

SERIE SUR ANGLES ORIENTES ET RELATIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercice :1 Soit \vec{u} et \vec{v} des vecteurs non nuls. On pose $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$

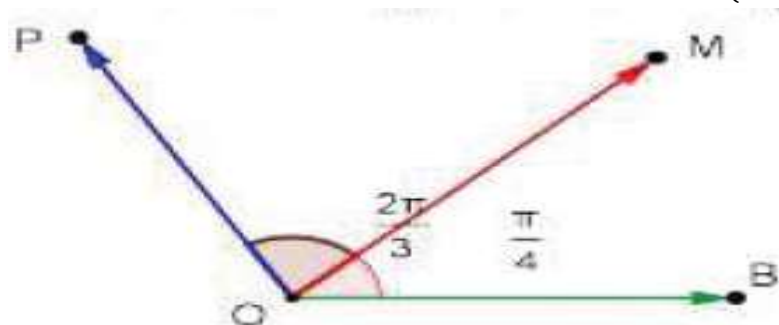
Exprimer à l'aide de α les angles suivants :

- 1) $(\vec{u}, -\vec{v})$; 2) $(-\vec{u}, \vec{v})$; 3) $(-\vec{u}, -\vec{v})$; 4) (\vec{v}, \vec{u}) ; 5) $(-\vec{v}, \vec{u})$; 6) $(-\vec{v}, -\vec{u})$
7) $(2\vec{u}, 3\vec{v})$; 8) $(-2\vec{u}, -3\vec{v})$; 9) $(\frac{1}{2}\vec{v}, -3\vec{u})$;

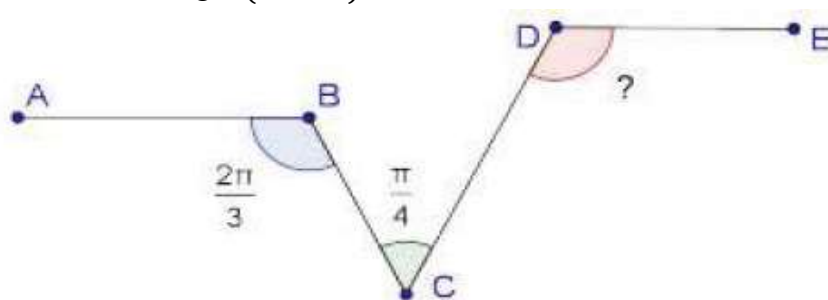
Exercice :2 ABCD est un carré surmonté d'un triangle ADE isocèle en E avec $\widehat{DAE} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$. Déterminer la mesure des angles :

- 1- (\vec{BC}, \vec{BA}) ; (\vec{CB}, \vec{CD}) ; (\vec{ED}, \vec{EA}) et (\vec{AC}, \vec{AE})
2- (\vec{AB}, \vec{DC}) ; (\vec{AB}, \vec{CD}) ; (\vec{AB}, \vec{DE}) et (\vec{BA}, \vec{DE})
3- (\vec{CA}, \vec{BD}) et (\vec{CA}, \vec{DE})

Exercice :3 Déterminer une mesure de l'angle orienté (\vec{OM}, \vec{OP}) .



Exercice :4 Dans la figure suivante, les deux droites (AB) et (DE) sont parallèles. Déterminer la mesure de l'angle (\vec{DC}, \vec{DE})



Exercice : 5

- 1- Soit ABC un triangle ; on désigne par α une mesure de l'angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC})
2- Donner en fonction de α une mesure des angles : (\vec{BA}, \vec{AC}) ; (\vec{AC}, \vec{AB}) ;
 (\vec{CA}, \vec{AB}) et (\vec{CA}, \vec{BA})

Exercice :6

Soit A , B et C les points de (C) tels que $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{4\pi}{5}$ soient les mesures principales respectives des angles (\vec{OI}, \vec{OA}) ; (\vec{OB}, \vec{OA}) et (\vec{OC}, \vec{OB}) . Calculer les mesures principales des angles (\vec{OI}, \vec{OB}) et (\vec{OI}, \vec{OC})

Exercice : 7

1-Construire un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{5}$.

