

Support de cours du professeur de la classe de 1^{ère} D



République du Bénin

Ministère des Enseignements Secondaire, Technique et de la Formation
Professionnelle

Enseignement Secondaire Général

Domaine : *Science de l'éducation et de la formation*

Mention : *Sciences exactes*

Discipline : *Mathématique*

Classe : *1^{ère} D*

Auteur :

Adekoulé Emmanuel ILEDI

Professeur Certifié de Mathématiques

Tel : { +229 67 39 92 89
+229 95 37 13 89
+229 44 90 48 35

E-mail : { adekoule.emmanuel@gmail.com
iledi.emmanuel@yahoo.fr

Version : SEPTEMBRE 2024

PROGRAMME D'ETUDES DE LA CLASSE DE 1^{ère} D

SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

1. Droite orthogonales
2. Droite et plan orthogonaux
3. Plans perpendiculaires
4. Projection orthogonale sur un plan
5. Projection orthogonale sur une droite
6. Vecteurs de l'espace

SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

1. Equations et inéquations dans \mathbb{R} .
2. Statistique.
3. Dénombrement
4. Fonctions
5. Limites et continuité
6. Dérivation - Etude de fonction
7. Primitives
8. Suites numériques

SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

1. Angles orientés - trigonométrie.
2. Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés
3. Cercle dans le plan
4. Isométrie
5. Représentations graphiques de fonctions et transformations du plan.

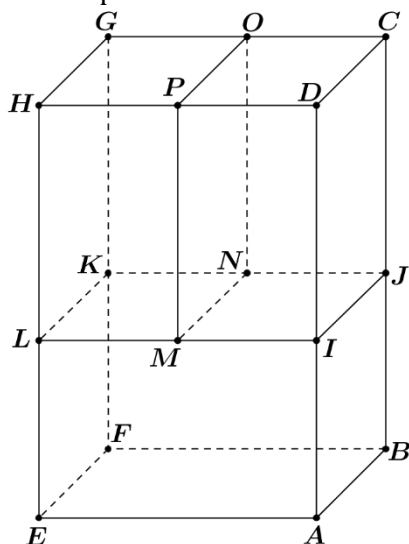
SA N°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Situation de départ :

Texte : Une discussion autour du dossier d'une armoire

Coffi est un élève de la classe de 1^{ère}. Son tuteur Fako lui demande d'aller retirer auprès du menuisier l'armoire qu'il a commandée, pour y ranger ses habits.

Il dessine le plan de l'armoire sur une feuille de papier qu'il remet à Coffi pour faciliter l'identification chez le menuisier. Voici le plan de cette armoire :



Des camarades de Coffi ont vu ce dessin. L'un d'eux affirme qu'on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. Un autre affirme : « le point A permet de repérer n'importe quel point de l'espace ; il suffit de connaître la distance AS ». Non, rétorque un autre « la distance AS seule ne suffit pas, il faut connaître aussi le sens de A vers S sur la droite (AS) ». Un autre élève apporte une nuance en déclarant ; « encore faut-il que S soit distinct de A ». Jean qui, jusque-là n'est pas intervenu pose la question suivante à ses camarades « s'agit-il des coordonnées géographiques d'un point ? ».

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes posés ;
- Mathématiser chacun des problèmes posés ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

1. Lis le texte de la situation de départ
2. Reformule la situation-problème en tes propres termes.
3. Formule toutes les idées ou questions que t'inspire la situation de départ.

Stratégie : Brainstorming

Séquence n°1 : Droites orthogonales

Activité 1.1

Pour vérifier l'affirmation : « ...on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. », Coffi s'intéresse aux droites (IA) et (LK) du pavé droit ABFEIJKL du dessin de l'armoire.

1.1 Définition de deux droites orthogonales

Consigne 1.1.1 : Découverte

1. Identifie deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires respectivement parallèles aux droites (IA) et (LK)

Information

On dit que les droites (IA) et (LK) sont orthogonales et on note $(AI) \perp (LK)$.

2. Donne trois exemples de droites orthogonales sur le dessin de l'armoire
3. Propose une définition de deux droites orthogonales de l'espace.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Exploitation de résultats

$$\begin{cases} (D_1) \parallel (AI) \\ (D_2) \parallel (LK) \\ (D_1) \text{ perpendiculaire à } (D_2) \end{cases} \Rightarrow \{(IA) \text{ orthogonale à } (LK)\}$$

Définition 1.1.1 : Droites orthogonales

Deux droites de l'espace (D_1) et (D_2) sont **orthogonales** lorsque les parallèles à ces droites passant par un point donné sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent. On note $(D_1) \perp (D_2)$

Remarque 1.1.1

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires.
- Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

Consigne 1.1.2

Donne deux exemples de droites orthogonales et non perpendiculaires en utilisant le dessin.

Stratégie : TI : 3min TC : 5min

Remarque 1.1.2

- Dans l'espace on n'utilise pas le symbole \perp pour traduire que deux droites sont perpendiculaires. Ce symbole s'emploie entre deux droites pour traduire l'orthogonalité.
- Dans l'espace, il n'y a pas de symbole pour traduire la perpendicularité entre deux droites.

1.2 Propriétés de droites orthogonales

Consigne 1.1.3 : Propriété

(D_1) et (D_2) sont deux droites orthogonales, $(\Delta) \parallel (D_2)$.

1. Démontre que (Δ) orthogonale à (D_1) .
2. Tire une conclusion

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 10min

Propriété 1.1.1

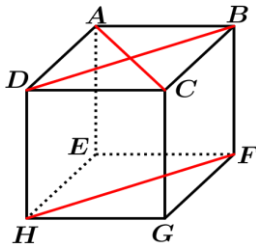
Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\begin{cases} (D_1) \perp (D_2) \\ (\Delta) \parallel (D_1) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D_2)$$

Remarque 1.3

Si deux droites de l'espace sont orthogonales, toute droite orthogonale à l'une n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre.

Exemple 1.1.1 : On considère le cube ABCDEFGH suivant :



Dans ce cube, les droites (DB) et (AC) sont orthogonales. La droite (HF) est orthogonale à la droite (AC) mais elle n'est pas orthogonale à la droite (DB).

Attention !**On ne dit pas :**

Par exemple on ne dit pas : « (AB) perpendiculaire à (BC) dans le rectangle ABCD » car les droites (AB) et (BC) ne sont pas contenues dans le rectangle ABCD mais plutôt dans le plan support de ce rectangle. C'est donc un abus de langage qui n'est pas toujours tolérable.

On peut dire par exemple :

Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires car ABCD est un rectangle.

Ou simplement

ABCD est un rectangle **donc** les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires (le « donc » sous-entend qu'en considérant le rectangle ABCD, les supports des côtés consécutifs [AB] et [BC] sont perpendiculaires).

Consigne 1.1.4 : Approfondissement

On suppose que le compartiment LIJKHDCG de l'armoire est un cube d'arête de longueur 4cm.

- Réalise une figure du compartiment LIJKHDCG à l'aide du code $(\frac{1}{2}; 30)$ puis place les points Q et R milieux respectifs des segments [LD] et [DJ].
- (a) Justifie que les droites (KI) et (GD) sont parallèles.
(b) Justifie que les droites (QR) et (GD) sont orthogonales en utilisant la définition.
- Justifie que les droites (LH) et (KJ) sont orthogonales en utilisant une propriété du cours

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

Evaluation formative

ABCDEFGH est un pavé droit.

Justifie de deux manières que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Consigne 1.1.5

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles de l'espace, $(\Delta) \perp (D_2)$.

- Démontre que $(\Delta) \perp (D_1)$.
- Tire une conclusion.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

Propriété 1.1.2

Si deux droites de l'espace sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\begin{cases} (D_1) \parallel (D_2) \\ (\Delta) \perp (D_1) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \perp (D_2)$$

Séquence n°2 : Droite et plan orthogonaux**2.1 Droites et plan orthogonaux****Activité 1.2**

Cédric, un camarade de classe de Coffi sait depuis la classe de 4^{ème} que : "Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan".

Ce résultat lui a été enseigné sous forme de définition. Il se demande si une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

2.2 Définition de droites et plan orthogonaux**Consigne 1.2.1**

On considère le dessin de l'armoire. Une droite (D) est telle que $(D) \perp (BF)$, $(D) \perp (AB)$ et (AB) et (BF) sont sécantes dans le plan (ABF).

- Trouve une droite (D) qui convient

Information

On dit que la droite (D) est orthogonale au plan (ABF)

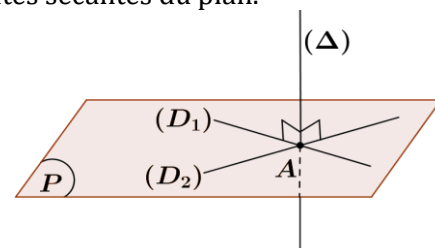
- Propose une définition d'une droite orthogonale à un plan.

Stratégie : TI : 5min

TC : 5min

Définition 1.2.1 : Droite orthogonale à un plan

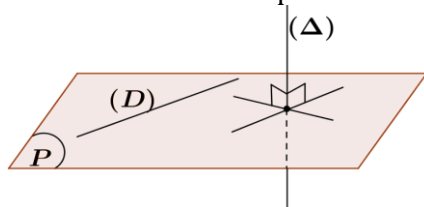
Une droite et un plan sont orthogonaux ou perpendiculaires lorsque la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.



$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta) \perp (D_1) \\ (\Delta) \perp (D_2) \\ (D_1) \cap (D_2) = \{A\} \\ (D_1) \text{ et } (D_2) \text{ contenues dans le plan } (P) \end{array} \right. \Rightarrow (\Delta) \perp (P)$$

Propriété 1.2.1

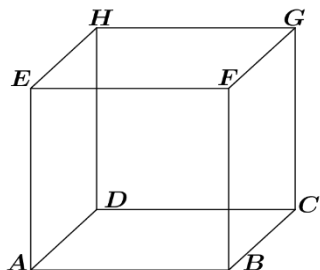
Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta) \perp (P) \\ (D) \subset (P) \end{array} \right. \Rightarrow (\Delta) \perp (D)$$

Evaluation formative

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



- Démontre que la droite (AB) est orthogonale au plan (FBC).
- Démontre que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG).

2.3 Propriété de droites et plan orthogonaux**Consigne 1.2.2**

- Combien y a-t-il de droites passant par le point F et perpendiculaire au plan (ABC) ?
- Combien y a-t-il de plans passant par les points H et orthogonaux à la droite (AD) ?

Stratégie : TI : 3min TC : 5min

Propriété 1.2.2

- Par un point A de l'espace, il passe une droite unique de l'espace perpendiculaire à un plan donné de l'espace.
- Par un point de l'espace, il passe un plan unique orthogonal à une droite donnée de l'espace.

Consigne 1.2.3

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles. (P) est un plan orthogonal à (D_1) .

Démontre que (P) est orthogonal à (D_2) .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.2.3

Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_1) \parallel (D_2) \\ (P) \perp (D_1) \end{array} \right. \Rightarrow (P) \perp (D_2)$$

Consigne 1.2.4

(P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles. (D) est une droite orthogonale à (P_1) .

Démontre que (D) est orthogonal à (P_2) .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.2.4

Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_1) \parallel (P_2) \\ (D) \perp (P_1) \end{array} \right. \Rightarrow (D) \perp (P_2)$$

Consigne 1.2.5

(D_1) et (D_2) sont deux droites perpendiculaires à un plan (P) . Soit I un point de la droite (D_1) et (Δ) la droite passant par I et parallèle à (D_2) .

- Justifie que la droite (Δ) est orthogonale au plan (P) .
- (a) Justifie que les droites (Δ) et (D_1) sont confondues.
(b) Dédus-en alors que les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.
- Que peux-tu conclure ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.2.5

Si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles.

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_1) \perp (P) \\ (D_2) \perp (P) \end{array} \right. \Rightarrow (D_1) \parallel (D_2)$$

Consigne 1.2.6

(P_1) et (P_2) sont deux plans perpendiculaire à une droite (D) . Soit I un point du plan (P_1) et (P_3) le plan passant par I et parallèle au plan (P_2) .

- Justifie que $(P_3) \perp (D)$.
- (a) Justifie que les plans (P_1) et (P_3) sont confondus.
(b) Dédus-en que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.
- Que peux-tu conclure ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.2.6

1. Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ils sont parallèles.

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_1) \perp (D) \\ (P_2) \perp (D) \end{array} \right. \Rightarrow (P_1) \parallel (P_2)$$

2. Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) , alors toute droite orthogonale à (D) est parallèle à (P) .

$$\left\{ \begin{array}{l} (D) \perp (P) \\ (\Delta) \perp (D) \end{array} \right. \Rightarrow (\Delta) \parallel (P)$$

Consigne 1.2.7

ABCD est un tétraèdre régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux, I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]

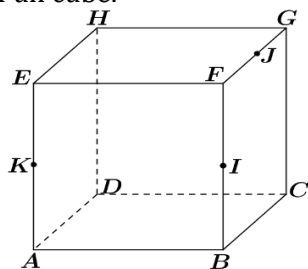
1. Démontre que (AB) est perpendiculaire au plan (ICD).
2. Démontre que (CD) est perpendiculaire au plan (JAB).
3. Dédus-en que la droite (IJ) est perpendiculaire aux deux droites (AB) et (CD).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

Evaluations formatives

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un cube.



On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BF], [FG] et [AE]. Démontre que :

- (a) (IK) est orthogonale au plan (ADE) ;
- (b) (BE) est orthogonale au plan (ADG) ;
- (c) (DE) est orthogonale au plan (IJK) ;
- (d) (AC) et (BF) sont orthogonales ;
- (e) (IK) et (CF) sont orthogonales ;
- (f) (IJ) et (ED) sont orthogonales ;

Exercice 2

ABCD un tétraèdre régulier d'arête a .

1. Soit I le milieu du segment [CD].
Montre que le plan (AIB) est perpendiculaire à la droite (CD).
2. Soit A' le pied de la hauteur du triangle AIB issue du sommet A.
(a) Montre que $(AA') \perp (BCD)$.
(b) Quel est alors l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD ?
3. Calcule en fonction de a la distance AA' .
4. (a) Soit K le milieu $[A'A]$, calcule en fonction de a , les distances BK et KI ;
(b) Dédus-en que le triangle BKI est rectangle.
5. Soient E et F les milieux respectifs des segments [BC] et [BD].
Montre que (EF) est l'axe du cercle circonscrit au triangle BKI.

2.4 Distance d'un point à une droite-Distance d'un point à un plan

Activité 1.3

En considérant le plan de l'armoire, on considère :

- le plan (P) passant par A et perpendiculaire à la droite (LM) ;
- la droite (D) passant par A et perpendiculaire au plan (HDC).

2.4.1 Distance d'un point à une droite

Consigne 2.8

1. Identifie le plan (P) de l'activité 1.3.
2. Détermine $(P) \cap (LM)$.

Information

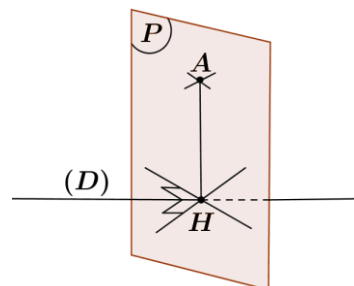
On dit que la distance AI est la distance du point A à la droite (LM).

3. Propose alors une définition de la distance d'un point à une droite (D).

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition : Distance d'un point à une droite

(D) est une droite et A est un point de l'espace. On appelle **distance du point A à la droite (D)**, notée $d(A; (D))$, la distance AH où H est le point d'intersection de (D) avec le plan passant par A et perpendiculaire à (D).



$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (D) \\ (P) \cap (D) = \{H\} \end{cases} \Rightarrow d(A; (D)) = AH$$

2.4.2 Distance d'un point à un plan

Consigne 2.9

1. Identifie la droite (D) de l'activité 1.3
2. Détermine $(D) \cap (HDC)$.

Information

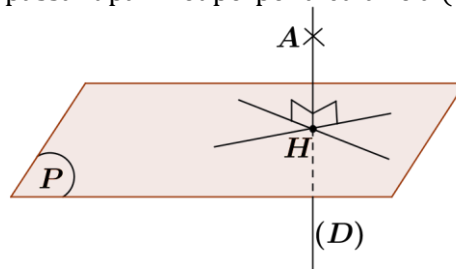
On dit que la distance AD est la distance du point A au plan (HDC).

3. Propose alors une définition de la distance d'un point à un plan (P).

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition : Distance d'un point à un plan

(P) est un plan et A est un point de l'espace. On appelle **distance du point A au plan (P)**, notée $d(A; (P))$ la distance AH où H est le point d'intersection de (P) avec la droite passant par A et perpendiculaire à (P).



$$\begin{cases} (AH) \perp (P) \\ (AH) \cap (P) = \{H\} \end{cases} \Rightarrow d(A; (P)) = AH$$

Séquence n°3 : Plans perpendiculaires

Activité 1.4

En examinant le dessin de l'armoire, Adébola, une fille de 1^{ère} D reconnaît deux plans perpendiculaires. Sa camarade Lovia déclare en avoir oublié la définition.

3.1 Définition de deux plans perpendiculaires

Consigne 1.3.1

- Démontre que la droite (MP) est perpendiculaire au plan (ABE).
- Trouve un plan (Q) qui contient la droite (MP).

Information

On dit que les plans (Q) et (ABE) sont perpendiculaires.

- Propose une définition de deux plans perpendiculaires.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition 1.3.1

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

3.2 Application de la définition de deux plans perpendiculaires

Consigne 1.3.2 : Application

On suppose que le compartiment LIJKHDCG de l'armoire est un cube

- Démontre que les plans (LIJ) et (KID) sont perpendiculaires.
- Démontre que les plans (KCD) et (IHG) sont perpendiculaires

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

Propriété 1.3.1

- Si une droite est parallèle à un plan et perpendiculaire à un second plan, alors ces deux plans sont perpendiculaires.

$$\begin{cases} (D) \parallel (P_1) \\ (D) \perp (P_2) \end{cases} \Rightarrow (P_1) \perp (P_2)$$

- Si une droite (D) et un plan (P) sont perpendiculaires à un plan (P'), alors (D) est parallèle à (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (P') \\ (D) \perp (P') \end{cases} \Rightarrow (D) \parallel (P)$$

- Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

$$\begin{cases} (P_1) \perp (P_2) \\ (P_3) \parallel (P_1) \end{cases} \Rightarrow (P_3) \perp (P_2)$$

- Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

$$\begin{cases} (P_1) \cap (P_2) = (D) \\ (P_3) \perp (P_1) \\ (P_3) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow (P_3) \perp (D)$$

Remarque 1.3.1

- Deux plans perpendiculaires à un même troisième ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.
- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre. Il suffit de considérer leur droite d'intersection.

Consigne 1.3.3 Approfondissement

On considère un trapèze ABCD tel que (AB) \parallel (DC) et (AB) \perp (AD). Soit (D) la droite passant par A et orthogonale au plan (ABCD). Soit E un point de la droite (D) distinct du point A.

- Fais une figure.
- Démontre que (CD) \perp (ADE).
- Soit H le projeté orthogonal de A sur (DE). Démontre que (AH) \perp (CDE).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Evaluations formatives

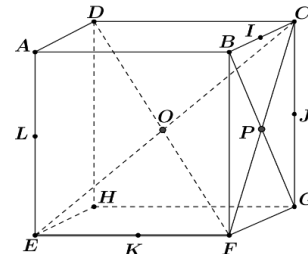
Exercice 1

ABCDEFGH est un cube

- (a) Justifie que (EA) \perp (FG).
(b) Justifie que (EF) \perp (FBC).
- Justifie que (ABC) \perp (EAD).
- Justifie que (DG) \perp (EBC).

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube de centre O, P milieu de la face carrée BCGF et les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [BC], [CG], [EF] et [AE] comme l'indique la figure suivante :



- Démontre que la droite (OI) est orthogonale aux droites (AD) et (KL).
- (a) Démontre que la droite (BG) est orthogonale au plan (EFC).
(b) Déduis-en que (IJ) \perp (EC).
- (a) Justifie que (EC) \parallel (PK).
(b) Déduis-en que (IJ) \perp (PK).
(c) Démontre que le triangle KPB est rectangle en P.

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube. I le centre du carré BCGF et J milieu du segment [HG].

- (a) Justifie (DH) \perp (ABC).
(b) Déduis-en que (DH) \perp (AC).

- Démontre que $(BAG) \perp (ADE)$.
- (a) Démontre que $(BH) \perp (ACF)$.
(b) Déduis-en que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires.
- Justifie que le triangle AIJ est rectangle en I .

Exercice 4

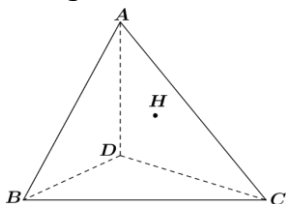
ABCDEFGH est un cube.

- (a) Démontre que $(EF) \perp (BG)$.
(b) Déduis-en que $(EC) \perp (GB)$.
- Prouve que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG) .

Indication : on pourra étudier la position relative de la droite (BD) par rapport au plan (EAC) .

Exercice 5

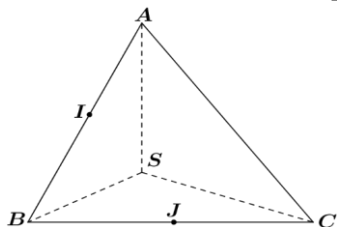
ABCD est un tétraèdre tel que la droite (AD) est orthogonale au plan (BCD) . On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC .



Démontre que $(DH) \perp (BC)$.

Exercice 6

SABC est un tétraèdre régulier tel que les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.



- (a) Démontre que $(AB) \perp (SCI)$ et $(BC) \perp (SAJ)$.
(b) Déduis-en que les $(AB) \perp (SC)$ et $(BC) \perp (SA)$.
- Démontre que $(SB) \perp (AC)$.
- Démontre que les plans (ABC) et (SIJ) .

Séquence n°4 : Projection orthogonale sur un plan

Activité 1.5

Pour mieux comprendre les techniques utilisées par son tuteur pour dessiner le plan de l'armoire, Coffi, s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' du plan (ABE) avec la droite passant par X et perpendiculaire au plan (ABE) . Jean affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même et qu'il existe même des points X tels que X et X' soient confondus

Consigne 1.4.1

- Le procédé tel que présenté est-il une application de l'espace dans lui-même?

Information

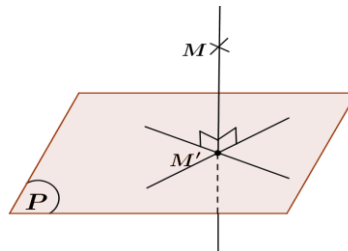
Cette application est appelée projection orthogonale sur le plan (ABE) .

- Propose une définition d'une projection orthogonale sur un plan.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

Définition 1.4.1 : Projection orthogonale sur un plan

La projection orthogonale sur un plan (P) est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' , intersection de (P) avec la droite passant par M et orthogonale à (P) . Si p désigne cette projection, on note $p(M) = M'$

**Consigne 1.4.2**

On désigne par \mathcal{P} la projection orthogonale sur le plan (ABE) .

- (a) Détermine : $\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(B)$; $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}((ABE))$.
(b) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que $(LH) \perp (ABE)$.
(b) Détermine $\mathcal{P}(H)$; $\mathcal{P}(L)$ et $\mathcal{P}((HL))$.
(c) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que la droite (LD) n'est pas orthogonale au plan (ABE) .
(b) Détermine $\mathcal{P}([LD])$ et $\mathcal{P}((LD))$.
- Soit I' et J' les milieux respectifs des segments $[LD]$ et $[AE]$.
(a) Justifie que I' est le milieu de $[MP]$.
(b) Détermine $(MP) \cap (AE)$.
(c) Détermine $\mathcal{P}(I')$.
(d) Que constates-tu ?
- De toutes les questions précédentes, que peux-tu retenir ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Définition 1.4.2 : Point invariant

(P) est un plan et \mathcal{P} une projection orthogonale sur (P) , M est un point quelconque de l'espace. Si $\mathcal{P}(M) = M$ alors on dit que M est un point invariant par \mathcal{P} .

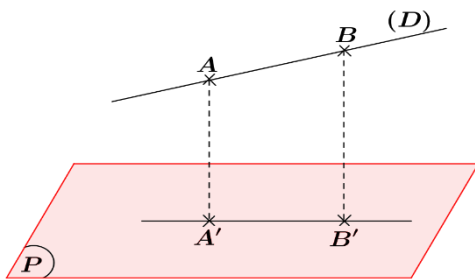
Propriété 1.4.1

L'ensemble des points invariants par une projection orthogonale sur un plan est ce plan lui-même

Propriété 1.4.2

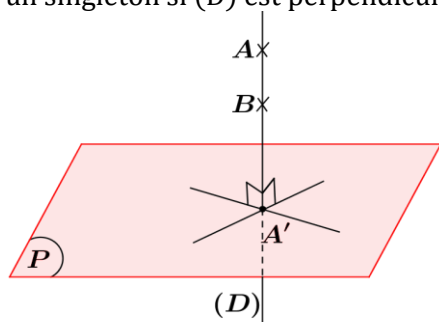
Soit \mathcal{P} la projection orthogonale sur un plan (P) .

- L'image d'une droite (D) par \mathcal{P} est :
 - une droite si (D) n'est pas orthogonale à (P)



On a : (D) n'est pas orthogonale à (P) ; $\mathcal{P}(A)=A'$, $\mathcal{P}(B)=B'$ et $A' \neq B'$ alors ; $\mathcal{P}((D))=(A'B')$

- un singleton si (D) est perpendiculaire à (P)

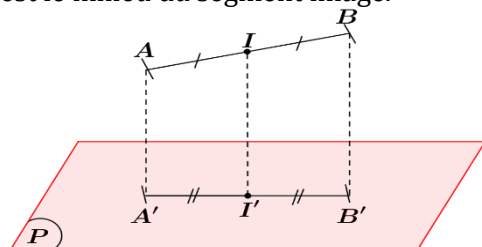


On a : $(D) \perp (P)$, ; $\mathcal{P}(A)=A'$, $\mathcal{P}(B)=A'$ alors $\mathcal{P}((D))=\{A'\}$

2. Si A et B sont deux points d'images respectives A' et B' par \mathcal{P} , le segment $[AB]$ a pour image par \mathcal{P} :

- $[A'B']$ si (AB) n'est pas orthogonale à (P)
- $\{A'\}$ si (AB) est perpendiculaire à (P)
- $A'B' = AB$ si $(AB) \parallel (P)$
- $A'B' < AB$ si (AB) et (P) sont non parallèles

3. L'image, par une projection orthogonale \mathcal{P} , du milieu d'un segment dont le support est non orthogonal à (P) , est le milieu du segment image.



$$\begin{cases} \mathcal{P}([AB]) = [A'B'] \\ \mathcal{P}(I) = I' \Rightarrow I' \text{ milieu de } [A'B'] \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{cases}$$

Consigne 1.4.3 : Approfondissement

ABCDEFGH est un cube et K est le milieu du segment $[FC]$. On désigne par q la projection orthogonale sur le plan (EHG)

- Détermine $q(F)$, $q(C)$ et $q([EC])$.
- Détermine et construis l'image F' du point F par la projection orthogonale sur le plan (ABG) .

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Séquence n°5 : Projection orthogonale

Activité 1.6

Donald, un élève de cette classe de 1^{re} D s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' de la droite (LI) avec le plan passant par X et perpendiculaire à la droite (LI) . Joël affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même. Colombe, une élève de la classe déclare qu'il existe des points X tels que X et X' soient confondus.

Consigne 1.5.1

- Le procédé tel que présenté dans l'activité est-il une application de l'espace dans lui-même ?

Information

Cette application est appelée projection orthogonale sur la droite (LI) .

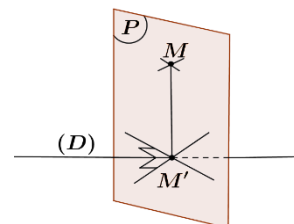
- Propose une définition d'une projection orthogonale sur une droite.

Stratégie : TI : 5min

TC : 5min

Définition 1.5.1 : Projection orthogonale sur une droite

La projection orthogonale sur une droite (D) est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' , intersection de (D) avec le plan passant par M et orthogonale à (D) . Si q désigne cette projection, on note $q(M)=M'$.



Consigne 1.5.2

On désigne par \mathcal{P} la projection orthogonale sur la droite (LI) .

- (a) Détermine : $\mathcal{P}(L)$; $\mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{P}((LI))$.
(b) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que $(BC) \perp (LI)$.
(b) Détermine $\mathcal{P}((BC))$
(c) Que constates-tu ?
- (a) Justifie que la droite (KJ) n'est pas orthogonale à la droite (LI) .
(b) Détermine $\mathcal{P}([KJ])$ et $\mathcal{P}((KJ))$.
(c) Justifie que $\mathcal{P}(N)=M$.
(d) Que constates-tu ?
- De toutes les questions précédentes, que peux-tu retenir ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Propriété 1.5.1

Soit p la projection orthogonale sur une droite (D) .

- L'ensemble des points invariants par p est la droite (D) .
- L'image par p d'une droite orthogonale à (D) est un singleton.
- L'image d'une droite non orthogonale à (D) est la droite (D) .

4. L'image du milieu d'un segment dont le support n'est pas orthogonal à (D) est le milieu de l'image de ce segment.

Consigne 1.5.3 : Approfondissement

ABCDEFGH est un cube. Le point I est centre du carré BCGF. On désigne par q la projection orthogonale sur la droite (DH) et par p la projection orthogonale sur le plan (GFC).

- Détermine $p(A)$; $p(B)$; $p(I)$; $p(D)$; $p([AD])$; $p([BH])$ et $p([DC])$.
- Détermine $q(G)$; $q(F)$; $q([AE])$; $q([BH])$ et $q([AC])$.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

Evaluation formative

ABCDEFGH est un cube. On désigne p_1 la projection orthogonale sur le plan (EHG) et par p_2 la projection orthogonale sur la droite (BF).

- Détermine $p_1(A)$; $p_1(B)$; $p_1(F)$; $p_1(G)$ et $p_1(H)$.
- Trouve les images par p_1 de [AE]; [CF]; [AB] et [DB].
- On pose $p_2(J) = K$ avec J milieu de [DH].
Démontre que K est le milieu de [BF].

Séquence n°6 : Vecteurs de l'espace

Activité 1.6

Halim, un élève de cette classe de 1^{re} D, se souvient de la notion de vecteur et affirme :

« Le vecteur \overrightarrow{LN} est une combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} tandis que \overrightarrow{AL} n'est pas une combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} ».

Certains de ses camarades s'interrogent sur la notion de combinaison linéaire et affirment n'avoir rien compris à sa déclaration.

6.1 Caractérisation d'un vecteur

Consigne 1.6.1

Un vecteur de l'espace se définit de la même manière qu'un vecteur du plan. On note \mathcal{W} l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Détermine :

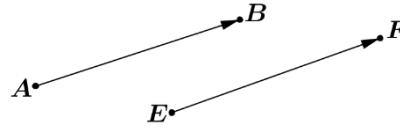
- Les caractéristiques du vecteur \overrightarrow{AB} .
- Les caractéristiques d'un vecteur quelconque de l'espace

Stratégie : TI : 5min TC : 5min

Définition 1.6.1

- Un couple (A, B) de points distincts de l'espace détermine un vecteur noté \overrightarrow{AB} , caractérisé par :
 - une direction : celle de la direction droite (AB).
 - un sens : le sens de parcours de A vers B sur (AB).
 - sa norme noté $\|\overrightarrow{AB}\|$: celle du segment [AB].
- Un couple (E, F) de points de l'espace détermine le même vecteur que (A, B) si et seulement si \overrightarrow{EF} même

direction, même sens et même longueur que \overrightarrow{AB} . On dit que (A, B) et (E, F) sont des représentants du même vecteur.



- Pour tout point A de l'espace, le couple (A, A) détermine un vecteur appelé **vecteur nul** et noté $\vec{0}$. Il n'a ni sens ni direction.
- L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté \mathcal{W} .

6.2 Propriétés de vecteurs de l'espace

Consigne 1.6.2

On considère le dessin de l'armoire.

