PREMIERE EDITION | 2022

Correction par mathsidy

# OLYMPIADES ENSAE

Commentaires en vidéo sur la chaine youtube mathsidy

## MATHEMATIQUES

**OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES:**
ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ECONOMIQUE
ENSAE
PREMIERE EDITION: 2022
NIVEAU: PREMIERE S
DUREE: 04H

## *EXERCICE 1* (6 points)

Les questions sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathcal{R}$

   - $X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 21X - 14 = 0$

   - $\frac{X}{1} + \frac{X}{1+2} + \frac{X}{1+2+3} + \ldots + \frac{X}{1+2+3+\ldots+4041} = 4041$

2. Factoriser l'expression $aX^4 + bX^2 + c$ suivant les signes de $\Delta = b^2 - 4ac$

3. (a) Démontrer de 2 manières différentes que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (b) Soient $x, y > 0 \quad / x + y = 1.$ Démontrer que :

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9$$

4. (a) Soit le nombre $ABCDE$ écrit en base 10 tel que $ABCDE \times 4 = EDCBA$
   Trouver $ABDCE$

   (b) On a $xy + yz + xz = 3xyz$ avec $x, y, z \in \mathcal{R}_+^*$
   Démontrer que

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

5. Soit la fraction $x$ continue défnie par
   $x = a + \frac{1}{b+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\ldots}}}$ , $a > 0$ , $b > 0$

   (a) Montrer que $x$ est solution de l'équation $bx^2 - abx - a = 0$

   (b) En déduire sous forme de fraction continue de $x$ dans les cas suivants :

      i. $x = 1 + \sqrt{3}$

ii. $x = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$

6. On considére $P$ et $Q$ deux polynômes de degrés respectifs $n$ et $q$ tels que pour tout $x$

$$P(x)Q(x) = 0$$

.

   (a) Prouver que P admet au moins $n+1$ racines ou que Q admet au moins $q+1$ racines.

   (b) Soit $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$.
   $f(x)$ et $g(x)$ sont-elles des fonctions polynômes ?

7. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 . Soient $f_1$ et $f_n$ les fonctions définies sur $IR - \{0, 1\}$ par :
$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ .
Calculer $f_{2022}(2022)$

8. Soit $P(x) = x^{8n} + x^{4n} + 1$ et $Q(x) = x^{2n} + x^n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(x)$ est divisible par $Q(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

9. Déterminer tous les polynômes $P$ à coefficients réels vérifiant :
$P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$ pour tout $x \in IR$.

10. Soient $a_0, a_1, \ldots.., a_{2020}$ les coefficients du polynôme $P(x) = (1 + x + x^2)^{1010}$.

   (a) Déterminer la somme des coefficients du polynôme $P(x)$

   (b) Démontrer que la somme $S_{2020} = a_0 + a_1 + ... + a_{2020}$ est un nombre impair

## ***Exercice 2*** *(3 points)*

1. On se propose de montrer par récurrence la proposition
$\mathcal{P}_n$ : Si $n$ nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verifient $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.
Pour ce faire, on suppose que la proposition Pn est vérifiée pour un certain $n \geq 1$, et on considère $n+1$ nombres réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_{n+1}$ vérifiant $a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$. On supposera les $a_i$ rangés par ordre croissant, c'est-à-dire $a_1 \leq \cdots \leq a_n$.

   (a) Montrer que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$.

   (b) On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$. Montrer que $b_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \geq n$.

   (c) En déduire que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1)$.

   (d) En déduire que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, puis conclure soigneusement.

2. On considère maintenant $n$ nombres réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que

$$(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(on pourra poser $a_k = \dfrac{x_k}{(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et utiliser la question précédente).

3. On considère enfin un nombre réel $x > 0$.
   (a) Calculer $(1 \times x \times x^2 \times \cdots \times x^{2n})^{\frac{1}{2n+1}}$
   (b) Montrer que
   $$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

**Problème 1** (5,5 points)

## Partie A

**Définition** : Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs, $b$ non nul, on dit que $b$ divise $a$ ou que $b$ est un diviseur de $a$, on dit aussi que $a$ est un multiple de $b$, s'il existe un entier relatif $k$ tel que $a = kb$.
**Notation** : « $b$ divise $a$ » se note $b/a$
**Exemple** : $(-2)/10$ car $10 = (-5) \times (-2)$

1. Soit $a$, $b$ et $c$ des entiers relatifs.
   (a) montrer que $1$, $a$, $-1$, $-a$ sont des diviseurs de $a$.
   (b) montrer que 0 est un multiple de $a$, si $a \neq 0$
   (c) montrer que si $b/a$ alors $b/ac$, $b$ étant non nul.
   (d) montrer que si $b/c$ et $c/a$ alors $b/a$, $b$ étant différent de 0.
   (e) on suppose que $a$ et b sont non nuls.
   Montrer que si $b/a$ et $a/b$ alors $a = b$ ou $a = -b$
   (f) montrer que si $b/a$ et $b/c$ alors, quels que soient les entiers relatif $\alpha$ et $\gamma$, $b/(\alpha a + \gamma c)$.

