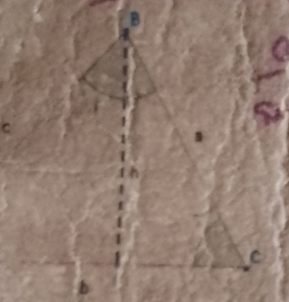
Par
Mr Séverin Bokambelabissa
Professeur Certifié

Fort en Mathématiques 1ère

Séries: C & D

La loi des sinus



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Rappel : $\sin \alpha = \frac{C.O}{hyp}$

- Quelques définitions & formules à retenir
- 11 Sujets de Compositions + Corrigés

Mon Passeport pour la Terminale

MATHEMATIQUES

PREMIERES

C & D

11 sujets corrigés

Par

Mr. BOKAMBELABISSO Séverin
Pour GREMBO Services

SOMMAIRE

Quelques définitions et formules importantes 3

Enoncés des sujets.. 44

Résolutions des sujets 60

Quelques définitions et formules importantes à retenir

POLYNOMES

1-**Définition** : Une fonction polynôme ou tout simplement un polynôme est toute expression définie dans $\mathbb{R}$ de la forme générale suivante :

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Avec $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit P une fonction polynomiale à variable réelle x,alors

$$\boxed{P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}$$

Ce polynôme est de degré $\boldsymbol{n}$ et on note $\boldsymbol{d^\circ P = n}$ ou $\boldsymbol{degP = n}$ et les nombres $\boldsymbol{a_0}$; a_1; ...; $\boldsymbol{a_n}$ sont appelés **coefficients** de P.

Racine ou zéro d'un polynôme: Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel. On dit que α est racine de $P(x)$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P(\alpha) = 0}$.

3- Factorisation d'un polynôme par $(x-\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Soit $P(x)$ un polynôme et α un réel donné. Si $P(\alpha) = 0$, alors $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha)$ c'est-à-dire il existe un polynôme Q tel que $\boldsymbol{P(x) = (x-\alpha)Q(x)}$. Avec $\boldsymbol{d^\circ Q = n-1}$ si **n** est le degré de P.

4- Les identités remarquables

$\forall$ *les réels a et b*, on a:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab} \quad \boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

NB : $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$

EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES DANS $\mathbb{R}$

1- Les équations irationnelles

Soient $A(x)$ *et* $B(x)$ deux polynômes, on a :

$$\boxed{\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}}$$

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ \text{[illegible]}(x) \end{cases}$$

2-Les inéquations irrationnelles

$$\boxed{\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}}$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad S_1$$

Ou (inclusif)

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \quad S_2$$

Alors $S = S_1 \cup S_2$

$$\boxed{\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}}$$

$$\boxed{\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}}$$

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS ℝ

1- Définition : Une équation du second degré à une inconnue x est une expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

2- Forme canonique du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

3- Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant noté Δ qui se lit « delta ».

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Discussion

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépendent du signe du nombre réel Δ.

1er cas : Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes x' et x'' telles que : $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Alors $\boxed{S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$

2ème cas : Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle double telle que : $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ Alors $\boxed{S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}}$

3ème cas : Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution

Alors $\boxed{S = \emptyset}$

4- Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

1er cas : Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')}$

2ème cas : Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')^2}$ Ou $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x'')^2}$

3ème cas : Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

5- Somme et produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c$

a- Somme des racines (S)

$$\boxed{S = x' + x'' = \frac{-b}{a}}$$

b- Produit des racines (P)

$$\boxed{P = x'.x'' = \frac{c}{a}}$$

6- Existence et signe des racines d'une équation du second degré

a- Existence des racines

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes x' et x'' $\left(x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine réelle double $\left(x' = x'' = \frac{-b}{2a}\right)$.

Si $\Delta < 0$, les racines n'existent pas.

b- **Signe des racines**

Les racines d'une équation du second degré existent lorsque $\Delta > 0$.

P et **S** permettent de connaître le signe des racines x' *et* x'' sans les calculer.

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$ Les deux racines sont de signes contraires $(x' < 0 < x'')$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases}$ Les deux racines sont de signes contraires et la plus grande en valeur absolue est **positive**

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases}$ les deux racines sont de signes contraires ; la plus grande en valeur absolue est **négative**

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ les deux racines sont de même signe $(x' < x'' < 0)$ Ou $(0 < x' < x'')$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ les deux racines sont **positives** $(0 < x' < x'')$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ les deux racines sont **négatives** $(x' < x'' < 0)$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \end{cases}$ l'une des racines est **nulle** et l'autre est égale à $-\frac{b}{a}$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 0 \end{cases}$ Les deux racines sont **opposées** l'une de l'autre $(x' = -x''$ ou $x'' = -x')$

Si $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 1 \end{cases}$ L'une des racines est l'**inverse** de l'autre

7- Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

* Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine, il a le signe de **a**.

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	**Signe de a**

* *Si* $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de **a** sauf pour la valeur de $x = -\frac{b}{2a}$ où il s'annule.

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	**Signe de a**	0	**Signe de a**

*Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de **a** pour les valeurs de x à l'extérieur des racines et du signe contraire de **a** pour les valeurs de x à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	**Signe de a**	0	**Signe contraire de a**	0	**Signe de a**

VECTEURS DU PLAN

1- Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^* / \vec{u} = k\vec{v}$ *ou* $\vec{v} = k\vec{u}$.

NB : Le réel k est appelé coefficient de colinéarité ou coefficient de dépendance.

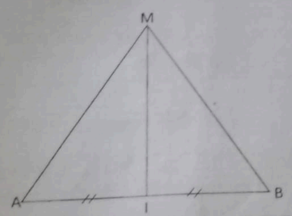
2- **Les droites parallèles**

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires c-à-d $\exists k \in \mathbb{R}^* / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ **ou** $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

3- **Les points alignés**

Trois points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c-à-d $\exists k \in \mathbb{R}^* / \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

4- **Milieu d'un segment dans un triangle**



$\boxed{\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})}$ et $\boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ $\boxed{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}}$

PRODUIT SCALAIRE

1- **Produit scalaire de deux vecteurs à l'aide d'un angle**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})}$

NB : -Le réel $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « **u scalaire v** ».

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, on a : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

-Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, on a : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

2- **Produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à l'aide des normes**

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]}$$

3- **Produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à l'aide de l'expression analytique**

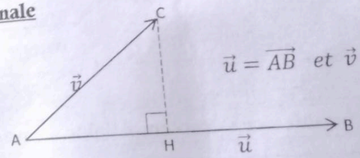
Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *Alors* $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

Remarque : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Donc $\boxed{xx' + yy' = 0}$

4- **Produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à l'aide de la projection orthogonale**



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Avec H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}}$

NB : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires, on a :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \times \overline{AH}}$

5- **Norme d'un vecteur**

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ *avec* $\vec{u}\binom{x}{y} \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Où $\|\vec{u}\|$ se lit « **norme de vecteur u** ».

NB : $\boxed{\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

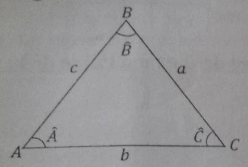
6- **Distance d'un point à une droite définie par son équation cartésienne**

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan et $(\Delta): ax + bx + c = 0$ l'équation cartésienne d'une droite.

On a: $$\boxed{d(A, \Delta) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

7-**Théorème d'AL-KASHI ou théorème des cosinus**

Soit ABC un triangle avec $BC = a\,; AC = b$ et $AB = c$

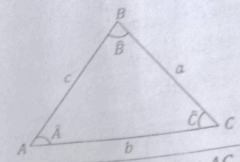


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\hat{A}}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\hat{B}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\hat{C}}$$

8 - **Théorème des sinus**



$$\boxed{\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2S} = 2R}$$

Ou

$$\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

Où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et S l'aire (surface) de ce triangle.

L'aire du triangle ABC

$\boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} \quad ou \quad S = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}}$ $\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}}$

Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\hat{A}} = \frac{b}{2\sin\hat{B}} = \frac{c}{2\sin\hat{C}} \quad ou \quad R = \frac{abc}{4S}}$$

EQUATIONS CARTESIENNES DU CERCLE

1-**Equation du cercle de centre $I(a; b)$ et de rayon R**

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Ou

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0}$$

En posant $A = -2a$; $B = -2b$ et $C = a^2 + b^2 - R^2$

On a : $\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

Cette relation définie la forme générale de l'équation cartésienne d'un cercle.

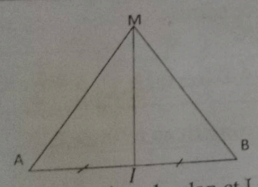
- **Le rayon du cercle**

$C = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}}$

a) Equation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$$\boxed{(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0}$$

10- Théorème de la médiane



Soient A et B deux points du plan et I milieu du segment $[AB]$. Alors pour tout point M du plan, on a :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$

Où MI est la médiane du triangle ABM.

ANGLES ORIENTES

1- **Définition1** : On appelle cercle trigonométrique du plan orienté, tout cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le **sens direct** ou **sens positif** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

2-**Définition 2** : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé **angle orienté de vecteurs.**

3- **Mesure d'un angle orienté** : Si x est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors toutes les mesures en radian de cet angle sont de la forme: $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Notation : $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) = x + 2k\pi \text{ ou } (\vec{u}, \vec{v}) = x[2\pi]}$

4- **Mesure principale d'un angle orienté**: Un angle orienté possède une mesure et une seule appartenant dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelée **mesure principale.**

NB : Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $x + 2k\pi$ revient à déterminer l'entier relatif k tel que $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$.

5- **Propriétés des angles orientés :**

a) **Relation de Chasles :**Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$: $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})}$

b) **Angles opposés** : $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})}$

c) **Angles égaux** : $\boxed{(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})}$

d)Angles supplémentaires :

$$\boxed{(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \text{ Ou } (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi}$$

Retenons : Soit α et β deux nombres réels non nuls et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

-Si α et β sont de même signe, alors $\boxed{(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})}$

-Si α et β sont de signes contraires, alors

$$\boxed{(\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi}$$

e) Vecteurs colinéaires et vecteurs orthogonaux :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0[2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \pi[2\pi]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
  ou
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

6-**Cosinus et sinus d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$:**

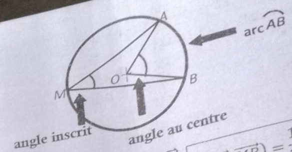
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{dét}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$$

7- **Angle inscrit et angle au centre :**

On considère un cercle (C) de centre O et trois points A, B, M sur ce cercle tel que : $M \notin \overset{\frown}{AB}$.

L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est appelé l'**angle au centre** qui **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

L'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est appelé l'**angle inscrit** qui **intercepte** l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



$$\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2 \times (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]} \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]}$$

Propriété : La mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit interceptant le même arc.

8-**Points cocycliques ou points alignés :**

Le points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow$

$$\boxed{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})[\pi]}$$

TRIGONOMETRIE

1-**Lignes trigonométriques de $\widehat{\theta}$ et $-\widehat{\theta}$**

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\cot\text{an}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot\text{an}(-\theta) = -\cot\text{an}\,\theta$

-Les fonctions tangente, cotangente et sinus sont des fonctions impaires.

-La fonction cosinus est une fonction paire.

2- **Relation fondamentale de la trigonométrie**

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$	$1 + \cot\text{an}^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\boxed{-1 \leq \cos\theta \leq 1}$ $\boxed{-1 \leq \sin\theta \leq 1}$ $\boxed{\cos(x+2k\pi) = \sin x}$

$\boxed{\sin(x+2k\pi) = \sin x}$ $\boxed{\tan(x+k\pi) = \tan x}$ avec k∈ $\mathbb{Z}$

-Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période 2π.

-La fonction $\tan x$ est périodique de période π.

3- **Relation entre θ et $(\pi - \theta)$**

$\boxed{\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta}$ $\boxed{\sin(\pi - \theta) = \sin\theta}$

4- **Relation entre θ et $(\pi + \theta)$**

$\boxed{\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta}$ $\boxed{\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta}$

5- **Relation entre θ et** $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta}$ $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta}$

6- **Relation entre θ et** $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta}$ $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta}$

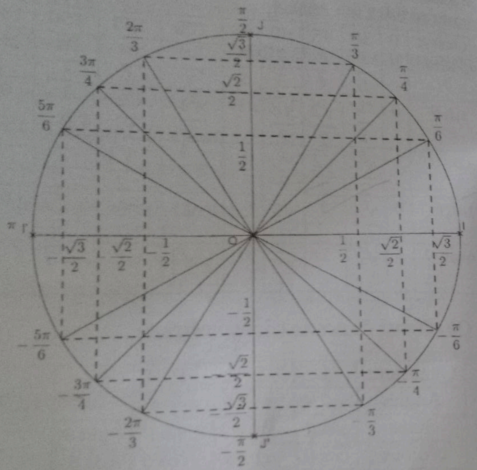
7- **Tableau trigonométrique de quelques valeurs remarquables des angles**

θ(degré)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
θ(radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot an\,\theta$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	/

8- **Quadrants du cercle trigonométrique**

Quadrants	I	II	III	IV
Angles	θ	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$-\theta$
Sinus	$\sin\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\sin\theta$
cosinus	$\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$

9-Cercle trigonométrique



10- Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$

11-Formules de duplication

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

12- Formules de transformation de produit en somme

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

13- Formules de transformation de somme en produit

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\boxed{\sin p+\sin q=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

14- **Equations trigonométriques**

a) **Equation du type $\cos x = a$**

Si $a\epsilon[-1\,;1]$, il existe un nombre réel α tel que $a=\cos\alpha$

Alors $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\pm\alpha+2k\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'ou $\boxed{S=\{-\alpha+2k\pi\ ;\alpha+2k\pi\ \}}$

b) **Equation du type $\sin x = a$**

Si $a\epsilon[-1\,;1]$, il existe un nombre réel α tel que $a=\sin\alpha$

Alors $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=\alpha+2k\pi}\\ \boldsymbol{x=\pi-\alpha+2k\pi}\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'ou $\boxed{S=\{\alpha+2k\pi\ ;\pi-\alpha+2k\pi\ \}}$

c) **Equation du type $\tan x = a$**

Si $a\epsilon[-1\,;1]$, il existe un nombre réel α tel que $a=\tan\alpha$

Alors $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\alpha+k\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'ou $\boxed{S=\{\alpha+k\pi\ \}}$

d) **Equation du type $a\cos x+b\sin x=c$ où $c\epsilon[-1\,;1]$**

$a\cos x+b\sin x=c$

On pose $\boldsymbol{a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi)}$

Avec $\boldsymbol{r=\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\varphi:\begin{cases}\boldsymbol{\cos\varphi=\frac{a}{r}}\\ \boldsymbol{\sin\varphi=\frac{b}{r}}\end{cases}$

SUITES NUMERIQUES

Une suite numérique est une application définie de $\mathbb{N}$ (ensemble des nombres entiers naturels) vers $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels)

1- **Sens de variation d'une suite numérique**

a) Suite croissante

La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $\boxed{U_{n+1}-U_n\geq 0}$

b) Suite décroissante

La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $\boxed{U_{n+1}-U_n\leq 0}$

NB : La suite (U_n) est dite monotone si elle est, soit croissante ou décroissante.

