INSPCETION D'ACADEMIE
DE PIKINE GUEDIAWAYE

CAISSE DE DEPÔT ET DE CONSIGNATION

CENTRE REGIONAL DE FORMATION DES PERSONNELS DE L'EDUCATION

FASCICULE DE MATHEMATIQUES

PREMIERES S1&S3

Equipe d'écriture

Mouhamadou DJIGO : Professeur au Lycée Seydina Issa Rohou Lahi
Babacar DIOP : Professeur au Lycée Seydina Limamou Laye
Cheikh Tidiane DIOP : Professeur au Lycée de Pikine
El Hadji Demba Wade DIOP : Professeur au Lycée Banque Islamique
Youssoupha DIACK : Professeur au Lycée de Mbao
Younouss BOYE : Professeur au Lycée Pikine Est
Momar Talla GUISSE : Professeur au Lycée Mame Yelli Badiane
Matar DIAGNE: Professeur au Lycée de Thiaroye
Diène NGOM : Proviseur du Lycée Keur Massar
Ndane SARR: Proviseur du Lycée Seydina Issa Rohou Lahi

Superviseurs

Niowy FALL : Inspecteur de l'Enseignement Moyen Secondaire à l'IA de Dakar
Hameth Saloum FALL: Formateur au CRFPE de Dakar

Table des matières

INTRODUCTION

Ce fascicule couvre tout le programme de mathématiques de Première S1.

Chaque chapitre est réparti en trois rubriques :

- « **Exercices de restitution des connaissances** » : ce sont des exercices qui permettent à l'élève de contrôler les savoirs déclaratifs (définitions, théorèmes, propriétés, règles …), préalables pour toute activité mathématique.
- « **Exercices d'application** » : ce sont des exercices qui permettent d'appliquer les savoirs déclaratifs, de développer des savoir-faire, de faire acquérir des savoirs procéduraux.
- « **Exercices de synthèse** » : ce sont des exercices qui, au-delà du chapitre, font appel à d'autres ressources.

Leçon 1 : APPLICATIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Reproduire et compléter les énoncés ci-dessous par le mot qui convient :

Soit f une application de A vers B.

a. f est…si tout élément de B a au plus un antécédent par f dans A.
b. f est…si tout élément de B a au moins un antécédent par f dans A.
c. f est…si tout élément de B a un unique antécédent par f dans A.

Exercice 2

Soit f une fonction de ℝ vers ℝ ; I est un intervalle de ℝ.

a. On appelle … de f à I, la fonction $g : I \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f(x)$$
b. f est alors appelé un … de g à ℝ.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit l'application $f :]0\,;1] \to [-2\,;\,1[$

$$x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

Démontrer que f est une injective.

Exercice 4

Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto x^2$$

Démontrer que g est surjective.

Exercice 5

Soit l'application $h : [-2\,;\,5[\to]-5\,;9\,]$

$$x \mapsto -2x+5$$

Démontrer que h est bijective.

Exercice 6

On donne l'application $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}$$

1. Démontrer que k est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 7

On considère les fonctions : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - \sqrt{x}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.
2. Démontrer que g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8

On considère les fonctions : $g :]-1 ; 1[\to \mathbb{R}$ et $f : [-1 ; +6[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad$ $x \mapsto \sqrt{x+1}$

Démontrer que f est un prolongement de g à l'intervalle [-1 ; +6 [.

Exercice 9

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x - E(x)}$

Déterminer la restriction de f à l'intervalle [-1 ; 2].

Exercice 10

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Simplifier f(x) sur D_f.
3. Déterminer un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

Exercices de synthèse

Exercice 11

Dans chacun des cas ci-dessous, l'application f est-elle injective, surjective ou bijective ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$
3. $f : \mathbb{R} \to [-3 ; +\infty[$, $x \mapsto 2x^2 - 3$
4. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (2x+y ; x-y)$
5. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$
6. $f : (P) \to (V)$, $M \mapsto -\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$
7. $f : (P) \to (V)$, $M \mapsto -\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$

Exercice 12

1. Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

   $\frac{x^2 - 3}{2x^2 + 1} = m,$

2. En déduire deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grands possibles, pour que l'application f ci-dessous soit bijective.

$$f : E \to F$$
$$x \longmapsto \frac{x^2-3}{2x^2+1} \quad ,$$

3. Déterminer alors l'application réciproque f^{-1} de f.

Exercice 13

On définit dans l'ensemble V des vecteurs du plan, l'application $f : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$\forall \vec{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$ et $\forall (\vec{u},\vec{v}) \in V^2$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

1. Démontrer que $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. Soit $K = \{ \vec{u} \in V \,/\, f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.

a. Démontrer que si f est injective, alors $K = \{\vec{0}\}$.

b. Démontrer que si $K = \{\vec{0}\}$, alors f est injective.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

Leçon 2. POLYNOMES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies (V) ou fausses (F).

a. Un polynôme réel de degré n admet au moins n racines.

b. Si un polynôme réel de degré n admet plus de n racines alors il est nul.

c. Un polynôme réel de degré n admet au plus n racines.

d. Le reste de la division euclidienne de P(x) par $(x-\alpha)$ est $P(\alpha)$.

e. Soit P et Q deux fonctions polynômes. Si $d°P = n$ et $d°Q = m$ alors $d°(P \times Q) = n \times m$.

Exercice 2

Soit x et y des nombres réels. Pour chacune des égalités ci-dessous, préciser si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+y^2)$.
2. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - 2xy + y^2)$.
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Exercice 3

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie (V) ou fausse (F).

a. Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

b. Tout polynôme admet une racine réelle.

c. Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.

d. Si a est une racine d'un polynôme R(x) alors R(x) est factorisable par $x - a$.

Exercices d'application

Exercice 4

Soit a et b deux réels distincts. On définit le polynôme f(x) par :

$f(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$

1. Calculer f(a) et f(b).
2. Factoriser alors le polynôme f(x).

Exercice 5

Soit a un réel. On considère la fonction polynôme g de degré 3 définie par :

$g(x) = x^3 - (3 + 2a)x^2 + (6a + 2)x - 4a$.

1. Prouver que $g(2a) = 0$.
2. Ecrire $g(x)$ sous forme d'un produit de polynômes du premier degré.

Exercice 6

On considère le polynôme P(x) défini par : $P(x)=-x^3-x^2+10x-8$

1. Ecrie P(x) sous forme de produit de facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x) = 0.
3. En déduire la résolution des équations ci-dessous :

a. $-(x-1)^3-(x-1)^2+10(x-1)-8 = 0$; b. $-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x}-8=0$.

Exercice 7

1. Déterminer le polynôme P (x) de degré 4 tel que :

   - Le coefficient de x^4 dans P (x) vaut 1 ;
   - P (x) est divisible par $x^2 + x + 1$;
   - Le reste de la division P (x) par $x^2 - 1$ est $- 3x + 9$;

2. Donner les racines réelles de l'équation P (x) =0.

Exercices de synthèse

Exercice 8

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots a_1 x + a_0$, avec les a_i des entiers naturels un polynôme de degré n à coefficients entiers. Soit α un entier naturel non nul.

a. Montrer que si α est une racine de P(x) alors α est un diviseur de a_0.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier

c. Déduire de 1. une méthode pour trouver une racine évidente d'un polynôme.

Application.

Trouver une ou deux racines évidentes pour chacun des polynômes ci-dessous :

$P(x) = x^3-3x^2 + 4x-2$; $K(x)= 2x^4-10x^3+2x^2+10x-4$; c.$Q(x)=x^3-13x^2 + 59x - 87$.

Exercice 9

Soit l'équation (E) suivante : $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x - 9} = 18$

1. Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels l'équation (E) est définie .

2. En posant $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 9}$; vérifier que l'équation (E) devient :

   $y^2 + y - 12 = 0$.

3. En déduire les valeurs possibles de y et achever la résolution de (E).

Exercice 10

Soit l'équation (E) : $x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 12x + 1 = 0$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation.

2. Montrer que si α est une solution de (E) alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E) .

3. Soit $X = x + \frac{1}{x}$. Montrer que l'équation (E) se ramène à (E'): $X^2 - 12X + 35 = 0$;

4. Résoudre (E'). En déduire les solutions de (E).

Exercice 11

Soit l'équation : $x^2 + 7x - 4 = 0$

a. Prouver que cette équation admet deux solutions distinctes x' et x ''.

b. Sans trouver ces solutions. Déterminer la valeur de : $X = x'^2 + x''^2$; $Y = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ et

$Z = \frac{x'-1}{x''} + \frac{x''-1}{x'}$.

c. Former une équation qui a pour solution $X' = \frac{x'^2 + x''}{x''}$ et $X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci-dessous :

1. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x + y = -2 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{41}{400} \end{cases}$.

Exercice 13

On appelle polynôme réciproque de degré n tout polynôme P(x) vérifiant : $\begin{cases} d°P = n \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^n} \end{cases}$

1. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots a_1 x + a_0$, avec les a_i des réels et $a_n \neq 0$ un polynôme de degré n.

a. Montrer que si 0 est une racine de P(x) alors $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots a_1 x$.

b. En déduire que si 0 est une racine de P(x) alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^* , P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x^3 + \ldots\ldots + a_1 x^{n-1}}{x^n}.$$

2. Soit P(x) un polynôme réciproque de degré n.

a. Montrer que si α est une racine de P(x) alors α est non nulle et $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P(x).

b. Montrer que si n est impair alors -1 est une racine de P(x).

3. Trouver la forme générale des polynômes réciproque de degré 3.

Application : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

4. Déterminer le polynôme réciproque de degré 5 admettant pour racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2 - \sqrt{3}$ tel que $P(0) = 2$.

5. On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $P(x) = x^4 - (6 - \sqrt{5})x^3 + (2 - 6\sqrt{5})x^2 - (6 - \sqrt{5})x^2 + 1$.

a. Montrer que $\alpha^2 = 1 + \alpha$ puis en déduire α^3et α^4 en fonction de α .

b. En déduire alors que α est une racine de $P(x)$.

c. En utilisant la question 2., résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x) = 0.

Exercice 14

1. a. Former un polynôme p(x) du second degré tel que pour toute valeur de x on ait
$p(x) - p(x - 1) = x$. (*)

b. En remplaçant x par 1, 2, 3, …et n, n entier naturel non nul dans (*) déduire une expression simple de : $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1) + n$.

2. Déterminer un polynôme g(x) de degré 3 tel que : $g(x) - g(x - 1) = x^2$.

En déduire une expression simple de $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

3. Trouver une expression simple de $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Exercice 15

Soit $P(x) = 12x^4 + 4x^3 + px^2 + qx + 2$

Déterminer les réels p et q tels que $P(x)$soit divisible par $(x + 2)$ et admet -9 comme reste dans la division euclidienne par $(x - 1)$.

Exercice 16

1. a. Déterminer les polynômes de degré 3 dont les divisions par (x-1) ; (x-2) et (x-3) donnent le même reste 36.

b. Déterminer celui d'entre eux, qui est divisible par (x-4).

2. a. Déterminer un polynôme de degré 3 tel que pour tout réel x : $p(x) - p(x - 1) = x^2 + x$

b. En déduire une expression simple de $S_n = 1x2 + 2x3 + \ldots\ldots + n(n + 1)$.

Exercice 17

Soit n un entier naturel non nul.

1. Vérifier que pour tout réel x : $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1})$

2. Montrer que le polynôme $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ est factorisable par $(x - 1)^2$.

3. Soit p(x) et q(x) deux polynômes tels que q(x)= p(x) +1.

a. Démontrer que $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est factorisable par p(x)×q(x).

b. En déduire que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est factorisable par $(x - 2)(x - 1)$

Montrer que $p(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est factorisable par $q(x) = x(x + 1)(2x + 1)$;

Expliciter r(x) tel que $p(x) = q(x).r(x)$

Exercice 18

Soit p(x) un polynôme et α un réel non nul tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $p(x) = p(x + \alpha)$.

On considère le polynôme q(x) tel que : $q(x) = p(x) - p(\alpha)$.

1. Calculer $q(\alpha)$, $q(2\alpha)$, $q(3\alpha)$.
2. Soit n un entier naturel non nul , calculer $q(n\alpha)$.
3. Montrer que p est un polynôme constant

Exercice 19

Le but de l'exercice est d'établir l'égalité suivante : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

On pose $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

1. Calculer $\alpha^3 + \beta^3$ et puis $\alpha\beta$

2. Démontrer que, pour tous réels $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta)$

3. En déduire, que le réel $\alpha + \beta$ est solution de l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$.

4. Résoudre l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$ puis conclure.

Exercice 20

Montrer que $(x + \sqrt{1+x^2}\,)^3 + (x - \sqrt{1+x^2}\,)^3$ est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

Leçon 3 : EQUATIONS ET INEQUATIONS-SYSTEMES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} = b$ si et seulement si…
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} \leq b$ si et seulement si …
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a} \geq b$ si et seulement si …
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $|a| \geq b$ si et seulement si : $-b$ …. ou ……
5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $|a| \leq b$ si et seulement si : $-b$ …..

Exercices d'application

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1. $\sqrt{12-4x} = 2x - 2$
2. $\sqrt{x+1} = \sqrt{-2-x}$
3. $\sqrt{x^2+5} = x$
4. $\sqrt{x^2+5x+3} = 2x+1$.
5. $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x+\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x} = 1$.
2. $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x+7} = 6$.
3. $\sqrt{3x+7} + \sqrt{-2x+7} = 4$.
4. $\sqrt{-5x-9} + \sqrt{-x-4} = 5$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci-dessous :

a. $\sqrt{7-x} \leq 3$.

b. $x+3 \geq \sqrt{x+1}$.

c. $\sqrt{2-x} \geq x+4$.

d. $\sqrt{(x+10)^2} \leq 0$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci-dessous :

1. $\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-4}$.

2 .$\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq 2x+1$

3. $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} \geq x-1$

4. $\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 - x^2} \leq 0$.

5. $\sqrt{x^2 + 6x + 6} \geq | 2x+2 |$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci-dessous :

1. $|3x^2 - x + 1| \geq 1$.
2. $|x^2 + 1| \geq 7x+4$
3. $|-x^2 + 6x| \leq 2x+5$
4. $|4x + 9| \geq x^2 + 5x$
5. $|2x^2 - 3x + 1| \geq 3x^2 - x + 1$
6. $|x^2 - 4x + 1| \leq 3x^2 - 4x - 4$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes d'équations ci-dessous en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

1. $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 2y - z = -1 \\ -x - 7y + 6z = 2 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} x - 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 7y + 8z = 21 \end{cases}$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, les systèmes d'équations ci-dessous en utilisant la méthode de combinaison linéaire :

1. $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x - z = 0 \\ -3x - 7y + 6z = 9 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} x - 3y - 2z = -7 \\ x - y + z = -2 \\ x + 7y + 8z = 21 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \end{cases}$, 5. $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + 4y - 2z = -4 \end{cases}$

Exercices de synthèse

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1. $\sqrt{x + 3} - 3 = -\sqrt{x - 5}$
2. $\sqrt{2x - 1} + = - 1 - \sqrt{2x + 3}$
3. $\sqrt{3x - 6} = -\sqrt{x + 2}$

4. $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - x^2} = 0$.
5. $\sqrt{2x + 1} = 1 - \sqrt{2x - 1}$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{y+2} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{3}{y+2} + \dfrac{1}{z} = 8 \\ \dfrac{4}{x+3} + \dfrac{9}{y+2} + \dfrac{1}{z} = 27 \end{cases}$$

Exercice 11:
Bineta est élève en 1^eS_1 au lycée de Pikine. Elle étudie son temps de travail personnel en mathématiques et en français. Pour ces deux matières, elle ne dispose que de 16h de travail personnel par semaine. Son professeur de français lui conseille de travailler au moins 3 h sa discipline et celui de mathématiques au moins 5h.