2. **Application**
   Soit $n$ un entier naturel. On considère les entiers $a_n = 2n + 1$ et $c_n = 3n + 8$
   (a) Reproduire et remplir le tableau

| n | 5 | 6 | 100 |
|---|---|---|---|
| Ensemble des diviseur communs de $a_n$ et $c_n$ | | | |

   (b) montrer que si $d/a_n$ et $d/c_n$ alors $d/13$
   (c) En déduire les diviseurs communs possibles de $a_n$ et $c_n$

## Partie B

**Définition** : Soit $n$ un entier naturel non nul, $a$ et $b$ deux entiers relatifs.
On dit que $a$ est congru à $b$ modulo $n$ lorsque $n$ divise $a - b$.
**Notation** : « $a$ congru à $b$ modulo $n$ » se note $a \equiv b\ [n]$
**Exemples** :
$35 - 0 = 5 \times 7$ donc $35 \equiv 0\ [5]$ et $35 \equiv 0\ [7]$
$30 + 2 = 2 \times 16$ donc $30 \equiv -2\ [16]$ et $30 \equiv -2\ [2]$

1. Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des entiers relatifs et $n$ un entier naturel non nul.
   Montrer que :

   (a) $a \equiv a\ [n]$

   (b) Si $a \equiv b\ [n]$ alors $b \equiv a\ [n]$

   (c) $n/a$ si et seulement si $a \equiv 0\ [n]$

   (d) si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$

   (e) si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $a + c \equiv b + d\ [n]$ et $ac \equiv bd\ [n]$

   (f) Pour tout entier naturel $p \geq 2$, si $a \equiv b\ [n]$ alors $a^p \equiv b^p\ [n]$

2. <u>**Application**</u>

   (a) montrer que $35 \equiv 1\ [17]$ et $84 \equiv -1 [17]$

   (b) En déduire que $35^{228} + 84^{501}$ est un multiple de 17.

   (c) montrer que pour tout entier naturel $n$, $5^n - 1$ est un multiple de 4.

## <u>Problème 2</u> (5,5 points): Fractions et pyramides égyptiennes

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Égypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

1. Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

   a- La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

   b- Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

   c- Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

2. (a) Montrer que tout rationnel de $]0,1[$ admet une décomposition égyptienne est l'objet de cette partie.

      i. Soit $x \in \mathbf{Q} \cap ]0,1[$. $\exists m, n \in \mathbf{N}^* / x = \frac{m}{n}$ et $m < n$.
      Division euclidienne de n par m donne $n = qm + r$ où $q \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < m$.
      Montrer que $x - \frac{1}{q+1} = \frac{m'}{n'}$ avec $n' \in \mathbf{N}^*$ et $m' \in \{0, ..., m-r\}$. erreur $m' \in \{1, \dots, m\}$

      ii. Démontrer donc que la propriété est vraie, $\forall x \in \mathbf{Q} \cap ]0,1[$.

      iii. Constatez que la démonstration précédente fourni un algorithme de décomposition.
      Appliquer pour $\frac{5}{17}, \frac{9}{20}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}, \frac{9}{10}$.

   (b) Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel $x$ tel que $0 < x < 1$ ?

   **NB :**

   - a divise b si $\exists p \in \mathbf{Z}$ tel que $b = pa$ soit $\frac{b}{a} = p$ où $(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{Z}$.

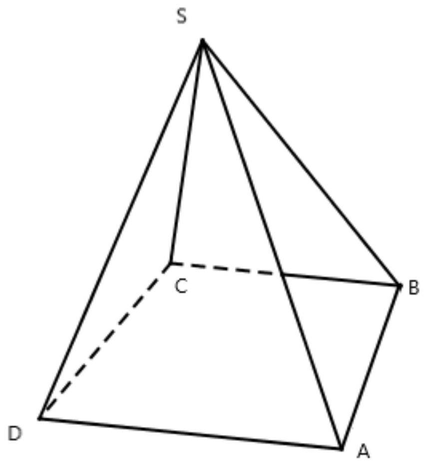
   - $\boxed{\text{Propriété}}$ : Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs tel que $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q, r)$ de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

Les nombres $q$ et $r$ s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Ainsi, faire la division euclidienne de $a$ par $b$ revient à trouver $(q, r)$.
b divise a $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow a = q.b$
b ne divise pas a $\Rightarrow r \neq 0$.

- $\boxed{\text{Propriété}}$ : Toute suite d'entiers relatifs $(U_n)$ convergente est stationnaire.
- $\boxed{\text{Propriété}}$ : Toute suite décroissante et minorée converge.

3. On appelle *pyramide égyptienne*, une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :

- Les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- La somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.




a- Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carré ci-dessus, telle que $AB = \frac{1}{30}$ et $SA = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne.
Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière SABCD à base carrée de sommet S dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs $AB$ et $SA$ sont des fractions égyptiennes.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $AB = \frac{1}{p}$ et $SA = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.

b- Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c- Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul $n$ tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d- En déduire que si $p$ et $q$ sont des nombres impairs, alors cette pyramide $SABCD$ ne peut pas être une pyramide égyptienne.

# Exercice 1

1. Resolutions dans $\mathbb{R}$.

- $x^4+3x^3+5x^2+21x-14=0$

$\Leftrightarrow \quad x^4+x^2(3x+7-2)+7(3x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad x^4+x^2(3x-2)+7x^2+7(3x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2+7)+(3x-2)(x^2+7)=0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2+3x-2)(x^2+7)=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+3x-2=0$

$\Delta = 9+8=17$

$\Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}}$$

- $\dfrac{x}{1}+\dfrac{x}{1+2}+\dfrac{x}{1+2+3}+\dots+\dfrac{x}{1+2+\dots+4041}=4041$

Rappelons que $\forall\ n\geqslant 1 \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

donc $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2}{n(n+1)}$ .

$$\frac{x}{1}+\frac{x}{1+2}+\dots+\frac{x}{1+2+\dots+4041}=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\frac{1}{1}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+4041}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(\frac{2}{1(1+1)}+\frac{2}{2(2+1)}+\dots+\frac{2}{4041(4041+1)}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\left(\frac{1}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\dots+\frac{2}{4041(4041+1}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\cdot\sum_{k=1}^{4041}\frac{1}{k(k+1)}=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\cdot\sum_{k=1}^{4041}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\left(\sum_{k=1}^{4041}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{4041}\frac{1}{k+1}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\left(1+\cancel{\sum_{k=1}^{4040}\frac{1}{k+1}}-\frac{1}{4042}-\cancel{\sum_{k=1}^{4040}\frac{1}{k+1}}\right)=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x\,\frac{4041}{4042}=4041$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4042}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2021$$

$$\boxed{S = \{2021\}}$$

2. factorisons $a x^4 + b x^2 + c$ suivant les signes de $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

alors $$a x^4 + b x^2 + c = \left(x^2 \pm \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