c) **Suite constance ou suite stationnaire**

La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est constante

$\Leftrightarrow$ $\boxed{U_{n+1}-U_n=0}$

Ou

$\boxed{U_{n+1}=U_n}$

2- **Suite majorée, suite minorée et suite bornée**

a) **Suite majorée** : La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $\boxed{U_n\leq M}$

b) **Suite minorée** : La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $\boxed{m\leq U_n}$

c) **Suite bornée** : La suite $(U_n)n\in\mathbb{N}$ est dite bornée si elle est majorée et minorée c'est-à-dire

$\boxed{m\leq U_n\leq M}$

3- Convergence et divergence d'une suite

a) **Suite convergente** : La suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est convergente

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \; (l \in \mathbb{R})}$

b) **Suite divergence** : La suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est divergente

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty}$

c) **Etude de la convergence et de la divergence d'une suite sans calculer la limite**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

4- Suite périodique et suites adjacentes

a) **Suite périodique** : La suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est périodique s'il existe un réel strictement positif p tel que $\boxed{U_{n+p} = U_n}$

b) **Suites adjacentes** : Les suites $(U_n)n \in \mathbb{N}$ et $(V_n)n \in \mathbb{N}$ sont adjacentes si et seulement

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0}$ Ou $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n}$

5- Suites récurrentes de 1er ordre

a) **Suite arithmétique**

La suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est arithmétique

$\Leftrightarrow$ $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$ Ou $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

Avec r : la raison de la suite.

a) **Suite en progression arithmétique**

Les nombres a, b et c dans cet ordre sont en progression arithmétique si on a :

$\boxed{2b = a + c}$ Ou $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$

b) **Terme général d'une suite arithmétique**

$\boxed{U_n = U_p + (n-p)}$ Avec $p < n$

U_n : Terme général
U_p : Premier terme
n : Nombre de terme
p : Indice du 1er terme

Remarque

Si $p = 0 \Rightarrow$ $\boxed{U_n = U_o + nr}$

Si $p = 1 \Rightarrow$ $\boxed{U_n = U_1 + (n-1)r}$

Si $p = 2 \Rightarrow$ $\boxed{U_n = U_2 + (n-2)r}$

c) **Somme d'une suite arithmétique**

$$\boxed{S_n = \frac{N(U_p + U_n)}{2}}$$

S_n : Somme
N : Nombre de terme ($N = n - p + 1$)
U_p : Premier terme
p : Indice du 1er terme
U_n : Terme général

Remarque :

Si $p = 0 \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{(n+1)(U_o + U_n)}{2}}$

Si $p = 1 \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2}}$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2- **Suite géométrique**

La suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est géométrique

$\Leftrightarrow$ $\boxed{U_{n+1} = qU_n}$ Ou $\boxed{\frac{U_{n+1}}{U_n} = q}$

Le réel **q** est appelé **raison de la suite**.

a) **Suite en progression géométrique**

Les nombres a, b et c dans cet ordre sont en progression géométrique $\Leftrightarrow$ $\boxed{b^2 = a \times c}$

b) **Terme général d'une suite géométrique**

$$\boxed{U_n = U_p \cdot q^{n-p}}$$

Remarque

Si $p = 0 \Rightarrow$ $\boxed{U_n = U_o\, q^n}$

Si $p = 1 \Rightarrow$ $\boxed{U_n = U_1\, q^{n-1}}$

c) **Somme d'une suite géométrique**

$\boxed{S_n = \frac{U_p(1 - q^N)}{1 - q}}$ Avec $N = n - p + 1$

Remarque

Si $p = 0 \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{U_o(1 - q^{n+1})}{1 - q}}$

Si $p = 1 \Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q}}$

$$\boxed{1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } |q| < 1 \\ 1 \text{ si } q = 1 \\ \nexists \text{ si } |q| > 1 \text{ ou } q = -1 \end{cases}}$$

FONCTIONS NUMERIQUES

1-**Ensemble de définition d'une fonction**

Fonctions	Conditions à poser
Fonction polynôme	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty ; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}}$	$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ B(x) > 0 \end{cases}$

2-**Limites classiques**

$\boxed{\lim_{x \to 0} x = 0}$ $\boxed{\lim_{x \to 0} x^{\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)}$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty \ (\alpha > 0)}$ $\boxed{\lim_{x \to +\infty} x = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x = -\infty}$

3-**Continuité en un point x_o**

La fonction f est continue en x_o

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x_o) \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)}$

3-1) **Continuité à gauche continuité à droite en x_o**

3-1-1) **Continuité à gauche en x_o**

La fonction f est continue à gauche en x_o

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x_o) \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)}$

3-1-2) **Continuité à droite en x_o**

La fonction f est continue à droite en x_o

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x_o) \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o)}$

- Si $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o)$, alors f est continue en x_o
- Si $\lim_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_o^+} f(x)$, on dit que f n'est pas continue en x_o

3-2) **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si la fonction f continue sur l'intervalle $[a ; b]$ prend des valeurs numériques $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, elle s'annule au moins pour une valeur x_o comprise entre a et b.

Donc si $\boxed{f(a).f(b) < 0, \text{alors } \exists\, x_o \in]a ; b[\,/ f(x_o) = 0}$

3-3) **Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone**

Toute fonction numérique f continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle $I = [a ; b]$ définit une bijection de I sur $f(I)$.
Il existe alors une bijection réciproque notée f^{-1} de f continue et strictement monotone de $f(I)$ sur I.

4-**Dérivabilité en un point x_o**

La fonction f est dérivable en x_o $\Leftrightarrow$

$\boxed{f(x_o) \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) = l \ (l \in \mathbb{R})}$

Avec $f'(x_o)$ le nombre dérivé.

4-1) **Dérivabilité à gauche dérivabilité à droite en x_o**

4-1-1) **Dérivabilité à gauche en x_o**

La fonction f est dérivable à gauche en x_o $\Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x_o)\ \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f_g{}'(x_o) = l_1\ (l_1 \in \mathbb{R})}$$

4-1-2) **Dérivabilité à droite en x_o**

La fonction f est dérivable à droite en x_o $\Leftrightarrow$

$$\boxed{f(x_o)\ \exists \text{ et } \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{(x-x_o)} = f_d{}'(x_o) = l_2\ (l_2 \in \mathbb{R})}$$

Conclusion

- Si $f_g{}'(x_o) = f_d{}'(x_o)$, alors f est dérivable en x_o.
- Si $f_g{}'(x_o) \neq f_d{}'(x_o)$, alors f n'est pas dérivable en x_o.

4-2) **Interprétation géométrique ou graphique**

- Si $f_g{}'(x_o) \neq f_d{}'(x_o)$, la fonction f n'est pas dérivable en x_o, alors la courbe (C_f) admet au point $M_o(x\,;f(x_o))$ deux demi-tangentes ; l'une à gauche et l'autre à droite de coefficient directeur respectif $f_g{}'(x_o) = l_1$ $(l_1 \in \mathbb{R})$ et $f_d{}'(x_o) = l_2$ $(l_2 \in \mathbb{R})$. On dit que le point $M_o(x\,;f(x_o))$ est un **point anguleux de la courbe** (C_f).

-Si $\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \pm\infty$ et $\lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \pm$ alors le point $M_o(x\,;f(x_o))$ est un point de rebroussement. En ce point la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale parallèle à oy.

4-3) **Equation de la tangente au point** $M_o(x\,;f(x_o))$

L'équation de la tangente en x_o

$$\boxed{(T): y = f'(x_o)(x-x_o) + f(x_o)}$$

-Si f admet au point x_o un nombre dérivé fini à gauche, alors l'équation de la demi-tangente est

$$\boxed{(T): y = f_g{}'(x_o)(x-x_o) + f(x_o)}$$

Et à droite

$$\boxed{(T): y = f_d{}'(x_o)(x-x_o) + f(x_o)}$$

-Si le nombre dérivé est infini en un point x_o, alors l'équation de la demi-tangente est

$$\boxed{(T): x = x_o}$$

5-**Fonctions dérivées**

Soit U et V des fonctions et $n \in \mathbb{N}^*$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = a\ (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = aU\ (a \in \mathbb{R}^*)$	$f'(x) = aU'$
$f(x) = U + V$	$f'(x) = U' + V'$
$f(x) = UV$	$f'(x) = U'V + V'U$
$f(x) = \frac{U}{V}$	$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
$f(x) = \frac{1}{U}$	$f'(x) = -\frac{U'}{U^2}$

$f(x)=\sqrt{U}$	$f'(x)=\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$f(x)=U^n$	$f'(x)=nU'U^{n-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=\operatorname{cotan} x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-1-co\tan^2 x$
$f(x)=\sin U$	$f'(x)=U'\cos U$
$f(x)=\cos U$	$f'(x)=-U'\sin U$
$f(x)=\tan U$	$f'(x)=\dfrac{U'}{\cos^2 U}=U'(1+\tan^2 U)$
$f(x)=\operatorname{cotan} U$	$f'(x)=-\dfrac{U'}{\sin^2 U}=-U'(1+\operatorname{cotan}^2 U)$

5-1) **Dérivé e d'une fonction réciproque**

$$\boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}$$

6-**Parité d'une fonction**

a) Fonction paire

f est une fonction paire ⇔

$$\boxed{\forall x\in E_f, (-x)\in E_f / f(-x)=f(x)}$$

NB : Graphiquement la fonction paire admet l'axe des ordonnées (oy) comme l'axe de symétrie.

b) Fonction impaire

f est une fonction impaire ⇔

$$\boxed{\forall x\in E_f, (-x)\in E_f / f(-x)=-f(x)}$$

NB : Graphiquement la fonction impaire admet l'origine des coordonnées comme centre de symétrie.

7-**Axe de symétrie-centre de symétrie**

a) Axe de symétrie

La droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie à la courbe (C_f) ⇔ $\boxed{f(2a-x)=f(x)}$

b) Centre de symétrie

Le point $I(a\,;b)$ est un centre de symétrie à la courbe (C_f) ⇔ $\boxed{f(2a-x)+f(x)=2b}$

8-**Etude des branches infinies**

a) Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, alors la droite d'équation $\boxed{x=a}$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

b) Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ $(b\in\mathbb{R})$, alors la droite d'équation $\boxed{y=b}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f).

c) Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, alors il y'a existence éventuelle d'une asymptote oblique d'équation $\boxed{y=ax+b}$

Calcul des réels a et b

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $(a = 0)$, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction ox.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $(a = \pm\infty)$, alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction oy.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = 0$ $(b = 0)$, alors la courbe (C_f) admet une branche de direction asymptotique $y = ax$.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ $(b = \pm\infty)$, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(D): y = ax$

c-1) **Comment montrer que la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f)**

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction $f \Leftrightarrow$

$\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - y) = 0}$ ou $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0}$

c-2) **position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique $y = ax + b$**

- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'asymptote.
- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (C_f) de la fonction f est en dessous de l'asymptote.
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (C_f) de la fonction f et l'asymptote ont un point d'intersection.

FONCTIONS CIRCULAIRES

1- Ensemble de définition

Les fonctions sinus et cosinus sont définies dans $\mathbb{R}$.

2- Période d'une fonction circulaire

Les fonctions $f(x) = \cos(ax + b)$ et $g(x) = \sin(ax + b)$ (avec a et b des réels) sont périodiques de période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|a|}}$$

Ainsi les fonctions $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$ sont périodiques de période $\boxed{T = 2\pi}$

3- Périodicité d'une fonction

La fonction f est périodique de période T

$\Leftrightarrow \forall x \in E_f, (-x) \in E_f /$ $\boxed{\begin{array}{c} f(x+T) = f(x) \\ \text{ou} \\ f(x-T) = f(x) \end{array}}$

4- Les limites classiques

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax - 1}{x} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x} = 1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

PRIMITIVES ET CALCUL INTEGRAL

I- Primitives d'une fonction

1- Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a\,;b]$.
On appelle primitive de f, tout fonction F qui admet pour fonction dérivée f.

$$\boxed{F \text{ Primitive de } f \Leftrightarrow \forall x\in I,\ F'(x)=f(x)}$$

2- **Propriété** : Soit f une fonction continue sur I, la fonction F définie par $\int f(x)d(x) = F(x) + C$ est une primitive de f. Avec $c \in \mathbb{R}$.

3-Tableau de quelques primitives usuelles

Fonctions	Primitives
$f(x)=0$	$F(x)=c\ \ (c\in\mathbb{R})$
$f(x)=a\ \ (a\in\mathbb{R}^*)$	$F(x)=ax+c$
$f(x)=ax+b$	$F(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+c$
$f(x)=x^n\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x)=ax^n\ \ (n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x)=U'U^n$	$F(x)=\frac{U^{n+1}}{n+1}+c$

$f(x)=U'\sqrt{U}$	$F(x)=\frac{2}{3}U^{3/2}+c$ ou $F(x)=\frac{2}{3}U\sqrt{U}+c$
$f(x)=\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$F(x)=2\sqrt{U}+c$
$f(x)=\frac{U'}{U^n}$	$F(x)=\frac{-1}{(n-1)U^{n-1}}+c$
$f(x)=\frac{U'}{U^2}$	$F(x)=\frac{-1}{U}+c$
$f(x)=U'U$	$F(x)=\frac{U2}{2}+c$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=-\frac{1}{a}cos(ax+b)+c$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{1}{a}sin(ax+b)+c$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+c$
$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}=1+\text{cotan}^2 x$	$F(x)=-\text{cotan}\, x+c$

II- Calcul intégral

1- Intégrale indéfinie

$$\boxed{\int f(x)d(x)=F(x)+C}$$

2) Intégrale définie

a) **Définition** :
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I=[a\,;b]$ et F une primitive de f continue sur I, on appelle intégrale de a à b de f sur I notée $\int_a^b f(x)dx$, le nombre réel $F(b)-F(a)$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$$

b) **Propriétés** :

P₁) $\boxed{\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0}$

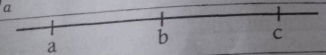
P₂) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = 0}$

P₃) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

P₄) $\boxed{\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

P₅) $\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

P₆) R



$$\boxed{\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(c) - F(a)}$$

c) **Valeur moyenne d'une fonction**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
On appelle valeur moyenne de f le réel noté μ tel que

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

d) **Intégration par parties**

Soient U et V deux fonctions dérivables sur $I = [a\,;b]$.

$\forall x \in I$, $\boxed{\int_a^b U'V dx = [U\,V]_a^b - \int_a^b UV' dx}$

De même

$$\boxed{\int_a^b UV' dx = [U\,V]_a^b - \int_a^b U'V dx}$$

NB : On applique une intégration par parties dans le cas d'un produit de deux fonctions de natures différentes.

DENOMBREMENT

1) **Définition** : Dénombrer, c'est compter.
Dénombrer un ensemble fini, c'est indiquer son cardinal. Le cardinal d'un ensemble fini A, noté **card(A)**, est le nombre d'éléments qui constituent cet ensemble.

2) **Intersection** : Soit A et B deux sous-ensembles quelconques de l'ensemble E. On appelle intersection de A et B notée A∩ B, le sous-ensemble formé des éléments communs entre A et B tel que :

$\boxed{A\cap B = \{x\in E / x\in A \text{ et } x\in B\}}$

3) **Réunion** : Soit A et B deux sous-ensembles quelconques de l'ensemble E. On appelle réunion de A et B notée A∪ B, le sous-ensemble formé des éléments de A ou de $\boxed{A\cup B = \{x\in E / x\in A \text{ ou } x\in B\}}$

- **Propriétés :**

Intersection	Réunion
$A\cap B = B\cap A$	$A\cup B = B\cup A$
$A\cap \bar{A} = \emptyset$	$A\cup \bar{A} = E$
$A\cap \emptyset = \emptyset$	$A\cup \emptyset = A$
$A\cap (B\cap C)=(B\cap C)\cap A$	$A\cup (B\cup C) = (B\cup C)\cup A$
$A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	

NB : $\bar{A}$ est appelé le complémentaire de A .