Comme Bineta aime le français, elle décide de consacrer au moins 3 h de plus en français qu'aux mathématiques enfin de lire un livre par semaine.

1. Préciser un système d'inéquations des contraintes exposées.

2. Représenter graphiquement ce système et proposer à Bineta trois options possibles.

Exercice 12 :
Une société de transport par bateaux veut transporter 650 personnes, 120 véhicules et 160 tonnes de matériels. Elle dispose de 10 bateaux de type A et 11 bateaux de type B.
Un bateau de type A peut transporter en pleine charge 30 personnes, 10 véhicules et 10 tonnes de matériels.
Un bateau de type B peut transporter en pleine charge 50 personnes, 6 véhicules et 10 tonnes de matériels.
Déterminer le nombre de possibilités de transports utilisant pleinement chaque bateau.

Leçon 4 : COMPLEMENTS SUR LE CALCUL VECTORIEL

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

(A , a) , (B , b) , (C , c) , (D , d) sont des points pondérés.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous :

1. Si $a + b + c + d \neq 0$, on appelle barycentre du système $\{ (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) \}$, … point G tel que …

2. Si tous les coefficients sont égaux et non nuls alors G est … des points …… .

Exercice 2

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous :

1. Pour tout réel k non nul , le barycentre du système $\{ (A_i, \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ est aussi le barycentre du système $\{ (A_i, \dots) \}_{1 \leq i \leq 4}$.

2. Dans un système de points pondérés $\{ (A_i, \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ admettant un barycentre, si l'on remplace certains de ces points par leur barycentre affecté … alors le barycentre du système …

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, $A_3(a_3, b_3)$ et $A_4(a_4, b_4)$.

Recopier et compléter l'énoncé ci-dessous :

Si $G(x ; y)$ est le barycentre du système $\{ (A_i, \alpha_i) \}_{1 \leq i \leq 4}$ alors : $\begin{cases} x = \dots \\ y = \cdots \end{cases}$

Exercice 4

Recopier et compléter la propriété ci-dessous.

Soient A et B deux points distincts du plan et k un nombre un nombre réel. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est ….. perpendiculaire à …. en H tel que ….

Exercices d'application

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme de centre O.

Montrer que O est barycentre des points pondérés (A , 1) , (B , 1) , (C , 1) et (D , 1)

Exercice 6

Soit ABCD un parallélogramme.

Construire le barycentre G des points pondérés(A ; 1) , (B ; 1) , (C ; 3) et (D ; 3).

Exercice 7

1. Placer deux points distincts A et B puis construire le barycentre G des points (A ; 1) et (B ; 2) en justifiant la construction.

2. Placer deux points distincts C et D puis construire le point H barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; −1), (C ; 1) et (D ; 2) en justifiant la construction.

Exercice 8

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0 ; 2)$, $B(-5 ; 3)$, $C(2 ; -1)$ et $D(-3 ; 4)$.

Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A ; -1)$, $(B ; 2)$, $(C ; 3)$ et $(D ; 2)$.

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant les conditions.

1. $AB = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$.
2. $AB = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
3. $AB = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 25$

Exercice 10

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant les conditions.

1. $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 24$.
2. $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2$.
3. $AB = 3$ et $MA^2 - MB^2 = 0$.
4. $AB = 5$ et $MA^2 + MB^2 = 10$.

Exercice 11

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant les conditions.

1. $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$.
2. $AB = 3$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
3. $AB = 5$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 25$

Exercice 12

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant les conditions.

1. $AB = 2$ et $\frac{MA}{MB} = 1$.
2. $AB = 4$ et $\frac{MA}{MB} = 2$.
3. $AB = 3$ et $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$.

Exercices de synthèse

Exercice 13

ABCD est un quadrilatère. On note G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Montrer que G est le milieu du segment [IJ].

Exercice 14

Soit ABCD un parallélogramme

1.Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; 2) , (B ; −5) , (C ; 3) et (D ; −1) relativement au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2. Construire G.

Exercice 15

Soit G le barycentre de (A; 1), (B ; -1), (C ; 2) et (D ; 3).

1. Ecrire l'égalité vectorielle traduisant la définition de G.

2. Construire G en utilisant :

a. le barycentre de deux points pondérés.

b. le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 16

On considère un triangle ABC rectangle en A.

1. G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3). Construire le point G en justifiant.

2. G_0 est le barycentre de (A ; 1), (B ; 8) et (C ; -3). Construire le point G_0 en justifiant.

3. Démontrer que le quadrilatère GG_0BC est un parallélogramme.

Exercice 17

Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre des points pondérés

(A ; 2) , (B ; 2) et (C ; 15).

Démontrer que G, C et E sont alignés.

Exercice 18

Soit ABCD un quadrilatère. On note M le point tel que : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Exprimer le point M comme barycentre des points B et C affectés de coefficients positifs.

2. On note G le barycentre de (A ; 1) et (D ; −3). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$. Construire le point G.

3. Construire le point I barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1), (C ; 2) et (D ; −6).

Exercice 19

A , B,C et D sont quatre points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

G est le barycentre des points pondérés (A ; 1) , (B ; 2) , (C ; 2) et (D ; 1)

I est le milieu de [A D] et J le milieu de [BC] .

Montrer que les points G , I et J sont alignés .

Exercice 20

ABCD est un quadrilatère. G est le centre de gravité du triangle ABC.

I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC] .

L est le barycentre des points pondérés (A ;1) et (D ; 3) .

K est le barycentre des points pondérés (C ; 1) , (D ; 3) .

H est le barycentre des points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) , (C ; 1) et (D ; 3) .

On se propose de démontrer que les droites (GD), (JL) et (IK) sont concourantes.

1. Placer en justifiant les points L et K.

2. Démontrer que H est le barycentre des points G et D munis de coefficients que l'on précisera.

3. Démontrer que H est le barycentre des points J et L munis de coefficients que l'on précisera.

4. Démontrer que H est le barycentre des points I et K munis de coefficients que l'on précisera.

5. Conclure.

Exercice 21

Le plan est muni d' un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soient les points A (-3.4), B ($-\frac{7}{2}$; 0) et C(5 ; 2) .

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme .

2. k est un réel différent de 0 et 1. Montrer que le système :

$\{ (A ;\ k), (B ; 1 - k), (C ; -k^2), (D ; k^2) \}$ admet un barycentre .

3. Exprimer les coordonnées de G en fonction de k.

Exercice 22

ABCD est un carré.

1. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\| 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = BC$.

a. Montrer que $A \in (E)$.

b. Déterminer l'ensemble (E).

2. Construire l'ensemble (E).

Exercice 23

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \| \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\|$.

Exercice 24

ABCD est un carré de côté a.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité donnée :

1.$\| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \| = \| 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM} \|$.

2. $\| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} \| = \| \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{DM} \|$.

Exercice 25

Soit A et B deux points du plan tel que AB = a.

On considère l'application f définie dans le plan par : $f(M) = MA^2 - MB^2$.

1.Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par le barycentre I des points pondérés (A ; 1), (B ; −3).

2. Soit C un point du plan tel que le triangle ABC soit équilatéral. On note G le centre de gravité du triangle ABC.

Déterminer puis construire la ligne de niveau $6GB^2$ de f .

Exercice 26

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 et AC = 4 .

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2$

Exercice 27

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, I le milieu du segment [BC] .

M étant un point du plan tel que $2\,MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$, montrer que $\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MI} = 0$

Exercice 28

On considère, dans le plan (P), un triangle AOB rectangle en O. Soit M un point quelconque de (P).

1. Montrer que : $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = AB^2 + 4\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OI}$ où I est le milieu de [AB].

2. Déterminer l'ensemble Δ , des points M de (P) tels que l'on ait : $MA^2 + MB^2 - 2\,MO^2 = \frac{AB^2}{2}$.

Exercice 29

On considère dans le plan P un triangle équilatéral ABC de coté a ($a > 0$)

1. Déterminer le barycentre G des points pondérés (A ; 2) , (B ; 1) et (C ; 1).

2. Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$2MA^2+MB^2+MC^2 = 2a^2$

3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que

$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}$.

Exercice 30

Dans un plan P, on considère un rectangle ABCD tel que AB= 2 BC=2. Soit J le point du segment [CD] tel que $CJ= \frac{1}{2}$.(BJ) coupe (AC) en I et coupe (AD) en K.

Partie I.

1. a. Faire une figure illustrant les données ci-dessus

b. Vérifier que $AC= \sqrt{5}$.

2. Calculer : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ}$

3. En déduire que $(BJ) \perp (AC)$.

4. a. Calculer la distance BJ.

b. Démontrer que $BI= \frac{2}{\sqrt{5}}$.

c. Calculer alors le produit scalaire : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

5. Démontrer que : $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$.

Partie II.

On considère les ensembles suivants : $E=\{M\ ,\ M \in P \text{ et } MA^2+ MB^2=6\}$ et

$F=\{M, M \in P$ et $3MA^2+MK^2=16\}$

1. a. Vérifier que $C \in E$.

b. Déterminer alors l'ensemble E et le construire.

3. a. Vérifier que $A \in F$.

b. Déterminer alors l'ensemble F et le construire.

Exercice 31

On donne dans un plan (P) un triangle ABC tel que BC = 8 , AB = 6 et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ (rad).

Soit f l'application du plan (P) dans R définie par : $f(M) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$

On désigne par ζ_a l'ensemble des points M du plan tel que f(M) = a .où a est un réel.

1. Déterminer ζ_0 .

2. Calculer f(B) et f(C).

3. Déterminer le réel a tel que ζ_a soit la médiatrice de [BC]

Leçon 5 : FONCTIONS NUMERIQUES : GENERALITES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

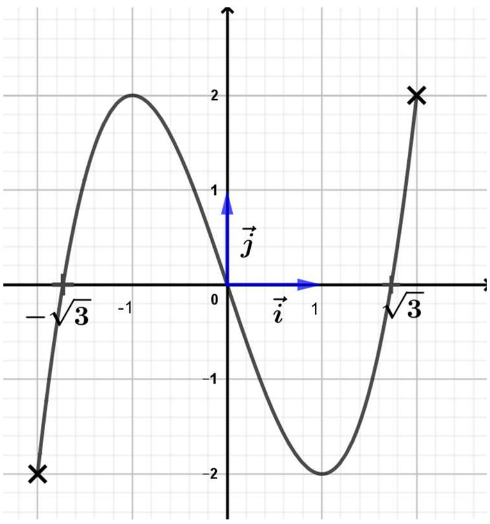
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous :

1. Si f est paire alors la courbe C_f a pour ….. de symétrie … .
2. Si f est impaire, la courbe C_f a pour ….. de symétrie … .
3. Un réel M est un majorant de f si et seulement si…
4. Si f est une fonction définie sur ℝ et périodique de période T alors on peut réduire l'étude de f sur un intervalle d'amplitude … et on obtient le tracé de C_f par….

Exercices d'application

Exercice 2



Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dont la courbe est représentée ci-contre :

1. Déterminer graphiquement :

a. Le maximum relatif sur de f sur $]-2; 1]$

b. Le minimum relatif de f sur l'intervalle $]0; 2]$

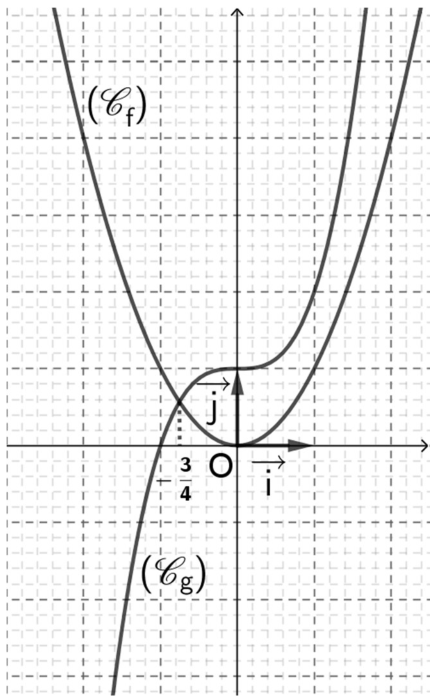
c. Le maximum absolu de f sur I

2. Déterminer graphiquement :

a. L'image directe de I par f ;

b. L'image réciproque de]-2 ;0] par f.

Exercice 3



Soient f et g deux fonctions de représentations graphiques ci-contre sur un intervalle I.

Comparer f et g sur I.

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies de ℝ vers ℝ par :

$f(x) = 2x^3 + x^2$ et $g(x) = -x^3 + 5x - 1$.

Comparer f et g.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3x + 1$

Tracer C_f la courbe de f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement l'image de $[-2; 1]$ par f.
2. A l'aide de C_f donner un minorant de f.
3. Montrer que $-\frac{5}{4}$ est le le minimum absolu de f.

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \sin^3 x$ et $g(x) = \cos^4 x$

1. Etudier la parité de f et de g.
2. Montrer que f et g sont périodiques puis préciser la période pour chacune d'elle.
3. En déduire l'ensemble d'étude de chacune de ces fonctions.
4. Dans un plan muni d'un repère orthogonal soit (C_1) et (C_2) les courbes respectives des restrictions de f et g sur leur ensemble d'étude.

Comment déduire de (C_1) et (C_2) les tracés respectifs de C_f et C_g courbes représentatives de f et g ?

Exercice 7

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}$ et $g(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x$

Déterminer chacune des fonctions suivantes: $-5f$; $\frac{3}{2}g$; $f + g$; $f \times g$; $\frac{1}{f}$ et $\frac{f}{g}$.

Exercice 8

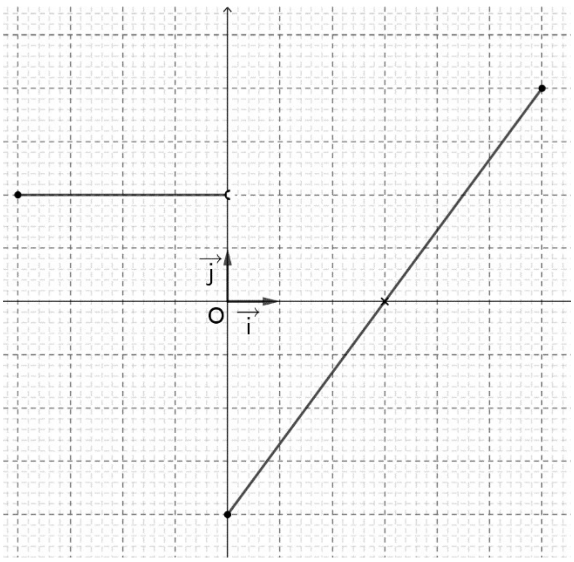
Soit f une fonction de représentation graphique C_f ci-dessous.

Soient g, h, k et l les fonctions définies respectivement par : $g(x) = f(x+1)$;

$h(x) = |f(x)|$; $k(x) = f(|x|)$ et $l(x) = f(x) - 1$

1. Reproduire C_f.
2. En déduire le tracé de la courbe représentative de chacune des fonctions g, h, k et l.

On utilisera des couleurs différentes



Exercice 9

Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = -3x^2 + x - 1$ $g(x) = \frac{2x}{1-x}$ et $h(x) = \sqrt{2 - x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h.
2. Déterminer chacune des fonctions $f \circ g$; $g \circ f$ et $f \circ h$; $h \circ f$; $g \circ h$; $h \circ g$.
3. Déterminer chacune des fonction $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$.

Exercice 10

Dans chacun des cas ci-dessous, écrire f comme composée de fonction puis en déduire son sens de variation.