3\.

a. Démontrons de 2 manières différentes que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1ère méthode : par récurrence sur $n$ $(n \geq 1)$

- $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1$$

- Supposons que pour $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Montrons alors que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

OK

donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2ème méthode : par développement de $(1+k)^3$

Pour $k \geqslant 1$, on a

$$(1+k)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n} (1+k)^3 = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= (n+1)^3 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k^3} - \cancel{\sum_{k=2}^{n} k^3} - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$
$$= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1) - 2(n+1)}{2}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)\left(2(n+1)^2 - 3n - 2\right)}{2}$$

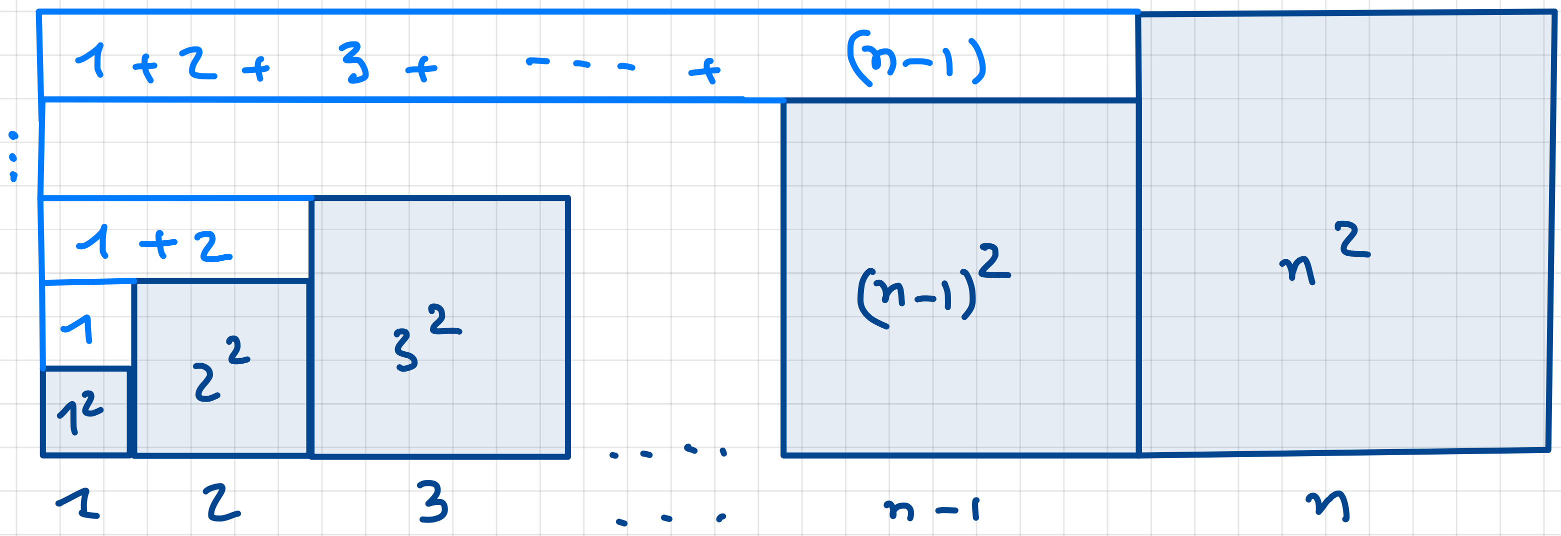
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)\left(2n^2+4n+2-3n-2\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n\frac{(n+1)\ (2n+1)}{6}$$

Donc $\forall n \geq 1 \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

## 3ème méthode : (Bonus).




Soient $\mathcal{A}_1$ la somme des aires des carrés bleus foncés

et $\mathcal{A}_2$ la somme des aires des rectangles bleus clairs.

ona :

$$A_1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - A_2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$\frac{3}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{2} n \frac{(n-1)}{2}$$

$$3 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^2(n+1) + 2n^2 - n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{2n^2(n+1) + n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n\,(2n(n+1) + (n+1))}{2}$$

donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$4^{\text{ème}}$ méthode : Bonnus

Soit $P$ un polynôme de degré 3 tel que

$$\forall k \geq 1 \qquad P(k) - P(k-1) = k^2$$

( on montre alors, facilement, que

$$P(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d \quad )$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \left( P(k) - P(k-1) \right) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} P(k) - \sum_{k=1}^{n} P(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(k) - \sum_{k=0}^{n-1} P(k)$$

$$= P(n) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} P(k)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} P(k)} - P(0)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \cancel{d} - \cancel{d}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \geq 1}$$

5ème méthode : Bonnus (Terminale)

Soit $k \in \mathbb{N}$

on a :

$$\int_k^{k+1} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_k^{k+1}$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{3}.k^3$$

$$= \frac{1}{3}(k^3+3k^2+3k+1) - \frac{1}{3}.k^3$$

$$\int_k^{k+1} x^2\,dx = k^2 + k + \frac{1}{3}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} x^2\,dx = \sum_{k=0}^{n}\left(k^2+k+\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_0^{n+1} x^2\,dx = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k + \frac{1}{3}.\sum_{k=0}^{n} 1$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$\frac{(n+1)^3}{3} = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{3}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{\text{donc} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3 b. Soient $x, y > 0$ : $x + y = 1$

