c) } \cos(\pi + x) = -\cos x & \text{(d) } \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \text{(e) } \cos(\pi - x) = -\cos x & \text{(f) } \sin(\pi - x) = \sin x \\ \text{(g) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x & \text{(h) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \\ \text{(i) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \text{(j) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{array}$$

2. Démontre que pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ; on a :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \tan(-x) = -\tan x & \text{(b) } \tan(\pi + x) = \tan x \\ \text{(c) } \tan(\pi - x) = -\tan x & \text{(d) } \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x} \\ \text{(e) } \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \end{array}$$

Stratégie : TI : 15min

TC : 25min

### Propriété 3.2.2

#### Consigne 3.2.5 : Consolidation

1. Calcule :  $\sin\left(\frac{119\pi}{4}\right)$ ;  $\cos\left(-\frac{2017\pi}{4}\right)$  et  $\tan\left(\frac{37\pi}{3}\right)$ .

2. On donne  $\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$  avec  $x \in ]0; \pi[$

Calcule  $\cos x$ ;  $\sin x$  et  $\tan x$

3. Exprime l'expression A suivante en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

$$A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi + x) + \sin(10\pi + x) + \cos(7\pi + x) - \cos\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)$$

4. On donne  $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Détermine  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ . (Tu remarqueras que  $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ )

Stratégie : TI : 15min

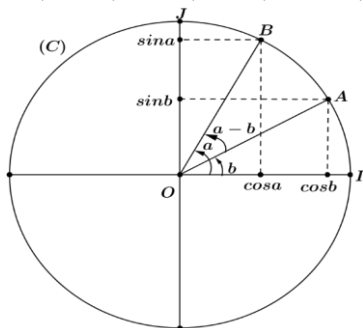
TC : 25min

## 2.2 Formules trigonométriques

### 2.2.1 Formules d'addition

#### Activité 3.2

On muni le plan d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ . A et B sont deux points du cercle trigonométrique  $(C)$ ;  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels tels que  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = \hat{a}$  et  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = \hat{b}$ . On désire trouver  $\cos(a + b)$ ;  $\cos(a - b)$ ;  $\sin(a + b)$  et  $\sin(a - b)$



On a :  $\overrightarrow{OA}(\cos b; \sin b)$  et  $\overrightarrow{OB}(\cos a; \sin a)$

#### Consigne 3.2.6 : Propriété

- (a) Calcule de deux manières différentes  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ .  
(b) Déduis-en l'expression de  $\cos(a - b)$ .
- Trouve l'expression de  $\cos(a + b)$ . (Tu remarqueras que  $a + b = a - (-b)$ ).

3. (a) Rappel l'expression de  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

(c) En posant  $x = a - b$ , trouve l'expression de  $\sin(a - b)$ .

4. Trouve l'expression de  $\sin(a + b)$ . (Tu remarqueras que  $a + b = a - (-b)$ ).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Consigne 3.2.7 : Consolidation

1. Exprime  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$  en fonction de  $\cos x$  et de  $\sin x$ .

2. (a) Calcule les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$   
(Tu pourras exprimer  $\frac{\pi}{12}$  en fonction de  $\frac{\pi}{3}$  et de  $\frac{\pi}{4}$ )

(b) Calcule  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

3. Démontre que pour tout réel  $x$ , on a :

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 2.2.2 Formules de duplication et de linéarisation

#### Consigne 3.2.8 : Propriété

Démontre que pour tout réel  $a$  :

1.  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ . (Tu remarqueras que  $\cos(2a) = \cos(a + a)$ )

2.  $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ .

3.  $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ .

4.  $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

#### Consigne 3.2.9 : Consolidation

Détermine la valeur exacte de  $\cos\frac{\pi}{8}$  et  $\sin\frac{\pi}{8}$ . (Tu pourras remarquer que  $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ )

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### 2.2.3 Transformation d'un produit en une somme et d'une somme en un produit

#### Consigne 3.2.10 : Propriété

1. (a) En utilisant la formule d'addition, calcule  $\cos(a - b) + \cos(a + b)$ .

(b) Déduis-en une expression de  $\cos a \cdot \cos b$ .

2. (a) En utilisant la formule d'addition, calcule  $\cos(a - b) - \cos(a + b)$ .

(b) Déduis-en une expression de  $\sin a \cdot \sin b$

3. (a) En utilisant la formule d'addition, calcule  $\sin(a - b) + \sin(a + b)$ .

(b) Déduis-en une expression de  $\sin a \cdot \cos b$ .

4. En posant  $p = a + b$  et  $q = a - b$  dans les formules précédemment établies, justifie que :

(a)  $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(b)  $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(c)  $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(d)  $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

#### Consigne 3.2.11 : Consolidation 1

1. Transforme en une somme les expressions suivantes :  $A = \cos 3x \cdot \sin x$  ;  $B = \sin 2x \cdot \sin 3x$  et  $C = \cos 5x \cdot \cos 4x$ .
2. Transforme en un produit l'expression  $D = \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x$ .
3. Démontre que  $\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 20min

### Consigne 3.2.12 : Consolidation 2

- (a) Démontre que  $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) \right] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
- (b) Démontre que  $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## 2.3 Equation et inéquation trigonométrique dans $\mathbb{R}$

### Propriété 3.2.8

#### 2.3.1 Résolution d'équations du type $\sin x = a$ et $\cos x = b$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Retenons

- ❖ Equation du type  $\sin x = a$  ;  $a \in \mathbb{R}$
- ❖ Equation du type  $\cos x = b$

### Consigne 3.2.13 : Consolidation

Résous dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0; \pi]$ , les équations suivantes :

- (a)  $2\cos x = 1$
- (b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (c)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (d)  $2\sin^2 x = 1$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