1. $f(x) = 2x^2 +1$; 2. $f(x) = -x^2 +5$; 3. $f(x) = x^2 -2x + 3$; 4. $f(x) = -2x^2 + x + 1$

5. $f(x) = \frac{1}{X} + 2$; 6. $f(x) = \frac{-3}{X} + 2$; 7. $f(x) = \frac{4}{-X+2}$; 8. $f(x) = \frac{3}{3X-1} + 2$; 9. $f(x) = \frac{-1}{3X+5} - 2$

Exercices de synthèse

Exercice 11

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x}$

1. Tracer Cg dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{1-2x}{x}$.

a. Déterminer a et b tels que $h(x) = a + \frac{b}{x}$.

b. Déduire de Cg le tracé de la courbe C_h représentant h.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On considère la fonction g définie par : $g(x) = f(\alpha + x)$, α étant un nombre réel.

1. Déterminer α de façon que la fonction g soit paire.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet un axe de symétrie que l'on précisera.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

On considère la fonction h définie par $h(x) = f(\alpha + x) - \beta$

1. Déterminer α et β de façon que la fonction h soit impaire.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet un centre de symétrie que l'on précisera.

Exercice 14

Soient f et g deux fonctions.

Etudier la parité de la fonction f∘g dans chacun des cas ci-dessous.

1. f et g sont des fonctions paires.
2. f et g sont des fonctions impaires.
3. f est une fonction paire et g une fonction impaire
4. f est une fonction impaire et g une fonction paire.

Exercice 15

Soit f une fonction numérique telle que pour tout x de l'ensemble de définition de f : $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

1. Calculer f(x+4), f(x+6) et f(x+8) en fonction de f(x).
2. En déduire que f est périodique puis donner la période de f.
3. En déduire l'ensemble sur lequel l'étude de f peut être réduite. Justifier.

Exercice 16

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f définie par $f(x) = x - nE\left(\frac{x}{n}\right)$

1. Montrer que f est périodique.
2. En déduire que pour $x \geq 0$ n a : $0 \leq f(x) \leq n$
3. Représenter graphiquement f sur $[0; 9]$ pour n=3

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$

1. a. Mettre f(x) sous forme canonique.

b. Par quelle transformation obtient-on la courbe représentative de f à partir de la courbe d'équation $y = x^2$?

c. Tracer les courbes de la fonction carrée et de la fonction f dans un même repère.

2. Déduire de C_f la représentation graphique de chacune des fonctions g, h, et k définies ci-dessous en justifiant.

$g(x) = -x^2 - 2x + 3$ $\quad\quad$ $h(x) = |x^2 + 2x - 3|$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ $k(x) = x^2 + 2|x| - 3$

(On utilisera des couleurs différentes pour le tracé des courbes)

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 2$

1. Déterminer la fonction $h = f + g$.
2. Déterminer la forme canonique de $h(x)$.
3. Tracer la courbe $y = x^2$. En déduire C_h la courbe de h.
4. Soit les fonctions g, k et l définies par $g(x) = h(|x|), k(x) = -h(x)$ et $l(x) = |h(x)|$.

Construire les courbes de chacune des fonctions h , g , h et de l dans le même repère en justifiant.

(Utiliser des couleurs différentes)

Exercice 19

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement la restriction de f à l'intervalle $[-5; 6]$ dans chacun des cas ci-dessous :

1. f est paire, de périodique 2 et pour $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = 1 - x$.
2. f est impaire, de périodique 2 et pour $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = -\frac{1}{2}x$.
3. f est 1-périodique et $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \text{ si } \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$

Exercice 20

Soit f définie par $f(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x$

1. Etudier la parité puis la périodicité de f.
2. Justifier qu'on peut réduire l'étude de f à $[0 ; \pi]$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie par $f(x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 1$

1. Vérifier que pour tout x ; $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$
2. Justifier le choix de l'intervalle $[0; \pi]$comme intervalle d'étude de f.

Exercice 22

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Etudier la parité de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer f^{-1}.
4. Déterminer $D_{f\circ f}$ puis $f\circ f(x)$.
5. On pose $f^n = f\circ f\circ f\circ \ldots \circ f$. Montrer que l'on a $f^n(x) = \frac{1}{n}f(nx)$.

(On pourra montrer pour cela que si $f^n(x) = \frac{1}{n}f(nx)$ alors $f^{n+1}(x) = \frac{1}{n}f((n+1)x)$.

Leçon 6 : LIMITES, CONTINUITE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des affirmations ci-dessous répondre à par vrai (V) ou faux (F).

1. Si $a \in D_f$ alors la limite de f en **a** si elle existe est égale à f(a).
2. Lorsqu'une fonction admet une limite en a alors cette limite est unique.
3. Si une fonction est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
4. Une fonction f est continue en a lorsqu' elle est définie en a.
5. Une fonction f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle continue en tout élément de I.

Exercice 2

Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}$ 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$ 3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ 4. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

Exercices d'application

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ 2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}$ 3. $\lim\limits_{x \to -1} 2x^3 - 3x^2 + 5$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ (x - 4)$ 5. $\lim\limits_{x \to 2} (x + 3)(\frac{1}{x} - 4)$ 4. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 2x^3 - 3x^2 - 7$

Exercice 4

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 2. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ 3. $f(x) = -5x^4 - 3x^3 + x$

4. $f(x) = 2$ 5. $f(x) = -\sqrt{3}$ 6. $f(x) = \frac{-1}{2}$

Exercice 5

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$ 2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$ 3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{-x^2+x-2}$
4. $f(x) = \frac{-2x^3-3x^2+1}{5x+1}$ 5. $f(x) = \frac{3x+4}{-x^2+x-2}$

Exercice 6

Calculer si possible, la limite de la fonction f en $+\infty$ ou en $-\infty$ si possible.

1. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ 2. $f(x) = \sqrt{-x - 4}$ 3. $f(x) = \sqrt{4x - 7}$ 4. $f(x) = \sqrt{-5x + 1}$

Exercice 7

Calculer la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$; a= 2.
2. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$; a =– 1.
3. $f(x) = \frac{3x^2+5x-2}{x^2+x-2}$; a =– 2.
4. $f(x)= \frac{-2x^3-3x^2+1}{x^2+4x+3}$; a =– 2.
5. $f(x)= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; a =1.
6. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$; a = 3.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$; a = –1.
8. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x+11}-4}$; a = 5.
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2x+5}{\sqrt{x-3}-1}$; a = 4.
10. $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}+2x+5}{\sqrt{3x+13}-2}$; a = –3.

Exercice 8

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$; a = 2.
2. $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$; a = –2.
3. $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x^2+x-2}$; a = –2 ; a = 1
4. $f(x)= \frac{-2x^3+3x^2+1}{-x+1}$; a = 1.
5. $f(x)= \frac{5x+4}{x^2+2x+1}$; a = –1.
6. $f(x)= \frac{2x^2-3x+5}{4x^2-4x+1}$; a = $\frac{1}{2}$.

Exercice 9

Etudier la continuité de f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. f(x)= 3x-1 ; a = 0
2. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ et f(1) = 2 ; a = 1.
3. $f(x) = x\sqrt{x} +1$; a = 0.
4. $f(x) = |x+1|$; a = –2.

Exercice 10

Etudier la continuité de f dans chacun des cas ci-dessous :

1. f(x) = 2x-5.
2. $f(x) = -x^2 +3x+2$.
3. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$
4. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.
5. $f(x) = \sqrt{x-3}$.
6. $f(x) = \sqrt{-2x-1}$.

Exercices de synthèse

Exercice 11

Etudier la limite de la fonction f en a dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2x+5}{\sqrt{x-3}-1}$; a = 4.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}+2x+5}{\sqrt{3x+13}-2}$; a = −3.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^2+x+3}-3}$; a = 2.

Exercice 12

f est une fonction de ℝ vers ℝ, déterminer l'ensemble définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = -x^3 + x$.
2. $f(x) = x^4 + 3x$.
3. $f(x) = \frac{-x}{2-x}$
4. $f(x) = \frac{2x-5}{-x+1}$
5. $f(x) = \frac{x+10}{x^2+6x+9}$.
6. $f(x) = \frac{-x^2+1}{x}$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2}$ si $x \neq 2$ et f(2) □ −4.

1. Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudier la continuité de f en 2.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = ax^2 - 3bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; a et b étant des nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+b}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 3ax + 1, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}$; a et b étant des nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit continue en 0.

Leçon 7 : DERIVATION

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Répondre à chacun des énoncés ci-dessous par vrai (V) ou faux (F)

1. Si f est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, l \in \mathbb{R}$.

2. Si f est une fonction dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors la tangente à la courbe représentative de f point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Si f est une fonction dérivable en x_0 et que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum en x_0.

5. Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I alors f admet une bijection de I sur f(I).

6. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en un réel a alors f est dérivable en a.

Exercice 2

1. Si f est une fonction dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse est la droite passant par le point de coordonnées (a, f(a)) et de coefficient directeur $f'(a)$.

2. Si f n'est pas dérivable à droite en a alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.

3. Si f n'est pas dérivable en a alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse a une tangente verticale.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

Montrer que f est dérivable en 3 puis préciser $f'(3)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-x}{2 - x}$.

Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -2.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -2.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en -2.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ et en 4.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.
3. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x-3|$

1. Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudier la dérivabilité de f en −1 ; en 3 et en 4.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse −1.
4. Interpréter graphiquement le résultat sur la dérivabilité de f en 3.

Exercice 8

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \\ x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 9

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 10

Etudier la dérivabilité de f puis calculer f '(x) pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de f, dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = -2x^3$
2. $f(x) = 5x^2$
3. $f(x) = 3x\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
5. $f(x) = \frac{-3}{x+1}$
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$
7. $f(x) = 3x - 4 + \frac{1}{x}$

Exercice 11

Etudier la dérivabilité de f puis calculer f '(x) pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de f.

1. $f(x) = \sqrt{2x - 5}$
2. $f(x) = \sqrt{-x - 1}$
3. $f(x) = \cos(-3x+5)$
4. $f(x) = \sin(2x+\frac{\pi}{3})$
5. $f(x) = (4x + 1)^5$
6. $f(x) = \frac{1}{6x-7}$

Exercice 12

Déterminer le sens de variation de f puis préciser s'il existe un réel en lequel f admet un extrémum.

1. $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$
2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
3. $f(x) = 3x + \sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
5. $f(x) = \frac{2x^2-2x-2}{x+3}$
6. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$
7. $f(x) = 3x - 4 - \frac{1}{x+1}$

Exercices de synthèse

Exercice 13

Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité de f, calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \frac{2x^2-x+3}{x^2-2}$
2. $f(x) = \frac{4x^2-5}{3x^2+2x-3}$
3. $f(x) = x^6\sqrt{x}$
4. $f(x) = \sin x + \cos 4x$
5. $f(x) = \frac{2x+1}{(3x+1)^3}$
6. $f(x) = (3x^2-x+1)(-x^2+x+1)$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$
8. $f(x) = |x^3 - 7x + 6|$

Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points de C_f ou la tangente (T) à C_f répond à la condition indiquée.

1. $f(x) = x^3 + 3x^2$, le coefficient directeur de (T) est 0.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ (T) passe par le point B(2,-4).
3. $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2+1}$ (T) parallèle à la droite (D) : $y = x - 1$

Exercice 15

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = 3x^2 - 2x - b & \text{si } x < 2 \\ g(x) = \frac{2ax+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \\ g(2) = b \end{cases}$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier alors la dérivabilité de g en 2.

Exercice 16

Soit f la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{|1 - x|}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Calculer f '(x) pour tout x appartenant à l'ensemble de dérivabilité de f.

Exercice 17

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

a. $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ I= [0 ; 2] b. $f(x) = \frac{-x+1}{x+3}$ I = [-7 ; -4] c. $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ I= [3; 10].

2. Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble f(K).

a. $f(x) = x^2 - 4x + 2$ K = [-2 ; 4] b. $f(x) = \frac{-x+1}{2x+1}$; K= [-1 ; +∞[c. $f(x) = \sqrt{2x+3}$; K= [-1; 1]

Leçon 8 : STATISTIQUE : SERIE A DEUX VARIABLES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice1

On donne la série statistique suivante:

$X=x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$Y=y_i$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Donner :

1. la formule permettant de calculer la moyenne $\overline{X}$,
2. les coordonnées du point moyen,
3. la formule permettant de calculer la variance V(Y) et l'écart type σ(X),
4. la formule permettant de calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y
5. les équations des droites de régression de X en Y puis de Y en X par la méthode des moindre carrés.

Exercices d'application

Exercice 2

Les résultats seront donnés à 10^{-1} près.

Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son âge (x).

X (année)	0	1	2	4	7	11	12
Y (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal.
   Unité graphique : en abscisse 1cm pour 1 année et en ordonnée 1cm pour 2 kg.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r.
   Interpréter votre résultat.
3. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x.
4. Déterminer à partir de quel âge le poids sera égal à 150 kg.

Exercice 3

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous, où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1. Représenter le nuage de points à la série (x_i, y_i).
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, la valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
3. Déterminer la droite de régression linéaire de y en x.
4. Estimer, à un millier de francs près, le prix de vente de 980 exemplaires.

Exercice 4

Une équation de la droite de régression (par la méthode des moindre carrés) de y en x est : $y=1{,}35x+22{,}8$.

Les valeurs du caractère x sont :1 ;2 ;5 ;7 ;11 ;13.

Calculer les coordonnées du point moyen G

Exercice 5

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y = -0{,}43x+12{,}3$.

La moyenne de x est $\bar{x} =5{,}7$ et le coefficient de corrélation est $r = 0{,}85$.

Donner une équation de la droite de régression de x en y.

Exercices de synthèse

Exercice 6

On donne la série statistique suivante à deux variables

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	13	12	14	16	a

La droite de régression de y en x a pour équation $y=9x+0{,}6$

1. Calculer $\bar{x}$.

2. Exprimer $\bar{y}$ en fonction de a puis montrer que a =20.

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y. La corrélation est-elle forte ?

4. Estimer la valeur de y pour $x = 3{,}2$.

Exercice 7

Au cours de l'élection d'une « miss » ,on a relevé les notes attribuées aux 8 candidats ,d'une par le jury , d'autre part par le public (applaudimètre) Les résultats obtenus sont les suivants :

Candidats	1	2	3	4	5	6	7	8
Note du jury x	3	2	4	5	2	3	3	2
Note du Public	4	1	5	5	2	4	3	1

1. Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de y en x
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r
3. Calculer la façon de noter du jury et du public.

Exercice 8

1.(X, Y) est unes série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.

Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :

(D1) : $y = ax + b$ et (D2) : $x = a'y + b'$.

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Etablir que $r^2 = aa'$.

2. Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

- la droite de régression de Y en X a pour équation : $2{,}4x – y = 0$
- la droite de régression de X en Y a pour équation : $3{,}5\ y – 9\ x + 24 = 0$.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.

b. Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

Leçon 9 : ETUDE DE FONCTIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et C_f la courbe de de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Recopier et compéter les énoncés ci-dessous:

1. f est paire si …
2. f est impaire si …
3. Le point I de couple de coordonnes (a ; b) est centre de symétrie de la courbe de f si …
4. La droite (D) : x = a est axe de symétrie a C_f si et seulement si …

Exercice 2

1. f est continue a gauche de x_0 (x_0 un réel) si et seulement si …
2. f est continue en x_0 (x_0 un réel) si et seulement si …
3. f est continue sur un intervalle I si et seulement si …
4. f est dérivable en x_0 si et seulement si …
5. La droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique a la courbe de f si …
6. Si la fonction f admet une limite infinie en x_o (x_o réel) alors la droite d'équation $x = x_0$ est une …. à la courbe représentative de f.

Exercices d'application

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.
2. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$

1. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.