- (a) Sachant que $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$, complète les égalités suivantes : $\overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{KJ} = \dots \overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KJ}$.
(b) Sachant que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$, complète les égalités suivantes : $\overrightarrow{IJ} = \dots \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{LK} = \dots \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{IJ} = \dots \overrightarrow{LK}$.
- Complète l'équivalence suivante : $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{LI} = \dots \overrightarrow{KJ}$.
- (a) Soit I' le milieu de [LD] et J' le milieu de [HI]. Sachant que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD}$, justifie que les points I' et J' sont confondus.
(b) Sachant que [LD] et [HI] ont le même milieu I' , justifie que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD}$.
(c) Complète l'équivalence suivante : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HD} \Leftrightarrow$ [LD] et [HI] ont le....
- En considérant le point L et le vecteur \overrightarrow{GC} :
 - Exprime \overrightarrow{LI} en fonction de \overrightarrow{GC} .
 - Peut-on trouver un autre point S différent du point I tel que $\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{GC}$?
 - Complète la phrase suivante pour en faire une propriété : « Pour tout point O et pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ »

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Propriété 1.6.1

Pour tous points A, B, C et D de l'espace, on a :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Propriété 1.6.2

Pour tout point O et pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

6.3 Opérations sur les vecteurs

6.3.1 Somme de deux vecteurs

Consigne 1.6.3

Observe attentivement le dessin de l'armoire.

- Construis le parallélogramme ABFE.
- Construis les vecteurs \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AF} .

Information

Le vecteur \overrightarrow{AF} est appelé la somme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} .

3. Construis la somme des vecteurs \overrightarrow{LM} et \overrightarrow{LK} .
4. Propose une définition de la somme de deux vecteurs.

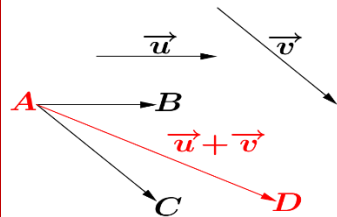
Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition 1.6.2 : Somme de deux vecteurs

Soit A un point du plan et soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. On désigne par B et C les points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

Soit D le point du plan tel que [BC] et [AD] aient le même milieu.

On appelle vecteur somme de \vec{u} et \vec{v} , le vecteur \vec{w} tel que $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$. On note $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.



Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Propriété 1.6.3

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de \mathcal{W} , on a :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

6.3.2 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Consigne 1.6.4

Observe attentivement le dessin de l'armoire

1. Complète l'égalité suivante : $\overrightarrow{LI}=\dots\overrightarrow{LM}$.

Information

On dit que le vecteur \overrightarrow{LI} est le produit du vecteur \overrightarrow{LM} par 2.

2. Construis le vecteur \overrightarrow{ES} tel que $\overrightarrow{ES}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$
3. Détermine le produit du vecteur \overrightarrow{AB} par 0 et le produit du vecteur nul $\vec{0}$ par un nombre réel β .
4. Détermine le produit d'un vecteur quelconque \vec{u} par 1.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.6.4

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace et pour tous réels α et β , on a :

1. $\alpha\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$
2. $1 \times \vec{u}=\vec{u}$.
3. $(\alpha + \beta) \vec{u}=\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
4. $\alpha (\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$.
5. $\alpha(\beta\vec{v})=\beta(\alpha\vec{v})=\alpha\beta\vec{v}$.

6.3.3 Combinaison linéaire

Définition 1.6.3 : Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs de l'espace.

On dit qu'un vecteur \vec{v} est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ lorsqu'il existe n réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que $\vec{v}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\dots+\alpha_n\vec{u}_n$.

6.4 Vecteurs coplanaires – Vecteurs colinéaires

6.4.1 Vecteurs colinéaires

Définition 1.6.4

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont dits colinéaires lorsque l'un d'eux est le vecteur nul ou bien lorsque les deux ont la même direction ; c'est-à-dire s'il existe un nombre réel β . $\vec{u}=\beta\vec{v}$.

6.4.2 Vecteurs coplanaires

Définition 1.6.5

Trois vecteurs de l'espace sont **coplanaires** lorsque deux d'entre eux sont colinéaires ou bien lorsque l'un d'eux est une combinaison linéaire des deux autres.

Propriété 1.6.5

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

- Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont appartenant à un même plan.
- Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe au moins un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ non nul de nombres réels tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$.
- Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires si et seulement si l'unique triplet de nombre réel $(\alpha; \beta; \gamma)$ tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Consigne 1.6.5 : Consolidation

On considère le compartiment ABFEIJKL de l'armoire

1. Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BF} et \overrightarrow{KJ} sont-ils coplanaires ?
2. Démontre que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AI} sont non coplanaires.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

6.5 Caractérisation vectorielle d'un plan et d'une droite de l'espace

Consigne 1.6.6

A et B sont deux points distincts de l'espace, M un point quelconque de l'espace.

Justifie que $M \in (AB)$ si et seulement si, il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.6.6

A et B sont deux points distincts de l'espace, M un point quelconque de l'espace.

$M \in (AB)$ si et seulement si, il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

NB : La relation vectorielle $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$ est la caractérisation vectorielle de la droite (AB).

Propriété 1.6.7

Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de \mathcal{W} . La droite de repère (A, \vec{u}) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Consigne 1.6.7

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et M un point quelconque de l'espace.

Démontre que $M \in (ABC)$ si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Propriété 1.6.8

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et M un point quelconque de l'espace.

$M \in (ABC)$ si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

NB : La relation vectorielle $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ est la caractérisation vectorielle du plan (ABC) .

Propriété 1.6.9

Soit A un point de l'espace, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{W} . Le plan de repère (A, \vec{u}, \vec{v}) est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

6.6 Coordonnées d'un vecteur dans une base – Coordonnées d'un point dans un repère

Consigne 1.6.8

Observe attentivement le dessin de l'armoire.

1. Justifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BF} et \overrightarrow{BC} sont non coplanaires.

Information

Le triplet de vecteur $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC})$ est appelé base de l'ensemble \mathcal{W} des vecteurs de l'espace.

2. (a) Détermine le triplet (α, β, γ) de nombres réels tel que $\overrightarrow{GD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BF} + \gamma\overrightarrow{BC}$.

(b) Peut-on trouver un autre triplet $(x; y; z) \neq (\alpha, \beta, \gamma)$ tel que $\overrightarrow{GD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BF} + z\overrightarrow{BC}$?

3. Recopie puis complète la phrase suivante pour en faire une propriété : « Si \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont trois vecteurs de l'espace non coplanaires, alors pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $\vec{u} = \dots\vec{i} + \dots\vec{j} + \dots\vec{k}$. »

4. Donne une définition d'une base de l'ensemble \mathcal{W} des vecteurs de l'espace

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 5min

Propriété 1.6.10

Si \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont trois vecteurs de l'espace non coplanaires, alors pour tout vecteur \vec{u} de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition 1.6.6

• Un triplet de vecteurs non coplanaires est appelé **une base de l'ensemble \mathcal{W} des vecteurs de l'espace**.

• Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \mathcal{W} , \vec{u} un vecteur de \mathcal{W} . Le triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{u}(x; y; z)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• Soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet $(x; y; z)$ est appelé coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Et on note $M(x; y; z)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

• Pour tout point O de l'espace et pour tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires, le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé repère cartésien.

• Le quadruplet (A, B, D, E) formé par quatre points non coplanaires est aussi un repère de l'espace appelé repère affine. Il se note aussi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

• Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, le point O est appelé origine du repère.

Remarque 1.6.1

• On détermine toujours les coordonnées d'un point dans un repère donné de l'espace.

• On détermine toujours les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée de \mathcal{W}

Propriété 1.6.11

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans une même base de \mathcal{W} et β un nombre réel.

• $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x = x'; y = y'; z = z')$

• $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

• $(\beta\vec{u}) \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \\ \beta z \end{pmatrix}$

Consigne 1.6.9 : Approfondissement

ABCDEFGH est un cube. Soit I le centre du carré EFGH, J et K les milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[GH]$.

1. Démontre que le quadruplet $(E, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DH})$ est un repère de l'espace.

2. Détermine dans ce repère les coordonnées de tous les points du cube.

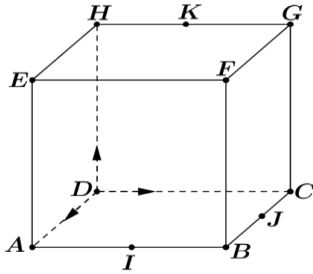
3. Détermine les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{BK} et \overrightarrow{IJ} dans la base $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 15min

Evaluations formatives**Exercice 1**

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[HC]$.

On muni l'espace du repère $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $4\vec{i} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $4\vec{k} = \overrightarrow{DH}$.



On donne les points R, U, T et Z tels que IJKR est un parallélogramme ; $\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{AD} + \frac{5}{2}\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$ et Z le centre de la face ADHE.

- Justifie que les points D, B et T sont alignés.
- (a) Justifie que le triplet $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ est une base.
(b) Détermine les coordonnées des points E, F et G dans le repère $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
- Détermine les coordonnées des points R, U et Z dans le repère $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube. M est le point tel que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et N est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

- Démontre que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
- Les vecteurs \overrightarrow{EA} , \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{HB} sont-ils coplanaires ?

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube.

- Construis les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.
- Justifie que les points A, M et N sont alignés.
- Les vecteurs \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{EC} et \overrightarrow{BF} sont-ils coplanaires ?
- Les vecteurs \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{BF} sont-ils coplanaires ?

Exercice 4

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1m. Le point I du segment [AE], J le centre de la face CDHG, K et L dont définis par $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et T le milieu de [KL].

L'espace est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Détermine les coordonnées des points I et J.
- Justifie $K\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$ et $L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$.
- Détermine les coordonnées des points T.
- Démontre que les points I, T et J sont alignés.
- Déduis-en que les points I, J, T, K et L sont coplanaires.

SA N°2 : ORGANISATION DES DONNEES

Situation de départ :

Texte : *Le meilleur tireur*

Une société de surveillance organise de façon périodique pour ses agents une séance d'entraînement au tir. Chaque agent est soumis à un test à l'aide d'un dispositif spécial construit à partir d'un carré de 8dm de côté. Ce dispositif génère de façon successive plusieurs carrés concentriques tels que chaque sommet du carré à construire soit sur un côté du carré précédemment construit et à une distance x de l'une des extrémités de ce côté. A chaque agent, le dispositif construit selon sa taille et son poids un nombre N donné de carrés dont il doit atteindre au tir un certain nombre N' ($N' < N$). Melon n'est ni gros ni grand mais trapu, il veut se qualifier meilleur agent tireur de la société. Il consacre plus de 12 heures à son travail et à l'entraînement. Il se demande comment choisir la durée de chacune de ces deux activités de façon que, en s'entraînant trois fois plus que d'habitude, il travaille plus qu'il ne s'entraîne. Il se propose aussi d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela il relève dans les bases de données de la société les poids et les tailles de certains de ses coéquipiers. Il dresse le tableau suivant :

| | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|------|-----|-----|-----|
| Poids en $kg(x)$ | 55 | 68 | 62,5 | 62 | 68 | 68 |
| Taille en $cm(y)$ | 165 | 177 | 174 | 168 | 165 | 171 |
| Poids en $kg(x)$ | 59 | 71 | 74 | 68 | 68 | 71 |
| Taille en $cm(y)$ | 165 | 177 | 174 | 171 | 165 | 174 |
| Poids en $kg(x)$ | 74 | 71 | 65 | 65 | 62 | 65 |
| Taille en $cm(y)$ | 174 | 174 | 174 | 174 | 174 | 174 |
| Poids en $kg(x)$ | 68 | 71 | 65 | 74 | 74 | 71 |
| Taille en $cm(y)$ | 168 | 171 | 174 | 168 | 177 | 174 |
| Poids en $kg(x)$ | 65 | 77 | 74 | 62 | 77 | 68 |
| Taille en $cm(y)$ | 165 | 180 | 177 | 168 | 180 | 171 |

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras tout au long de la situation d'apprentissage à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés;
- Analyser chacun des problèmes posés;
- Mathématiser chacun des problèmes posés;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème;
- Améliorer au besoin ta production.

Activité 0

- Lis le texte de la situation de départ.

- Reformule le problème ou la situation-problème en tes propres termes.
- Formule toutes les idées et questions que t'inspire la situation
- Reconnais des situations similaires.
- Anticipe éventuellement sur la réponse au problème.

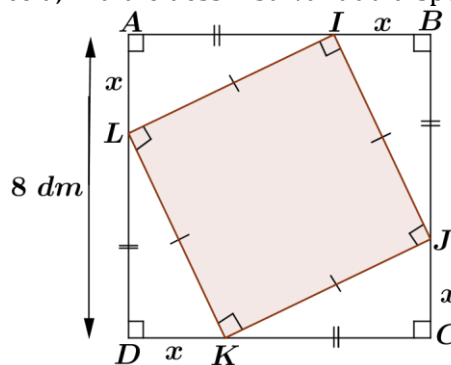
Séquence n°1 : Equations et inéquations dans \mathbb{R}

1.1 Equations du second degré dans \mathbb{R}

1.1.1 Polynôme du second degré

Activité 2.1

Dans le but de réaliser son dispositif d'entraînement, Melon désire connaître la valeur de x afin de construire le second carré IJKL pour qu'il ait $20 dm^2$ d'aire. Pour cela, il fait le dessin suivant du dispositif :



Consigne 2.1.1 : Equation du second degré

- (a) Calcule en fonction de x l'aire du second carré IJKL.
 - (b) Justifie que x vérifie l'égalité suivante : $x^2 - 8x + 22 = 0$.
2. Comment appelle-t-on une telle égalité ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

Définition 2.1.1 : Polynôme du second degré

- On appelle polynôme du second degré, tout polynôme $P(x)$ pouvant s'écrire sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.
- On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

Consigne 2.1.2 : Degré d'un polynôme

Donne le degré de chacun des polynômes ou équations suivantes :

- $P(x) = x + 2x^2 - 4$.
- $(E_1) : 1 - 2x + x^2\sqrt{2} = 2 + x(2 + x\sqrt{2})$.
- $(E_2) : (m - 1)x^2 + (2m^2 + 1)x + m + 2 = 0$.

Stratégie : TI : 3min TC : 5min

1.1.2 Discriminant d'une équation du second degré

Consigne 2.1.3

On considère le polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

- Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x)=a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \right].$$
- On pose $\Delta=b^2-4ac$.
 (a) Ecris $P(x)$ en fonction de Δ .
 (b) Justifie que : $P(x)=0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
- Résous l'équation $P(x)=0$ dans chacun des cas suivants :
 (a) $\Delta = 0$
 (b) $\Delta < 0$
 (c) $\Delta > 0$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

Définition 2.1.2 : Discriminant

On appelle **discriminant**, noté Δ , de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$), le réel défini par $\Delta=b^2-4ac$.

Méthode de résolution d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré (E) : $ax^2+bx+c=0$.

Pour résoudre une équation (E), on peut procéder comme suit :

- On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ de l'équation (E) ou du polynôme du second degré ax^2+bx+c
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution réelle.
 On a donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
 Dans ce cas le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une solution double x_0 telle que $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
 On a donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.
 Dans ce cas la forme factorisée du polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ est :

$$P(x)=a(x-x_0)^2 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
 On a donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
 Dans ce cas la forme factorisée du polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ est : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$P(x)=a \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Remarque 2.1.1

Soit (E) : $ax^2+bx+c=0$ un équation du second degré avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

Si le produit $a \times c < 0$ alors l'équation (E) admet nécessairement deux solutions distinctes.

1.1.3 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue sans paramètre

Consigne 2.1.4

- Résous dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :
 (a) $(E_1) : 2x^2+3x-2=0$.
 (b) $(E_2) : 4x^2-4x+1=0$.
 (c) $(E_3) : 2x^2+3x+2=0$
- Factorise si possible chacun des polynômes suivants :
 (a) $P(x)=2x^2+3x-2$.
 (b) $Q(x)=4x^2-4x+1$.
 (c) $R(x)=2x^2+3x+2$.

1.1.4 Résolution d'une équation paramétrée

Consigne 2.1.5

On considère l'équation $(E_m) : (m-2)x^2+2(m-1)x+m+1=0$ où m est un paramètre réel.

- (a) Résous dans \mathbb{R} l'équation (E_1) .
 (b) Détermine la valeur de m pour que le réel -2 soit solution de (E_m) .
- Résous dans \mathbb{R} l'équation (E_m) en discutant suivant les valeurs de m .

Stratégie : TI : 10min TC : 20min

Méthode de résolution d'une équation paramétrée

Pour résoudre une équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ où l'un au moins des réels a ; b et c dépend d'un paramètre réel, on peut procéder comme suit :

- On étudie éventuellement le cas où l'équation (E) est du premier degré c'est-à-dire le cas où $a = 0$.
- Dans le cas où l'équation (E) est du second degré (cas où $a \neq 0$),
 ✓ on calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ de l'équation (E) ;
 ✓ on étudie le signe de Δ suivant les valeurs du paramètre ;
 ✓ on détermine enfin dans chaque cas le nombre de solutions de l'équation (E) et on détermine la valeur de chacune de ces solutions.

1.1.5 Somme et produits des solutions d'une équation du second degré

Consigne 2.1.6 : Propriété

On désigne par x_1 et x_2 deux solutions distinctes de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$). On désigne par S la somme de ces racines et par P leur produit.

- Rappelle l'expression de chacune des solutions x_1 et x_2 en fonction de a , b et Δ .
- Calcule S et P.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Propriété 2.1.1

Si x_1 et x_2 sont les solutions d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$), alors

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Consigne 2.1.7 : Consolidation

- On considère l'équation suivante : $x^2 - 3x - 4 = 0$.
 - Sachant que le réel 1 est une solution de cette équation, détermine l'autre solution sans calculer le discriminant de $x^2 - 3x - 4$.
 - Vérifie la réponse de la question 1.(a) par calcul du discriminant de $x^2 - 3x - 4$.
- Soit dans \mathbb{R} l'équation $2x^2 - 3x - 8 = 0$. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de cette équation. Sans déterminer x_1 et x_2 , calcule $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $B = x_1^2 + x_2^2$ et $C = x_1^3 + x_2^3$.

Stratégie : TI : 10min TC : 20min

Propriété 2.1.2

Si x_1 et x_2 les solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$, alors la somme $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$ vérifient la relation $x^2 - Sx + P = 0$.

Retenons 2.1.1 : Détermination de deux réels connaissant leur somme et leur produit

Pour déterminer deux nombres réels connaissant leur somme S et leur produit P , on peut résoudre l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. Les solutions de cette équation lorsqu'elles existent sont les deux nombres réels recherchés.

Consigne 2.1.8 : Application

- Détermine deux nombres réels dont la somme est -5 et le produit est -126 .
- Résous dans \mathbb{R} le système d'équation (S) : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 2 \end{cases}$
- Détermine les dimensions d'un rectangle de périmètre $12m$ et d'aire $1m^2$.
- Un rectangle peut-il avoir pour périmètre $6m$ et pour aire $4m^2$.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 12min

1.1.6 Relation indépendante du paramètre réel m entre les solutions d'une équation du second degré

Consigne 2.1.9

Soit m un paramètre réel. On donne (E) : $(m+2)x^2 - (m+4)x + 2 - m = 0$ avec $m \neq -2$.

- Etablis une relation indépendante du paramètre réel m entre les racines x_1 et x_2 de (E).
- Déduis-en les racines doubles.
- Détermine m pour que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{5}$.

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 12min

1.1.7 Etude de signe des solutions d'une équation du second degré

Retenons 2.1.2

Soit l'équation du second degré (E) : $x^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$

- Si $\Delta < 0$ alors (E) n'admet pas de solution réelle donc pas d'étude de signe ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions distinctes de signe contraire ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions opposées ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions distinctes positives ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions distinctes négatives ;
- Si $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S < 0 \end{cases}$ alors (E) admet une solution double négative ;
- Si $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}$ alors (E) admet une solution double positive ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions dont l'une est nulle et l'autre est positive ;
- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S < 0 \end{cases}$ alors (E) admet deux solutions dont l'une est nulle et l'autre est négative.

Consigne 2.1.10 : Consolidation

Soit l'équation $(E_m) : (m-2)x^2 + 2(m+2)x + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

- Pour quelles valeurs de m , cette équation a deux racines distinctes de signes contraires.
- Pour quelles valeurs de m , cette équation a deux racines distinctes de signes négatifs.

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 15min

1.1.8 Equations auxiliaires

Consigne 2.1.11

- On désire résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $-8t^4 + 8t^2 + 6 = 0$. Pour cela on donne l'équation (E') : $-8x^2 + 8x + 6 = 0$.
 - Résous dans \mathbb{R} , l'équation (E').
 - En posant $t^2 = x$, justifie que l'équation (E) devient une équation (E'') qui est équivalente à l'équation (E') et déduis-en dans \mathbb{R} les solutions de l'équation (E).
- En posant $\sqrt{t} = x$ pour $t \geq 0$, résous dans \mathbb{R} l'équation $(E_1) : -8t + 8\sqrt{t} + 6 = 0$.
- En posant $|t| = x$, résous dans \mathbb{R} l'équation $(E_2) : -8|t|^2 + 8|t| + 6 = 0$.

Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 15min

1.1.9 Equations irrationnelles

Méthode de résolution d'une équation irrationnelle

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

- Equation de la forme $\sqrt{P(x)} = Q(x)$

$$\sqrt{P(x)}=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \quad \text{ou} \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{P(x)}=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$$

- Equation de la forme $\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}$

$$\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$$

- Equation de la forme $\sqrt{P(x)} = k ; k \in \mathbb{R}$
 - Si $k < 0$, alors cette équation n'admet pas de solution ;
 - Si $k > 0$, alors on a : $\sqrt{P(x)}=k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) = k^2 \end{cases}$
 - Si $k = 0$, alors $\sqrt{P(x)}=k \Leftrightarrow P(x)=0$

Consigne 2.1.12 : Consolidation

Résous dans \mathbb{R} , les équations irrationnelles suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{x+2} = 2 - 3x \text{ et } (E_2) : \sqrt{x^2 - x - 4} = -x + 7.$$

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 12min

1.2 Inéquations du second degré dans \mathbb{R}

Activité 2.2

Pierre, ayant vu le dispositif d'entraînement de Melon se demande comment choisir x pour que l'aire du carré IJKL soit égale au moins à deux fois celle du carré ABCD.

Consigne 2.1.13 : Découverte

- Rappelle l'aire de chacun des carrés ABCD et IJKL.
- Justifie à partir des informations de l'activité 2.2 que x vérifie l'inégalité suivante : $x^2 - 8x - 32 \geq 0$.
- Comment appelle-t-on l'inégalité obtenue dans la question 2 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition 2.1.3 : Inéquation du second degré

On appelle inéquation du second degré à une inconnue, toute inéquation de la forme : $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

1.2.1 Signe d'un polynôme du second degré

Consigne 2.1.14 : Etude de signe d'un polynôme du second degré

On considère le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- Donne la forme factorisée de $P(x)$ suivant le signe de Δ .
- Étudie le signe de $P(x)$ dans chaque cas en complétant les phrases suivantes :
 - Si $\Delta < 0$ alors le signe de $P(x)$ dépend de celui de
 - Si $\Delta = 0$ alors le signe de $P(x)$ dépend de celui de
 - Si $\Delta > 0$ alors l'équation $P(x)=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. On a donc :

| | | | | |
|----------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| $x - x_1$ | - | 0 | + | + |
| $x - x_2$ | - | - | 0 | + |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | + | 0 | - | + |
| $P(x)$ | ... | 0 | ... | 0 |

On suppose que $x_1 < x_2$

Propriété 2.1.3

Soit le polynôme du second degré $P(x)=ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des constantes réelles et $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme $P(x)$ garde un signe constant et son signe est celui de $a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tableau de signe $P(x)$

| | | |
|--------|--------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $P(x)$ | signe de a | |

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $P(x)$ garde un signe constant et son signe est celui de $a, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

Tableau de signe $P(x)$

| | | | |
|--------|--------------|-----------------|--------------|
| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
| $P(x)$ | signe de a | 0 | signe de a |

- Si $\Delta > 0$ alors le polynôme $P(x)$ a le signe suivant :

| | | | | | |
|--------|--------------|-------|-----------------|-----------|--------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
| $P(x)$ | signe de a | 0 | signe de $(-a)$ | 0 | signe de a |

Avec $x_1 < x_2$

Retenons 2.1.3

Pour résoudre dans \mathbb{R} une inéquation du second degré $ax^2+bx+c < 0$; $ax^2+bx+c \leq 0$; $ax^2+bx+c > 0$; $ax^2+bx+c \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$, on se ramène d'abord à l'étude de signe du polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ puis déduire l'ensemble des solutions de l'une de ces inéquations.

Consigne 2.1.15 : Résolution d'une inéquation du second degré

Résous dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(I_1): x^2 - 2x - 15 > 0 \quad ; \quad (I_2): -2x^2 - x - 1 \leq 0 \quad ;$$

$$(I_3): \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0 ; (I_4): -2x^2 - x + 1 \leq 0.$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

1.2.2 Inéquation irrationnelles

Méthode de résolution d'une inéquation irrationnelle

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

- Inéquation de la forme $\sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)}$

$$\sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \leq Q(x) \end{cases}$$

- Inéquation de la forme $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$$

- Inéquation de la forme $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^2 \end{cases}$$

- Inéquation de la forme $\sqrt{P(x)} \geq k; k \in \mathbb{R}$

➤ Si $k < 0$, $\sqrt{P(x)} \geq k \Leftrightarrow P(x) \geq 0$;

➤ Si $k > 0$, alors on a : $\sqrt{P(x)} \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \geq k^2 \end{cases}$

➤ Si $k = 0$, alors $\sqrt{P(x)} \geq k \Leftrightarrow P(x) \geq 0$

Consigne 2.1.16 : Consolidation

Résous dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \sqrt{2x^2 - x + 6} < \sqrt{x - 2};$$

$$(I_2) : \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x \leq -1; (I_3) : \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 9 - x.$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

1.2.3 Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré

Propriété 2.1.4

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. On désigne par x_1 et x_2 les racines de $f(x)$ telles que $x_1 < x_2$. Soit β un réel et $S = x_1 + x_2$.

La position du réel β par rapport aux racines x_1 et x_2 de $f(x)$ est déterminée de la façon suivante :

- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$ alors $x_1 < \beta < x_2$

- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ S - 2\beta < 0 \end{cases}$ alors $x_1 < x_2 < \beta$;

- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ S - 2\beta > 0 \end{cases}$ alors $\beta < x_1 < x_2$;

- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\beta) = 0 \\ S - 2\beta < 0 \end{cases}$ alors $x_1 < \beta$ et $x_2 = \beta$

- Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\beta) = 0 \\ S - 2\beta > 0 \end{cases}$ alors $x_1 = \beta$ et $x_2 > \beta$

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $f(x)$ admet une racine double x_0 et la comparaison est évidente.

Consigne 2.1.17 : Réinvestissement

1. On donne le polynôme $P(x) = 4x^2 - 3x - 1$.

Donne la position du réel 2 par rapport aux racines de $P(x)$ sans les déterminer

2. Soit $(E_m) : (6-m)x^2 + (3m+1)x - 3 - 9m = 0$ avec m un paramètre réel.

Discute suivant les valeurs de m , la position du réel 1 par rapport aux solutions de l'équation (E_m) .

1.3 Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du second degré

Activité 2.2 : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du second degré

A travers cette activité, il s'agira de résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou d'une inéquation du second degré.

Consigne 2.1.18 : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation du second degré

La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs est 110.

Détermine ces entiers naturels.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

Consigne 2.1.19 : Problèmes conduisant à la résolution d'une inéquation du second degré

"Aich-Lingerie" est une société qui fabrique des sous-vêtement S et des draps D. La production journalière de l'usine est donnée par l'inégalité : $S^2 + 4S + 8D \leq 2496$.

Détermine le nombre maximum de sous-vêtements que cette usine peut produire en une journée de travail si elle ne produit pas de draps.

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

Evaluations formatives

Exercice 1

Résous dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : -x^2 + 4x + 5 = 0; \quad (E_2) : \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0; \quad (E_3) : x^2 + 2x + 5 = 0;$$

$$(E_4) : (x^2 - 5x + 6)^2 - (2x^2 - 5x + 1)^2 = 0; \quad (E_5) : \sqrt{3}x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$$

$$(I_1) : -5x^2 + 3x - 2 \geq 0; \quad (I_2) : -x^2 + 4x + 5 > 0;$$

$$(I_3) : x^2 - 8x + 16 > 0; \quad (I_4) : \frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2+x}$$

$$(I_5) : (3x + 2)^2 \leq (x^2 + 6x + 2)^2.$$

Exercice 2

Résous dans \mathbb{R} les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{3x+1} = 3-x; \quad (E_2) : 1 + \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x;$$

$$(E_3) : \sqrt{x^4 - 12x^2 + 36} = x; \quad (E_4) : \sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} = 5;$$

$$(E_5) : \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1; \quad (E_6) : \sqrt{\sqrt{x+16} - \sqrt{x}} = 2;$$

$$(E_7) : x^2 - 6x - \sqrt{x^2 - 6x - 3} = 5;$$

$$(I_1) : \sqrt{3x-4} \leq x+2; \quad (I_2) : x-5 \leq \sqrt{3x-4};$$

$$(I_3) : \sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq \sqrt{-x^2 + 7x}.$$

Exercice 3

On considère l'équation (E_m) d'inconnue x et de paramètre réel $m : (E_m) : (1-m)x^2 + (2m-3)x + m + 1 = 0$

1. (a) Détermine m pour que 2 soit une solution de (E_m) .

(b) Résous (E_1) .

2. On suppose que $m \neq 1$.

- (a) Calcule le discriminant Δ_m de (E_m) puis étudie son signe.
 - (b) Discute suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E_m) .
3. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de (E_m) lorsqu'elles existent ($x_1 < x_2$). Détermine les valeurs de m pour que :
- (a) x_1 et x_2 soit opposées.
 - (b) x_1 et x_2 soit de signes contraires.
 - (c) x_1 et x_2 soit de signes strictement négatifs.
4. Trouve une relation indépendant de m entre x_1 et x_2 .

Exercice 4

On considère le polynôme P_m de variable x défini par $P_m(x) = (2-m)x^2 - 2mx + 1$ où m est un paramètre réel. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de $P_m(x) = 0$ lorsqu'elles existent ($x_1 < x_2$).

1. Résous dans \mathbb{R} l'inéquation (I) : $-x^2 - x + 2 < 0$.
2. Résous et discute suivant les valeurs de m , l'équation $P_m(x) = 0$.
3. Etudie suivant les valeurs de m le signe de x_1 et x_2 lorsqu'elles existent.
4. Dans quels intervalles doit-on trouver les nombres réels m tels que :
 - (a) $x_1 < x_2 < -1$?
 - (b) $x_1 < -1 < x_2$?

Exercice 5

On considère l'équation paramétrique (E_m) : $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Etudie suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines x_1 et x_2 de (E_m) .
2. (a) Etablis entre les racines une relation indépendante de m .
- (b) Déduis - en la valeur de x_2 quand $x_1 = -2$.
3. Détermine m de façon que l'on ait : $5x_1 = -3x_2$.

Exercice 6

Etudie la position du réel 3 par rapport aux racines de l'équation (E_m) : $(m-1)x^2 - (2m+2)x + m + 2 = 0$.

1.4 Systèmes linéaires

Activité 2.3

Trois agents de la société de surveillance : Melon, Jean et Jacques décident de construire trois carrés distincts.

- Jean veut que la somme de la longueur d'un côté des trois carrés soit égale à 12.
- Melon veut que la somme de la longueur d'un côté de son carré et du double de celle d'un côté du carré de Jean diminuée de celle d'un côté du carré de Jacques soit égale à 6.
- Jacques quant à lui, veut que le double de la longueur d'un côté du carré de Melon augmenté de celle d'un côté du carré de Jean soit égale au triple de celle d'un côté de son carré diminué de 5.

Ces trois agents se demandent donc la valeur à attribuer à la longueur d'un côté de chaque carré pour satisfaire toutes ces conditions.

1.4.1 Définitions – Propriétés

Définition 2.1.4 : Équations linéaires et système d'équations linéaires à trois inconnues

- On appelle équation linéaire à trois inconnues x, y, z , toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des constantes réelles.
- On appelle solution d'une équation linéaire $ax + by + cz + d = 0$, tout triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de nombres réels vérifiant cette équation.
- On appelle système d'équations linéaires à trois inconnues, tout système de n équations linéaires à trois inconnues ($n \geq 2$).

