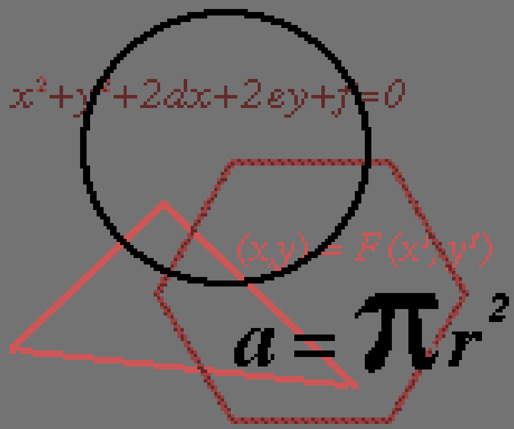
1re

$S_2$

# RECUEIL D’EXERCICES DE MATHEMATIQUES

## Première $S_2$





Cellule pédagogique de mathématiques du lycée Alpha Molo Baldé de Kolda

# Programme de Mathématiques 1S2

1. Applications
2. Polynômes, équations, inéquations et systèmes ;
3. **Rappels et compléments sur les vecteurs du plan et de l'espace ;**
4. Généralités sur les fonctions ;
5. Limites, continuité et dérivabilité ;
6. **Angles orientés et trigonométrie ;**
7. Etude et représentation graphique de fonctions ;
8. Suites numériques ;
9. **Transformations du plan ;**
10. Dénombrement ;
11. Statistique ;
12. **Compléments de géométrie dans l'espace.**

**Fin du Programme**

# Chap.1 : Applications

**Exercice 1 :**

1) Dire si chacune des fonctions ci-après est ou non une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$ avec $I = [0; +\infty[$;

b) $f(x) = \left|\frac{x}{x-1}\right|$ avec $I = [0; +\infty[$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ avec $I = [0; 2]$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ avec $I = ]-\infty; 0[$.

2) Est-ce que les fonctions suivantes sont-elles des applications ?

$f : [0; 3] \longrightarrow \left[-\frac{9}{4}; 0\right[$, $x \longmapsto x^2 - 3x$.

$g : \mathbb{R} \longrightarrow [-5; +\infty[$, $x \longmapsto x^2 - 3x$.

$h : ]-3; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{3-x}{x+1}$.

**Exercice 2 :**

Soit l'application $f$ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{1-x}$.

1) Déterminer les antécédents par $f$ des reels $0$, $-3$, $2$ et $1$.

2) Montrer qu'il n'existe qu'un seul réel n'ayant pas d'antécédent par $f$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3) Quel est l'ensemble image de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f$ ?

**Exercice 3 :**

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application $f$ est injective.

1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto 2x - 3$.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^2 + 1$.

**Exercice 4 :**

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application $g$ est surjective.

1) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto 2|x|$.

2) $g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$.

**Exercice 5 :**

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application $h$ est bijective. Si oui déterminer $h^{-1}$.

1) $h : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$, $x \longmapsto \frac{2x-3}{x-1}$.

2) $h : ]0; 3[ \longrightarrow \left]-5; -\frac{1}{2}\right[$, $x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$.

**Exercice 6 :**

1) Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) $f$ est-elle injective ?

b) $f$ est-elle surjective ?

2) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - x$.

a) $g$ est-elle injective ?

b) $g$ est-elle surjective ?

**Exercice 7 :**

Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x-1| + 2|3-x|$.

1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2) En déduire l'application affine $g$ qui a même restriction que $f$ sur l'intervalle $[1; 3]$.

3) L'application $g$ est-elle injective ? Surjective ?

**Exercice 8 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.

2) $f$ est-elle surjective ?

**Exercice 9 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

1) $f$ est-elle une application ? Justifier.

2) Trouver une restriction $g$ de $f$ qui soit une application.

Cette application est-elle injective ? Surjective ?

3) Trouver une restriction $h$ de $f$ qui soit une application bijective.

**Exercice 10 :**

1) On donne l'application $h : \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \longrightarrow [1; +\infty[$

$$x \longmapsto \sqrt{2x-1} + 1.$$

a) Démontrer que $h$ est une bijection.

b) Déterminer $h^{-1}$.

2) Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$.

a) $f$ est-elle une application bijective ?

b) Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ vers un ensemble $B$ qu'on précisera. Déterminer $f^{-1}$.

**Exercice 11 :**

$f$ est la fonction polynôme définie par : $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

1) Démontrer que $f$ est la composée de deux fonctions, dont la fonction cube.

2) En déduire que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

**Exercice 12 :**

1) $f$ est la fonction polynôme définie par : $f(x) = 8x^3 + 1$.

Justifier que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2) $g$ est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \sqrt{x^3 + 1}$.

Justifier que $g$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1; +\infty[$.

**Exercice 13 :**

1) Soit $a$, $b$ deux nombres réels et $f$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = ax + b$.

a) Démontrer que $f$ est bijective si et seulement si $a$ est non nul.

b) Déterminer alors sa bijection réciproque.

2) Donner la représentation graphique d'une fonction :

a) Surjective et non injective.

b) Injective et non surjective.

**Exercice 14 :**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques dont l'ensemble de départ est $[-3; 5]$ et l'ensemble d'arrivée est $A$ pour $f$ et $B$ pour $g$ définies par : $f(x) = x^2 - 10x + 25$ et $g(x) = \frac{3}{x+5}$.

1) Déterminer les ensembles $A$ et $B$ pour que les fonctions $f$ et $g$ soient des bijections.

2) Dans chaque cas, chercher la formule explicite de chacune des bijections $f^{-1}$ et $g^{-1}$.

**Exercice 15 :**

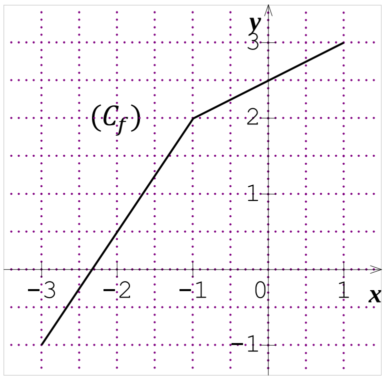
Le plan est muni du repère orthonormé $(O, I, J)$.

$(C_f)$ est la courbe représentative d'une fonction $f$, affine par intervalles, d'ensemble de définition $[-3; 1]$.

1) Définir explicitement cette fonction.

2) Démontrer que $f$ est une bijection de $[-3; 1]$ vers $[-1; 3]$.

3) Construire la courbe représentative de sa bijection réciproque.



## Chap.2 : Polynômes-Equations-Inéquations-Systèmes

**Exercice 1 :**

1) Existe-t-il un polynôme $f$ du second degré tel que l'on ait :
   a) Pour tout réel $x$ : $f(x) = (x-2)g(x)$, où $g$ est un polynôme ?
   b) Pour tout réel $x$ : $f(x) = (x+1)h(x)$, où $h$ est un polynôme ?
   c) Pour tout réel $x$ : $f(x) = (x-1)k(x) + 5$, où $k$ est un polynôme ?
2) Peut-on trouver $a$ et $b$ et un polynôme $g$ tels que, pour tout réel $x$ :
   $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 6)g(x)$ ?
3) Démontrer qu'il existe un polynôme $g$ tel que, pour tout réel $x$ :
   $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3 g(x)$.
4) $f$ est le polynôme défini par $f(x) = x^5 + ax^4 + b$ où a et b sont des réels.
   Trouver les réels $a$ et $b$ pour qu'il existe un polynôme $g$ tel que, pour tout réel $x$ :
   $f(x) = (x-1)^2 g(x)$.

**Exercice 2 :**

1) Après avoir vérifié que $a$ ou $b$ est une racine, factoriser complètement les polynômes suivants :
   $P(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81, \quad a = -3.$
   $Q(x) = x^5 + 1, \quad a = -1.$
   $R(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2, \quad a = 1 + \sqrt{2}; \quad b = 1 - \sqrt{2}.$
2) Calculer $(x^2 + px + q)^2$ et montrer que $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ est le carré de deux polynômes du second degré à préciser.

**Exercice 3 :**

1) Soit l'équation : $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$.
   Etudier, suivant les valeurs du paramètre $m$, l'existence des solutions de cette équation.
2) Déterminer $m$, réel tel que les équations suivantes aient deux solutions strictement positives ; strictement négatives :
   a) $(m-3)x^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$.
   b) $(m-1)x^2 + 2(m+6)x + m + 4 = 0$.
3) Déterminer le réel $m$, de façon que l'équation : $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ admette deux solutions $x'$ et $x''$ vérifiant la relation $x' - 2x'' = 1$.

**Exercice 4 :**

On considère l'équation $(E)$ : $(m-1)x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m - 3 = 0$ où $m$ est un paramètre réel et $x$ l'inconnue.

1) Discuter suivant les valeurs de $m$ l'existence et le signe des racines de $(E)$.
2) Pour quelles valeurs de $m$ l'équation $(E)$ admet-elle une racine double ?
   La donner dans chaque cas.
3) Pour quelle valeur de $m$ l'équation $(E)$ a-t-elle une racine nulle ?
4) Déterminer $m$ pour que l'équation $(E)$ admette deux racines $x'$ et $x''$ vérifiant : $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 3$.
5) Pour quelles valeurs de $m$ l'équation $(E)$ admet-elle deux racines vérifiant : $|x' + x''| = 4$.

**Exercice 5 :**

1) Soit un réel $(E)$ : $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$.
   a) Résoudre $(E)$ suivant les valeurs de $m$.
   b) Etudier le signe des solutions de $(E)$ suivant les valeurs de $m$.
2) Soit $m$ un réel. On donne $P(x) = (m^2 + 3m)x^2 - 2(m+2)x + 1$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de $m$ l'équation :
   $(m^2 + 3m)x^2 - 2(m+2)x + 1 = 0$.
   b) Déterminer, si possible ; les valeurs de $m$ pour lesquelles :
   - On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(m^2 + 3m)x^2 - 2(m+2)x + 1 \leq 0$.
   - $P$ admet deux racines distinctes négatives.

**Exercice 6 :**

1) Déterminer un polynôme $P(x)$ de degré 3 qui s'annule en 0 et tel que : $P(x+1)-P(x)=x^2+x$.
2) En déduire que la somme $S_n=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$ est égale à $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**Exercice 7 :**
On considère l'équation (E) : $2x^4-11x^3+19x^2-11x+2=0$.
1) Démontrer que cette équation est équivalente sur $\mathbb{R}^*$ à l'équation :
$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-11\left(x+\frac{1}{x}\right)+19=0$.
2) En déduire la résolution de l'équation (E).

**Exercice 8 :**
Etant donné $a$ : $a=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}$.
Montrer que $a^3+5a$ est un entier.