#### 2.3.2 Résolution d'équations du type $\tan x = c$ ; $c \in \mathbb{R}$

Retenons

### Consigne 3.2.14 : Consolidation

Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\tan x = -1$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### 2.3.3 Résolution d'équations du type $a\cos x + b\sin x = c$ ; $a, b$ et $c$ sont tous non nuls

### Consigne 3.2.15

On considère l'équation (E) :  $a\cos x + b\sin x = c$  avec  $a ; b$  et  $c$  des réels. On désire résoudre l'équation (E). Pour cela, on se trouve dans l'un des cas suivants :

1. (a) Si  $a \neq 0$  et  $b = 0$ , alors donne la nouvelle forme de l'équation (E).  
(b) Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , alors donne la nouvelle forme de l'équation (E).
2. Si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , alors :  
(a) Justifie que :  
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

- (b) Prouve qu'il existe un nombre réel  $\beta$  tel que  $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  puis déduis-en la nouvelle expression de  $a\cos x + b\sin x$ .
- (c) Rappel la formule de  $\cos(x_1 + x_2)$  puis déduis-en que  $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \beta)$
- (d) Justifie que l'équation (E) est équivalente à l'équation :  $\cos(x - \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

### Consigne 3.2.16 : Consolidation

Résous dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes :

$$(E_1) : \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } (E_2) : \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

## 2.3.4 Inéquation trigonométrique

### Retenons

### Consigne 3.2.17 : Consolidation

- (a) Résous dans  $[0; 2\pi]$ , l'inéquation  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (b) Résous dans  $[-\pi; \pi]$ , l'inéquation  $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- (c) Résous dans  $[-\pi; \pi]$ , l'inéquation  $\cos^2 x < \frac{1}{4}$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## 2.4 Fonctions circulaires

**Définition 3.2.3 : Fonctions sinus, cosinus, tangente, cotangente**

**Définition 3.2.4 : Fonction paire – Fonction impaire**

Remarque

### Consigne 3.2.18 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. (a) Démontre que la fonction  $h$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -2x^4 + 3x^2 + 5$  est paire.  
(b) Que peux-tu dire de la droite (OJ) par rapport à la représentation graphique de  $h$ .
2. (a) Démontre que la fonction  $h$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$  est impaire.  
(b) Que peux-tu dire du point  $O$  par rapport à la représentation graphique de  $g$ .
3. Étudie la parité de la fonction  $f$  définies de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , dans chacun des cas suivants :  
(a)  $f(x) = x^2 - 1$       (b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$   
(c)  $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## Evaluations formatives

### Exercice 1

1. Résous dans  $[-\pi; \pi]$ , les équations :  
(a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c)  $\cos x = 0$

(d)  $\sin x = -1$

2. Résous dans  $[0; 2\pi]$ , les équations :

(a)  $\cos x = -\frac{1}{2}$

(b)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Exercice 2**

- Résous dans  $[0; 2\pi]$ , l'inéquation  $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- Résous dans  $[0; 2\pi]$ , l'inéquation  $\tan x \geq \sqrt{3}$ .
- Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ .
- Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $\sqrt{3}\cos x + \sin x \geq 1$ .
- Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} \leq 0$

**Séquence n°3 : Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés****3.1 Barycentre de deux points pondérés****3.1.1 Définition****Définition 3.3.1****Remarque****Définition 3.3.2 : Isobarycentre de deux points pondérés****3.1.2 Propriétés****Propriété 3.3.1 : Homogénéité du barycentre****Remarque****Consigne 3.3.1 : Consolidation**

Dans chacun des cas suivants, justifie que le point  $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$  avec  $a$  et  $b$  deux réels que tu préciseras :

(a)  $\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{BH} = \vec{0}$

(b)  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

(c)  $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{AH}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

**Consigne 3.3.2 : Réduction de la somme  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$** 

Soit  $(A, a)$  et  $(B, b)$  deux points pondérés et  $M$  un point du plan.

1. Si  $a + b \neq 0$ , démontre que  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$  où  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$

2. Si  $a + b = 0$ , démontre que le vecteur  $\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$  est indépendant du point  $M$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

**Propriété 3.3.2 : Réduction de la somme  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$** **Consigne 3.3.3 : Consolidation**

$A, B, G$  et  $M$  sont quatre points du plan tels que  $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 4)\}$ .

Trouve une expression réduite des vecteurs :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}; \vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$$

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

**Consigne 3.3.4 : Propriété**

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan et  $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ .

Démontre que  $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

**Consigne 3.3.5 : Consolidation**

Le plan est muni du repère  $(O, I, J)$ . On donne les points  $E(3;4)$  et  $F(2;6)$ . On désigne par  $G$  le barycentre des points pondérés  $(E;1)$  et  $(F;3)$ .

(a) Place les points  $E$  et  $F$  dans le repère  $(O, I, J)$ .(b) Sans déterminer ses coordonnées, construis  $G$ .(c) Détermine les coordonnées de  $G$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

**3.2 Barycentre de trois ou quatre points pondérés****3.2.1 Définition****Définition 3.3.3****Remarque****Définition 3.3.4 : Isobarycentre de deux points pondérés****3.2.2 Propriétés****Propriété 3.3.5 : Homogénéité du barycentre****Remarque****Propriété 3.3.6 : Réduction de la somme**

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$$

**Propriété 3.3.7****Propriété 3.3.8 : Coordonnées du barycentre****Consigne 3.3.6 : Consolidation**

Dans un repère du plan, on donne les points :  $A(3; -2)$ ,  $B(4; 2)$  et  $C(5; 1)$ .

Calcule les coordonnées :

1. du barycentre  $G$  de  $(A; 1)$  et  $(B; -2)$ .