Montrons que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

Comme $x + y = 1$ donc $y = 1 - x$

et $0 < x < 1$

donc

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1-x+1}{1-x}$$

$$=\frac{(x+1)(2-x)}{x(1-x)} \qquad 0<x<1$$

Evaluons le signe de $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)-9$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)-9=\frac{(x+1)(2-x)}{x(1-x)}-9$$

$$=\frac{2x-x^2+2-x-9x+9x^2}{x(1-x)}$$

$$=\frac{8x^2-8x+2}{x(1-x)}$$

Comme $0<x<1$ donc $x(1-x)>0$

le signe ne dépend donc que de

$8x^2-8x+2$ qui est positif

car $\Delta = 64-64=0$

donc

$\forall x : \quad 0 < x < 1 \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \geq 9$

et

$$\boxed{\forall x, y > 0 : x + y = 1 \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9}$$

4.

a. Soit le nombre ABCDE écrit en base 10 tel que

$$ABCDE \times 4 = EDCBA$$

Trouvons ABCDE

(NB : Il est nécessaire de supposer que $A \neq 0$, A, B, C, D et D sont distincts et $A, B, C, D, E \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)

Comme ABCDE et EDCBA sont des nombres à 5 chiffres donc

$A \leq 2$ sinon EDCBA serait à 6 chiffres (ce qui n'est pas le cas).

De plus, comme $4\,ABCDE$ est pair

donc $\underline{A = 2}$.

$4E = 10k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$

donc $4E$ se termine par 2

or les valeurs possible pour $4E$

sont :

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32,

36

les valeurs qui nous interessent pour

$4E$ sont $\underline{12}$ et $\underline{32}$

et donc $\underline{3}$ et $\underline{8}$ sont les valeurs

possibles pour $E$.

Or, on doit avoir

$4A = 4 \times 2 = E$

donc $\underline{E = 8}$

Ainsi

$$ABCDE = 2BCD8$$

et $4\ ABCDE = 8DCB2$

Comme $8DCB2$ est divisible par 4

donc $B2$ l'est aussi

Les valeurs possibles pour $B2$ sont :

$\cancel{02}$, 12, $\cancel{22}$, 32, $\cancel{42}$, 52, $\cancel{62}$, 72, $\cancel{82}$, 92

Par ailleurs, $B \leq 2$ car sinon $E$ ne serait pas 8.

Par conséquent $\underline{B = 1}$

et

$$ABCDE = 21CD8$$

$$4\ ABCDE = 8DC12$$

$$\begin{array}{rr} & 21CD8 \quad 3 \\ \times & 4 \\ \hline & \bigcirc 2 \end{array}$$

4

$$4D + 3 = 10k + 1$$

Ce qui veut dire que $4D + 3$ se termine par 1.

Les valeurs possibles pour $4D+3$ sont

| $D$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4D+3$ | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 |

Les valeurs qui nous intéressent sont réalisées avec $D=2$ ou $D=7$

Comme les chiffres sont uniques donc

$D=7$

Ainsi

$$ABCDE = 21C78$$

$$4\,ABCDE = 87C12$$

$$\begin{array}{r} 21C78 \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline \bigcirc\bigcirc 12 \end{array}$$

③ 3

$$4C+3 = 10k + C$$

$$4\times 1 + k = 7$$

donc $k = 7-4 = 3$

d'où $4C - C = 30 - 3$

$3C = 27$ et $C = 9$

Maths Tidy

Ainsi

$$\boxed{ABCDE = 21978}$$

**4b.** Si $xy + yz + xz = 3xyz$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$

Montrons que

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x+y+z) - 3$$

NB. Il est nécessaire que $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ sinon il y aura des contres exemples ($ex$ : $x = 6$, $y = -2$, $z = 0.3$)

On a

$$y\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 + z\left(y - \frac{1}{z}\right)^2 + x\left(z - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

$$xy^2 - 2x + \frac{1}{y} + zy^2 - 2y + \frac{1}{z} + xz^2 - 2z + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$xy^2 + y^2z + z^2x \geq 2(x+y+z) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\boxed{xy^2 + y^2z + z^2x \geq 2(x+y+z) - 3}$$

5. Soit $x$ la fraction continue définie par :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots}}} \qquad a > 0,\ b > 0$$

5.a Montrons que $x$ est solution de

$$bx^2 - abx - a = 0$$

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots}}} \longrightarrow \underline{x > 0}$$

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a + \cfrac{1}{\cfrac{bx + 1}{x}} = a + \frac{x}{bx + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad bx^2 + x = abx + a + x$$

$$\Leftrightarrow \quad bx^2 - abx - a = 0$$

$x$ est donc solu$^\circ$ de $bx^2 - abx - a = 0$

**5b.** Déduisons-en l'écriture sous forme de fraction continue de :

i : $x = 1 + \sqrt{3}$

pour $a = 2 > 0$ et $b = 1 > 0$

ans

$$bx^2 - abx - a = (1+\sqrt{3})^2 - 2(1+\sqrt{3}) - 2$$

$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 - 2\sqrt{3} - 2$$

$$= 0$$

donc

$$\boxed{1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

ii. $x = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6}$

prenons $a = 1 > 0$ et $b = 3 > 0$

ona :

$$bx^2 - abx - a = 3 \cdot \frac{9 + 21 + 6\sqrt{21}}{36} - 3 \cdot \frac{3 + \sqrt{21}}{6} - 1$$

$$= 3 \cdot \frac{30}{36} + \cancel{\frac{18}{36}} \cdot \sqrt{21} - \frac{9}{6} - \cancel{\frac{3\sqrt{21}}{6}} - 1$$

$$= 3 \cdot \frac{30}{36} - \frac{54}{36} - \frac{36}{36} = 0$$

donc

$$\boxed{\frac{3 + \sqrt{21}}{6} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}$$

6. Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de degré respectifs $n$ et $q$ : $(\underline{\underline{n, q > 0}})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x)\, Q(x) = 0$$

6a. Montrons que $P$ admet au moins $n+1$ racines ou que $Q$ admet au moins $q+1$ racine

Supposons au contraire que :

$P$ admet au plus $n$ racines distinctes

et

$Q$ admet au plus $q$ racines distinctes

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ : $P(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$

on a alors $P(\alpha) \cdot Q(\alpha) \neq 0$

ce qui contredit l'hypothèse

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \cdot Q(x) = 0$

donc

$P$ admet au moins $n+1$ racines

ou

$Q$ admet au moins $q+1$ racines

6 b. Soit

$f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$

$f$ et $g$ sont-elles des polynômes ?