4) **Propriétés du cardinal**

$\boxed{\text{Card}(\emptyset) = 0}$ $(par\ convention)$

$\boxed{\text{Card}(A\cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A\cap B)}$

Si $A\cap B = \emptyset$, alors $\boxed{\text{Card}(A\cup B) = Card(A) + Card(B)}$

$\boxed{\text{Card}(A\times B) = Card(A)\times Card(B)}$

Si $A\subset B$, alors $\boxed{Card(A) \leq Card(B)}$

$\boxed{\text{Card}(A^2) = [Card(A)]^2}$

5) **Factorielle :** Soit n un nombre entier naturel. factorielle n se note $\boldsymbol{n!}$ et se lit« $\boldsymbol{factorielle\ n}$ ».

$\boxed{n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}$

Par convention : $\boxed{0! = 1 \text{ et } 1! = 1}$

6) **Arrangement-Permutation-Combinaison**

a- **Arrangement :** On appelle arrangement de p éléments pris parmis les n éléments d'un ensemble (avec $p\leq n$), le nombre réel noté A_n^p tel que $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

NB :Pour un arrangement l'ordre des éléments est respecté.

- **Propriétés des arrangements** :

$\boxed{A_n^1 = n \quad \text{et} \quad A_n^0 = 1}$

$\boxed{A_n^n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}$

b) **Permutation** : Une permutation d'un ensemble A de n éléments est un arrangement de n éléments de A. Le nombre de permutation est noté $\boxed{P_n = A_n^n = n!}$

$(Avec\ p = n)$

NB :Pour une permutation l'ordre des éléments est respecté.

c- **Combinaison** : On appelle combinaison de p éléments pris parmis les n éléments d'un ensemble (avec $p\leq n$), le nombre réel noté C_n^ptel que $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$

NB :Pour une combinaison, l'ordre des éléments n'est pas respecté.

- **Propriétés des combinaisons**

$\boxed{C_n^1 = n \quad \text{et} \quad C_n^n = 1}$

7) **Les tirages** :

On dispose d'un ensemble E de n éléments et l'on tire "***p éléments***" de E.

On distingue trois (3) types de tirages :

– On tire successivement **sans remise** ou on tire au hasard **sans remise** les p éléments de E pris parmi les n éléments un à un. Il s'agit d'un arrangement de p éléments pris parmi les n éléments.

Alors $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$ $(Avec\ p \leq n)$

– On tire successivement **avec remise** ou on tire au hasard **avec remise** les p éléments de E pris parmi les n éléments. Il s'agit d'une répétition.

Alors $\boxed{A_n^p = n^p}$

NB : Pour une répétition on tient compte de l'ordre mais p n'est pas forcement inférieur à n.

– On tire **simultanément** ou on tire au **hasard** les p éléments de E pris parmi les n éléments. Il s'agit d'une combinaison de p éléments pris parmi les n éléments.

Alors $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$ $(Avec\ p \leq n)$

8) **Vocabulaire** :

- $\bar{A}$: Signifie le complémentaire de A ;
- "***et***" Signifie la multiplication($\times$) ;
- "***ou***" Signifie l'addition (+).

Enoncés des Sujets

Sujet n°1 (**Composition du 1er trimestre**)

I) ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1 :On considère le polynôme p défini pour tout réel x par :$p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 24$.

1) Montrer que $p(x)$ est divisible par $x + 1$ et par $x + 2$.
2) Déterminer le polynôme q tel que :
$p(x) = (x + 1)(x + 2)q(x)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $p(x) < 0$.
4) Sans calculer, déterminer le signe du réel $p(1 - \sqrt{5})$.

Exercice 2 : Soit l'équation :$x^2 - mx + m - 1$ où m est un paramètre réel.

1) Déterminer m pour que l'une des solutions de l'équation soit -1. Calculer alors l'autre solution.
2) Déterminer m pour que cette équation admette une solution double.
3) Lorsque cette équation admet deux solutions x' et x'', démontrer qu'il existe entre elles, une relation indépendante de m.
4) Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions x' et x''.
5) Former l'équation du second degré en X admettant pour solutions :$X' = 2x' - 3x''$ et $X'' = 2x'' - 3x'$.

II) ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 3 :Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A.
On désigne par I le milieu du segment [BC] et par D le point tel que I soit le milieu du segment [AD].
On rapporte le plan au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1) Faire la figure
2) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D
3)Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
4) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires
5) Déterminer les coordonnées du point E tel que :
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BE}$.

Exercice 4 : Soit A, B et C trois points non alignés.

1) Justifier qu'il existe un point I unique tel que $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$
2) Construire le barycentre J du système $\{(A, 3); (B, 1)\}$
3) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et à l'aide de $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$
4) Déduire de la question 3°) une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ puis construire I.

Sujet n°2 (**Composition du 1er trimestre**)

Exercice 1 :
ABC est un triangle isocèle tels que AB=AC=5cm et BC=6cm.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ainsi que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle en cm^2.
2) On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,2) ; (B,3) et (C,3). Construire le point G et calculer la distance AG.
3) On considère l'application f du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M de $\mathcal{P}$ associe le réel :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

a- Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$;

b- Déduire $f(G)$;

c- Démontrer que $\forall M \in \mathcal{P}, f(M) = f(G) + 4MG^2$.

Exercice 2 : EFG est un triangle quelconque du plan.

a) Construire les points I, J et K tels que : I milieu du segment [FG], $\overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{GK}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{EG}$.

c) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ *et* $\overrightarrow{JG}$ respectivement en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{EG}$.

Exercice 3 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations ci-après:

a) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$;b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1} = 1$;

c) $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq 2$.

2- Soit l'équation (E) :$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

a) Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme : $x^2\left(x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

b) Montrer que l'équation $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ est équivalente à l'équation $t^2 - 2t - 3 = 0$ (on pose $t = x + \frac{1}{x}$).

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $t^2 - 2t - 3 = 0$.

d) En déduire les solutions de l'équation (E).

Sujet n°3 (Composition du 1er trimestre)

Exercice1 :

1) Montrer que le polynôme $p(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.

2) Déterminer un polynôme $f(x)$ de degré 2 tel que $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) - f(x-1) = x$.

En déduire la somme : $1 + 2 + 3 + \dots + n$ en fonction de $f(n)$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes d'équations ci-dessous : (S_1): $\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ -9\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \end{cases}$;

(S_2): $\begin{cases} 2x^2 - \frac{3}{y+1} = 1 \\ 5x^2 - \frac{8}{y+1} = 2 \end{cases}$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle équilatéral de côté a= 4cm. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$; $(B, -1)$ et $(C, 2)$.

1) Définir le barycentre G puis exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

2) Construire le point G.

3) En déduire que, pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

4) Soit I le milieu de [AC] et O le point tel que $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$. Construire le point O.

Sujet n°4 (Composition du 1er trimestre)

Exercice 1 (Composition du 2ème trimestre)

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $g(x) = \frac{2+\sqrt{x-3}}{x-4}$;

$h(x) = \sqrt{3-|2-x|}$; $\begin{cases} k(x) = \frac{x^3}{x^2+x} \\ k(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 2 :

m étant un paramètre réel, on considère l'équation suivante (E_m):$(-m-1)x^2 + 4x - 2m + 5 = 0$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation (E_m) :

a- est du premier degré ?

b- admet des racines ? Trouver les.

c- admet des racines négatives ?

d- admet des racines positives ?

e- admet des racines de signes contraires ?

f- admet -1 comme l'une des racines ? Trouver l'autre.

2) Ecrire une relation indépendante de m entre les racines x' et x''.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5cm.

Calculer les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs du paramètre m l'équation suivante :

$(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$

Sujet n°5 (Composition du 2ème trimestre)

Exercice 1 :

1-Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2-1}$; $g(x) = |2x-1| + \frac{1}{x+2}$; $k(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$; $p(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x+2}}$

$h(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$;

2- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{3x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{(2-x)(x-1)}$; d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + 2 + \sqrt{x^2-3x+1}\right)$;

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que le point $A(1\,;1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$.
3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{x+1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g ;

b) Déterminer la fonction h telle que : $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. On donne les points $A(6\,;4)$ et $B(2\,;10)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A passant par B.

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de diamètre [AB].

2. Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$.

a) Reconnaitre $(\mathcal{C})$;

b) Caractériser $(\mathcal{C})$.

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle quelconque tels que AB=6cm ; AC =8cm et $mes\hat{A} = 70°$.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \times \cos\hat{A}$.
3. En déduire la distance BC.
4. Soit I milieu du segment [AC]. Calculer la longueur [BI].
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Sujet n°6 (Composition du 2ème trimestre)

Exercice 1 :

On donne l'application $f(x) = x + \sqrt{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1- Montrer que f est injective.

2- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ f est surjective.

3- Conclure que f est bijective.

4- Trouver $f^{-1}(x)$ la réciproque de f.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 2 & si\ x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 4} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1-Donner le domaine de définition de f.

2- Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

3- Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

4- Donner les conséquences graphiques de cette dérivabilité.

Exercice 3 :

calculer : a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$; c) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{3 - \sin x}$

1- Enoncer le théorème des gendarmes sur un intervalle I.

2- Démontrer que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{x}{4} \leq \frac{x}{3 - \sin x} \leq \frac{x}{2}$

3- Déduire la limite de f en $+\infty$ et en 0.

Exercice 5 :

1) Trouver les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + 7x - 5$; b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $h(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $p(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$.

2) Déterminer la primitive de $k(x) = 2x - 1 - \frac{6}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 2$.

3) On donne les intégrales ci-après :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$.

a) Calculer I et J.

b) En déduire les valeurs des intégrales ci-après :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + \sin^4 x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$.

Sujet n°7 (Composition du 2ème trimestre)

Exercice1 :

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 3$.

Déterminer les fonctions composées $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Exercice 2

1- Convertir en radians la mesure des angles $\alpha = 105°$ et $\beta = 260°$.

2- Convertir en degrés la mesure des angles $\theta = \frac{13\pi}{12}$ et $\lambda = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 :

1- Démontrer que $\cos^4\frac{\pi}{8} - \sin^4\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sachant que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

2- On considère les réels suivants :

$$A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$;

b) Déduire les valeurs exactes de A et B.

Exercice 4 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $4\cos^2 x = 1$; b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $2\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$; d) $\sqrt{3}\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

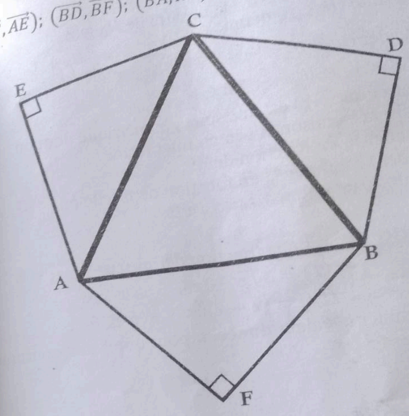
2- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2\sin x + 5\cos y = -4 \\ 3\sin x - 2\sin y = 3{,}5 \end{cases}$

Exercice 5 :

Dans la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD ; ACE et AFB sont des triangles rectangles isocèles respectivement en D, E et F.

Déterminer la mesure principale des angles ci-après :

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CB})$.



Sujet n°8 (Composition du 3ème trimestre)

Exercice 1 :

Déterminer les valeurs exactes de : a) $\cos\frac{\pi}{12}$; b) $\sin\frac{\pi}{12}$; c) $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-après :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0$;

c) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) On pose $V_n = U_n - \frac{5}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme.

b- Exprimer V_n en fonction de n.

c- Calculer la somme S_n en fonction de n telle que $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 5 & si\ x > 0 \\ f(x) = (x+k)^2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel k pour que f soit continue en $x_0 = 4$.

Sujet n°9 (Composition du 3ème trimestre)

Exercice 1 :

Soit $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{\pi}{9}$ et $(\vec{u}\,;\vec{w}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer une mesure principale de chacun des angles suivants : $(\vec{v}\,;\vec{w})$; $(-\vec{u}\,;\vec{v})$; $(-\vec{v}\,;-2\vec{w})$ et $(-2\vec{u}\,;\vec{w})$.

Exercice 2 : On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) On pose $\forall n\epsilon\mathbb{N}$, $V_n = U_n - 6 + a$ avec $a\epsilon\mathbb{R}^*$.

a- Déterminer le réel a pour que la suite (V_n) soit une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b- Exprimer (V_n) et (U_n) en fonction de n.

c- La suite (V_n) est-elle convergente ?

2) Calculer en fonction de n les sommes S_n et S'_n telles que :$S_n = V_0 + V_1 + V_2 \dots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$. Que peut-on dire des suites (S_n) et (S'_n) ?

Exercice3

Soit la fonction f de définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer les limites de f aux bornes son ensemble de définition.
3) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
6) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction f.
7) Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à l'asymptote oblique.
8) Etudier les branches infinies.
9) Tracer dans un même repère la courbe représentative de f ainsi que ses asymptotes.

Sujet n°10 (**Composition du 3ème trimestre**)

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Préciser l'ensemble de définition E_f de f.

2- Déterminer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, puis en -2 (à gauche et à droite)

3- Montrer que pour tout $x \in E_f$, $f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

4- Déterminer le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f.

5- Dresser le tableau de variations de f.

6- Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y]$ *et* $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y]$, puis interpréter le résultat.

b) Etudier le signe de $f(x) - y$, puis en déduire la position de (C_f) par rapport à (D).

7- Tracer la droite (D), la droite d'équation $x = -2$ et la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-après :

a) $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{3})\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$;

b) $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1- Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

2- Déterminer deux nombres réels a et b tel que $U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

3- En déduire une expression de $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

4- Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Donner la nature de la suite (U_n).

2) Exprimer U_n en fonction de n.

3) Calculer en fonction de n la somme S_n telle que : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

Sujet n°11 (**Composition du 3ème trimestre**)

Exercice 1

1- Résoudre dans $\mathbb{N}$, les équations suivantes :
a) $A_n^2 = 2$; b) $3C_n^4 = 14C_2^n$; c) $C_n^{n-2} = 28$

2- Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

3- Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 2

Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

a) Quel est le nombre de choix possibles ?

b) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
c) Quel est le nombre de choix si l'on impose deux garçons ?

Exercice 3
Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges.
1- Combien de possibilités peut-on tirer simultanément :
a) 3 boules de même couleur ?
b) 3 boules de couleurs différentes ?
c) 3 boules blanches et une boule rouge ?
d) Au moins 3 boules rouges ?
2- Combien de possibilités peut-on tirer successivement sans remise :
a) Exactement 2 boules blanches ?
b) Au plus 2 boules rouges ?

Exercice 4
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \cos 2x$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Déterminer la période T et la parité de f.
En déduire un ensemble d'étude de f.
3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
4) Tracer la courbe (C_f) représentative de f.

Corrections des Sujets

Résolution sujet n°1

I) **Activités numériques**

Solution 1

$p(x) = 2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 24$.

1) Montrons que $p(x)$ est divisible par $x + 1$ et par $x + 2$

Posons $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

Pour $x = -1$

$p(-1) = 2(-1)^4 - 5(-1)^3 - 17(-1)^2 + 14(-1) + 24$

$p(-1) = 2 + 5 - 17 - 14 + 24 = 0 \Rightarrow \boxed{p(-1) = 0}$

Donc $p(x)$ est divisible par $x + 1$.