2. du barycentre  $G'$  de  $(A; 1)$ ,  $(B; -2)$  et  $(C; 3)$ .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

**Consigne 3.3.7 : Consolidation 1**

$ABC$  est un triangle et  $I, J$  et  $K$  les points tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} \text{ et } \overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$



1. Exprime I comme barycentre de B et C, J comme barycentre de A et C ; K comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser.
2. Démontre que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### Consigne 3.3.8 : Consolidation 2

H est le barycentre de (A,3) et (B,-2).

1. Construis le point H.
2. E et F sont les points tels que  $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{BH}$ . Démontre que les points H, E et F sont alignés.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### Consigne 3.3.9 : Consolidation 3

Soit A, B et C trois points non alignés et G le barycentre de (A,-3), (B,1) et (C,1).

1. Construis G.
2. Démontre que A est le centre de gravité du triangle GBC.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

## Evaluations formatives

### Exercice 1

A, B et C sont trois points d'une droite tels que : AB=4cm, BC=2cm et AC=6cm.

1. Déterminer des réels  $a$  et  $b$  tels que C soit le barycentre de (A,  $a$ ) et (B,  $b$ ).
2. Déterminer des réels  $b'$  et  $c'$  tels que A soit le barycentre de (B,  $b'$ ) et (C,  $c'$ ).
3. Déterminer des réels  $a''$  et  $c''$  tels que B soit le barycentre de (A,  $a''$ ) et (C,  $c''$ ).

### Exercice 2

ABC est un triangle du plan,  $B'$  et  $C'$  sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. D est le barycentre des points pondérés (A; 3) et (B; 2), et G le barycentre des points pondérés (A; 3), (B; 2) et (C; 1).

1. Construis les points D et G.
2. Démontre que le point G est l'intersection des droites ( $B'C'$ ) et (CD).
3. La droite (AG) coupe la droite (BC) en E. Précise la position de E sur (BC).
4. M est un point quelconque du plan tel que  $3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .
  - (a) Place le point M.
  - (b) Détermine deux réels  $a$  et  $b$  pour que M soit barycentre des points pondérés (A;  $a$ ) et (B;  $b$ ).

### Exercice 3

ABC est un triangle.  $A'$  est le milieu du segment [BC], E est le point du segment [ $A'C$ ] tel que  $\overrightarrow{A'E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}$ , F est le symétrique de A par rapport à B.

1. Exprimer E comme barycentre de B et C affectés de coefficients à préciser.
2. Exprimer F comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser.

### Exercice 4

Dans un repère du plan, on donne les points A(3 ; 2) et B(-1 ; 4). G est le barycentre de (A,3) et (B,-2), et  $G'$  est le barycentre de (A,-2) et (B,3).

1. Calculer les coordonnées de G et  $G'$ .
2. Vérifier que [AB] et [ $GG'$ ] ont le même milieu.

## Séquence n°4 : Cercle dans le plan

### Propriété 3.4.1

#### Remarque

### Définition 3.4.1 : Représentation paramétrique d'un cercle

#### Consigne 3.4.1 : Consolidation 1

On considère deux cercles (C) et (C') d'équations respectives :  $x^2 + y^2 - 5 = 0$  et  $2x^2 + 2y^2 - x + 3y = 0$ .

1. Détermine une représentation paramétrique de (C).
2. Détermine une représentation paramétrique de (C').

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

#### Consigne 3.4.2 : Consolidation 2

On considère le cercle (C) de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 5 + 7\cos\theta \\ y = 3 + 7\sin\theta \end{cases}$$

Détermine une équation cartésienne de (C).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

#### Consigne 3.4.3 : Consolidation

(C) est l'ensemble des points M(x; y) tels que  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$  et K(4; 2) un point du plan.

1. Justifie que (C) est un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.
2. Détermine une représentation paramétrique de (C).
3. Justifie que le point K appartient à (C).
4. Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point K.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## Evaluations formatives

### Exercice 1

1. Donner une équation du cercle (C) de centre A(2 ; -4) et de rayon 3.
2. ( $\Gamma$ ) est l'ensemble des points M(x, y) tels que :  $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 23 = 0$   
Quelle est la nature de ( $\Gamma$ ) ? Donner ses éléments caractéristiques.

### Exercice 2

Les équations suivantes sont-elles des équations d'un cercle ? si oui, préciser le centre et le rayon puis donne une représentation paramétrique de ce cercle.

(a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

(b)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

(c)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

(d)  $x^2 + y^2 + x = 0$

**Séquence n°5 : Isométrie****5.1 Quelques rappels sur les notions de translation, symétrie orthogonale, rotation et homothétie****5.1.1 Translation (Rappel)****Définition 3.5.1****Propriété 3.5.1****5.1.2 Homothétie (Rappel)****Définition 3.5.2****Propriété fondamentale****5.1.3 Symétrie orthogonale (Rappel)****Définition 3.5.3****5.1.4 Rotation (Rappel)****Définition 3.5.4****Propriété 3.5.2****5.2 Isométries****5.2.1 Définition et propriétés fondamentales****Définition 3.5.5****Remarque****Consigne 3.5.1 : Conservation du produit scalaire**

Soit  $f$  une isométrie,  $A, B, C$  trois points distincts d'images respectives  $A', B', C'$  par  $f$ .

- Exprimer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  en fonction de  $AB^2, AC^2$  et  $BC^2$ .  
(On pourra utiliser l'expression du produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ )
- Exprimer  $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$  en fonction de  $A'B'^2, A'C'^2$  et  $B'C'^2$ .
- En déduire que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ .

**Stratégie :** TI : 7min TG : 7min TC : 15min

**Propriété 3.5.3 : Conservation du produit scalaire**

Soit  $f$  une isométrie.

Pour tous points  $A, B, C, D$  d'images respectives  $A', B', C', D'$  par  $f$ , on a :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ .

*On dit que les isométries conservent le produit scalaire*

**Consigne 3.5.2 : Conservation du barycentre**

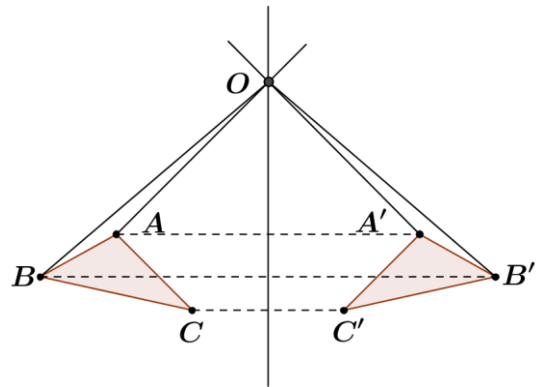
Soit  $f$  une isométrie.  $ABC$  est un triangle. On désigne par  $I$  le milieu de  $[BC]$  et par  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Soit  $A', B', C', I'$  et  $G'$  les images respectives des points  $A, B, C, I$  et  $G$  par  $f$ .

- Démontrer que  $I'$  est le milieu de  $[B'C']$ .
- Démontrer que  $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$
- En déduire que  $G'$  est le centre de gravité du triangle  $A'B'C'$ .

**Stratégie :** TI : 7min TG : 7min TC : 15min

**5.2.2 Isométries et configurations****5.2.2.1 Images de figures usuelles****Propriété 3.5.5****Remarque****Propriété 3.5.6****5.2.2.2 Conservation des mesures d'angles****Propriété 3.5.7 : Conservation des mesures d'angles****Remarque****5.2.2.3 Conservation des aires****Propriété 3.5.8****Remarque****5.2.3 Propriétés****Propriété 3.5.9****5.2.4 Détermination d'une isométrie****Consigne 3.5.3**

On donne les points  $A, B, C, A', B', C'$  tels que :  $AB = A'B', BC = B'C'$  et  $CA = C'A'$ .



Sur cette figure,  $OAA'$  et  $OBB'$  sont des triangles isocèles en  $O$

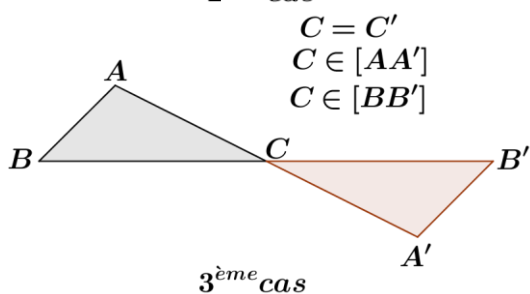
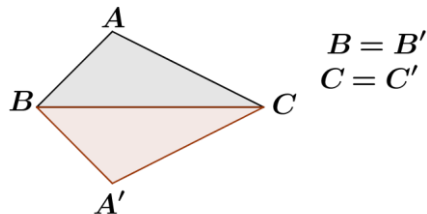
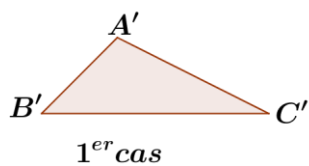
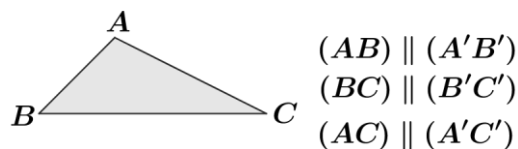
- Trouver trois isométries qui appliquent  $A$  sur  $A'$ .
- Trouver deux isométries qui appliquent  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$ .
- Parmi ces deux isométries, en trouver une qui, de plus, applique  $C$  sur  $C'$ .

**Stratégie :** TI : 7min TG : 7min TC : 15min

**Consigne 5.4 : Consolidation**

Les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont tels que :  $AB = A'B', BC = B'C'$  et  $CA = C'A'$ . Ils déterminent l'isométrie  $i$  qui applique  $A$  sur  $A', B$  sur  $B'$  et  $C$  sur  $C'$ .

Dans chacun des cas suivants, nommer cette isométrie.



Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 5.2.5 Construction de l'image d'un point par une isométrie

#### Consigne 3.5.5

ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que :  $AB=A'B'$ ,  $BC=B'C'$  et  $CA=C'A'$ .

M étant un point quelconque du plan, construisez son image par l'isométrie  $i$  qui applique : A sur A', B sur B' et C sur C'.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

### 5.3 Déplacement – Antidéplacement (ou retournement)

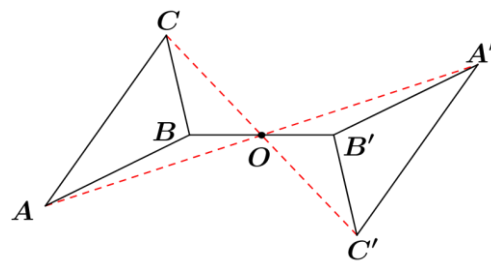
Parmi les isométries connues, on constate que certaines, comme **les translations conservent les angles orientés**, alors que d'autres, comme **les symétries orthogonales transforment tout angle orienté en son opposé**. Ces résultats conduisent à distinguer deux sortes d'isométries.

#### Définition 3.5.6

- Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un **antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

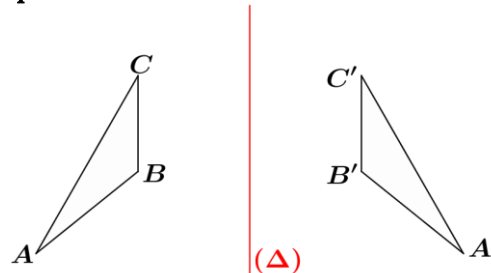
#### Exemples :

1. Les translations, les symétries centrales, les rotations sont des déplacements



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés dans le même sens.