Supposons que $f$ et $g$ soient des polynômes de degré respectifs $n$ et $q$

mq

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot g(x) = (x + |x|)(x - |x|)$$
$$= x^2 - |x|^2 = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot g(x) = 0$$

donc, d'après la prop° a
$$f = 0 \quad \text{ou} \quad g = 0$$

or $\quad f \neq 0 \quad$ et $\quad g \neq 0$

donc $f$ et $g$ ne sont pas des polynômes.

7. $n \geq 2$

$f_1, f_n$ définies sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

par
$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

calculons $f_{2022}(2022)$

$x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) = 1 - \frac{1}{f_{n-1}(x)}$$

$$\boxed{f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}}$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{1}{f_1(x)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= 1 - \frac{1}{x-1} \times x$$

$$= \frac{x - 1 - x}{x - 1} = \boxed{-\frac{1}{x-1} = f_2(x)}$$

$$f_3(x) = 1 - \frac{1}{f_2(x)} = 1 + x - 1 = x$$

$$\boxed{f_3(x) = x}$$

$$f_4(x) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{x} = f_1(x)$$

donc $\boxed{f_4(x) = f_1(x)}$

$\forall p \geq 1 \quad f_{4p}(x) = f_1(x) \qquad f_{4p+2}(x) = f_3(x)$

$f_{4p+1}(x) = f_2(x) \qquad f_{4p+4} = f(x)$

$$2022 = 4 \times 505 + 2$$

donc

$$f_{2022}(2022) = f_{4 \cdot 505 + 2}(2022)$$

$$= f_3(2022)$$

$$= 2022$$

$$\boxed{f_{2022}(2022) = 2022}$$

8.

Soit $P(x) = x^{8n} + x^{4n} + 1$ $\quad n \geqslant 0$

$Q(x) = x^{2n} + x^{n} + 1$

Montrons que $P(x)$ est divisible par $Q(x)$.

Nous allons, pour cela, effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$

Soit $n \geqslant 0$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^{8n} & & & +x^{4n} & & +1 & x^{2n}+x^{n}+1 \\
\cline{7-7}
-x^{8n} & -x^{7n} & -x^{6n} & & & & x^{6n}-x^{5n}+x^{3n}-x^{n}+1 \\
\cline{1-6}
 & -x^{7n} & -x^{6n} & +x^{4n} & & +1 & \\
 & +x^{7n} & +x^{6n} & +x^{5n} & & & \\
\cline{1-6}
 & & & x^{5n}+x^{4n} & & +1 & \\
 & & & -x^{5n}-x^{4n} & -x^{3n} & & \\
\cline{1-6}
 & & & & -x^{3n} & +1 & \\
 & & & & +x^{3n}+x^{2n} & +x^{n} & \\
\cline{1-6}
 & & & & x^{2n}+x^{n} & +1 & \\
 & & & & -x^{2n}-x^{n} & -1 & \\
\cline{1-6}
 & & & & 0 & & 
\end{array}
$$

on a donc

$\forall n \geq 0$

$$P(x) = \left(x^{6n} - x^{5n} + x^{3n} - x^{n} + 1\right) Q(x)$$

donc

$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0 \quad P(x) \text{ est divisible par } Q(x)}$

9.

Soit $n = d^\circ P$

On sait que $d^\circ P(x^2) = 2n$

et $d^\circ (x^2+1) P(x) = d^\circ (x^2+1) + d^\circ P$

$= 2 + n$

donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x^2) = (x^2+1) P(x) \Leftrightarrow 2n = n+2$

$\Leftrightarrow n = 2$

Posons donc $P(x) = ax^2 + bx + c$

mq $P(x^2) = ax^4 + bx^2 + c$

et $(x^2+1) P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + bx + c$

$\forall x \in \mathbb{R}\quad P(x^2) = (x^2+1) P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}$

donc

$$\boxed{P(x) = ax^2 - a \qquad a \in \mathbb{R}}$$

10. Soit $a_0, a_1 \ldots a_{2020}$ les coefficients du polynômes

$$P(x) = (1 + x + x^2)^{1010}$$

10.a Determinons la somme des coefficients de $P(x)$

Soit

$$S_{2020} = \sum_{k=0}^{2020} a_k$$

or

$$S_{2020} = P(1) = (1 + 1 + 1)^{1010}$$

donc

$$S_{2020} = 3^{1010}$$

10.b. Montrons que $S_{2020}$ est un nombre impair.

Nous allons montrer que :

$$\exists p \in \mathbb{N} : S_{2020} = 2p + 1$$

or

$$S_{2020} = 3^{1010} = (2 + 1)^{1010}$$

donc

$$S_{2020} = \sum_{k=0}^{1010} C_{1010}^{k} \cdot 2^{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{1010} C_{1010}^{k} \cdot 2^{k} + 1$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{1010} C_{1010}^{k} \cdot 2^{k-1} + 1$$

posons $$p = \sum_{k=1}^{1010} C_{1010}^{k} \cdot 2^{k-1}$$

ons ainsi

$$S_{2020} = 2p + 1$$

$\boxed{\text{ce qui prouve que } S_{2020} \text{ est impair}}$

## Exercice 2

1. Soit $n \geq 1$ et

$P_n$ : Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ : $a_1 \cdots a_n = 1$

Alors $a_1 + \dots + a_n \geq n$

On se propose de montrer $P_n$ par récurrence.