Exemple : $(S_1): \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ x - 2y - 8z = 5 \\ 2x + y + z = -4 \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} x - y + 7z = -3 \\ 5x - y - z = 2 \end{cases}$

Définition 2.1.5 : Systèmes équivalents

Deux systèmes linéaires sont dits équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de validité et le même ensemble de solution.

Propriété 2.1.5

On transforme un système en un système équivalent si :

- on change, dans toutes les équations, dans l'ordre des inconnues sans changer les coefficients associés.
- on change deux lignes L_i et L_j ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- on remplace une ligne L_i par une combinaison linéaire des lignes L_i et L_j et on écrit $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ($\alpha \in \mathbb{R}^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R}^*$).

1.4.2 Résolution d'un système d'équations linéaires

Consigne 2.1.20 : Résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues

1. En désignant respectivement par x, y et z la longueur du côté du carré de Melon, Jean et Jacques :
 - (a) Traduis chacune des informations ci-dessus par une équation à trois inconnues : x, y et z .
 - (b) Déduis-en un système d'équations (S) vérifié par x, y et z .
2. On donne le système (S_1) suivant :

$$(S_1): \begin{cases} x + y + z = 12 & (L_1) \\ x + 2y - z = 6 & (L_2) \\ 2x + y - 3z = -5 & (L_3) \end{cases}$$
 - (a) En remplaçant L_2 et L_3 respectivement par les opérations $L_2 - L_1$ et $L_3 - 2L_1$, donne un système (S_2) équivalent au système (S_1) . (On désignera par L'_2 la ligne contenant la réponse de l'opération $L_2 - L_1$ et par L'_3 celle contenant la réponse de l'opération $L_3 - 2L_1$.)

(b) Justifie que le système (S_2) équivalent au système (S_3) suivant :

$$(S_3): \begin{cases} x + y + z = 12 & (L_1) \\ y - 2z = -6 & (L'_2) \\ -7z = -35 & (L''_3) \end{cases}$$

(c) Déduis-en la valeur de z à partir de L''_3 puis celle de y à partir de L'_2 et celle de x à partir de L_1 .

(d) Déduis-en l'ensemble des solutions du système (S_1) .

Information

Tu viens d'achever la résolution du système (S_1) par la méthode de **pivot de Gauss**.

3. En utilisant une technique similaire à celle précédente, résous le système :

$$(S): \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$$

Stratégie : TI : 10min TC : 20min

Vocabulaire - Notation

Dans le processus de résolution d'un système d'équations linéaires, l'usage est d'appeler les équations du système « lignes » et de désigner tout $n^{\text{ième}}$ par (L_n) .

Opérations élémentaires sur les lignes

Dans un système d'équations linéaires, on peut :

- permuter deux lignes L_i et L_j ($i \neq j$) du système. Cette opération se note $L_i \leftrightarrow L_j$;
- remplacer une ligne L_i par αL_i . Cette opération se note $L_i \leftarrow \alpha L_i$, α étant un nombre réel non nul ;
- remplacer une ligne L_i par une combinaison linéaire $\alpha L_i + \beta L_j$ de L_i et d'une autre équation L_j . Cette opération se note $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$)

Propriété 2.1.6

On ne change pas les solutions d'un système d'équations linéaires en permutant entre elles deux lignes de ce système ou en multipliant une ligne de ce système par un nombre réel non nul ou encore en ajoutant à une ligne du système une combinaison des autres lignes du système.

Méthode de Pivot de Gauss

La méthode de Pivot de Gauss consiste à utiliser les **opérations élémentaires** précédentes pour transformer un système (S) en un système triangulaire équivalent (S') dont la résolution est aisée.

On procède comme suit :

1^{ère} étape :

On choisit une ligne L_i dans laquelle le coefficient du première inconnue est non nul et on la permute au besoin avec L_1 (opération $L_1 \leftrightarrow L_j$) puis on élimine la première inconnue dans les autres ligne à l'aide de l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$).

2^{ème} étape :

On recommence le même procédé pour la deuxième inconnue avec les lignes ne comportant plus la 1^{ère} inconnue puis ainsi de suite jusqu'à obtenir un système triangulaire.

Retenons 2.1.4

• Un système de p ($p \geq 2$) équations linéaires à n inconnues ($n \geq 2$) est tout système de la forme

$$: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad \text{où les } a_{ij} \text{ et}$$

les b_i sont des constantes réelles.

• Un système est **échelonné** si et seulement si $a_{ij} = 0$ où $1 \leq j < i$.

Exemple : $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ \blacksquare + 2y + 3z = 1 \\ \blacksquare + 5y - 4z = 7 \end{cases}$ est un système échelonné.

• Un système est **triangulaire** si et seulement si il est échelonné et le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.

Exemple : $\begin{cases} 2x - 3y + z - 4t = 3 \\ \blacksquare + 2y + 3z + 3t = 5 \\ \blacksquare + 5z - 4t = 8 \\ \blacksquare + 5t = 3 \end{cases}$ est un système triangulaire.

Consigne 2.1.21 : Réinvestissement

1. Résous dans \mathbb{R}^3 , par la méthode du pivot de Gauss, les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ; \quad (S_2): \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 5y - z = -4 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 7 \end{cases}$$

2. (a) Résous dans \mathbb{R}^3 le système suivant d'inconnues

$$(x, y, z) : (S): \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z = -8 \\ -x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

(b) Déduis-en l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^3 des

$$\text{systèmes suivants : } (S_4): \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y-2} + z + 1 = 0 \\ 2x^2 - \frac{1}{y-2} + 3z = -8 \\ -x^2 + \frac{2}{y-2} + z = -2 \end{cases}$$

$$(S_5): \begin{cases} \sqrt{x} + |y| + \frac{1}{z} + 1 = 0 \\ 2\sqrt{x} - |y| + \frac{3}{z} = -8 \\ -\sqrt{x} + 2|y| + \frac{1}{z} = -2 \end{cases}$$

Stratégie : TI : 10min TG : 5min TC : 20min

1.4.3 Problèmes conduisant à un système d'équations linéaires

Consigne 2.1.22

- Détermine un nombre de trois chiffres sachant que la somme de ces chiffres est égale à 6, le chiffre des unités est égale à la somme des chiffres des dizaines et des centaines. On note de plus que ce nombre lu à l'envers est égale au nombre cherché augmenté de 198.
- Trois joueurs jouent ensemble. Elles conviennent qu'à chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Après trois parties où chacun en a perdu une, chaque joueur a un avoir de 2400 F.
Quels étaient les avoirs initiaux ?

Séquence n°2 : Statistique**2.1 Série statistique des centres et représentation graphiques****Activité 2.4**

Dans les bases de données de cette société de surveillance, les tailles en cm de certains co-équipiers de Melon se présentent comme suit :

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 165 | 177 | 174 | 168 | 165 | 171 |
| 165 | 177 | 174 | 171 | 165 | 174 |
| 174 | 174 | 174 | 174 | 174 | 174 |
| 168 | 171 | 174 | 168 | 177 | 174 |
| 165 | 180 | 177 | 168 | 180 | 171 |

Ainsi, la société vient de définir une série statistique dont elle veut mesurer la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

Consigne 2.2.1

- Reproduis puis complète le tableau suivant :

| Classes [a ; b[| [165; 170[| [170; 175[| [175; 180[| [180; 185[| Total |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|-------|
| Effectif (n_i) | | | | | |
| Fréquence (f_i) | | | | | |
| Amplitude | | | | | |
| Densité | | | | | |
| Centre (c_i) | | | | | |

Densité $d = \frac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$; Amplitude $b - a$; Centre $c_i = \frac{a+b}{2}$

- Construis l'histogramme de cette série.
- Construis le polygone des effectifs de cette série groupée en classes.

Stratégie : TC : 20min

Définition 2.2.1

- Une **série statistique** est l'ensemble des résultats d'une étude statistique, c'est-à-dire les valeurs prises par le caractère et leurs effectifs correspondants.
- La **densité d'une classe** est le quotient de l'effectif par l'amplitude de la classe.
- Une **série statistique des centres** c'est la série statistique discrète dont les modalités sont les centres d'une série regroupée en classes
- L'**effectif d'une classe** $[a; b[$ est le nombre d'individus de la population étudiée, dont les modalités appartiennent à l'intervalle $[a; b[$.
- La **fréquence d'une classe** est le quotient de son effectif par l'effectif total.
- Le **centre d'une classe** $[a; b[$ est le nombre $c = \frac{a+b}{2}$.
- L'**amplitude d'une classe** $[a; b[$ est le nombre $b - a$.

Retenons 2.2.1 : Histogramme des effectifs d'une série statistique groupée

Une série statistique groupée est représentée par un diagramme, appelé histogramme des effectifs. C'est un diagramme constitué de rectangles juxtaposés dont :

- les largeurs sont proportionnelles aux amplitudes des classes ;
- les hauteurs sont proportionnelles aux densités des classes.

Ainsi, chaque rectangle a une aire proportionnelle à l'effectif de la classe qu'il représente. L'histogramme des fréquences se définit de manière analogue.

Remarque

Lors de la construction de l'histogramme des effectifs (resp. des fréquences), si les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont évidemment proportionnelles aux effectifs (resp. aux fréquences) des classes.

2.2 Effectifs et fréquences cumulées**Consigne 2.2.2**

En référant au tableau obtenu à la consigne 2.1, réponds aux questions suivantes :

- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants de cette série statistique.
- Construis sur le même graphique le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique.

Stratégie : TI : 10min TC : 15min

Définition 2.2.2 : Effectifs et fréquences cumulés

Soit a un nombre réel.

- On appelle **effectif cumulé croissant** d'une modalité a le nombre d'individu dont l'effectif est inférieur ou égal à cette modalité.

- On appelle **effectif cumulé décroissant** d'une modalité a le nombre d'individu dont l'effectif est supérieur ou égal à cette modalité.
- On appelle **fréquence cumulée croissante** de a , le quotient de son effectif cumulé croissant par l'effectif total ;
- On appelle **fréquence cumulée décroissante** de a , le quotient de son effectif cumulé décroissant par l'effectif total.
- Le polygone des effectifs cumulés croissants (resp décroissant)** est une ligne brisée joignant les points ayant pour abscisse la borne supérieure (resp la borne inférieure) de la classe et pour ordonnée l'effectif cumulé de la classe.

2.3 Caractéristiques de position

Activité 2.5

On désire déterminer la classe modale, le mode, la moyenne et la médiane de la série statistique des centres étudiée dans l'activité 2.4

Consigne 2.2.3

1. Reproduis puis complète le tableau suivant :

| Classe | [165; 170[| [170; 175[| [175; 180[| [180; 185[| Total |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|-------|
| Effectif n_i | | | | | |
| Densité d | | | | | |
| Centre c_i | | | | | |

2. Quelle est la classe ayant le plus effectif ?

Information

Cette classe est appelée **classe modale**.

3. Quelle est le centre ayant la plus grande densité ?

Information

Ce centre est appelé **mode**

4. Calcule la moyenne \bar{x} de cette série statistique en utilisant la formule $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i \times c_i}{\sum_{i=1}^4 n_i}$

Stratégie : TI : 10min TC : 15min

Définition 2.2.3 : Classe modale et mode d'une série statistique groupée

Pour une série groupée, on appelle :

- classe modale** est la classe ayant la plus forte densité ;
- mode**, le centre de toute classe ayant la plus forte densité ;

Remarque

Lorsque les classes ont la même amplitude, alors :

- la classe modale** est la classe ayant le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence)
- le mode** est le centre de toute classe ayant le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence).

Définition 2.2.4 : Moyenne d'une série statistique groupée

On appelle **moyenne** d'une série statistique groupée ($c_i; n_i$) déficatif total N , le nombre réel \bar{x} tel que $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times c_i}{N} = \frac{n_1 \times c_1 + n_2 \times c_2 + \dots + n_p \times c_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$ avec n_i l'effectif de la classe de centre c_i et p le nombre de classes. Ou encore, $\bar{x} = \sum_{i=1}^p f_i \times c_i$ où f_i est la fréquence de la classe de centre c_i .

Consigne 2.2.4

- En utilisant le graphe des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants construit dans la consigne 2.2, donne l'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones. (On fera une projection orthogonale de ce point d'intersection sur l'axe des abscisses et lire la valeur correspondante).

Information

Cette valeur trouvée est appelée médiane

- Retrouve cette valeur par la méthode d'interpolation linéaire.

Stratégie : TI : 5min

TC : 5min

Définition 2.2.5 : Médiane – Classe médiane

La médiane M_e d'une série statistique est la valeur telle que 50% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M_e et 50% des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M_e .

La classe médiane est la classe qui contient la médiane.

Méthode de détermination de la médiane d'une série statistique

- A l'aide de la courbe (C) du polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on détermine la médiane d'une série statistique. En effet la médiane est l'abscisse du point de l'effectif cumulé croissant ou décroissant dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total N .
- La médiane peut aussi s'obtenir de manière graphique en prenant la valeur correspondant à 50% sur le polygone des fréquences cumulées croissantes.
- La valeur exacte de cette médiane se détermine par interpolation linéaire : on utilise les points alignés de l'un des polygones des effectifs cumulés. La médiane est l'abscisse M_e du point M de la courbe (C), d'ordonnée $\frac{N}{2}$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ les extrémités du segment content le point $M \left(M_e; \frac{N}{2} \right)$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est le même que celui de la droite (AB) donc on a :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{\frac{N}{2} - y_A}{M_e - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\Leftrightarrow M_e = \frac{\left(\frac{N}{2} - y_A\right)(x_B - x_A)}{y_B - y_A} + x_A$$

Consigne 2.2.5 : Application

La taille des élèves d'une classe de 1^{ère} scientifique est résumée dans le tableau suivant :

| Taille t en cm | Effectifs |
|------------------|-----------|
| [150 ; 160[| 2 |
| [160 ; 165[| 7 |
| [165 ; 170[| 10 |
| [170 ; 175[| 6 |
| [175 ; 180[| 2 |
| [180 ; 190[| 3 |

- Déterminer la classe modale ainsi que le mode de cette série statistique.
- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique en remplissant le tableau suivant :

| Taille t en cm | Nombre d'élèves de taille inférieure à t |
|------------------|--|
| 150 | 0 |
| 160 | 2 |
| 165 | |
| 170 | |
| 175 | |
| 180 | |
| 190 | |

- Détermine les coordonnées des points A et B, points extrêmes du segment contenant le point $M\left(M_e; \frac{N}{2}\right)$ puis détermine la médiane de cette série statistique.

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 15min

2.4 Paramètre de dispersion**Activité 2.6**

La société veut mesurer à présent la dispersion des valeurs qu'elle a recueillies autour de la moyenne.

Définition 2.2.6 : Variance – Ecart-type

- On appelle **variance d'une série statistique groupée** d'effectif total N , la variance de la série $(c_i; n_i)$ des centres de classes associée. La variance de la série $(c_i; n_i)$ est le nombre réel noté $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^p n_i \times (c_i - \bar{x})^2}{N} \text{ ou } V(x) = \left(\frac{\sum_{i=1}^p n_i \times c_i^2}{N} \right) - \bar{x}^2$$
- L'**écart type** de cette série est le réel, noté $\sigma(x)$ tel que $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

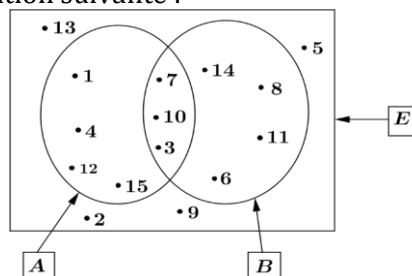
Consigne 2.2.6

Détermine la variance et l'écart-type de la série de la série de l'activité de 2.4

Stratégie : TI : 5min TC : 10min

Séquence n°3 : Dénombrement**Activité 2.7 : Vocabulaire des ensembles**

Pour évaluer sa chance de réussite à quelques jours de la compétition, Melon décide de regrouper et d'analyser les différents résultats de ses tirs pour les deux dernières séances d'entraînement. Il obtient la représentation suivante :

**3.1 Notion d'ensemble****Consigne 2.3.1**

- (a) Dresse la liste des éléments de chacun des ensembles A, B et E.
(b) Donne le nombre d'éléments de chacun des ensembles A, B et E.
- (a) Dresse la liste des éléments de E qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B.
(b) Dresse la liste des éléments de E qui appartiennent à B et n'appartiennent pas à A.
- (a) Quels sont les éléments de E qui appartiennent à la fois à A et B ?
(b) Quels sont les éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A et B ?

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 10min

Exploitation des résultats

- L'ensemble A a 7 éléments. On dit que le cardinal de l'ensemble A est 7 et on note : $\text{card } A = 7$.
- L'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B se note $A - B$ et se lit « A moins B ». On a donc $A - B = \{1 ; 4 ; 12 ; 15\}$
- L'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B se note $A \cap B$ et se lit « A inter B ». On a donc $A \cap B = \{3 ; 7 ; 10\}$
- L'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B se note $A \cup B$ et se lit « A union B ». On a donc $A \cup B = \{1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 15\}$
- Les ensembles $\{1 ; 3 ; 4 ; 7\}$ et $\{10 ; 12 ; 15\}$ constituent une partition de A car ils deux à deux disjoints et on a : $\{1 ; 3 ; 4 ; 7\} \cup \{10 ; 12 ; 15\} = A$

Définition 2.3.1

- Un **ensemble est dit fini** s'il est vide ou si on peut compter tous ses éléments
- On appelle **cardinal d'un ensemble fini** A et on note $\text{Card}(A)$, le nombre d'éléments que contient l'ensemble A.
 - Si A est vide alors $\text{Card}(A) = 0$.
 - Si $A \neq \emptyset$ et A contient n éléments, alors $\text{Card}(A) = n$
- Un **ensemble infini** est un ensemble qui n'est pas fini

Exemple : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Remarque

Dénombrer un ensemble fini A , c'est déterminer le cardinal de A .

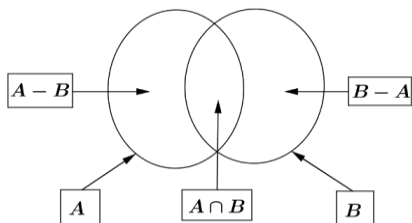
Définition 2.3.2

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

- La différence $A - B$ est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B .
- La différence symétrique de A et B notée $A \Delta B$, est la réunion des différences $A - B$ et $B - A$. On a donc $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- Un sous-ensemble de A est tout ensemble constitué d'éléments de A .
- A et B sont dits disjoints lorsque leur intersection est vide c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$
- On dit que les parties de l'ensemble A forment une partition de A si elles sont non vides, deux à deux disjointes et leurs réunion est égale à A .

Propriété 2.3.1

Soit A et B deux ensembles non vides.



- $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$
- $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$

Propriété 2.3.2

Soit E un ensemble fini et $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ des ensembles formant une partition de E . On a :

$$Card(E) = \sum_{i=1}^n Card(E_i)$$

Consigne 2.3.2 Cardinal de la réunion de deux parties

- (a) En considérant la représentation de l'activité 2.7, donne le cardinal de chacun des ensembles : A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$.

(b) Calcule $card(A) + card(B) - card(A \cap B)$ puis compare-le à $card(A \cup B)$

- Soit E et F deux ensembles finis.

Démontre que $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$ (Tu pourras écrire $E \cup F = (E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E)$)

Stratégie : TI : 7min TC : 15min

Propriété 2.3.3

Soit A et B deux ensembles finis.

- Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est un ensemble fini.
- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- Si $A \subset B$, on appelle **complémentaire de A dans B** l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A . On le note \bar{A} ou C_B^A .
- Pour toute partie A d'un ensemble fini E , on a :

- $card(A) \leq card(B)$ et si de plus $card(A) = card(B)$ alors $A = B$.
- $card(\bar{A}) + card(A) = card(E)$
- Toute réunion finie d'ensembles finis est un ensemble fini.

Consigne 2.3.3 : Consolidation

Sur 83 agents de cette société de surveillance, 62 s'entraînent au tir, 64 s'entraînent au grimpé et 48 font les deux sports d'entraînement.

- Détermine le nombre d'agents qui font au moins un des deux sports d'entraînement.
- Détermine le nombre d'agents qui :
 - s'entraînent uniquement au tir.
 - s'entraînent uniquement au grimpé.
 - font un seul sport d'entraînement.
 - ne font aucun sport d'entraînement.

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 15min

3.2 Produit cartésien

Activité 2.8

Pour accéder au test d'entraînement au tir, chaque agent doit procéder au lancer à la fois de deux dés de couleurs différentes : un rouge et un noir. Le dé rouge a six faces numérotées de 1 à 6 et le dé noir a quatre faces respectivement marquées avec les lettres a ; b ; c et d . Le résultat d'un lancer est le couple formé par le nombre et la lettre inscrits sur la face cachée de chaque dé. L'agent qui obtient un couple formé d'un nombre impair et d'une voyelle accède directement au test. On désigne par A l'ensemble des nombres se trouvant sur les faces du dé rouge et par B celui des lettres se trouvant sur les faces du dé noir.

Consigne 2.3.4 : Produit cartésien de deux ensembles finis

- Écris tous les couples de résultats possibles ; x étant un élément de l'ensemble A et y un élément de l'ensemble B . Pour cela, complète le tableau suivant :

| $(x; y)$ | a | b | c | d |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | $(1; a)$ | | | |
| 2 | | | | $(2; d)$ |
| 3 | | | | |
| 4 | | $(4; b)$ | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | $(6; c)$ | |

Information : L'ensemble de ces couples se note : $A \times B$.

- (a) Donne $card(A)$, $card(B)$ et $card(A \times B)$.
(b) Calcule $card(A) \times card(B)$. Que constates-tu ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

Définition 2.3.3 : Produit cartésien de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle produit

cartésien de A par B, l'ensemble des couples $(a; b)$ tel que $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est noté $A \times B$ et on lit : « A croix B »

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A; b \in B\}$$

Remarque

Soit A, B et C trois ensembles finis non vides.

- Lorsque $A \neq B$ alors $A \times B \neq B \times A$
- $A \times B \times C = \{(a; b; c) / a \in A; b \in B \text{ et } c \in C\}$
- Le produit cartésien de n ensembles finis non vides $E_1; E_2; \dots; E_n$ se note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

Propriété 2.3.4

- Soit A et B deux ensembles finis non vides, on a : $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$
- Soit $E_1; E_2; \dots; E_n$, n ensembles finis non vides, on a : $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = cardE_1 \times cardE_2 \times cardE_n$
- Soit E un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel non nul. Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p et on a : $card(E^p) = (cardE)^p = n^p$

Consigne 2.3.5 Application

1. Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?
2. Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Stratégie : TI : 7min TG : 3min TC : 12min

3.3 p-listes

Consigne 2.3.6 : Découverte

On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1. Donne trois triplets constitués des éléments de A deux à deux distincts ou non.

Information

On dit que ces triplets formés à partir des éléments de A deux à deux distincts ou non sont des 3 – lites de l'ensemble A

2. Combien de triplet d'éléments de A peux-tu former au total ?

Définition 2.3.4 : p-listes ou p-uplets

Soit E un ensemble non vide et p un entier naturel non nul.

On appelle p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E, toute suite $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ de p éléments de E deux à deux distincts ou non

Exemple

Soit l'ensemble $A = \{1; 3; 6; 9\}$

- $(3; 9); (3; 3); (1; 6)$ sont des 2-listes de A

- $(6; 9; 1); (1; 1; 3); (9; 9; 9)$ sont des 3-listes de A
- $(1; 1; 1; 3; 6; 9); (3; 3; 3; 3; 3; 3); (6; 9; 6; 9; 6; 9)$ sont des 6-listes de A

Propriété 2.3.5

1. Soit E un ensemble non vide de n éléments ($cardE = n$) et p un entier naturel. Le nombre total de p -listes d'éléments de E est n^p
2. Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est égal à n^p

Remarque

- Un tirage **successif avec remise** de p objets est une p -liste.
- Dans un tirage successif avec remise, les objets ont un **ordre** d'arrivée.
- Faire un tirage successif avec remise de p objets revient à remplir p casiers sachant qu'un même objet **peut être répété**.

Consigne 2.3.7 : Consolidation

1. Détermine le nombre de numéros à 08 chiffres qu'on peut former sur un cadran de téléphone.
2. Combien de numéro à huit chiffres commençant par 67 peut-on former sur un cadran de téléphone ?
3. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 1 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 10min

3.4 Arrangement et permutation

Activité 2.9

Pour diriger cette société de surveillance, 4 postes doivent être occupés par des agents. Suite à l'annonce, 10 volontaires se sont présentés pour ces 4 postes. Par ailleurs, les règles imposent qu'un agent choisi doit gérer un et un seul poste. Melon veut trouver alors le nombre de bureaux possibles de 4 membres qu'on peut former avec ces 10 volontaires.

Consigne 2.3.8 : Découverte

1. Détermine le nombre de possibilités qu'il y a pour choisir :
 - (a) le premier membre de ce bureau ;
 - (b) le deuxième membre de ce bureau ;
 - (c) le troisième membre de ce bureau ;
 - (d) le quatrième membre de ce bureau.
2. Détermine alors le nombre de bureaux de 04 membres qu'on peut former.

Exploitation de résultats

- Ce bureau constitué de 4 membres deux à deux distincts choisi parmi les 10 volontaires est un arrangement de 4 membres (ou encore un 4-arrangement) de l'ensemble des 10 volontaires.

- Le nombre de bureaux possibles de représentant le nombre de 4-arrangement possibles des 10 volontaires est $10 \times 9 \times 8 \times 7$ et ce nombre se note A_{10}^4 et lu « arrangement de 4 dans 10 » ou « A, 10, 4 »

Définition 2.3.5

Soit E un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$.

On appelle **arrangement** de p éléments de E (ou p -arrangement d'éléments de E), tout p -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples :

Soit l'ensemble $A = \{0 ; 1 ; 3 ; 6 ; 9\}$

- $(3 ; 9) ; (1 ; 6) ; (9 ; 1)$ sont des 2-arrangements de A
- $(6 ; 9 ; 1) ; (0 ; 1 ; 3) ; (1 ; 0 ; 6)$ sont des 3-arrangements de A
- $(1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 9)$ n'est pas un 6-arrangement de A car les éléments de A constituant ce 6-uplet ne sont pas deux à deux distincts.

Propriété 2.3.6

- Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté A_n^p et lu « A, n, p ». On a : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$
Exemple : $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
- n et p étant des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, nombre d'injections d'un ensemble A de p éléments dans un ensemble E de n éléments est égal à A_n^p

Remarque

- Un tirage **successif sans remise** de p objets est un p -arrangement.
- Dans un arrangement, les éléments sont **ordonnés** et sont **deux à deux distincts**.
- Le produit de p entiers naturels consécutifs dont le plus grand est n est égal à A_n^p .
- Si $p > n$, il est impossible de trouver p éléments deux à deux distincts.

Consigne 2.3.9 : Application

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 5min

Définition 2.3.6

- Pour tout entier naturel n non nul, le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ est appelé "**factorielle n**" et on note $n!$.

Exemple : $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

- Par convention $0! = 1$.

Propriété 2.3.7

- Soit n et p des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.
 - $n! = n \times (n-1)!$
 - $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Par convention, $A_n^0 = 1$ et $A_n^1 = n$.

Consigne 2.3.10 : Approfondissement

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| A | B | C |

Le clavier ci-contre de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

- Combien de codes différents peut-on former ?
- Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
- Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
- Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
- Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

Permutation**Consigne 2.3.11**

En considérant la situation de l'activité 2.9 précédent, détermine le nombre de bureaux qu'on peut former s'ils doivent comporter 10 membres.

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

Exploitation des résultats

- Ce bureau constitué de 10 membres deux à deux distincts choisi parmi les 10 volontaires est une permutation de l'ensemble des 10 volontaires.
- Le nombre de bureaux possibles dans ce cas représentant le nombre de permutations possibles des 10 volontaires est :
 $A_{10}^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$

Consigne 2.3.12 : Application

- Le groupe de 18 élèves d'une classe de première D doit s'inscrire dans l'ordre au concours "**Miss Mathématiques**". Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ?
- Les nombres 4, -2 et 1 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

3.5 Anagramme d'un mot**Consigne 2.3.13**

1. Trouve tous les mots qui ont un sens ou non que l'on puisse former avec toutes les lettres de « CAS »

Information

Ces mots trouvés par permutation des lettres sont des anagrammes du mot « CAS »

2. Trouve tous les mots qui ont un sens ou non que l'on puisse former avec toutes les lettres de « TATA »

Information

Ces mots trouvés par permutation des lettres sont des anagrammes du mot « TATA »

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Exploitation des résultats

- Les mots CAS; CSA; ACS ; ASC ; SAC et SCA obtenus par permutation des lettres sont les anagrammes du mot « CAS ».
- Le mot « CAS » a 3 lettres distinctes et le nombre de permutation qu'on peut avoir avec ces lettres est $3! = 6$. Ceci explique pourquoi le nombre d'anagramme du mot « CAS » vaut 6.
- Les mots TATA ; TTAA ; TAA ; ATAT ; AATT et AATT obtenus par permutation des lettres sont les anagrammes du mot « TATA ».
- Le mot « TATA » a 4 lettres parmi lesquelles les lettres T et A sont présentes 2 fois chacune. Dans ce cas, une permutation entre les deux « T » ou les deux « A » renvoie un même mot. Ainsi, pour enlever ces répétitions, le nombre d'anagramme fait $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

Définition 2.3.7 : Anagramme et le nombre d'anagramme d'un mot

- On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le composent.
- Le nombre d'anagramme d'un mot est alors le nombre de mots différents ayant un sens ou non qu'on peut former avec toutes les lettres de ce mot. Si le mot est composé de n lettres deux à deux distinctes, le nombre d'anagramme est $n!$ Mais si parmi ces n lettres, on a n_1 lettres identiques ; n_2 autres lettres identiques ; ... ; n_p autres lettres identiques, alors le nombre d'anagramme est :
$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}$$

Remarque

- Le nombre de permutation de n objets parmi lesquels n_1 sont identiques ; n_2 autres sont identiques ; ... ; n_p sont identiques, est :
$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}$$
- Dans un tirage successif avec ou sans remise d'objets, le nombre d'ordre d'arrivée des objets est le nombre de permutations de ces objets.

Consigne 2.3.14 : Approfondissement

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes des mots ANAGRAMME ; PATRICE et SPECTACULAIRES ?
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
 - (a) commençant et finissant par une consonne ;
 - (b) commençant et finissant par une voyelle ;
 - (c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
 - (d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

3.6 Combinaison

Activité 2.10

On considère l'ensemble $E = \{a ; b, c ; d ; e\}$. On désire trouver une formule permettant d'avoir le nombre tous les sous-ensembles à 3 éléments de E qu'on peut former.

Consigne 2.3.15

1. (a) Dresse la liste de tous les sous-ensembles à 4 éléments de E qu'on peut former.
(b) Combien sont-ils au total ?
2. Combien de 3-arrangements de E peut-on avoir
3. Calcule $\frac{A_5^3}{3!}$ et compare le résultat à celui du résultat de la question 1.(b).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

- Les sous-ensembles de E à 3 éléments formés sont des combinaisons à 3 éléments (ou des 3-combinaisons) de E .
- Le nombre de 4-combinaisons possibles de E est $\frac{A_5^4}{4!}$. Ce nombre est noté C_5^4 et se lit « combinaison de 3 dans 5 » ou tout simplement « C, 5, 3 »

Définition 2.3.8

Soit E un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$

On appelle **combinaison** de p éléments de E (ou p -combinaison d'éléments de E), tout sous-ensemble de E contenant p éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments noté C_n^p est tel que :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

C_n^p est lu "combinaison de p dans n "

Exemple : $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

Remarque

- Un tirage **simultané** de p objets est une p -combinaison.
- Dans une combinaison, les éléments **ne sont pas ordonnés** et sont **deux à deux distincts**.

Consigne 2.3.16 : Propriété

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n - 1$.