Pour $x = -2$

$p(-1) = 2(-2)^4 - 5(-2)^3 - 17(-2)^2 + 14(-2) + 24$

$p(x) = 32 + 40 - 68 - 28 + 24 = 0 \Rightarrow \boxed{p(x) = 0}$

Donc $p(x)$ est divisible par $x + 2$.

Conclusion : $p(x)$ étant divisible séparément par $x + 1$ et par $x + 2$, alors il est divisible par $(x + 1)(x + 2)$.

2) Déterminons le polynôme q:

$p(x) = (x + 1)(x + 2)q(x)$

Avec $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 14x + 24 & x^2 + 3x + 2 \\
\hline
\underline{-2x^4 - 6x^3 - 4x^2} & 2x^2 - 11x + 12 \\
-11x^3 - 21x^2 + 14x + 24 & \\
\underline{11x^3 + 33x^2 + 22x} & \\
12x^2 + 36x + 24 & \\
\underline{-12x^2 - 36x - 24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Alors $p(x) = (x + 1)(x + 2)(2x^2 - 11x + 12)$

D'où $\boxed{q(x) = 2x^2 - 11x + 12}$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $p(x) < 0$

$(x + 1)(x + 2)(2x^2 - 11x + 12) < 0$

Posons $(x + 1)(x + 2)(2x^2 - 11x + 12) = 0$

$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 11x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ \Delta = (-11)^2 - 4(2)(12) = 25 \end{cases}$

$x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 - \sqrt{25}}{2(2)} = \dfrac{11 - 5}{4} = \dfrac{3}{2}$

$x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11 + \sqrt{25}}{2(2)} = \dfrac{11 + 5}{4} = 4$

Alors $\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = 4 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2	$1-\sqrt{5}$	-1		$3/2$		4		$+\infty$
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x^2 - 11x + 12$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $\boxed{S =]-2\,;\,-1[\, \cup \,]3/2\,;\,4[}$

4) Sans calculer, déterminons le signe du réel $p(1-\sqrt{5})$

Comme $x = 1 - \sqrt{5} \in]-2\,;\,-1[$, *alors* $\boxed{p(1 - \sqrt{5}) < 0}$

Solution 2

$x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad avec\ m \in \mathbb{R}$

1) **Déterminons m pour que l'une des** solutions soit -1

L'une des solutions est $-1 \Leftrightarrow x = -1$

On a : $(-1)^2 - m(-1) + m - 1 = 0$

$\Rightarrow 1 + m + m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$

Alors l'équation devient : $x^2 - 1 = 0$

Calculons l'autre racine

$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

D'où $\boxed{x = 1}$

2) **Déterminons m**

Cette équation admet une solution double $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad avec\ a = 1 ; b = -m\ et\ c = m - 1$

$\Delta = (-m)^2 - 4(1)(m-1) = m^2 - 4m + 4$

Avec $\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0$

$\Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$

3) **Démontrons qu'il existe une relation indépendante de m**

$x^2 - mx + m - 1 = 0$

$Avec\ a = 1 ; b = -m\ et\ c = m - 1$

$P = \frac{c}{a} = m - 1 \ \ et\ S = \frac{-b}{a} = m$

$\begin{cases} p = m - 1 & (1) \\ S = m & (2) \end{cases}$ (2) dans (1) $\Rightarrow P = S - 1$

Avec $P = x'.x''\ et\ S = x' + x'' \Rightarrow x'.x'' = x' + x'' - 1$

D'où $\boxed{x' + x'' - x'.x'' = 1}$

4) **Discutons suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions x' et x''**

$x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad avec\ m \in \mathbb{R}$

Comme a=1$\neq$ 0, l'équation est du second degré en x.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(1)(m-1)$

$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$

Etudions le signe de Δ

Posons $\Delta = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

m	-∞		-2		+∞
$\Delta = (m-2)^2$		+	0	+	

Cherchons le produit (P) et la somme (S)

-Le produit : $P = \frac{c}{a} = m - 1$

Etudions le signe de P

Posons $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

m	-∞		1		+∞
$P = m - 1$		−	0	+	

-La somme : S= $\frac{-b}{a} = m$

Etudions le signe de S

Posons $m = 0$

m	-∞		0		+∞
$\Delta = (m-2)^2$		−	0	+	

Tableau général

m	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
Δ	$+$		$+$		$+$	0	$+$
P	$-$		$-$	0	$+$		$+$
S	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Conclusions	$x' < 0 < x''$ S=$\{1; m-1\}$	$S = \{-1; 1\}$	$x' < 0 < x''$ S=$\{1; m-1\}$	$S = \{0; 1\}$	$0 < x' < x''$ S=$\{1; m-1\}$	$S = \{1\}$	$0 < x' < x''$ S=$\{1; m-1\}$

Existence des racines :
$\forall x \in]-\infty ; +\infty[$, $\Delta > 0$, alors les racines existent.

Signe de racines :

$-\forall m \in]-\infty ; 0[$: on a deux racines de signes contraires $(x' < 0 < x''$ ou $x'' < 0 < x')$ et la plus grande en valeur absolue est négative.

$-$Pour $m = 0$:On a deux racines l'une est positive et l'autre négative ($x' = -1$ et $x'' = 1$).

$-\forall m \in]0 ; 1[$:On a deux racines de signes contraires et la plus grande en valeur absolue est positive.

$-$Pour m=1 : On a deux racines l'une est nulle et l'autre est positive ($x' = 0$ et $x'' = 1$).

$-\forall m \in]1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$: On a deux racines positives ($0 < x' < x''$ ou $0 < x'' < x'$).

$-$Pour m=2 :On a une racine double positive (x'=x''=1)

5) **Formons l'équation du second degré en X** admettant pour solutions $X' = 2x' - 3x''$ et $X'' = 2x'' - 3x'$

$X^2 - SX + P = 0$

$S = X' + X''=2x' - 3x'' + 2x'' - 3x' = -(x' + x'')$

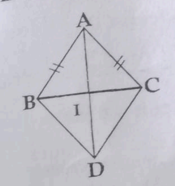
$P = X'.X''=(2x' - 3x'')(2x'' - 3x')$

$P = 13x'.x'' - 6(x'^2 + x''^2)$

Alors $\boxed{X^2 + (x' + x'')X + 13x'.x'' - 6\left(x'^2 + x''^2\right) = 0}$

II) <u>Activités géométriques</u>

1) **Faisons la figure**



2) <u>Déterminons les coordonnées des points A, B , I et D</u>

$\boxed{A(0;0)}$ $\boxed{B(1;0)}$ $\boxed{C(0;1)}$

$I\left(\frac{x_B+x_C}{2} ; \frac{y_B+y_C}{2}\right) \Rightarrow$ $\boxed{I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)}$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_A \\ y_D = 2y_I - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \\ y_D = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \end{cases}$$

$\boxed{D(1;1)}$

3) Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux : $\Leftrightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_D - x_I \\ y_D - y_I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

4) Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires : $\Leftrightarrow dét(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{BA}) = 0$

Avec $\overrightarrow{CD}\binom{1}{0}$ *et* $\overrightarrow{BA}\binom{-1}{0}$

$dét(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{BA}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.

5) Déterminons les coordonnées de E

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \binom{x_D - x_A}{y_D - y_{Ax}} = 2\binom{x_E - x_B}{y_E - y_B} \Leftrightarrow \binom{1}{1} = \binom{2x_E - 2}{2y_E - 0}$

$\begin{cases} 2x_E - 2 = 1 \\ 2y_E - 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_E = \frac{3}{2} \\ y_E = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{E\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)}$

<u>**Solution 4**</u>

1) Justifions qu'il existe un point I unique

$3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

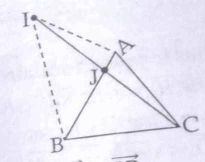
$3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$ Comme la somme des coefficients est non nulle, alors il existe un point unique I tel que $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

2) **Construisons le barycentre J**

J :bar$\{(A,3);(B,1)\}$ Comme $3 + 1 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow J\exists/\ 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



3) **Exprimons $\overrightarrow{IJ}$ à l'aide de $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$**

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IB} \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}}$ Ou $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}$

4) **Déduisons une relation entre $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ puis construisons I**

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$

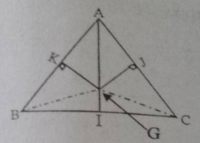
Or $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}$

Alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{IC}) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}}$

<u>**Résolution sujet n°2**</u>

<u>**Solution 1**</u>

AB=AC=5cm et BC=6cm



1) **Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$**

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = -IB \times IC$ Avec $IB = IC = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = -\frac{36}{4} \Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{36}{4}}$

Calculons l'aire du triangle ABC

$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AI}{2}}$

Cherchons I

Considérons le triangle ABI rectangle en I. D'après Pythagore, on a $AB^2 = AI^2 + BI^2$ avec $BI = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}\sqrt{4AB^2 - BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 25 - 36} = 4cm$

Alors $\mathcal{A}(ABC) = \frac{6cm \times 4cm}{2} = 12cm^2 \Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{A}(ABC) = 12cm^2}$

2) G :bar{(A, 2) ; (B, 3) et (C, 3)}

Construisons G

2+3+3=8≠ 0 $\Rightarrow G \ni / 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Alors $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}$

Calculons la distance AG

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}^2 = \left[\frac{3}{8}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right]^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}^2 = \frac{9}{64}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) \Rightarrow$ $\boxed{AG = \frac{3}{8}\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}}$

$AG = \frac{3}{8}\sqrt{25 + 25 + 2(-9)} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Alors $\boxed{AG = \frac{3}{2}\sqrt{2}cm = 2{,}121cm}$

3) $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

a- **Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$**

$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = -IB \times IC = -\frac{BC^2}{4} = -\frac{36}{4} = -9$

Alors $\boxed{\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = -9}$

$\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JA} = -JC \times JA = -\frac{AC^2}{4} = -\frac{25}{4}$

Alors $\boxed{\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{25}{4}}$

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -KA \times KB = -\frac{AB^2}{4} = -\frac{25}{4}$

Alors $\boxed{\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = -\frac{25}{4}}$

b- **Déduisons $f(G)$**

$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

En posant $M = G$, ona

$f(G) = 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

$f(G) = 2(-9) - \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = -18 - \frac{25}{2} = -\frac{61}{2}$

Alors $\boxed{f(G) = -\frac{61}{2}}$

c- Démontrons que $\forall M \in \mathcal{P}, f(M) = f(G) + 4MG^2$

$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$f(M) = (2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})$
$+ (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$f(M) = (2\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}) +$
$+ (\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) +$
$(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB})$

$f(M) = 4MG^2 + 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} +$
$+ (2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{MG}) + (2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}) +$
$+ (\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG})$

$f(M) = 4MG^2 + f(G) + 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$

$f(M) = 4MG^2 + f(G) + \overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC})$

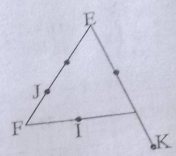
Or $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{f(M) = f(G) + 4MG^2}$

Solution 2

a) Construisons les points I, J et K

$\overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{FJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{EJ} \Rightarrow \overrightarrow{JE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{GK} \Leftrightarrow \overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{EK} \Rightarrow \overrightarrow{EK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$



b)Exprimons le vecteur $\overrightarrow{EI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GI}$ avec $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} \Rightarrow \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ Alors $\boxed{\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})}$

c) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EK} \Rightarrow -\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EK} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{JK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}}$

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EG} \Rightarrow \overrightarrow{JG} = -\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{EG} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{JG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}}$

Solution 3

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations:

a) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2)^2 - 73x^2 + 144 = 0$

Posons $x^2 = t$ $avec\ t \geq 0$ $On\ a{:}\ 4t^2 - 73t + 144 = 0$

$\Delta = (-73)^2 - 4(4)(144) = 3025$

$t' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{73-55}{8} = \frac{9}{4}$ et $t'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{73+55}{8} = 16$

Or $x^2 = t$

Pour $t = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Pour $t = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$ Alors $\boxed{S = \left\{-4; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right\}}$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1} = 1$

Domaine de validité D_1

$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Alors $D_1 = [1\,;+\infty[$

Résolvons : $\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2 = 1^2$

$2x + 1 + 2\sqrt{(2x+1)(x-1)} + x - 1 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)(x-1)} = \dfrac{1-3x}{2}$

Domaine de validité D_2 : $\frac{1-3x}{2} \geq 0$

X	$-\infty$	1/3	$+\infty$
$\dfrac{1-3x}{2}$	+	0	−

$D_2 =]-\infty\,; 1/3]$

Domaine de validité final D

$D = D_1 \cap D_2 =]-\infty\,; 1/3] \cap [1\,; +\infty[$

$D \nexists \Rightarrow$ $\boxed{S = \emptyset}$

c) $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq 2 - x$

Domaine de validité D

$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in]-\infty\,; 2]$

(2) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ Posons $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$	+	0	−	0	+

$x \in]-\infty\,; 1] \cup [4\,; +\infty[$

Alors $D =]-\infty\,; 2] \cap]-\infty\,; 1] \cup [4\,; +\infty[$ $\Rightarrow D =]-\infty\,; 1]$

Résolvons : $\left(\sqrt{x^2 - 5x + 4}\right)^2 = (2 - x)^2$

$x^2 - 5x + 4 \leq 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in [0\,; +\infty[$

Alors $S =]-\infty\,; 1] \cap [0\,; +\infty[$

D'où $\boxed{S = [0\,; 1]}$

2- Soit l'équation (E) : $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

a) Montrons que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme : $x^2\left(x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2.x^2 - 2x^2.x - x^2 - \dfrac{2x^2}{x} + \dfrac{x^2}{x^2} = 0$

D'où $\boxed{x^2\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0}$

b) Montrons que l'équation $x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$ est équivalente à l'équation $t^2-2t-3=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

Posons $t=x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$

On a : $t^2-2-2t-1=0 \Rightarrow \boxed{t^2-2t-3=0}$

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $t^2-2t-3=0$

$t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \Delta'=b'-ac=(-1)^2-1(-3)=4$

$t'=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1-\sqrt{4}}{1}=-1$ *et* $t'=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1+\sqrt{4}}{1}=3$

D'où $\boxed{S=\{-1;3\}}$

d) En déduisons les solutions de l'équation (E)

Or $t=x+\frac{1}{x} \Rightarrow t=\frac{x^2+1}{x}$

Pour $t=-1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=-1 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=-3<0$

D'où $\boxed{S=\emptyset}$

Pour $t=3 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow \Delta=5$

$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

Résolution sujet n°3

Solution 1

$p(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$

1) **Montrons que le polynôme $p(x)$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$**

Posons $x(x+1)(2x+1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Pour $x=0 \Rightarrow p(0)=(0+1)^{2n}-(0)^{2n}-2(0)-1=1-1$

$\boxed{p(0)=0}$

Pour $x=-1 \Rightarrow p(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2(-1)-1$

$\Rightarrow p(-1)=0-1+2-1=0 \Rightarrow \boxed{p(-1)=0}$

Pour $x=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1$

$\Rightarrow \boxed{p\left(-\frac{1}{2}\right)=0}$

Conclusion : Comme $p(0)=p(-1)=p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, alors $p(x)$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.