2. Montrer que I(0 ; 1) est centre de symétrie de la courbe Cf représentant f.

3. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

1. a. Déterminer le domaine de définition de f

b. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$

2. Montrer que I(1 ; 2) est centre de symétrie de la courbe Cf représentant f.
3. Déterminer les coordonnées du point A, intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
4. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.
5. Construire Cf dans un plan muni d'un repère orthonormal.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2+x-2}{x+1}$

1. Préciser le domaine de définition de f, Df puis étudier les limites aux bornes de ce domaine et en déduire que la courbe Cf admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

2 a. Trouver des réels a, b et c tels que pour tout x élément de Df, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

b. Monter que la droite d'équation y = ax + b est une asymptote oblique à Cf.

c. Etudier la position de Cf par rapport à l'asymptote oblique.

4. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.

5. Construire Cf dans un plan muni d'un repère orthonormal.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par. $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$.

On note (*C*) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Démontrer que *C* admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation de f .
4. Construire (*C*).

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau de variation de f.

3. a. Montrer que la courbe représentative Cf de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{-3}{2}$

   b. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par f(x) =$\sqrt{-x+1}$

1. Etudier la dérivabilité de f.
2. Etudier les variations de f (sens de variation) puis dresser le tableau variation de f.
3. a. Montrer que la courbe représentative Cf de f admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

   b. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

Exercice 10

Soit la fonction f définie par f(x) = $\cos(2x)$

1. Etudier la parité de f.
2. Etudier la périodicité de f .
3. Justifier le choix de I = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ comme ensemble d'étude de f.
4. a. Etudier les variations de f sur I puis dresser son tableau de variation .

b. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal.

Exercices de synthèse

Exercice 11

Soit la fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{4}\}$ par f (x) $= \frac{8x^2-14x+5}{4x-1}$

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Montrer que (C) admet pour asymptotes de la droite d'équation y = 2x – 3 et pour centre de symétrie le point I $(\frac{1}{4}, -\frac{5}{2})$.

Calculer les abscisses des points d'intersections A et B de la courbe.

Construire (C) dans un plan muni d'un repère orthonormal.

Exercice 12

Soit $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-2}$

1. Etudier les variations de f.
2. Etudier les branches infinies de f et tracer C_f.
3. Résoudre graphiquement $x^2 + (1-m)x - 3 + 2m = 0$.
4. Tracer la courbe d'équation $y = |x|$. Déterminer les intersections de cette courbe avec C_f. Donner les équations des tangentes à C_f en ces points.
5. Résoudre graphiquement $f(x) > |x|$.
6. Déduire de C_f, C_g et C_h avec $g(x) = |f(x)|$ et $h(x) = f(-x)$.

Exercice 13

Soit f la fonction numérique de la variable réel x définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x}$.

1. Etudier et construire la courbe représentative de f
2. Déterminer une équation de la tangente à C_f en son point A d'abscisse 1. Tracer cette tangente.
3. En utilisant C_f tracer dans un même repère les courbes des fonctions suivantes :

$g(x) = \frac{x^2+|x|-2}{|x|}$ et $h(x) = \left|\frac{x^2+x-2}{x}\right|$

Exercice 14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer qu'il existent deux réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{bx}{x^2-1}$.
2. Etudier la fonction f.
3. Montrer que le point I de C_f d'abscisse 0 est un centre de symétrie de la courbe C_f.
4. Donner une équation de la tangente T à C_f en I.
5. Etudier la position de C_f par rapport à T.
6. Construire C_f.

Exercice 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que f est périodique de période 2π.
3. Justifier le choix de l'intervalle $[0; \pi]$ comme ensemble d'étude de f.
4. Montrer que $f'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1)$.
5. Etablir le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
6. Construire C_f dans $[-\pi; \pi]$.

Leçon 10 : TRIGONOMETRIE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice1

1. Recopier et compléter les propriétés ci-dessous.

a. $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) =$

b. $(\vec{u},-\vec{v}) =$ ….. + …

c. $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AB}) = \cdots$

d. $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + \cdots$

e. $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}) = \cdots(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$

2. Recopier et compléter par le nombre qui convient

a. $(\vec{u},\vec{u}) = \cdots$;

b. $(\vec{u},-\vec{u}) = \cdots$

c . $(\overrightarrow{-2u},3\vec{u}) = \cdots$

Exercice 2

Recopier et dire si les affirmations suivantes sont vraies (V) ou fausses (F)

a. $(\vec{u},3\vec{v}) = 2(\vec{u},\vec{v})$

b. $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$

c. $(\vec{u},-\vec{v}) = -(\vec{u},\vec{v})$

d. $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$

e. $(\vec{u},-\vec{v}) + (\vec{u},\vec{v}) = \pi$

Exercice 3

(C) est un cercle de centre O . A ,B , C et D des points du cercle.

1. Recopier et compléter les énoncés ci-dessous

a. $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$ est un angle au ….

b. $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$ est un angle … cercle (C)

c. La mesure l'angle inscrit est la ….. de la mesure de l'angle au centre ….

c. $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$ interceptent le même arc ….

2. Recopier et compléter les égalités :

a. $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \cdots(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$; b. $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \cdots(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})$; c. $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) = \cdots(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

Exercice 4

Pour chacune des affirmations ci-dessous répondre par vrai (V) ou faux (F)

1. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$ est un cercle.

2. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ [2\pi]$ est un arc capable.

3. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ est la droite (AB) privée des points A et B.

5. L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\ [\pi]$ est un cercle si $\alpha \neq 0$ si $\alpha \neq \pi$.

Exercice 5

Recopier et compléter les propriétés ci-dessous :

a. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\ldots) \ldots \sin(\ldots) \sin(\ldots)$

b. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\ldots) \cos(\ldots) \ldots \cos(\ldots) \sin(\ldots)$

c. $\cos 2\theta = \cdots \cos^2\theta - \ldots$; d. $\cos 2\theta = 1 - \cdots \sin^2\theta$

e. $\sin 2\theta = \cdots$; f. $1 + \cos 2\theta = \cdots$; g. $1 - \cos 2\theta = \cdots$

Exercice 6

Recopier et compléter les propriétés ci-dessous

a. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\ \ldots \tan}{1 - \cdots}$; b. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\ \ldots\ \tan}{1 - \cdots}$; c. $\tan(2\alpha) = \frac{\ldots}{\ldots}$

Exercice 7

Pour chacun des énoncés ci-dessous répondre par Vrai (V) ou Faux (F).

a. $\cos p + \cos q = 2(\cos(\frac{p+q}{2}) + \cos(\frac{p+q}{2}))$

b. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta$

c. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

d. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

e. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

f. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$

g. $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta$

Exercices d'application

Exercice 8

1. Donner la mesure principale des angles dont une mesure est :

$\frac{3\pi}{2}$; 2π ; -62π ; $-\pi$; -5π ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{-32\pi}{5}$; $\frac{749\pi}{13}$; $613°$; $-718°$ et $2655°$.

2. Dans chaque cas, dire si x et y sont des mesures d'un même angle orienté ou non.

a. $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{3\pi}{2}$; b. $x = \frac{2\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{3}$; c. $x = -\frac{5\pi}{4}$, $y = \frac{3\pi}{4}$; d. $x = -\frac{5\pi}{12}, y = \frac{43\pi}{12}$.

Exercice 9

Donner la mesure principale θ des angles orientés dont une mesure est α (on exprimera θ avec la même unité que α).

a. $\alpha = \frac{-197\pi}{3}$ rad

b. $\alpha = \frac{7\pi}{8}$ rad

c. $\alpha = 18\pi$ rad

d. $\alpha = -934\pi$ rad

e. $\alpha = -851\pi$ rad

Exercice 10

Sur le cercle orienté de centre O et de rayon 4, on considère un point A.

1. Placer les points B, C, D, E et F tels que :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{6}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = -\frac{\pi}{6}$.

2. Déterminer en radians la mesure principale des angles orientés :

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$.

Exercice 11

1. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

2. Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$?

Exercice 12

ABCD est un losange direct de centre O et BD =AD. I désigne le milieu de [CD].
Déterminer la mesure principale, en radians, des angles orientés :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BO})$; $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 13

1. Construire un segment [AB] de longueur 3 cm :
2. Construire la demi-droite $[A;t)$ tel que $\left([A;t),\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
3. Déterminer puis construire les ensembles définis ci-dessous:

$\Gamma_1 = \{\ M \in P\ /\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\}$

$\Gamma_2 = \{\ M \in P\ /\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\}$

$\Gamma_3 = \{\ M \in P\ /\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\}$

Exercice 14

1. Placer ces réels sur le cercle trigonométrique et calculer le cosinus et le sinus des mesures en radians:

$69\pi; -118\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3}; -\frac{47\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ -\frac{50\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-5\pi}{4};\ \frac{181\pi}{4};\ \frac{-11\pi}{6};\ \frac{199\pi}{6}.$

2. Exprimer, à l’aide de sinx et cosx :

$H(x) = \sin(6\pi - x) + \sin\left(x - \frac{33\pi}{2}\right) + \cos(-49\pi - x) + \cos\left(\frac{-25\pi}{2} - x\right).$

Exercice 15

1. Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

2. En déduire : $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\tan\frac{11\pi}{12}$ et $\cos\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 16

On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

1. Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

2. Utiliser les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

$\sin\frac{4\pi}{5};\ \cos\frac{4\pi}{5};\ \sin\frac{3\pi}{10}\ ;\ \cos\frac{3\pi}{10};\ \sin\frac{6\pi}{5}\ ;\ \cos\frac{6\pi}{5};\ \sin\frac{7\pi}{10}\ ;\ \cos\frac{7\pi}{10}$.

Exercice 17

On donne $\cos a = -\frac{4}{5}$ et $\pi \leq a \leq \frac{3\pi}{2}$

1. Calculer : $\sin a$; $\sin(-a)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+a\right)$; $\tan a$; $\tan(\pi-a)$.
2. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}\cdot$

   Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

3. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$ tel que $\cos x = \frac{-2}{3}\cdot$

   Calculer $\sin x$ et $\tan x$.

Exercice 18

1. Sachant que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$et que $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, trouver $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

2. Sachant que $\alpha \in \ ]\pi; 2\pi[$et que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, trouver $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

3. Calculer les valeurs exactes de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ sachant que $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Exercice 19

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités ci-dessous :

1. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

2. $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

3. Démontrer que $(1+\sin x+\cos x)^2 = 2(1+\sin x)(1+\cos x)$

4. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

5 .$\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

Exercice 20

Résoudre les équations ci-dessous dans l'intervalle I:

1. $\cos x = \cos\frac{\pi}{5}$, , $I = \mathbb{R}$
2. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$, $I = [0 \ ; \ 2\pi]$
3. $\cos x = \sin\frac{\pi}{8}$ $I = \ ]-\pi \ ; \ \pi\,]$
4. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ $I = \mathbb{R}$

5. $\tan x = \tan(-\frac{\pi}{12})$ $\quad I = \ ]-\pi\ ;\ \pi]$

6 . $\tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\ I = \mathbb{R}$

Exercice 21

Résoudre chacune des inéquations ci-dessous sur l'intervalle I indiqué :

a. $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{6}$; I= $\mathbb{R}$

b. $\cos x > \cos(-\frac{\pi}{4})$; I=[0 ; 2π]

c. $\sin x \geq \sin\frac{2\pi}{3}$; I= $\mathbb{R}$

d. $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; I=[0 ; 2π]

f. $\tan x \leq \sqrt{3}$; $I = [-\pi; \pi]$

g. $\tan x > 1$; I=[0 ; 2π]

h. $\cos x \leq \frac{1}{2}$; $I = [-\pi; \pi]$

Exercices de synthèse

Exercice 22

1. On donne les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{3\pi}{5}$ et $(\vec{u},\vec{w}) = \frac{\pi}{4}$

Calculer $(\vec{v},\vec{w})$.

2. On considère un triangle ABC de sens direct.

Démontrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \pi\ [\pi]$

3. On donne $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{3\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{5}$.

Calculer $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

4. A, B, C et D sont des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}) = \frac{-2}{3}$; $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) = \frac{-5\pi}{12}$.

Démontrer que les points A, E et C sont alignés.

Exercice 23

Sur le cercle trigonométrique (C) muni d'un repère orthonormé direct tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$, on considère les points B, C et D du cercle (C) tels que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;

$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3}$.

a. Faire la figure.

b. Donner une mesure de $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})$.

c. Démontrer que le triangle BCD est équilatéral.

d. Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$.

e. Préciser un mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ en fonction de α.

Exercice 24

1. On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{2\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{4\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{6\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$.

Montrer alors que $A = 3$.

2. Calculer les expressions ci-dessous.

$B = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{2\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \ldots + \sin^2\frac{11\pi}{12}$;

$C = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

Exercice 25

Soit ABC un triangle non rectangle

1. Vérifier que $\tan(\pi - A) = \tan A$

2. Démontrer que : $\tan(\widehat{A} + \widehat{B}) = -\tan\widehat{C}$ et $\tan(\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B}}{1 - \tan\widehat{A}.\tan\widehat{B}}$

3. Prouver que : $\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C} = \tan\widehat{A}.\tan\widehat{B}.\tan\widehat{C}$.

4. Montrer que : $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} = 4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}$

Exercice 26

1. Linéariser les expressions ci-dessous :
   $A = \cos 3x \cos 2x$; $B = \sin x \sin 3x$; $C = \sin^2 2x \sin 4x$.
2. Exprimer $\sin 3x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

En déduire que $\tan 3x = \tan x \left(\frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)$.

Exercice 27

Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités ci-dessous :

a. $\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = 1$;

b. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

c. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) ;

d. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

e. $1 + \sin x = \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$

f. $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x\sin^2 x = 1$

Exercice 28

On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$; $B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

Calculer A+B et A−B.

En déduire les valeurs exactes de A et de B.

Exercice 29

1. Résoudre dans ℝ les équations ci-dessous dans l'intervalle I indiqué :

a. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; b. $\cos x + \cos 3x = \sin x + \sin 3x$; c. $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 1$;

2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ les équations ci-dessous :

a. $\tan^2 x = 3$; b. $\tan 2x = \tan 3x$; c. $2\cos^2 x + 9\cos x - 5$.

3. Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ les équations ci-dessous :

a. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; b. $\tan 2x = \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$; c. $\tan x \times \tan 3x = -1$

d. $1 + \frac{\sin x}{2} = \cos^2 x$; e. $2\sin^2 x + \cos 4x - 1 = 0$.

Exercice 30

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$ cm.

1.a. Construire le point C tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.

b. Construire le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral

$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{17\pi}{3}[2\pi]$.

c) Construire le point E tel que $DE = 3$ cm et $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\right) = \frac{-13\pi}{12}[2\pi]$.

2.Démontrer que les droites (AB) et (ED) sont parallèles.

3. Sur la même figure, construire le point F tel que A, F et C soient alignés et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

4. Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

5. Calculer AF, BF et BC.

Exercice 31

Résoudre dans $[-\pi ; 2\pi]$ les équations ci-dessous :

a . $\cos x + \cos 3x = \sin x + \sin 3x$

b . $2\cos x + \sin x + \sin 3x = 0$

c . $8\cos^3 x + 4\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

d. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 5x$

Exercice 32:

Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ les équations ci-dessous:

a. $\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; b. $2\sin^2 x+\cos 4x-1=0.$

Exercices 33

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci-dessous :

a. $\cos^2 x-\sin x+1\leq 0$

b. $\cos x-\sin x\leq 0$

c. $4\sin^2 x-3\leq 0$

d. $\sin 4x-\cos 4x\leq \sqrt{2}$

c. $-\frac{1}{2}\leq \cos x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $-\frac{1}{2}\leq \sin x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Leçon 11 : TRANSFORMATIONS PONCTUELLES ET ISOMETRIES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des propositions ci-dessous répondre par vrai (V) ou faux (F)

P1. La composée de deux homothéties de centres distincts est une homothétie.