Démontre que :

- $C_n^n = 1$ et $C_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$ et $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^{n-p} = C_n^p$
- $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Stratégie : TI : 7min TC : 15min

Propriété 2.3.9

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n - 1$

- $C_n^n = 1$ et $C_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$ et $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^{n-p} = C_n^p$
- $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Consigne 2.3.17 : Application

Dans une classe de 30 élèves dont 16 garçons, on veut former un comité de 5 membres.

- Combien de comités possibles peut-on former ?
- Quel est le nombre de comité comportant :
 - exactement 3 filles ?
 - au plus 2 filles ?
 - au moins 1 garçons ?

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

3.7 Triangle de Pascal – Formule de binôme de Newton

Définition 2.3.9 : Triangle de Pascal

On appelle Triangle de Pascal un tableau à double entrée dans lequel sont placés les C_n^p où p est le numéro de la colonne et n le numéro de la ligne.

| | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-----|
| $\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| 0 | $C_0^0 = 1$ | | | | | | | | |
| 1 | $C_1^0 = 1$ | $C_1^1 = 1$ | | | | | | | |
| 2 | $C_2^0 = 1$ | $C_2^1 = 2$ | $C_2^2 = 1$ | | | | | | |
| 3 | $C_3^0 = 1$ | $C_3^1 = 3$ | $C_3^2 = 3$ | $C_3^3 = 1$ | | | | | |
| 4 | $C_4^0 = 1$ | $C_4^1 = 4$ | $C_4^2 = 6$ | $C_4^3 = 4$ | $C_4^4 = 1$ | | | | |
| 5 | $C_5^0 = 1$ | $C_5^1 = 5$ | $C_5^2 = 10$ | $C_5^3 = 10$ | $C_5^4 = 5$ | $C_5^5 = 1$ | | | |
| 6 | $C_6^0 = 1$ | $C_6^1 = 6$ | $C_6^2 = 15$ | $C_6^3 = 20$ | $C_6^4 = 15$ | $C_6^5 = 6$ | $C_6^6 = 1$ | | |
| 7 | $C_7^0 = 1$ | $C_7^1 = 7$ | $C_7^2 = 21$ | $C_7^3 = 35$ | $C_7^4 = 35$ | $C_7^5 = 21$ | $C_7^6 = 7$ | $C_7^7 = 1$ | |
| : | | | | | | | | | |

Triangle de Pascal

Propriété 2.3.10

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$$

C'est la formule du **binôme de Newton**.

Les coefficients C_n^p s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Exemple :

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= \sum_{p=0}^4 C_4^p x^p y^{4-p} \\ &= C_4^0 x^0 y^4 + C_4^1 x^1 y^3 + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x^3 y^1 + C_4^4 x^4 y^0 \\ &= y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 \end{aligned}$$

Consigne 2.3.18 : Consolidation

- Développe, réduis et ordonne suivant les puissances décroissantes de x le nombre $(x + 1)^5$
- (a) Résous dans \mathbb{N}^* l'équation : $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$
 (b) Résous dans \mathbb{N} l'équation : $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

Comment savoir si l'on doit utiliser des p -listes, des p -arrangements ou des p -combinaisons ?

Quand faut-il utiliser des p -listes, des arrangements, ou des combinaisons ?

Pour cela, on doit répondre aux questions suivantes :

- Les éléments peuvent-ils être répétés ?
- L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

Suivant les réponses obtenues aux questions ci-dessus on a les cas suivants :

| | | |
|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| Critères | Possibilité de répétition des éléments | Les éléments sont distincts |
| On tient compte de l'ordre | On utilise des p -listes | On utilise des p -arrangement |
| On ne tient pas compte de l'ordre | X | On utilise des p -combinaison |

Dans le cas des tirages

Soit n et p deux entiers naturels :

Les tirages de p boules dans une urne qui contient n , modélisent de nombreux problèmes dénombrement. Le tableau ci-dessous dresse un bilan des types de tirage.

| | | |
|---|-----------------------------------|-------------------|
| Modélisations | Outils à utiliser | Nombre de tirages |
| Tirage successif avec remise (l'ordre compte) | p-liste | n^p |
| Tirage successif sans remise (l'ordre compte) | p-arrangement | A_n^p |
| Tirage simultané (l'ordre ne compte pas) | p-combinaison | C_n^p |

Propriété 2.3.11 : Nombre de parties d'un ensemble

Le nombre de parties d'un ensemble fini non vide de n éléments est 2^n .

Remarque

Quand on utilise plusieurs arrangements ou combinaisons, faut-il les additionner ou les multiplier ?

Ceci dépend de la situation. Concrètement :

- Si les différentes étapes sont reliées par la conjonction "et" : on multiplie
- Si les différentes étapes sont reliées par la conjonction "ou" : on additionne

Consigne 2.3.19 : Consolidation

Une urne contient 5 boules noires ; 7 boules vertes et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard 4 boules de cette urne.

1^{er} cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement sans remise

1. Détermine le nombre de tirages possibles.
2. Détermine le nombre de tirages comportant :
 - (a) 2 boules noires et 2 boules rouges.
 - (b) 2 boules noires et 2 boules rouges dans cet ordre.
 - (c) exactement 3 boules vertes.
 - (d) une boule verte et 2 boules rouges.
 - (e) des boules unicolores.
 - (f) des boules de différentes couleurs.
 - (g) au moins 2 boules noires.
 - (h) au plus 3 boules vertes.
 - (i) 3 boules noires et 1 boule rouge dans cet ordre.

2^{ème} cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement avec remise

Reprends les mêmes questions précédentes.

3^{ème} cas : on suppose que les tirages s'effectuent simultanément

Reprends les mêmes questions précédentes.

Stratégie : TI : 15min TG : 7min TC : 20min

Evaluations formatives

Exercice 1

Une classe de 30 élèves, 12 filles et 18 garçons, doit élire un comité composé d'un président, un vice-président et un secrétaire.

1. Combien de comités peut-on constituer ?
2. Combien de comités peut-on constituer sachant que le secrétaire est une fille ?
3. Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?
4. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est un garçon et le secrétaire une fille ?
5. Quel est le nombre de comités pour lesquels le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 2

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes

1. De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
2. Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec :
 - (a) uniquement des hommes ;
 - (b) des personnes de même sexe ;

(c) au moins une femme et au moins un homme.

Exercice 3

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice 4

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.

Détermine le nombre de tirages permettant d'obtenir

1. le tirage est effectué avec remise.
 - (a) 4 boules jaunes ;
 - (b) 4 boules vertes ;
 - (c) 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
 - (d) 3 jaunes et une verte ;
 - (e) 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
 - (f) deux jaunes et deux vertes ;
 - (g) au moins 3 vertes ;
 - (h) au plus 3 jaunes.
2. le tirage est effectué sans remise. Reprendre les questions précédentes

Exercice 5

Adoukè et **Adouni** font partie d'un club de 18 personnes.

On veut constituer un bureau de 5 personnes

1. Quel est le nombre de bureaux possibles à former ?
2. Quel est le nombre de bureaux possibles où **Adoukè** est présente ?
3. **Adoukè** et **Adouni** ne pouvant pas se supporter, quel est le nombre de bureaux où **Adoukè** et **Adouni** ne se retrouvent pas ensemble ?

Exercice 6

On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

- (a) 4 boules jaunes ;
- (b) 4 boules vertes ;
- (c) 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
- (d) 3 jaunes et une verte ;
- (e) 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
- (f) deux jaunes et deux vertes ;
- (g) au moins 3 vertes ;
- (h) au plus 3 jaunes.

On distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

Exercice 7

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice 8

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1. On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer le nombre de possibilité :

- (a) de ne tirer que 3 jetons verts ;
 (b) de ne tirer aucun jeton vert
 (c) de tirer au plus 2 jetons verts ;
 (d) de tirer exactement 1 jeton vert.
2. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions 1.(a), 1.(b), 1.(c) et 1.(d).

Séquence n°4 : Fonctions et applications

4.1 Généralité sur les fonctions

4.1.1 Fonction et ensemble de définition d'une fonction

Définition 2.4.1 : Fonction et ensemble de définition d'une fonction

1. On appelle fonction, toute correspondance f définie d'un ensemble non vide A vers un ensemble non vide B qui, à chaque élément de A associe au plus un élément de l'ensemble B . On note :
- $$f: A \rightarrow B$$
- $$x \mapsto f(x)$$
- avec A l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivé.
2. f étant une fonction définie de A vers B , on appelle ensemble de définition de f , généralement noté D_f , l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B .
- $$D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe dans } B\}$$

Retenons

Soit P et Q deux fonctions polynômes et D_f l'ensemble de définition de f . f une fonction définie d'une partie A de \mathbb{R} vers \mathbb{R} :

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

- Si f est sous la forme $f(x) = P(x)$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$
- Si f est sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / Q(x) \neq 0\}$.
- Si f est sous la forme $f(x) = \sqrt{P(x)}$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / P(x) \geq 0\}$.
- Si f est sous la forme $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$.
- Si f est sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / Q(x) > 0\}$.
- Si f est sous la forme $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, alors on a :
 $D_f = \{x \in A / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$.

Consigne 2.4.1

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 5x - 12} ; \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x+4}}{x^2 - 9}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad u: \mathbb{R} \rightarrow [-2; +\infty[$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 4} ; \quad x \mapsto x^2 - 3x$$

$$v: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x \mapsto \frac{x-3}{x-1}$$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

4.1.2 Restriction et prolongement

Consigne 2.4.2 : Restriction et prolongement

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g:]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x + 1|} \quad x \mapsto x - 1$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f et g .
2. Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. Compare $f(x)$ et $g(x)$ pour tout réel x de $] - 1; +\infty[$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

Pour tout $x \in] - 1; +\infty[$, $f(x) = g(x)$. On dit que la fonction g est la **restriction** de f sur $] - 1; +\infty[$, et f est le **prolongement** de g sur \mathbb{R} .

Définition 2.4.2 : Restriction et prolongement

Soit f une fonction de A vers B ; E une partie non vide de l'ensemble de définition de la fonction f .

On appelle **restriction** à E de la fonction f , l'application g de E dans B définie par $g(x) = f(x)$. On note :

$$g: E \rightarrow B$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

- g est une restriction de f à E ;
- f est un prolongement de g à A .

Exemple :

Soit la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x|x|$. La restriction de f à $] - \infty; 0]$ est la fonction :

$$g:] - \infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x^2$$

et donc f est un prolongement de g à \mathbb{R} .

Consigne 2.4.3 : Application

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{|x| - 3} ; \quad x \mapsto \sqrt{x - 3}$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Détermine le domaine de définition des fonctions f , g et h .
2. Détermine la restriction de f :
 (a) à l'intervalle $]3; +\infty[$
 (b) à l'intervalle $] - \infty; -3[$
3. Démontre que f est un prolongement de g à \mathbb{R} .
4. Détermine la restriction de h à $\left[-4; \frac{3}{2}\right]$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

4.1.3 Comparaison de deux fonctions

Consigne 2.4.4 : Comparaison de deux fonctions

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - x - 1 \quad \text{et} \quad x \mapsto -x^2 + 2x + 1$$

- Détermine le domaine de définition des fonctions f et g .
- Calcule $f(x) - g(x)$ pour tout réel x .
- (a) Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur \mathbb{R} .
(b) Déduis-en la comparaison de f et g sur \mathbb{R} .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

Définition 2.4.3 : Comparaison de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies sur un ensemble E .

- On dit que sur E , f est **supérieure ou égale** à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \geq g(x)$.
On note : sur E , $f \geq g$.
- On dit que sur E , f est **inférieure ou égale** à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \leq g(x)$.
On note : sur E , $f \leq g$.
- On dit que sur E , f est **strictement supérieure** à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) > g(x)$.
On note : sur E , $f > g$.
- On dit que sur E , f est **strictement inférieure** à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) < g(x)$.
On note : sur E , $f < g$.
- On dit que les fonctions f et g sont **égales**, lorsqu'ils ont même domaine de définition \mathcal{D} et pour $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) = g(x)$.
On note : sur \mathcal{D} , $f = g$.

Méthode de comparaison de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle définie sur I . Pour comparer f et g sur I , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur I .

- Si $f(x) - g(x) > 0 \forall x \in I$ alors $f > g$ sur I .
- Si $f(x) - g(x) < 0 \forall x \in I$ alors $f < g$ sur I .
- Si $f(x) - g(x) = 0 \forall x \in I$ alors $f = g$ sur I .

Interprétation géométrique

f et g sont deux fonctions de variables réelles définies sur E et (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

- Si $f > g$ sur E , alors on dit que la courbe (C_f) est au dessus de la courbe (C_g) sur E ;
- Si $f < g$ sur E , alors on dit que la courbe (C_f) est en dessous de la courbe (C_g) sur E ;
- Si $f = g$ sur E , alors on dit que les courbes (C_f) et (C_g) se coupent en un point.

4.1.4 Majorant, minorant, maximum et minimum d'une fonction**Définition 2.4.4 : Minorant, majorant d'une fonction**

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie sur un ensemble E et A une partie de E .

- f est dite **minorée** sur l'ensemble A si et seulement si : $\forall x \in A, \exists m \in \mathbb{R} / m \leq f(x)$. Dans ce cas, le réel m est appelé **minorant** de f sur A .
- f est dite **majorée** sur l'ensemble A si et seulement si : $\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R} / f(x) \leq M$. Dans ce cas, le réel M est appelé **majorant** de f sur A .
- f est dite **bornée** sur l'ensemble A si et seulement si f est **à la fois minorée et majorée** sur A c'est-à-dire que : $\forall x \in A, \exists (m; M) \in \mathbb{R}^2 / m \leq f(x) \leq M$.

Définition 2.4.5 : Minimum, maximum relatifs d'une fonction

Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'ensemble de définition D_f et a un élément de D_f .

- On dit que f admet un **minimum relatif en a** s'il existe un intervalle ouvert K contenant a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur $K \cap D_f$.
Autrement
On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur un intervalle I si et seulement si, $\forall x \in I, f(x) \leq M$ et $\exists x_0 \in I / f(x_0) = M$.
- On dit que f admet un **maximum relatif en a** s'il existe un intervalle ouvert K contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur $K \cap D_f$.
Autrement
On dit que m est un **minimum** de la fonction f sur un intervalle I si et seulement si, $\forall x \in I, m \leq f(x)$ et $\exists x_0 \in I / f(x_0) = m$.
- On dit que f admet un **extrémum relatif en a** lorsque f admet un minimum relatif ou un maximum relatif en a .

Consigne 2.4.5 : Consolidation

Soit la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^2+2}$

- Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4 - \frac{7}{x^2+2}$
- (a) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 4$.
(b) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \frac{1}{2}$.
- Précise un minorant et un majorant de f et donne si possible le minimum et le maximum de f .
- Peut-on dire que f est bornée ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

4.1.5 Opérations sur les fonctions**Définition 2.4.6 : Somme, produit et quotient de fonctions**

Soit f et g des fonctions numériques d'ensemble de définition respectif D_f et D_g .

- On appelle **somme** de f et de g , la fonction numérique : $x \mapsto f(x) + g(x)$. Cette fonction est notée $f + g$. Son ensemble de définition D_{f+g} est tel que : $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- On appelle **produit** de f et de g , la fonction numérique : $x \mapsto f(x) \times g(x)$. Cette fonction est

notée fg . Son ensemble de définition D_{fg} est tel que : $D_{fg} = D_f \cap D_g$.

- On appelle quotient de f par g , la fonction numérique : $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$. Cette fonction est notée $\frac{f}{g}$. Son ensemble de définition $D_{f/g}$ est tel que : $x \in D_{f/g} \Leftrightarrow \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$

Consigne 2.4.6 : Composée de deux fonctions

Melon désire effectuer certaines opérations sur les fonctions numériques à variable réelle. Pour cela, il considère les fonctions suivantes :

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = -3x^2$ et $h(x) = -3(2x + 1)^2$

- Complète les tableaux suivants :

| | |
|---------|--------|
| f | |
| x | $f(x)$ |
| -1 | |
| 0 | |
| 2 | |
| β | |

| | |
|------------|--------|
| g | |
| x | $g(x)$ |
| $f(-1)$ | |
| $f(0)$ | |
| $f(2)$ | |
| $f(\beta)$ | |

| | |
|---------|--------|
| h | |
| x | $h(x)$ |
| -1 | |
| 0 | |
| 2 | |
| β | |

- Déduis-en une comparaison de :
 - $g[f(-1)]$ et $h(-1)$
 - $g[f(0)]$ et $h(0)$
 - $g[f(\beta)]$ et $h(\beta)$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

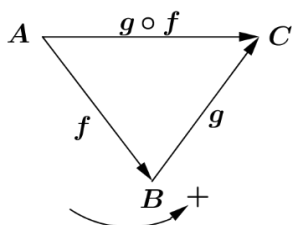
On remarque que $g[f(-1)] = h(-1)$; $g[f(0)] = h(0)$ et $g[f(\beta)] = h(\beta)$ et donc pour tout réel x , $g[f(x)] = h(x)$. On dit que la fonction h est la composée de la fonction f suivie de la fonction g .

Définition 2.4.7 : Composée de deux fonctions

A, B et C sont des parties non vides de \mathbb{R} , f est une fonction numérique de A vers B ayant D_f pour ensemble de définition et g est une fonction numérique de B vers C ayant D_g pour ensemble de définition.

On appelle **composée de f suivi de g** la fonction de A vers C notée $g \circ f$, lu « g rond f » et définie par $x \mapsto g[f(x)]$. Son ensemble de définition $D_{g \circ f}$ est tel que : $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

Illustration



Consigne 2.4.7 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 2$; $x \mapsto \frac{3x-2}{2x}$; $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$

- Détermine le domaine de définition de la fonction $x \mapsto (g \circ f)(x)$.
(b) Détermine une expression de $(g \circ f)(x)$
- Calcule $h \circ f$; $k \circ f$; $f + g$; gh et $\frac{g}{k}$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 16min

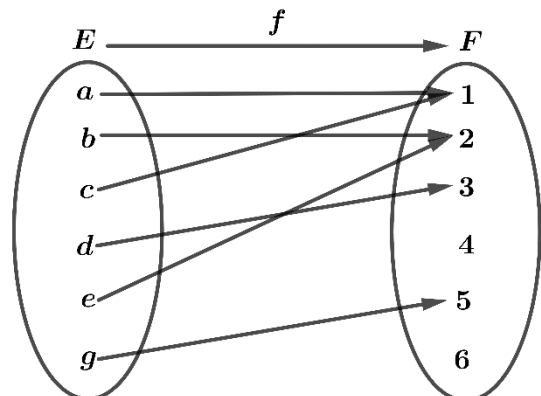
4.2 Applications

Retenons

Soit f une fonction définie de E vers F. f est une application si chaque élément de E associe un et un seul élément de F.

Autrement dit, une fonction est une application si et seulement si son domaine de définition est égal à son ensemble de départ.

Exemple :



f une application

Consigne 2.4.8 : Consolidation

On considère les fonctions ci-dessous :

$f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{2x^2+1}{x-3}$; $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

Vérifie si ces fonctions sont des applications

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Consigne 2.4.9 : Commutativité ou non de la composée d'applications - Associativité de la composée d'applications

On considère les applications suivantes définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1$; $g(x) = 3x^2$ et $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- Détermine $f \circ g$ et $g \circ f$ puis compare-les.
- Détermine $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ puis compare-les.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.4.1

Soit les applications suivantes : $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$ et $h: C \rightarrow D$.

Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont définies de A vers B ($h \circ (g \circ f): A \rightarrow B$ et $(h \circ g) \circ f: A \rightarrow B$) et on a : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

On dit que la composée des applications est associative

Remarque

$g \circ f \neq f \circ g$. **On dit que la composée des applications distinctes n'est pas commutative**

$g \circ f = f \circ g$ si f et g sont identiques.

4.2.1 Application injective

Propriété 2.4.2

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

On dit que f est **injective** (ou f est une **injection**), lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E .

Autrement dit :

- f est **injective** si et seulement si :
($\forall (x_1, x_2) \in E^2$, on a : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)
Ou encore
- f est **injective** si et seulement si :
($\forall (x_1, x_2) \in E^2$, on a : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

Consigne 2.4.10 : Application

Montre que les fonctions suivantes sont des applications

$$\text{injectives : } \begin{array}{l} f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+2}{x-2} \end{array} ; \begin{array}{l} g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

4.2.2 Application surjective

Propriété 2.4.3

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

On dit que f est **surjective** (ou f est une **surjection**), lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E .

f est **surjective** $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$

Consigne 2.4.11 : Application

Montre que l'application suivante est surjective :

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$$

Stratégie : TI : 5min TG : 3min TC : 7min

4.2.3 Application bijective

Propriété 2.4.4

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

On dit que f est **bijective** (ou f est une **bijection**), lorsque tout élément de F a un unique antécédent par f dans E .

f est **bijective** $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E / f(x) = y$

Remarque

Soit f une application de E vers F

- f est **bijective** si et seulement si f est à la fois **injective et surjective**.
- Si f est bijective, alors elle admet une bijection réciproque notée f^{-1} et est définie de F vers E .
- Si f est bijective, alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Consigne 2.4.12 : Application

On considère l'application suivante :

$$g: \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \rightarrow \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] \\ x \mapsto -x^2 + x$$

Montre que l'application g est bijective puis définis sa bijection réciproque g^{-1} .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

4.2.4 Application identique

Consigne 2.4.13

On considère la fonction : $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$

- Justifie que f est une application
- Montre que l'application f est bijective puis définis sa bijection réciproque f^{-1} .
- (a) Explicite $(f \circ f^{-1})(x)$ pour tout x élément d'un ensemble D_1 à préciser.
(b) Explicite $(f^{-1} \circ f)(x)$ pour tout x élément d'un ensemble D_2 à préciser.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.4.5

- Si f est une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et f^{-1} sa bijection réciproque alors $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de B .
On note $f^{-1} \circ f = Id_A$ et $f \circ f^{-1} = Id_B$
- E étant un ensemble non vide, on appelle l'application identique de E , l'application $x \mapsto x$. Elle est notée Id_E :

$$Id_E: E \rightarrow E \\ x \mapsto x$$

Remarque

Soit f une bijection de E vers F et g une application de F vers E .

- Si $f \circ g = Id_F$ ou $g \circ f = Id_E$ alors $g = f^{-1}$ (g est la bijection réciproque de f)
- On a : $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$

4.2.5 Propriétés

Consigne 2.4.14

Soit f une application de E vers F et g une application de F vers E .

- Démontre que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Démontre que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Dédus-en que $g \circ f$ est bijective et montre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (On pourra montrer que $(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = Id_C$)

Stratégie : TI : 10min

TC : 20min

Propriété 2.4.6

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections est une surjection.
- La composée $f \circ g$ de deux bijections f et g est une bijection et sa bijection réciproque est $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Si f est une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et g une bijection de l'ensemble B sur l'ensemble C, alors $g \circ f$ est une bijection de l'ensemble A sur l'ensemble C.

Consigne 2.4.15 : Représentation graphique de la courbe d'une fonction et de la courbe de sa réciproque

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit f une bijection de E vers F ; E et F étant des parties de \mathbb{R} et (Δ) la droite d'équation $y=x$. On désigne par (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') les représentations graphiques respectives de f et f^{-1} . Soit les points $A(a; b)$ et $A'(b; a)$.

- (a) On suppose que $a = b$. Démontre que A et A' sont symétriques par rapport à la droite (Δ).
(b) On suppose maintenant que $a \neq b$. Soit $M(x; y)$ un point du plan.
Démontre que $M \in (\Delta) \Leftrightarrow MA=MB$.
- Démontre que A appartient à (\mathcal{C}) si et seulement si A' appartient à (\mathcal{C}'). (On pourra utiliser $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$).
- Que peut-on dire alors de (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') par rapport à (Δ) ?

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.4.7 : Représentation graphique de la courbe d'une fonction et de la courbe de sa réciproque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

La droite d'équation $y = x$ est appelée la première bissectrice

Consigne 2.4.16 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit l'application $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

- Justifie que l'application f est bijective puis détermine sa bijection réciproque f^{-1} .
- (a) Construis la courbe représentative (\mathcal{C}) de f dans le repère (O, I, J).
(b) Dédus-en la construction sur le même graphique de la courbe représentative (\mathcal{C}') de f^{-1} .

Stratégie : TI : 10min

TC : 15min

Consigne 2.4.17 : Approfondissement

Soit l'application $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$
 $x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

- Ecris l'application h comme la composée de deux applications f et g .
- (a) Montre que f est bijective et détermine sa bijection réciproque.
(b) Montre que g est bijective et détermine sa bijection réciproque.
(c) Dédus-en que h est une bijection de \mathbb{R}_+ dans $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ et détermine sa bijection réciproque.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

4.2.6 Image directe – Image réciproque d'un ensemble par une application

Consigne 2.4.18 : Image directe – Image réciproque

On considère l'application f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = -3x + 1$ et l'ensemble $A =]-8; -2]$.

- Démontre que $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in]-8; -2]$

Information : On dit que $] - 8; - 2]$ est l'image directe de $] 1 ; 3[$ par f et on note : $f(] 1 ; 3[) =] - 8; - 2]$

- Démontre que $f(x) \in A \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{3}; 0 \right]$

Information : On dit que $\left] -\frac{2}{3}; 0 \right]$ est l'image réciproque de $] 1 ; 3[$ par f et on note : $f^{-1}(] 1 ; 3[) = \left] -\frac{2}{3}; 0 \right]$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Définition 2.4.8 : Image directe – Image réciproque d'un ensemble par une application

Soit f une application de E vers F ; A et B deux ensembles tels que $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On appelle **image directe** de A par f , l'ensemble de toutes les images des éléments de A par f . On la note $f(A)$ et on a :

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

- On appelle **image réciproque** de B par f , l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de B. On la note $f^{-1}(B)$ et on a :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Remarque

La définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application ne nécessite pas forcément la bijection de cette application.

Propriété 2.4.8

Soit f une application d'un ensemble A vers un ensemble B. f est **surjective** si et seulement si $f(A) = B$.

Consigne 2.4.19 : Consolidation

On considère les applications suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x \quad ; \quad x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$$

- Détermine l'image directe de $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ par f .

2. Détermine l'image réciproque de $[1; 4]$ par g .

3. (a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, h(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

(b) Détermine $h^{-1}(-\infty; -1]$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Evaluations formatives

Exercice 1

On considère les applications suivantes :

$f:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$ et $g:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$
 $x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ et $x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$ et

$h:]1; +\infty[\rightarrow]1; +\infty[$
 $x \mapsto x^2$

- Détermine $f^{-1}([2; 4])$ et $g^{-1}(\{9\})$.
- Montre que f est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et détermine sa bijection réciproque.
- (a) Vérifie que $\forall x \in]1; +\infty[, g(x) = [f(x)]^2$.
 (b) Déduis-en que g est une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]1; +\infty[$ et détermine sa bijection réciproque.

Exercice 2

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

(a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (b) $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto n + 1$ $x \mapsto n + 1$ $x \mapsto x^2$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2. On considère l'application $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

(a) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

(b) Montre que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

(c) Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[-1; 1]$ est une bijection.

Exercice 3

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :

(a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x + 2$.

(b) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

(c) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ et $g(x) = x^2 + 2$

2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme des fonctions fg , $g + f$, f/g et g/f pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :

(a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x + 2$.

(b) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

(c) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ et $g(x) = x^2 + 2$

3. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f , g et h définies de la façon suivante :

(a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x - 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = x + 3$

Melon voudrait tracer une courbe qui permettra de voir l'évolution de la longueur des deux carrés construits. Pour cela il se rend compte qu'il a besoin des notions de limite, de continuité et de dérivation afin de bien construire cette courbe.

5.1 Limite finie d'une fonction en un point

Consigne 2.5.1 : Découverte de la notion de limite et continuité

On considère la fonction suivante : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 4$

- Détermine le domaine de définition D_f de la fonction f .
- Reproduis et complète le tableau suivant :

| | | | | |
|--------|------|-------|-------|-------|
| x | 2,99 | 2,999 | 3,001 | 3,002 |
| $f(x)$ | | | | |
- Pour x prenant des valeurs voisines de 3, $f(x)$ est proche de quelle valeur ?
- Compare cette valeur trouvée dans la question n°3 à $f(3)$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

- On constate que lorsque x prend dans D_f des valeurs de plus en plus proches de 3, les images $f(x)$ se rapprochent de 10. On dit alors que le réel 10 est la limite de f en 3 et on écrit : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$ ou $\lim_3 f = 10$
- Aussi, $2,3 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ alors on dit que la fonction f est continue en 3.

Définition 2.5.1 : Limite d'une fonction en un point

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , contenant a , sauf peut-être en a .

Dire que la fonction f admet le réel l pour limite en a , signifie intuitivement que $f(x)$ peut être rendu aussi voisin que l'on veut de l , pourvu que x soit aussi voisin de a . On note donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou $\lim_a f = l$

Propriété 2.5.1 : Unicité de la limite

- Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a , alors cette limite est égale à $f(a)$.
- Lorsqu'une fonction admet une limite en a , alors cette limite est unique.

Définition 2.5.2 : Continuité d'une fonction en un point

Une fonction est dite **continue en x_0** lorsqu'elle est définie en x_0 et admet une limite en x_0 .

Autrement dit :

(f est continue en x_0) $\Leftrightarrow (x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0))$

Consigne 2.5.2 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Vérifie si les fonctions f et g sont continues en 1 et en 2.

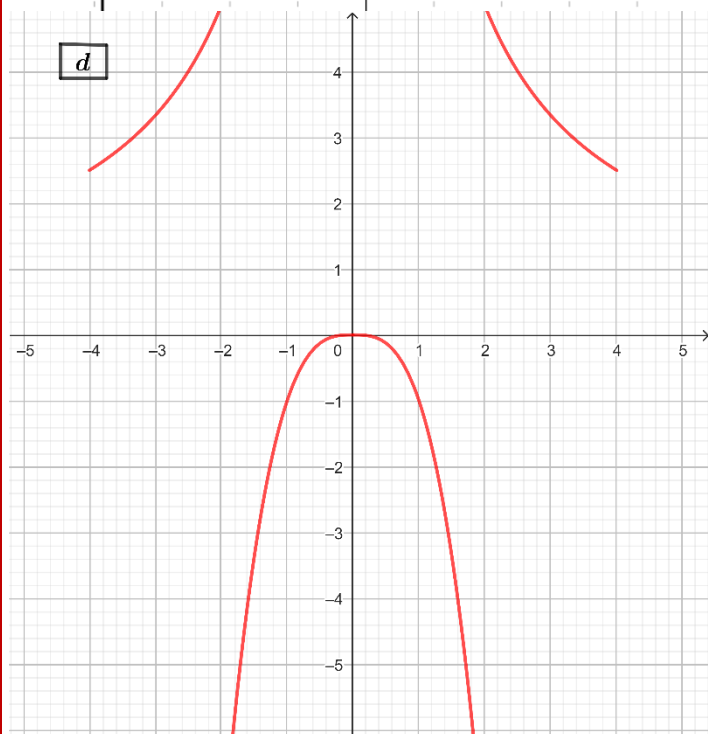
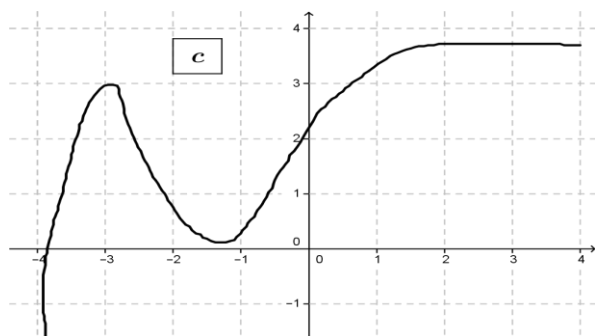
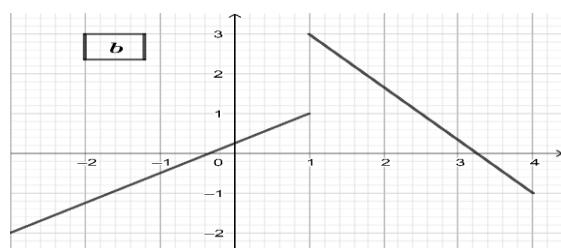
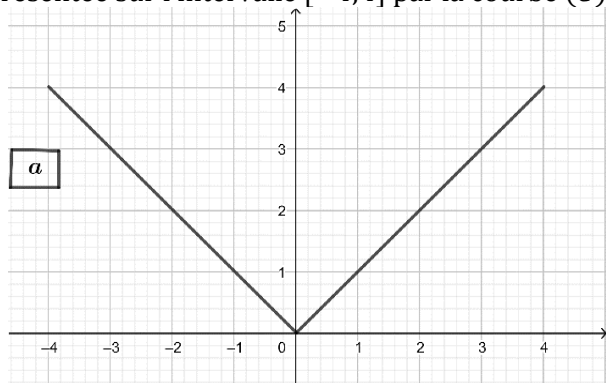
Séquence n°5 : Limites et continuités

Activité 2.11

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

Consigne 2.5.3 : Reconnaissance graphique d'une fonction continue en un point

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est représentée sur l'intervalle $[-4;4]$ par la courbe (C).