2) **Déterminons un polynôme $f(x)$ de degré 2 tel que $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)-f(x-1)=x$.**

$deg f=2 \Rightarrow f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)-f(x-1)=x$

Calculons $f(x-1)$:

$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$\boldsymbol{f(x-1) = ax^2 - 2ax + a + bx - b + c}$

$f(x) - f(x-1) = ax^2 + bx + c - ax^2 + 2ax - a - bx + b - c$

$\Rightarrow \boldsymbol{f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b}$

Or $f(x) - f(x-1) = x \Rightarrow 2ax - a + b = x$

Par identification, on a : $\begin{cases} 2a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c}$ Avec c$\in \mathbb{R}$

Déduisons la somme : $1+2+3+\cdots+n$ en fonction de $f(n)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) - f(x-1) = x$$

$$\begin{array}{ll}
Si\ x = 1 & f(1) - f(0) = 1 \\
Si\ x = 2 & f(2) - f(1) = 2 \\
Si\ x = 3 & f(3) - f(2) = 3 \\
\vdots & \vdots \\
Si\ x = n & f(n) - f(n-1) = n \\
\hline
 & f(n) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n
\end{array}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{2}(0) + c = c$

$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c \Rightarrow f(n) - f(0) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Or $f(n) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

Alors $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$\Rightarrow \frac{1}{2}n(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

D'où $\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Ou $\boxed{f(n) - f(0) = \frac{n(n+1)}{2}}$

Solution 2

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes d'équations :

(S_1): $\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ -9\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \end{cases}$

Posons $\sqrt{x} = t \ avec\ t \geq 0 \ et \ \sqrt{y} = \lambda \ avec\ \lambda \geq 0$

Le système devient : $\begin{cases} 3t + \lambda = 10 & (1) \\ -9t - 2\lambda = 4 & (2) \end{cases}$

(1)$\Rightarrow \lambda = 10 - 3t \quad (3)$

(3) dans (2) $\Rightarrow -9t - 2(10 - 3t) = 4 \Rightarrow -3t = 24$

$\Rightarrow t = -\frac{24}{3} = -8 \Rightarrow \boldsymbol{t = -8}$

Remplaçons $t = -8$ dans (3)$\Rightarrow \lambda = 10 - 3(-8) = 34$

$\sqrt{x} = t \ \Leftrightarrow \sqrt{x} = -8$ impossible.

$\sqrt{y} = \lambda \Leftrightarrow \sqrt{y} = 34 \ \Rightarrow y = (34)^2 = 1156$

D'où $\boxed{S = \emptyset}$

(S_2): $\begin{cases} 2x^2 - \frac{3}{y+1} = 1 \\ 5x^2 - \frac{8}{y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3\left(\frac{1}{y+1}\right) = 1 \\ 5x^2 - 8\left(\frac{1}{y+1}\right) = 2 \end{cases}$

Posons $x^2 = t$ avec $t \geq 0$ et $\frac{1}{y+1} = \lambda$ $avec\ y \neq -1$ et $\lambda \neq 0$

Le système devient : $\begin{cases} 2t - 3\lambda = 1 & (1) \\ 5t - 8\lambda = 2 & (2) \end{cases}$

$$\begin{matrix} -5\times \\ 2\times \end{matrix} \begin{cases} 2t - 3\lambda = 1 \\ 5t - 8\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10t + 15\lambda = -5 \\ 10t - 16\lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

Remplaçons $\lambda = 1$ dans $(1) \Rightarrow 2t - 3(1) = 1 \Rightarrow t = 2$

Or $x^2 = t \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x \pm \sqrt{2}$ et $\frac{1}{y+1} = \lambda \Rightarrow \frac{1}{y+1} = 1 \Rightarrow y + 1 = 1$
$\Rightarrow y = 0$

D'où $\boxed{S = \{(-\sqrt{2};0)\}}$ Ou $\boxed{S = \{(\sqrt{2};0)\}}$

Solution 3

$AB = AC = BC = a = 4cm$ et $(A,2)$; $(B,-1)$ et $(C,2)$

1) **Définissons le barycentre G**

Comme $2 - 1 + 2 = 3 \neq 0$, alors le barycentre G existe tel que $\boxed{2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}}$

Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

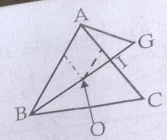
$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Alors $\boxed{\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$

2) **Construisons le point G**

$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.



3) **Déduisons $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$**

$2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$3(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GM} + 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

D'où $\boxed{2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$

4) **Construisons le point O**

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

Résolution sujet n°4

Solution 1

Donnons l'ensemble de définition de :

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ f est définie $\Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$

Posons $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$impossible$\Rightarrow \boxed{E_f =]-\infty\,;+\infty[}$

$g(x) = \frac{2+\sqrt{x-3}}{x-4}$ g est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$

$3 \qquad 4 \qquad +\infty$

D'où $\boxed{E_g = [3\,;4[\cup]4\,;+\infty[}$

$h(x) = \sqrt{3 - |2 - x|}$ h est définie $\Leftrightarrow 3 - |2 - x| \geq 0$

$\Rightarrow |2 - x| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -(2 - x) \leq 3 \\ 2 - x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases}$

D'où $\boxed{E_h = [-1\,;5]}$

$\begin{cases} k(x) = \frac{x^3}{x^2+x} \\ k(0) = 2 \end{cases}$ k est définie $\Leftrightarrow x^2+x \neq 0 \Rightarrow x(x+1) \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ $E_k =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[\cup\{0\}$

D'où $\boxed{E_k =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[}$

Solution 2

(E_m):$(-m-1)x^2 + 4x - 2m + 5 = 0$

1) Valeur(s) de m pour que l'équation (E_m) :

a- **est du premier degré**

$\Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow -m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$

b- **admet des racines**

$\Leftrightarrow \Delta' > 0$ *avec* $\Delta' = b'^2 - ac$ où $a = -m\text{-}1\,; b' = \frac{4}{2} = 2;$

$c = -2m + 5$

$\Delta' = 2^2 - (-m-1)(-2m+5) = -2m^2 + 3m + 9$

Or $\Delta' > 0 \Rightarrow -2m^2 + 3m + 9 > 0$

Posons $-2m^2 + 3m + 9 = 0 \Rightarrow \Delta_m = b^2 - 4ac$

$\Delta_m = 3^2 - 4(-2)(9) = 81$

$m' = \frac{-b-\sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{81}}{-4} = 3$ *et* $m'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{81}}{-4} = -\frac{3}{2}$

Tableau de signes

m	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$-2m^2+3m+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta' > 0 \Rightarrow \boxed{m \in]-3/2\,;3[}$

Trouvons ces racines

Si $m \in]-3/2\,;3[, \Delta' > 0$: L'équation admet deux racines distinctes telles que $x' = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2-\sqrt{-2m^2+3m+9}}{2}$

et $x'' = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2+\sqrt{-2m^2+3m+9}}{2}$

D'où $\boxed{x = \frac{2-\sqrt{-2m^2+3m+9}}{2} \text{ et } x = \frac{2+\sqrt{-2m^2+3m+9}}{2}}$

c- **admet des racines négatives**

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ Avec

m	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$\Delta' = -2m^2+3m+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Chercheons le produit(P) et la somme (S)

$P = \frac{c}{a} = \frac{2m-5}{m+1}$

m	$-\infty$		-1		$5/2$		$+\infty$
$2m-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+1$		$-$	0	$+$		$+$	
P		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{m+1}$

m	$-\infty$		-1		$+\infty$
S		$-$	‖	$+$	

Tableau récapitulatif

m	$-\infty$	$-3/2$		-1		$5/2$		3	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
P	$+$		$+$		$-$	0	$+$		$+$
S	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$

$Or \begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S < 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in]-3/2\,;\,-1[}$

d- admet des racines positives

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in]5/2\,;3[}$

e- admet des racines de signes contraires

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ P < 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in]-1\,;\,5/2[}$

f- admet -1 comme l'une des racines

$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow (-m-1)(-1)^2 + 4(-1) - 2m + 5 = 0$

$-m - 1 - 4 - 2m + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$

Trouvons l'autre racine

$S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{m+1}$ avec m=0$\Rightarrow S = 4 \;\; et \;\; S = x' + x''$

Si $x' = -1 \Rightarrow -1 + x'' = 4 \Rightarrow \boxed{x'' = 5}$

2) Ecrivons une relation indépendante de m entre les racines x' et x''

P$= \frac{2m-5}{m+1} \Leftrightarrow P(m+1) = 2m - 5 \Rightarrow m = \frac{-5-P}{P-2}$ (1)

$S = \frac{4}{m+1} \Rightarrow m = \frac{4-s}{s}$ (2)

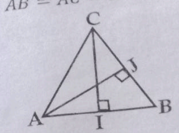
Posons m=m, on a $\frac{-5-P}{P-2} = \frac{4-s}{s} \Leftrightarrow (p-2)(4\text{-}s) = s(-5-p)$

$\Rightarrow 4p + 7s - 8 = 0 \;\; avec \; p = x'.x'' et \; s = x' + x''$

D'où $\boxed{4x'.x'' + 7(x' + x'') - 8 = 0}$ ou $\boxed{4x'.x'' + 7(x' + x'') = 8}$

Solution 3

$AB = AC = BC = 5$



Calculons les produits scalaires

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB \times AI \;\; avec \; AI = \frac{AB}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{25}{2}}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = BI \times BA = \frac{25}{2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{25}{2}}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{25}{2}}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\frac{25}{2}}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{BC} = -CJ \times CB = -\frac{CB^2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = -\frac{25}{2}}$

Solution 4

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$

1^er^ cas : si a=0 $\Rightarrow 3m-5=0 \Rightarrow m=\frac{5}{3}$: L'équation est du 1^er^ degré en x.

On a $\left[3\left(\frac{5}{3}\right)-5\right]x^2-\left(\frac{5}{3}+2\right)x+\frac{5}{3}+2=0 \Rightarrow x=1$

D'où $\boxed{S=\{1\}}$

2^ème^ cas : si a$\neq 0 \Rightarrow 3m-5\neq 0 \Rightarrow m\neq\frac{5}{3}$: L'équation est du 2^nd^ degré en x

$\Delta=b^2-4ac=[-(m+2)]^2-4(3m-5)(m+2)$

$\Delta=-11m^2+44=-11(m-2)(m+2)$

Etudions le signe de Δ

Posons $\Delta=0 \Rightarrow -11(m-2)(m+2) \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=2 \end{cases}$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\Delta=-11m^2+44$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Discussion :

–Si $m\in]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[, \Delta<0 \Rightarrow \boxed{S=\emptyset}$

–Si m=–2 ou m=2 $\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow x'=x''=-\frac{b}{2a}=\frac{m+2}{2(3m-5)}$

Pour $m=-2 \Rightarrow x'=x''=0 \Rightarrow \boxed{S=\{0\}}$

Pour $m=2 \Rightarrow x'=x''==\frac{2+2}{2(6-5)}=2 \Rightarrow \boxed{S=\{2\}}$

–Si $m\in]-2\,;2[, \Delta>0 \Rightarrow x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{m+2-\sqrt{-11m^2+44}}{6m-10}$

et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{m+2+\sqrt{-11m^2+44}}{6m-10}$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{m+2-\sqrt{-11m^2+44}}{6m-10}\,;\,\frac{m+2+\sqrt{-11m^2+44}}{6m-10}\right\}}$

Résolution sujet n°5

Solution 1

1-Donnons l'ensemble de définition de :

$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}$ f est définie $\Leftrightarrow x^2-1\neq 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)\neq 0$

Posons $(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

Alors $\boxed{E_f=]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$

$g(x)=|2x-1|+\frac{1}{x+2}$ g est définie $\Leftrightarrow x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$

Alors $\boxed{E_g=]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[}$

$h(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x}$ h est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

$0 \quad 2 \quad +\infty$ $\Rightarrow \boxed{E_h=[0\,;2[\cup]2\,;+\infty[}$

$k(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$ k est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-3\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ Posons $x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$

$-\infty$		-3		1		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

$\Rightarrow \boxed{E_k=]-\infty\,;-3]\cup]1\,;+\infty[}$

$p(x)=\sqrt{\frac{4x+3}{x+2}}$ p est définie $\Leftrightarrow \frac{4x+3}{x+2}\geq 0$

Posons $\frac{4x+3}{x+2}=0 \Rightarrow \begin{cases} 4x+3=0 \\ x+2\neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-3/4 \\ x\neq -2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$-3/4$		$+\infty$
$4x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4x+3}{x+2}$		$+$	‖	////	0	$+$	

$\boxed{E_p =]-\infty\,;\,-2[\cup[-3/4\,;\,+\infty[}$

2- **Calculons les limites suivantes :**

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{3x-3} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{3\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{3x-3} = 1}$

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{(2-x)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(2-x)\cancel{(x-1)}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{2x+1}{2-x} = \frac{2+1}{2-1} = 3$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{(2-x)(x-1)} = 3}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2+\sqrt{x^2-3x+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2-x) = 2$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-3x+1}\right) = 2}$

d) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} =$

$= \lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4}$

Solution2

$f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1}$

1) **Déterminons l'ensemble de définition de f**

f est définie $\Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Alors $\boxed{E_f =]-\infty\,;1[\cup]1\,;\,+\infty[}$

2) **Démontrons que le point $A(1\,;1)$ est centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$**

$\Leftrightarrow f(2a-x)+f(x) = 2b$ avec $a = 1$ et $b = 1$

$\Rightarrow f(2-x)+f(x) = 2\,?$

Pour $x = 2-x \Rightarrow f(2-x) = \frac{(2-x)^2-(2-x)+2}{2-x-1}$

$\Rightarrow f(2-x) = \frac{4-4x+x^2-2+x+2}{-x+1} = \frac{-x^2+3x-4}{x-1}$

$f(2-x)+f(x) = \frac{-x^2-3x+4}{x-1} + \frac{x^2-x+2}{x-1}$

$= \frac{-x^2+3x-4+x^2-x+2}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 2$

Alors $\boxed{f(2-x)+f(x) = 2}$ Donc le point $A(1\,;1)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) $g(x) = \sqrt{x+1}$

a) **Déterminons l'ensemble de définition de g**

g est définie $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$ $\boxed{E_g = [-1\,;\,+\infty[}$

b) **Déterminons la fonction h**

$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{\frac{x^2-x+2}{x-1}+1}$

$h(x) = \sqrt{\frac{x^2-x+2+x-1}{x-1}} \Rightarrow$ $\boxed{h(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$

Solution 3

1) On donne les points : $A(6\,;4)$ et $B(2\,;10)$

a- **Déterminons une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A passant par B**

$d(A\,;B) = R \Rightarrow R = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$R = \sqrt{(2-6)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\forall M(x\,;y) \in (\mathcal{C}_1), on\ a: d(A\,;M) = R$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

$(x-6)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = 52$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 12x - 8y = 0}$

b- **Déterminons une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de diamètre [AB]**

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} x-6 \\ y-4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-2 \\ y-10 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-6)(x-2) + (y-4)(y-10)=0$

$(x-6)(x-2) + (y-4)(y-10) = 0$

$x^2 - 2x - 6x + 12 + y^2 - 10y - 4y + 40 = 0$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - 8x - 14y + 52 = 0}$

2) $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 4x - 6x - 14 = 0.$

a- **Reconnaissons $(\mathcal{C})$** : $(\mathcal{C})$ est l'équation cartésienne du cercle à cause de sa forme $x^2+y^2 + Ax + By + c=0$ où $A = -4\,; B = -6$ et $c = -14$.