P2. La composée de deux rotations est en une rotation.

P3. La composée d'une homothétie et d'une translation est une translation.

Exercice 2

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous .

a. Une isométrie est une application du plan dans lui-même qui ….la distance.

b. Un déplacement est une isométrie qui … les angles orientés.

c. Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en….

Exercices d'application

Exercice 3

ABC est un triangle.

Soit h et h' les homothéties de centre respectifs B et C de rapport respectifs 2 et - $\frac{1}{3}$

Démontrer que h'∘ h est une homothétie et préciser son rapport.

Exercice 4

ABC est un triangle

Soit h et h' les homothéties de rapports respectifs $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$

Démontrer que h'∘h est une translation.

Exercice 5

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.Soit h l'homothétie de centre Ω (–2 ; 1) et de rapport $-\frac{3}{2}$.

1. Déterminer l'expression analytique de h dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. En déduire les coordonnées du point A dont l'image par h est le point A' de couple de coordonnées (– 4, 7).

Exercice 6

ABCD est un carré de centre 0 et de sens direct. On considère les rotations :

$r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$; $r_2 = r(A, \frac{\pi}{2})$; $r_3 = r(O, -\frac{\pi}{2})$

1. Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$;en déduire la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 o\, r_1$
2. Déterminer l'image de C par $r_3 \circ r_1$, en déduire la nature et l'élément caractéristique $r_3 o r_1$.
3. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_1$.

Exercice 7

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère le vecteur $\vec{u}$ (1 ;2) et la droite (D) d'équation 2x-3y+4 = 0.

1. Quelle est l'expression analytique de la translation de vecteur t de vecteur $\vec{u}$.
2. Soit (D') l'image de (D) par t. Déterminer une équation cartésienne de (D')

Exercice 8

On considère un carré direct ABCD de centre O. I et J, sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD], E est le symétrique de A par rapport à C.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées suivantes :

1. $S_{(DB)} \circ S_{(IJ)}$
2. $S_{(CE)} \circ S_{(CB)}$

Exercices de synthèse

Exercice 9

Soit P et Q deux points et G le barycentre des points pondérés (P , −3) et (Q,1). On considère f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 10

A et B sont deux points distincts.

1. Déterminer et construire la droite (Δ) telle que :
   $r(A, -\frac{2\pi}{3}) = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$
2. Déterminer et construire la droite (Δ′) telle que :
   $r'(B, -\frac{2\pi}{3}) = S_{(\Delta')} \circ S_{(AB)}$
3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r'∘r

Exercice 11

Soit A et B deux points distincts.

1. Déterminer et construire la droite (Δ) telle que : $r(A, \frac{2\pi}{3}) = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$

2. Déterminer et construire la droite (Δ′) telle que : $r'(B, -\frac{\pi}{3}) = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta')}$

3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation ror'.

Exercice 12

Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Δ) désigne la première bissectrice et r le quart de tour direct de centre O.

1. Déterminer les expressions analytiques de $S_{(OI)}$ .et S_{Δ} ?

2. En déduire l'expression analytique de r.

Exercice 13

Le plan étant rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f , g et h les transformations définies respectivement par les expressions analytiques ci-dessous :

1.$\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 7 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} x' = 3x - 1 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$

Reconnaitre chacune de ces transformations et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 14

Soit trois points non alignés A, B, C.

1. Construire le point D tels que : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{DC}$.

2. Soit I le centre de l'homothétie h telle que h(A) = D et h(B) = C

Construire I et préciser le rapport de l'homothétie h.

3. Soit O le point d'intersection des droites (AC) et (BD) et h' l'homothétie de centre O telle que h'(A) = C.

Déterminer l'image de B par h' et préciser le rapport de h'.

4. Soit le milieu segment [AB] et F milieu du segment [DC].

5. Monter que les points I ; O ; E et F sont alignés

Exercice 15

On note ABCD un losange de sens direct, I le point tel que DC= DI et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{2}$.

On note J le symétrique de I par rapport à (BD) et O le milieu de [AJ].

On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que JAD est un triangle rectangle en D.
3. Déterminer les images de A et D par r .
4. Justifier que r(B) = I.
5. a. En déduire la nature du triangle IBO.

b. Démontrer que (BD) ⊥ (IJ) et BD = IJ.

Exercice 16

Dans un plan orienté, on donne un cercle (C) de centre O, une droite (D) extérieur à (C) et un point A fixe de (D). A tout point M de (C), on associe le point N tel que le triangle AMN soit équilatéral avec $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

1. Quel est le lieu géométrique (E_1) de N lorsque M décrit (C)?
2. Quel est le lieu géométrique (E_2) de P, projeté orthogonal de M sur (AN) ? Construire (E_2).

Exercice 17

Le plan P est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f dans P définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} + 1) \\ y' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une isométrie.
2. Démontrer qu'il existe un point A, et un seul invariant par f.
3. a. En déduire que f est une rotation de centre A.

   b. Déterminer la mesure de l'angle de f.

Exercice 18

Dans le plan P orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel qu'une mesure $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle R la rotation de centre A qui transforme B en C, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note I le milieu du segment [BC].

1. Construire J = R(I).
2. On note $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

a. Déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et de F_2.

3. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 son image par F_2.

Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

Exercice 19

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle de sommet principal B du triangle ABC.

On désigne r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Construire le point D tel que $r_B(D)=A$ et montrer que les points A, C et D sont alignés.

2. a. Justifier que $r_A \circ r_B$ est une rotation.

b. Déterminer l'image du segment [BD] par $r_A \circ r_B$..

c. En déduire que le centre de $r_A \circ r_B$ est l'orthocentre de H du triangle ABC.

Exercice 20

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$

1. Montrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B.
2. Préciser la position du point E.

Exercice 21

ABC est un triangle. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Justifier que $t \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.
2. Construire l'image de A par $t \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 22

On considère un triangle ABC de sens direct et les milieux I, J, K des cotés respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1. a. Construire le point M tel que : MA=MB et $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$

b. construire le point N tel que : NA = NB et $(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NA}) = \frac{\pi}{2}$

2. a. démontrer qu'il existe une rotation r, unique, telle que r(M)=I et r(J) = K.

b. Quel est l'angle de r ?

3. Démontrer que r(I) = N. En déduire :

a. que le triangle MIN est rectangle isocèle.

b. que le centre de r est le milieu de [MN]

Exercice 23

Un rectangle de longueur L et de largeur l (L> l) est un rectangle d'or lorsque L= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l$

Partie A : Construction d'un rectangle d'or à la règle et au compas.

Soit EFGH un carré, I le milieu de [HG].

Le cercle de centre I et de rayon IF recoupe la droite (HG) en K tel que G soit entre I et K. On note N le point tel que KHEN soit un rectangle.

1. Faire une figure.
2. Montrer que KHEN est un rectangle d'or.
   Partie B :

ABCD est un rectangle d'or (AB > AD) et h est une homothétie de centre A et de rapport k tel que

$0 < k < 1$. On note M= h(C).

1. a. lorsque M est donné, construire les points I=h(B) et J=h(D).

b. Montrer que AIMJ est un rectangle d'or.

2.a. Démontrer que IB = (1 - k) AB.

b. la droite (MI) coupe (DC) en K.

Démontrer que « IKCB est un carré » équivaut à : 1-k = $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

3. En déduire que « IKCB est un carré » équivaut à : 1-k = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. Dans cette question, on suppose k = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

a. Démontrer que DKMJ est aussi un carré.

b. En déduire que AIKD est un rectangle d'or.

Leçon 12 : SUITES NUMERIQUES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Répondre par vrai (V) ou faux (F) pour chacune des affirmations ci-dessous.

1. Une suite convergente est bornée.
2. Une suite bornée est convergente.
3. Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.
4. Une suite croissante et majorée est convergente.
5. Une suite décroissante et minorée est convergente.
6. Si une suite admet une limite alors elle est convergente
7. Si une suite admet une limite alors cette limite est unique

Exercice 2

Soit f une fonction numérique et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies respectivement par $U_n = f(n)$ et $V_{n+1} = f(V_n)$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous répondre par vrai (V) ou faux (F)

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, l réel alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$
3. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$, l réel et f est continue en l alors $f(l) = l$.

Exercices d'application

Exercice 3

1. La suite (U_n) est définie pour tout entier n par $U_n = n^2 - 3n + 2$ .Est-elle arithmétique ?
2. (V_n) est une suite géométrique de premier terme V_0 et de raison q telle que $V_2 = -18$ et $V_4 = -162$. Déterminer q et V_0.
3. (V_n) est une suite arithmétique de raison r telle que $V_1 = -6$ et $V_1 + V_2 + \ldots + V_8 = 92$. Calculer V_8 et r.
4. Calculer la somme $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{32768}$
5. Calculer la somme $S = 2 + 5 + 8 + \cdots + 32 + 35$
6. La suite (U_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 3$. Calculer n sachant que $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 196605$
7. Déterminer trois nombres a, b et c en progression arithmétique dont la somme est 27 et la somme des carrés est 261.

Exercice 4

1. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5U_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\cdot} \end{cases}$

   Montrer que, pour tout entier n, $U_n > 0$.

2. Démontrer que pour tout n entier, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

3. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 5 - 4U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\cdot} \end{cases}$

   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} : U_n = (-4)^{n+1} + 1$.

4. On pose $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ avec $n \geq 1$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. Montrer par un raisonnement par récurrence que l'on a pour tout entier naturel n : $3^n > n$.

6. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

7. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

8. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = n^2$.

Exercice 5

Etudier le sens de variations des suites ci-dessous :

1. (U_n) définie par $U_n = 2n^2 - 3n - 2$; $n \in \mathbb{N}$.
2. (V_n) définie par $V_n = 1 + \frac{1}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$.
3. (W_n) définie par $W_n = \frac{3n-1}{2-5n}$; $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 3}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite et conjecturer le sens de variation de (U_n).

   Démontrer cette conjecture.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$.
3. En déduire que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ.
4. Déterminer ℓ.

Exercices de synthèse

Exercice 7

Soit (U_n) la suite définie par$U_0 = 1$ et $U_{n+1}=\frac{2U_n}{2+3U_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1 et U_2. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. On suppose que pour tout entier n, on a $U_n \neq 0$, et on définit la suite (V_n) par : $V_n = \frac{1}{U_n}$

   a. Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et préciser sa raison.
   b. Donner l'expression de V_n en fonction de n, et celle de V_n en fonction de n.

3. Etudier la monotonie de la suite (U_n).

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < U_n \leq 1$.

Exercice 8

On considère la suite (U_n) définie par$U_0 = 3$ et $U_{n+1}=\frac{1}{4}U_n + 3$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer U_1et U_2.

2. Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. Soit la suite (V_n) définie pour tout n par $V_n = U_n - 4$.

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.

c. Montrer que (U_n) est croissante, convergente puis calculer sa limite.

Exercice 9

On considère la suite (U_n)définie sur $\mathbb{N}$ par :$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2}{2U_n+1} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

1. a. Calculer U_1, U_2, U_3, U_4.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers suivants : 0, 1, 2, 3, 4 alors $U_n - 1$ a même signe que $(-1)^n$.

c. Etablir que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - 1 = \frac{-U_n+1}{2U_n+1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n - 1$ a même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n+1}$.

a. Etablir que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \frac{-U_n+1}{3U_n+1}$.

b. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

c. Montrer que pour tout n, $U_n = \frac{1+V_n}{1-V_n}$.

d. Exprimer U_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 10

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right) \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

2. On désigne par f la fonction définie sur]0,+∞[par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{7}{x})$.

   a. Démontrer que la fonction f admet un minimum.

   b. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{7}$.

3. a. Soit n un entier naturel. Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

   b. Pourquoi peut-on dire en déduire que la suite (U_n) est convergente ?

   c. Montrer que la limite ℓ de cette suite vérifie $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{7}{\ell})$. Déterminer ℓ.

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}.\frac{(U_n-\sqrt{7})^2}{U_n}$.

5. On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}.{d_n}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

b. En déduire une inégalité vérifiée par d_5.

c. Justifier que U_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$à 10^{-9} prés.

Exercice 11

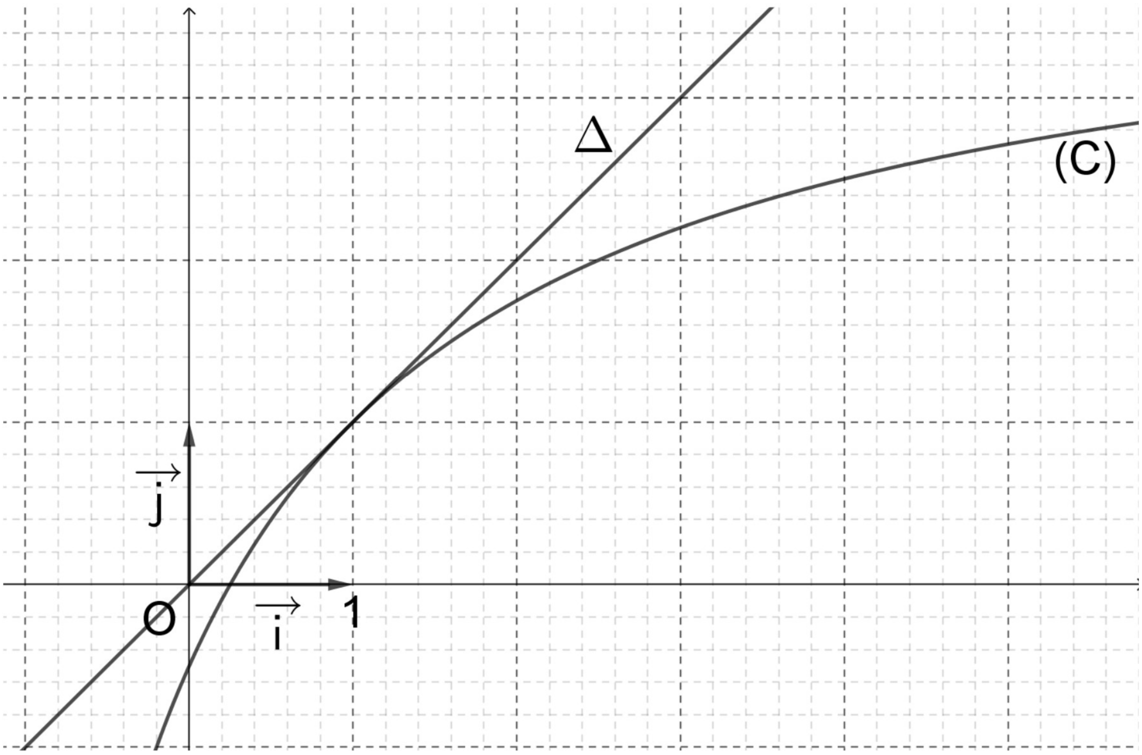
Soit(U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle par]-2 ,+∞[par : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

On a, pour tout nombre entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

On considère la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormal .

1. a. Reproduire la figure ci-dessous et placer sur l'axe des abscisses U_0, U_1, U_2 et U_3 sans calculer.



b. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $U_n - 1 > 0$.

b. Démontrer les conjectures émises à la question 1-b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (U_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de U_n en fonction de n.

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$.

   a- Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

   b- Pour tout nombre entier naturel n, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   c- En déduire la limite de la suite (U_n).

Leçon 13 : VECTEURS DE L'ESPACE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous.

L'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté W.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de W, α et β des réels. Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé … de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si… .

3. Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de W

($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires) équivaut à (si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ avec α, β et γ des réels alors $\alpha = … = ... = …$.)

4. On appelle base de W tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs… .

5. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de W. Si $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$ avec a, b, et c des réels alors $a = … = ... = …$.

6. Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de W et O un point quelconque de l'espace alors le quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un… de l'espace.