a. Montrons que $a_1 \leq 1$ et $a_{n+1} \geq 1$

- Par hypothèse, nous avons

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1 \quad \text{(par hypothèse toujours)}$$

donc $\underbrace{a_1 \cdot \cdots \cdot a_1}_{(n+1)\text{ fois}} \leq \prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1$

donc $a_1^{n+1} \leq 1 \quad (n \geq 1)$

et $\boxed{a_1 \leq 1}$

- De même

$$\begin{array}{l} a_{n+1} \geq a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \geq a_{n+1} \end{array} \Rightarrow a_{n+1}^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1$$

donc $\boxed{a_{n+1} \geq 1}$

b. On pose $b_1 = a_1 a_{n+1}$

Montrons que $b_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$

Comme

$$a_{n+1} \geqslant 1$$

donc

$$a_1 a_{n+1} \geqslant a_1$$

et

$$b_1 \geqslant a_1$$

d'où

$$b_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

or par hypothèse (de recurrence)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant n$$

donc

$$\boxed{b_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant n}$$

c. Déduisons-en que :

$$a_1 + \dots + a_{n+1} \geqslant n+1 + (a_{n+1}-1)(1-a_1)$$

D'après la question précédente, on a :

$$a_1 a_{n+1} + a_2 + \dots + a_n \geqslant n$$

donc

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant n - a_1 a_{n+1} + a_1$$

et

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geqslant n - a_1 a_{n+1} + a_1 + a_{n+1}$$

d'où

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n+1 - a_1 a_{n+1} + a_1 + a_{n+1} - 1$$

et

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n+1 + (a_{n+1}-1)(1-a_1)}$$

d. Déduisons en $P_{n+1}$

D'après la question a, on a :

$a_1 \leq 1 \Rightarrow 1 - a_1 \geq 0$

$a_{n+1} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} - 1 \geq 0$

donc $(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq 0$

on a alors

$$n+1 + (a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geq n+1$$

d'où

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq n+1}$$

d'où $P_{n+1}$ est vérifié.

On a supposé que $P_n$ est vérifiée pour un certain $n \geq 1$.

En considérant $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$, nous avons montré alors que

$$a_1 + \dots + a_{n+1} \geq n+1$$

ce qui prouve que $P_{n+1}$ est vérifiée sous l'hypothèse que $P_n$ soit vérifiée pour un certain $n \geq 1$.

On peut donc conclure

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad P_n \text{ est vraie}}$$

2. On considère

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad (n \geq 1)$

i) On trouve que $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Si $1 \leq k \leq n$

posons
$$a_k = \frac{x_k}{(x_1 \cdot \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}$$

$\forall k : 1 \leq k \leq n$ $\quad \boxed{a_k > 0}$

et
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(x_1 \ldots x_n)^{1/n}}$$

$$= \left(\frac{1}{(x_1 \ldots x_n)^{1/n}}\right)^n \cdot x_1 \ldots x_n$$

$$\boxed{a_1 \ldots a_n = 1}$$

donc d'après la question précédente

on a
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$$

et
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(x_1 \cdot \ldots x_n)^{1/n}} \geq n$$

$$\frac{1}{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n$$

donc $$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

d'où

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \qquad n \geq 1}$$

3. Soit $x > 0$ (réel)

a. Calculons

$$\left(1 \cdot x \cdot x^2 \cdots \cdots x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$$

$$1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \cdots x^{2n} = \prod_{i=0}^{2n} x^i$$

$$= x^{\sum_{i=0}^{2n} i}$$

$$1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \cdots \cdot x^{2n} = x^{\frac{2n(2n+1)}{2}}$$

donc

$$\left(1 . x . x^2 . \ldots . x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \left(x^{n(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$$

$$\boxed{\left(1 . x . x^2 . \ldots . x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = x^n}$$

b- Montrons que :

$$\frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Soit $n \geq 0$

on a

$\forall\ k = 0, 1, \ldots, 2n$

$$x^k > 0$$

on a donc, d'après la question 2

$$\left(x^0 \ldots \ldots x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \leq \frac{x^0 + \cdots + x^{2n+1}}{2n+1}$$

or

$$\left(1 . x . x^2 \ldots x^{2n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = x^n$$

donc

$$x^n \leq \frac{1 + x + \dots + x^{2n}}{2n+1}$$

d'où

$$\boxed{\frac{x^n}{1 + x + \dots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}} \quad n \geq 0$$

<u>Problème 1</u> :

<u>Partie</u>

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a. Montrons que $1, a, -1, -a$ sont des diviseurs de $a$.

Pour $1$.

$$a = 1 . 1 \qquad (\text{ici } k = 1)$$

Pour $a$

$$a = 1 . a \qquad (\text{ici } k = 1)$$

Pour $-1$

$$a = (-a) . (-1) \qquad (\text{ici } k = -a)$$

Pour $-a$

$$a = (-1) (-a) \qquad (\text{ici } k = -1)$$

b. Si $a \neq 0$

on a $0 = 0 . a$ (ici $k = 0$)

donc $0$ est un multiple de $a$

c. Si $b \neq 0$

montrons que : $b \mid a \Rightarrow b \mid ac$

$$b \mid a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kb$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ac = kcb$$

$$\Rightarrow \exists K \, (K = kc) \in \mathbb{Z} : ac = Kb$$

$$\boxed{b \mid a \Rightarrow b \mid ac}$$

d. Si $b \neq 0$

mq $b \mid c$ et $c \mid a \Rightarrow b \mid a$

$$b \mid c \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : c = k_1 b$$

$$c \mid a \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : a = k_2 c$$

$$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : a = k_1 k_2 b$$

$\Rightarrow \exists\, k\ (k = k_1 k_2) \in \mathbb{Z} : a = k b$

$\Rightarrow b \mid a$

donc $\boxed{b \mid c \text{ et } c \mid a \Rightarrow b \mid a}$

e. On suppose que $a \neq 0$ et $b \neq 0$

mq $b \mid a$ et $a \mid b \Rightarrow a = b$ ou $a = -b$

$b \mid a \Rightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{Z} : a = k_1 b$

$a \mid b \Rightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{Z} : b = k_2 a$