1. Indique dans quel(s) cas, la courbe (C) de la fonction f peut-être tracée sans lever le crayon.

Information : Dans ce(s) cas, on dit que la fonction f est continue sur $[-4;4]$.

2. Lorsque la fonction f n'est pas continue, précise l'abscisse x_0 d'un point où le crayon est levé.

Information : Dans ce cas on dit que la fonction f n'est pas continue en x_0

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 2.5.2

- Les fonctions élémentaires suivantes : $x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) ; $x \mapsto ax$; $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout point de \mathbb{R}
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en tout élément de leur ensemble de définition.

Propriété 2.5.3

La somme, le produit ou le quotient de deux quelconques fonctions élémentaires définies ci-dessus est continue en tout point de son ensemble de définition

Propriété 2.5.4

Les fonctions polynômes, rationnelles, tangente et cotangente sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Propriété 2.5.5

Soit a un nombre réel ; K un intervalle ouvert contenant a ; f une fonction définie sur $K - \{a\}$ et non définie en a .

Si g est une fonction continue en a qui coïncide avec f sur $K - \{a\}$, alors f admet une limite en a égale à $g(a)$.

Consigne 2.5.4 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$; $g(x) = x - 2$ et $h(x) = \frac{\cos x}{x^2}$.

1. Détermine les domaines de définition des fonctions f , g et h .
2. Justifie que h est continue sur son domaine de définition.
3. (a) Justifie que les fonctions f et g coïncident sur un intervalle que tu préciseras.
(b) Etudie la continuité de g en -3 .
(c) Déduis-en $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.5.6

Soit f et g deux fonctions ; a, l et l' des réels.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = l + l'$ et $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = l \times l'$
- Si de plus $l' \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} [\beta f(x)] = \beta \times l$ et $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \beta] = l + \beta$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = l^n, n \in \mathbb{N}^*$

Propriété 2.5.7

- Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I tel que $f \leq g$ sur I . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$
- Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I et telle que sur I on ait $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si f et h admettent la même limite l en a , c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors g admet également la même limite l en a , c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$. Cette propriété est connue sous le nom du **théorème des gendarmes**

Consigne 2.5.5 : Consolidation

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = x^2 \sin(x)$ et $g(x) = 2x - \sin x$

1. Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$ et $2x - 1 \leq g(x) \leq 2x + 1$.
2. Déduis-en la limite de f en 0 et celle de g en $+\infty$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Propriété 2.5.8

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a) \neq 0$, est une fonction continue en a .

Consigne 2.5.6

On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x + 2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. (a) Détermine $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ pour $x \in [2; +\infty[$.
(b) Détermine $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ pour $x \in]-\infty; 2[$.
(c) Compare les résultats obtenus dans les questions 2.(a) et 2.(b).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

- Pour $x \in [2; +\infty[$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 est la limite de f à droite en 2 ou encore la limite de f lorsque x tend vers 2 par valeurs supérieures. On la note : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ou $\lim_{x > 2} f(x)$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 9$
- Pour $x \in]-\infty; 2[$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 est la limite de f à gauche en 2 ou encore la limite de f lorsque x tend vers 2 par valeurs

inférieures. On la note : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ou $\lim_{x < 2} f(x)$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

Définition 2.5.3 : Limite à gauche et limite à droite

Soit a et l des nombres réels ; f une fonction d'ensemble de définition D_f

- On dit que f admet une limite à gauche en a égale à l , lorsque la restriction de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet en a une limite égale à l et on note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$
- On dit que f admet une limite à droite en a égale à l , lorsque la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ admet en a une limite égale à l et on note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

Propriété 2.5.9

Soit a et l des nombres réels ; f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a .

Dans le cas où f n'est pas définie en a , f admet une limite l en a , si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à l
Autrement dit :

Dans le cas où f n'est pas définie en a ;

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \right)$$

Dans le cas où f est définie en a , f admet une limite en a , si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égale à $f(a)$.

Autrement dit :

Dans le cas où f est définie en a ;

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \right)$$

Définition 2.5.3 : Continuité d'une fonction en un point

Soit a un nombre réel et f une fonction d'ensemble de définition D_f

- f est continue à gauche en a si et seulement si $a \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en a si et seulement si $a \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue en a si et seulement si $a \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Consigne 2.5.7 : Consolidation

On considère la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = 2x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ et} \\ \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x - b & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1$$

1. Etudie la continuité de g en 0.
2. Détermine les réels a et b pour que f soit continue en 0.

Stratégie : TI : 7min TG : 5min TC : 10min

Propriété 2.5.10

La fonction $x \mapsto |x|$ (fonction « valeur absolue ») est continue en tout élément de \mathbb{R} .

Propriété 2.5.11

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a .
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de 0 est une fonction continue en a .

Définition 2.5.4 : Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D .

On dit que f est continue sur un intervalle ouvert I contenu dans D , si elle est continue en tout point de I .

Propriété 2.5.12

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

- f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle.
- f est continue sur l'intervalle $[a; b[$ si elle est continue à droite en a et continue sur l'intervalle $]a; b[$.
- f est continue sur l'intervalle $]a; b]$ si elle est continue à gauche en b et continue sur l'intervalle $]a; b[$.
- f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ si elle est continue à droite en a ; continue à gauche en b et continue sur l'intervalle $]a; b[$.

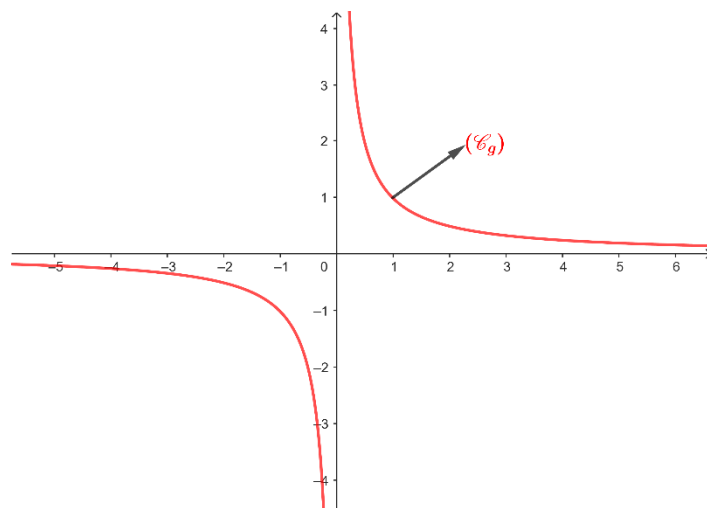
5.2 Extension de la notion de limite

5.2.1 Limite infinie en un point

Consigne 2.5.8

Melon s'intéresse à la courbe (C_g) de la fonction

$g(x) = \frac{1}{x}$ représentée ci-dessous.



1. Détermine le domaine de définition de g .
2. (a) Complète le tableau suivant :

| | | | | | | |
|--------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| x | -10^{-6} | -10^{-5} | -10^{-4} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $g(x)$ | | | | | | |

(b) Que remarque-tu de la valeur de $g(x)$ lorsque x se rapproche de plus en plus de 0 ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

- On constate que lorsque x prend dans D_g des valeurs de plus en plus proche de 0 et inférieures à 0, $g(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes. On dit donc que $-\infty$ est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures ou que $-\infty$ est la limite de $g(x)$ à gauche en 0 et on écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.
- On constate que lorsque x prend dans D_g des valeurs de plus en plus proche de 0 et supérieures à 0, $g(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus grandes. On dit donc que $+\infty$ est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures ou que $+\infty$ est la limite de $g(x)$ à droite en 0 et on écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Retenons

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Définition 2.5.5 : Limite infinie en un point

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f , a un nombre réel.

- Lorsque la restriction de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet $+\infty$ (resp $-\infty$) pour limite en a , on dit que $+\infty$ (resp $-\infty$) est la limite à gauche de f en a . On écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ (resp $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$)
- Lorsque la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ admet $+\infty$ (resp $-\infty$) pour limite en a , on dit que

$+\infty$ (resp $-\infty$) est la limite à droite de f en a . On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (resp $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$)

Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère. Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) et a un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ ou bien $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

Ou bien $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe (C_f).

Propriété 2.5.13

Soit a et b un nombre réel et n un entier naturel non nul.

• $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ avec n un nombre pair ou impair

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{1}{x+5} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^7} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)^8} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{b}{x-a} = \begin{cases} -\infty & \text{si } b < 0 \\ +\infty & \text{si } b > 0 \end{cases}$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2}{x-3} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{b}{x-a} = \begin{cases} -\infty & \text{si } b > 0 \\ +\infty & \text{si } b < 0 \end{cases}$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-5}{x+1} = +\infty$

Propriété 2.5.14

Soit a et l deux nombres réels, f et g des fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $l > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $l < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = -\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et $l > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = -\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et $l < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = +\infty$

Consigne 2.5.9 : Consolidation

Calcule les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^6}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-4)^3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+4}{x+1}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

5.2.2 Limite finie ou non d'une fonction en l'infini

Consigne 2.5.10

On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ de représentation graphique (C_g) dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Détermine le domaine de définition de g .
2. Complète le tableau suivant :

| | | | | | | |
|--------|--------|-------|------|-----|------|-------|
| x | -10000 | -1000 | -100 | 100 | 1000 | 10000 |
| $g(x)$ | | | | | | |

3. Que constates-tu la valeur de $g(x)$ lorsque x tend vers les grandes valeurs négatives ?
4. Que constates-tu la valeur de $g(x)$ lorsque x tend vers des grandes valeurs positives ?

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Exploitation des résultats

- On constate que lorsque x prend dans D_g de grandes valeurs négatives, $g(x)$ prend des valeurs très proche de 0. On dit donc que 0 est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$
- On constate que lorsque x prend dans D_g de grandes valeurs positives, $g(x)$ prend des valeurs très proche de 0. On dit donc que 0 est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Retenons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère. Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) et b un nombre réel.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (resp $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), on dit

que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (resp au voisinage de $-\infty$)

Propriété 2.5.16

Soit n un entier naturel non nul et k un nombre réel.

| | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ |

Propriété 2.5.17

Soit f une fonction numérique.

- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]-\infty; a[$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ alors
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]-\infty; a[$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Consigne 2.5.11 : Consolidation

On considère les fonctions suivantes $f(x) = x + \cos x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2} \sin x$

1. Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $x - 1 \leq x - \cos x$ et $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \sin x \leq \frac{1}{x^2}$
2. Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

5.2.3 Opérations sur les limites

Les tableaux suivants donnent les limites en x_0 des fonctions $f + g$; $f \times g$ et $\frac{1}{g}$ connaissant les limites en x_0 des fonctions f et g .

Propriété 2.5.18 : Limite de la somme de deux fonctions

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| l | l' | $l + l'$ |
| $+\infty$ | l' | $+\infty$ |
| $-\infty$ | l' | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

FI = Forme Indéterminée

Propriété 2.5.19 : Limite du produit de deux fonctions

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$ |
|---------------------------------|---------------------------------|--|
| l | l' | $l \times l'$ |
| $+\infty$ | $l' (l' \neq 0)$ | $\begin{cases} +\infty \text{ si } l' > 0 \\ -\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$ |
| $-\infty$ | $l' (l' \neq 0)$ | $\begin{cases} -\infty \text{ si } l' > 0 \\ +\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 | FI |

FI = Forme Indéterminée

Propriété 2.5.20 : Limite de l'inverse d'une fonction

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ |
|---------------------------------|--|
| l | $\frac{1}{l} (l \neq 0)$ |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 |
| 0 et $f(x) > 0$ | $+\infty$ |
| 0 et $f(x) < 0$ | $-\infty$ |

Propriété 2.5.21: Limite du produit de deux fonctions

| $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ | $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ |
|---------------------------------|---------------------------------|--|
| l | l' | $\frac{l}{l'}$ |
| $+\infty$ | $l' (l' \neq 0)$ | $\begin{cases} +\infty \text{ si } l' > 0 \\ -\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$ |
| $-\infty$ | $l' (l' \neq 0)$ | $\begin{cases} -\infty \text{ si } l' > 0 \\ +\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$ |
| 0 | $l' (l' \neq 0)$ | 0 |
| l | 0 | ∞ |
| 0 | 0 | FI |
| $+\infty$ | $+\infty$ | FI |
| $-\infty$ | $-\infty$ | FI |
| $+\infty$ | $-\infty$ | FI |
| $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

FI = Forme Indéterminée

NB : Ces propriétés restent vraies pour les limites en $+\infty$; en $-\infty$ et en x_0 par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures.

Remarque

Les propriétés précédentes ne couvrent pas tous les cas.

On appelle **forme indéterminée**, les cas où les propriétés ci-dessous ne permettent pas de conclure.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ prend la **forme indéterminée** $\frac{0}{0}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$ prend la **forme indéterminée** $0 \times (+\infty)$ ou $0 \times (-\infty)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ prend la **forme indéterminée** $\frac{+\infty}{+\infty}$ ou $\frac{-\infty}{+\infty}$ ou $\frac{+\infty}{-\infty}$ ou $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ou bien $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ prend la **forme indéterminée** $(+\infty - \infty)$

Dans chacun des cas, il s'agira de rechercher directement la limite éventuelle. Trouver, celle-ci s'appelle **lever l'indétermination**.

Retenons

Au total, les **différentes formes indéterminées** sont : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$ et $-\infty + (+\infty)$ ou $+\infty + (-\infty)$. Lorsqu'on se

retrouve dans l'un de ces cas, on procède à des transformations appropriées (**factorisation, multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par l'expression conjuguée du numérateur ou du dénominateur ou du numérateur et du dénominateur à la fois, division euclidienne**, etc) avant de pouvoir déterminer les limites.

Remarque

- Pour calculer la limite en x_0 de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.
- Pour déterminer la limite en x_0 d'une fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on peut mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur puis simplifier le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $(x - x_0)$ et calculer la limite lorsque x tend vers x_0 de l'expression obtenue après simplification.

Retenons

IRI ORO est le **ROI** de **RIO**

ROI signifie $\frac{\text{Réel} \neq 0}{0} = \infty$;

RIO signifie $\frac{\text{Réel}}{\infty} = 0$

IRI signifie $\frac{\infty}{\text{Réel}} = \infty$

ORO signifie $\frac{0}{\text{Réel} \neq 0} = 0$

Propriété 2.5.22

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ($b \geq 0$) et $\lim_{x \rightarrow b} \sqrt{x} = c$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{g(x)} = c$$

(Valable aussi en ∞)

Autrement

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = c$

(Valable aussi en ∞)

Consigne 2.5.12 : Consolidation

Calcule les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \right) \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} \right)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 - 3x + 3}{9 - x^2} \right) \quad L_4 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x - 2} \right)$$

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{3x-3}}{\sqrt{x+1}-2} \right) \quad L_6 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \right)$$

Stratégie : TI : 15min

TC : 30min

Propriété 2.5.23

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

- La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est égale à celle du quotient du monôme de plus haut degré de P par le monôme de plus haut degré de Q.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^n}$$

Consigne 2.5.13 : Consolidation

Calcule les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 + 2) \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 3x + 1)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 3} \right) \quad L_4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 3}{3 - x^3} \right)$$

$$L_5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad L_6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3x - 1})$$

$$L_7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}) \quad L_8 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x} \right)$$

$$L_9 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{2x^2 + 3x - 1})$$

Stratégie : TI : 15min

TC : 40min

Les limites remarquables des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(ax)}{x} \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(ax)}{x} \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(ax)}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \right) = \frac{a^2}{2}$$

Consigne 2.5.14 : Consolidation

Calcule les limites suivantes

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{\sin 3x} \right) \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{\tan 5x} \right)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x} \right) \quad L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin^2 x} \right)$$

Stratégie : TI : 10min

TC : 20min

Evaluations formatives

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, étudie la limite de la fonction f en x_0 .

1. $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; $x_0 = -2$

3. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$; $x_0 = 1$

4. $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$; $x_0 = 2$

5. $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$

Exercice 2

On considère les fonctions f , g , h et u définies

comme suit : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 3x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 7 & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) = 3x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} h(x) = \frac{x+4}{2x+3} & \text{si } x \leq 0 \\ h(x) = x^2 - x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ u(x) = l & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Détermine le domaine de définition des fonctions f , g , h et u .
- Etudie la continuité de f et g en 2.
- Etudie la continuité de h en 0 suivant les valeurs du nombre réel a .
- Détermine la valeur du nombre réel l pour laquelle u est continue en 1.

Exercice 3

Calcule les limites suivantes :

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 1) ; & L_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x + 2) \\ L_3 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3x - 2) ; & L_4 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6 - x + 1) \\ L_5 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) ; & L_6 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{E(x)}{x} \right) \\ L_7 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 5}} - x) ; & L_8 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) \\ L_9 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \right) ; & L_{10} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ L_{11} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{|x-2|}{x-2} \right) ; & L_{12} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x^2-4} \right) \\ L_{13} &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}{x+2} \right) ; & L_{14} &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2+x-1}{x^2+x+2} \right) \\ L_{15} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4x+1}-5}{x+\sqrt{x+2}-4} \right) ; & L_{16} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right) \\ L_{17} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1+\sqrt{x^2-1}}{x-1} \right) & L_{18} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+7}-5}{x^2-1} \right) \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $D=[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

- Démontre que, pour tout x de D , on a :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$
- Démontre que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.
- En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 5

$$\text{Soit } f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$$

Etudie la continuité de f en $\frac{1}{2}$ et en 5.

Exercice 6

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Détermine D_g et D_f .

- Etudie la continuité de g en 0 ; en -1 ; en -2 et en 1.
- Etudie la continuité de f en 0.

Séquence n°6 : Dérivation-Etude de fonction

6.1 Dérivation

6.1.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Activité 2.12

Pour apprécier les chances de réussite de Melon, Pierre se préoccupe d'étudier la variation du nombre N_1 des carrés qu'il doit atteindre au tir par rapport à la variation de sa distance x du dispositif. À cet effet, il définit la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 4$ et il pose $T_2(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ avec 2 dam la distance maximale de chaque agent tireur de son dispositif.

Consigne 2.6.1 : Taux de variation d'une fonction et dérivabilité en un point.

- Détermine le domaine de définition D_f de f .
- Détermine le domaine de définition D de la fonction T_2 .
- Détermine l'expression de T_2 pour tout $x \in D$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} T_2(x)$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

- La fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ définie sur $D_f - \{2\}$ est appelée : **fonction taux de variation de f en 2**.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 4$ et $4 \in \mathbb{R}$; alors on dit que f est dérivable en 2. Le nombre réel 4 est appelé **nombre dérivé de f en 2** et on le note $f'(2)$. Ainsi, $f'(2) = 4$.

Définition 2.6.1 : Fonction taux de variation en un point

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f . On appelle fonction taux de variation de f en a , la fonction notée T_a et définie sur $D_f - \{a\}$ par :

$$T_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Définition 2.6.1 : Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K contenant le nombre réel a .

On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie l en a .

Cette limite est notée $f'(a) = l$ et est appelée : **le nombre dérivé de f en a** .

Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère. Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) .

Si f est dérivable en a , alors la courbe (C_f) admet au point $M(a; f(a))$ une tangente (T) dont le coefficient directeur est $f'(a)$. L'équation de cette tangente est :
 $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Consigne 2.6.2 : Consolidation

On considère la fonction f définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{-2x+8}{x-2}$

1. Etudie la dérivabilité de f en -1 .
2. Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Définition 2.6.2 : Dérivabilité à gauche – Dérivabilité à droite

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et a un nombre réel.

- On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a si D_f contient un intervalle de la forme $]a - b; a]$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Le nombre réel l est appelé : **nombre dérivé de f à gauche en a et est noté $f'_g(a)$** . Donc on a : $f'_g(a) = l$.
- On dit que la fonction f est dérivable à droite en a si D_f contient un intervalle de la forme $[a; a + b[$ avec $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$ avec $l' \in \mathbb{R}$. Le nombre réel l' est appelé : **nombre dérivé de f à droite en a et est noté $f'_d(a)$** . Donc on a : $f'_d(a) = l'$.

Propriété 2.6.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et a un élément de K .
 f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a et à droite en a et les nombres dérivés à gauche et à droite en a sont égaux.

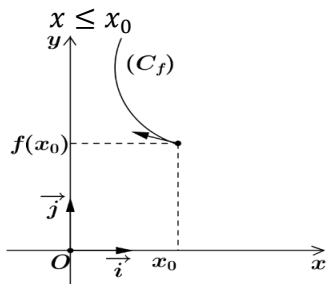
Autrement dit :

$$(f \text{ est dérivable en } a) \Leftrightarrow \left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a)$$

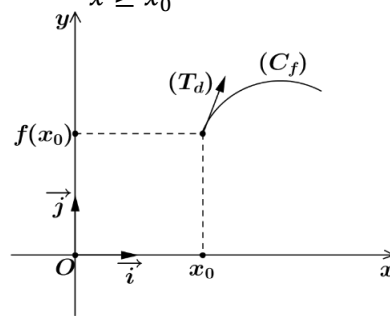
Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle K ; x_0 un élément de K et (C_f) sa courbe représentative.

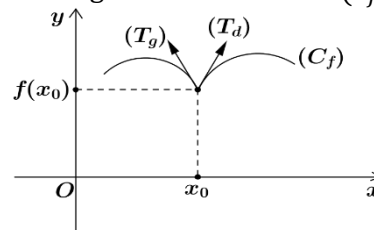
- Si f est dérivable à gauche en x_0 , alors sa courbe admet au point $M(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente (T_g) de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ définie par :
 $(T_g): \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$



- Si f est dérivable à droite en x_0 , alors sa courbe admet au point $M(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente (T_d) de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ définie par :
 $(T_d): \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

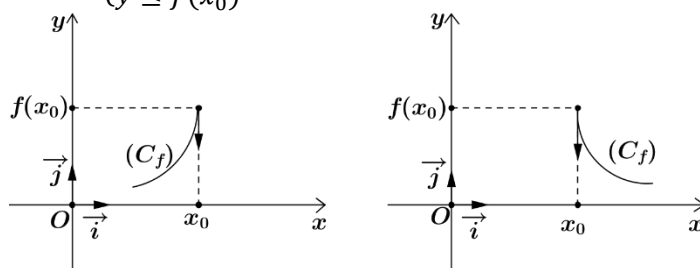


- Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors le point $M(x_0; f(x_0))$ est appelé point anguleux de la courbe (C_f)

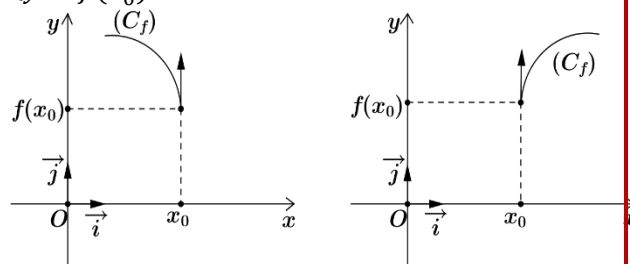


- Lorsque la limite à gauche ou à droite en x_0 de la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est infinie, la fonction f n'est pas dérivable en x_0 . Dans ce cas, la courbe (C_f) admet au point $M(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale.

- ✓ Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, alors la courbe (C_f) admet au point $M(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale définie par :
 $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$



- ✓ Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors la courbe (C_f) admet au point $M(x_0; f(x_0))$ une demi-tangente verticale définie par :
 $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$



Consigne 2.6.3 : Application

Soit g la fonction numérique de variable réelle définie

$$\text{par } \begin{cases} g(x) = x + \sqrt{2x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x \sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Etudie la dérivabilité de g en 0.
2. Donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.6.2

Si une fonction est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point.

Remarque

La réciproque de cette propriété n'est pas toujours vraie c'est-à-dire que : **toute fonction continue en un point n'est pas forcément dérivable en ce point.**

Consigne 2.6.4 : Application

On considère la fonction f définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x|$

Etudie la dérivabilité de f en 0.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Définition 2.6.3 : Ensemble de dérivabilité d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f .

L'ensemble de dérivabilité de f est l'ensemble des nombres réels de D_f en lesquels la fonction f est dérivable.

Définition 2.6.4 : Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

- On dit que f est dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ lorsqu'elle est dérivable en tout point de l'intervalle $]a; b[$.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle $[a; b[$ lorsqu'elle est sur l'intervalle $]a; b[$ et dérivable à droite en a .
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle $]a; b]$ lorsqu'elle est sur l'intervalle $]a; b[$ et dérivable à gauche en b .
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ lorsqu'elle est sur l'intervalle $]a; b]$; dérivable à droite en a et dérivable gauche en b .

6.1.2 Fonction dérivée

Définition 2.6.5 : Fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un ensemble I . On appelle fonction dérivée (ou dérivée première) de f , la fonction notée f' définie de I vers \mathbb{R} qui à chaque élément x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$.

Propriété 2.6.3 : Dérivée des fonctions élémentaires

| Fonction f | Fonction dérivée f' | Ensemble de dérivabilité |
|---|---------------------------------|--|
| $x \mapsto k; k \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto ax; a \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto a$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto x^n; n \in \mathbb{Q}^*$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n > 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } n < 0 \end{cases}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ | \mathbb{R}^* |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}; n \in \mathbb{Q}^*$ | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ | \mathbb{R}^* |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto \cos x$ | $x \mapsto -\sin x$ | \mathbb{R} |
| $x \mapsto \tan x$ | $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ |

On a : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Propriété 2.6.4

Soit I un intervalle de \mathbb{R}

- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
- Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de son ensemble de définition.
- Si f est dérivable sur I et $f(x) \neq 0 \forall x \in I$, alors $|f|$ est dérivable sur I .
- S'il existe $x_0 \in I$ tel que $|f(x_0)| = 0$, alors il faut étudier la dérivabilité de $|f|$ en x_0 .
- Si f est dérivable sur I et $f(x) > 0 \forall x \in I$, alors \sqrt{f} est dérivable sur I .
- S'il existe $x_0 \in I$ tel que $\sqrt{f(x_0)} = 0$, alors il faut étudier la dérivabilité de \sqrt{f} en x_0 .

Propriété 2.6.5

- La somme de deux fonctions dérivables sur un intervalle K est une fonction dérivable sur K .
- Le produit de deux fonctions dérivables sur un intervalle K est une fonction dérivable sur K .
- Le quotient d'une fonction f dérivable sur un intervalle K par une fonction g dérivable sur l'intervalle K telle $\forall x \in K, g(x) \neq 0$ est une fonction dérivable sur K .

Propriété 2.6.6 : Dérivées des fonctions usuelles

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K

| Fonctions | Dérivées |
|--|---|
| $ku, k \in \mathbb{R}$ | ku' |
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |
| $u^n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $n \times u' \times u^{n-1}$ |
| \sqrt{u} avec $u(x) > 0, \forall x \in K$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u(ax + b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ | $au'(ax + b)$ |

| | |
|----------------|------------------------|
| $u \circ v$ | $v' \times u' \circ v$ |
| $\sin(ax + b)$ | $a \cos(ax + b)$ |
| $\cos(ax + b)$ | $-a \sin(ax + b)$ |

Consigne 2.6.5 : Consolidation

Dérive chacune des fonctions ci-dessous sur leurs domaines de dérivabilité I

- $f(x) = 4x^6 - 2x^4 + x + 2$; $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{4x-3}{-5x+2}$; $I = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$
- $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+2}$; $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 7}$; $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = (-3x^2 + 4)\sqrt{3x^2 - 2x + 7}$; $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = (7x^5 - 2x^3 - 3x + 1)^3$; $I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \cos(-3x + 1)$; $I = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

Consigne 2.6.6 : Dérivée seconde d'une fonction

On considère la fonction $f(x) = 6x^7 + 3x^2 + x - 1$
Détermine la dérivée seconde de f

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

Définition 2.6.6 : Dérivée seconde d'une fonction

Soit f une fonction et I un intervalle.

- Si f est dérivable sur I , sa dérivée f' est appelée dérivée première de f .
- Si f' est dérivable sur I , sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f .

6.2 Etude de fonction**Retenons**

L'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet d'étudier le sens de variation de cette fonction.

Propriété 2.6.7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

Remarque

Si la dérivée de la fonction garde un signe constant sur un intervalle donné sauf peut-être en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction est strictement monotone sur cet intervalle.

Propriété 2.6.8 : Extrémum relatif d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et x_0 un élément de $]a; b[$.

- Si f' s'annule en x_0 et change de signe, alors f admet un **extrémum relatif** (minimum relatif ou maximum relatif) en x_0 .

✓ Minimum relatif

| | | | |
|---------|-----|-------|-----|
| x | a | x_0 | b |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | |

$f(x_0)$ est le minimum relatif de f sur l'intervalle $]a; b[$

✓ Maximum relatif

| | | | |
|---------|-----|-------|-----|
| x | a | x_0 | b |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | | |

$f(x_0)$ est le maximum relatif de f sur l'intervalle $]a; b[$

- Si la dérivée première f' s'annule sur I et ne change pas de signe, et si la dérivée seconde f'' s'annule tout en changeant de signe alors f admet un **point d'inflexion**.

Retenons

Pour étudier le **sens de variation d'une fonction f** on suit les étapes suivantes :

- Déterminer l'ensemble de définition de f ;
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f ;
- Déterminer sa fonction dérivée f' ;
- Étudier le signe de f' puis en-déduire le sens de variation de f ;

Par contre, pour étudier les **variations d'une fonction f** on suit les étapes suivantes :

- Déterminer l'ensemble de définition de f ;
- Déterminer les limites aux bornes de cet ensemble de définition ;
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f ;
- Déterminer sa fonction dérivée f' ;
- Étudier le signe de f' puis en-déduire le sens de variation de f ;
- Dresser le tableau de variation de f .

Tableau de variation

Dans le tableau de variation, on récapitule suivant les valeurs de x , le signe de la dérivée de la fonction étudiée. On en déduit les différents intervalles de son ensemble de définition (les intervalles non inclus dans l'ensemble de définition sont en générale hachurés, et les valeurs isolées pour lesquelles f n'est pas définie sont symbolisées par une double barre verticale).

Consigne 2.6.7 : Consolidation

Etudie les variations de chacune des fonctions ci-dessous. On précisera dans chaque cas si possible les extrémums de ces fonctions.

- $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$.
- $g(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$.
- $h(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

Evaluations formatives

Exercice 1

- Soit la fonction $f(x) = x|x - 1|$
 f est-elle dérivable en 1 ?
- Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 1]$ par
 $g(x) = x\sqrt{1-x}$
Etudie la dérivabilité de g en 1 puis donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1 et en 0 .
- Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

Exercice 3

Soit la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x \leq -3 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 10x + 21} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

Etudie la dérivabilité de f en -3 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Exercice 4

- Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sa fonction dérivée :
 - $f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^7 + 2x + 2$
 - $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$
 - $f(x) = \sqrt{-2x^3 + x + 1}$
 - $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{-x+1}}$
 - $f(x) = (-2x + 2)^2(-5x + 4)^6$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$
- Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) .
Ecrire une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a .
 - $f(x) = x^6 - x^5 + 1$ $a = 1$
 - $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ $a = 0$

Exercice 5

Soit la fonction $h(x) = x^3 - 3x$
Détermine les extrémums de h

Exercice 6

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.

- Détermine les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- Montre que g est dérivable et calcule $g'(x)$.
- Dresse le tableau des variations de g .

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b et c sont des réels.

- Calcule $f'(x)$.
- Détermine les réels a, b et c sachant que f admet en 1 pour extrémum 0 et en -3 pour extrémum 2.