7. Soient les vecteurs $\vec{u}$ (x , y , z) , $\vec{v}$ (x' , y', z') et $\vec{w}$ (x'' , y'', z'') dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W.

$\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si le système $\begin{cases} \alpha x + \beta x' = x'' \\ \quad …. \\ \quad ….. \end{cases}$ d'inconnues

α et β …. dans … .

8. Dans l'espace le barycentre de trois points non alignés A , B et C appartient… .

Exercices d'application

Dans la suite sauf indication contraire l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 2

1. Les vecteurs $\vec{u}(3,6,0), \vec{v}(1,2,2), \vec{w}(1,2,-1)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}(4,2,0), \vec{v}(6,-1,2), \vec{w}(2,0,-1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 3

Soit ABCDA'B'C'D' un cube. On note I le milieu de [A'D'], J celui de [AD], K celui de [B'C'] et L celui de [BC].

1. Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
2. a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DA}$ ne sont pas coplanaires.

b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.

c. Comparer $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{KD}$.

3. Démontrer que les plans (IJB') et (D'KL) sont parallèles.

Exercice 4

1. On donne les points A(5 ;2 ;1), B(7 ;3 ;1), C(-1 ;4 ;5) et D(-3 ;3 ;5).

Démontrer que A, B, C, D sont coplanaires.

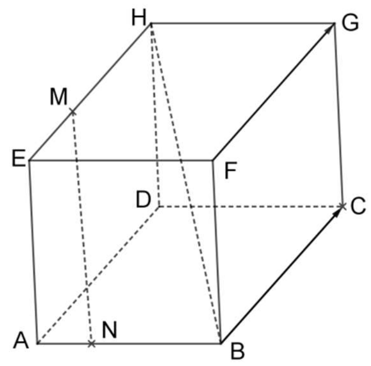
2. On donne les points A(4 ;3 ;-1), B(0 ;-3 ;5), C(2 ;1 ;1) et D(4 ;4 ;-1).

Les droites (AC) et (BD) sont –elles parallèles ?

Exercices de synthèse

Exercice 5

Soit le cube ABCDEFGH. M le point tel que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

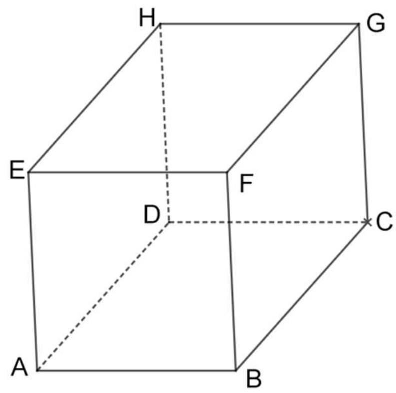


1. Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{HB}$ ont-ils coplanaires ?

Exercice 6

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. On note I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$, J le milieu de [HG], K le milieu de [CD], et L est défini par $\overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.



1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Vérifier que $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IL}$

3. Que peut-on en déduire ?

4. Soit M le milieu de [AB]. Prouver que (MG) // (IJK).

Leçon 14 : PRODUIT SCALAIRE DAN L'ESPACE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des propositions ci-dessous, préciser si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non nuls de l'espace et O un point de l'espace.

1. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.
2. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
3. Le triplet ($\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est une base orthogonale de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$.
4. Le repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} =0$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.
5. Le repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque le vecteur $\vec{k}$ est à la fois orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.
6. Le repère (O,$\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$) est un repère orthonormal de l'espace lorsque $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| =1$.

Exercices d'application

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$)

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a. $\vec{u}$ (-2 ; 3 ; 5) et $\vec{v}$ (3 ;-4 ; 2).

b. $\vec{u} = - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} -\vec{k}$,

c. $\vec{u}$ (2 ; -2 ; 3) et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$.

2. Calculer $\|\vec{u}\|$ dans chacun des cas suivants.

a.$\vec{u}$ (2 ; -2 ; 3) ; b.$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{k}$; c. $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} -\vec{k}$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ,$\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$). Soient les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} =-\vec{i} +\vec{k}$.

1. Trouver parmi les vecteurs suivants ceux qui sont orthogonaux à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

a. $\vec{w}$ (1 ; -2 ; 5) , b. $\vec{t}$ (3 ;-2 ; 3) , c. $\vec{s} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, d. $\vec{r} = \vec{j} + \vec{k}$,

e. $\vec{m}$ (-1 ; 2 ; -1) , f. $\vec{n} = \vec{j}$.

2. Soit α , β et γ des réels non tous nuls et le vecteur $\vec{p}$ (α ; β ; γ) . Déterminer α , β et γ pour que le vecteur $\vec{p}$ soit orthogonal à la fois à $\vec{s}$ et à $\vec{v}$.

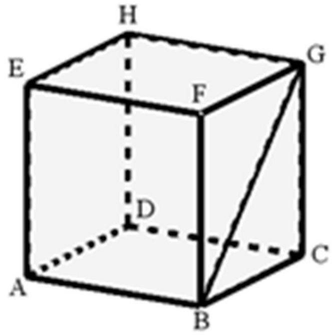
3. On considère le plan P (O , $\vec{w}$, $\vec{m}$). Déterminer un vecteur normal à ce plan.

Exercice 4

La figure ci-contre est un cube tel que AB=3.

1. Déterminer de trois façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

2. Déterminer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HB}$.

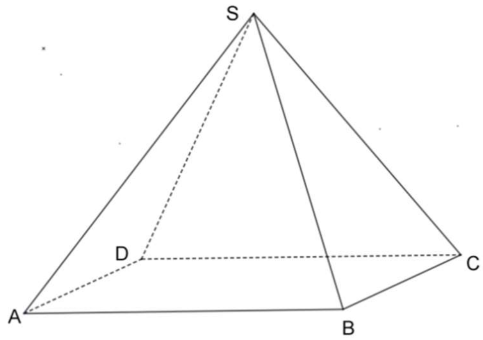


Exercice 5

SABCD est une pyramide à base carrée de sommet S et dont tous les côtés ont la même longueur a.

Calculer en fonction de a, les produits scalaires ci-dessous :

1. $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}$
2. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SA}$
3. $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$
4. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}$



Exercice 6

SABCDEFGH est un cube de centre O et d'arête a.

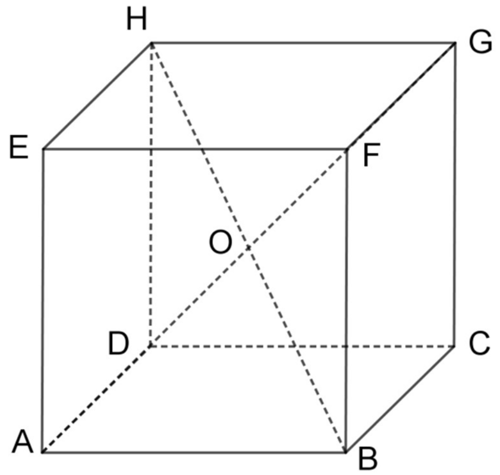
1. Calculer en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$

b. $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}$

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

2. Déterminer dans le repère ($A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$), les coordonnées des points A, B, E, G, H et O.



Exercice 7

A et B sont deux points de l'espace tels que AB = 6.

1. Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que : $MA^2 + MB^2 = 28$.

2. Déterminer l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tels que : $\frac{MA}{MB} = 2$.

3. Déterminer l'ensemble (Γ_3) des points M de l'espace tels que : $3MA^2 - 3MB^2 = -72$.

Exercice 8

Dans l'espace E, rapporté à un repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). On considère les points A(0 ;1 ; -1) , B(3 ; 2 ; 1) et C(2 ; 0 ; 2).

1. Vérifier que le triangle ABC est isocèle.

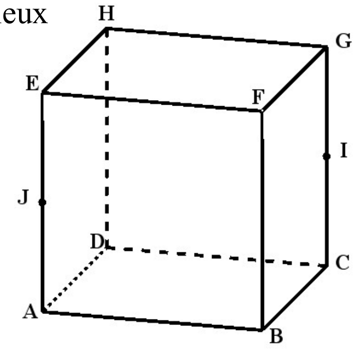
2. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$.

3. Soit P l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Montrer que P est le plan médiateur du segment [BC].

Exercice 9

On considère le cube ABCDEFGH d'arête a ci-contre. I et J sont les milieux des arêtes [AE] et [CG].



1. a. Justifier que le repère $(A,\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} ,\overrightarrow{AD})$ est un repère orthogonal de l'espace.

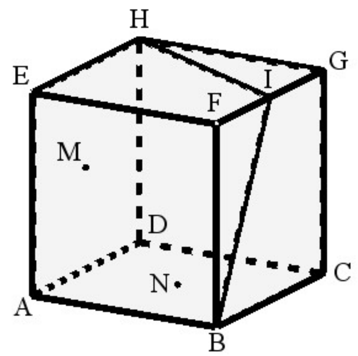
b. Dans quelle condition est-il orthonormal ?

2. Déterminer le triplet de coordonnées de chacun des sommets du cube et des points I et J.

Exercices de synthèse

Exercice 10

Soit ABCDEFGH le cube ci-contre d'arête a. On appelle M et N les centres respectifs des carrés ADHE et ABCD et I le milieu de [FG] .(voir figure ci-contre)



On munit l'espace du repère orthonormal $(A ,\vec{i} , \vec{j} ,\vec{k})$ avec $\vec{i}$,$\vec{j}$ et $\vec{k}$ colinéaires à et de même sens que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}$ respectivement.

1. Montrer que $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ et$\vec{k} = \frac{\overrightarrow{AE}}{AE}$.

2. a. Déterminer les coordonnées des points B, D et E.

b. En déduire les coordonnées des points M et N.

3. Calculer la longueur MN.

4. a. Calculer les couples de coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IH}$.

b. Montrer que le triangle BIH est isocèle en I. Ce triangle est-il rectangle ?

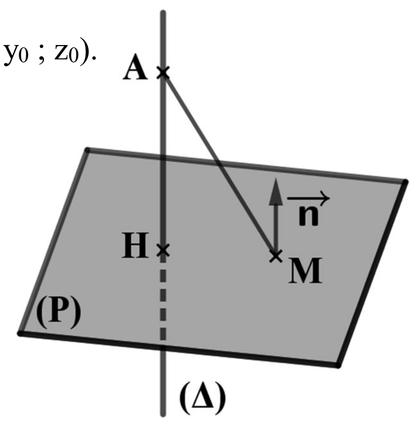
Exercice 11

Dans un repère orthonormal de l'espace , on considère le plan (P) d'équation ax+by+cz+d=0 et le point A de triplet de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

Soit H le point d'intersection de (P) et de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P).

H est appelé projeté orthogonal de A sur (P).

On appelle le vecteur de triplet de coordonnées (a ; b ; c).



1. Justifier que $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = AH\times\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = -ax_0-by_0-cz_0-d$.

3. En déduire que la distance du point A au plan (P) est : $AH= \frac{| ax_0+by_0+cz_0+d |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

4. Application : Déterminer la distance du point A(-4 ; 6 ; - 1) au plan (P) : x-2y+2z=0.

Exercice 12

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points B(-6 ;1 ; 1) , C(4 ;-3 ; 3) et D(-1 ; -5 ; -1) .

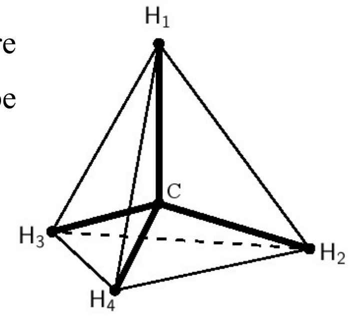
1. Soit le point A(5 ; 7 ; -10). Soit le point $H(\alpha\ ;\ \beta\ ;\gamma)$ où α , β et γ sont des réels non tous nuls.

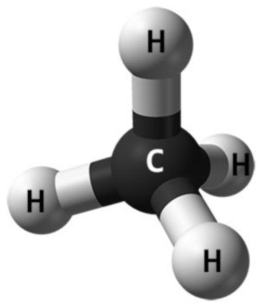
Déterminer les expressions de β et de γ en fonction de α pour que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal au plan (BCD).

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : -2x-3y+4z-13=0.

3. En déduire le triplet de coordonnées du point A' projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Exercice 13 La molécule de méthane





La molécule de méthane CH_4 a la forme d'un tétraèdre régulier dont le noyau C de l'atome de carbone occupe le centre. C est à l'intérieur de ce tétraèdre à égale distance de chacun des sommets occupés par un atome d'hydrogène.

Pour simplifier la représentation de la molécule de méthane, on utilise le schéma ci-contre où les valences sont figurées en traits pleins et les arêtes du tétraèdre en traits fins ou pointillés.

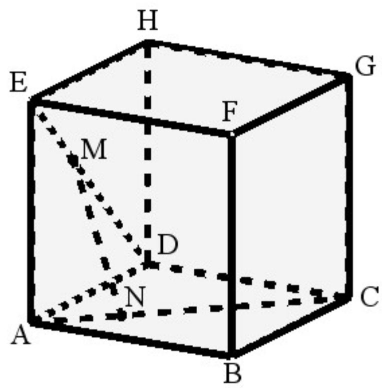
1. C étant l'isobarycentre des points H_1 , H_2 , H_3 et H_4, démontrer que $\overrightarrow{H_1C} = \frac{3}{4}\overrightarrow{H_1G}$ où G est l'isobarycentre des points H_2 , H_3 et H_4.

2. En posant $H_1H_2 = a$, démontrer que $GH_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $H_1G = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ et $H_1C = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

3. Déterminer une approximation à 0,1 degré près de la mesure de l'angle formé par deux liaisons C−H ; c'est-à-dire $\widehat{H_1CH_2}$ par exemple.

4. Sachant que la distance entre un atome d'hydrogène et l'atome de carbone est $1{,}09\times10^{-10}$m, calculer la distance entre deux atomes d'hydrogène.

Exercice 14



Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 , M un point de la droite (DE) et N un point de la droite (AC).

On pose : $\overrightarrow{DM} = a\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AN} = b\overrightarrow{AC}$.

Déterminer a et b pour que (MN) soit perpendiculaire aux droites (DE) et (AC), en utilisant :

1. la relation de Chasles et des produits scalaires remarquables.

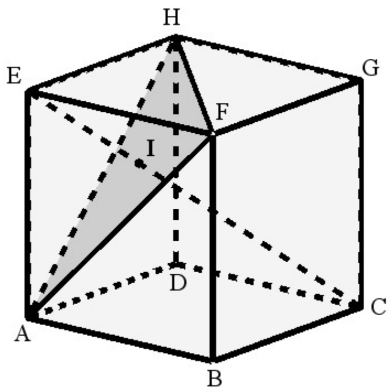
2. le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC})$ dont on précisera la nature.

Exercice 15

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1. I le milieu du segment [AB] et J le projeté orthogonal de I sur le plan (BCD).

1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = 1$ est le cercle de centre J passant par B.
2. Déterminer, suivant le nombre réel k, la nature de l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
3. Démontrer que la fonction f qui à tout point M du plan (BCD) associe le nombre réel $f(M) = MA^2 + MB^2$ prend sa valeur minimale au point J.

Exercice 16



On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1.

On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

a. Déterminer dans ce repère, les triplets de coordonnées des sommets du cube.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

d. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

e. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

f. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

Que représente le point I pour le triangle AFH ?

2. Soit l'application $f : M \mapsto \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CM}$ et (Γ_2) l'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = 2$.

Montrer que (Γ_2) est le plan (AFH).