$\Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : b = k_1 k_2 b$

$\Rightarrow \exists\, k_1 k_2 \in \mathbb{Z} : b(1 - k_1 k_2) = 0$

$(b \neq 0)$

$\Rightarrow \exists\, k_1 k_2 \in \mathbb{Z} : 1 - k_1 k_2 = 0$

$\Rightarrow \exists\, k_1 k_2 \in \mathbb{Z} : k_1 k_2 = 1$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 1$ ou $k_1 = k_2 = -1$

$\Rightarrow a = b$ ou $a = -b$

clmc

$$\boxed{b \mid a \text{ et } a \mid b \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b}$$

f. n9

$b \mid a$ et $b \mid c \Rightarrow \forall\, \alpha, \gamma \in \mathbb{Z},\ b \mid (\alpha a + \gamma c)$

St $b \mid a$ et $b \mid c$

St $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$

$b \mid a \Rightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{Z} : \quad a = k_1 b$

$b \mid c \Rightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{Z} : \quad c = k_2 b$

$$\Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \begin{cases} \alpha a = \alpha k_1 b \\ \gamma c = \gamma k_2 b \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : \quad \alpha a + \gamma c = (\alpha k_1 + \gamma k_2) b$

$\Rightarrow \exists\, K\ (K = \alpha k_1 + \gamma k_2) \in \mathbb{Z} : \quad \alpha a + \gamma c = K b$

$\Rightarrow \quad b \mid \alpha a + \gamma c$

donc

$$\boxed{b \mid a \text{ et } b \mid c \Rightarrow \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{Z},\ b \mid (\alpha a + \gamma c)}$$

2. Application.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On considère les entiers

a. $a_n = 2n+1$ $\quad c_n = 3n+8$

$a_5 = 11$ $\quad c_5 = 23$

$a_6 = 13$ $\quad c_6 = 26$

$a_{100} = 201$ $\quad c_{100} = 308$

| $n$ | 5 | 6 | 100 |
|---|---|---|---|
| Ensemble des diviseurs communs de $a_n$ et $c_n$ | $\{1\}$ | $\{1, 13\}$ | $\{1\}$ |

b. Montrons que si

$$d \mid a_n \text{ et } d \mid c_n \Rightarrow d \mid 13$$

soit $d$ : $d \mid a_n$ et $d \mid c_n$

prenons $\alpha = -3$ et $r = 2$

on a

$$\alpha a_n + r c_n = -6n - 3 + 6n + 16$$

$$\alpha a_n + r c_n = 13$$

Comme

$d | a_n$ et $d | c_n$

donc, d'après la question 1.f,

on a :

$$d \mid \alpha a_n + r c_n$$

donc $d | 13$

c. Déduisons en les diviseurs communs possibles de $a_n$ et $c_n$

Soit $d$ un diviseur commun

on a, d'après 2b, $d | 13$

donc $d \in \{1, 13\}$ comme 13 est premier.

Les diviseurs communs possibles de $a_n$ et $c_n$ sont 1 et 13

# Partie B

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

a. Mq $a \equiv a \; [n]$

$\underline{a \equiv a \; [n] \quad \text{car} \quad n \mid a - a}$

b.

$a \equiv b \; [n] \Rightarrow n \mid a - b$

$\Rightarrow n \mid b - a$

$\underline{a \equiv b \; [n] \Rightarrow b \equiv a \; [n}$

c.

$n \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad a = kn$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad a - 0 = kn$

$\iff n \mid a - 0$

$\underline{n \mid a \iff a \equiv 0 \; [n]}$

d.

$$\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid a-b \\ n \mid b-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow n \mid a-b+b-c$$

$$\Rightarrow n \mid a-c$$

$$\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{cases} \Rightarrow a \equiv c\,[n]$$

e.

$$\begin{cases} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid a-b \\ n \mid c-d \end{cases}$$

$$\Rightarrow n \mid a-b+c-d$$

$$\Rightarrow n \mid a+c-(b+d)$$

$$\begin{cases} a \equiv b\,(n) \\ c \equiv d\,[n] \end{cases} \Rightarrow a+c \equiv b+d\,[n]$$

b.

Soit $p \geq 2$

on a :

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \dots + b^{n-1})$$

$$a \equiv b \ [n] \Rightarrow n \mid a - b$$

$$\Rightarrow n \mid (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow n \mid a^p - b^p$$

$$\Rightarrow a^p \equiv b^p \ [n]$$

$$a \equiv b \ [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p \ [n]$$

2. Application

a. Montrons que $35 \equiv 1 \ [17]$ et $84 \equiv -1 \ [17]$

$$35 - 1 = 34 = 2 \times 17$$

donc $35 \equiv 1 \ [17]$

$$84 + 1 = 85 = 5 \times 17$$

donc $84 \equiv -1 \ [17]$

b. Déduisons-en que

$35^{228} + 84^{501}$ est un multiple de 17

comme

$35 \equiv 1 \; [17]$ et $84 \equiv -1 \; [17]$

donc d'après 1.f

$35^{228} \equiv 1^{228} \; [17]$ et $84^{501} \equiv (-1)^{501} \; [17]$

$35^{228} \equiv 1 \; [17]$ et $84^{501} \equiv -1 \; [17]$

donc, d'après 1. e

$35^{228} + 84^{501} \equiv 0 \; [17]$

donc $17 \mid 35^{228} + 84^{501}$

donc $\boxed{35^{228} + 84^{501} \text{ est un multiple de } 17}$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$

Montrons que $5^n - 1$ est un multiple de 4.