b- **Caractérisons $(\mathcal{C})$:**

-Le centre $I(a\,;b)$: $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$

Or l'équation du cercle est aussi de la forme

$x^2+y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

Par identification , on a : $\begin{cases} -2a = -4 \\ -2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(2\,;3)}$

-Le rayon R :

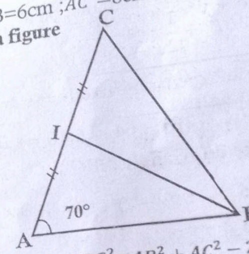
$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 - (-14)} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Alors $\boxed{R = 3\sqrt{3}}$

Solution 4

AB=6cm ; AC =8cm et $mes\hat{A} = 70°$

1) **Faisons la figure**



2) **Démontrons que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \times \cos\hat{A}$**

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles) Avec $\hat{A} = \widehat{BAC}$

$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left[-\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\right]^2$

$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

Avec $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = u^2$

$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \times \cos\widehat{BAC}$

D'où $\boxed{BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\times\cos\hat{A}}$

3) **Déduisons la distance BC**

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\times\cos\hat{A}$

$\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC\times\cos\hat{A}}$

BC=$\sqrt{(6)^2+(8)^2-2\times6\times8\times\cos 70}=8{,}92$

Alors $\boxed{BC=8{,}92cm}$

4) **Calculons la longueur [BI]**

D'après le théorème de la médiane, on a

$BC^2+AB^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$

$\Rightarrow BI=\frac{1}{2}\sqrt{2(BC^2+AB^2)-AC^2}$

$BI=\frac{1}{2}\sqrt{2(79{,}5664+36)-64}=6{,}46 \Rightarrow \boxed{BI=6{,}46cm}$

5) **Calculons l'aire du triangle ABC**

$\mathcal{A}(ABC)=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin 70$

Alors $\boxed{\mathcal{A}(ABC)=22{,}55cm^2}$

Résolution sujet n°6

Solution 1

$f(x)=x+\sqrt{2}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$

1- Montrons que f est injective

f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1,\forall x_2\in E_f\,/\,f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$f(x)=x+\sqrt{2}\Rightarrow E_f=]-\infty\,;+\infty[$

$\forall x_1,x_2\in E_f: f(x_1)=x_1+\sqrt{2}\ et\ f(x_2)=x_2+\sqrt{2}$

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1+\sqrt{2}=x_2+\sqrt{2}\Rightarrow x_1=x_2$

D'où f est injective.

2- Montrons que f est surjective

f est surjective$\Leftrightarrow \forall x\in E_f,\exists y\in E_f\,/\,y=f(x)$

$f(x)=x+\sqrt{2}$ avec $f(x)=y\Leftrightarrow y=x+\sqrt{2}$

$\Rightarrow x=y-\sqrt{2}$ D'où f est surjective.

3- L'application f étant à la fois injective et surjective, alors elle est bijective.

4- Trouvons $f^{-1}(x)$ la réciproque de f

$f(x)=x+\sqrt{2}$

$\forall x\in E_f,\exists!\,y\in E_f\,/\,y=f(x)$

$f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y)$

$y=x+\sqrt{2}\Rightarrow x=y-\sqrt{2}\Rightarrow f^{-1}(y)=y-\sqrt{2}$

D'où $\boxed{f^{-1}(x)=x-\sqrt{2}}$

Solution 2

$\begin{cases} f(x)=x^2-4x+2 & si\ x\in]-\infty\,;0[\\ f(x)=\sqrt{x^2-x+4} & si\ x\in[0\,;+\infty[\end{cases}$

1-Donnons le domaine de définition de f

$\forall x\in]-\infty\,;0[, f_1$ est définie sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbf{E}_{f_1}=]-\infty\,;\mathbf{0}[$

$\forall x\in[0\,;+\infty[, f_2$ est définie $\Leftrightarrow x^2-x+4\geq0$

Posons $x^2-x+4=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4(1)(4)=-15<0$

Alors l'équation $x^2-x+4=0$ n'admet pas de racine, donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

Alors $\mathbf{E}_{f_2}=[\mathbf{0}\,;+\infty[$

Donc $E_f=E_{f_1}\cup E_{f_2}=]-\infty\,;0[\cup[0\,;+\infty[$

D'où $\boxed{E_f=]-\infty\,;+\infty[}$

2- **Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$**

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f(x_0)\exists$ et

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Calculons $f(0)$: $f(0) = \sqrt{0^2 - 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

-Continuité à gauche en $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 4x + 2) = 0 - 0 + 2 = 2$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2}$ Alors f est continue à gauche en $x_0=0$

-Continuité à droite en $x_0=0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{0^2 - 0 + 4} = 2$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2}$ Alors f est continue à droite en $x_0=0$

Conclusion :

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 2$, alors f est continue en $x_0=0$.

3- **Etudions la dérivabilité de f en $x_0 = 0$**

f est dérivable en $x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)\exists$ et

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \ (l \in \mathbb{R})$$

-Dérivabilité à gauche en $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2-4x+2-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x(x-4)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (x - 4) = -4$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -4}$ Alors f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$

-Dérivabilité à droite en $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(\sqrt{x^2-x+4}-2)(\sqrt{x^2-x+4}+2)}{x(\sqrt{x^2-x+4}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2-x+4-4}{x(\sqrt{x^2-x+4}+2)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+4}+2} = \frac{0-1}{\sqrt{0^2-0+4}+2} = -\frac{1}{4}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{4}}$ Alors f est dérivable à droite en $x_0 = 0$

Conclusion :

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

4- **Donnons les conséquences graphiques de cette dérivabilité**

Graphiquement, la courbe de la fonction f admet au point $M_o(0\,;2)$ deux demi-tangentes l'une à gauche de pente $f'_g(0) = -4$ et l'autre à droite de pente $f'_d(0) = -1/4$.

Solution 3

Calculons :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Alors $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \cancel{\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cancel{\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}}$

$= 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alors $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}$

$=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{2}{4}\times\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Solution 4

$$f(x)=\frac{x}{3-\sin x}$$

1- Enoncé du théorème des gendarmes

> Si pour x assez voisin de x_0 tel que $g(x)\le f(x)\le h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

2- Démontrons que $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\,,\frac{x}{4}\le\frac{x}{3-\sin x}\le\frac{x}{2}$

On sait que $-1\le \sin x\le 1$

$\Leftrightarrow -1\le -\sin x\le 1\Rightarrow 3-1\le 3-\sin x\le 1+3$

$\Rightarrow 2\le 3-\sin x\le 4\Rightarrow \frac{2}{x}\le\frac{3-\sin x}{x}\le\frac{4}{x}$

$\Rightarrow \frac{x}{2}\ge\frac{x}{3-\sin x}\ge\frac{x}{4}\Rightarrow \boxed{\frac{x}{4}\le\frac{x}{3-\sin x}\le\frac{x}{2}}$

3- Déduisons la limite de f en $+\infty$ et en 0

$\frac{x}{4}\le\frac{x}{3-\sin x}\le\frac{x}{2}$ avec $f(x)=\frac{x}{3-\sin x}\Rightarrow\frac{x}{4}\le f(x)\le\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{4}\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{+\infty}{4}\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le\frac{+\infty}{2}$

$+\infty\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le+\infty$

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{4}\le\lim\limits_{x\to0} f(x)\le\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{0}{4}\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le\frac{0}{2}$

$0\le\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 0$

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

Solution 5

1- Trouvons les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2x^2+7x-5\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-5x+c}$ Avec $c\in\mathbb{R}$

b) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow \boxed{G(x)=\sqrt{x^2+1}+c}$ Avec $c\in\mathbb{R}$

c) $h(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow \boxed{H(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+c}$

d) $p(x)=\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow \boxed{P(x)=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+c}$ Avec $c\in\mathbb{R}$

2- Déterminons **la primitive de $k(x)=2x-1-\frac{6}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x=2$**

$k(x)=2x-1-\frac{6}{x^2}\Rightarrow K(x)=x^2-x+\frac{6}{x}+c$

Qui s'annule en $x=2\Rightarrow K(2)=0$

$\Rightarrow K(2)=4-2+3+c\Rightarrow K(2)=5+c=0\Rightarrow c=-5$

Alors $\boxed{K(x)=x^2-x+\frac{6}{x}-5}$

3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$.

a) **Calculons I et J**

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$ Or $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\Rightarrow \cos^4 x=\frac{1+\cos 4x}{2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^{2}\cos 4x\,dx$

$I=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{8}\sin 4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{8}\sin 0$

$I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\sin 2\pi=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi}{4}}$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$ Or $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\Rightarrow \sin^4 x=\frac{1-\cos 4x}{2}$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2}dx-\frac{1}{2}\int_0^{2}\cos 4x\,dx$

$J=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{8}\sin 4\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{8}\sin 0$

$J=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}\sin 2\pi=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{J=\frac{\pi}{4}}$

b) **Déduisons la valeur des intégrales:**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x+\sin^4 x)dx=I+J=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

Alors $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x+\sin^4 x)dx=\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x-\sin^4 x)dx=I-J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$

Alors $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x-\sin^4 x)dx=0}$

Résolution sujet n°7

Solution 1

$f(x)=x^2+2x-1$ et $g(x)=-x^2+3$.

Déterminons les fonctions composées :

$f\circ g(x)=f[g(x)]=(-x+3)^2+2(-x+3)-1$

$f\circ g(x)=x^2-6x+9-2x+6-1$

Alors $\boxed{f\circ g(x)=x^2-8x+14}$

$g\circ f(x)=g[f(x)]=-(x^2+2x-1)^2+3$

$g\circ f(x)=-(x^4+2x^3-x^2+2x^3+4x^2-2x-x^2-2x+1)+3$

Alors $\boxed{g\circ f(x)=-x^4-4x^3-2x^2+4x+2}$

Solution 2

1- Convertissons en radians la mesure des angles :

$\alpha=105°\Rightarrow \boxed{\alpha(rad)=\alpha(deg)\times\frac{\pi}{180}}$

$\alpha=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{\cancel{5}\times\cancel{3}\times 7\pi}{\cancel{3}\times\cancel{5}\times 12}=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{7\pi}{12}}$

$\beta=260°\Rightarrow\beta=260\times\frac{\pi}{180}=\frac{\cancel{4}\times\cancel{5}\times 13\pi}{\cancel{4}\times\cancel{5}\times 9}=\frac{13\pi}{9}$

Alors $\boxed{\beta=\frac{13\pi}{9}}$

2- Convertissons en degrés la mesure des angles :

$\theta=\frac{13\pi}{12}\Rightarrow \boxed{\theta(deg)=\theta(rad)\times\frac{180}{\pi}}$

$$\theta = \frac{13\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = \frac{13 \times 15 \times 12\pi}{12\pi} = 195° \Rightarrow \boxed{\theta = 195°}$$

$$\lambda = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = \frac{15 \times \cancel{12\pi}}{\cancel{12\pi}} = 15° \Rightarrow \boxed{\lambda = 15°}$$

Solution 3

1- Sachant que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Démontrons que $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right)$$

Or $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos 2 \times \frac{\pi}{8}$

et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$

Alors $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \left(\cos 2 \times \frac{\pi}{8}\right)(1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\boxed{\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ C.Q.F.D

2) $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$

a) **Calculons $A + B$ et $A - B$**

$$A+B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{7\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$A + B = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{A + B = 4}$

$$A - B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

Or $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$A - B = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$A - B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$A - B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{A - B = 0}$

b) **Déduisons les valeurs exactes de A et B**

$\begin{cases} A + B = 4 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 4 & (1) \\ A = B & (2) \end{cases}$

Remplaçons (2) dans (1) $\Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$

Or $A = B$ D'où $\boxed{A = 2 \ et \ B = 2}$

Solution 4

1- **Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :**

a) $4\cos^2 x = 1 \Rightarrow (2\cos x)^2 - 1^2 = 0$

$\Rightarrow (2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos x - 1 = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Pour $\cos x = \frac{1}{2}$ Or $\frac{1}{2} \in [-1\,;1]$ et $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boldsymbol{x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}}$

Pour $\cos x = -\frac{1}{2}$ Or $-\frac{1}{2} \in [-1\,;1]$ et $-\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$

$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}}$

D'où $\boxed{S=\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,;-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}}$

b) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Or $-\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{3}$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{4\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\\2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13\pi}{24}+k\pi\\x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi\end{cases}\Rightarrow\boxed{S=\left\{-\frac{7\pi}{24}+k\,;\,\frac{13\pi}{24}+k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}}$$

c) $2\sin^2x-9\sin x+4=0\Leftrightarrow 2(\sin x)^2\text{-}9\sin x+4=0$

Posons $\sin x=t$ *avec* $t\in[-1\,;1]$

On a :$2t^2-9t+4=0\Rightarrow\Delta=(-9)^2-4(2)(4)=49$

$t'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-7}{4}=\frac{1}{2}$ *et* $t''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9+7}{4}=4$

Alors $t=\frac{1}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $t=4\notin[-1\,;1]$

Or $\sin x=t$ *avec* $t=\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

d) $\sqrt{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *Or* $\frac{\sqrt{3}}{3}\in[-1\,;1]$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow$

$\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

2- Résolvons dans $\mathbb{R}^2$, le système d'équations :

$$\begin{cases}2\sin x+5\cos y=-4\\3\sin x-2\sin y=3{,}5\end{cases}$$

Posons $\sin x=t$ *avec* $t\in[-1\,;1]$ *et* $\cos y=\lambda$ *avec* $\lambda\in[-1\,;1]$

$$\begin{cases}2t+5\lambda=-4\\3t-2\lambda=3{,}5\end{cases}$$

$$\begin{matrix}-3\times\\2\times\end{matrix}\begin{cases}2t+5\lambda=-4\\3t-2\lambda+3{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6t-10\lambda=12\\6t-4\lambda=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\sin x=t$ *avec* $t=\frac{1}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

$\cos y=\lambda$ *avec* $\lambda=-1\in[-1\,;1]$ et $-1=\cos\pi$

$\cos y=\cos\pi\Leftrightarrow y=\pm\pi+2k\pi$

D'où $\boxed{S=\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi\right)\right\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

Ou

$\boxed{S=\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\,-\pi+2k\pi\right)\right\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

Ou

$\boxed{S=\left\{\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi\right)\right\}\,;k\in\mathbb{Z}}$

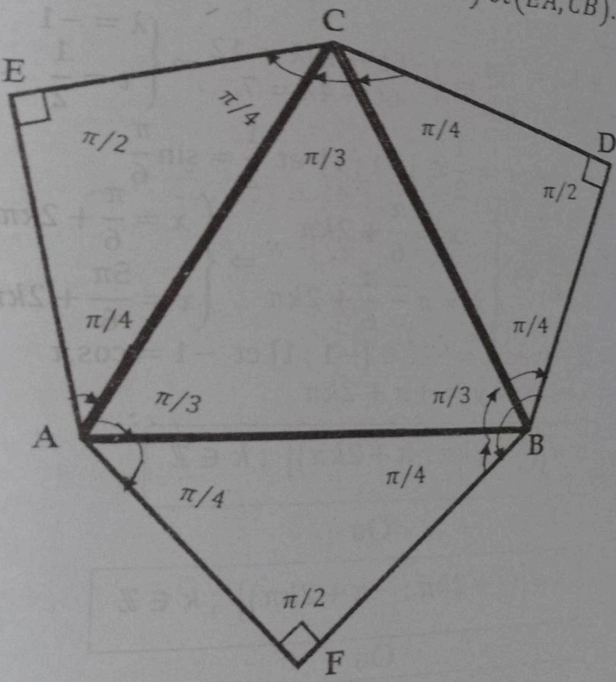
Ou encore

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ -\pi+2k\pi\right)\right\}\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$$