Séquence n°7 : Primitives

Activité 2.13

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3$. On désire trouver les fonctions F dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

7.1 Notion de primitive

Consigne 2.7.1 : Découverte-Définition

- On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^4 + x^3 + 3x + 2$.
 - Détermine $g'(x)$.
 - Que constates-tu ?
- Trouve une fonction h différente de la fonction g et dérivable sur \mathbb{R} telle que $h'(x) = f(x)$.
- Déduis-en alors la forme générale des fonctions F dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Exploitation des résultats

- Les fonctions g et h sont dérivable sur \mathbb{R} et elles sont telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f(x)$. On dit alors que les fonctions g et h sont des primitives sur \mathbb{R} de la fonction f .
- Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f sont les fonctions F qui sont sous la forme $F(x) = x^4 + x^3 + 3x + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Définition 2.7.1 : Primitive d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F de I vers \mathbb{R} dérivable sur I et telle que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Propriété 2.7.1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet de primitive sur I .

Propriété 2.7.2

Soit f une fonction admettant une primitive particulière F sur un intervalle K .

- Pour toute constante réelle c , la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est une primitive de f sur K .

- Toute primitive de f sur K est de la forme $x \mapsto F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Consigne 2.7.2 Consolidation

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2$ $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -x^5$ $K = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 2.7.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , x_0 un nombre réel de K et y_0 un nombre réel. Il existe une primitive et une seule de la fonction f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 ($F(x_0) = y_0$).

Consigne 2.7.3 : Application

Détermine la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K qui vérifie la condition indiquée :

1. $f(x) = 2x^3$ $K = \mathbb{R}$ $F(1) = 2$
2. $f(x) = -x^2$ $K = \mathbb{R}$ $F(-1) = 0$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Propriété 2.7.4

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle K alors pour tous nombres réels a et b , la fonction $(aF + bG)$ est une primitive de la fonction $(af + bg)$ sur K .

Consigne 2.7.4 : Application

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué.

$$f(x) = 3x^2 + 5 \quad ; \quad K = \mathbb{R}$$

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

7.2 Primitive des fonctions élémentaires

Propriété 2.7.5

| Fonction f définie par : | Primitive de F de f définie par : | f admet une primitive sur : |
|---|---|---|
| $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) | $F(x) = ax + k$; $k \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R} |
| $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$; $k \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R} |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$) | $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$; $k \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R}^* |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + k$; $k \in \mathbb{R}$ | $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x + k$; $k \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R} |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x + k$; $k \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R} |
| $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $F(x) = -\cotan x + k$; $k \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $F(x) = \tan x + k$; $k \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ |

Consigne 2.7.5 : Consolidation

Détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K indiqué :

1. $f(x) = 4x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6$ $K = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (-3x + 2)(x^2 - 1)$ $K = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{5}{2}x - 6\sqrt{x}$ $K =]0; +\infty[$
4. $f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{x^5}$ $K =]0; +\infty[$
5. $f(x) = -7\sin x + 5\cos x + 3$ $K = \mathbb{R}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Séquence n°8 : Suites numériques

8.1 Généralités sur les suites numériques

Définition 2.8.1 : Suite numérique

On appelle suite numérique toute fonction de \mathbb{N} vers \mathbb{R}

Notation et vocabulaire

Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique U , on a les notations suivantes :

- **Notation fonctionnelle**
 $U : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto U(n)$
- **Notation indicielle**
 $U : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto U_n$

La suite numérique est notée $(U_n)_{n \in E}$ ou simplement (U_n) si aucune confusion n'est à craindre.

U_n ou $U(n)$ est appelé **terme d'indice n ou terme général** de la suite (U_n) .

Le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite est appelé terme de rang n .

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = 4n + 3$

Remarque

Dans la pratique l'ensemble de définition E d'une suite est l'ensemble des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à un nombre entier donné.

8.1.1 Suite définie par une formule explicite

Définition 2.8.2

Une suite définie par une formule explicite est une suite dont son terme général est fonction du rang n .

Exemples :

- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{2n+1}{n}$
- Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $V_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Consigne 2.8.1

On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\frac{3n-2}{n+1}$

1. Détermine les quatre premiers de la suite (V_n) .
2. Détermine le 15^{ème} terme de la suite (V_n) .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

8.1.2 Suite définie par une formule de récurrence

Définition 2.8.3

Une suite est définie par une formule de récurrence lorsque le terme initial est connu et chaque terme est fonction du terme précédent.

Exemples :

- Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $V_0 = 3$ et la formule $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$ et on écrit :
$$\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n \end{cases}$$
- Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 3} \end{cases}$$

Consigne 2.8.2 : Consolidation

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 1 \end{cases}$$

1. Précise le domaine de définition de la suite (U_n) .
2. Détermine les trois premiers termes de la suite (U_n) .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

8.2 Représentation graphique des termes d'une suite

8.2.1 Suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

Méthode de représentation graphique

Pour représenter les termes d'une suite (u_n) définie par une formule explicite, on peut procéder comme suit :

- On représente la courbe (C_f) de la fonction f associée à la suite (u_n)
- On détermine graphiquement $u_0 = f(0)$; $u_1 = f(1)$; $u_2 = f(2)$; $u_3 = f(3)$ etc

Consigne 2.8.3 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n + 1$

1. Détermine une fonction f telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.
2. Dans un repère, trace la courbe représentative (C_f) de f sur $[0 ; +\infty[$ et place u_0, u_1, u_2 et u_3 sur le graphique.

Stratégie : TI : 7min TC : 15min

8.2.2 Suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode représentation graphique

Pour représenter les termes d'une suite (u_n) définie par une formule de récurrence, on peut procéder comme suit :

- On représente (C_f) , la courbe de la fonction f associée à la suite (u_n) .

- On trace la droite $(\Delta) : y = x$ (**la première bissectrice**)
- On marque u_0 sur l'axe des abscisses (OI) ;
- On projette le point obtenu verticalement sur (C_f) , on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI) , on obtient u_1 .
- Refaire ce même processus avec u_1 pour obtenir u_2 .
- Et ainsi de suite...

Consigne 2.8.4 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit

(u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Détermine une fonction f telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Détermine les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
3. Dans un repère, trace la droite (Δ) et la courbe représentative (C_f) de f sur $[0 ; +\infty[$ puis place u_0, u_1, u_2 et u_3 sur le graphique.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

8.3 Suites majorées – suites minorées – suites bornées

Consigne 2.8.5 : Découverte

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \frac{3n+2}{2n+4}$.

1. (a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n$.
(b) Que peux-tu conclure ?
2. (a) Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{3}{2}$.
(b) Que peux-tu conclure ?
3. Quel conclusion peux-tu tirer à partir des réponses des questions 1.(b) et 2.(b) ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.8.1

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite **majorée** si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout n élément de E , on a $U_n \leq M$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite **minorée** si et seulement si il existe un nombre réel m tel que pour tout n élément de E , on a $m \leq U_n$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Consigne 2.8.6 : Consolidation

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$

La suite (U_n) est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

8.4 Sens de variation d'une suite numérique

Consigne 2.8.7 : Découverte

On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = -3n + 4$.
Montre que $V_{n+1} - V_n < 0$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Exploitation de résultats

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - V_n < 0$; alors on dit que la suite (V_n) est strictement décroissante sur \mathbb{N}

Définition 2.8.5 : Sens de variation d'une suite numérique

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique

- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est **croissante** sur E si et seulement si pour tous entiers naturels m et n de E , on :
 $m \leq n \Rightarrow U_m \leq U_n$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est **strictement croissante** sur E si et seulement si pour tous entiers naturels m et n de E , on : $m < n \Rightarrow U_m < U_n$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est **décroissante** sur E si et seulement si pour tous entiers naturels m et n de E , on : $m \leq n \Rightarrow U_m \geq U_n$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est **strictement décroissante** sur E si et seulement si pour tous entiers naturels m et n de E , on : $m < n \Rightarrow U_m > U_n$.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite **constante** sur E si tous les termes de la suite ont la même valeur ; c'est-à-dire pour tout n de E , on a : $U_{n+1} = U_n$
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ est dite **stationnaire** sur E lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.
- La suite $(U_n)_{n \in E}$ dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante

Remarque : Comment étudier le sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite définie sur \mathbb{N} . Pour étudier le sens de variation de (U_n) , on peut procéder de l'une des façons suivantes :

- **Calculer et étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$**
 - ✓ Si pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors $U_{n+1} \geq U_n$ et donc la suite (U_n) est croissante sur \mathbb{N} .
 - ✓ Si pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors $U_{n+1} \leq U_n$ et donc la suite (U_n) est décroissante sur \mathbb{N} .
- **Utiliser le sens de variation d'une fonction**
Si la suite (U_n) est telle que $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ alors (U_n) et f ont même sens de variation.
- **Calculer et comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1**
Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs,
 - ✓ Si pour tout entier naturel n , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors la suite (U_n) est croissante.
 - ✓ Si pour tout entier naturel n , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors la suite (U_n) est décroissante.

Consigne 2.8.8 : Consolidation

On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par $U_n = n^2 + 2n - 5$ et $V_n = \frac{2n+1}{n+1}$
Etudie le sens de variation des suites (U_n) et (V_n)

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

8.5 Suites arithmétiques – Suites géométriques

8.5.1 Suites arithmétiques

Définition 2.8.4 : Suite arithmétique

Une suite numérique $(u_n)_{n \in E}$ est dite arithmétique si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout élément n de E , on a : $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

Remarque

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut établir que pour tout entier n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est égale à une constante. Cette constante est la raison de la suite.

Remarque : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit r la raison d'une suite arithmétique (u_n) .

- Si $r \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Consigne 2.8.9 : Application

Justifie que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = -7n + \frac{2}{5}$ est arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

Propriété 2.8.2

- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p , on a : $U_n = U_p + (n - p)r$
- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite arithmétique de raison r , on a : $\forall n, k \in E (n > k), U_n = U_k + (n - k)r$

Exemple: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 4

$$u_n = u_0 + 4n$$

$$u_5 = u_3 + (5 - 3)4$$

$$u_{10} = u_2 + (7 - 2)4$$

Consigne 2.8.10 : Consolidation

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique tel que $u_8 = -5$ et $u_{15} = 37$.

Détermine la raison r et le 1^{er} terme de cette suite puis détermine l'expression du terme générale de la suite (u_n) .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Propriété 2.8.3 : Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique.

- Soit S la somme des termes consécutifs $u_a, u_{a+1}, u_{a+2}, \dots, u_n$ de la suite (u_n) .

$$S = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_n$$

$$S = \frac{(n - a + 1)(u_a + u_n)}{2}$$

$(n - a + 1)$ est le nombre de terme de la somme S avec n l'indice du dernier terme et a l'indice du premier terme de la somme S ;

u_a est le 1^{er} terme de la somme S et u_n son dernier terme ;

- Si u_a, u_b et u_c sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) , alors on a : $u_b = \frac{u_a + u_c}{2}$.

Consigne 2.8.11 : Consolidation

Soit (U_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{-1}{U_{n+2}} \end{cases}$.

On suppose que $U_n \neq -1$ et on pose $V_n = \frac{1}{U_{n+1}}$

1. Démontre que (V_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
2. Exprime V_n puis U_n en fonction de n
3. Calcule la somme $S_1 = V_5 + V_6 + V_7 + \dots + V_{17}$.

(c) Calcule en fonction de n , la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Stratégie : TI : 10min TC : 15min

8.5.2 Suites géométriques

Définition 2.8.5 : Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in E}$ une suite numérique.

La suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout n élément de E , on a : $u_{n+1} = u_n \cdot q$. Le nombre réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

Remarque

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on peut établir que pour tout entier n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à une constante. Cette constante est la raison de la suite.

Remarque : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit q la raison d'une suite géométrique (u_n) .

- Si $q \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante

Consigne 2.8.12 : Application

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$.

Démontre que la suite (u_n) est géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 2.8.4

- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p , on a : $U_n = U_p \times q^{n-p}$
- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite géométrique de raison q , on a : $\forall n, k \in E (n > k), U_n = U_k \times q^{n-k}$

Exemple : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_5 = u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$u_{10} = u_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}$$

Consigne 2.8.13 : Consolidation

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique tel que $u_3 = -8$ et $u_6 = 27$.

Détermine la raison r et le 1^{er} terme de cette suite puis détermine l'expression du terme générale de la suite (u_n) .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 2.8.5 : Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

- Soit S la somme des termes consécutifs $u_a, u_{a+1}, u_{a+2}, \dots, u_n$ de la suite (u_n) .

$$S = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_n$$

$$\checkmark \text{ Si } q \neq 1, \text{ alors } S = u_a \left(\frac{1 - q^{n-a+1}}{1 - q} \right)$$

$$\checkmark \text{ Si } q = 1, \text{ alors } S = (n - a + 1)u_a$$

$(n - a + 1)$ est le nombre de terme de la somme S avec n l'indice du dernier terme et a l'indice du premier terme de la somme S ;

u_a est le 1^{er} terme de la somme S et u_n son dernier terme ;

- Si u_a, u_b et u_c sont les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) , alors on a :

$$u_b^2 = u_a \times u_c$$

Consigne 2.8.14

Soit (V_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \frac{3V_n + 2}{V_n + 2} \end{cases}$

On pose $t_n = \frac{V_n + 1}{V_n - 2}$

1. Démontre que (t_n) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
2. Exprime t_n puis V_n en fonction de n
3. Calcule la somme $S_1 = t_3 + t_4 + t_5 + \dots + t_{19}$.
4. Calcule en fonction de n , la somme

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 125min

8.6 Convergence d'une suite numérique

Activité 2.14

Melon désire étudier le comportement des suites (u_n)

et (v_n) , définies par $u_n = 4n^2 + 2n - 1$ et $v_n = \frac{5n+2}{n-4}$,

lorsque n prend de grandes valeurs positives.

Consigne 2.8.15 : Convergence d'une suite

Calcule :

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Exploitation des résultats

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors la suite (u_n) n'est pas convergente : on dit que la suite (u_n) est divergente
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$ et $5 \in \mathbb{R}$, alors on dit que la suite (v_n) est convergente et converge vers 5.

Définition 2.8.6 : Convergence d'une suite

- Une suite numérique est dite **convergente** si elle admet une limite finie.
Autrement dit :
Une suite (u_n) est dite convergente lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, l \in \mathbb{R}$
- Une suite numérique est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Consigne 2.8.16 : ConsolidationSoit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \frac{1}{2n+1}$ Démontre que la suite (u_n) converge vers 0.

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

Propriété 2.8.6

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et non minorée est divergente.
- Toute suite croissante et non majorée est divergente.

Propriété 2.8.7Soit l un nombre réel, f une fonction numérique, (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ alors la suite (u_n) diverge.

Propriété 2.8.8Soit q un nombre réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Consigne 2.8.17 : ConsolidationSoit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{4n^2-3}{3n+1}$

- (a) Détermine une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout $n, u_n = f(n)$.
(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Déduis-en la convergence de la suite (u_n) .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

8.7 Etude d'une suite**Propriété 2.8.9 : Etude d'une suite**

Étudier une suite numérique, c'est étudier :

- le sens de variation de la suite ;
- la minoration, la majoration (si nécessaire) ;
- la convergence.

Consigne 2.8.18 : ConsolidationOn considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$

- (a) Étudie le sens de variation de f sur I .
(b) Démontre que $\forall x \in I; f(x) \in I$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$$

(a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \in I$.
(b) Étudie le sens de variation de (u_n) .
(c) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 25min

Evaluations formatives**Exercice 1**Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{-9u_n+4}{3} \end{cases}$ $n \geq 1$. On pose $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

- Calcule $u_1; u_2$ et u_3 .
- Démontre que la suite (v_n) est géométrique dont tu préciseras la raison et le premier terme.
- Calcule v_n puis u_n en fonction de n .
- (a) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
(b) Déduis-en la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 2On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 3n - 5$ et $v_n = -7n + 2$.

- Étudie le sens de variation de chacune des suites (u_n) et (v_n) .
- Montre que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites arithmétiques dont on précisera leurs raisons et leurs premiers termes.
- Calcule en fonction de $n, S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

Exercice 3On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + 3$. On pose $u_n = v_n - 4$.

- Calcule les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
- Montre que la suite (u_n) est une suite géométrique dont tu préciseras la raison q et le premier terme.
- Étudie la convergence des (u_n) puis de (v_n) .
- Calcule $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$



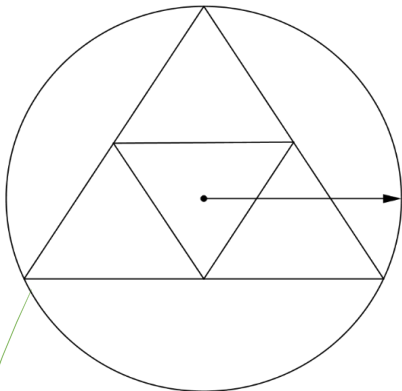
SA N°3 : LIEUX GEOMETRIQUES DANS LE PLAN

Situation de départ

Texte : La sirène du lycée

C'est la rentrée. Les murs de façade du lycée ont été repeints. Des objets d'embellissement qui suscitent la curiosité des élèves ont été placés à divers endroits de l'établissement. L'un de ces objets a retenu l'attention de Zoé, élève en classe de 1^{ère}. Cet objet est un disque sur lequel est fixée une plaque transparente ayant la forme d'un triangle équilatéral, inscrit dans sa bordure. Au centre du disque est fixée une aiguille de longueur égale au rayon du disque.

Cette aiguille est accolée à une autre plaque triangulaire de même nature dont les sommets coïncidents avec les milieux des côtés de la première plaque. Un bouton électrique fait tourner l'aiguille dans le plan du disque. Celle-ci entraîne dans sa course la petite plaque triangulaire et déclenche aussitôt la sirène du lycée. Voici une représentation de la position de repos de l'aiguille :



L'aiguille actionnée par le bouton, tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en émettant une jolie brillance circulaire qui évolue régulièrement à partir du centre du disque vers son bord ; c'est-à-dire que la surface de la brillance évolue à vitesse constante en fonction du temps. Quand on cesse d'appuyer sur le bouton, l'aiguille revient au repos en sens opposé et la jolie brillance s'estompe.

Émerveillé par ce dispositif, Zoé se propose de rechercher la variation du rayon de la brillance et le rapport qui lie les triangles du dispositif de la sirène.

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

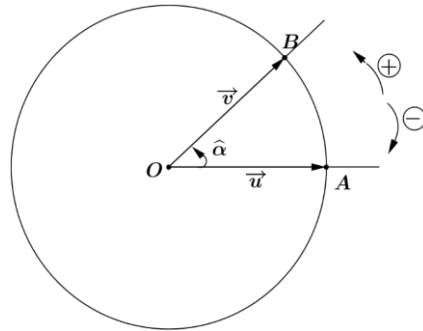
- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

Séquence n°1 : Angles orientés et leurs propriétés

Activité 3.1

L'aiguille actionnée par le bouton fait un écart angulaire α avec sa position initiale puis revient en sens inverse quand on cesse d'appuyer sur le bouton.

Zoé caractérise respectivement la position initiale et la position finale de cette aiguille par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} puis désire étudier les propriétés géométriques liées à cette situation après l'avoir représenté. Voici une représentation de cette situation :



1.1 Angle orienté – Mesure principale

Consigne 3.1.1

1. Donne deux écritures de l'angle orienté $\hat{\alpha}$.
2. Donne le sommet, le côté origine et le côté extrémité de l'angle orienté $\hat{\alpha}$.

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

Définition 3.1.1 : Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique, le cercle de rayon 1 (unité) et orienté dans le sens positif ou direct (sens contraire à celui du déplacement des aiguilles d'une montre)

Remarque

Sur un cercle, il existe deux sens de parcours, un sens positif ou direct et un sens négatif ou indirect. Par convention, le sens positif est le sens contraire au sens de déplacement des aiguilles d'une montre.

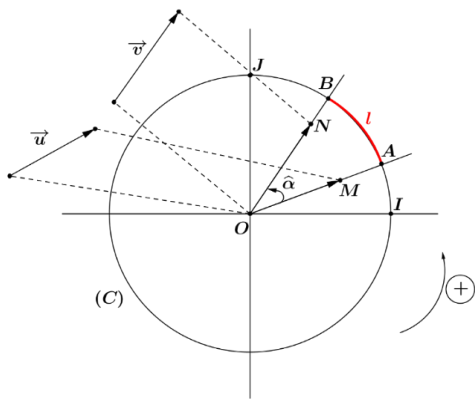
Définition 3.1.2 : Angle orienté

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan. On appelle angle orienté, le couple de deux vecteurs non nuls. Il se note souvent $(\vec{u}; \vec{v})$ ou tout simplement $(\vec{u}; \vec{v})$.

Définition 3.1.3 : Mesure d'un angle orienté

Lorsqu'on choisit un sens de déplacement sur tout cercle du plan, on dit qu'on a orienté le plan. Il est possible d'orienter le plan et d'utiliser le cercle trigonométrique pour associer la mesure d'un angle entre deux vecteurs non nuls.

À cet effet, soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. À partir du centre O du cercle trigonométrique (C), il existe deux points M et N du plan tels que $\vec{OM} = \vec{u}$ et $\vec{ON} = \vec{v}$. On pose $mes\widehat{AOB} = \alpha$.



Ainsi, l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ peut être noté $\hat{\alpha}$. Les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle (C) respectivement en A et B. Un représentant de l'angle orienté $\hat{\alpha}$ est $([OM), [ON))$ ou $([OA), [OB))$. La longueur l sur le cercle (C) entre les points A et B va permettre de définir la mesure de l'angle associé aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Dans ce contexte, on va appeler **mesure** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, tout réel $x = l + 2k\pi$; avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, à chaque valeur de l'entier k correspond une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$. On convient donc que l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ a une infinité de mesures

Remarque

De manière informelle, le nombre k indique le nombre de tour (du cercle trigonométrique) qui a été fait. En pratique, nous allons souvent confondre un angle avec l'une de ses mesures. Notons aussi que dans l'écriture $(\vec{u}; \vec{v})$, l'ordre entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est important.

Définition 3.1.4 : Mesure principale d'un angle orienté

Parmi les mesures $l + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$), d'un angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure s'appelle la **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.

Ainsi, si α est la mesure principale d'un angle orienté, alors toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme $\alpha + 2k\pi$; ($k \in \mathbb{Z}$).

Remarque

Le fait qu'il existe une infinité de nombres réels, mesures d'un même angle orienté ne permet pas de donner une notation satisfaisante à ces mesures. On écrira donc : « soit $(\vec{u}; \vec{v})$ un angle orienté de mesure α . »

Définition 3.1.5 : Congruence modulo

Deux mesures quelconques x et y sont des mesures d'un même angle orienté si la différence $x - y$ est un multiple entier de 2π . On dit qu'elles sont congrues modulo 2π . On note $x \equiv y[2\pi]$ et on lit : « x est congru à y modulo 2π . »

Ainsi, on a : $x \equiv y[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi$

1.2 Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Méthode de détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté $\hat{\alpha}$ dont une mesure x est connue consiste à écrire : $\alpha = x + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in]-\pi; \pi]$. Cette écriture est immédiate.

Sinon, on détermine d'abord à l'aide de l'inégalité $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$, la valeur de k puis on détermine α en utilisant l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Consigne 3.1.2 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est x :

- $x = \frac{119\pi}{4}$
- $x = \frac{37\pi}{3}$
- $x = -\frac{2017\pi}{5}$
- $x = 47\pi$
- $x = 108\pi$
- $x = \frac{25\pi}{4}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 3.1.1

- x est une mesure de l'angle orienté nul si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
- x est une mesure de l'angle orienté plat si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
- x est une mesure de l'angle orienté droit si et seulement si il existe un nombre entier relatif k tel que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

1.3 Somme, différence de deux angles orientés

Définition 3.1.6

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés; $([OA); [OB))$ un représentant de $\hat{\alpha}$ et $([OB); [OC))$ un représentant de $\hat{\beta}$ et $-\hat{\beta}$ l'opposé de l'angle orienté $\hat{\beta}$.

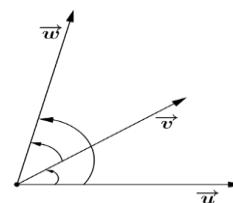
- On appelle **somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$** , l'angle $\hat{\gamma}$ tel que $\hat{\gamma} = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$.
- On appelle **différence des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$** , l'angle orienté $(\hat{\alpha}) + (-\hat{\beta}) = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$.

Remarque

La mesure principale de la somme de deux angles orientés n'est pas toujours égale à la somme des mesures principales de ces angles.

Propriété 3.1.2 : Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls \vec{u} ; \vec{v} et \vec{w} , on a : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$. Cette relation est appelée : **relation de Chasles**



Consigne 3.1.3 : Propriété

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$ et \vec{v}' quatre vecteurs et k un nombre réel. Démontrez que :

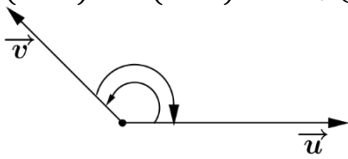
- $(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u})$.
- $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}'; \vec{v}') \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{u}') = (\vec{v}; \vec{v}')$
- Si $k > 0$ alors $(k\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$.
- Si $k < 0$ alors $(k\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

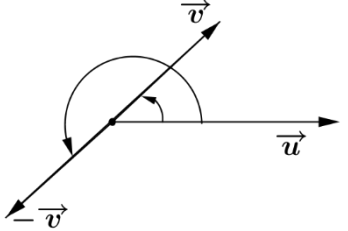
Propriété 3.1.3

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'$ et \vec{v}' et k un nombre réel, on a :

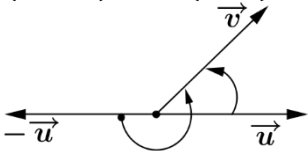
- $(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}'; \vec{v}') \Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{u}') = (\vec{v}; \vec{v}')$
- $(\vec{u}; \vec{v}) = -(\vec{v}; \vec{u}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.



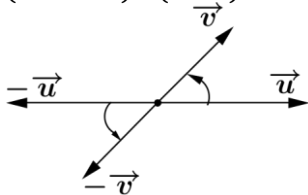
- $(\vec{u}; -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.



- $(-\vec{u}; \vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

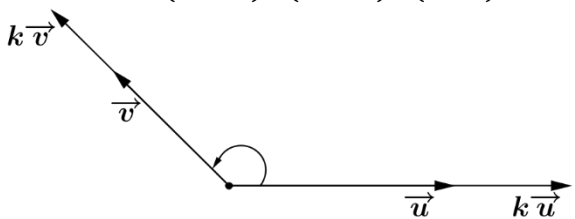


- $(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.

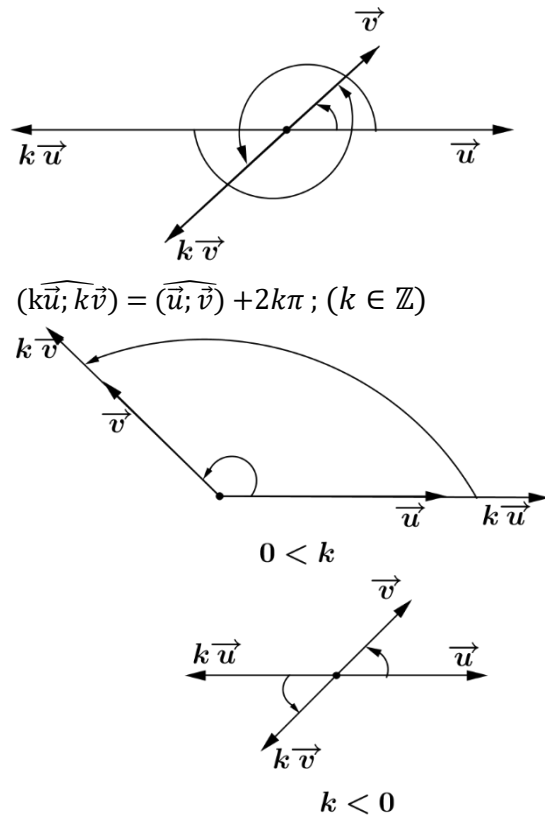


De manière générale, on a :

- Si $k > 0$ alors $(k\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$.



- Si $k < 0$ alors, $(k\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; k\vec{v}) = \pi + (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$



- $(k\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

Consigne 3.1.4 : Consolidation 1

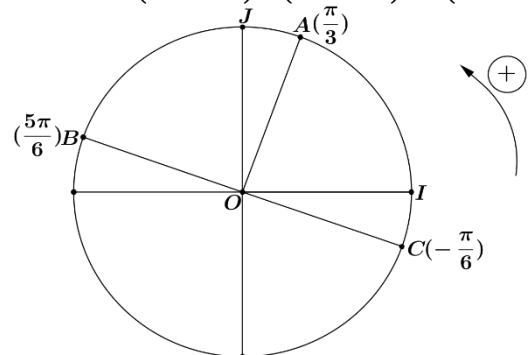
On considère un carré ABCD de sens indirect et O est le centre de ABCD. Déterminez la mesure des angles orientés suivants :

- $(\vec{AB}; \vec{AO}); (\vec{DO}; \vec{DC}); (\vec{AB}; \vec{CA}); (\vec{CB}; \vec{CD});$
- $(\vec{BA}; \vec{AC}); (\vec{BC}; \vec{BD})$ et $(\vec{CA}; \vec{AB})$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Consigne 3.1.5 : Consolidation 2

Le plan orienté est muni du repère (O, I, J) . Sur le cercle ci-dessous, A, B et C sont les points tels que : $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ soient les mesures principales respectives des angles orientés : $(\vec{OI}; \vec{OA}); (\vec{OI}; \vec{OB})$ et $(\vec{OI}; \vec{OC})$



- Déterminez la mesure principale de chacun des angles $(\vec{OA}; \vec{OB}); (\vec{OB}; \vec{OC})$ et $(\vec{OA}; \vec{OC})$.
- Vérifiez que $(\vec{OA}; \vec{OB}) - (\vec{OC}; \vec{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

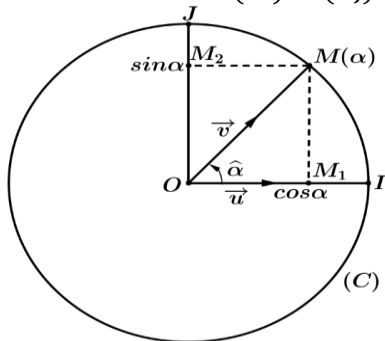
Séquence n°2 : Trigonométrie

2.1 Ligne trigonométrique d'un angle orienté

2.1.1 Sinus et cosinus d'un angle orienté

Définition 3.2.1 : Sinus et cosinus d'un angle orienté

Soit un angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ dont une mesure est α et soit M le point-image du réel α sur le cercle trigonométrique (C). (C) est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J). Soit M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (OI) et (OJ).



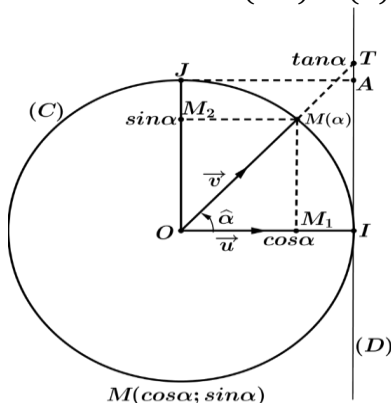
$M(\cos\alpha; \sin\alpha)$

- On appelle cosinus de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α , l'abscisse de M et on note : $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos\alpha = \overline{OM_1}$.
- On appelle sinus de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α , l'ordonnée de M et on note : $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \sin\alpha = \overline{OM_2}$.

2.1.2 Tangente et cotangente d'un angle orienté

Définition 3.2.2 : Tangente et cotangente d'un angle orienté

Soit un angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ dont une mesure est α et soit M le point-image du réel α sur le cercle trigonométrique (C). (C) est le cercle de centre O et de rayon $r = 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J). Soit M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (OI) et (OJ). On désigne par T l'intersection des droites (OM) et (D).