$5 = 1 \times 4 + 1$

$$5 - 1 = 1 \cdot 4.$$

donc $4 \mid 5 - 1$

et $5 \equiv 1 \quad [4]$

on a aussi

$$5^n \equiv 1^n \quad [4]$$

Comme $-1 \equiv -1 \quad [4]$

donc

$$5^n - 1 \equiv 1 - 1 \quad [4]$$

$$5^n - 1 \equiv 0 \quad [4]$$

d'où $4 \mid 5^n - 1$

et donc $5^n - 1$ est un multiple de 4

$\forall n \geq 0 \quad 5^n - 1$ est un multiple de 4

## Problème 2 : fractions et pyramides égyptiennes.

1.a. fausse

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m+n}{nm} \qquad m+n \neq 1$$

donc $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}$ sont des fractions égyptiennes

alors que $\frac{m+n}{nm}$ ne l'est pas

1.b vraie

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n.m} \qquad n.m \in \mathbb{N}^*$$

1.c fausse

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ : $m \neq 1$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{n} \times \frac{m}{1} = \frac{m}{n} \qquad m \neq 1$$

2 a. Nous allons montré que tout rationnel de $]0,1[$ admet une décomposition égyptienne.

i. Soit $x \in \mathbb{Q} \cap ]0,1[$

$\exists\, m, n \in \mathbb{N}^* \; : \; x = \dfrac{m}{n}$ et $m < n$

La division euclidienne de $n$ par $m$ donne $n = qm + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < m$

Montrons que $x - \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{m'}{n'}$ avec $n' \in \mathbb{N}^*$ et $m' \in \{0, \dots m - r\}$

$$x - \frac{1}{q+1} = \frac{m}{n} - \frac{1}{q+1}$$

$$= \frac{m(q+1) - n}{n(q+1)}$$

$$= \frac{mq + m - qm - r}{n(q+1)}$$

$$x - \frac{1}{q+1} = \frac{m-r}{n(q+1)}$$

posons $n' = n(q+1)$ et $m' = m - r$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ et $q+1 > 0$

donc $\underline{n' \in \mathbb{N}^*}$

de plus : $0 \leq r < m$

donc $-m < -r \leq 0$

et $0 < m - r \leq m$

d'où $\underline{m' \in \{1, \dots, m\}}$

NB : Contrairement à ce qui est écrit sur l'énoncé, $m' \in \{1, \dots, m\}$

En effet, $m'$ ne peut pas être nul sinon, on aurait $r = m$ ce qui ne se peut pas !

ii. D'après ce qui précède,

$\forall x \in \mathbb{Q} \cap ]0,1[$ ,

$\exists\, q, m', n' : \quad x = \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{m'}{n'}$

Comme $m' < n'$ on peut donc répéter l'opération sur $\dfrac{m'}{n'}$ jusqu'à ce que $m' = 1$.
Ceci arrivera car les $m'$ forment une suite décroissante et minorée par $1$.

iii. On fera l'application que pour $\dfrac{5}{17}$

$17 = 3.5 + 2$ $\qquad 68 \,|\, 3 \quad 8 \quad 22$

$\dfrac{5}{17} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{68}$ ; $\quad 68 = 3.22 + 2$

$\dfrac{3}{68} - \dfrac{1}{23} = \dfrac{1}{1564}$

donc
$$\boxed{\dfrac{5}{17} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{23} + \dfrac{1}{1564}}$$

5. Donnons deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$.

on a

- $$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

- $$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

On en déduit que la décomposit° égyptienne d'un nombre rationnel $x$ tel que $0 < x < 1$ n'est pas unique

3. Montrons que SABCD est une pyramide égyptienne.

- SABCD est régulière à base carrée et comme $SA = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = AB$ donc les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux.

- $AB = BC = CD = DA = \frac{1}{30}$

  $SA = SB = SC = SD = \frac{1}{20}$

les longueurs des arrêtes sont des fractions égyptiennes.

- $4 \frac{1}{30} + 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{4}{30} + \frac{1}{5}$

$$= \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

La somme des longueurs des arrêts de la pyramide est une fraction égyptienne.

$\boxed{\text{Donc } SABCD \text{ est une pyramide égyptienne}}$

b. Montrons que si

SABCD est égyptienne alors

$p \geq 4$ et $q \geq 4$.

Supposons que SABCD soit une pyramide égyptienne.

on a donc

$\exists k \in \mathbb{N}^* : \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{1}{k} \leq 1$

et comme $p, q \in \mathbb{N}^*$

donc $\begin{cases} \frac{4}{p} \leq 1 \\ \frac{4}{q} \leq 1 \end{cases}$

d'où $\boxed{\begin{cases} p \geq 4 \\ q \geq 4 \end{cases}}$

c.

SABCD est égyptienne si et seulement si

$\exists n \in \mathbb{N}^* : \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{4p + 4q}{pq} = \frac{1}{n}$

$$\iff \quad n = \frac{pq}{4p+4q}$$

$$\boxed{\text{Si } ABCD \text{ est égyptienne} \iff n = \frac{pq}{4p+4q}}$$

d. Déduisons-en que si $p$ et $q$ sont des nombres impairs, alors $ABCD$ ne peut pas être égyptienne.

Supposons que $p$ et $q$ soient impairs

on a

$$n = \frac{pq}{4p+4q} = \frac{(2i+1)(2j+1)}{4(2i+1)+4(2j+1)} \qquad i, j \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{4ij + 2i + 2j + 1}{8i + 8j + 8}$$

$$n = \frac{4ij + 2(i+j) + 1}{8(i+j+1)}$$

$$n = \frac{2(2ij + i + j) + 1}{8(i + j + 1)}$$

SABCD est égyptienne $\iff n \in \mathbb{N}^*$

$\iff 8(i+j+1) \mid 2(2ij + i + j) + 1$

$\iff \exists K \in \mathbb{N} : 2(2ij + i + j) + 1 = 8(i + j + 1).K$

$\implies 8 \mid 2(ij + i + j) + 1$

or $2(ij + i + j) + 1$ est impair

donc $8$ ne divise pas $2(ij + i + j) + 1$

par conséquent $n \notin \mathbb{N}^*$

et donc SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.

fin.

le 11/01/2022.