### 2. Les symétries orthogonales sont des antidéplacements.



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés en sens contraire.

### 5.4 Composée de deux homothéties de même centre

#### Consigne 3.5.6 : Découverte

On donne le triangle ABC et le point O.  $h_1$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $k_1$  et  $h_2$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $k_2$ ;  $A_1, B_1, C_1$  les images respectives des points A, B, C par  $h_1$  et  $A', B', C'$  les images respectives des points  $A_1, B_1, C_1$  par  $h_2$ .

1. Justifier que  $\overrightarrow{OA'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{OB'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OC'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC}$ .
2. Justifier de même que  $\overrightarrow{OA} = k_1 k_2 \overrightarrow{OA'}$ ;  $\overrightarrow{OB} = k_1 k_2 \overrightarrow{OB'}$  et  $\overrightarrow{OC} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC'}$ .
3. Déduisez une application du plan qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Consigne 3.5.7 : Consolidation

On donne le triangle ABC et le point O.  $h_1$  est l'homothétie de centre O et de rapport 2 et  $h_2$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $-\frac{3}{2}$ .

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par  $h_2 \circ h_1$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

### 5.5 Composée de deux rotations de même centre

#### Consigne 3.5.8 : Découverte

$r_1$  est la rotation de centre O et d'angle orienté  $(\widehat{\alpha}_1)$  et  $r_2$  est la rotation de centre O et d'angle orienté  $(\widehat{\alpha}_2)$ . Soit M un point quelconque du plan et  $M'$  et  $M_1$  deux points du plan tels que  $r_1(M) = M_1$  et  $r_2(M_1) = M'$ .

1. Justifie que  $OM = OM'$ .
2. Justifie que  $mes(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2)$ .
3. Déduire une application du plan qui applique M sur M'.

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min**

### Consigne 3.5.9 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O.  $r_1$  est la rotation de centre O et d'angle orienté  $(\frac{\pi}{6})$  et  $r_2$  est la rotation de centre O et d'angle orienté  $(\frac{\pi}{2})$ .

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par  $r_2 \circ r_1$

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min**

### 5.6 Composée d'une homothétie et d'une translation

#### Consigne 3.5.10 : Découverte

$h$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $k$  et  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Soit G un point invariant par  $h \circ t$  et  $G_1 = t(G)$ . On pose  $M_1 = t(M)$  et  $M' = h(M_1)$ .

1. Justifie que :

(a)  $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM_1}$ .

(b) Justifier que  $\overrightarrow{OG} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$

2. (a) Dédire que  $\overrightarrow{GM} = k\overrightarrow{GM'}$ .

(b) Dédire une application du plan qui applique M sur M'.

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min**

#### Consigne 3.5.11 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O et le vecteur  $\vec{u}$ .  $h$  est l'homothétie de centre O et rapport 2 et  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par  $h \circ t$ .

**Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min**

### 5.7 Composée d'une rotation et d'une translation

#### Consigne 3.5.12 : Découverte

$r$  est une rotation de centre O et d'angle orienté non nul.  $t$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$ . La rotation  $r$  et la translation  $t$  sont des déplacements. Les composées  $r \circ t$  et  $t \circ r$  sont des déplacements.

1. Justifier que  $r \circ t$  et  $t \circ r$  ne sont pas des translations.

2. En déduire que  $r \circ t$  et  $t \circ r$  sont des rotations.

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min**

#### Propriété 3.5.16

La composée d'une rotation d'angle non nul ( $\hat{\alpha}$ ) et d'une translation est une rotation d'angle orienté ( $\hat{\alpha}$ ).

#### Consigne 3.5.13 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O et le vecteur  $\vec{u}$ .  $r$  est la rotation de centre O et d'angle orienté  $(\frac{\pi}{3})$  et  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

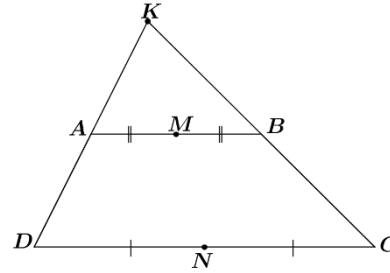
Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par  $t \circ r$ .

**Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min**

### 5.8 Utilisation des transformations du plan

#### Consigne 3.5.14 : Alignement de points

On considère le trapèze ABCD suivant :



- K est le point d'intersection des droites (AD) et (BC)
- $(AB) \parallel (DC)$
- M milieu de [AB]
- N milieu de [DC]

Démontrer que le milieu M de [AB], le milieu N de [DC] et le point K sont alignés. Pour cela :

1. Justifier qu'il existe une homothétie  $h$  et une seule qui transforme A en D et B en C
2. Préciser le centre de cette homothétie.
3. Précise l'image du segment [AB] par  $h$ .
4. (a) Justifier que  $h(M) = N$ .  
(b) Que peut-on conclure ?

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min**

#### Consigne 3.5.15 : Egalité de distances

On considère un triangle quelconque ABC. Sur les côtés [AB], [BC] et [CA], extérieurement, on construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'.  $r_1$  est la rotation de centre A et d'angle orienté  $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB})$  et  $r_2$  est la rotation de centre B et d'angle orienté  $(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA})$

Démontrer que  $AA' = BB' = CC'$ . Pour cela :

1. Justifier que  $BB' = CC'$ . (Tu pourras chercher l'image de [BB'] par  $r_1$ )
2. Justifier que  $AA' = CC'$ . (Tu pourras chercher l'image de [AA'] par  $r_2$ )
3. Que peut-on conclure ?

**Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min**

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

On considère le carré ABCD de centre de symétrie O. M, N, P et Q sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

1. Démontrer que les triangles AMO et OPD sont superposables.
2. Trouver une translation  $t$  et une rotation  $r$  de centre P telle que  $f(A) = O$ ,  $f(M) = P$  et  $f(O) = D$  dans chacun des cas suivants :  
(a)  $f = r \circ t$ .  
(b)  $f = t \circ r$ .

#### Exercice 2

Démontrer que dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

#### Exercice 3

Les triangles ABC et DEF sont équilatéraux et superposables.

Démontrer que les médiatrices de segments [AD], [BE] et [CF] sont parallèles ou concourantes.

## Séquence n°6 : Représentation graphiques de fonctions et transformations du plan

### 6.1 Fonction associées : Représentation graphiques de fonctions et translations

#### 6.1.1 Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$

##### Consigne 3.6.1 : Découverte

Le plan est muni du repère  $(O, I, J)$ .  $f$  est une fonction de représentation graphique  $(C_f)$  et définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g$  est une fonction de représentation graphique  $(C_g)$  et définie par  $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$ .

1. Représenter dans le repère  $(O, I, J)$  la courbe  $(C_f)$ .
2. Placer le point  $O'(3, 2)$  puis tracer le vecteur  $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$ .
3. Représenter de nouveau la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O', I', J')$  avec  $(O'I') \parallel (OI)$  et  $(O'J') \parallel (OJ)$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Exploitation des résultats

La courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  dans le repère  $(O', I', J')$  représente la courbe  $(C_g)$  de la fonction  $g$  dans le repère  $(O, I, J)$ . La courbe  $(C_g)$  est donc l'image de la courbe  $(C_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$ .

##### Consigne 3.6.2 : Consolidation

Le plan muni du repère  $(O, I, J)$ . On considère la représentation graphique  $(C_f)$  de la fonction  $f(x) = x^2$  et  $g$  est la fonction de représentation graphique  $(C_g)$  et définie par  $g(x) = (x+1)^2 - 2$ .

1. Représenter la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .
2. Déduire la représentation de la courbe  $(C_g)$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

#### 6.1.2 Représentations graphiques de fonctions polynômes du second degré

##### Consigne 3.6.3 : Découverte

Le plan est muni du repère orthogonal  $(O, I, J)$ . on considère les fonction  $f(x) = 2x^2$  et  $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$ .

1. Tracer dans le repère  $(O, I, J)$ , la courbe représentative  $(C_f)$  de la fonction  $f$ .
2. Mettre  $g(x)$  sous la forme  $a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  des réels à préciser.
3. Placer le point  $A(\alpha, \beta)$  puis tracer le vecteur  $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$ .
4. Tracer de nouveau la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(A, I', J')$  avec  $(AI') \parallel (OI)$  et  $(AJ') \parallel (OJ)$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

#### Propriété 3.6.2

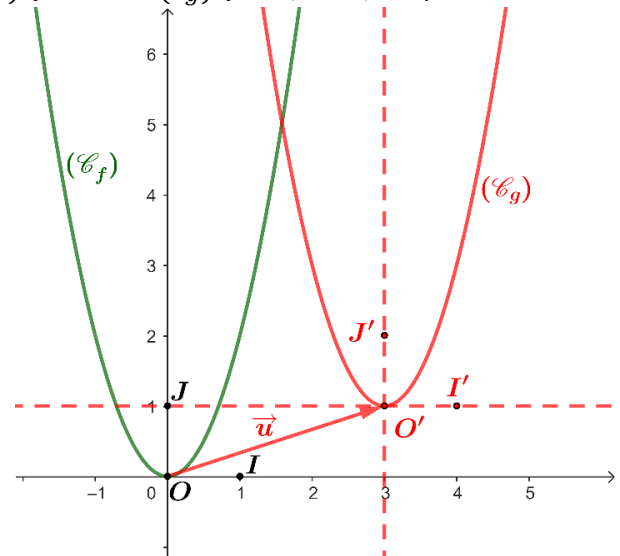
Soit  $g$  la fonction polynôme du second degré définie par  $g(x) = ax^2 + bx + c$ .

La fonction  $g$  peut se mettre sous la forme  $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ .

Dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ , sa représentation graphique est l'image par la translation de vecteur  $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$ , de la parabole d'équation  $y = ax^2$ .

#### Exemple illustratif :

$(C_f): y = ax^2$  et  $(C_g): y = a(x - \alpha)^2 + \beta$



Les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont superposables.

#### Consigne 3.6.4 : Consolidation

Le plan est muni du repère  $(O, I, J)$ .

Construire la représentation graphique de la fonction polynôme  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + 6x + 7$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

#### 6.1.3 Représentations graphiques de fonctions homographiques

##### Définition 3.6.1 : Fonction homographique

#### Remarque

##### Propriété 3.6.3

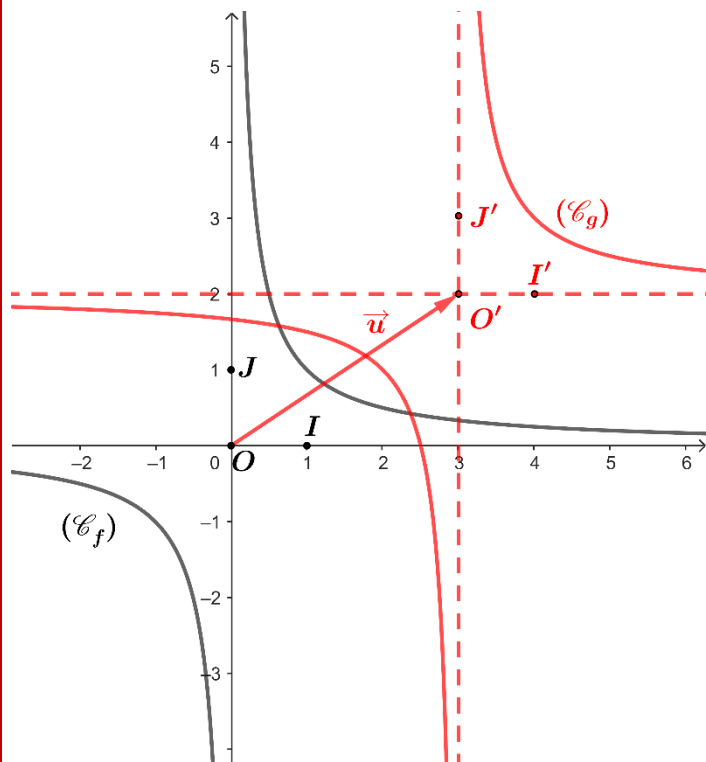
$g$  est la fonction homographique définie par :