$M(\cos\alpha; \sin\alpha)$

- Si $(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas droit, on appelle tangente de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α , l'abscisse du point T dans le repère (I; \overline{IA}) de la droite (D) et on note : $\tan(\vec{u}; \vec{v}) = \tan\alpha = \overline{IT}$. On a $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

- Si $(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas plat ou nul, la cotangente de $(\vec{u}; \vec{v})$ ou de α notée $\cotan(\vec{u}; \vec{v})$ ou $\cotan\alpha$, est donnée par $\cotan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Remarque

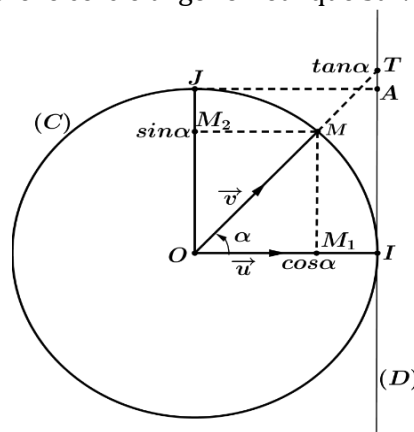
- $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cotan\alpha$ sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α . Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

| α (en degré) | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° |
|---------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| α (en rad) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 |
| $\cotan\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | - |

- \tan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- \cotan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Consigne 3.2.1

On considère le cercle trigonométrique suivant :



Démontrez que :

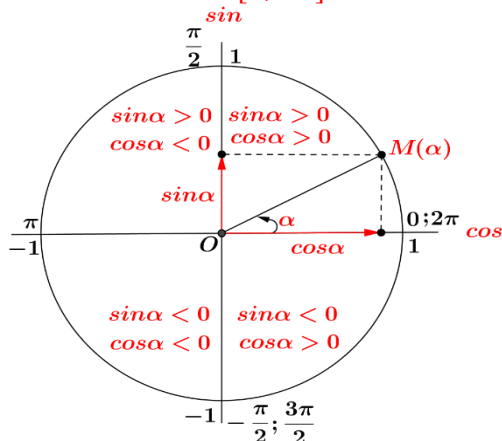
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Propriété 3.2.1

- Pour tout nombre réel x et pour tout nombre entier relatif k , on a :
 - $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
 - $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
 - $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
 - $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
 - $\tan(x + k\pi) = \tan x$
- Pour tout nombre réel x tel que $\cos x \neq 0$ et pour tout nombre entier relatif k , on a :

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Signe de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ sur $[0; 2\pi]$



Ainsi on a :

- Si $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$, alors $\sin \alpha > 0$ et $\cos \alpha > 0$;
- Si $\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, alors $\sin \alpha > 0$ et $\cos \alpha < 0$;
- Si $\alpha \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$, alors $\sin \alpha < 0$ et $\cos \alpha < 0$;
- Si $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, alors $\sin \alpha < 0$ et $\cos \alpha > 0$.

Consigne 3.2.2

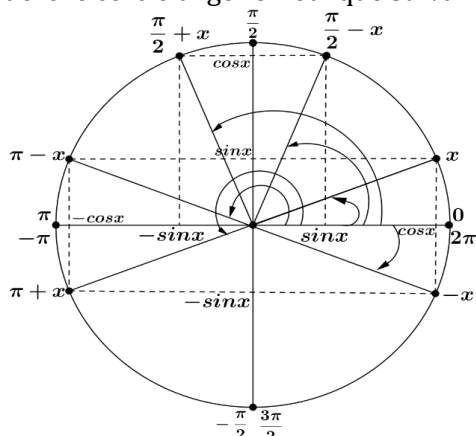
1. On donne $\sin x = \frac{5}{13}$ avec $x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$
Détermine $\cos x$ et $\tan x$
2. On donne $\tan x = -\sqrt{3}$ avec $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$
Calcule $\cos x$ et $\sin x$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

2.1.3 Lignes trigonométriques d'angles associés

Consigne 3.2.3 : Propriété

On considère le cercle trigonométrique suivant :



1. Démontre graphiquement que pour tout nombre réel x , on a :

- | | |
|---|--|
| (a) $\cos(-x) = \cos x$ | (b) $\sin(-x) = -\sin x$ |
| (c) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ | (d) $\sin(\pi + x) = -\sin x$ |
| (e) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ | (f) $\sin(\pi - x) = \sin x$ |
| (g) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ | (h) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ |
| (i) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ | (j) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ |

2. Démontre que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$; on a :

- | | |
|--|---|
| (a) $\tan(-x) = -\tan x$ | (b) $\tan(\pi + x) = \tan x$ |
| (c) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ | (d) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}$ |
| (e) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$ | |

Stratégie : TI : 15min

TC : 25min

Propriété 3.2.2

- ❖ Pour tout nombre réel x , on a :

- | | |
|---|--|
| (a) $\cos(-x) = \cos x$ | (b) $\sin(-x) = -\sin x$ |
| (c) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ | (d) $\sin(\pi + x) = -\sin x$ |
| (e) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ | (f) $\sin(\pi - x) = \sin x$ |
| (g) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ | (h) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ |
| (i) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ | (j) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ |

- ❖ Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$; on a :

- | | |
|--|---|
| (a) $\tan(-x) = -\tan x$ | (b) $\tan(\pi + x) = \tan x$ |
| (c) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ | (d) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}$ |
| (e) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$ | |

Consigne 3.2.5 : Consolidation

1. Calcule : $\sin(\frac{119\pi}{4}) ; \cos(-\frac{2017\pi}{4})$ et $\tan(\frac{37\pi}{3})$.
2. On donne $\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$ avec $x \in]0; \pi[$
Calcule $\cos x ; \sin x$ et $\tan x$
3. Exprime l'expression A suivante en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
 $A = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) - \cos(\pi + x) + \sin(10\pi + x) + \cos(7\pi + x) - \cos(\frac{11\pi}{2} - x)$
4. On donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
Détermine $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$. (Tu remarqueras que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$)

Stratégie : TI : 15min

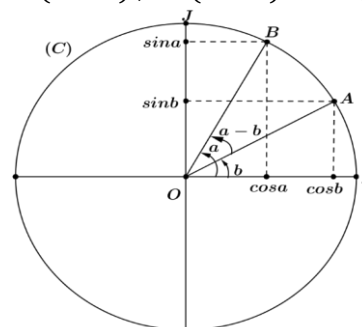
TC : 25min

2.2 Formules trigonométriques

2.2.1 Formules d'addition

Activité 3.2

On muni le plan d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. A et B sont deux points du cercle trigonométrique (C) ; a et b sont deux nombres réels tels que $(\vec{OI}; \vec{OB}) = \hat{a}$ et $(\vec{OI}; \vec{OA}) = \hat{b}$. On désire trouver $\cos(a + b) ; \cos(a - b) ; \sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$



On a : $\overrightarrow{OA}(\cos b; \sin b)$ et $\overrightarrow{OB}(\cos a; \sin a)$

Consigne 3.2.6 : Propriété

- (a) Calcule de deux manières différentes $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
(b) Déduis-en l'expression de $\cos(a - b)$.
- Trouve l'expression de $\cos(a + b)$. (Tu remarqueras que $a + b = a - (-b)$).
- (a) Rappel l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
(c) En posant $x = a - b$, trouve l'expression de $\sin(a - b)$.
- Trouve l'expression de $\sin(a + b)$. (Tu remarqueras que $a + b = a - (-b)$).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 3.2.3 : Formule d'addition

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- ❖ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- ❖ $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
- ❖ $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- ❖ $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
- ❖ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$
- ❖ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

Consigne 3.2.7 : Consolidation

- Exprime $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
- (a) Calcule les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
(Tu pourras exprimer $\frac{\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{4}$)
(b) Calcule $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- Démontre que pour tout réel x , on a :
 $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

2.2.2 Formules de duplication et de linéarisation

Consigne 3.2.8 : Propriété

Démontre que pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$. (Tu remarqueras que $\cos(2a) = \cos(a + a)$)
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Propriété 3.2.4 : Formule de duplication

Pour tout nombre réel x , on a :

- ❖ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- ❖ $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
- ❖ $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
- ❖ $\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$
- ❖ $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Propriété 3.2.5 : Formule de linéarisation

Pour tout nombre réel x , on a :

- ❖ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- ❖ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- ❖ $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Propriété 3.2.6

Pour tout nombre $x \neq (2k + 1)\pi; k \in \mathbb{Z}$, on a :

- ❖ $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
- ❖ $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

Consigne 3.2.9 : Consolidation

Détermine la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. (Tu pourras remarquer que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$)

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

2.2.3 Transformation d'un produit en une somme et d'une somme en un produit

Consigne 3.2.10 : Propriété

- (a) En utilisant la formule d'addition, calcule $\cos(a - b) + \cos(a + b)$.
(b) Déduis-en une expression de $\cos a \cdot \cos b$.
- (a) En utilisant la formule d'addition, calcule $\cos(a - b) - \cos(a + b)$.
(b) Déduis-en une expression de $\sin a \cdot \sin b$.
- (a) En utilisant la formule d'addition, calcule $\sin(a - b) + \sin(a + b)$.
(b) Déduis-en une expression de $\sin a \cdot \cos b$.
- En posant $p = a + b$ et $q = a - b$ dans les formules précédemment établies, justifie que :
 - $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

Propriété 3.2.7

- Pour tous nombres réels a et b , on a :
 - ❖ $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
 - ❖ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
 - ❖ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- Pour tous nombres réels p et q , on a :
 - ❖ $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - ❖ $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - ❖ $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
 - ❖ $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
 - ❖ $\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$

$$\diamond \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

Consigne 3.2.11 : Consolidation 1

1. Transforme en une somme les expressions suivantes : $A = \cos 3x \cdot \sin x$; $B = \sin 2x \cdot \sin 3x$ et $C = \cos 5x \cdot \cos 4x$.
2. Transforme en un produit l'expression $D = \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x$.
3. Démontre que $\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 20min

Consigne 3.2.12 : Consolidation 2

- (a) Démontre que $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) \right] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$
- (b) Démontre que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

2.3 Equation et inéquation trigonométrique dans \mathbb{R}

Propriété 3.2.8

- ❖ Pour tout nombre réel $t \in [-1; 1]$, il existe un nombre réel $a \in]-\pi; \pi]$ tels que $\sin a = t$ et $\cos a = t$.
- ❖ Pour tout nombre t , il existe un nombre $a \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

2.3.1 Résolution d'équations du type $\sin x = a$ et $\cos x = b$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Retenons

❖ Equation du type $\sin x = a$; $a \in \mathbb{R}$

Soit l'équation (E) : $\sin x = a$; $a \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation (E), on peut procéder comme suit :

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution
- Si $a \in [-1; 1]$, alors il existe un nombre réel b tel que $\sin b = a$ et on a donc $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin b$
 $\Leftrightarrow x = b + 2k\pi$ ou $x = \pi - b + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

❖ Equation du type $\cos x = b$

Soit l'équation (E) : $\cos x = b$; $b \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation (E), on peut procéder comme suit :

- Si $b < -1$ ou $a > 1$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution
- Si $b \in [-1; 1]$, alors il existe un nombre réel a tel que $\cos a = b$ et on a donc $\cos x = b \Leftrightarrow \cos x = \cos a$
 $\Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Consigne 3.2.13 : Consolidation

Résous dans \mathbb{R} puis dans $[0; \pi]$, les équations suivantes :

$$(a) 2\cos x = 1 \qquad (b) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(c) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (d) 2\sin^2 x = 1$$

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

2.3.2 Résolution d'équations du type $\tan x = c$; $c \in \mathbb{R}$

Retenons

Soit l'équation (E) : $\tan x = c$; $c \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) est définie si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout nombre réel c , il existe un nombre réel β de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \beta = c$. On a donc :

$$\begin{aligned} \tan x = c &\Leftrightarrow \tan x = \tan \beta \\ &\Leftrightarrow x = \beta + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Consigne 3.2.14 : Consolidation

Résous dans \mathbb{R} , l'équation $\tan x = -1$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

2.3.3 Résolution d'équations du type $a\cos x + b\sin x = c$; a, b et c sont tous non nuls

Consigne 3.2.15

On considère l'équation (E) : $a\cos x + b\sin x = c$ avec $a ; b$ et c des réels. On désire résoudre l'équation (E). Pour cela, on se trouve dans l'un des cas suivants :

1. (a) Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors donne la nouvelle forme de l'équation (E).
(b) Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors donne la nouvelle forme de l'équation (E).
2. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

- (a) Prouve qu'il existe un nombre réel β tel que $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ puis déduis-en la nouvelle expression de $a\cos x + b\sin x$.
- (b) Rappel la formule de $\cos(x_1 + x_2)$ puis déduis-en que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \beta)$
- (c) Justifie que l'équation (E) est équivalente à l'équation : $\cos(x - \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

Retenons : Méthode de résolution des équations du type $a\cos x + b\sin x = c$

On considère l'équation (E) : $a\cos x + b\sin x = c$ avec $a ; b$ et c des réels. Pour résoudre l'équation (E), on peut procéder comme suit :

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, on se ramène à une équation du type $\cos x = t$ ou $\sin x = k$; $t \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{R}$
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et on a : $a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ alors il existe un nombre réel β tel que $\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On en déduit donc que :

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow (\cos\beta\cos x + \sin\beta\sin x) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et donc $a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \cos(x - \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

On retrouve donc l'équation de la forme $\cos t = q$ ($t = x - \beta$ et $q = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$) qu'on sait déjà résoudre.

Consigne 3.2.16 : Consolidation

Résous dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$(E_1) : \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } (E_2) : \cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

2.3.4 Inéquation trigonométrique

Retenons

Soit à résoudre dans \mathbb{R} une inéquation du type $\sin x \geq a$

- Si $a < -1$ l'inéquation est toujours vérifiée alors $S = \mathbb{R}$.
- Si $a > 1$, cette inéquation n'admet pas de solution alors $S = \emptyset$
- Si $a = -1$, l'inéquation devient $\sin x = -1$
- Si $a = 1$, l'inéquation devient $\sin x = 1$
- Si $-1 < a < 1$, alors on résout l'équation $\sin x = a$. Soit x_1 et x_2 les solutions de l'équation $\sin x = a$, donc les solutions de l'inéquation $\sin x \geq a$ sont $x_1 \leq x \leq x_2$ avec $x_1 < x_2$.

Consigne 3.2.17 : Consolidation

(a) Résous dans $[0; 2\pi]$, l'inéquation $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) Résous dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) Résous dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos^2 x < \frac{1}{4}$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

2.4 Fonctions circulaires

Définition 3.2.3 : Fonctions sinus, cosinus, tangente, cotangente

- On appelle **fonction sinus**, la fonction notée \sin définie par $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$
- On appelle **fonction cosinus**, la fonction notée \cos définie par $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$
- On appelle **fonction tangente**, la fonction notée \tan définie par $\tan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- On appelle **fonction cotangente**, la fonction notée \cotan définie par $\cotan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $D = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 3.2.4 : Fonction paire – Fonction impaire

Soit f une fonction d'ensemble de définition D .

- On dit que f est paire si et seulement si :
 $\begin{cases} \forall x \in D; -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- On dit que f est impaire si et seulement si :
 $\begin{cases} \forall x \in D; -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Remarque

- La fonction cosinus est paire.
- Les fonctions sinus, tangente et cotangente sont impaires.
- Si f est une fonction paire ou impaire, on choisit comme domaine d'étude l'ensemble E tel que $E = D_f \cap \mathbb{R}_+$ ou $E = D_f \cap \mathbb{R}_-$
- La courbe de f sur D_f dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire et symétrique par rapport à l'origine du repère si f est impaire.

Consigne 3.2.18 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- (a) Démontre que la fonction h définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $h(x) = -2x^4 + 3x^2 + 5$ est paire.
(b) Que peux-tu dire de la droite (OJ) par rapport à la représentation graphique de h .
- (a) Démontre que la fonction h définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ est impaire.
(b) Que peux-tu dire du point O par rapport à la représentation graphique de g .
- Étudie la parité de la fonction f définies de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , dans chacun des cas suivants :
(a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$
(c) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Définition 3.2.5 : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D et T un nombre réel strictement positif.

- T est une **période** de f si et seulement si :
 $\begin{cases} \forall x \in D; (x + T) \in D \\ f(x + T) = f(x) \end{cases}$
- La plus petite valeur de T telle que : $\forall x \in D; (x + T) \in D; f(x + T) = f(x)$, est la période de f .

Remarque

- Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques et de périodes 2π .
- La fonction tangente est périodique et de période π .
- Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ sont périodiques et de périodes $T = \frac{2\pi}{|a|}$; avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique et de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$; avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Si f est une fonction périodique de période T , on choisit comme domaine d'étude l'ensemble E tel

que $E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ ou $E = D_f \cap [0; T]$.

Evaluations formatives

Exercice 1

1. Résous dans $[-\pi; \pi]$, les équations :

(a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\cos x = 0$

(d) $\sin x = -1$

2. Résous dans $[0; 2\pi]$, les équations :

(a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

(b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

1. Résous dans $[0; 2\pi]$, l'inéquation $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Résous dans $[0; 2\pi]$, l'inéquation $\tan x \geq \sqrt{3}$

3. Résous dans \mathbb{R} , l'inéquation $\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Résous dans \mathbb{R} , l'inéquation $\sqrt{3}\cos x + \sin x \geq 1$.

5. Résous dans \mathbb{R} , l'inéquation $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} \leq 0$

Séquence n°3 : Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés

3.1 Barycentre de deux points pondérés

3.1.1 Définition

Définition 3.3.1

- On appelle point pondéré tout couple $(A; a)$ où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé coefficient du point A .
- Soit $(A; a)$ et $(B; b)$ deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés $(A; a)$ et $(B; b)$ l'unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On note $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ ou $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ et on lit G barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

| | |
|---|---|
| A | B |
| a | b |

Remarque

Si A et B sont deux points distincts du plan, $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ signifie que $G \in (AB)$

Définition 3.3.2 : Isobarycentre de deux points pondérés

- Soit $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$.
Si $a = b$ alors le point G est appelé isobarycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .
- L'isobarycentre de deux points distincts A et B est le milieu du segment $[AB]$.

3.1.2 Propriétés

Propriété 3.3.1 : Homogénéité du barycentre

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul

Si $k \in \mathbb{R}^*$ et $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ alors $G = \text{bar}\{(A, ka), (B, kb)\}$.

Remarque

A et B étant deux points distincts du plan, l'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB) .

Consigne 3.3.1 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, justifie que le point $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ avec a et b deux réels que tu précises :

(a) $\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{BH} = \vec{0}$

(b) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BH} = 3\overrightarrow{AH}$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Consigne 3.3.2 : Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés et M un point du plan.

1. Si $a + b \neq 0$, démontre que $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$

2. Si $a + b = 0$, démontre que le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.3.2 : Réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés et M un point du plan.

- Si $a + b \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$
- Si $a + b = 0$ alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M .

Consigne 3.3.3 : Consolidation

A, B, G et M sont quatre points du plan tels que $G = \text{bar}\{(A, 2), (B, 4)\}$.

Trouve une expression réduite des vecteurs : $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$

Stratégie : TI : 3min TG : 3min TC : 5min

Consigne 3.3.4 : Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan et $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$.

Démontre que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.3.3

Soit A et B deux points distincts du plan.

$$G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA} \end{cases}$$

On peut utiliser l'une de ces égalités vectorielles pour construire le point G.

Propriété 3.3.4 : Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $A(x_A; y_B)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux distincts du plan.

$$\text{Si } G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\} \text{ alors } \begin{cases} x_G = \frac{a \times x_A + b \times x_B}{a+b} \\ y_G = \frac{a \times y_A + b \times y_B}{a+b} \end{cases}$$

Consigne 3.3.5 : Consolidation

Le plan est muni du repère (O, I, J) . On donne les points $E(3;4)$ et $F(2;6)$. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(E;1)$ et $(F;3)$.

- Place les points E et F dans le repère (O, I, J) .
- Sans déterminer ses coordonnées, construis G.
- Détermine les coordonnées de G.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

3.2 Barycentre de trois ou quatre points pondérés

3.2.1 Définition

Définition 3.3.3

Soit $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On appelle barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ l'unique point G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

On note $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ ou

$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$ et on lit G barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$.

Remarque

Si A, B et C sont trois points distincts du plan, $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ signifie que $G \in (ABC)$

Définition 3.3.4 : Isobarycentre de deux points pondérés

- Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$.
Si $a = b = c$ alors le point G est appelé isobarycentre des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$.
- L'isobarycentre de trois points distincts A, B et est le centre de gravité du triangle ABC.

3.2.2 Propriétés

Propriété 3.3.5 : Homogénéité du barycentre

Le barycentre de trois points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul

Si $k \in \mathbb{R}^*$ et $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ alors $G = \text{bar}\{(A, k\alpha), (B, k\beta), (C, k\gamma)\}$.

Remarque

A, B et C étant trois points distincts du plan, l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

Propriété 3.3.6 : Réduction de la somme

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$$

Soit (A, a) ; (B, b) et (C, c) points pondérés et M un point du plan.

- Si $a+b+c \neq 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$
- Si $a+b+c=0$ alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Propriété 3.3.7

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

$$G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CG} = \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{CB} \end{cases}$$

Propriété 3.3.8 : Coordonnées du barycentre

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $A(x_A; y_B)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ sont trois distincts du plan.

$$\text{Si } G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\} \text{ alors } \begin{cases} x_G = \frac{a \times x_A + b \times x_B + c \times x_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{a \times y_A + b \times y_B + c \times y_C}{a+b+c} \end{cases}$$

Consigne 3.3.6 : Consolidation

Dans un repère du plan, on donne les points : $A(3; -2)$, $B(4; 2)$ et $C(5; 1)$.

Calcule les coordonnées :

- du barycentre G de $(A; 1)$ et $(B; -2)$.
- du barycentre G' de $(A; 1)$, $(B; -2)$ et $(C; 3)$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.3.9 : Barycentre partiel

Soit $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

Si $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ et $H = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ alors $G = \text{bar}\{(H, a+b), (C, c)\}$. H est appelé barycentre partiel.

Autrement dit, le barycentre de plusieurs points pondérés est inchangé lorsqu'on remplace certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à condition que cette somme soit non nulle.

Méthode

- Pour déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel, affecté de la somme de leurs coefficients, à conditions que cette somme soit différente de zéro.
- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que l'un est barycentre des deux autres.
- Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point G, on peut démontrer que G est

à la fois barycentre des points I et J et barycentre des points K et L.

Consigne 3.3.7 : Consolidation 1

ABC est un triangle et I, J et K les points tels que :

$$\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC} ; \vec{CJ} = \frac{3}{4}\vec{CA} \text{ et } \vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AB}$$

1. Exprime I comme barycentre de B et C, J comme barycentre de A et C ; K comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser.
2. Démontre que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concurrentes.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Consigne 3.3.8 : Consolidation 2

H est le barycentre de (A,3) et (B,-2).

1. Construis le point H.
2. E et F sont les points tels que $\vec{EH} = 2\vec{AH}$ et $\vec{FH} = 2\vec{BH}$. Démontre que les points H, E et F sont alignés.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Consigne 3.3.9 : Consolidation 3

Soit A, B et C trois points non alignés et G le barycentre de (A,-3), (B,1) et (C,1).

1. Construis G.
2. Démontre que A est le centre de gravité du triangle GBC.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Evaluations formatives

Exercice 1

A, B et C sont trois points d'une droite tels que : AB=4cm, BC=2cm et AC=6cm.

1. Déterminer des réels a et b tels que C soit le barycentre de (A, a) et (B, b).
2. Déterminer des réels b' et c' tels que A soit le barycentre de (B, b') et (C, c').
3. Déterminer des réels a'' et c'' tels que B soit le barycentre de (A, a'') et (C, c'').

Exercice 2

ABC est un triangle du plan, B' et C' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. D est le barycentre des points pondérés (A; 3) et (B; 2), et G le barycentre des points pondérés (A; 3), (B; 2) et (C; 1).

1. Construis les points D et G.
2. Démontre que le point G est l'intersection des droites ($B'C'$) et (CD).
3. La droite (AG) coupe la droite (BC) en E. Précise la position de E sur (BC).
4. M est un point quelconque du plan tel que $3\vec{AM} + 2\vec{AB} = \vec{0}$.
(a) Place le point M.
(b) Détermine deux réels a et b pour que M soit barycentre des points pondérés (A; a) et (B; b).

Exercice 3

ABC est un triangle. A' est le milieu du segment [BC], E est le point du segment [$A'C$] tel que $\vec{A'E} = \frac{1}{2}\vec{A'B}$, F est le symétrique de A par rapport à B.

1. Exprimer E comme barycentre de B et C affectés de coefficients à préciser.
2. Exprimer F comme barycentre de A et B affectés de coefficients à préciser.

Exercice 4

Dans un repère du plan, on donne les points A(3 ; 2) et B(-1 ; 4). G est le barycentre de (A,3) et (B,-2), et G' est le barycentre de (A,-2) et (B,3).

1. Calculer les coordonnées de G et G' .
2. Vérifier que [AB] et [GG'] ont le même milieu.

Séquence n°4 : Cercle dans le plan

Propriété 3.4.1

Dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Son expression développée est de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec a, b, c des réels.

Remarque

Le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ a pour centre $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ et pour rayon $r = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{4} - c\right)}$.

Définition 3.4.1 : Représentation paramétrique d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r . Le système $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r . Le système $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exemples :

- L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 = 2$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Une représentation paramétrique de ce cercle est $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$.
- Le système $\begin{cases} x = 3\sqrt{3} \cos \theta \\ y = 3\sqrt{3} \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$; est une représentation paramétrique du cercle de centre $O(0; 0)$ est de rayon $3\sqrt{3}$ et a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 27$.

- Le système $\begin{cases} x = -4 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) ; est une représentation paramétrique du cercle de centre $A(-4; 3)$ est de rayon 2 et a pour équation cartésienne $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Consigne 3.4.1 : Consolidation 1

On considère deux cercles (C) et (C') d'équations respectives : $x^2 + y^2 - 5 = 0$ et $2x^2 + 2y^2 - x + 3y = 0$.

- Détermine une représentation paramétrique de (C).
- Détermine une représentation paramétrique de (C').

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Consigne 3.4.2 : Consolidation 2

On considère le cercle (C) de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 5 + 7\cos\theta \\ y = 3 + 7\sin\theta \end{cases}$$

Détermine une équation cartésienne de (C).

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.4.2

Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ et $A(x_0; y_0)$ un point de (C).

Une équation cartésienne de la tangente à (C) en A est :

$$(T): xx_0 + yy_0 + \frac{a}{2}(x + x_0) + \frac{b}{2}(y + y_0) + c = 0$$

Consigne 3.4.3 : Consolidation

(C) est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ et $K(4; 2)$ un point du plan.

- Justifie que (C) est un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.
- Détermine une représentation paramétrique de (C).
- Justifie que le point K appartient à (C).
- Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point K.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Evaluations formatives**Exercice 1**

- Donner une équation du cercle (C) de centre $A(2; -4)$ et de rayon 3.
- (Γ) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 23 = 0$
Quelle est la nature de (Γ) ? Donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

Les équations suivantes sont-elles des équations d'un cercle ? si oui, préciser le centre et le rayon puis donne une représentation paramétrique de ce cercle.

- $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
- $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
- $x^2 + y^2 + x = 0$

Séquence n°5 : Isométrie**5.1 Quelques rappels sur les notions de translation, symétrie orthogonale, rotation et homothétie****5.1.1 Translation (Rappel)****Définition 3.5.1**

Soit t la translation de vecteur \vec{u} . M est un point du plan et M' son image par t . On a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

Propriété 3.5.1

Soit f une application du plan dans lui-même. f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

5.1.2 Homothétie(Rappel)**Définition 3.5.2**

O est un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle **homothétie de centre Ω et de rapport k** la transformation, notée $h(\Omega; k)$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Propriété fondamentale

$h(O, k)$ étant l'homothétie de centre O et de rapport k , M' et N' les images respectives des points M et N par h , alors on a : $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{M'N'}$ avec $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

5.1.3 Symétrie orthogonale (Rappel)**Définition 3.5.3**

Soit (D) une droite du plan. On appelle symétrie orthogonale d'axe (D) l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' vérifiant :

- Si $M \in (D)$ alors les points M et M' sont confondus.
- Si $M \notin (D)$ alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.

5.1.4 Rotation (Rappel)**Définition 3.5.4**

Soient Ω un point du plan et β un nombre réel. On appelle rotation r de centre Ω et d'angle β l'application du plan dans lui-même notée $r(\Omega; \beta)$ qui à tout point M du plan associe le point M' vérifiant :

- Ω est invariant par r c'est-à-dire $r_{(\Omega; \beta)}(\Omega) = \Omega$
- Si $M \neq \Omega$ alors :

$$r_{(\Omega; \beta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \beta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Propriété 3.5.2

f est une rotation d'angle β non nul si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives

M' et N' . On a donc $\begin{cases} MN = M'N' \\ \text{mes}(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \beta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

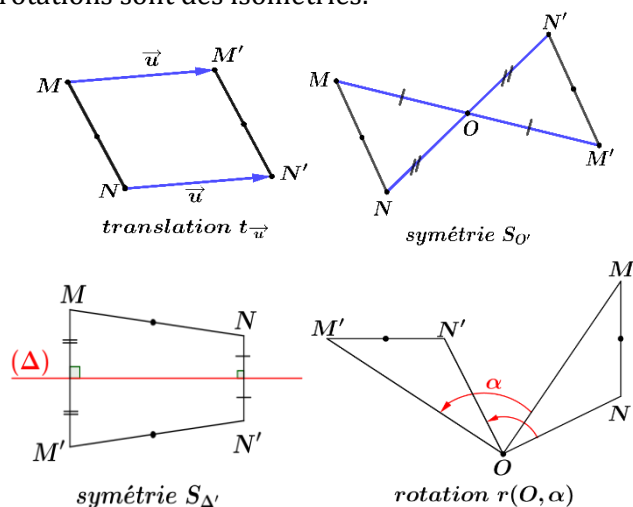
5.2 Isométries**5.2.1 Définition et propriétés fondamentales****Définition 3.5.5**

On appelle **isométrie du plan** toute application f du plan dans lui-même qui conserve la distance.

Soit M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f on a : $M'N' = MN$.

Remarque

Les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.



Exemple :

Une homothétie de rapport 3 n'est pas une isométrie car elle ne conserve pas les distances.

Consigne 3.5.1 : Conservation du produit scalaire

Soit f une isométrie, A, B, C trois points distincts d'images respectives A', B', C' par f .

- Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2 .
(On pourra utiliser l'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$)
- Exprimer $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ en fonction de $A'B'^2, A'C'^2$ et $B'C'^2$.
- En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 3.5.3 : Conservation du produit scalaire

Soit f une isométrie.

Pour tous points A, B, C, D d'images respectives A', B', C', D' par f , on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

On dit que les isométries conservent le produit scalaire

Consigne 3.5.2 : Conservation du barycentre

Soit f une isométrie. ABC est un triangle. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par G le centre de gravité du triangle ABC . Soit A', B', C', I' et G' les images respectives des points A, B, C, I et G par f .

- Démontrer que I' est le milieu de $[B'C']$.
- Démontrer que $A'G' = \frac{2}{3}A'I'$
- En déduire que G' est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 3.5.4 : Conservation du barycentre

Soit f une isométrie, $(A, a), (B, b), (C, c)$ des points pondérés et A', B', C' les images respectives des points A, B et C par f , G un point et G' son images par f . G est le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$ si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés $(A', a), (B', b), (C', c)$.

On dit que les isométries conservent le barycentre

5.2.2 Isométries et configurations

5.2.2.1 Images de figures usuelles

Propriété 3.5.5

Soit f une isométrie, A, B, C trois points distincts d'images respectives A', B', C' par f .

- L'image par f de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'iomage par f de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

Remarque

On déduit de la propriété 1 que l'image d'un ensemble de points alignés par une isométrie est un ensemble de points alignés.

On dit que les isométries conservent l'alignement

Propriété 3.5.6

Soit f une isométrie, (\mathcal{C}) un cercle de centre O et de rayon r et O' l'image de O par f .

L'image par f du cercle (\mathcal{C}) est le cercle de centre O' et de rayon r .

5.2.2.2 Conservation des mesures d'angles

Propriété 3.5.7 : Conservation des mesures d'angles

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par f . On a :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

On dit que les isométries conservent les angles non-orientés.

Remarque

On déduit de cette propriété que par une isométrie :

- les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
- les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

On dit que les isométries conservent le parallélisme et l'orthogonalité

5.2.2.3 Conservation des aires

Propriété 3.5.8

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par f .

Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

On dit que les isométries conservent l'aire des triangles

Remarque

L'image d'un cercle étant un cercle de même rayon, les **isométries conservent aussi l'aire des cercles.**

Plus généralement, on admettra que **les isométries conservent les aires.**

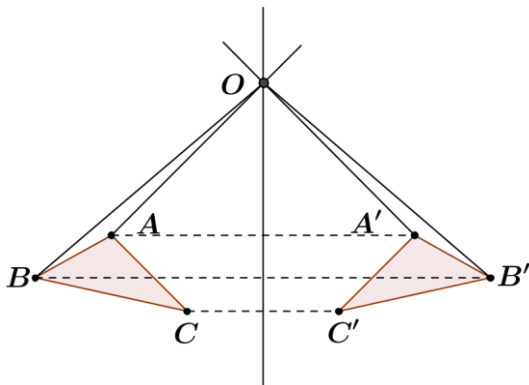
5.2.3 Propriétés**Propriété 3.5.9**

Toute isométrie conserve :

- l'alignement des points ;
- le parallélisme de droites ;
- l'orthogonalité de droites ;
- la mesure des angles ;
- le barycentre de points pondérés ;
- les longueurs ;
- les aires.

5.2.4 Détermination d'une isométrie**Consigne 3.5.3**

On donne les points A, B, C, A', B', C' tels que : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.



Sur cette figure, OAA' et OBB' sont des triangles isocèles en O

1. Trouver trois isométries qui appliquent A sur A' .
2. Trouver deux isométries qui appliquent A sur A' et B sur B' .
3. Parmi ces deux isométries, en trouver une qui, de plus, applique C sur C' .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Propriété 3.5.10

ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.

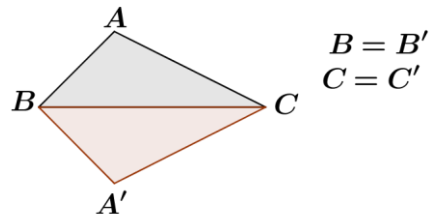
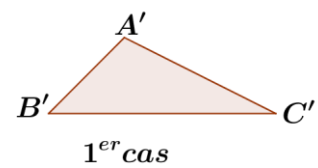
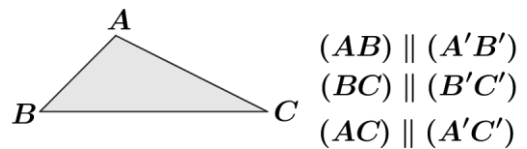
Il existe une isométrie et une seule qui applique : A sur A' , B sur B' et C sur C' .

On dit que les sommets homologues de deux triangles superposables déterminent une isométrie et une seule.

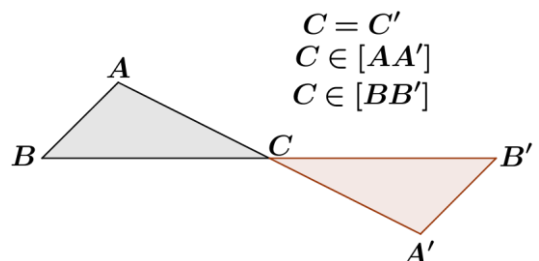
Consigne 5.4 : Consolidation

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$. Ils déterminent l'isométrie i qui applique A sur A' , B sur B' et C sur C' .

Dans chacun des cas suivants, nommer cette isométrie.



2^{ème} cas



3^{ème} cas

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

5.2.5 Construction de l'image d'un point par une isométrie**Consigne 3.5.5**

ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$.

M étant un point quelconque du plan, construisez son image par l'isométrie i qui applique : A sur A' , B sur B' et C sur C' .

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 10min

5.3 Déplacement – Antidépacement (ou retournement)

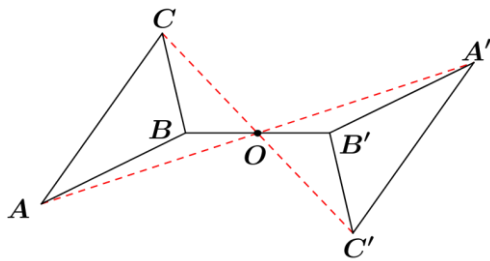
Parmi les isométries connues, on constate que certaines, comme **les translations conservent les angles orientés**, alors que d'autres, comme **les symétries orthogonales transforment tout angle orienté en son opposé**. Ces résultats conduisent à distinguer deux sortes d'isométries.

Définition 3.5.6

- Un **dépacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un **antidépacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

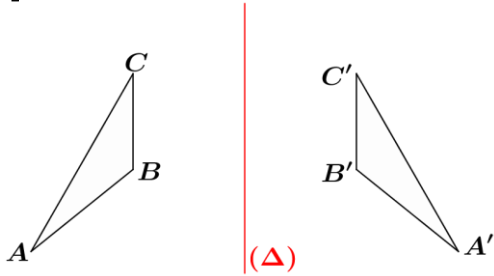
Exemples :

1. Les translations, les symétries centrales, les rotations sont des dépacements



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés dans le même sens.

2. Les symétries orthogonales sont des antidéplacements.



Les triangles ABC et A'B'C' sont orientés en sens contraire.

Propriété 3.5.11

Soit f et g deux isométries du plan.

- Si f et g sont des déplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
- Si f et g sont des antidéplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement
- Si f est déplacement et g un antidéplacement, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des antidéplacements.
- Si f est un déplacement, alors f^{-1} est un déplacement.
- Si f est un antidéplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.

5.4 Composée de deux homothéties de même centre

Consigne 3.5.6 : Découverte

On donne le triangle ABC et le point O. h_1 est l'homothétie de centre O et de rapport k_1 et h_2 est l'homothétie de centre O et de rapport k_2 ; A_1, B_1, C_1 les images respectives des points A, B, C par h_1 et A', B', C' les images respectives des points A_1, B_1, C_1 par h_2 .

1. Justifier que $\overrightarrow{OA'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC}$.
2. Justifier de même que $\overrightarrow{OA} = k_1 k_2 \overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{OB} = k_1 k_2 \overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC} = k_1 k_2 \overrightarrow{OC'}$
3. Déduisez une application du plan qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

La transformation $h_2 \circ h_1$ associe à tout point M le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OM}$ est l'homothétie de centre O et de rapport $k_1 k_2$

Propriété 3.5.12

La composée de deux homothéties de même centre O et de rapport k_1 et k_2 , est l'homothétie de centre O et de rapport $k_1 k_2$

Remarque

h_1 et h_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 et de même centre O.

1. $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$
2. Si $k_1 k_2 = 1$ alors $h_2 \circ h_1$ est l'application identique.
3. Si $k_1 k_2 = -1$, alors $h_2 \circ h_1$ est la symétrie de centre O.

Consigne 3.5.7 : Consolidation

On donne le triangle ABC et le point O. h_1 est l'homothétie de centre O et de rapport 2 et h_2 est l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $h_2 \circ h_1$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

5.5 Composée de deux rotations de même centre

Consigne 3.5.8 : Découverte

r_1 est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}_1)$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}_2)$.

Soit M un point quelconque du plan et M' et M_1 deux points du plan tels que $r_1(M) = M_1$ et $r_2(M_1) = M'$.

1. Justifie que $OM = OM'$.
2. Justifie que $mes(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2)$.
3. Déduire une application du plan qui applique M sur M'.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Exploitation des résultats

$r_2 \circ r_1$ associe à tout point M le point M' tel que :

$\begin{cases} OM' = OM \\ mes(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2) \end{cases}$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2)$.

Propriété 3.5.13

La composée de deux rotations de même centre O et d'angles orientés $(\widehat{\alpha}_1)$ et $(\widehat{\alpha}_2)$, est une rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2)$.

Remarque

r_1 et r_2 sont deux rotations de centre et d'angles respectifs α et α' .

1. $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$
2. Si $(\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2) = (\widehat{0})$, alors $r_2 \circ r_1$ est l'application identique.
3. Si $(\widehat{\alpha}_1) + (\widehat{\alpha}_2) = (\widehat{\pi})$, alors $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centre O.

Consigne 3.5.9 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O. r_1 est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\frac{\pi}{6})$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\frac{\pi}{2})$.

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $r_2 \circ r_1$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

5.6 Composée d'une homothétie et d'une translation

Consigne 3.5.10 : Découverte

h est l'homothétie de centre O et de rapport k et t la translation de vecteur \vec{u} . Soit G un point invariant par $h \circ t$ et $G_1 = t(G)$. On pose $M_1 = t(M)$ et $M' = h(M_1)$.

1. Justifie que :

(a) $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM_1}$.

(b) Justifier que $\overrightarrow{OG} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$

2. (a) Dédire que $\overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{GM}$.

(b) Dédire une application du plan qui applique M sur M'.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

$h \circ t$ associe à tout point M le point M' tel que

$\overrightarrow{GM'} = k\overrightarrow{GM}$ est l'homothétie de centre G et de rapport k .

Propriété 3.5.14

La composée d'une homothétie h de rapport non nul k et d'une translation t est une homothétie $h \circ t$ ou $t \circ h$ de centre G et de rapport k où G est un point invariant par $h \circ t$ ou par $t \circ h$.

Remarque

$$h \circ t = t \circ h$$

Consigne 3.5.11 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O et le vecteur \vec{u} . h est l'homothétie de centre O et rapport 2 et t la translation de vecteur \vec{u} .

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $h \circ t$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.5.15

h est une homothétie de centre K et de rapport k différent de 1, O un point distinct de K.

Il existe deux translations t_1 et t_2 et une homothétie h' de centre O et de rapport k telles que :

$$h = t_1 \circ h' \text{ et } h = h' \circ t_2$$

5.7 Composée d'une rotation et d'une translation

Consigne 3.5.12 : Découverte

r est une rotation de centre O et d'angle orienté non nul. t est une translation de vecteur \vec{u} . La rotation r et la translation t sont des déplacements. Les composées $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des déplacements.

1. Justifier que $r \circ t$ et $t \circ r$ ne sont pas des translations.

2. En déduire que $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des rotations.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

Propriété 3.5.16

La composée d'une rotation d'angle non nul ($\hat{\alpha}$) et d'une translation est une rotation d'angle orienté ($\hat{\alpha}$).

Consigne 3.5.13 : Consolidation

On donne le triangle ABC, le point O et le vecteur \vec{u} . r est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\frac{\pi}{3})$ et t la translation de vecteur \vec{u} .

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par $t \circ r$.

Stratégie : TI : 5min TG : 5min TC : 7min

Propriété 3.5.17 : Décomposition d'une rotation

r est une rotation de centre K et d'angle ($\hat{\alpha}$), O un point distinct de K.

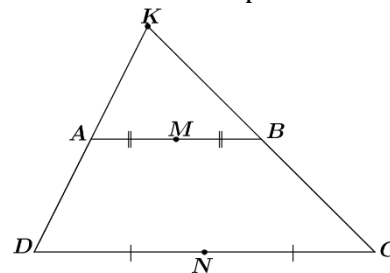
Il existe deux translations t_1 et t_2 et une rotation r' de centre O et d'angle ($\hat{\alpha}$) telles que :

$$r = r' \circ t_1 \text{ et } r = r' \circ t_2.$$

5.8 Utilisation des transformations du plan

Consigne 3.5.14 : Alignement de points

On considère le trapèze ABCD suivant :



- K est le point d'intersection des droites (AD) et (BC)
- $(AB) \parallel (DC)$
- M milieu de [AB]
- N milieu de [DC]

Démontrer que le milieu M de [AB], le milieu N de [DC] et le point K sont alignés. Pour cela :

1. Justifier qu'il existe une homothétie h et une seule qui transforme A en D et B en C
2. Préciser le centre de cette homothétie.
3. Précise l'image du segment [AB] par h .
4. (a) Justifier que $h(M) = N$.
(b) Que peut-on conclure ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Consigne 3.5.15 : Egalité de distances

On considère un triangle quelconque ABC. Sur les côtés [AB], [BC] et [CA], extérieurement, on construit les triangles équilatéraux ABC' , BCA' et CAB' . r_1 est la rotation de centre A et d'angle orienté $(\widehat{AC'}, \widehat{AB})$ et r_2 est la rotation de centre B et d'angle orienté $(\widehat{BC'}, \widehat{BA})$. Démontrer que $AA' = BB' = CC'$. Pour cela :

1. Justifier que $BB' = CC'$. (Tu pourras chercher l'image de [BB'] par r_1)
2. Justifier que $AA' = CC'$. (Tu pourras chercher l'image de [AA'] par r_2)

3. Que peut-on conclure ?

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Evaluations formatives

Exercice 1

On considère le carré ABCD de centre de symétrie O. M, N, P et Q sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

- Démontrer que les triangles AMO et OPD sont superposables.
- Trouver une translation t et une rotation r de centre P telle que $f(A)=O$, $f(M)=P$ et $f(O)=D$ dans chacun des cas suivants :
 - $f = r \circ t$.
 - $f = t \circ r$.

Exercice 2

Démontrer que dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.

Exercice 3

Les triangles ABC et DEF sont équilatéraux et superposables.

Démontrer que les médiatrices de segments [AD], [BE] et [CF] sont parallèles ou concourantes.

Séquence n°6 : Représentation graphique de fonctions et transformations du plan

6.1 Fonction associées : Représentation graphique de fonctions et translations

6.1.1 Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$

Consigne 3.6.1 : Découverte

Le plan est muni du repère (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C_f) et définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et g est une fonction de représentation graphique (C_g) et définie par $g(x) = \sqrt{x - 3} + 2$.

- Représenter dans le repère (O, I, J) la courbe (C_f).
- Placer le point $O'(3, 2)$ puis tracer le vecteur $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$.
- Représenter de nouveau la courbe (C_f) dans le repère (O', I', J') avec ($O'I'$) \parallel (OI) et ($O'J'$) \parallel (OJ).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

La courbe (C_f) de la fonction f dans le repère (O', I', J') représente la courbe (C_g) de la fonction g dans le repère (O, I, J). La courbe (C_g) est donc l'image de la courbe (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u} = 3\vec{OI} + 2\vec{OJ}$.

Propriété 3.6.1

Le plan est muni du repère (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C_f).

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$.

Consigne 3.6.2 : Consolidation

Le plan muni du repère (O, I, J). On considère la représentation graphique (C_f) de la fonction $f(x) = x^2$ et g est la fonction de représentation graphique (C_g) et définie par $g(x) = (x + 1)^2 - 2$.

- Représenter la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J).
- Déduire la représentation de la courbe (C_g).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

6.1.2 Représentations graphiques de fonctions polynômes du second degré

Consigne 3.6.3 : Découverte

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). on considère les fonction $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

- Tracer dans le repère (O, I, J), la courbe représentative (C_f) de la fonction f .
- Mettre $g(x)$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α et β des réels à préciser.
- Placer le point $A(\alpha, \beta)$ puis tracer le vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$.
- Tracer de nouveau la courbe (C_f) dans le repère (A, I', J') avec (AI') \parallel (OI) et (AJ') \parallel (OJ).

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Exploitation des résultats

La courbe (C_f) de la fonction f dans le repère (O', I', J') représente la courbe (C_g) de la fonction g dans le repère (O, I, J). La courbe (C_g) est donc l'image de la courbe (C_f) par la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{OI} - \frac{5}{4}\vec{OJ}$.

Propriété 3.6.2

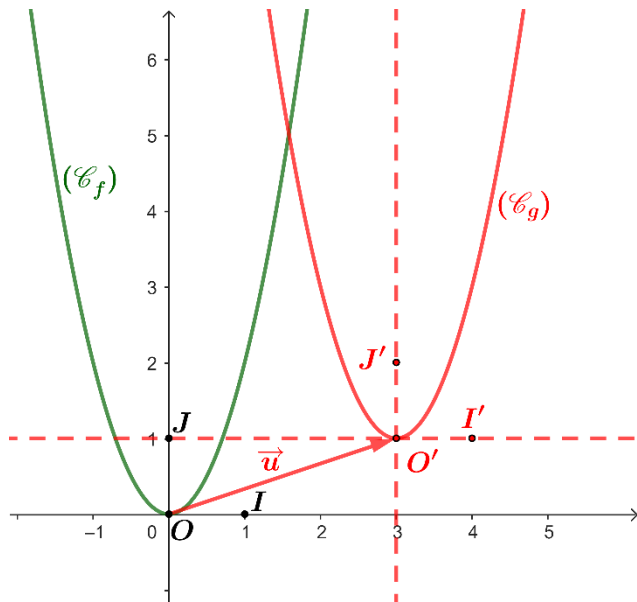
Soit g la fonction polynôme du second degré définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$.

La fonction g peut se mettre sous la forme $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.

Dans le plan muni du repère (O, I, J), sa représentation graphique est l'image par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$, de la parabole d'équation $y = ax^2$.

Exemple illustratif :

(C_f): $y = ax^2$ et (C_g): $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$



Les courbes (C_f) et (C_g) sont superposables.

Remarque

Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) , a étant un nombre réel différent de zéro, la courbe d'équation $y = ax^2$ est une parabole d'axe (OJ) et de sommet O .

Consigne 3.6.4 : Consolidation

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

Construire la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^2 + 6x + 7$.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

6.1.3 Représentations graphiques de fonctions homographiques

Définition 3.6.1 : Fonction homographique

α et β étant des nombres réels et k un nombre réel différent de zéro.

On appelle fonction homographique, toute fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$

Remarque

Dans le plan muni du repère (O, I, J) , k étant un nombre réel différent de zéro, la courbe d'équation $y = \frac{k}{x}$ est une hyperbole de centre O .

Propriété 3.6.3

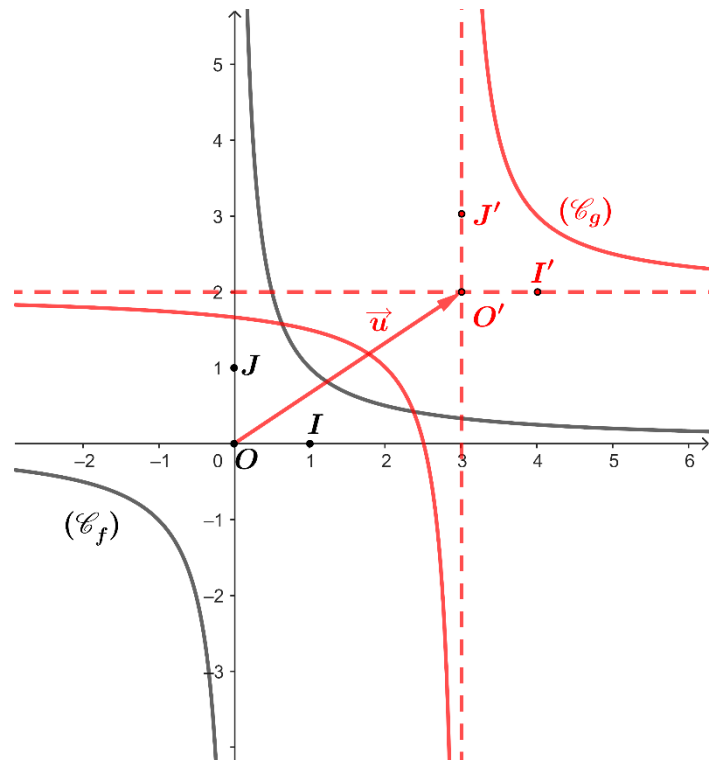
g est la fonction homographique définie par :

$$g(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}^*)$$

Dans le plan muni du repère (O, I, J) , la représentation graphique (C_g) de g est l'image par la translation de vecteur $\vec{u} = \alpha\vec{OI} + \beta\vec{OJ}$, de l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$.

Exemple illustratif :

$$(C_f): y = \frac{1}{x} ; (C_g): \frac{k}{x-3} + 2$$



Consigne 3.6.5 : Consolidation

Don considère la fonction rationnelle suivante :

$$g(x) = \frac{-2x-5}{x+3}$$

Le plan est muni du repère (O, I, J) .

1. Justifier que g est une fonction homographique.
2. Construire sa représentation graphique (C_g) dans le plan muni du repère (O, I, J) .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 10min

6.1.4 Représentations graphiques des fonctions

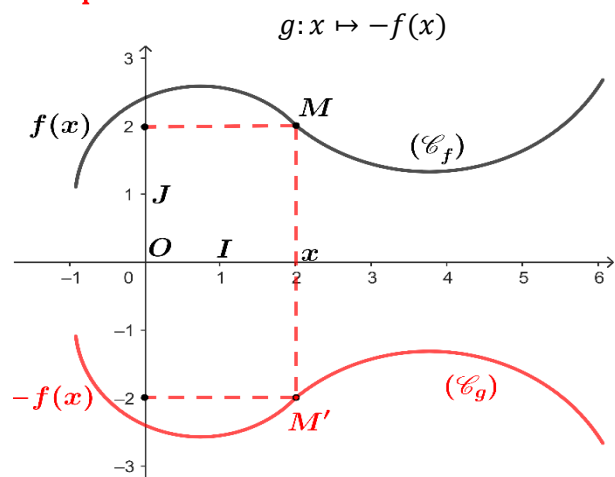
$$x \mapsto -f(x) ; x \mapsto f(-x) ; x \mapsto -f(-x)$$

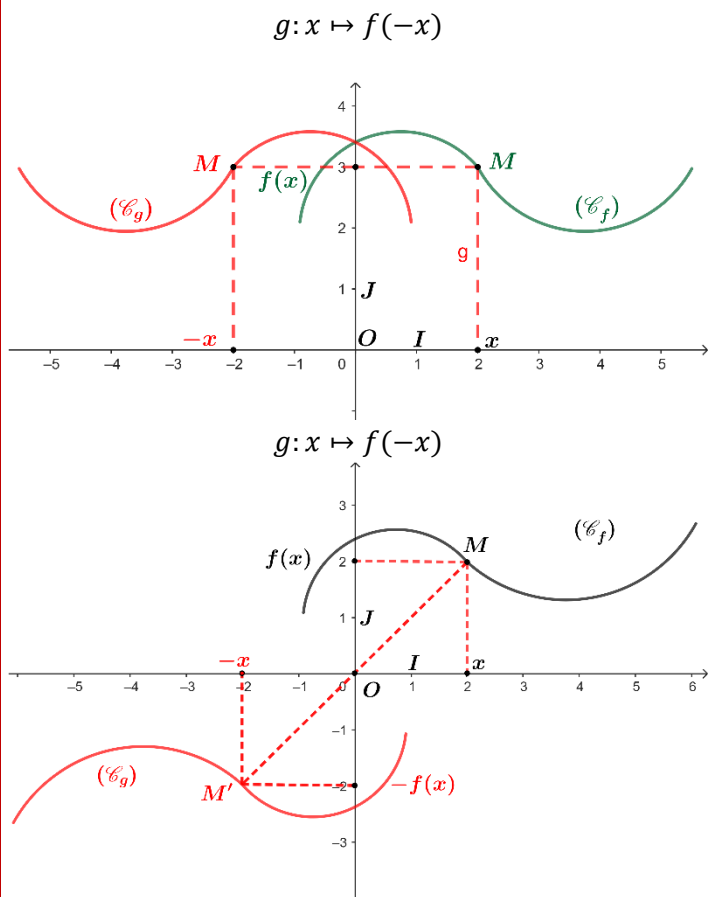
Propriété 3.6.4

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J) . f est une fonction de représentation graphique (C_f) .

- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OI) .
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à O .
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OJ) .

Exemple illustratifs :





Consigne 3.6.6 : Consolidation

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). construire la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes f, g, h , de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = -(x - 3)^2 ; g(x) = \sqrt{-x} \text{ et } h(x) = -\sqrt{-x}$$

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

6.1.5 Représentations graphiques des fonctions $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto f(|x|)$

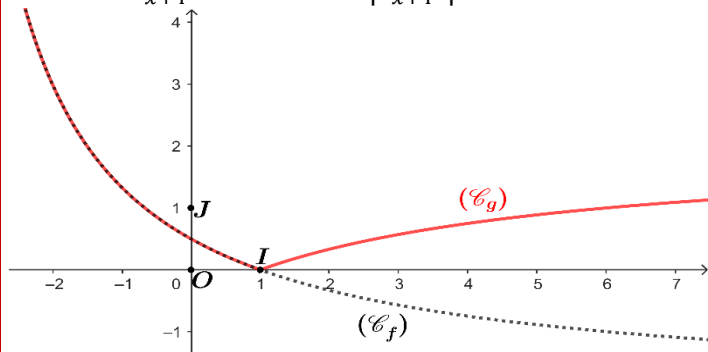
Propriété 3.6.5

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C_f) .

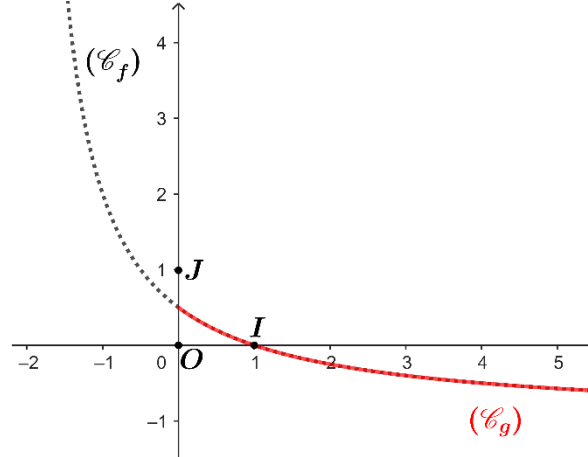
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OI) avec $y \geq 0$.
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ est le symétrique de (C_f) par rapport à (OI) avec $x \geq 0$.

Exemple illustratifs :

$$(C_f): y = \frac{-2x+2}{x+4} \text{ et } (C_g): y = \left| \frac{-2x+2}{x+4} \right|$$



$$(C_f): y = \frac{-x+1}{x+2} \text{ et } (C_g): y = \frac{-x+1}{x+2}; x \geq 0$$



6.2 Propriétés géométriques des représentations graphiques de fonctions

62.1 Fonction paires - Fonctions impaires - Fonctions périodiques

Définition 3.6.2

Une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , d'ensemble de définition D_f est dite :

- **paire** lorsque, pour tout x élément de D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- **impaire** lorsque, pour tout x élément de D_f , $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
- **périodique** o de période T si et seulement si $\forall x \in D_f, (x + T) \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

Remarque

Etudier la parité d'une fonction, c'est chercher la preuve que cette fonction est : soit paire, soit impaire, soit ni paire ni impaire.

Remarque

- Les fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est périodique de période $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Consigne 3.6.7 : Consolidation

1. Étudier la parité de la fonction f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :
 - (a) $f(x) = x^3 + 3x$.
 - (b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$.
 - (c) $h(x) = 2x^2 + x - 3$
2. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est périodique de période T .
 - (a) $f(x) = \sin^2 x$ $T = \pi$.
 - (b) $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $T = 2\pi$.
3. Donner une période de la fonction, dans chacun des cas suivants.
 - (a) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\right)$.

(b) $f(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(c) $f(x) = \sin x + \sin 2x$.

Stratégie : TI : 10min TG : 7min TC : 20min

62.2 Eléments de symétries de la représentation graphique d'une fonction

Définition 3.6.3

Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et D_f son ensemble de définition. Soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan et (Δ) la droite d'équation $x = a$.

On dit que le point $A(x_0, y_0)$ est un centre de symétrie pour la courbe (\mathcal{C}) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_f, (2x_0 - x) \in D_f \\ \frac{f(2x_0 - x) + f(x)}{2} = y_0 \end{array} \right.$$

On dit que la droite $(\Delta) : x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (\mathcal{C}) si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{array} \right.$$

Consigne 3.6.8 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthogonal

$$(O; \vec{i}; \vec{j}). \text{ Soit } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 8x^3 - 12x^2 + 6x + 9$$

$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 2}{2x^2 + 12x + 9}$; (Δ) est la droite d'équation $x = -3$ et le point $A\left(\frac{1}{2}, 10\right)$.

1. Montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f .
2. Montrer que le point A est un centre de symétrie pour la courbe représentative de la fonction g .

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

Remarque

Un ensemble est dit symétrique par rapport à zéro si chaque élément de cet ensemble a encore son opposé dans cet ensemble.

6.3 Etudes des fonctions numériques de variables réelles

6.3.1 Plan d'étude d'une fonction

Retenons : Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction f , en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Etudier au besoin la parité et la périodicité de f puis en déduire un domaine d'étude de la fonction f
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en tout point de son ensemble de définition ou en tout point du domaine d'étude.
- Calculer la fonction dérivée f' de f et en déduire son sens de variation.
- Dresser le tableau de variation de f .

- Etudier le comportement de f aux bornes de l'ensemble d'étude et en déduire les éventuelles asymptotes.
- Etudier la position relative de la courbe représentative de f avec l'asymptote d'équation $y = ax + b$ si elle existe.
- Tracer la courbe représentative de f après avoir éventuellement dressé une table de valeurs.

6.3.2 Notion de branches infinies

Propriété 3.6.5 : Asymptote horizontale

Soit f une fonction de courbe représentative (C_f) et b un nombre réel.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Propriété 3.6.6 : Asymptote verticale

Soit f une fonction de courbe représentative (C_f) et a un nombre réel.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f) .

Propriété 3.6.7 : Asymptote oblique

Soit f une fonction de courbe représentative (C_f) , (Δ) la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$).

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, on dit que la droite (Δ) est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, $b \in \mathbb{R}$, on dit que la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

6.3.3 Position relative d'une courbe par rapport à la droite d'équation $y = ax + b$

Propriété 3.6.8

Soit I une partie du domaine de définition de la fonction f , (D) la droite d'équation $y = ax + b$ et (C_f) la courbe représentative de f .

- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) < 0$, alors on dit que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle I .
- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) > 0$, alors on dit que la courbe (C_f) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle I .
- Si $\forall x \in I, f(x) - (ax + b) = 0$, alors on dit que la courbe (C_f) et la droite (D) se coupent en un point d'abscisse x_0 .

Consigne 3.6.9 : Consolidation

Dans chacun des cas suivants, étudier puis tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

(a) $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 7}{x^2 - 2x - 3}$

(b) $f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 5}$

(c) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 9$.

(d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Stratégie : TI : 15min

TC : 30min

6.3.4 Notion de zéro d'une fonction**Définition 3.6.4 : Zéro d'une fonction**

On appelle **zéro d'une fonction** f , tout nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Propriété 3.6.9

Soit I un intervalle ouvert contenant l'intervalle fermé $[a; b]$. Si f est une fonction continue sur I , strictement monotone sur $[a; b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f admet un zéro et un seul dans l'intervalle $]a; b[$.

Consigne 3.6.10 : Consolidation

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4, 5]$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près :
 - (a) par la méthode de balayage.
 - (b) Par la méthode de dichotomie.

Stratégie : TI : 7min TG : 7min TC : 15min

6.4 Etudes des fonctions $x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \tan x$ **Propriété 3.6.10**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et D_f son ensemble de définition.

- Si f est une fonction paire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(O; \vec{j})$ sur D_f .
- Si f est une fonction impaire, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre O sur D_f ;
- Si f est périodique de période T , on l'étudie le domaine $D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ou $D_f \cap [0, T]$.
- Si f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(A; \vec{j})$ avec $A(a, 0)$.
- Si f admet le point $\Omega(a; b)$ pour centre de symétrie, on peut l'étudier sur le domaine $D_f \cap [a; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre $\Omega(a; b)$.

En résumé, si f est paire ou impaire et périodique de période T , on peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $E = D_f \cap [0; +\infty[\cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ou $E = D_f \cap]-\infty; 0] \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Consigne 3.6.11 : Consolidation

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. (a) Montrer que f est périodique de période 2π .
(b) Déduire un ensemble d'étude E de f .
3. (a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x , on a : $f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$.
(b) Étudier le sens de variation de f sur E puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative (C_f) de f .

Stratégie : TI : 15min

TC : 25min

Evaluations formatives**Exercice 1**

Construire la représentation graphique de la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = (x + 1)^3 + 1$

Exercice 2

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}; g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}; h(x) = \frac{21x^2 - 3x}{2 - x}$$

$$u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8.$$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On donne le point $A(-1, 4)$. f est la fonction définie par $f(x) = 4x^2 - 5x$ et (C_f) sa représentation graphique. Déterminer la fonction g dont la représentation graphique (C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie centrale de centre A .

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère. (C_f) et (C_g) sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 6x - 7$ et $g(x) = x^2 + 8x - 9$. Trouver un vecteur \vec{u} tel que (C_f) soit l'image de (C_g) par la translation de vecteur \vec{u} .