3. Soit l'application $g : M \mapsto MC^2 + 3MI^2$ et O le centre du cube,k un réel et (Γ_k)l'ensemble des points M de l'espace tels que $g(M) = k$..

a. Ecrire O comme barycentre de C et I.

b. En déduire que pour tout point M de l'espace, $g(M) = 4MO^2 + OC^2 + 3OI^2$.

c. Montrer que $(\Gamma_{\frac{4}{3}})$ est une sphère passant par I. Quelle est la position relative de $(\Gamma_{\frac{4}{3}})$ et du plan (AFH) ?

d. Déterminer la valeur de k pour que (Γ_k) soit la sphère circonscrite au cube.

Exercice 17

Soit ABCD un tétraèdre.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

2. En déduire que si (AB) est orthogonale à (CD) et (BC) orthogonale à (AD) alors (BD) est orthogonale à (AC).

3. On suppose que le tétraèdre est régulier.

a. Que peut-on dire de ses arêtes opposées ?

b. Démontrer que pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

c. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Exercice 18

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1.On désigne par H le centre de gravité du triangle BCD et par G le barycentre des points pondérés (A,3) , (B,1) , (C,1) et (D,1).

1. Démontrer que G est le milieu du segment [AH].

2. On désigne par (Σ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $3MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=3$.

a. Démontrer que (Σ) est une sphère passant par A.

b. Déterminer l'intersection de (Σ) et du plan (BCD).

3. On désigne par (Π) l'ensemble des points M de l'espace tels que $3MA^2-MB^2-MC^2-MD^2=1$.

a. Démontrer que (Π) est un plan qui coupe les arêtes [AB] ,[AC] et [AD] en leurs milieux.

b. Déterminer l'intersection de (Σ) et de (Π).

Exercice 19

On donne les points suivants par leurs triplets de coordonnées : A(1 ;3 ;-1) , B(2 ;1 ;4) , C(5 ;0 ;3) et D(4 ;2 ;-2).

1. a. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Que peut-on en déduire sur la nature du parallélogramme ABCD ?

2. Calculer les coordonnées du milieu I de [AC].

3. On considère la pyramide SABCD de sommet le point S(6,5 ; 9,5 ; 3,5)

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IS}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer la valeur exacte du volume de la pyramide SABCD dont [IS] est une hauteur.

4. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b. Donner les valeurs exactes des distances AS et AB.

c. En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{SAB}$.

Leçon 15 : DROITES, PLANS, SPHERE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

1. Deux droites de l'espace sont parallèles si ...

2. Deux droites de l'espace sont orthogonales si ...

3. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation ax+by+cz+d=0. Le réel ... est la distance du point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ au plan (P).

Exercice 2

Répondre par vrai (V) ou faux (F) à chacun des énoncés ci-dessous.

1. Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites de (P).

2. Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites parallèles de (P).

3. Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites sécantes (P).

4. Deux droites orthogonales dans l'espace sont sécantes.

5. Deux droites perpendiculaires dans l'espace sont sécantes.

6. Un vecteur non nul normal à un plan (P) est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à (P).

7. Le plan médiateur d'un segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants de A et B.

Exercices d'application

Exercice 3

On considère la droite (d) passant par A(2,3,1) et B(2 5,2).

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d).
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d).
3. Les points M(9,4,4) et N(12,1,1) appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 4

1. On donne les points A(5 ;2 ;1), B(7 ;3 ;1), C(-1 ;4 ;5) et D(-3 ;3 ;5). Démontrer que A, B, C, D sont coplanaires.

2. On donne les points A(4 ;3 ;-1), B(0 ;-3 ;5), C(2 ;1 ;1) et D(4 ;4 ;-1). Les droites (AC) et (BD) sont –elles parallèles ?

Exercice 5

Les droites (d) et (d') définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3s \\ y = s + 2 \quad ; \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -3s - 2 \end{cases}$

Exercice 6

Pour chacun des plans (P) suivant, déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrée.

1. (P) passe par le point A(1,0,1) et est de vecteur normal $\vec{n}(1, -1, 2)$.
2. (P) passe par le point A(0,1,1) et est engendré par $\vec{u}(1, -1, 0)$ et $\vec{v}(0,0,2)$.
3. (P) passe par le point $A(1, -1, 0)$ et est parallèle à la droite (D) : $x - 2z + 1 = 0$
4. (P) passe par le point $A(1, -1, 1)$ et est perpendiculaire à la droite (D) : $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$
5. (P) passe par les points A(1,0,1) , B(0,1,-1) et C(2,1,0).

Exercice 7

On considère la droite (D) passant par le point A(1,-2, 0) et dirigé par $\vec{u}(1,1, -1)$. Soit B(0,1,-2) un point de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur (D).
2. Calculer la distance de B à la droite (D).

Exercice 8

1. Déterminer une équation paramétrique du plan (P) passant par les points A(2 ; 3 ; 5) , B(1 ; 0 ; 5) et C(6 ; 5 ; 6).
2. Déterminer une équation paramétrique du plan (P) contenant le point A(1 ; 2 ; 5) et la droite (d) définie par B(6 ; 0 ; 0) et $\vec{u}(-1,3, 1)$.
3. Déterminer une équation paramétrique du plan (P) contenant les deux droites :
   - (d) passe par A(2 ; 0 ; 3) de vecteur directeur $\vec{u}(-1,3, 1)$;
   - (d') passe par B(4 ; 0 ; 0) de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(-1,1, -1)$.

Exercice 9

Montrer que les quatre points A(-4 ; 0 ; 3) , B(-2 ; 3 ; 0) , C(0 ; 2 ; 1) et D(2 ; 1 ; 2) sont coplanaires :

a. En montrant qu'un des points vérifie l'équation du plan formé par les trois autres.

b. Par un critère de coplanarité de 3 vecteurs.

Exercice 10

Déterminer l'équation cartésienne du plan (P') parallèle au plan (P): 3x + 5y – 2z + 5 = 0 passant par le point A(2 ; 3 ; -1).

Exercice 11

On donne les six points A(1, 4, 1), B(-2,-8, 3), C(-5,-11,5), P(3,5,-1), Q(3,-11,-1) et R(0,-3,1).

Montrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

Exercice 12

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la position relative des plans (P) et (P').

a. (P) : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et (P') : $3x + 2y + 5z - 4 = 0$

b. (P) : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et (P') : $6x - 4y + 10z - 7 = 0$

c. (P) : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et (P') : $-15x + 10y - 25z + 20 = 0$

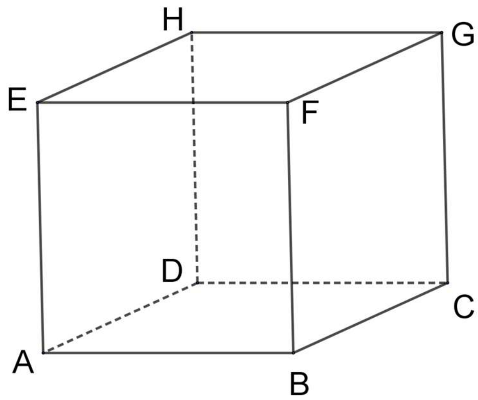
d. (P) : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et (P') : $\begin{cases} x = 2 + k - n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$

e. (P) : $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et (P') : $\begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 1 + 3k - 2n \\ z = -k + n \end{cases}$.

f.(P) : $\begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$ et (P') : $\begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$.

Exercices de synthèse

Exercice 13



On considère un cube ABCDEFGH.

1.a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

b. En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

c. On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = \vec{0}$. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

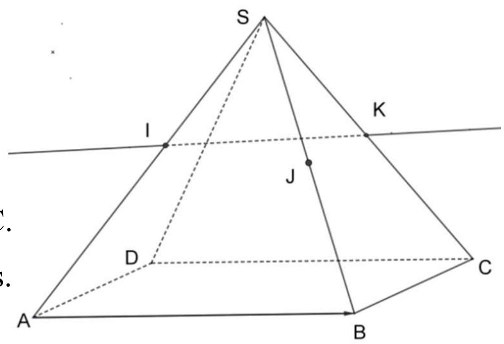
a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est : $x + y + z - 10 = 0$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer le volume de la pyramide BDEG.

Exercice 14



SABCD est une pyramide de sommet S. I, J et K sont les milieux respectifs de [SA], [SB] et [SC].

1. Démontrer que la droite (IK) est parallèle au plan ABC.
2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 15

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la sphère S d'équation :

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y - 2z = \frac{15}{4}$.

1. Déterminer le rayon et le centre de la sphère S.

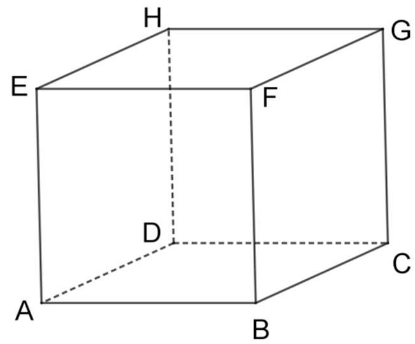
2. Donner les équations de la droite (d) passant par le centre de la sphère S et perpendiculaire au plan π d'´équation : $x + 2y - 2z = 2$.

3. Déterminer les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan π.

Exercice 16

ABCDEFGH est un cube de longueur 1.

Les deux parties sont indépendantes.



PARTIE 1

1.a. Justifier que (DFG) est le plan médiateur du segment [HC].

b. En déduire que $(HC)\perp(DF)$.

2. Montrer de même que les droites (DF) et (AC) sont orthogonales.

3. En déduire que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (ACH).

PARTIE 2

On note I le milieu de [AE], J le centre de la face CDHG, R et S sont définis par $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. K est le milieu du segment [RS].

La figure est donnée ci-dessous. On se place dans le repère ($A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).

1. a. Calculer les coordonnées des points I et J.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. a. Vérifier que R $(0, \frac{1}{3}, 1)$ et S $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

b. Déterminer les coordonnées du point K.

c. Démontrer que les points I, K et J sont alignés.

d. En déduire que les points I, J, K, R et S sont coplanaires.

3. Le plan (IRS) coupe la droite (AB) en un point noté L.

a. Construire le point L sur la figure (on laissera les traits de construction).

b. Justifier que le système $\begin{cases} x = 2b \\ y = 2a + 2b \\ z = \frac{1}{2} + 3a - 3b \end{cases}$ a, b $\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan (IRS).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

d. Calculer les coordonnées de L.

Leçon 16 : DENOMBREMENT

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous par le symbole ou mot ou groupe de mots qui convient de la liste suivante: fini , pleine , appartient , { } , éléments , Ω , x , $\overline{A}$,card , sous-ensemble , cardinal , A , complémentaire, partie, vide , $\subset$, $P(\Omega)$, $\emptyset$.

Soit Ω un ensemble.

1. x est un élément de Ω se dit aussi x …à… . Ce qui se note…∈... .

2. On dit que Ω est un ensemble fini lorsqu'il a un nombre…..d'....

2. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini Ω est appelé le….de Ω. On le note …(...).

3. Si A est un ensemble tel que tout élément de A est aussi un élément de Ω alors on dit que A est une ....ou un … de Ω. On note dans ce cas ... .

4. L'ensemble …. est une partie de tout ensemble. On le note …. ou … .

5. Ω est aussi une partie de Ω appelée ….

6. Tous les sous-ensembles de Ω forment un ensemble appelé …. des … de Ω. On le note ….

Exercice 2

Soit A, B et C des ensembles.

1. Donner le nom et la notation de chacun des ensembles ci-dessous :

a. « ensemble des éléments communs à A et à B »

b. « ensemble des éléments appartenant à A ou à B »

c. Les ensembles A et B sont disjoints cela signifie que ... = $\emptyset$.

b. card (A∪B) =…+…

c. Si les ensembles A et B sont disjoints alors card (A∪B) =… .

d. L'ensemble de tous les couples (a ;b) tels que a ∈ A et b ∈ B est le….de A et B. On le note… .

e. card (A×B) =…

Exercice 3

Soit A ,B et C des parties d'un ensemble Ω telles que $C \subset B$.

1. Donner la définition de « complémentaire de C dans B » . On note C_B^C cet ensemble.

2. On considère les deux tableaux I et II ci-dessous. Ecrire le numéro de chaque énoncé du tableau I, et celui du tableau II qui lui correspond.

Tableau I

N°	Enoncés
1	$\overline{A} \cap \overline{B}$
2	$\text{Card}\left(C_B^C\right)$
3	Card (A^p)
4	$\overline{A \cap B}$
5	Card(A) ×Card(B)
6	Card($\overline{A}$)

Tableau II

N°	Enoncés
A	$\overline{A} \cup \overline{B}$
B	Card(Ω)-Card(A)
C	Card(A×B)
D	$\overline{A \cup B}$
E	$\left(\text{Card (A)}\right)^p$
F	$\text{Card(B)} - \text{Card (C)}$

Exercices d'application

Exercice 4

Dans une classe de 35 élèves, le professeur de Mathématiques pose les deux questions suivantes à chacun de ses élèves qui répondent par oui ou par non.

Question 1 : Aimez-vous les Maths ?

Question 2 : Aimez-vous votre lycée ?

Le professeur constate que :

- 20 élèves ont répondu oui à la question 1,
- 12 élèves ont répondu non à la question 2 ,
- 5 élèves ont répondu non aux deux questions.

On note A et B l'ensemble des élèves ayant répondu par oui à la question 1 et à la question 2 respectivement.

1. En utilisant A et B, interpréter chacun des nombres ci-dessus en termes de cardinal.
2. Calculer le nombre d'élèves ayant répondu oui aux deux questions.

Exercice 5

A leur inscription à une série donnée, les élèves choisissent une langue (Anglais ou Espagnol) et une option (Informatique, Sciences Physiques (SP) ou Sciences de la vie et de la terre (SVT)). Dans un groupe d'élèves, 12 élèves sont inscrits en SVT, 15 en SP, 16 étudient l'espagnol. Par ailleurs, 8 inscrits en SVT et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en SP étudient l'espagnol. Indiquer la répartition des élèves par discipline, ainsi que le nombre total d'élèves dans le groupe.

Indication : Reproduire et compléter le tableau à double entrée ci-dessous :

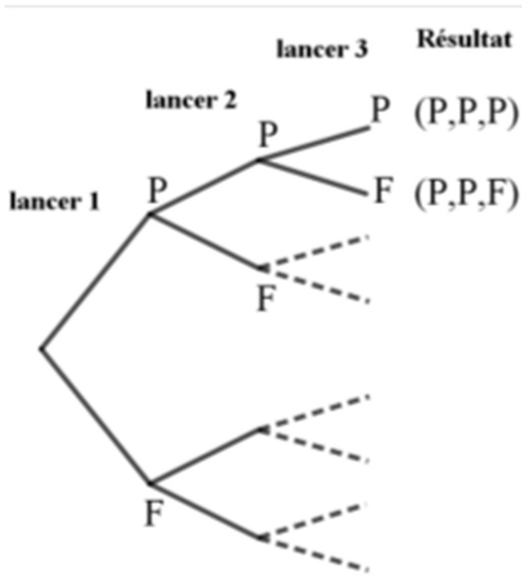
	SVT	Informatique	SP	Total
Anglais	8			
Espagnol				16
Total				

Exercice 6

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie et on s'intéresse aux différentes occurrences :

Pile (P) ou Face (F).

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Déterminer alors le nombre de résultats possibles.



Exercice 7

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12.

On tire 3 boules de cette urne.

Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas suivants :

a. Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'une.

b. Les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne.

c. Les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice 8

Dans chacune des 6 situations ci-dessous, on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles.

Décrire Ω puis déterminer card Ω.

1. On lance trois fois de suite un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6 et on appelle résultat une suite de trois numéros ainsi obtenus.
2. On lance trois dés cubiques A ,B et C à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux trois numéros affichés sur les faces supérieures après immobilisation des dés.
3. 17 chevaux sont au départ d'un grand prix et on s'intéresse aux nombre de quartés possibles.
4. Dans une classe de Première S1 de 15 élèves, on veut former une délégation de trois élèves.
5. Dans une classe de Première S1 de 15 élèves, on veut primer les cinq premiers élèves.
6. Dans une assemblée de 25 membres, on veut former un bureau composé d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire général et d'un trésorier.