$$g(x) = \frac{k}{x - \alpha} + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}^*)$$

Dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ , la représentation graphique  $(C_g)$  de  $g$  est l'image par la translation de vecteur  $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$ , de l'hyperbole d'équation  $y = \frac{k}{x}$ .

#### Exemple illustratif :

$$(C_f): y = \frac{1}{x} ; (C_g): \frac{k}{x-3} + 2$$



### Consigne 3.6.5 : Consolidation

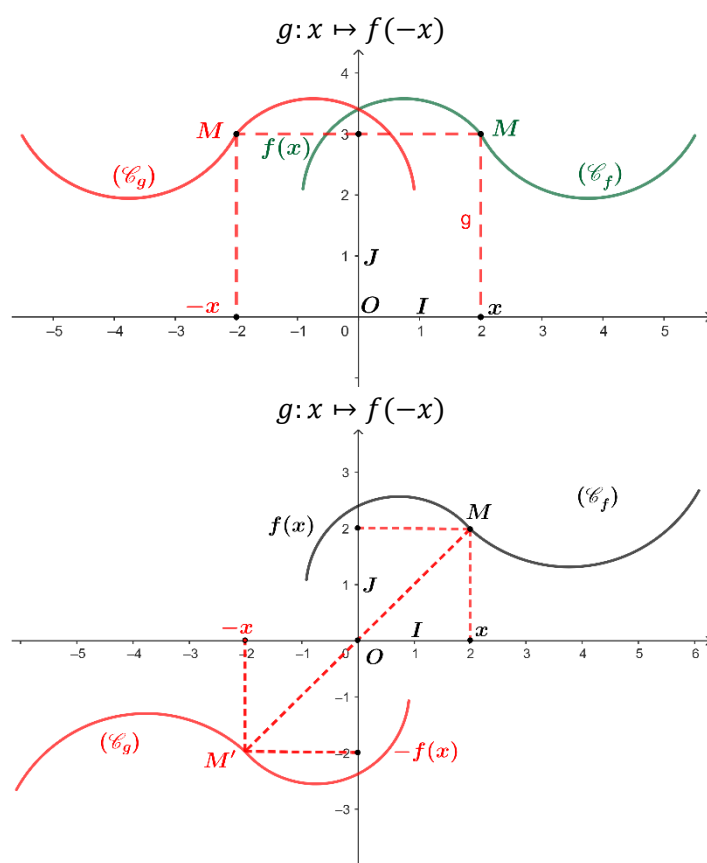
Don considère la fonction rationnelle suivante :

$$g(x) = \frac{-2x-5}{x+3}$$

Le plan est muni du repère (O, I, J).

1. Justifier que  $g$  est une fonction homographique.
2. Construire sa représentation graphique  $(C_g)$  dans le plan muni du repère (O, I, J).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min



### Consigne 3.6.6 : Consolidation

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). construire la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes  $f, g, h$ , de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = -(x-3)^2 ; g(x) = \sqrt{-x} \text{ et } h(x) = -\sqrt{-x}$$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

### 6.1.4 Représentations graphiques des fonctions

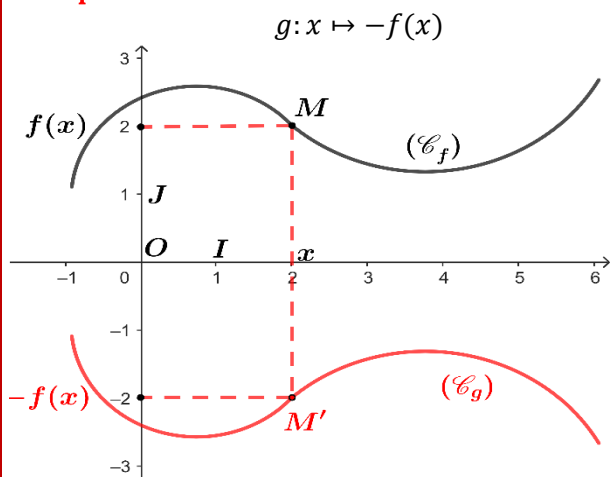
$$x \mapsto -f(x) ; x \mapsto f(-x) ; x \mapsto -f(-x)$$

#### Propriété 3.6.4

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).  $f$  est une fonction de représentation graphique  $(C_f)$ .

- La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto -f(x)$  est le symétrique de  $(C_f)$  par rapport à (OI).
- La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto -f(-x)$  est le symétrique de  $(C_f)$  par rapport à O.
- La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto -f(x)$  est le symétrique de  $(C_f)$  par rapport à (OI).