**Exercice 9 :**
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $2x+\sqrt{x}-3=0;$ b) $x^2+|x|-6=0;$ c) $|x^2-1|+2(x^2-3x+2)^2=0;$
d) $\frac{3x-2}{2x^2-5x-3}-\frac{2x+5}{3x^2-7x-6}=0;$ e) $|3x^2-7x+4|=2x-2;$ f) $\left|\frac{x-1}{x}\right|=x^2+3x-4.$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations irrationnelles suivantes :
a) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{-1+2x}{1-3x}};$ b) $3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x;$ c) $\sqrt{x^2-5x+6}=|2x+1|;$
d) $\sqrt{-x+1}+\sqrt{x+3}=2;$ e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x};$ f) $\sqrt{7-3x}-2=\sqrt{x+7}.$

**Exercice 10 :**
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
a) $-9x^4+12x^2-4<0;$ b) $\frac{4x^2-12x-13}{x^2-3x+2}\geq 4;$ c) $\frac{-2x^3+11x-5}{(-2x^2+x-3)(2-x)}\leq -1;$
d) $-x^2+|x-1|+3x+6>0;$ e) $-6x^2-x+12\neq 0;$ f) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5}>\frac{x^2-6x+5}{x^2-2x-3};$
g) $x^4-x^3-7x^2+x+6>0;$ h) $|-2x^2+5x+3|\leq -6x+12;$ i) $|x^2-x-6|\geq -5x-1.$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations irrationnelles suivantes :
a) $\sqrt{2+|x-1|}\geq\sqrt{3-|x-1|};$ b) $\sqrt{-4x^2+x+5}\leq 2x+2;$ c) $\sqrt{x^2+6x+6}\geq|2x+1|;$
d) $\sqrt{3(x^2-1)}>2x-1;$ e) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x}}\geq 1;$ f) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\geq 3.$

**Exercice 11 :**
1) Résoudre chacun des systèmes suivants :
a) $\begin{cases}x+y=1\\x^3+y^3=7\end{cases};$ b) $\begin{cases}x^4+y^4=97\\x+y=5\end{cases};$ c) $\begin{cases}x^2+y^2-2x-3y=9\\3x^2+3y^2-x+5y=4\end{cases}.$
2) Résoudre et discuter, suivant les valeurs de $m$, chacun des systèmes suivants :
a) $\begin{cases}mx+y=-2m\\x+my=m-1\end{cases};$ b) $\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x-my=\sqrt{2}-1\\x-(\sqrt{2}+1)y=m\end{cases};$ c) $\begin{cases}mx\sqrt{2}-3y\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\-x\sqrt{3}+2my=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :
a) $\begin{cases}-2x+4y+z=5\\2x-y+3z=1\end{cases};$ b) $\begin{cases}3x-y+z=1\\-x+3y+z=\frac{11}{3}\\x-y+3z=\frac{7}{3}\end{cases};$ c) $\begin{cases}2x+3|y|-z=24\\4x-2|y|+3z=6\\6x-|y|+2z=22\end{cases};$
d) $\begin{cases}2x-3y+5z=0\\3x-5y+2z=1\\2x-5y+3z=2\end{cases};$ e) $\begin{cases}2x+y+3z=1\\x-y+z=4\\x+2y+2z=-3\end{cases};$ f) $\begin{cases}9x+3y+z+9t=34\\3x+2y-9z+7t=6\\-x+y-6z+5t=-3\\7x-4y+4z-6t=29\end{cases}.$

**Exercice 12 :**
On considère $P(x)=6x^3+ax^2+bx+c$.
1) Déterminer $a$, $b$ et $c$ tels que : $P(-1)=36$, $P\left(\frac{1}{3}\right)=0$ et $P(-2)=28$.

2) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs du premier degré.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $6(-x+3)^3 + (-x+3)^2 - 31(-x+3) > -10$.

**Exercice 13 :**

On suppose qu'un cycliste a une vitesse de 25km/h en terrain plat, de 15km en montée et de 30km en descente. Ce cycliste met 4h24min pour parcourir une route AB dans le sens de A vers B et de 4h36min pour la parcourir dans le sens de B vers A. La route ayant une longueur de 100km, on demande de déterminer les longueurs de terrain plat, de montée et de descente de A vers B.

**Exercice 14 :**

Un artisan fabrique des sacs de toile et cuir de deux types différents A et B. La réalisation d'un sac de type A demande $0{,}50m^2$ de toile et $0{,}40m^2$ de cuir ; celle d'un sac de type B demande $0{,}60m^2$ de toile et $0{,}68m^2$ de cuir. L'artisan dispose chaque semaine de $15m^2$ de toile et de $14m^2$ de cuir. Les profits réalisés sont de $40F$ par sac A et de $60F$ par sac B. On désigne par $x$ le nombre de sacs A et par $y$ le nombre de sacs B fabriqués chaque semaine.

1) Traduire les contraintes liées aux quantités de toile et de cuir disponibles par des inégalités faisant intervenir $x$ et $y$.
2) $(x, y)$ représentant les coordonnées d'un point $M$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ déterminer l'ensemble $D$ des points $M(x, y)$ du plan pour lesquels la fabrication est possible.
3) a) Calculer en fonction de $x$ et de $y$ le profit $p$ réalisé par semaine.
   b) Déterminer le programme de fabrication qui assure un profit maximal et calculer ce profit.

**Exercice 15 :**

Il faut pour fleurir un parc au minimum : 1200 jacinthes, 3200 tulipes et 3000 narcisses.
Deux pépiniéristes proposent :
L'un le lot A : 30 jacinthes, 40 tulipes et 30 narcisses pour 75 F.
L'autre le lot B : 10 jacinthes, 40 tulipes et 50 narcisses pour 60 F.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre $x$ de lots A et le nombre $y$ de lots B que l'on doit acheter pour que la dépense soit minimale.

1) On achète $x$ lots A et $y$ lots B, traduire par des inégalités faisant intervenir $x$ et $y$ les besoins de plantation
2) $(x, y)$ représentant les coordonnées d'un point $M$ dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer l'ensemble $S$ des points $M$ pour lesquels $x$ et $y$ vérifient les inégalités précédentes.
3) Calculer en fonction de $x$ et $y$ la dépense $D$ occasionnée par l'achat de $x$ lots A et $y$ lots B.
4) Déterminer graphiquement le couple $(x, y)$ pour lequel la dépense sera minimale.
   Quelle est cette dépense ?

# Chap.3 : Rappels et Compléments sur les vecteurs du plan et de l'espace

**Exercice 1 :**

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

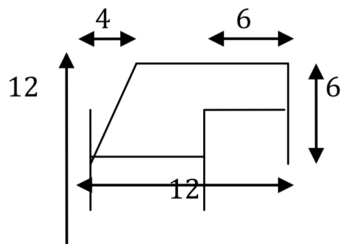
1) Construire les points $E$, $F$, $I$, $J$, $K$ et $L$ tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

2) Démontrer que les droites $(EF)$, $(IK)$ et $(JL)$ sont concourantes.

**Exercice 2 :**

Déterminer et placer le centre d'inertie de la plaque ci-dessous, supposée homogène et d'épaisseur négligeable. On fera apparaitre les traits de construction ainsi que les étapes intermédiaires.




**Exercice 3 :**

Soit un rectangle $ABCD$. Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont affectés des coefficients 2, $-2$, 3 et $-1$.

1) Construire leur barycentre $G$.

2) Pour tout point $M$ du plan démontrer que :

$2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MG}$.

3) Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\| = AB$.

4) Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

5) Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que le vecteur :

$2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

**Exercice 4 :**

Soit $H$ le barycentre du système de points pondérés $(A; a)$, $(B; a+1)$ et $(C; a+2)$, où $a$ est un réel différent de $-1$ et $A$, $B$ et $C$ trois ponts non alignés du plan.

On note $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$ et $I$ le point défini par : $3\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}$.

En remarquant que $H$ est aussi le barycentre de $\{(A; a), (B; a), (C; a), (B; 1), (C; 2)\}$, montrer que les points $G$, $H$ et $I$ sont alignés.

**Exercice 5 :**

Soit $ABC$ un triangle dont tous les angles sont aigus.

La hauteur issue de $A$ de ce triangle coupe $[BC]$ en $H$.

1) Démontrer que $\frac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{C}} = \frac{CH}{BH}$.

2) Déterminer les coefficients $y$ et $z$ de $B$ et de $C$ de façon que $H$ soit le barycentre de $(B; y)$ et $(C; z)$.

3) Quel est le barycentre du système de points $(A; \tan\hat{A})$, $(B; \tan\hat{B})$, $(C; \tan\hat{C})$.

**Exercice 6 :**

Soit $ABC$ un triangle, $A'$, $B'$, $C'$ les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et $M$ un point donné.

On note $A_1$, $B_1$, $C_1$ les symétriques respectifs du point $M$ par rapport aux points $A'$, $B'$, $C'$.

On désigne par $M'$ le barycentre des points $(A; 1)$, $(B; 1)$, $(C; 1)$ et $(M; -1)$.

1) Montrer que les droites $(AA_1)$, $(BB_1)$ et $(CC_1)$ sont concourantes en $M'$.

2) Soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$.

Montrer que $M$, $M'$ et $G$ sont alignés et préciser la position de $M'$ sur la droite $(MG)$.

**Exercice 7 :**

$ABC$ est un triangle rectangle en $A$, $H$ le pied de la hauteur issue de $A$.

$I$ et $J$ les milieux respectifs de $[BH]$ et de $[AH]$.
1) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$ et de $\overrightarrow{AB}$.
2) Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 8 :**

Soit un cercle $(C)$ de centre $\Omega$ et un point $M$ extérieur à ce cercle.
Une droite quelconque $(D)$ passant par $M$ coupe $(C)$ en deux points $A$ et $B$.
On se propose de démontrer que le nombre réel $MA \times MB$ est indépendant de $(D)$.
Ce nombre est appelé puissance du point $M$ par rapport au cercle $(C)$.
1) Soit $r$ le rayon de $(C)$, $(T)$ une tangente à $(C)$ passant par $M$ et $T$ le point de contact.
Démontrer que : $MT^2 = M\Omega^2 - r^2$.
2) Soit $A$ et $B$ les points d'intersection avec $(C)$ d'une droite passant par $M$ et $A'$ le point diamétralement opposé à $A$ sur $(C)$.
a) Démontrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$;
b) En déduire que : $MA \times MB = M\Omega^2 - r^2$.

**Exercice 9 :**

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
1) On donne les points $A\binom{3}{5}$, $B\binom{6}{-5}$ et $C\binom{1}{0}$.
a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
b) Déterminer $AB$, $AC$ et $BC$.
c) Donner une valeur approchée de $\hat{A}$ au degré près.
2) $(D)$ est la droite d'équation : $5x - 3y + 1 = 0$.
a) Déterminer une représentation paramétrique de $(D)$.
b) Déterminer une équation de la droite $(D')$ perpendiculaire à $(D)$ et passant par le point $A\binom{2}{-1}$.
c) Calculer la distance du point $A$ à la droite $(D)$.
3) On donne l'équation : $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$.
a) Démontrer que c'est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b) Montrer que ce cercle passe par l'origine du repère.
c) Trouver une équation de la tangente à ce cercle passant par l'origine.

**Exercice 10 :**

1) Soit un segment $[AB]$ tel que $AB = 6$.
Déterminer et tracer l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 30$; b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -27$; c) $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{3}$;
d) $MA^2 + MB^2 = 50$; e) $3MA^2 - 3MB^2 = 48$; f) $2MA^2 + 3MB^2 = 165$.
2) $A$, $B$ et $C$ sont trois points non alignés.
a) Construire l'ensemble des points $M$ tels que : $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{BC} = 0$.
b) Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que : $\left(\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

**Exercice 11 :**

I) $ABC$ est un triangle isocèle et rectangle en $C$.
$BCDE$ est un carré tel que $D$ soit distinct de $A$. On pose $AC = a$.
1) Faire une figure et calculer $AB$.
2) Calculer en fonction de $a$ les produits scalaires : $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{DB}$.
II) $[PQ]$ est un segment de milieu $O$ et $PQ = 2cm$.
1) Etablir que $MP^2 - MQ^2 = 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{PQ}$.
2) Trouver et représenter l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $MP^2 - MQ^2 = 16$.
III) Le pan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient $A(-4; 1)$, $B(-1; 2)$ et $C(1; -4)$.
1) Montrer de deux façons différentes que $ABC$ est un triangle rectangle.
2) Déterminer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

**Exercice 12 :**

Dans un plan $P$, on donne trois points $A$, $B$ et $C$ tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.
1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2) Soit $G$ le barycentre du système : $\{(A,2);\ (B,3);\ (C,3)\}$.
   a) Construire $G$.
   b) Calculer la distance $GA$.
3) Soit $f$ l'application de $P$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point $M$ de $P$ fait correspondre le réel
   $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.
   a) Démontrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$, pour tout point $M$ de $P$.
   b) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.
   c) Déterminer l'ensemble des points $M$ de $P$ tels que $f(M) = f(A)$ et représenter cet ensemble.

**Exercice 13 :**
1) Les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?
   a) $A(1;-2;-3)$; $B(0;4;1)$; $C(4;-20;9)$.
   b) $A(-1;-5;3)$; $B(3;-2;6)$; $C(4;-6;1)$.
2) Etudier si les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.
   a) $A(4;5;2)$; $B(-3;-17)$; $C(9;5;-3)$; $D(1;2;0)$.
   b) $A(3;0;2)$; $B(1;1;1)$; $C(2;2;2)$; $D(-2;5;1)$.
3) Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a les trois vecteurs $\vec{u}\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ ; $\vec{v}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4};\frac{5}{4}\right)$ et $\vec{w}\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right)$.
   a) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est-il une base ?
   b) Dans l'affirmative, dans cette nouvelle, donner les coordonnées du vecteur $\vec{m}$ dont les coordonnées dans $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $\left(\frac{3}{2};-1;2\right)$.

**Exercice 14 :**
1) Parmi les réponses données une seule est exacte. Indiquez-la par une croix.
   Le repère choisi est orthonormal. $A(1;-3;2)$, $B(1;-5;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;3;-4)$.
   a) La distance $AB$ est égale à $3\sqrt{2}$.
   b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
   c) Le triangle $ABD$ est rectangle.
2) $A(1;-2;3)$, $B(\sqrt{2};0;\sqrt{3})$ et $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$ sont trois points. Déterminer les coordonnées :
   a) du milieu du segment $[AC]$.
   b) du centre de gravité du triangle $ABC$.
   c) du point $G$ tel que $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

**Exercice 15 :**
L'espace $E$ est muni d'un repère orthonormal. Ecrire une équation de la sphère $S$ définie par :
1) son centre $\Omega(-1;3;0)$ et son rayon $r = \sqrt{2}$.
2) son centre $\Omega(3;-1;2)$ et un de ses points $A(2;-4;3)$.
3) deux points diamétralement opposés : $A(3;-5;7)$ et $B(1;-3;9)$.
4) quatre de ses points $A(0;4;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(1;1;-5)$ et $D(1;0;-4)$.

# Chap.4 : Généralités sur les fonctions

**Exercice 1 :**

Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction définie ci-après par :

$f(x)=\frac{5-x}{6x^3-x^2-21x+10}$; $g(x)=\sqrt{x-3}+2\sqrt{3x-1}$; $h(x)=\frac{x}{|3x-5|-2x-3}$; $i(x)=\sqrt{\frac{x^2+x-6}{-x^2+x-1}}$;

$j(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x-5}-\sqrt{x^2-4}}$; $k(x)=\frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$; $l(x)=\frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$; $m(x)=\sqrt{2x+1-\sqrt{7-6x}}$;

$n(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{4x^4-5x^2+2}$; $p(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-x-2}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; $q(x)=\frac{x+1}{x+\sqrt{2x^2+5x-3}-3}$; $r(x)=\frac{3-x}{x+4}-\sqrt{x^2-x-6}$.

$u(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2-1} \; si \; x\leq 0\\ \sqrt{x-1} \; si \; x>0\end{cases}$; $v(x)=\begin{cases}x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} \; si \; x<0\\ \frac{x^3-x^2}{x^2+1} \; si \; x\geq 0\end{cases}$; $w(x)=\begin{cases}\frac{x(x-2)}{x-1} \; si \; x<0\\ x+\sqrt{|x^2-x|} \; si \; x\geq 0\end{cases}$.

**Exercice 2 :**

On considère les fonctions $f$ et $g$ $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de : $g\circ f$, $f\circ g$, $g\circ g$ et $f\circ f$.

2) Déterminer la formule explicite de : $g\circ f(x)$, $f\circ g(x)$, $g\circ g(x)$ et $f\circ f(x)$.

**Exercice 3 :**

1) Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{3x}{|x^4-x^2+1|}$; $f_2(x)=\sin x+\cos x$; $f_3(x)=\frac{\cos x}{x}$; $f_4(x)=|x+3|-|x-3|$.

2) Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques, de période $T$:

$f(x)=\sin^2 x, T=\pi$; $g(x)=\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right), T=6\pi$; $h(x)=\cos 4x+2\sin 2x, T=\pi$.

**Exercice 4 :**

Dans chacun des cas ci-après, établir que la courbe $(C_f)$ représentative de la fonction $f$ considérée admet l'élément de symétrie indiqué :

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, $(D): x=2$;

2) $f(x)=\frac{4x^2+4x-3}{(2x+5)(2x-3)}$, $(D): x=\frac{-1}{2}$;

3) $f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$, $(D): x=\frac{\pi}{8}$;

4) $f(x)=\frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}$, $\Omega(1;1)$;

5) $f(x)=2x-1-\frac{3}{x+2}$, $\Omega(-2;-5)$;

6) $f(x)=\cos 3x-1$, $\Omega\left(\frac{\pi}{6};-1\right)$.

**Exercice 5 :**

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$; $g(x)=x^3+x^2-2x-1$; $h(x)=\frac{2x-1}{x+2}$; $k(x)=\sqrt{x^2-1}$.

**Exercice 6 :**

Une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admet le tableau de variation ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↘ | $-4$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | |

1) Démontrer que $f$ est minorée sur $]-\infty;-1[$ et majorée sur $]-1;+\infty[$.

2) Démontrer que $f$ est bornée sur $]-1;3[$.

**Exercice 7 :**

Une fonction $f$ d'ensemble de définition $[-4; 6]$ admet le tableau de variation ci-dessous :

| $x$ | $-4$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ |

Dans chacun des cas suivants, dresser le tableau de variation de la fonction $g$.

1) $g(x) = -f(x)$; 2) $g(x) = 3f(x) - 4$; 3) $g(x) = f(x-3)$; 4) $g(x) = f(1-3x)$.

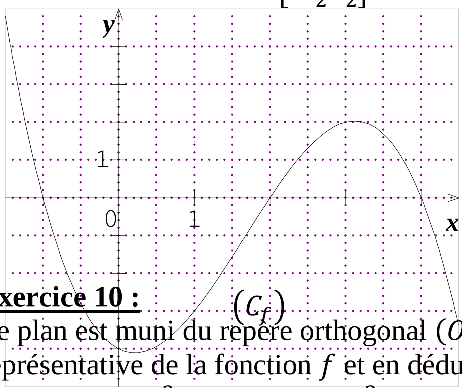
**Exercice 8 :**

On donne les fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \frac{4x^2+1}{2x^2+1}$; $g(x) = 3x - 2$.

1) Démontrer que pour tout nombre réel $x$, $1 \leq f(x) \leq 2$.
2) La fonction $g$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ ?
3) Démontrer que $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
4) Démontrer que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 9 :**

Le plan est muni d'un repère orthogonal, $(C_f)$ est la courbe représentative d'une fonction $f$, d'ensemble de définition $\left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$.




1) Construire la courbe représentative $(C_g)$ de la fonction $g$ : $g : x \longmapsto f\left(x + \frac{3}{2}\right) - 2$.
2) Construire la courbe représentative $(C_h)$ de la fonction $h : x \longmapsto f(-x)$.
3) Déduire de $(C_f)$ et de $(C_g)$ la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto f(|x|)$.

**Exercice 10 :**

Le plan est muni du repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe représentative de la fonction $f$ et en déduire la courbe représentative de la fonction $g$.

1) $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$.
2) $f(x) = \frac{1}{2x}$ et $g(x) = \frac{3-4x}{x-3}$.
3) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - \sqrt{2-x}$.
4) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3 - \sqrt{|2-x|}$.

**Exercice 11 :**

En utilisant les propriétés des fonctions associées, construire les courbes représentatives des fonctions numériques suivantes : $f(x) = -x^2 + 6x - 10$; $g(x) = |x^2| - 4|x|$; $h(x) = \frac{3x+1}{x+1}$.

**Exercice 12 :**

Le plan est muni du repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f(x) = -2x^2 + 5x$ et $(C_f)$ sa courbe représentative.

1) a) Déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = a(x+b)^2 + c$.
   b) Construire $(C_f)$.
2) Résoudre graphiquement :
   a) l'équation $|-2x^2 + 5x| = 3$;
   b) l'inéquation $|-2x^2 + 5x| > 3$.

**Exercice 13:**

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = -2x^2 - 4x - \frac{1}{2}$ et $(C_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que $f(x) = -2(x+1)^2 + \frac{3}{2}$.

b) En déduire le tracé de $(C_f)$.

c) Montrer que $f$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

2) a) Déterminer graphiquement l'image directe de $[-3; 1]$ par $f$.

b) Déterminer graphiquement l'image réciproque de $\left[-11; -\frac{1}{2}\right]$ par $f$.

3) a) Montrer que la restriction $g$ de $f$ sur $[-1; +\infty[$ est bijective. Soit $g^{-1}$ sa fonction réciproque.

b) Préciser le domaine de définition $J$ de $g^{-1}$. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) De la courbe de $f$ déduire $\left(C_{g^{-1}}\right)$.

**Exercice 14 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-7}{4x+2}$ et $(C_f)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.

2) Etudier la parité de $f$.

3) Déterminer l'intersection de $(C_f)$ avec les axes de coordonnées.

4) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}$.

5) Montrer que le point $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(C_f)$.

6) a) En posant $\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$, montrer que $y = f(x) \Leftrightarrow Y = -\frac{2}{X}$.

b) En déduire le tracer de $(C_f)$.

c) A l'aide de $(C_f)$ déterminer le tableau de variation de $f$.

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

**Exercice 15 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$.

La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction $f$ d'ensemble de définition $[0; 6]$.

1) Déterminer graphiquement : $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$.

2) Quelle est l'image de $f$ ?

3) Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -2$; c) $f(x) = \frac{3}{2}$; d) $f(x) = \frac{2}{3}$; e) $f(x) = -6$; f) $f(x) = 1$.

4) Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) \leq 0$; c) $f(x) \geq -2$; d) $f(x) < 2$.

5) Tracer sur le même dessin la droite d'équation : $y = \frac{2}{3}(x-4)$.

a) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = \frac{2}{3}(x-4)$.

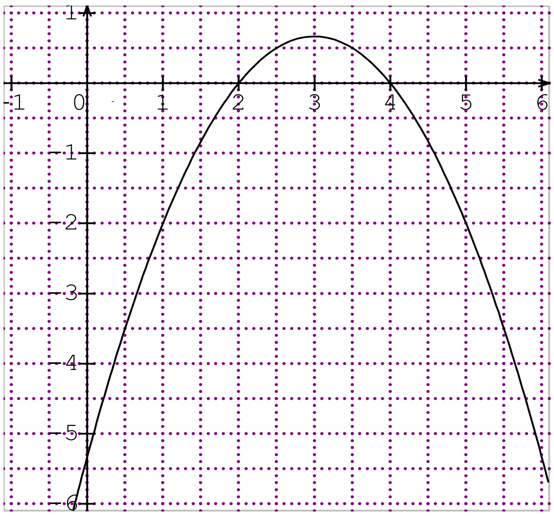
b) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) > \frac{2}{3}(x-4)$ et $f(x) \leq \frac{2}{3}(x-4)$.

6) Dresser le tableau de variation de $f$. La fonction $f$ admet-elle un maximum ?

Si oui, préciser pour quelle valeur ce maximum est atteint.

7) On suppose que $f$ est la restriction à $[0; 6]$ d'une fonction polynôme du second degré.

Déterminer $f(x)$.



1
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5
-6

# Chap.5 : Limites-Continuité-Dérivabilité

**Exercice 1 :**

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction $f$ en $x_0$.
(On calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en $x_0$.)

1) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\frac{x^3+6x+7}{3x^2-x-4}$, $x_0=-1$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{x}$, $x_0=0$;

4) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$, $x_0=2$; 5) $f(x)=\frac{5x|-x+4|}{x-4}$, $x_0=4$; 6) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$, $x_0=4$;

7) $f(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$, $x_0=2$; 8) $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}$, $x_0=0$; 9) $f(x)=\frac{5}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}$, $x_0=2$;

10) $f(x)=\frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{\sin x}$; $x_0=0$; 11) $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$; $x_0=0$; 12) $f(x)=\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; $x_0=0$.

**Exercice 2 :**

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) $f(x)=4x^3+3x^2-1$; 2) $f(x)=-x^6-x^2+4$; 3) $f(x)=(-2x+8)(3+5x)$;

4) $f(x)=\frac{1-2x^2}{2x^2-5x-3x^3}$; 5) $f(x)=\frac{5x^3+4x-7}{-2x^3+3x+1}$; 6) $f(x)=\frac{x^4+5x^2-1}{-3x^2+x+2}$;

7) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; 8) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; 9) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$;

10) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$; 11) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; 12) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$.

**Exercice 3 :**

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $D_f$ et étudier les limites aux bornes de $D_f$ :

1) $f(x)=\frac{-x^2+2x+7}{x^2-x-6}$; 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-2+x}$; 3) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{|x^2-1|}}$;

4) $f(x)=\frac{x^2+|x|}{|x|-2x}$; 5) $\begin{cases}\frac{x^2+x}{x+3} & si\ x\leq 1\\ \sqrt{-x^2+x+2} & si\ x>1\end{cases}$; 6) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} & si\ x<0\\ \frac{x^3-x^2}{x^2+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$.

**Exercice 4 :**

1) Dans chacun des cas suivants, démontrer que la courbe $(C)$ de la fonction $f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$; donner une équation de ces asymptotes et préciser leur position par rapport à $(C)$.

a) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2+1}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$;

c) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+4x+1}{x+1}}$; d) $f(x)=\frac{x+1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}$.

2) Etudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $x\longmapsto\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$; b) $x\longmapsto\sqrt{(x+2)^2}-\frac{3}{x-1}$;

c) $x\longmapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; d) $x\longmapsto\frac{x^2+\sin x}{x}$.

**Exercice 5 :**

1) On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\begin{cases}3x-1 & si\ x<1\\ \frac{x-1}{x+1} & si\ x\geq 1\end{cases}$.

a) Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 1 de $f$.

b) La fonction $f$ admet-elle une limite en 1 ?

2) On donne la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\begin{cases}\frac{2-3x}{9x^2-4} & si\ x\neq\frac{2}{3}\\ \frac{-1}{4} & si\ x=\frac{2}{3}\end{cases}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$.

b) $g$ est-elle continue en $\frac{2}{3}$ ?

3) Soit $h$ la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = \sqrt{x^2 - 4} \; si \; x > 2 \\ h(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14} \; si \; x < 2 \end{cases}$.

a) Déterminer $D_h$.

b) La fonction $h$ admet-elle un prolongement par continuité en 2 ?

**Exercice 6 :**

1) On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + 3 \; si \; x \leq -5 \\ f(x) = x^2 + a \; si \; -5 < x \leq 2 \\ f(x) = 2x^3 + 5x^2 + bx + 1 \; si \; x > 2 \end{cases}$ ;

Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une relation entre $a$ et $b$ pour que $g$ soit continue en 0 : $\begin{cases} g(x) = \frac{2x-1}{2x+3} + b \; si \; x \geq 0 \\ g(x) = x^2 + x + a \; si \; x < 0 \end{cases}$.

3) On considère la fonction $h$ définie par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x-2}{x-1} \; si \; x \leq 2 \\ h(x) = m(x^2 - 4) si \; x > 2 \end{cases}$.

Déterminer le nombre réel $m$ pour que $h$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ :

**Exercice 7 :**

1) Soit $a$ un réel. Déterminer suivant les valeurs de $a$, les limites éventuelles respectives en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 de la fonction $f_a : x \mapsto \frac{2x^2 - ax - 1}{x^3 - 1}$.

Cette fonction admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

2) Soit la fonction $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^4}}{x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de $g$ en 1.

c) Montrer que $g$ admet un prolongement par continuité en 0.

Soit $h$ ce prolongement ; étudier la dérivabilité de $h$ en 0.

**Exercice 8 :**

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f$, puis déterminer sa fonction dérivée.

1) $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ ; 2) $f(x) = (x-3)(-2x^3 + x + 1)$; 3) $f(x) = \frac{-4x+5}{2x+1}$;

4) $f(x) = (x+3)^2(-x+1)^3$; 5) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)^3$; 6) $f(x) = \frac{x-3}{-2x^3+x+1}$;

7) $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{-x+5}$; 8) $f(x) = \left(\frac{5x-2}{3-x}\right)^5$ ; 9) $f(x) = \frac{-2}{(2x+5)^3}$;

10) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{2x-4}$; 11) $f(x) = \frac{1}{2}x \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; 12) $f(x) = \sin^2(4x)$;

13) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-1}}{x^2-1}$; 14) $f(x) = \sqrt{\frac{-4x+5}{2x+1}}$; 15) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

**Exercice 9 :**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $x_0$.

1) $f(x) = x^2 - 3x - 1$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \frac{2-3x}{x-2}$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = \sqrt{2x-3}$, $x_0 = 2$.

**Exercice 10 :**

1) Soit $a$ et $b$ deux nombres réels. On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminer $a$ et $b$ pour que la représentation graphique de $f$ passe par $A(0;3)$ et admette en $A$ une tangente d'équation $y = 4x + 3$.

2) Soit $a$ un réel. On considère la fonction $g$ définie par : $g(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$. Déterminer $a$ pour que $(C_g)$ admette au point d'abscisse $x_0 = 1$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

3) Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 - 2x - 3$ et $(C_h)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.

a) Déterminer les coordonnées des points suivants : $A$ point en lequel $(C_h)$ admet une tangente horizontale ; $B$ point en lequel $(C_h)$ admet une tangente de coefficient directeur $-1$ et $C$ point en lequel $(C_h)$ admet une tangente de coefficient directeur 1.

b) Déterminer les équations réduites des tangentes aux points où $(C_h)$ coupe $(x'x)$.

**Exercice 11 :**

1) On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

a) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ de $f$.

b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 1 et en 2.

c) Tracer les demi-tangentes à $(C_f)$ aux points d'abscisses 1 et 2.

2) Soit $g$ la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 \; si \; x < 1 \\ g(x) = \frac{x-1}{x+1} \; si \; x \geq 1 \end{cases}$.

a) Démontrer que $g$ est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de $g$ en 1.

c) Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse 1.

**Exercice 12 :**

1) Soit la fonction $f$ définie sur $I = [-2; 3]$ par : $f(x) = 3x - x^3$.

a) Dresser le tableau de variations de $f$.

b) Indiquer le minimum et le maximum de $f$ sur les intervalles suivants :

$I_1 = \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$ ; $I_2 = [-2; 0]$ et $I$.

2) Soit la fonction $g$ définie sur $[-3; 2]$ par : $g(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

a) Dresser le tableau de variations de $g$.

b) Indiquer les extrémums de $g$ sur les intervalles suivants :

$I_1 = [-1; 2]$; $I_2 = [-3; -1]$; $I_3 = [-1; 1]$ et $I$.

**Exercice 13 :**

1) Soit $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$.

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f$.

b) Déterminer la dérivée de $f$ et étudier son signe.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) Soit $g(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

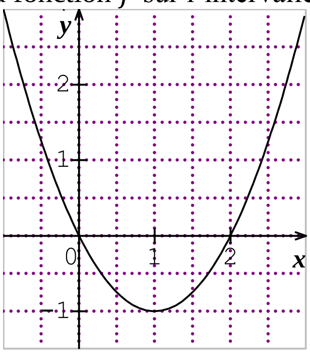
a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction $g$.

b) Déterminer la dérivée de $g$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

c) Dresser le tableau de variation de $g$ sur $[0; 2\pi]$.

**Exercice 14 :**

La courbe représentée est celle de la fonction dérivée $f'$ d'une fonction $f$ dérivable sur $I = [-1; 3]$.
Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ :




**Exercice 15 :**

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit.
Soit $x$ la quantité produite en tonnes ; $x$ est un nombre réel compris entre 0 et 13.
Le coût de production, exprimé en milliers de francs, est donné par : $p(x) = x^3 - 15x^2 + 76x$.
L'entreprise vend chaque tonne de sa production $40\ 000F$. La recette est donc, en milliers de francs,

donnée par : $r(x) = 40x$ et le bénéfice, en milliers de francs, est : $b(x) = p(x) - r(x)$.

1) Etudier les variations de la fonction $p$ sur $[0; 13]$ et tracer sa courbe représentative $(C)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 tonne en abscisse, 2 cm pour $100\ 000F$ en ordonnée).
2) Dans le même repère, tracer la droite d'équation $y = 40x$. Déterminer graphiquement la position de cette droite par rapport à la courbe $(C)$. En déduire les valeurs de $x$ pour lesquelles l'entreprise réalise effectivement un bénéfice.
3) Etudier les variations de la fonction $b$ sur $[0; 13]$. En déduire la production $x_0$ qui assure à l'entreprise un bénéfice maximal. Donner une valeur arrondie à $1\ 000$ près de ce bénéfice et le coût de production correspondant.

# Chap.6 : Angles orientés-Trigonométrie

**Exercice 1 :**

$A$, $B$ et $C$ sont des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ont respectivement pour mesures principales $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{6}$. Déterminer une mesure des angles : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$.

**Exercice 2 :**

$ABC$ est un triangle non rectangle inscrit dans un cercle $(\Gamma)$.

$D$ est le point d'intersection des tangentes à $(\Gamma)$ en $B$ et $C$. Soit $\alpha$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Déterminer, en fonction de $\alpha$, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.

**Exercice 3 :**

$[AB]$ est une corde d'un cercle $(C)$ de centre $O$. $M$ et $N$ sont deux points de $(C)$ n'appartenant pas au même demi-plan de frontière $(AB)$. On désigne par $\alpha$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

1) Déterminer, en fonction de $\alpha$, une mesure des angles $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA})$.

2) Exprimer $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

**Exercice 4 :**

1) On considère les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{61\pi}{10}$ et $(\vec{u}, 3\vec{w}) = -\frac{119\pi}{10}$.
   Démontrer que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

2) On considère les points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{2\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$.
   Démontrer que le triangle $ACD$ est un triangle rectangle (en $A$).

3) $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des points du plan tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{-2\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-5\pi}{12}$.
   Démontrer que les points $A$, $E$ et $C$ sont alignés.

**Exercice 5 :**

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ cinq points du plan tels que :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{23\pi}{6}[2\pi]$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{15}[2\pi]$.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC})$.

2) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB})$.

3) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC})$.
   Que peut-on en déduire pour le triangle $BEC$ ? (La figure n'est pas demandée.)

**Exercice 6 :**

Soit $A$ et $B$ deux points tels que $AB = 4\ cm$.

1) a) Construire le point $C$ tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.
   b) Construire le point $D$ tel que $ACD$ soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{17\pi}{3}$.
   c) Construire le point $E$ tel que $DE = 3\ cm$ et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \frac{-13\pi}{12}$.

2) Démontrer que les droites $(AB)$ et $(ED)$ sont parallèles.

3) Sur la même figure, construire le point $F$ tel que $A$, $F$ et $C$ soient alignés et $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}) = \frac{5\pi}{12}$.

4) Démontrer que les droites $(AB)$ et $(BF)$ sont perpendiculaires.

5) Calculer $AF$, $BF$ et $BC$.

**Exercice 7 :**

Sur le cercle trigonométrique $(C)$ muni d'un repère orthonormé direct et tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$. On considère les points $B$, $D$ et $C$ tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3}$.

1) a) Faire la figure.

b) Donner une mesure de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$.

c) Démontrer que le triangle $BCD$ est équilatéral.

d) Montre que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

e) Préciser une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ en fonction de $x$.

2) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x$ :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \text{ et } \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

3) Vérifier les deux égalités précédentes en utilisant les formules d'addition.

**Exercice 8 :**

1) $a$ et $b$ sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos a = \frac{1}{3}$ et $\sin b = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

a) Calculer $\sin a$, $\cos 2a$, $\sin 2a$, $\cos\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{2}$.

b) Vérifier que $\cos b = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

c) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$; en déduire $a+b$.

2) On donne : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

a) Trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

b) On pose :

$$A = cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}; \quad B = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}.$$

En remarquant que $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \pi$, calculer : $A$ et $B$.

3) $x$ est un nombre réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

b) Exprimer en fonction de $\cos 2x$ : $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$ et $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$.

**Exercice 9 :**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

b) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$;

c) $4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0$;

d) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

2) Résoudre dans $D$ les équations suivantes :

a) $\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = -1$ . $D = \mathbb{R}$;

b) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, $D = \mathbb{R}$;

c) $3\tan^2 x - 1 = 0$, $D = [-\pi; \pi[$;

d) $\tan^2 x + (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$, $D = [0; 2\pi[$.

**Exercice 10 :**

Résoudre dans $D$ les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$, $D = [0; 2\pi[$;

b) $\sin x - \cos x \leq 0$, $D = \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$, $D = [0; 2\pi[$;

d) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$;

e) $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D = ]-\pi; \pi]$;

f) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$, $D = ]-\pi; \pi]$;

g) $\cos x(2\sin x - 1) \leq 0$, $D = ]-\pi; \pi]$;

h) $|\tan x| \geq 1$, $D = \mathbb{R}$.

i) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$, $D = [0; 2\pi[$;

j) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$, $D = \mathbb{R}$.

k) $\cos x \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$. $D = ]-\pi; \pi]$;

l) $\cos x \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$. $D = [0; 2\pi[$;

**Exercice 11 :**

1) a) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

$(1-2\sin x)(\sqrt{3}-2\cos x) \geq 0$; $2\cos x - 1 \leq 0$.

b) En déduire la solution dans $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\frac{(1-2\sin x)(\sqrt{3}-2\cos x)}{2\cos x-1} \geq 0$.

2) Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

a) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation $x^2+2x-1=0$.

b) En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis $\tan\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

**Exercice 12 :**

1) a) Vérifier que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^2 + (1-\sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2X^2 + (1-\sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

2) Déduire de la question 1) b) la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3) Déduire de la question 1) c) la résolution dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation :

$2\cos^2 x + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

**Exercice 13 :**

On pose $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

1) a) Calculer $P(-\frac{1}{2})$ et en déduire une factorisation de $P$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, étudier le signe de $P(x)$.

2) a) Montrer que, pour tout réel $x$, on a $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

b) En déduire que pour tout réel $x$,

$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x = 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$.

c) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ : $\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x = 0$.

3) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation $\cos(3x) + \cos(2x) + \cos x < 0$.

**Exercice 14 :**

1) a) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation : $\cos 3x = \frac{1}{2}$ puis placer les points images sur le cercle trigonométrique.

b) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

2) a) Montrer que les réels $m = \cos\frac{\pi}{9}$; $n = \cos\frac{7\pi}{9}$; $p = \cos\frac{13\pi}{9}$ sont les solutions de l'équation :

$8x^3 - 6x - 1 = 0$ $(E)$.

b) Combien de solutions l'équation $(E)$ peut-elle avoir au maximum ?

c) Déduire de a) et b) que :

$8x^3 - 6x - 1 = 8(x-m)(x-n)(x-p)$ (1).

d) Quelles sont toutes les solutions de l'équation $(E)$ ?

3) Développer le second membre de l'égalité (1) et déduire en les valeurs des nombres suivants :

$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$.

$B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$.

$C = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$.

**Exercice 15 :**

1) En utilisant les formules d'addition, exprimer les sommes suivantes en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$ : $\cos(a+b)+\cos(a-b)$; $\cos(a+b)-\cos(a-b)$; $\sin(a+b)+\sin(a-b)$; $\sin(a+b)-\sin(a-b)$.

2) On pose : $a + b = p$ et $a - b = q$. Démontrer les égalités suivantes :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ; $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ;

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ; $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

3) Application : transformer $\cos x + \cos 3x$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

4) Résoudre de même :

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ puis $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

# Chap.7 : Etude de fonctions

**Exercice 1 :**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$.

1) Calculer $a$, $b$ et $c$ sachant que la courbe $(C)$ de $f$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(-3;0)$ et admet au point $A$ une tangente horizontale.
2) Etudier les variations de $f$ et construire $(C)$.
3) Etudier le signe de $f$ et tracer (sans nouveau calcul) la courbe $(C')$ de la fonction $g$ définie par $g(x) = |f(x)|$.

**Exercice 2 :**

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur chaque axe.
On désigne par $g$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par
$g(x) = \frac{x^2-5x+15}{x-2}$ et $\left(C_g\right)$ sa représentation graphique.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de $g$.
   b) Calculer les limites de $g$ aux bornes de l'ensemble de définition.
2) a) Vérifier que : pour tout $x$ de $D_g$, $g'(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de $g$.
3) a) Vérifier que : pour tout $x$ de $D_g$, $g(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$.
   b) En déduire que la droite la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x - 3$ est asymptote à $\left(C_g\right)$.
   c) Préciser la position relative de $\left(C_g\right)$ et $(\Delta)$.
4) a) Démontrer que $\left(C_g\right)$ admet le point $A(2;-1)$ comme centre de symétrie.
   b) Donner une équation de la tangente à $\left(C_g\right)$ au point d'abscisse 1.
   c) Construire $(\Delta)$, $(T)$ et $\left(C_g\right)$.
5) a) Tracer la droite d'équation $y = -7$.
   b) En déduire la résolution graphique de l'inéquation : $\frac{x^2-5x+15}{x-2} < -7$.

**Exercice 3 :**

$f$ est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left|\frac{x-3}{x-2}\right| + 1$.

1) Etudier le sens de variations de $f$.
2) Construire $\left(C_f\right)$ (on précisera la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à sa tangente à gauche et sa tangente à droite au point $A$ de $\left(C_f\right)$ d'abscisse 3).

**Exercice 4 :**

Soit $g$ la fonction définie sur $[-1;1]$ par $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1) Etudier la parité de $g$.
2) Etudier la dérivabilité de $g$ en 1.
3) Justifier la dérivabilité de $g$ sur $[0;1[$ et déterminer les variations de $g$ sur $[0;1]$.
4) Tracer la courbe représentative $(C_g)$ de $g$ sur $[-1;1]$ dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité : 5 $cm$. (On précisera la tangente à $(C_g)$ en $O$.)

**Exercice 5 :**

On donne la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
On note $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de $f$.
2) Déterminer les coordonnées du point $A$ d'intersection de $(C_f)$ avec l'axe des abscisses et le

point $B$ d'intersection de $(C_f)$ avec la première bissectrices.

a) Donner les équations des tangentes $(D_1)$ et $(D_2)$ à la courbe $(C_f)$ en $A$ et $B$ respectivement.

b) Etudier suivant les valeurs de $x$ le signe de chacune des expressions suivantes :
$f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$; $f(x)-\frac{1}{2}(x-3)$. En déduire les positions relatives de $(C_f)$ et $(D_1)$ d'une part et de $(C_f)$ et $(D_2)$ d'autre part.

3) Construire $(C_f)$.

4) Discuter graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$mx^2-x+m-1=0$ (où $m$ est un paramètre réel).

**Exercice 6 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\frac{(x+2)^2-|x+2|}{x-1}$ et $(C_f)$ sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de $f$ en $-2$. En déduire que $(C_f)$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse $-2$.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Déterminer les réels $a, b, c, a', b'$ et $c'$ tels que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ si $x\in[-2;+\infty[\setminus\{1\}$,
$f(x)=ax'+b'+\frac{c'}{x-1}$ si $x\in]-\infty;2]$.

b) Montrer que $(C_f)$ admet deux asymptotes obliques $(D_1)$ et $(D_1)$ dont on donnera les équations.

c) Construire les demi-tangentes au point d'abscisse $-2$, les droites $(D_1)$ et $(D_1)$ puis $(C_f)$.

**Exercice 7 :**

Le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé. Soit $f(x)=\cos 2x$.

1) Etudier $f$ et construire sa courbe $(C_f)$.

2) Déduire de $(C_f)$ la courbe des fonctions : $g(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; $h(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

**Exercice 8 :**

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit $f$ la fonction : $f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

1) Démontrer que $f$ est une fonction périodique de période $\pi$.

2) Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.
Démontrer que sur l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation : $f'(x)=0$ admet deux solutions : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

3) Etudier le signe de $\cos(-2x+\frac{\pi}{6})$ dans chacun des cas suivants :
$x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right]$, $x\in\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$.

4) En déduire le sens de variation de la restriction à $[0;\pi]$ de la fonction $f$.
Donner son tableau de variation. Calculer $f(0)$ et $f(\pi)$.

5) Démontrer que sur l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

6) Donner un tableau de valeurs de la restriction de $f$ à $[0;\pi]$.

7) Construire la représentation graphique de la restriction de $f$ à $[0;\pi]$.
Comment peut-on obtenir la représentation graphique de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

8) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation : $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$.

**Exercice 9 :**

Soit $f$ une fonction dont le tableau complet des variations est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty \nearrow -6 \searrow -\infty$ | $\Vert$ | $+\infty \searrow -2 \nearrow +\infty$ |

1) Préciser l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ puis déterminer les limites aux bornes de $D_f$.
2) Combien de fois la courbe $(C)$ de $f$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
3) La courbe coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Justifier la réponse.
4) On suppose que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
   a) En utilisant les données du tableau démontrer que : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} + \frac{2}{x+1}$.
   b) Montrer que le point $I(-1; -4)$ est centre de symétrie de $(C)$.

**Exercice 10 :**

**Partie A :**

Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$.
Vérifier que, pour tout réel $x$ : $P(x) = (x-1)(-x^2 + 5x - 8)$.

**Partie B :**

$f$ est la fonction telle que $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$ et $(C_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1) a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.
   b) Etudier les variations de $f$. (Vous vérifierez que pour tout $x$ de $D_f$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-2)^3}$)
2) Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $y = -x + 1$.
   a) Déterminer les coordonnées du point $A$ commun à $(C_f)$ et $(\Delta)$.
   b) Etudier la position de $(C_f)$ par rapport à $(\Delta)$.
   c) Soient, respectivement $M$ et $N$ les points de même abscisse $x$ de $(C_f)$ et $(\Delta)$. Calculer la distance $MN$ en fonction de $x$. Calculer la limite de $g(x) = f(x) - (-x + 1)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$ et interpréter le résultat obtenu, en ce qui concerne la distance $MN$.
3) Ecrire une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 0.
4) Construire $(\Delta)$, $(T)$ et $(C_f)$, après avoir calculé les images par $f$ de $-2; -1; 0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 3; 4$.

**Exercice 11 :**

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos^3(x)}$.
1) Trouver la limite de $f$ en $\frac{\pi}{2}^-$.
2) Montrer que sur $I$, $f'(x) = \frac{3\cos(2x)}{\cos^4(x)}$ et en déduire le tableau de variation de $f$.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions sur $I$. Calculer une valeur approchée à $10^{-3}$ près de ces solutions.
4) Tracer $(C_f)$ la courbe de $f$.

**Exercice 12 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + 2 + \tan x \ \ si -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + 4} \ si \ x \geq 0 \end{cases}$.
1) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0.
2) Déterminer les limites de $f$ en $-\frac{\pi}{2}$ et en $+\infty$.
3) En déduire les branches infinies.
4) Etudier les variations de $f$.
5) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{3}; \frac{-\pi}{4}\right[$, solution de l'équation $f(x) = 0$.
6) Tracer $(C_f)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

**Exercice 13 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x}{x-1}\ si\ x<0\\ x+\sqrt{x^2+x}\ si\ x\geq 0\end{cases}$, on note $(C_f)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Déterminer $D_f$ et les limites aux bornes de $D_f$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 0. Qu'en déduire pour $(C_f)$ ?

c) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $f$ et calculer $f'(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de $f$.

2) a) Montrer que $(C_f)$ admet une asymptote oblique $(D_1)$ en $+\infty$ et une asymptote $(D_2)$ en $-\infty$.

b) Préciser la position de $(C_f)$ par rapport à $(D_1)$ et $(D_2)$.

3) Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I=[0;+\infty[$.

Montrer que $g$ définit une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à préciser.

4) Construire $(D_1)$, $(D_2)$, $(C_f)$ et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

**Exercice 14 :**

Soit $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ et $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni du repère orthogonal $(O,I,J)$; $OI=4\ cm,\ \ OJ=2\ cm$.

1) Etudier la continuité de $f$.

2) Etudier la dérivabilité de $f$, en particulier en $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ et sur chaque intervalle où elle est dérivable.

3) Démontrer les équivalences suivantes :

a) $\sqrt{4x^2-1}+4x<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ;

b) $\sqrt{1-4x^2}-4x>0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2\sqrt{5}}\right[$.

c) En déduire le signe de $f'$.

4) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. En déduire le tableau de variation de $f$.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$. En déduire que la courbe $(C)$ admet deux asymptotes d'équations : $y=-x$ et $y=3x$. Construire $(C)$.

**Exercice 15 :**

**Partie A :**

On considère la fonction numérique $g$ définie par : $g(x)=\begin{cases}\frac{-x^3+2x^2-3x+2}{x^2+1}\ \ si\ \ x\leq 1\\ 3\sqrt{x^2-1}\ \ si\ \ x>1\end{cases}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_g$ de $g$ puis calculer les limites aux bornes de $D_g$.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de $g$ en $x_0=1$. Interpréter graphiquement ces résultats.

**Partie B :**

On considère la fonction numérique $f$ définie par : $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{3x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$ puis calculer les limites aux bornes de $D_f$.

a) Déterminer les réels $a,b$ et $c$ tels que : $\forall x\in D_f, f(x)=ax+b+\frac{c}{3x}$.

b) Montrer que la droite $(D)$: $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ est une asymptote oblique à $(C_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudier la position de la courbe $(C_f)$ par rapport à l' asymptote oblique $(D)$.

1) Calculer la fonction dérivée de $f$ puis dresser le tableau de variation de $f$.

2) Montrer que le point $I\left(0;-\frac{5}{3}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(C_f)$.

3) Donner l'équation de la tangente à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 2.

4) Tracer la courbe $(C_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

# Chap.8 : Suites numériques

**Exercice 1 :**

1) $(u_n)$ est une suite arithmétique telle que : $u_3 = -1$ et $u_7 = -11$.
   Déterminer la raison $r$ et le premier terme $u_0$ de cette suite.

2) $(v_n)$ est une suite géométrique telle que : $v_7 = \frac{1}{1080}$ et $v_{10} = \frac{25}{2197}$.
   Déterminer la raison $q$ et le premier terme $v_0$ de cette suite.

**Exercice 2 :**

1) Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   Déterminer le premier terme et la raison.

   a) $U_n = 4 - 3(n-1)$;  b) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ 5U_{n+1} = 5U_n - 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

2) Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   Déterminer le premier terme et la raison.

   a) $U_n = 2^{n+1}$;  b) $U_n = \frac{3^n}{2}$;  c) $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

**Exercice 3 :**

On considère la suite la suite $(U_n)$ définie par $U_n = 5 - 2n$.

1) Calculer $U_0$, $U_1$ et $U_2$.
2) Démontrer que $(U_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3) Que vaut $U_{100}$ ? Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{100}$.

**Exercice 4 :**

On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) Calculer $U_0$, $U_1$ et $U_2$.
2) Justifier que $(U_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3) Quel est son sens de variation ?
4) Exprimer $U_n$ en fonction de $n$. En déduire $U_{100}$.
5) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 5 :**

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2\ (pour\ tout\ n\ de\ \mathbb{N}) \end{cases}$.

1) Calculer $U_1$, $U_2$ et $U_3$.
2) Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_n - 3$.
3) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.
5) Calculer la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.
6) En déduire la somme $S'_n$ des $n$ premiers termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 6 :**

On donne la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = 5^n + 3 - n$.

1) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
2) Démontrer que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
On pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
3) On se propose de calculer la somme $S_n$.
a) $(v_n)$ est la suite définie par : $v_n = 5^n$.
On pose : $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique et en déduire l'expression de $S'_n$ en fonction de $n$.
b) $(w_n)$ est la suite définie par : $w_n = 3 - n$.
On pose : $S''_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$. Démontrer que $(w_n)$ est une suite arithmétique et en déduire l'expression de $S''_n$ en fonction de $n$.
c) Déduire des deux questions précédentes la somme $S_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 7 :**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$ et on pose $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$.
1) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$. En déduire que $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique et préciser la raison et le premier terme.
3) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
4) Exprimer en fonction de $n$ : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

**Exercice 8 :**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
2) Calculer en fonction de $n$ la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de cette suite.
3) Calculer la limite de la suite $(S_n)$.

**Exercice 9 :**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.
1) Calculer $u_0$, $u_1$et $u_2$.
2) Calculer $u_{n+3}$ en fonction de $u_n$; en déduire $u_{2000}$, $u_{2001}$ et $u_{2002}$.

**Exercice 10 :**

$(u_n)$ est une suite arithmétique. Calculer $u_0$ et $r$ puis $u_n$ sachant que :
- $(u_n)$ est croissante ;
- $u_1 + u_2 + u_3 = -9$ ;
- $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 99$.

**Exercice 11 :**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite numérique définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
1) Justifier que : pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
2) En déduire que : pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$.
3) Etudier la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 12 :**

Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ les suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$.
1) Soit $(u_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n + b_n$.
Montrer que la suite $(u_n)$ est constante.
2) Soit $(v_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = a_n - b_n$.
a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique convergente.
b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
3) Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers la même limite.

**Exercice 13 :**

1) Trois nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.
Leur produit est $\frac{8}{27}$ et leur somme $\frac{26}{9}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $1+\frac{x+1}{x-1}+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=0$.

**Exercice 14 :**

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de $500$€. Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de $2\%$ par rapport à l'année précédente.
On note par $(U_n)$ la suite des primes avec $U_1=500$.

1) Calculer $U_2$ puis $U_3$ (c'est-à-dire les primes versées par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année).
2) Exprimer $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$. En déduire la nature de la suite $(U_n)$.
3) Un ingénieur décide de rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
   a) Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire $U_{20}$).
   b) Calculer la somme totale $S$ des primes touchées sur les 20 années.

**Exercice 15 :**

La location annuelle initiale d'une maison se monte à $42\ 000\ F$. Le locataire s'engage à occuper les lieux durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats :

1) **Contrat n°1 :**
   Le locataire accepte chaque année une augmentation annuelle de $5\%$ du loyer de l'année précédente.
   a) Si $u_1$ est le loyer initial de la $1^{re}$ année, exprimer le loyer $u_n$ de la $n^{ième}$ année en fonction de $n$.
   b) Calculer le loyer la $7^e$ année.
   c) Calculer la somme payée, au total, au bout des 7 années d'occupation.
2) **Contrat n°2 :**
   Le locataire accepte chaque année une augmentation annuelle forfaitaire de $2\ 400\ F$.
   a) Si $v_1$ est le loyer initial de la $1^{re}$ année, exprimer le loyer $v_n$ en fonction de $n$.
   b) Calculer le loyer la $7^e$ année.
   c) Calculer la somme totale payée au bout des 7 années.
3) Conclure : quel contrat est le plus avantageux ?

# Chap.9 : Transformations du plan

**Exercice 1 :**

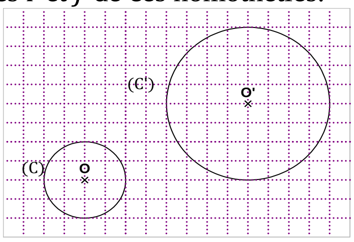
Soit $f_\alpha : P \longrightarrow P$ une application

$$M \longmapsto f(M) = M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = 2\alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

1) Montrer que $f_1$ est une translation.
2) Montrer $f_\alpha$ admet un unique point invariant pour $\alpha \neq 1$.
3) Montrer que $f_2$ est une application constante.
4) Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$, montrer $f_\alpha$ est homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

**Exercice 2 :**

Il existe deux homothéties transformant le cercle $(C)$ en $(C')$.
Construire les centres $I$ et $J$ de ces homothéties.




**Exercice 3 :**

On donne deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ et un point $A$.
Construire un triangle équilatéral $ABC$ tel que $B$ soit un point de $(D_1)$ et $C$ un point de $(D_2)$.
(Laisser les traits de construction sur la figure). Le problème a-t-il toujours une solution ?

**Exercice 4 :**

Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $(C)$. Pour tout point $M$ du cercle $(C)$, privé des points $A$ et $B$, on appelle $P$ le symétrique de $A$ par rapport à $M$.
1) Justifier que les droites $(OP)$ et $(MB)$ ont sécantes.
2) Quel ensemble décrit leur point d'intersection $M'$ lorsque $M$ décrit $(C)$ ?

**Exercice 5 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Reconnaître l'application $f$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérise, lorsque $f$ est définie analytiquement par :

1) $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = -x + 3 \\ y' = -y + 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x' = 3x + 6 \\ y' = 3y - 5 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x' = \frac{x+y}{2} \\ y' = \frac{x+y}{2} \end{cases}$.

**Exercice 6 :**

1) Soit $(\Delta) : 3x + y = 2$.

a) Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(\Delta)$.

b) Déterminer et construire :

l'image de $(C)$ : $x^2+y^2+2x-4y-5=0$ et l'image $(D) : x-2y-5=0$ par $S_\Delta$.

2) Déterminer l'expression analytique de la rotation $r$ de centre $I(2;1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

**Exercice 7 :**

Dans un plan rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points :

$A(2;-3)$, $B(4;1)$ et le vecteur $\vec{v}(-1;3)$.

1) a) Trouver l'expression analytique de $h_{(A,2)}$.

b) Trouver l'expression analytique de $h_{(B,-3)}$.

c) Trouver l'expression analytique de $t_{\vec{v}}$.

2) Démontrer que $h_{(B,-3)} \circ h_{(A,2)}$ est une homothétie que vous préciserez.

3) a) Démontrer que $h_{(A,2)} \circ t_{\vec{v}}$ est une homothétie $f$.

b) Démontrer que $t_{\vec{v}} \circ h_{(A,2)}$ est une homothétie $g$.

**Exercice 8 :**

$ABCD$ est un carré direct de centre $O$.
Déterminer la transformation $f$ proposée et construire l'image du carré $ABCD$ par $f$.
1) $f=S_{AC}\circ S_{AB}$. 2) $f=S_{DC}\circ S_{AC}$. 3) $f=S_{DC}\circ S_{AB}$. 4) $f=S_{BD}\circ S_{AC}$.
5) $f=r_{\left(C,\frac{-\pi}{2}\right)}\circ r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$. 6) $f=r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\circ r_{\left(C,\frac{\pi}{2}\right)}$. 7) $f=S_{AC}\circ r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$. 8) $f=t_{2\overrightarrow{AD}}\circ r_{\left(A,\frac{-\pi}{2}\right)}$.

**Exercice 9 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On appelle $f$ la composée $s'\circ s$ des deux réflexions $s$ et $s'$ d'axes respectifs les droites $(D)$ et $(D')$.
Déterminer la transformation $f$ sachant que des équations cartésiennes de $(D)$ et $(D')$ sont respectivement :

1) $(D) : 2x+y-1=0$, $(D') : x-2y+7=0$.
2) $(D) : 3x-y=0$, $(D') : 3x-y+4=0$.
3) $(D) : x-\sqrt{3}y+1=0$, $(D') : x-y+1=0$.

**Exercice 10 :**

$ABCD$ est un carré direct de centre $O$.
1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
a) $S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$; b) $t_{2\overrightarrow{AB}}\circ S_A$.
2) Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer $R\circ S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$.
3) Soit $F$ un point intérieur au carré distinct de $O$. Construire un triangle équilatéral $FGH$ tel que $G$ et $\{H\}=(AB)\cap(CD)$. On donnera un programme de construction de ces points.

**Exercice 11 :**

1) $ABCD$ est un rectangle. Dans chacun des cas suivants déterminer la droite $(\Delta)$ telle que :
a) $t_{\overrightarrow{AB}}=S_{(\Delta)}\circ S_{(AD)}$; b) $t_{\overrightarrow{AB}}=S_{(\Delta)}\circ S_{(BC)}$; c) $t_{\overrightarrow{AB}}=S_{(AD)}\circ S_{(\Delta)}$; d) $t_{\overrightarrow{AB}}=S_{(BC)}\circ S_{(\Delta)}$.
2) $ABC$ est un triangle équilatéral de sens direct et de centre $O$.
Dans chacun des cas suivants déterminer la droite $(\Delta)$ telle que :
a) $r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)=S_{(\Delta)}\circ S_{(AB)}$; b) $r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)=S_{(OA)}\circ S_{(\Delta)}$;
c) $r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)=S_{(OA)}\circ S_{(\Delta)}$; d) $r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)=S_{(\Delta)}\circ S_{(OA)}$.

3) Déterminer les applications suivantes (même triangle $ABC$).

a) $r\left(B,\frac{\pi}{3}\right)\circ r\left(C,\frac{\pi}{3}\right)$ ; b) $r\left(B,\frac{\pi}{3}\right)\circ r\left(A,\frac{-\pi}{3}\right)$ ; c) $t_{\overrightarrow{AB}}\circ r\left(A,\frac{\pi}{3}\right)$ ; d) $r\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)\circ r\left(C,\frac{\pi}{3}\right)$.

**Exercice 12 :**

Soit $(D_1)$ et $(D_2)$ deux droites parallèles du plan. $A$ et $B$ étant deux points situés entre $(D_1)$ et $(D_2)$.
Préciser la position de $P\in(D_1)$ et $Q\in(D_2)$ tels que $AP+PQ+QB$ soit minimale.
On pourra considérer les points $A'$ et $B'$ tels que $A'=S_{(D_1)}(A)$ et $B'=S_{(D_2)}(B)$.

**Exercice 13 :**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés du plan. On désigne par $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $(AC)$ et on pose $s(B)=D$; on suppose de plus que $AB=AC$.
Soit enfin $f$ une isométrie du plan telle que $f(A)=A$, $f(B)=C$ et $f(C)=D$. On pose $g=s\circ f$.
1) Déterminer par $g$ les images des points $A$, $B$ et $C$ et du milieu $I$ de $[BC]$.
2) Expliciter $f$. En déduire que $f$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

**Exercice 14 :**

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ de côté $a$ tel que :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}$ et le triangle isocèle $ADA'$ rectangle en $D$ tel que $\left(\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{DA}\right)=\frac{\pi}{2}$.
Soit $I$ le point d'intersection des droites $(AA')$ et $(BD)$ et $O$ le milieu de $[AA']$.
1) Faire une figure en prenant $AB=a=4\,cm$.
2) Soit $h$ l'homothétie de centre $I$ qui transforme $A$ en $A'$.
   a) Déterminer l'image $C'$ de $C$ par $h$.
   b) Montrer que la droite $(BD)$ est la médiatrice de $[A'C']$.
      En déduire la nature du quadrilatère $ACC'A'$.
   c) Comparer les distances $DC$ et $DC'$, puis les angles orientés $\left(\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{DA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DC'}\right)$.
3) Soit $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On admettra que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer les images de $A$ et de $D$ par $r$.
   b) Montrer que l'image de $B$ par $r$ est le point $C'$ défini au 2).
   c) Comparer les longueurs $A'C'$ et $BD$.
4) a) Exprimer les longueurs $AC$ et $BD$ en fonction de $a$.
   b) Déterminer le rapport $k$ de l'homothétie $h$.

**Exercice 15 :**

$ABC$ est un triangle équilatéral direct. $(\Gamma)$ est son cercle circonscrit. La médiatrice de $[BC]$ coupe $(\Gamma)$ en $A$ et $D$. On appelle $E$ le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(AC)$.
1) a) Démontrer que le triangle $BCE$ est isocèle.
   b) En déduire que $E$ est le symétrique de $A$ par rapport à $C$.
2) a) Pourquoi le triangle $ABD$ est-il rectangle direct ?
   b) Démontrer que l'on a : $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})=\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.
3) a) Déterminer les transformations $S_{BD}\circ S_{DC}$ et $S_{CA}\circ S_{AB}$.
   b) Soit $(D)$ la parallèle à $(DC)$ menée par $A$. Démontrer :
      $S_{BD}\circ S_{DC}=S_{DC}\circ S_{DA}$; $S_{CA}\circ S_{AB}=S_{DA}\circ S_{(D)}$.
   c) On pose : $t=S_{BD}\circ S_{DC}\circ S_{CA}\circ S_{AB}$.
      Déterminer la transformation $t$, montrer que l'image $A'$ de $A$ par $t$ est invariante par la réflexion $S_{BD}$ puis retrouver ainsi le résultat du 1) a).

# Chap.10 : Dénombrement

**Exercice 1 :**

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{7!4!}{3!5!}$ ; b) $\frac{3\times4!}{(3!)^2}$ ; c) $\frac{C_{n+1}^{p}}{C_n^p}$ .

d) $\frac{n!}{(n-2)!}$ ; e) $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$ ; f) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}$ .

2) Calculer :

a) $A_{14}^3$; b) $A_{724}^1$; c) $A_{827}^0$;

d) $C_{52}^{49}$; e) $\binom{1709}{1706}$; f) $\frac{C_4^2\times C_8^3}{C_{10}^6}$ .

**Exercice 2 :**

En utilisant la relation $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour $0\leq p\leq n$, montrer que :

1) $C_n^p=C_n^{n-p}$.

2) $C_{n+1}^{p+1}=C_n^{p+1}+C_n^p$.

**Exercice 3 :**

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

a) $A_n^3=6n$;

b) $C_n^3=220$.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

a) $C_n^5=C_n^7$;

b) $C_{n-1}^{n-5}=3\times C_{n-3}^{n-7}$.

**Exercice 4 :**

Soit $A$ l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont pairs.

Soit $B$ l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 qui sont divisibles par 3.

1) Donner les éléments de $A\cap B$ et $A\cup B$.

2) Décrire un ensemble $C$ qui soit inclus dans $B$.

3) Décrire $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

4) Trouver un ensemble $D$ tel que $A$ et $D$ soient disjoints.

5) On note $D=A\cap B$. Décrire l'ensemble $B\times D$. Quel est son cardinal ?

**Exercice 5 :**

On pose : $E=\{1;2;3;4;5;6\}$.

1) Combien y a-t-il de triplets d'éléments de $E$ ?

2) Illustrer par un arbre de choix.

**Exercice 6 :**

1) Avec la formule du binôme de Newton, développer :

a) $(a-1)^5$.

b) $\left(1-\sqrt{3}\right)^6$.

2) a) Quel est le coefficient de $x^5$ dans $(x^2+1)^7$ ?

b) Quel est le coefficient de $x^5$ dans $(x+2)^{12}$ ?

**Exercice 7 :**

Dans un lycée, une enquête concernant trois revues notées $a$, $b$ et $c$, donne les résultats suivants :

sur les $100$ lycéens interrogés, $57$ lisent $a$, $42$ lisent $b$, $38$ lisent $c$, $22$ lisent $a$ et $b$, $14$ lisent $b$ et $c$,

$16$ lisent $a$ et $c$, $8$ lisent $a$, $b$ et $c$. En utilisant un diagramme, calculer le nombre de personnes :

1) qui ne lisent que $a$ et $b$, que $b$ et $c$, que $a$ et $c$;
2) qui ne lisent que $a$, que $b$, que $c$;
3) qui ne lisent aucune des trois revues.

**Exercice 8 :**
Combien y a-t-il d'anagrammes sur les mots suivants :
1) TROU ?
2) STATISTIQUE ?
3) MISSISSIPI ?

**Exercice 9 :**
On veut ranger 20 livres sur une même étagère.
1) Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2) Parmi ces livres il y a 8 romans, 7 livres de mathématiques et 5 livres de sciences physiques.
Combien y a-t-il de rangements possibles si les livres d'une même catégorie sont rangés côte à côte ?

**Exercice 10 :**
Pour ouvrir un coffre-fort, on doit composer un code secret de quatre chiffres sur un tableau informatique de dix chiffre : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9.
1) Déterminer le nombre de codes possibles.
2) Combien y a-t-il de codes commençant par 2 ?
3) Combien y a-t-il de codes ne contenant pas 0 ?

**Exercice 11 :**
Une classe de terminale comprend 20 filles et 15 garçons.
Pour participer au concours Génie en herbe du lycée, on veut former une équipe de 5 élèves.
1) Combien d'équipes peut-on former ?
2) Déterminer le nombre d'équipes comportant :
  a) exactement 3 filles.
  b) aucun garçon.
  c) au moins un garçon.

**Exercice 12 :**

Dans une assemblée de 12 personnes, huit hommes et quatre femmes, on veut constituer un comité de trois personnes avec les fonctions de président, secrétaire et trésorier.

1) De combien de manières peut-on former ce comité, une même personne ne pouvant cumuler plusieurs fonctions ?

2) De combien de manières peut-on former ce comité si on veut qu'une femme soit secrétaire ?

**Exercice 13 :**

On considère un jeu de 32 cartes.
Déterminer le nombre de mains différentes de 5 cartes dans les cas suivants :
1) les 5 cartes sont quelconques ;
2) les 5 cartes sont de la même ≪ couleur ≫;
3) il y a exactement 2 Rois parmi les 5 cartes ;
4) il y a au moins 3 Dames parmi les 5 cartes ;
5) il y a au plus 2 Valets parmi les 5 cartes.

**Exercice 14 :**

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges, indiscernables au toucher.
1) On tire simultanément 3 boules de l'urne.
Calculer le cardinal de chacun des évènements suivants :
A : « obtenir un tirage unicolore » ;
B : « obtenir exactement 2 boules blanches » ;
C : « ne pas obtenir de boule noire ».
2) On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne.
Calculer le cardinal des évènements suivants :
D : « obtenir 2 boules blanches suivies d'une rouge » ;
E : « obtenir 2 boules blanches et une boule rouge ».

**Exercice 15 :**

Pour répondre à un sondage on doit classer 5 chanteurs pris dans une liste de 20.
Parmi les 20 chanteurs, il y a 12 hommes, 8 femmes et 6 étrangers dont 2 femmes.
1) Calculer le nombre de classements possibles.
2) Calculer le nombre de classements sachant que :
a) 2 femmes occupent les deux premières places, suivies de 3 hommes.
b) On a choisi exactement 2 femmes.
c) il y a au moins deux femmes choisies.
3) Calculer le nombre de classements contenant au moins un étranger.
4) Calculer le nombre de classements contenant exactement un étranger et 2 femmes.

## Chap.11 : Statistique

**Exercice 1 :**

Une étude démographique sur la répartition en classes d'âges de la population d'une commune adonné les résultats suivants :

| Age | $[0;12[$ | $[12;20[$ | $[20;35[$ | $[35;48[$ | $[48;54[$ | $[54;60[$ | $[60;75[$ | $[75;85[$ | $[85;100[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 900 | 1200 | 3750 | 4200 | 2700 | 600 | 1230 | 300 | 120 |

1) Tracer l'histogramme des fréquences.
2) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
3) Déterminer graphiquement la médiane de la série.
4) Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série.

**Exercice 2 :**

Chez un individu normal, la sécrétion d'insuline $y_i$ dépend de la concentration $C_i$ en glucose sanguin, comme l'indique le tableau suivant :

| $C_i$ | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 0,2 | 1 | 3 | 4,6 | 5,6 | 6 | 6 |

1) Représenter le nuage de points ($C_i$ ;$y_i$) et déterminer le point moyen G de ce nuage.
2) Construire G sur le même graphique.

**Exercice 3 :**

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'une mutuelle d'assurances au cours de 8 années consécutives.

| Rang de l'année $(x_i)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de milliers d'adhérents $(y_i)$ | 27 | 42 | 54 | 65 | 75 | 81 | 89 | 95 |

1) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ associé à cette série double dans le plan muni d'un repère orthogonal tel que :
   - en abscisse, 2 cm représentent 1 année ;
   - en ordonnée, 1 mm représente 1 000 adhérents.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen $G$ du nuage. Placer $G$.
3) On ajuste ce nuage par la droite $(\Delta)$ d'équation : $y = 9{,}56x + 22{,}98$.
   a) Vérifier que cette droite passe par $G$.
   b) Construire cette droite sur la représentation graphique de la première question.
4) En utilisant l'ajustement précédent, quel nombre d'adhérents peut-on estimer pour l'année de rang 10 ?

**Exercice 4 :**
Le tableau suivant montre l'évolution d'un parc automobile de 1960 à 1990 en ce qui concerne les voitures particulières :

| Année | Voitures particulières ( en milliers ) |
|---|---|
| 1960 | 4700 |
| 1965 | 8320 |
| 1970 | 11860 |
| 1975 | 15180 |
| 1980 | 18440 |
| 1985 | 21090 |
| 1990 | 23000 |

1) Construire le nuage de points représentant la série statistique double ci-dessous.
2) Déterminer une équation de la droite Δ passant par le deuxième et le sixième point du nuage. Tracer Δ.
3) En utilisant l'équation de Δ déterminée en 2), évaluer l'importance de ce parc automobile en 1995.

**Exercice 5 :**
Dans un groupe de dix élèves de première, on a relevé pour chaque élève sa taille t en cm et sa pointure de chaussure p. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 161 | 163 | 169 | 166 | 152 | 167 | 180 | 184 | 157 | 175 |
| $p_i$ | 39 | 38 | 40 | 38 | 36 | 40 | 42 | 45 | 37 | 43 |

1) Construire le nuage de points $(t_i ;p_i)$.
2) Tracer une droite passant <<au plus près>> de tous les points du nuage.
3) Déterminer une équation de la droite tracée à la question 2).
4) L'équation déterminée à la question 3) fournit une relation entre t et p.
A partir de cette relation, évaluer :
a) La pointure d'un élève mesurant 1,60 m ;
b) La taille d'un élève dont la pointure est 44.

**Exercice 6 :**
Les chiffres d'affaires d'une entreprise à la fin de chacune de ses huit premières années sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ils sont exprimés en millions de francs :

| Années | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffres d'affaires | 5 | 11 | 12 | 14 | 17 | 18 | 21 | 24 |

1) Représenter ce nuage de points (années en abscisse, chiffres d'affaires en ordonnée).
2) Calculer le point moyen $G_1$ du nuage partiel constitué des quatre premiers points.
Placer $G_1$ sur le graphique.
3) Calculer le point moyen $G_2$ du nuage partiel constitué des quatre derniers points.
Placer $G_2$ sur le graphique.
4) Déterminer une équation de la droite Δ passant par $G_1$ et $G_2$. Tracer Δ.
La droite Δ ainsi obtenue s'appelle **droite de Mayer.**
5) En utilisant l'équation de Δ déterminée en 4), évaluer le chiffre d'affaires prévisible pour la $9^e$ année.

**Exercice 7 :**
A chacune des 10 séances de production d'une marque de savon de toilette, on a relevé le nombre de morceaux de savon et la masse en grammes d'une essence entrant dans la composition de ce savon. Les résultats consignés dans le tableau sont ci-dessous.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Masse d'essence $(x_i)$ | 18 | 23 | 30 | 45 | 50 | 68 | 78 | 100 | 120 | 150 |
| Nombre de morceaux de savon $(y_i)$ | 84 | 10 | 128 | 180 | 192 | 260 | 292 | 380 | 440 | 560 |

1) Construire le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ associé à cette série double.
2) Déterminer et placer le point moyen du nuage.
3) Déterminer et tracer la droite d'ajustement par la méthode de Mayer.
4) Estimer la masse d'essence qu'il faudra utiliser pour produire 1 000 morceaux de savon.

**Exercice 8 :**

On a mesuré expérimentalement la distance nécessaire à l'arrêt d'une automobile en fonction de sa vitesse ; on a obtenu le tableau de résultat suivant :

| N° de l'essai | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ : vitesse (en km/h) | 33 | 33 | 49 | 49 | 65 | 79 | 93 |
| $Y$ : distance (en mètres) | 6,50 | 5,30 | 14,45 | 11,23 | 20,25 | 41 | 50,41 |

1) Représenter graphiquement le nuage de points $M(x; y)$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 1 cm pour 10 km/h en abscisses et 1 cm pour 5 mètres en ordonnées.
2) Un ajustement affine, pour ce nuage, n'est pas satisfaisant. On propose la méthode suivante.
   a) On pose $z = \sqrt{y}$.
      Recopier le tableau suivant en le complétant ; les résultats seront arrondis avec deux décimales.

| N° de l'essai | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 33 | 33 | 49 | 49 | 65 | 79 | 93 |
| $Y$ | 2,55 | | | | | | |

   b) Représenter le nuage de points $N(x; z)$ dans un repère orthogonal distinct du précédent, d'unité graphique 1 cm pour 10 lm/h en abscisses et 1 cm pour 1 unité en ordonnées.
   c) Calculer les coordonnées du point moyen $G_1$ des quatre premiers points $N$, puis les coordonnées du point moyen $G_2$ des trois autres points $N$.
3) a) Vérifier que la droite $(G_1; G_2)$, droite d'ajustement du nuage de des points $(x; z)$ a pour équation : $z = \frac{3}{38}(x - 3)$.
   b) En déduire l'expression de $y$ en fonction de $x$ et construire la courbe représentative de cette fonction dans le premier repère.
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance prévisible de freinage pour une voiture roulant à 130 km/h.

**Exercice 9 :**

Le tableau suivant indique la distribution de 50 logements en fonction de leur nombre $X$ de pièces principales et leur surface $Y$ en $cm^2$.

| Y / X | 30 | 50 | 70 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 6 | 6 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 16 | 5 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |

1) Déterminer $n_{34}$ et $n_{43}$. Donner leur signification.
2) Déterminer les distributions marginales associées à X et à Y.
3) Calculer les fréquences marginales des deux caractères « nombre de pièces principales » et « surface ».
4) Construire le nuage des points, représentant la série statistique double donnée.
5) Déterminer et placer le point moyen du nuage.

**Exercice 10 :**

Les élèves d'un établissement scolaire se répartissent selon le tableau ci-dessous :

| Niveau / Régime | $6^{è}$ | $5^{è}$ | $4^{è}$ | $3^{è}$ | $2^{de}$ | $1^{re}$ | $T^{le}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Externe | 18 | 24 | 42 | 30 | 21 | 18 | 2 |
| Demi-pensionnaire | 24 | 14 | 0 | 24 | 18 | 7 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Interne | 3 | 5 | 10 | 7 | 8 | 15 | 35 |

1) a) Quelle est la population étudiée ?
   b) Quels en sont les individus ?
   c) Quel est l'effectif total ?
2) a) Quelles sont les variables étudiées ?
   b) Définir les distributions marginales suivant chacune des variables.
   c) Définir les dix distributions conditionnelles en précisant dans chaque cas la variable et la modalité en cause.
3) a) Porter dans un même tableau les fréquences de chaque couple de modalités et les fréquences marginales des modalités de chacune des variables.
   b) Calculer les fréquences conditionnelles des modalités de la variable « niveau » liées par la modalité « externe », ainsi que les fréquences conditionnelles des modalités de la variable « régime » liées par la modalité « classe de troisième ».

**Exercice 11 :**

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée, l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 22 | 18 | 20 | 20 | 16 | 22 | 26 | 22 | 18 | 22 |
| y | 3,2 | 2,8 | 3,2 | 3,6 | 2,8 | 2,8 | 3 | 2,8 | 3 | 3 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 18 | 26 | 20 | 26 | 18 | 18 | 22 | 26 | 22 | 20 |
| y | 3,4 | 3,6 | 3,2 | 3 | 3 | 3,4 | 2,8 | 2,6 | 3 | 3,2 |

1) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3) Représenter le nuage de points associé à cette série double.

**Exercice 12 :**

Le tableau suivant donne la répartition (en pourcentage) de la population de 20 ans et plus par diplôme et par âge, en 1990 :

| | $[20;25[$ | $[25;40[$ | $[40;50[$ | $[50$ et plus$[$ |
|---|---|---|---|---|
| Aucun | 3 | 1 | 0 | 0 |
| CFEE | 2 | 9 | 7 | 30 |
| BFEM | 4 | 12 | 5 | 7 |
| BAC | 1 | 4 | 2 | 3 |
| Diplôme universitaire | 1 | 5 | 3 | 2 |

1) Reproduire ce tableau et le compléter par les fréquences marginales.
2) Dresser le tableau donnant la répartition de la population selon l'âge pour chaque type de diplôme, ainsi que la répartition de la population totale selon les quatre tranches d'âge.

**Exercice 13 :**

On considère la répartition des chefs d'exploitation par âge et par taille de S.A.U. (surface agricole utile) donnée par le tableau suivant :

| X \ Y | $[0;10[$ | $[10;30[$ | $[30;50[$ | $[50;100[$ |
|---|---|---|---|---|
| $[15;25[$ | 2 | 5 | 1 | 3 |
| $[25;35[$ | 21 | 18 | 19 | 29 |
| $[35;45[$ | 40 | 18 | 33 | 59 |
| $[45.55[$ | 117 | 55 | 67 | 124 |
| $[55;65[$ | 118 | 70 | 60 | 58 |

X : « âge » en années ; Y : « surface » en hectares.

1) Combien y a-t-il de chefs d'exploitation ayant moins de 45 ans et dont l'exploitation fait plus de 30 hectares de S.A.U ?
2) Reproduire ce tableau le tableau en le complétant avec les effectifs marginaux.
3) Quel est l'âge moyen des chefs d'exploitation ?
4) Quelle est la surface agricole utile moyenne ?

**Exercice 14 :**

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

| Y \ X | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | a | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 125 | 0 | 7 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 175 | 2 | 0 | 9 | 8 | 15 | 4 |
| 225 | 0 | 1 | 0 | 3 | b | 1 |

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$.

2) Dans la suite, on suppose que a = 40 et b = 20. A chaque valeur $x_i$ de X on associe la moyenne $m_i$ de la série conditionnelle : Y/ X = $x_i$. On obtient ainsi la série double (X , M). Déterminer cette série. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

**Exercice 15 :**

Une étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre :

1) Déterminer l'effectif total des accidents enregistrés lors de cette étude.

| Cause des accidents : X \ Type de transport : Y | Particuliers $y_1$ | Transporteurs en commun $y_2$ |
|---|---|---|
| Accidents liés à l'excès de vitesse : $x_1$ | 440 | 360 |
| Accidents à cause mécanique : $x_2$ | 110 | 90 |

2) Déterminer les fréquences conditionnelles $f_{y_2/x_1}$ et $f_{x_2/y_2}$.

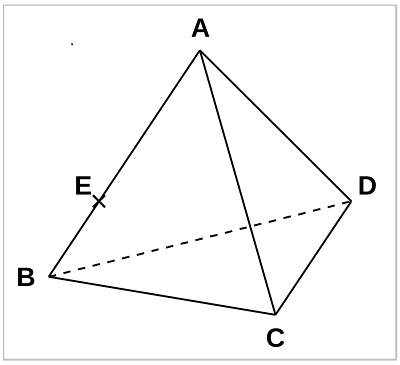
3) Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ et $f_{2}$.

# Chap.12 : Compléments de géométrie dans l'espace

**Exercice 1 :**

On donne un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 6 cm.

Soit $E$ le point du segment $[AB]$ défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.




1) Dessiner en perspective la section de ce tétraèdre par le plan passant par $E$ et parallèle au plan $(BCD)$. Quelle est la nature de cette section ?

2) Représenter la section obtenue en vraie grandeur.

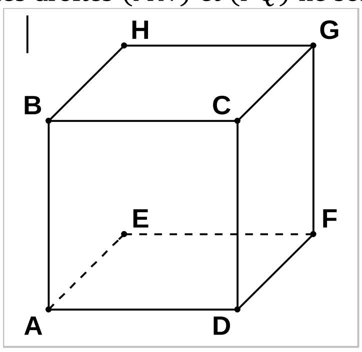
**Exercice 2 :**

On considère un cube $ABCDEFGH$.

Soient $M$, $N$, $P$ et $Q$ quatre points situés sur les arêtes comme indiqué sur la figure.

1) Construire la section du cube par le plan $(MPQ)$.

2) Montrer que les droites $(MN)$ et $(PQ)$ ne sont pas coplanaires.




**Exercice 3 :**

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. $I$ est le milieu de $[BC]$.

Donner la mesure en radians de l'angle $\widehat{AID}$.

**Exercice 4 :**

$ABCDEFGH$ est un cube. $I$ et $J$ sont les centres respectifs des carrés $ABCD$ et $EFGH$. Démontrer que :

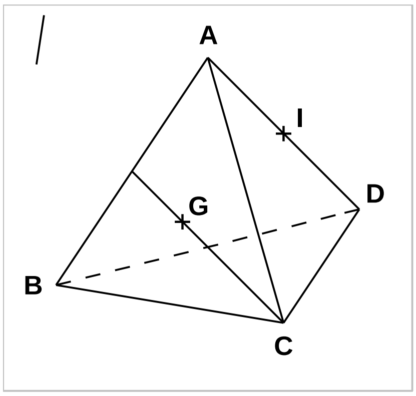
1) $(IJ)$ est orthogonale aux plans $(ABC)$ et $(EFG)$.

2) Les plans $(AEC)$ et $(BDF)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 5 :**

$ABCD$ est un tétraèdre. $I$ est le milieu de $[AD]$ et $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

1) Démontrer que la droite $(IG)$ coupe le plan $(BCD)$ en un point $E$ tel que le quadrilatère $BDCE$ est un parallélogramme.




**Exercice 6 :**

La pyramide $SABCD$ a une base carrée $ABCD$ de côté $a$. Le point $S$ se trouve sur la perpendiculaire au plan $(ABC)$, au centre $O$ du carré $ABCD$ et les faces $SAB$, $SBC$, $SCD$, $SDA$ sont toutes équilatérales.

1) Dessinez le triangle $SBD$ en vraie grandeur ( on prendra $a = 5$ cm ).
Calculer la distance du point $S$ au plan $ABC$ en fonction du côté $a$ du carré $ABCD$.

2) Calculer le volume du tétraèdre $SABCD$ en fonction de $a$.

**Exercice 7 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

1) $\vec{u}(1; 5; 3)$ et $\vec{v}(0; 4 - 1)$; 2) $\vec{u}(7; 9; 0)$ et $\vec{v}(-1; 2; -4)$;

3) $\vec{u}(-2; -2; -1)$ et $\vec{v}(3; 5; 7)$; 4) $\vec{u}(5; 0; 1)$ et $\vec{v}(-2; 8; 0)$.

**Exercice 8 :**

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est une base orthonormée directe.

Déterminer les vecteurs :

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{GF}$;

4) $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{HC}$; 5) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH}$; 6) $\overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{BF}$.