Solution 5

Déterminons la mesure des angles $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CA})$

$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$; $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})$ $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CB})$.



$$\boxed{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

$$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$$

$$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}\in\,]-\pi\ ;\ \pi]$$

D'où $\boxed{(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF})=\frac{5\pi}{6}[2\pi]}$

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})=(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}\notin\,]-\pi\ ;\ \pi]$

Cherchons la mesure principale de $\frac{4\pi}{3}$

$\frac{4}{3}=1,33\Rightarrow 1<\frac{4}{3}<2\Rightarrow -\pi<\frac{4\pi}{3}-2\pi<0$

$\Rightarrow\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}\in\,]-\pi\ ;\ \pi]\Rightarrow$ $\boxed{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})=-\frac{2\pi}{3}[2\pi]}$

$$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})+\pi+$$
$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}\in\,]-\pi\ ;\ \pi]$$

D'où $\boxed{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CA})=\frac{5\pi}{12}[2\pi]}$

$$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})+(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})+$$
$$(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})+\pi+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{25\pi}{12}\notin\,]-\pi\ ;\ \pi]$$

Cherchons la mesure principale de $\frac{25\pi}{12}$

$$-\pi<\frac{25\pi}{12}+2k\pi\leq\pi\Rightarrow -2<k\leq -1\Rightarrow k=-1$$

Alors $\frac{25\pi}{12}-2\pi=\frac{25\pi-24\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\in\,]-\pi\ ;\ \pi]$

D'où $\boxed{(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{12}[2\pi]}$

Résolution sujet n°8

Solution 1

Déterminons les valeurs exactes de :

a) $\cos\frac{\pi}{12}$ Or $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow \boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

b) $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

c) $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})}$

$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{12}-6-2+\sqrt{12}}{2-6}=\frac{2\sqrt{12}-8}{-4}=\frac{-4(2-\sqrt{3})}{-4}=2-\sqrt{3}$

D'où $\boxed{\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$

Solution 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations ci-après :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Or $\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{3}-x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow \boxed{S=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\,;\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}\;;k\in\mathbb{Z}}$$

b) $2\cos^2 x-9\cos x+4=0\Leftrightarrow(\cos x)^2\text{-}9\cos x+4=0$

Posons $\cos x=t$ *avec* $t\in[-1\,;1]$

On a : $2t^2-9t+4=0\Rightarrow\Delta=(-9)^2-4(2)(4)=49$

$t'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-7}{4}=\frac{1}{2}$ *et* $t''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9+7}{4}=4$

Alors $t=\frac{1}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $t=4\notin[-1\,;1]$

Or $\cos x=t$ *avec* $t=\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

D'où $\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\;;k\in\mathbb{Z}}$

c) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ Comme $1\in[-1\,;1]$

Posons $\sqrt{3}\cos x+\sin x=r\cos(x-\varphi)$

Cherchons r et φ

Avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$ Où $a=\sqrt{3}$ *et* $b=1$

$\Rightarrow r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=2\Rightarrow \boldsymbol{r=2}$

$$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{\varphi=\frac{\pi}{6}}$$

Alors $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Or $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1\Rightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ *Avec* $\frac{1}{2}\in[-1\,;1]$ *et* $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

On a : $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

D'où $\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$

Solution 3

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculons U_1 et U_2

$U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1$

Pour $n = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{2}{5}U_0 + 1 = \frac{2}{5}(2) + 1 = \frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{9}{5}}$

Pour $n = 1 \Rightarrow U_2 = \frac{2}{5}U_1 + 1 = \frac{2}{5}\left(\frac{9}{5}\right) + 1 = \frac{43}{25}$

Alors $\boxed{U_2 = \frac{43}{25}}$

2) On pose $V_n = U_n - \frac{5}{3}\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a- Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme

(V_n) S.G $\Leftrightarrow V_{n+1} = qV_n \quad avec\ q\epsilon\mathbb{R}^*$

$V_n = U_n - \frac{5}{3}$

Pour $n = n+1 \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{3}$ Or $U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}U_n - \frac{2}{3}$ Or $U_n = V_n + \frac{5}{3}$

$V_{n+1} = \frac{2}{5}\left(V_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}V_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}V_n$

D'où $\boxed{V_n = \frac{2}{5}V_n}$ Avec $q = \frac{2}{5}$

Calcul du 1er terme V_0

$V_n = U_n - \frac{5}{3}$

Pour $n = 0 \Rightarrow V_0 = U_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{V_0 = \frac{1}{3}}$

Conclusion : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de 1er terme $V_0 = \frac{1}{3}$.

b- Exprimons V_n en fonction de n

$V_n = V_p . q^{n-p}$ avec $\boldsymbol{V_p = V_0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow V_n = V_0 . q^n}$

D'où $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

c- Calculons la somme S_n en fonction de n

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

$$S_n = \frac{V_0[1-(q)^{n+1}]}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}{3}$$

Alors $\boxed{S_n = \frac{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}}$ Ou $\boxed{S_n = \frac{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}}{3}}$

Solution 4

$$\begin{cases} f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 5 & si\ x > 0 \\ f(x) = (x+k)^2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminons la valeur du réel k pour que f soit continue en $x_0 = 4$

f est continue $x_0 = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = f(4)$

Calculons $f(4)$

$f(4) = (4+k)^2 = k^2 + 8k + 16$

Calculons la limite à gauche et à droite en $x_0 = 4$

$\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} (x+k)^2 = (4+k)^2 = k^2 + 8k + 16$

Alors $\lim\limits_{x\to4^-} \boldsymbol{f(x) = k^2 + 8k + 16}$

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} \left(3\sqrt{x} - 2x + 5\right) = 3\sqrt{4} - 2(4) + 5 = 3$

Alors $\lim\limits_{x\to4^+} \boldsymbol{f(x) = 3}$

Or f est continue en $x_0=4$ si $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = f(4)$

Donc $k^2 + 8k + 16 = 3 \Rightarrow k^2 + 8k + 13 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (4)^2 - (1)(13) = 3$

$k' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -4 - \sqrt{3}$ et $k'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -4 + \sqrt{3}$

D'où $\boxed{k = -4 - \sqrt{3} \ \ ou \ \ k - 4 + \sqrt{3}}$

Alors $\begin{cases} f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 5 & si\, x > 0 \\ f(x) = \left(-4 - \sqrt{3}\right)^2 & si\, x \leq 0 \end{cases}$

Ou

$$\begin{cases} f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 5 & si\, x > 0 \\ f(x) = \left(-4 + \sqrt{3}\right)^2 & si\, x \leq 0 \end{cases}$$

Résolution sujet n°9

Solution 1

Soit $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{\pi}{9}$ et $(\vec{u}\,;\vec{w}) = \frac{\pi}{4}$

Déterminons une mesure principale de :

$\forall \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, d'après Chasles, on a :

$(\vec{u}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{w})$

$\Rightarrow (\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w}) - (\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9} = \frac{13\pi}{36} \in]-\pi\,;\pi]$

Alors $\boxed{(\vec{v}\,;\vec{w}) = \frac{13\pi}{36}[2\pi]}$

$(-\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi = -\frac{\pi}{9} + \pi = \frac{8\pi}{9} \in]-\pi\,;\pi]$

Alors $\boxed{(-\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{8\pi}{9}[2\pi]}$

$(-\vec{v}\,;-2\vec{w}) = (\vec{v}\,;\vec{w}) = \frac{13\pi}{36} \Rightarrow \boxed{(-\vec{v}\,;-2\vec{w}) = \frac{13\pi}{36}[2\pi]}$

$(-2\vec{u}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \notin]-\pi\,;\pi]$

Cherchons la mesure principale de $\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5}{4} = 1{,}25 \Rightarrow 1 < \frac{5}{4} < 2 \Rightarrow -\pi < \frac{5\pi}{4} - 2\pi < 0$

Alors $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi - 8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$

D'où $\boxed{(-2\vec{u}\,;\vec{w}) = -\frac{3\pi}{4}[2\pi]}$

Solution 2

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2 \end{cases} ;\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_n - 6 + a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

a- **Déterminons le réel a pour que (V_n) soit une suite géométrique**

(V_n) S.G $\Leftrightarrow V_{n+1} = qV_n$ avec $q \in \mathbb{R}^*$

$V_n = U_n - 6 + a$

Pour $n = n+1 \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 6 + a$

Or $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + -6 + a = \frac{1}{2}U_n - 4 + a$

Or $U_n = V_n + 6 - a$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 6 - a) - 4 + a = \frac{1}{2}V_n + 3 - \frac{1}{2}a - 4 + a$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - 1 + \frac{1}{2}a$

(V_n) S.G $\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a = 1 \Rightarrow a = 2$

D'où $\boxed{a = 2}$ Alors $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ avec $q = \frac{1}{2}$

Calculons le 1er terme de cette suite V_0

$V_n = U_n - 4$

Pour n=0$\Rightarrow V_0 = U_0 - 4 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow V_0 = -3$

Conclusion : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $V_0 = -3$.

b- Exprimons (V_n) et (U_n) en fonction de n

$V_n = V_0 . q^{n-p}$ avec $V_p = V_0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow V_n = V_0 . q^n$

D'où $\boxed{V_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$U_n = V_n - 4 \Rightarrow \boxed{U_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4}$

c- Vérifions si la suite (V_n) est convergente

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ Or $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$ Alors la suite (V_n) est convergente.

2) Calculons en fonction de n les sommes S_n et S'_n

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 \dots + V_n$

$$S_n = \frac{V_0[1-(q)^{n+1}]}{1-q} = \frac{-3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= -6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

D'où $\boxed{S_n = -6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

Ou encore $S_n = -6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $\boxed{S_n = -6 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$$S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

	U_n	=	$V_n + 4$
Si n=0	U_0	=	$V_0 + 4$
Si n=1	U_1	=	$V_1 + 4$
Si n=2	U_2	=	$V_2 + 4$
.	.		.
.	.		.
.	.		.
Si n=n	U_n	=	$V_n + 4$

$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = V_0 + V_1 + V_2 \dots + V_n + 4 + 4 + \cdots + 4$

Or $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$; $4 + 4 + \cdots + 4 = 4n$

et $S_n = V_0 + V_1 + V_2 \dots + V_n$

Alors $S'_n = S_n + 4n$

D'où $\boxed{S'_n = -6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n}$

Ou

$\boxed{S'_n = -6 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 4n}$

3) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Or $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -6}$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-6 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n\right]$$
$$= -6 + 6(0) + 4(+\infty) = +\infty$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = +\infty}$

La suite (S_n) est convergente et la suite (S'_n) est divergente.

Solution 3

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f

f est définie $\Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Alors $\boxed{E_f =]-\infty\,; 1[\cup]1\,; +\infty[}$

2) Calculons les limites de f aux bornes de E_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3) Calculons la fonction dérivée $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

Or $f(x) = \frac{U}{V} \Rightarrow f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

Avec $U = x^2 + x + 1 \Rightarrow U' = 2x + 1$

et $V = x - 1 \Rightarrow V' = 1$

Alors $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - 1(x^2 + x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$

D'où $\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}}$

Etudions le signe de $f'(x)$

Posons $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (1)(-2) = 3$

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 - \sqrt{3} \text{ et } x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 + \sqrt{3}$$

Tableau de signes

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-2x-2		+	0	−	‖	−	0	+	
$(x-1)^2$		+		+	‖	+		+	
$f'(x)$		+		−	‖	−		+	

Alors $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \left]-\infty\,; 1-\sqrt{3}\right[\cup \left]1+\sqrt{3}; +\infty\right[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left[1-\sqrt{3}\,; 1\right[\cup \left]1\,; 1+\sqrt{3}\right], f'(x) < 0 \end{array}}$

Sens de variation

$\boxed{\forall x \in \left]-\infty\,; 1-\sqrt{3}\right[\cup \left]1+\sqrt{3}; +\infty\right[, f'(x) > 0}$

Alors la fonction f est strictement croissante.

$\boxed{\forall x \in \left[1-\sqrt{3}\,; 1\right[\cup \left]1\,; 1+\sqrt{3}\right], f'(x) < 0}$

Alors fonction f est décroissante.

4) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3-2$\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3+2$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

5) **Déterminons les réels a, b et c**

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ Avec $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & x-1 \\ \underline{-x^2 + x} & x+2 \\ 2x + 1 & \\ \underline{-2x + 2} & \\ 3 & \end{array}$$

Alors $x^2 + x + 1 = (x-1)(x+2) + 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}} + \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)} = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

$\Rightarrow f(x) = x + 2 + \frac{3}{(x-1)}$ Or $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

Par identification, on a : $\boxed{a = 1\,; b = 2 \text{ et } c = 3}$

6) **Montrons que la droite (Δ): $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction f**

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ Alors que la droite (Δ): $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction f.

7) **Etudions la position de la courbe (C_f) par rapport à l'asymptote oblique**

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 - \sqrt{3} \quad et \quad x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 + \sqrt{3}$$

Tableau de signes

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2-2x-2	+	0	−	‖	−	0	+
$(x-1)^2$	+		+	‖	+		+
$f'(x)$	+		−	‖	−		+

Alors $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \left]-\infty\,; 1-\sqrt{3}\right[\cup \left]1+\sqrt{3};\, +\infty\right[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left[1-\sqrt{3}\,; 1\right[\cup \left]1\,; 1+\sqrt{3}\right], f'(x) < 0 \end{array}}$

Sens de variation

$\boxed{\forall x \in \left]-\infty\,; 1-\sqrt{3}\right[\cup \left]1+\sqrt{3};\, +\infty\right[, f'(x) > 0}$

Alors la fonction f est strictement croissante.

$\boxed{\forall x \in \left[1-\sqrt{3}\,; 1\right[\cup \left]1\,; 1+\sqrt{3}\right], f'(x) < 0}$

Alors fonction f est décroissante.

4) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$3-2\sqrt{3}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

5) **Déterminons les réels a , b et c**

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ Avec $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & x-1 \\ \underline{-x^2 + x} & x+2 \\ 2x + 1 & \\ \underline{-2x + 2} & \\ 3 & \end{array}$$

Alors $x^2 + x + 1 = (x-1)(x+2) + 3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}} + \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)} = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

$\Rightarrow f(x) = x + 2 + \frac{3}{(x-1)}$ Or $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

Par identification, on a : $\boxed{a = 1\,; b = 2 \ et \ c = 3}$

6) **Montrons que la droite (Δ): $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction f**

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ Alors que la droite (Δ): $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) de la fonction f

7) **Etudions la position de la courbe (C_f) par rapport l'asymptote oblique**

$$f(x) - y = x + 2 + \frac{3}{x-1} - x - 2 = \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) - y = \frac{3}{x-1}$$

Etudions le signe de $f(x) - y$

Posons $f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{3}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Tableau de signes

x	$-\infty$	1	$+\infty$
3	+		+
$x - 1$	−	0	+
$f(x)$-y	−	‖	+

$\forall x \in]-\infty\,; 1[, f(x) - y < 0$: La courbe (C_f) de la fonction f est en dessous de l'asymptote.

$\forall x \in]1\,; +\infty[, f(x) - y > 0$: La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'asymptote.