2-Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

Exercice :8

1-Calculer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes.

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$$

$$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$E = 2\sin(4\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$F = \cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x) + \sin(7\pi + x)$$

2-Démontrer que , pour tout nombre réel x:

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \text{ et } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice 9 Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes : $\cos\left(\frac{538\pi}{3}\right)$; $\sin\left(\frac{123\pi}{6}\right)$

et $\tan\left(\frac{-77\pi}{4}\right)$

Exercice :10

1-Déterminer la mesure principale de l'angle orienté dont une mesure est :

$$1) -\frac{3011\pi}{7} \quad ; \quad 2) -\frac{2441\pi}{29} \quad ; \quad 3) \frac{1007\pi}{6} \quad ; \quad 4) \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad 5) \frac{-71\pi}{6} \quad ; \quad 6) \frac{-119\pi}{4} \quad ; \quad 7) \frac{273\pi}{12}$$

2-En déduire $\cos\left(\frac{1007\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{273\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{1007\pi}{6}\right)$; $\sin\left(\frac{273\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{-119\pi}{4}\right)$; $\sin\left(\frac{-119\pi}{4}\right)$

Exercice : 11

1-Développer $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$.

2-On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

a-Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b-En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice:12

1-Calculer : $\pi - \frac{\pi}{7}$; $\pi - \frac{3\pi}{7}$; $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$; $2\pi - \frac{5\pi}{7}$.

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

2-En déduire que : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}$

3-Montrer que : $\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Exercice :13

1-Démontrer que pour tout nombre réel x , on a :

$$a - (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x ;$$

$$b - (1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

$$c - \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$d - \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

(On remarque que, pour tous nombres réels a et b : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)

Exercice : 14

1) On donne $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$. Déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

2) Sachant que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Déterminer $\cos \frac{\pi}{12}$ et en déduire que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice : 15

$$\text{On donne } \emptyset = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

1-Montrer que $\emptyset = 3$

2-On donne : $x = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et

$$y = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

a-Calculer $x; y; x + y$ et $x - y$

b-Démontrer que : $16 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{24}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) \sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 1$

Exercice :16

1-Verifier que $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

2- On donne $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a-Démontrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

b-En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice :17

1- Exprimer $\cos^4 x + \sin^4 x$ à l'aide de $\sin 2x$.

2- En déduire l'expression de : $\cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos 2x$.

3-Calculer les expressions suivantes :

a) $\cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$;

b) $\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right)$.

Exercice :18

1-Démontrer que pour tout élément x de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. On a : $\sqrt{1 + \sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$

2-Démontrer que si a, b et c sont 3 réels tels que $a + b + c = \pi$,

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

3-Démontrer que : a) $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; b) $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

c) $\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1$; e) $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

4- Démontrer que : a) $\cos(a) = \frac{1-\tan^2(\frac{a}{2})}{1+\tan^2(\frac{a}{2})}$; b) $\tan(a) = \frac{2\tan(\frac{a}{2})}{1-\tan^2(\frac{a}{2})}$;

c) $1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2 a}$; d) $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$; e) $\sin(a) = \frac{2\tan(\frac{a}{2})}{1+\tan^2(\frac{a}{2})}$

Exercice : 19

Soit a et b deux nombres réels tels que a, b et a + b n'appartient pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

1-Démontrer que $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2-En déduire que si x n'appartient pas à $\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{2}{\cos 2x}$

Exercice : 20

1-Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

2-Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice : 21

1-a) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $]-\pi; \pi]$ l'équation : $|\cos 2x| = \frac{1}{2}$

b) Placer les solutions sur le cercle trigonométrique

2-Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $]-\pi; \pi]$ l'équation suivante $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

3- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = -1$.

4- Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} = 0$

Exercice : 22

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\tan x = \sqrt{3}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x = \frac{1}{2}$; d) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

e) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; f) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; g) $\sin x = \cos x$; h) $\sin 2x = \cos 3x$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $3\sin x = 2\cos^2 x$; b) $\cos 2x = \cos x - 1$; c) $3\cos x + \sqrt{3} \sin x + 3 = 0$

d) $\sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = 0$; e) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1 = 0$; h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

3) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes:

a) $2\cos^2 x + 9 \cos x + 4 = 0$; b) $4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$

4) Résoudre dans D les équations suivantes:

$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, Dans $D = \mathbb{R}$ puis $D =]-\pi; 2\pi]$

$2\cos x \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin 2x$; $D = \mathbb{R}$

Exercice :23

On considère l'équation (E) $\cos 4x - \cos 3x = 0$

1-Résoudre (E) dans \mathbb{R}

2-Démontrer que pour tout réel on a :

a) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

b) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

3-On pose $X = \cos x$

a-Montrer que (E) est équivalente à (E') : $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$

b-Montrer que les solutions de (E') sont $1, \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$.

c- En déduire une factorisation de $P(X) = 8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$.

d-Calculer $P(0)$, puis en déduire la valeur exacte de $A = \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$.

Exercice :24

1-Résoudre dans D les inéquations suivantes:

a) $2 \cos x - 1 \leq 0, D = [0; 2\pi[;$ b) $\sqrt{2} \sin x - 1 \leq 0 \quad D =]-\pi; 0]$

2-Résoudre dans D les inéquations suivantes:

a) $(2 \sin x - 1)(-2 \cos x + \sqrt{2}) \leq 0; D = \mathbb{R};$ b) $\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{3}{4}; D = [-\pi; \pi]$

c) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 > 0; D = \mathbb{R}$

Exercice :25

Soit $f(x) = 1 + 2 \cos 2x - 2 \sin 2x$

1-Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2-a-Montrer que $f(x) = 1 + \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

b- Montrer que $f(x) = 2 \cos x (\cos x - \sin x)$

3-Soit $g(x) = \frac{2 \cos 2x}{f(x)}$

a- Montrer que pour tout x appartenant à $D_g, g(x) = 1 + \tan x$

b-Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .

c- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$ puis $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice : 26

1-Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant:

$$\begin{cases} 2 \cos x - 3 \sin x = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \cos x + 2 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

2-Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} 2 \cos x + 3 \sin y = -\frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ 4 \cos x + \sin y = 2 \end{cases} \quad x \in [-\pi; \pi]; y \in [-\pi; \pi]$$

Exercice : 27 On donne $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 7x + 8$

1-a-Montrer que 1 est racine.

b-En déduire une factorisation de $P(x)$.

2-Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2 \sin^3 x - 17 \sin^2 x + 7 \sin x + 8 = 0$

Exercice :28 Démontrer les inégalités suivantes

1 - $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin 2x$

2 - $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$

3 - $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$

Exercice :29

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1 - 2\cos^2 - \cos x - 1 = 0$$

$$2 - \sin x(2\sin x + 7) = 4$$

$$3 - \cos 2x = \sqrt{3} \cos x - 1$$

Exercice :30

1-Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -1$

2-Déterminer les réels x et y vérifiant le système :
$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \cos x + \cos y = -1 \end{cases}$$

Exercice :31 On donne :

$$A = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \dots + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$D = \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

1-Montrer que $A = 3$; $B = 6$ et $C = \frac{3}{2}$

2-Montrer que si $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ alors $\tan a \times \tan b + \tan b \times \tan c + \tan c \times \tan a = 1$

Exercice :32

1-Montrer que pour tout nombre a :

$$\cos^3 a = \frac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a) \quad \text{et} \quad \sin^3 a = \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)$$

2-En déduire la valeur exacte de $X = \cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice :33

1-Montrer que $x \in k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{2+\sin 2x-2\cos 2x}{1+3\sin^2 x-\cos 2x} = \frac{2}{5} \left(2 + \frac{1}{\tan x}\right)$

2- Montrer que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x} = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

« Chers élèves ce n'est pas le chemin qui est difficile, c'est le difficile qui est le chemin » DIOMATHS