Exercice 9

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 sont rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire successivement et avec remise, trois boules de cette urne.

1. Dénombrer l'ensemble des tirages possibles.
2. Calculer le nombre de tirages distincts dans chacun des cas ci-dessous :

a. Les trois boules tirées sont vertes ; b. Les trois boules tirées sont rouges ;

c. Les trois boules tirées sont de la même couleur ;

d. Les trois boules tirées sont de couleurs distinctes ;

e. La première et la troisième boule tirée sont vertes.

f. Seules la première et la troisième boule tirée sont vertes.

Exercice 10

Dans cet exercice on distinguera deux cas suivant que le tirage est effectué avec ou sans remise.

On tire successivement 4 boules d'une urne qui contient 3 vertes et 7 jaunes.

1. Déterminer le nombre total de tirages distincts.

2. Déterminer le nombre de tirages comportant :

a. 4 boules jaunes ; b. 4 boules vertes ;

c. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;

d. 3 jaunes et 1 verte ;

e. 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;

f. 2 jaunes et 2 vertes ;

Exercice 11

On tire successivement sans remise 4 boules d'une urne qui contient 3 vertes et 7 jaunes.

1. Déterminer le nombre total de tirages distincts.

2. Déterminer le nombre de tirages comportant :

a. 4 boules jaunes ; b. 4 boules vertes ;

c. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;d. 3 jaunes et 1 verte ;

e. 2 jaunes et deux vertes dans cette ordre ;f. 2 jaunes et 2 vertes ;

g. Au moins deux boules vertes ; h. au plus deux boules vertes.

Exercice 12

A l'oral d'un examen, un candidat doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

a. Combien y a-t-il de choix possibles ?

b. Combien y a-t-il de choix possibles s'il doit répondre aux trois premières questions ?

c. Combien y a-t-il de choix possibles s'il doit répondre à au moins 4 des cinq premières questions ?

Exercice 13

<u>*Information :*</u> *Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 «couleurs » : pique, cœur, carreau, trèfle (voir tableau)contenant chacune 8 « valeurs » : l'as, le roi, la dame, le valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.*

pique	*cœur*	*carreau*	*trèfle*
♠	♥	♦	♣

On tire simultanément 5 cartes de ce jeu. Calculer le nombre de tirage distincts dans les cas suivants :

a. les 5 cartes sont quelconques. , b. Il y a exactement 2 As parmi les 5 cartes.

c. Il y a au moins 1 As parmi les 5 cartes.

d. les 5 cartes sont de la même couleur.

Exercice 14

On lance 3 dés de couleurs différentes dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre qui apparait sur la face supérieur de chacun d'eux.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles ?

2. Déterminer le nombre de résultats comportant :

a. Un seul six ;

b. Au moins un six ;

c. Au moins le numéro et au moins un six.

3. Déterminer le nombre de résultats tels que la somme des nombres est égal à 13.

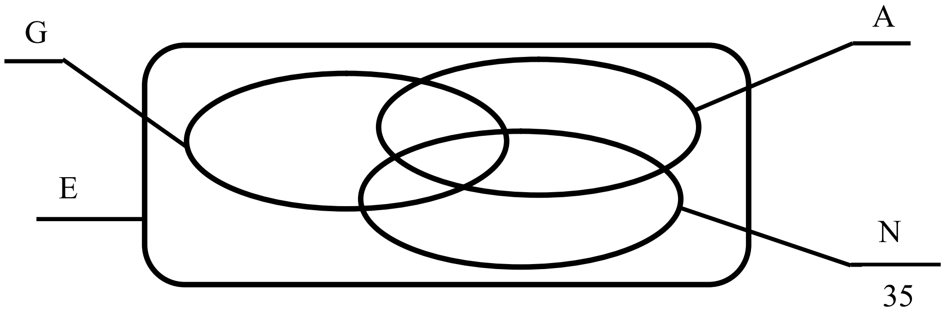
Exercice 15

Un club de sport compte 35 adhérents en natation ; 28 en athlétisme et 29 en gymnastique.

Chaque adhérent pratique au moins un sport. On appelle G ; A et N les ensembles respectifs des adhérents de Gymnastique, Athlétisme et Natation.

11 adhérents font la natation et l'athlétisme, 10 la natation et la gymnastique, 6 font les trois sports à la fois et17 font seulement la gymnastique.

1. Compléter le diagramme ci-dessus où E désigne l'ensemble des 35 adhérents du club.



2. Combien d'adhérents font seulement G et A ?

3. Combien d'adhérents pratiquent un seul sport ?

4. Combien d'adhérents pratiquent au moins deux sports ?

5. Combien d'adhérents y-a-t-il dans le club ?

Exercice 16

1. Dénombrer les anagrammes du mot CRAYONS

2. Dénombrer les anagrammes du mot CRAYONS :

a. commençant et finissant par une consonne ; b. commençant et finissant par une voyelle ;

c. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;

d. commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

e. Que remarque-t-on en sommant les résultats trouvés en a) , b) , c) et d) ? Expliquer.

3. Dénombrer les anagrammes du mot « dictée »:

a. en tenant compte de l'accent ;

b. en ne tenant pas compte de l'accent sur le e c'est- à-dire en ne différenciant pas é et e.

4. Dénombrer les anagrammes du mot ANAGRAMME.

Exercice 17

17 chevaux sont au départ d'un grand prix .Combien y a-t-il de tiercés possibles :

a. au total ?

b. dans lesquels les 3 chevaux de tête sont dans l'ordre ?

c. dans l'ordre ou dans le désordre ?

d. dans le désordre ?

Exercices de synthèse

Exercice 18

Soit A et B des parties d'un ensemble Ω .

1. a. Démontrer que $A=(A\cap B) \cup (A\cap \overline{B})$.

b. En déduire que $Card(A)=Card(A\cap B)+Card(A\cap \overline{B})$.

2. a. Identifier parmi les ensembles $C_A^{A\cap B}$, $C_B^{A\cap B}$ et $A\cap B$; l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

b. Justifier que $A\cup B = (C_A^{A\cap B}) \cup (C_B^{A\cap B}) \cup (A\cap B)$.

c. Justifier que les ensembles $C_A^{A\cap B}$, $C_B^{A\cap B}$ et $A\cap B$ sont deux à deux disjoints.

d. En déduire que $Card(A\cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A\cap B)$.

Exercice 19

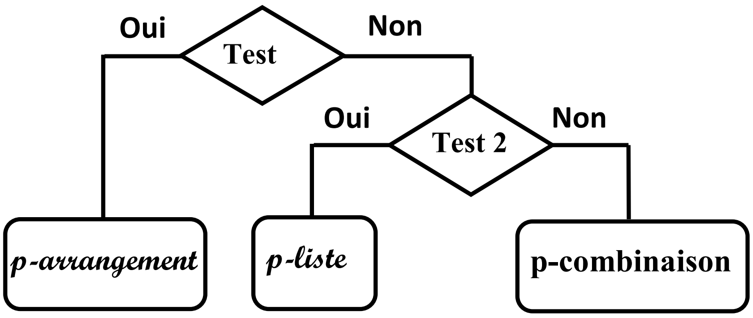
Pour modéliser une situation de dénombrement un professeur propose à ses élèves d'effectuer deux tests sur des exemples de résultats possibles.

Test 1 : Y a-t-il répétition ? **Test 2** : L'ordre est-il important ?

1. Expliquer ces deux tests.

2. Le professeur propose ensuite un organigramme à remplir.

L'élève Abdou propose la réponse suivante mais il a fait des erreurs.



Reprendre cet organigramme en rectifiant les erreurs d'Abdou.

Exercice 20

1. Dans un championnat de football, chacune des 16 équipes doit rencontrer dans un match aller et dans un match retour toutes les autres équipes. Calculer le nombre total de matchs de ce championnat.

2. Pour réduire le nombre de matchs, les 16 équipes sont réparties en 4 poules de 4 équipes ; le vainqueur de chaque poule participe à une poule finale.

Sachant qu'à l'intérieur de chaque poule chaque équipe rencontre les trois autres dans un match allé et dans un match retour,
Calculer alors le nombre total de matchs.

Exercice 21

Une table ronde comporte cinq places, numérotées de 1 à 5. On veut répartir Aby, Birama, Charles, Daba et Elimane autour de la table.

1. Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?
2. Sachant que Daba et Biramane s'entendent pas du tout, et il ne faut pas les placer côte à côte!!! Combien y-a-t-il de dispositions possibles?

Exercice 22

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables?

Exercice 23

Cinq moniteurs accompagnent une classe de 30 filles et 25 garçons à une sortie dans le parc du Djoudj. Les services du parc mettent à leur disposition une pirogue de 12 places pour des excursions devant comprendre dix élèves et deux moniteurs. Calculer :

a. le nombre de remplissages possibles de la pirogue (une personne pour une place).
b. le nombre de remplissages possibles ne comportant que des filles de la classe.
c. le nombre de remplissages possibles comportant exactement 6 garçons de la classe.
d. le nombre de remplissages possibles pour une excursion au repère des pélicans dont seul l'un des cinq moniteurs connait l'endroit et donc doit nécessairement servir d'accompagnateur.
e. le nombre de remplissages possibles sachant que deux moniteurs sont inséparables.
f. le nombre de remplissages possibles sachant que deux moniteurs refusent de se trouver ensemble dans la même excursion et que si l'un s'en va l'autre reste.

Exercice 24

Une boîte contient trois jetons de couleur : un bleu, un jaune et un rouge. Les jetons sont indiscernables au toucher.

1. On tire un premier jeton, on note sa couleur, on le remet dans le sac, puis on tire un second jeton. Chaque jeton bleu rapporte bleu rapporte 2 points, chaque jeton jaune rapporte 1 point et chaque jeton rouge fait perdre 2 points.

a. Utiliser un tableau à double entrée pour déterminer les gains positifs ou négatifs à chacun des neuf tirages (un gain négatif est une perte)
b. Quels sont les résultats possibles à l'issue d'une partie ?
c. Dresser un tableau indiquant le nombre de façons possibles d'obtenir chacun des résultats.

2. On tire un premier jeton, on note sa couleur, puis on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. Quels sont les résultats possibles dans ce cas ?

Exercice 25

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1.si les livres doivent être groupés par matières.

2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 26

La confédération internationale de football décide de classer par ordre les 3 meilleurs joueurs de l'année 2007, parmi un groupe de 10 joueurs choisis par les journalistes sportifs.

Parmi les 10 joueurs figurent 3 Africains :Drogba, Eto et Essien :

1. Calculer le nombre de classements possibles.

2. Calculer le nombre de classements tels que :

a. Les 3 joueurs choisis soient tous des Africains.

b. Drogba soit élu meilleur joueur parmi les 3 joueurs choisis.

c. Eto figure parmi les 3 joueurs choisis.

d. Seul le premier des 3 joueurs choisis, est Africain.

e. Il y a au moins un africain parmi les 3 joueurs choisis.

Exercice 27

Lors de l'ouverture du gouvernement scolaire, la troupe théâtrale du lycée doit présenter une pièce de théâtre. La pièce est jouée par un groupe de 10 acteurs (et actrices) désignés au hasard .La troupe est formée de 14 filles et 11 garçons dont Abdou et Fatou.

1. De combien de façons peut-on choisir le groupe de 10 acteurs pour jouer la pièce ?
2. Combien y a-t-il de groupes comprenant seulement 3 garçons ?
3. Combien y a-t-il de groupes comprenant autant de filles que de garçons ?
4. combien y a-t-il de groupes comprenant au moins 2 filles ?
5. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou ?
6. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou et Fatou ?
7. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou ou Fatou ?
8. Combien y a-t-il de groupes comprenant ni Abdou ni Fatou ?
9. Combien y a-t-il de groupes comprenant Abdou et pas Fatou ?

Exercice 28

1. Le code PIN d'un téléphone portable est un
nombre de quatre chiffres choisis parmi 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 et 9.

a. Quel est le nombre de codes possibles ?

b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres deux à deux distincts ?

2. Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1 , 9 , 9 et 5 mais il ignore l'ordre de ces chiffres.

a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?

b. Si le premier code introduit n'est pas bon, il doit attendre 2 mn avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 mn et celui entre le 3ème et le 4ème de 8 mn. (Le délai d'attente double entre deux essais successifs).

Combien de codes peut-il introduire au maximum en 24 heures.

Exercice 29

Un sac contient n boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On tire simultanément p boules du sac avec $p \leq b \leq n$.

1. Dénombrer les tirages comportant zéro boules noires, une boule noire, 2 boules noires, 3boules noires, p boules noires.

2. En déduire que : $C_n^0 C_b^p + C_n^1 C_b^{p-1} + C_n^2 C_b^{p-2} + \ldots + C_n^p C_b^0 = C_{n+b}^p$.

Exercice 30

1. A l'aide de la formule du binôme, démontrer que : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

2. Calculer de même $\sigma_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

3. Montrer que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ et $p(p-1)C_n^p = n(n-1)C_{n-2}^{p-2}$.

Calculer en fonction de n :

$s_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$ et $t_n = 2C_n^2 + 6C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n$.

4. En déduire en fonction de n la valeur de $z_n = C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + n^2 C_n^n$.

Leçon 17 : PRIMITIVES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Qu'appelle-t-on fonction primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I ?

Exercice 2

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous :

a. Si les fonctions f et g sont telles que f '(x) = g(x) pour tout x élément d'un intervalle I alors … est une ……. de …. sur ….
b. Si f est une primitive d'une fonction g sur un intervalle I alors pour tout x de I : ……= ….
c. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction …. est une primitive de ….. sur I.
d. Si G est une primitive d'une fonction g sur un intervalle I alors toute autre primitive F de la fonction g sur I est telle que : F =…..

Exercice 3

Soit f une fonction et F une primitive de f sur un intervalle I.

Reproduire puis compléter le tableau ci- dessous.

f(x)=	k, k réel	cosx	x^2	$1+\tan^2x$	sinx	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	cos(ax+b) a≠ 0	sin(ax+b) a≠ 0
F(x) =									

Exercices d'application

Déterminer une primitive de f dans chacun des cas ci-dessous

Exercice 4

Déterminer primitive de f sur ℝ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $f(x) = x^2-3x$
3. $f(x)= 4x^3 + 5x - 7x - 2$
4. f(x)= sinx – cos2x
5. $f(x) = x^4 + x^2\sqrt{2}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$; $x > 0$
7 . f(x) = cos3x-2 sin4x
8. $f(x) = \cos x + 1+\tan^2x$

Exercice 5

Dans chacun des cas ci-dessous déterminer la primitive de f qui prend la valeur b en a.

1. $f(x) = x^2+ 3x - 1$; $a = 0$; $b = -1$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + x - 2$; $a = 1$; $b= 1$
3. $f(x) = 3\cos x - \sin 2x$; $a = \frac{\pi}{2}$; $b = 1$
4. $f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} + \cos x$; $a = \frac{-\pi}{4}$; $b = 2$

Exercices de synthèse

Exercice 6

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{1}{(4x-1)^2} - \frac{1}{5x^2}$

2. $f(x) = \tan^2 x + x$

3. $f(x) = \frac{1}{(\cos(3x-\frac{\pi}{2}))^2}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+2}{(x+1)^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de Df de f.

2. Déterminer les réels a, d et c pour tout x élément de Df :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$

5. En déduire l'ensemble des primitives de f sur] -∞, -1 [.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^4+x^2+2}{x^2}$

Déterminer la primitive de f qui s'annule en 2.