8) **Etudions les branches infinies**

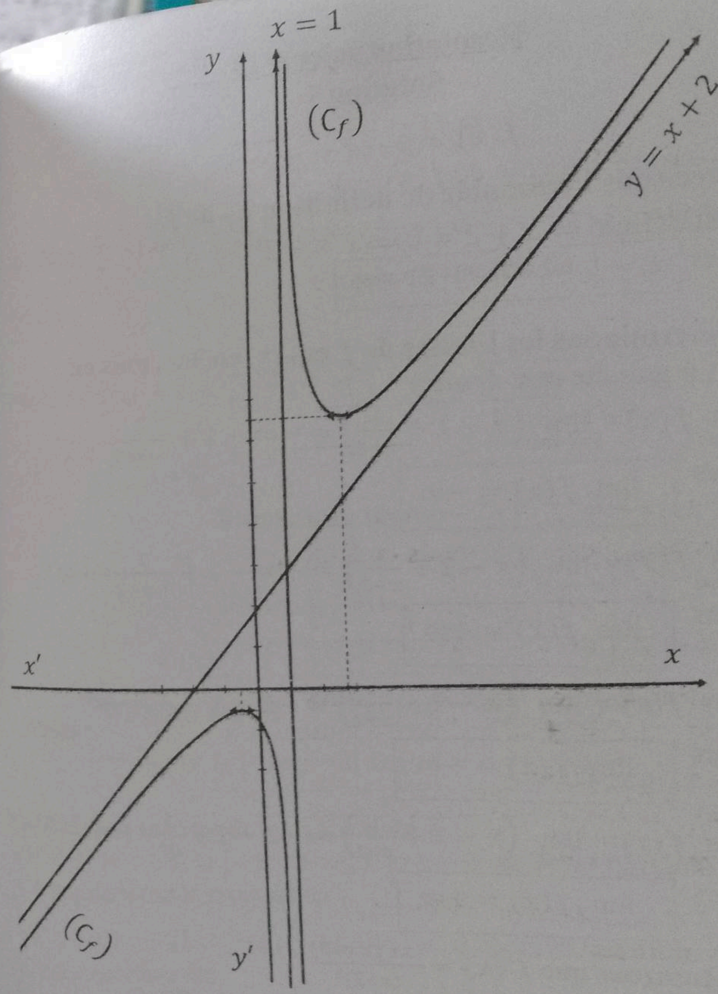
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique.

$\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale.

9) **Traçons dans un même repère la courbe (C_f) et ses asymptotes**

$y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0



Résolution sujet n°10

Solution 1

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$$

1-Précisons l'ensemble de définition E_f de f

f est définie $\Leftrightarrow x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Alors $\boxed{E_f =]-\infty\,; -2[\, \cup\,]-2\,; +\infty[}$

2-Déterminons les limites de f en -∞, en +∞, puis en −2 (à gauche et à droite)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) = -\infty - 1 + \frac{1}{-\infty+2} = -\infty$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) = +\infty - 1 + \frac{1}{+\infty+2} = +\infty$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-}\left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) = -2 - 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\left(x - 1 + \frac{1}{x+2}\right) = -2 - 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty}$

3- Montrons que $f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2-1)(x+2+1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

D'où $\boxed{f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}}$

4- Déterminons le signe de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$

Posons $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ (x+1)(x+3) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x+3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tableau de signes

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$(x+1)(x+3)$		+	0	−	||	−	0	+	
$(x+2)^2$		+		+	||	+		+	
$f'(x)$		+		−	||	−		+	

Alors $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \forall x \in [-3\,; -2[\, \cup\,]-2\,; -1], f'(x) < 0 \\ \forall x \in \forall x \in]-\infty\,; -3[\, \cup\,]-1\,; +\infty[, f'(x) > 0 \end{array}}$

Déduisons le sens de variation de f

$\forall x \in]-\infty\,; -3[\, \cup\,]-1\,; +\infty[, f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante.

$\forall x \in [-3\,; -2[\, \cup\,]-2\,; -1], f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante.

5- Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		-2		-1		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

6- Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$

a) **Calculons** :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 1 + \frac{1}{x+2} - x + 1\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y] = 0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$$

Alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = 0}$

Interprétons le résultat

Comme $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - y] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique.

b) **Etudions le signe de $f(x) - y$**

$$f(x) - y = \frac{1}{x+2}$$

Posons $f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \end{cases}$

Tableau de signes

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
1	$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$
$f(x)$-y	$-$	‖	$+$

Alors
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in]-\infty\,;\,-2[,\, f(x) - y < 0 \\ \forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\, f(x) - y > 0 \end{array}}$$

Déduisons la position de (C_f) par rapport à (D)

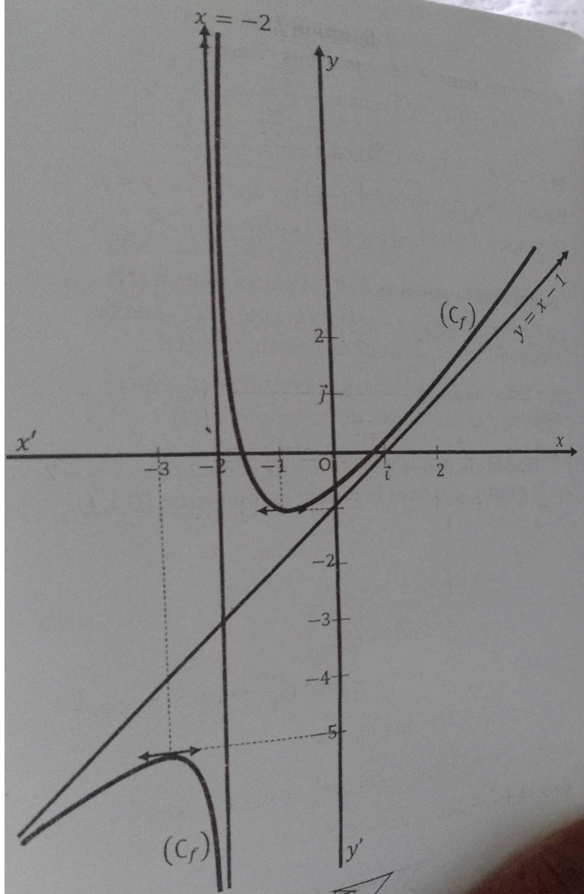
$\forall x \in]-\infty\,;\,-2[,\, f(x) - y < 0$ alors la courbe (C_f) de la fonction f est en dessous de l'asymptote (D).

$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\, f(x) - y > 0$ alors la courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'asymptote (D).

7- Traçons la droite (D), la droite d'équation $x = -2$ et la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(D) : $y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0



Solution 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$, les équations ci-après :

a) $2\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2(\cos x)^2 + (1-\sqrt{3})\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Posons $\cos x = t$ avec $t \in [-1\,;1]$

L'équation devient : $2t^2 + (1-\sqrt{3})t - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 2\,; b = 1-\sqrt{3}\,; c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta = (1-\sqrt{3})^2 - 4(2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$

$t' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{3}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2(2)} = \frac{-1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}$

$t'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2(2)} = \frac{-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $-\frac{1}{2} \in [-1\,;1]$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1\,;1]$, alors $t = -\frac{1}{2}$ ou $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $\cos x = t \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Pour $\cos x = -\frac{1}{2}$ avec $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

Pour $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

D'où $\boxed{S=\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,;-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}}$

b) $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

on a : $\cos\frac{\pi}{3}.\cos x+\sin\frac{\pi}{3}.\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon[-1\,;1]$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

On a : $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi\\x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\\x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\end{cases}$$

D'où $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\,;\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}\ avec\ k\in\mathbb{Z}}$

Solution 3

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)}\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

1- Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{+\infty(+\infty+1)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0}$

2- Déterminons les réels a et b

$U_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}\Leftrightarrow\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}=\frac{an+a+bn}{n(n+1)}=\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$

Or $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$

Posons $U_n=U_n\Leftrightarrow\frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\Rightarrow(a+b)n+a=1$

Par identification, on a : $\begin{cases}a=1\\a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

Alors $\boxed{a=1\ et\ b=-1}$ Donc $U_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

3- Déduisons une expression de S_n en fonction de n

$$S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$$

$$\begin{array}{llll}
 & U_n= & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n+1}\\
\text{Si } n=1 & U_1= & 1 & -\cancel{\frac{1}{2}}\\
\text{Si } n=2 & U_2= & \cancel{\frac{1}{2}} & -\cancel{\frac{1}{3}}\\
\text{Si } n=3 & U_3= & \cancel{\frac{1}{3}} & -\cancel{\frac{1}{4}}\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
\text{Si } n=n & U_n= & \cancel{\frac{1}{n}} & -\frac{1}{n+1}\\
\hline
\end{array}$$

$$U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n=1-\frac{1}{n+1}$$

Or $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n\Rightarrow S_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

D'où $\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad ou \quad S_n = \frac{n}{n+1}}$

4- **Calculons** $\lim_{n\to+\infty} S_n$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty+1} = 1$

Alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$

Solution 4

$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) **Donnons la nature de la suite** (U_n)

$U_{n+1} = U_n + 4 \Rightarrow \boxed{U_{n+1} - U_n = 4}$

Donc la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $U_0 = 2$.

2) **Exprimons** U_n **en fonction de** n

$U_n = U_p + (n-p)r$ Avec $U_p = U_0 \Rightarrow p = 0$

Alors $U_n = U_0 + nr \Rightarrow \boxed{U_n = 4n + 2 \text{ ou } U_n = 2(2n+1)}$

3) **Calculons en fonction de** n **la somme** S_n

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$S_n = \frac{(n-p+1)(U_n+U_p)}{2}$ Avec $U_p = U_0 \Rightarrow p = 0$

Alors $S_n = \frac{(n+1)(U_n+U_0)}{2} = \frac{(n+1)(4n+2+2)}{2}$

D'où $\boxed{S_n = (n+1)(2n+2)}$ ou $\boxed{S_n = 2(n+1)^2}$

Résolution sujet n°11

Solution 1

1- **Résolvons dans** $\mathbb{N}$**, les équations suivantes :**

a) $A_n^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 2 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 2$

$\Rightarrow n(n-1) = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9$

$n' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{9}}{2(1)} = \frac{1-3}{2} = -1 \ et \ n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{9}}{2(1)} = 2$

Alors $n = -1$ ou $n = 2$ Or $-1 \notin \mathbb{N}$ seul $2 \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{S = \{2\}}$

b) $3C_n^4 = 14C_2^n \Leftrightarrow 3 \times \frac{n!}{4!(n-4)!} = 14 \times \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\frac{3\times n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4\times3\times2!\times(n-4)!} = \frac{14\times n(n-1)(n-2)!}{2!\times(n-2)!} \Rightarrow \frac{(n-2)(n-3)}{4} = 14$

$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 56 \Rightarrow n^2 - 5n - 50 = 0 \Rightarrow \Delta = 225$

$n' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{225}}{2(1)} = \frac{5-15}{2} = -5 \ et \ n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{225}}{2(1)} = \frac{5+15}{2} = 10$

Alors $n = -5$ ou $n = 10$ Or $-5 \notin \mathbb{N}$ seul $10 \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{S = \{10\}}$

c) $C_n^{n-2} = 28 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\times2!} = 28$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow \Delta = 225$

$n' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{225}}{2(1)} = \frac{1-15}{2} = -7 \ et \ n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{225}}{2(1)} = \frac{1+15}{2} = 8$

Alors $n = -7$ ou $n = 8$ Or $-7 \notin \mathbb{N}$ seul $8 \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{S = \{8\}}$

2- **Nombre d'anagrammes du mot MATHS**

Le mot MATHS est une liste ordonnée de 5 lettres (M, A, T, H, S). Donc une anagramme du mot MATHS est une permutation de ces 5 lettres.
Or $P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Alors $\boxed{P_5 = 120\ anagrammes}$

3- Nombre de façons que cette femme peut s'habiller
$N = C_4^1 \times C_5^1 \times C_3^1 = 4 \times 5 \times 3 = 60$
Alors $\boxed{N = 60\ façons}$

Solution 2

a) Nombre de choix possibles

$$N = C_{32}^2 = \frac{32!}{2!\,(32-2)!} = \frac{32 \times 31 \times 30!}{2 \times 1 \times 30!} = 496$$

Alors $\boxed{N = 496\ possibilités}$

b) Nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille
$N = C_{19}^1 \times C_{13}^1 = 19 \times 13 = 247$
Alors $\boxed{N = 247\ possibilités}$

c) Nombre de choix si l'on impose deux garçons

$$N = C_{19}^2 = \frac{19!}{2!\,(19-2)!} = \frac{19 \times 18 \times 17!}{2 \times 1 \times 17!} = 171$$

Alors $\boxed{N = 171\ possibilités}$

Solution 3

1-a) **Nombre de possibilité de tirer 3 boules de même couleur**

$$N = C_6^3 + C_4^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} + \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 24$$

Alors $\boxed{N = 24\ possibilités}$

b) **Nombre de possibilité de tirer 3 boules de couleurs différentes**
$N = C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 = 6 \times C_4^2 + 4 \times C_6^2 = 96$
Alors $\boxed{N = 96\ possibilités}$

c) **Nombre de possibilité de tirer 3 boules blanches et une boule rouge**
$N = C_6^3 \times C_4^1 = 4 \times C_6^3 = 80 \Rightarrow \boxed{N = 80\ possibilités}$

d) **Nombre de possibilité de tirer au moins 3 boules rouges**
$N = C_4^3 + C_4^4 = 5 \Rightarrow \boxed{N = 5\ possibilités}$

2-a) **Nombre de possibilité de tirer exactement 2 boules blanches**
$N = A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30 \Rightarrow \boxed{N = 30\ possibilités}$

b) **Nombre de possibilité de tirer au plus 2 boules rouges**
$N = A_4^2 + A_4^1 + A_4^0 = 17 \Rightarrow \boxed{N = 17\ possibilités}$

Solution 4

$$f(x) = \cos 2x$$

1) **Déterminons l'ensemble de définition de f**

$$\boxed{E_f =]-\infty\,;\,+\infty[}$$

2) **Déterminons la période T et la parité de f.**
- La période : $T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi \Rightarrow \boxed{T = \pi}$

Conséquence : f es périodique sur l'intervalle
$I = \left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right] \Rightarrow I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

- **La parité** :

$f(x) = cos\, 2x \Rightarrow f(-x) = cos(-2x) = \cos[-(2x)]$
$\Rightarrow f(-x) = cos\, 2x \Rightarrow f(-x) = f(x)$, alors la fonction f est paire.

Conséquence : f est définie sur l'intervalle $J = [0 ; +\infty[$.

Déduisons l'ensemble d'étude de f

$E_e = I \cap J = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \cap [0 ; +\infty[\Rightarrow \boxed{E_e = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]}$

3) **Etudions les variations de f puis dresser son tableau de variation**

-Dérivée de f : $\boxed{f'(x) = -2\, sin\, 2x}$

-Signe de $f'(x)$:Posons $-2\, sin\, 2x = 0 \Rightarrow sin\, 2x = 0$

$\Leftrightarrow sin\, 2x = \sin 0 \Leftrightarrow \begin{cases} sin\, 2x = k\pi \\ sin\, 2x = \pi + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Tableau de signe

x	0 $\qquad$ $\pi/2$
$f'(x)$	$-$

$\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante

Dressons le tableau de variation de f

x	0 $\qquad$ $\pi/2$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -1$

4) **Traçons la courbe** (C_f)