#### Exemple illustratifs :



### 6.1.5 Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$

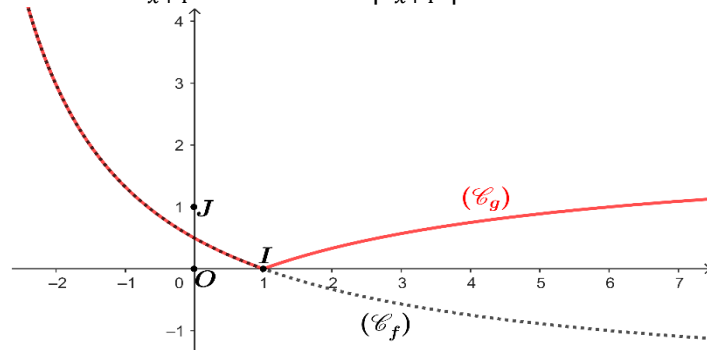
#### Propriété 3.6.5

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).  $f$  est une fonction de représentation graphique  $(C_f)$ .

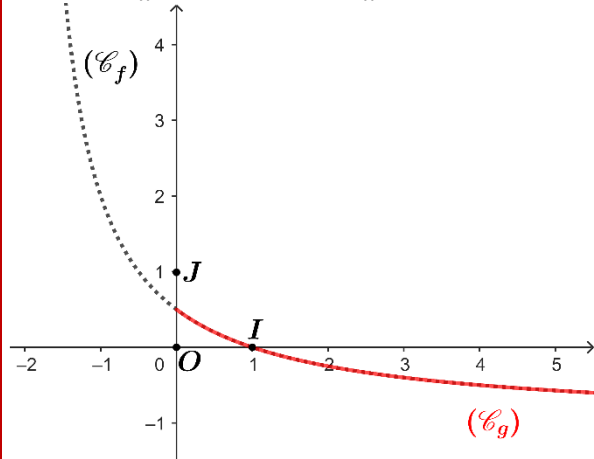
- La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto |f(x)|$  est le symétrique de  $(C_f)$  par rapport à (OI) avec  $y \geq 0$ .
- La représentation graphique de la fonction  $x \mapsto f(|x|)$  est le symétrique de  $(C_f)$  par rapport à (OI) avec  $x \geq 0$ .

#### Exemple illustratifs :

$$(C_f): y = \frac{-2x+2}{x+4} \text{ et } (C_g): y = \left| \frac{-2x+2}{x+4} \right|$$



$$(C_f): y = \frac{-x+1}{x+2} \text{ et } (C_g): y = \frac{-x+1}{x+2}; x \geq 0$$



## 6.2 Propriétés géométriques des représentations graphiques de fonctions

### 62.1 Fonction paires – Fonctions impaires – Fonctions périodiques

#### Définition 3.6.2

#### Remarque

#### Remarque

#### Consigne 3.6.7 : Consolidation

1. Étudier la parité de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

(a)  $f(x) = x^3 + 3x$ .

(b)  $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ .

(c)  $h(x) = 2x^2 + x - 3$

2. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction  $f$  est périodique de période  $T$ .

(a)  $f(x) = \sin^2 x$   $T = \pi$ .

(b)  $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$   $T = 2\pi$ .

3. Donner une période de la fonction, dans chacun des cas suivants.

(a)  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ .

(b)  $f(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

(c)  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ .

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

### 62.2 Eléments de symétries de la représentation graphique d'une fonction

#### Définition 3.6.3

#### Consigne 3.6.8 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthogonal

$(O; I; J)$ . Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 8x^3 - 12x^2 + 6x + 9$

$f(x) = \frac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9}$ ;  $(\Delta)$  est la droite d'équation  $x = -3$  et le point  $A\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ .

1. Montrer que la droite  $(\Delta)$  est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction  $f$ .

2. Montrer que le point  $A$  est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction  $g$ .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## 6.3 Etudes des fonctions numériques de variables réelles

### 6.3.1 Plan d'étude d'une fonction

Retenons : Plan d'étude d'une fonction

### 6.3.2 Notion de branches infinies

Propriété 3.6.5 : Asymptote horizontale

Propriété 3.6.6 : Asymptote verticale

Propriété 3.6.7 : Asymptote oblique

### 6.3.3 Position relative d'une courbe par rapport à la droite d'équation $y = ax + b$

Propriété 3.6.8

#### Consigne 3.6.9 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, étudier puis tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

(a)  $f(x) = \frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$

(b)  $f(x) = \frac{5x+3}{2x-5}$

(c)  $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 9$ .

(d)  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Stratégie : TI : 15min

TC : 30min

### 6.3.4 Notion de zéro d'une fonction

Définition 3.6.4 : Zéro d'une fonction

Propriété 3.6.9

#### Consigne 3.6.10 : Consolidation

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [4, 5]$ .

3. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près :

(a) par la méthode de balayage.

(b) Par la méthode de dichotomie.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

## 6.4 Etudes des fonctions $x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \tan x$

Propriété 3.6.10

#### Consigne 3.6.11 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2\sin x + \cos 2x.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. (a) Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .  
(b) Dédire un ensemble d'étude  $E$  de  $f$ .
3. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$ .  
(b) Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $E$  puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$ .

Stratégie : TI : 15min

TC : 25min

### Evaluations formatives

#### Exercice 1

Construire la représentation graphique de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = (x + 1)^3 + 1$

#### Exercice 2

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} ; g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} ; h(x) = \frac{21x^2-3x}{2-x} \text{ et}$$

$$u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

#### Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . On donne le point  $A(-1, 4)$ .  $f$  est la fonction définie par  $f(x) = 4x^2 - 5x$  et  $(C_f)$  sa représentation graphique. Déterminer la fonction  $g$  dont la représentation graphique  $(C_g)$  est l'image de  $(C_f)$  par la symétrie centrale de centre  $A$ .

#### Exercice 4

Le plan est muni d'un repère.  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = x^2 + 6x - 7$  et  $g(x) = x^2 + 8x - 9$ . Trouver un vecteur  $\vec{u}$  tel que  $(C_f)$  soit l'image de  $(C_g)$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ .