

NOUVEAUX
PROGRAMMES

1^{re}

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

2^e édition



1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

1^{re}

NOUVEAUX
PROGRAMMES

2^e édition

Konrad Renard

Professeur de mathématiques
au lycée René Cassin de Gonesse



Du même auteur chez le même éditeur

Retrouvez tous les livres du même auteur chez le même éditeur
sur www.editions-ellipses.fr



ISBN 9782340-054547

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021

8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Tout en préparant les élèves à la spécialité Mathématiques de l'épreuve du baccalauréat, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'optique d'une poursuite d'études supérieures ayant une composante importante en mathématiques.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 5 chapitres.

1. Equations
2. Suites numériques
3. Fonctions
4. Géométrie
5. Probabilités

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- Des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement.
- Des exercices pour préparer l'examen de fin d'année, en cas d'abandon de la spécialité.
- Des exercices pour se préparer à la poursuite des études dans cette spécialité. Ces exercices sont plus difficiles, mêlent plusieurs notions ou abordant des thèmes qui ne sont plus au programme de première mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études.
- Les corrigés détaillés de tous les exercices.

Je remercie Anne LE VAN RA et Antoine BOUTROIS pour leurs relectures attentives.

Table des matières

1	Equations	7
1.1	Polynômes du second degré	7
1.1.1	Point de cours	7
1.1.2	Exercices d'application de cours	8
1.1.3	Exercices d'approfondissement	10
1.2	Equations du second degré	18
1.2.1	Point de cours	18
1.2.2	Exercices d'application de cours	18
1.2.3	Exercices d'approfondissement	21
1.3	Inéquations	26
1.3.1	Point de cours	26
1.3.2	Exercices d'application de cours	26
1.3.3	Exercices d'approfondissement	27
1.4	Préparer l'examen	32
1.5	Aller plus loin	39
2	Suites numériques	47
2.1	Suites numériques	47
2.1.1	Point de cours	47
2.1.2	Exercices d'application de cours	48
2.1.3	Exercices d'approfondissement	49
2.2	Suites arithmétiques	56
2.2.1	Point de cours	56
2.2.2	Exercices d'application de cours	56
2.2.3	Exercices d'approfondissement	59
2.3	Suites géométriques	65
2.3.1	Point de cours	65
2.3.2	Exercices d'application de cours	65
2.3.3	Exercices d'approfondissement	66
2.4	Sommes des termes d'une suite	91
2.4.1	Point de cours	91

2.4.2	Exercices d'application de cours	92
2.4.3	Exercices d'approfondissement	94
2.5	Préparer l'examen	110
2.6	Aller plus loin	116
3	Fonctions	135
3.1	Nombre dérivé	135
3.1.1	Point de cours	135
3.1.2	Exercices d'application de cours	135
3.1.3	Exercices d'approfondissement	141
3.2	Fonction dérivée	143
3.2.1	Point de cours	143
3.2.2	Exercices d'application de cours	144
3.2.3	Exercices d'approfondissement	146
3.3	Variations d'une fonction	152
3.3.1	Point de cours	152
3.3.2	Exercices d'application de cours	152
3.3.3	Exercices d'approfondissement	155
3.4	Fonction exponentielle	165
3.4.1	Point de cours	165
3.4.2	Exercices d'application de cours	165
3.4.3	Exercices d'approfondissement	167
3.5	Fonctions trigonométriques	186
3.5.1	Point de cours	186
3.5.2	Exercices d'application de cours	187
3.5.3	Exercices d'approfondissement	189
3.6	Préparer l'examen	200
3.7	Aller plus loin	209
4	Géométrie	233
4.1	Produit scalaire	233
4.1.1	Point de cours	233
4.1.2	Exercices d'application de cours	234
4.1.3	Exercices d'approfondissement	236
4.2	Trigonométrie	245
4.2.1	Point de cours	245
4.2.2	Exercices d'application de cours	246
4.2.3	Exercices d'approfondissement	249
4.3	Géométrie repérée	255
4.3.1	Point de cours	255
4.3.2	Exercices d'application de cours	255
4.3.3	Exercices d'approfondissement	259

4.4	Préparer l'examen	265
4.5	Aller plus loin	268
5	Probabilités	289
5.1	Probabilités conditionnelles	289
5.1.1	Point de cours	289
5.1.2	Exercices d'application de cours	290
5.1.3	Exercices d'approfondissement	293
5.2	Variables aléatoires réelles	316
5.2.1	Point de cours	316
5.2.2	Exercices d'application de cours	317
5.2.3	Exercices d'approfondissement	319
5.3	Préparer l'examen	338
5.4	Aller plus loin	344
6	Corrigés	377
6.1	Polynômes du second degré	377
6.2	Suites numériques	413
6.3	Fonctions	463
6.4	Géométrie	528
6.5	Probabilités	573

Chapitre 1

Equations

1.1 Polynômes du second degré

1.1.1 Point de cours

Définition 1 : une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

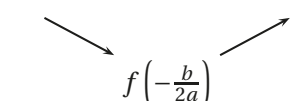
Définition 2 : une fonction polynôme de degré n est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ et a_0 sont des réels donnés et $a_n \neq 0$.

Définition 3 : x_0 est une racine du polynôme f si et seulement si $f(x_0) = 0$.

Propriété 1 : pour toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout réel x : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelée la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

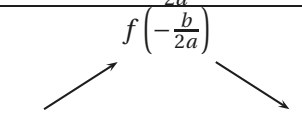
Propriété 2 : les variations de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par les tableaux suivants :

• Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$

• Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			

f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1

5 minutes

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes ?

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = -\sqrt{2} + x - 3x^2$
3. $f(x) = x^2 + 3\sqrt{x} - 2$
4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$
5. $f(x) = x^3 + 2x - 2019$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 9$
7. $f(x) = 3x^2 - 3$
8. $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 19}{15}$

EXERCICE 2

5 minutes

Déterminer le degré de chaque fonction polynôme :

1. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 3$
2. $f(x) = 1 + 9x + 4x^8$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$
4. $f(x) = x^3 + 2x - 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 8$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

EXERCICE 3

5 minutes

Sans développer les expressions, donner pour chaque polynôme son degré, le coefficient du plus haut degré et le coefficient du degré le plus bas.

1. $f(x) = (x^2 + x - 8)(x^3 - 2x^2 + x + 2)$
2. $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)(5x^5 + 3x^3 - 7x)$
3. $f(x) = (x^2 - 2x^4 + 6x^3)(2x - 9)$
4. $f(x) = (x^3 + 2x - 2)(-2x^5 + 6x^3 - 7x)$
5. $f(x) = (-6x^{201} + 4x^{102} + 8)(x^{28} + 6x^{10} - 9)$
6. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(1 - 3x + 2x^2)$

EXERCICE 4

5 minutes

Sachant que P , Q et R sont des fonctions polynômes de degrés respectifs 2, 3 et 5. Quel sera le degré des polynômes PQ , PR , QR et PQR ?

EXERCICE 5

5 minutes

Soit P une fonction polynôme de degré n .

Exprimer, en fonction de n , le degré des polynômes suivants :

1. $(x^2 + x + 1) \times P(x)$
2. $P^3 = P \times P \times P$
3. P^k avec k un entier naturel non nul.
4. λP avec λ réel non nul.

EXERCICE 6

5 minutes

Dans chaque cas, vérifier que x_0 est une racine de la fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $x_0 = 1$
2. $f(x) = 5 + 9x + 4x^8$ et $x_0 = -1$
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$ et $x_0 = 0$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $x_0 = 2$
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 2$ et $x_0 = 1$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ et $x_0 = 1$

EXERCICE 7**5 minutes**

Déterminer les racines de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = (x-2)(x+1)$
2. $f(x) = (2x+3)(x+2)$
3. $f(x) = (2-x)(1-3x)$
4. $f(x) = (x-1)(x+1)$
5. $f(x) = (x-2)^2$
6. $f(x) = (x-2)(1-x)(2x+3)$

EXERCICE 8**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 9$
3. $f(x) = x^2 - 6x - 1$
4. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 10x + 10$
6. $f(x) = x^2 + 18x + 30$

EXERCICE 9**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
3. $f(x) = x^2 - 9x + 9$
4. $f(x) = x^2 - 3x - 3$
5. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
6. $f(x) = x^2 + 15x + 30$

EXERCICE 10**10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
2. $f(x) = 3x^2 - x + 9$
3. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$
4. $f(x) = 5x^2 - 8x - 3$
5. $f(x) = -4x^2 - 10x + 2$
6. $f(x) = -5x^2 + 12x + 3$

EXERCICE 11**10 minutes**

Etablir le tableau de variations de chaque fonction polynôme.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
2. $f(x) = -3x^2 + 4x + 9$
3. $f(x) = 4x^2 - 6x - 1$
4. $f(x) = -5x^2 - 2x + 4$
5. $f(x) = x^2 - 10x + 10$
6. $f(x) = 3x^2 + 18x + 30$

EXERCICE 12**10 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 13**10 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 8$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x+2)(ax^2 + bx + c)$.
2. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 14**5 minutes**Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + x - 2$.Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 15**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 16**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 - 32x^2 - 6x + 36$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+6)(ax^2 + bx + c)$.

EXERCICE 17**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b .
3. En déduire une factorisation complète de f .

EXERCICE 18**5 minutes**

Dans chaque cas, rechercher une racine « évidente » de la fonction polynôme.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 + x - 2$ | 4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ |
| 2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ | 5. $f(x) = -6x^2 - 10x + 4$ |
| 3. $f(x) = x^2 - x - 2$ | 6. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ |

1.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 19****10 minutes**

Soit M un point du segment $[AB]$ de longueur 1. On construit deux carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$. Soit x la longueur AM et $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires des deux carrés.

1. Déterminer $\mathcal{A}(x)$.
2. Pour quelle position du point M l'aire $\mathcal{A}(x)$ sera-t-elle minimale?

EXERCICE 20**10 minutes**

Pour surveiller la zone de baignade, un maître-nageur veut délimiter un rectangle le long de la plage, pour cela, il dispose d'un câble de bouées d'une longueur de 150 mètres.

Quelle sera l'aire maximale de la zone ainsi délimitée?

EXERCICE 21**10 minutes**

On coupe une ficelle de 1 mètre de longueur pour entourer un carré et un rectangle deux fois plus long que large.

Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des deux aires soit minimale?

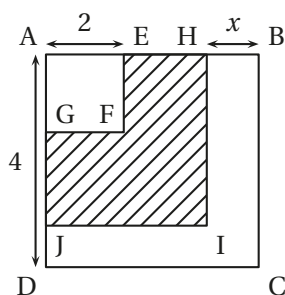
EXERCICE 22**10 minutes**

Soit $\mathcal{D}$ un disque de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 2$.

Soit M un point du segment $[AB]$. On construit les disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.

Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire comprise entre les disques. On pose $AM = x$.

1. Dans quel intervalle I varie x ?
2. Calculer l'aire des disques $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. En déduire que $\mathcal{A}(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + \pi x$.
4. Dresser le tableau de variations de $\mathcal{A}$ sur l'intervalle I .
5. En déduire la position du point M pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale. Quelle est alors la valeur de l'aire?

EXERCICE 23**10 minutes**

1. Dans la figure ci-contre AEFG, AHIJ et ABCD sont des carrés. Calculer AH en fonction de x ; en déduire l'aire de AHIJ puis préciser, dans la liste ci-dessous, la (ou les) expression(s) algébrique(s) qui correspond(ent) à l'aire de la partie hachurée.
 $M = (4-x)^2 - 2^2$ $N = (4-x-2)^2$ $P = 4^2 - x^2 - 2^2$
2. Développer et réduire l'expression $Q = (4-x)^2 - 4$.
3. Factoriser Q .
4. Calculer Q pour $x = 2$. Que traduit ce résultat pour la figure?

EXERCICE 24**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2 - (2x-1)(x+5)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1+\sqrt{2})$ et $f\left(\frac{13}{4}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 25**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)^2 + (x+5)(2x-3)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$ et $f\left(\frac{5}{12}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 26**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 1)$.

1. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
2. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$ et $f\left(-\frac{1}{12}\right)$.
 - b. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 27**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 16 - x^2 - (x + 6)(x + 4)$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression de f .
2. Déterminer une forme factorisée de $f(x)$.
3. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
4. En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
 - a. Calculer $f(0)$, $f(-4)$, $f(3\sqrt{2})$ et $f\left(-\frac{5}{2}\right)$.
 - b. Déterminer le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
 - c. Déterminer les racines de f .

EXERCICE 28 : DÉMONSTRATION**10 minutes**

Etablir la forme canonique du trinôme de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$.

EXERCICE 29**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines 1 et 2.

Sachant de plus que $f(0) = 2$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 30**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -3 et 4 .

Sachant de plus que $f(0) = -2$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 31**5 minutes**

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -2 et 2 .

Sachant de plus que $f(0) = 8$, déterminer la forme développée de la fonction f .

EXERCICE 32**20 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 26$ est divisible par $x - 2$.

En déduire une factorisation de $f(x)$.

EXERCICE 33**10 minutes**

Démontrer que la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$ est divisible par $x - 2$.

En déduire une factorisation de $f(x)$.

EXERCICE 34**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = x^4 - 8x^3 - 50x^2 + 264x + 945$.

1. Calculer $P(-5)$, $P(-3)$, $P(7)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P .

EXERCICE 35**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 21x^2 + 2x + 24$.

1. Calculer $P(-4)$, $P(-1)$, $P(2)$.
2. En déduire une factorisation de P sous forme d'un produit de quatre polynômes de degré 1.
3. En déduire la quatrième racine du polynôme P .

EXERCICE 36**10 minutes**

Déterminer le coefficient a pour que la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ soit divisible par $x - 2$.

EXERCICE 37**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 9$. Montrer que l'on peut déterminer quatre entiers relatifs a , b , c et d tels que $f(x) = (x + b)(x^2 + cx + d)$.

EXERCICE 38**10 minutes**

Montrer que quels que soient les réels p et q , le polynôme $P(x) = x^3 + (p - q)x^2 + p(p - q)x - p^2q$ est divisible par $x - q$.

Factoriser le polynôme P .

EXERCICE 39**10 minutes**

1. Développer, réduire et ordonner $(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)$.
2. Le nombre $N = 10001000100010001$ est-il premier?

EXERCICE 40**15 minutes**

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^4 + 1$.

1. La fonction f admet-elle des racines réelles?
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$.
3. En remarquant que $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$, grâce à deux factorisations successives retrouver la factorisation de la question précédente.

EXERCICE 41**10 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, décomposer en produit de deux facteurs de degré 2 le polynôme $P(x) = x^4 + 4$.

EXERCICE 42**15 minutes**

Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a)$, avec a et b deux réels positifs distincts.

1. Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(0)$.
2. Montrer, sans développer $f(x)$, que le polynôme $f(x)$ admet deux racines et qu'elles sont toutes deux positives.

EXERCICE 43**15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geq 2$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.
2. Vérifier que 1 est une racine du polynôme P_n .
3. Dédire des questions précédentes une factorisation de P_n .
4. Factoriser $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

EXERCICE 44**15 minutes**

Soit $P_n(x) = x^n - 1$ avec $n \geq 2$. Soient a et b deux réels non nuls.

1. Calculer $P_n\left(\frac{a}{b}\right)$
2. En utilisant la question précédente et le résultat de l'exercice précédent, démontrer l'identité : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
3. En déduire une factorisation des expressions suivantes :
 - a. $a^2 - b^2$
 - b. $a^3 - b^3$
 - c. $a^4 - b^4$
 - d. $x^3 - 27$

EXERCICE 45**15 minutes**

Soit P une fonction polynôme de degré $n > 0$. Soit Q une fonction polynôme définie par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

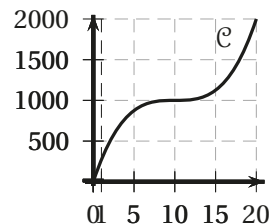
1. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^2$.
2. Expliciter Q lorsque $P(x) = x^3$.
3. Quel est le degré de Q lorsque P est de degré n ?
4. Soit P un polynôme périodique, de période 1, en raisonnant par l'absurde sur le degré de P et en considérant Q , montrer que P est une fonction constante.

☞ Un polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ est périodique, de période T , si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+T) = P(x)$.

EXERCICE 46**20 minutes**

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.

Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers d'euros, en fonction du nombre x de tonnes produites.



1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers d'euros la tonne.
 - a. Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers d'euros espérée par cette entreprise.
 - b. Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0; 20]$.
Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.
 - c. Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.
2. On considère maintenant que $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$ avec $x > 0$.
Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.
Soit $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.
 - a. Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x .
Établir le tableau de variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
 - b. En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne?

EXERCICE 47**20 minutes**

1. Soit la somme $S_1 = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$

- a. Déterminer une fonction polynôme P , de degré 2, vérifiant pour tout réel x :

$$P(x+1) - P(x) = x.$$

- b. Prouver que $S_1 = P(n+1) - P(1)$.

- c. En déduire que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit la somme $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

- a. Déterminer une fonction polynôme Q , de degré 3, vérifiant pour tout réel x :

$$Q(x+1) - Q(x) = x^2.$$

- b. Prouver que $S_2 = Q(n+1) - Q(1)$.

- c. En déduire que $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit la somme $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

En s'inspirant des questions précédentes, montrer que $S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

EXERCICE 48

20 minutes

Soit la fonction polynôme P de degré n , définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des réels donnés avec $a_n \neq 0$ et n entier strictement positif.

1. En utilisant une identité établie dans l'exercice 44, montrer que, pour tout réel α , $P(x) - P(\alpha)$ se factorise par $(x - \alpha)$.
2. En déduire que pour tout polynôme P de degré $n \geq 1$ et tout réel α , il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + P(\alpha)$.
3. Etablir la propriété : « Un polynôme de degré $n \geq 1$ peut se factoriser par $x - \alpha$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$ ».

EXERCICE 49 : ALGORITHME DE HÖRNER

30 minutes

Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Soit α un réel fixé.

1. **Coefficients de Hörner associés à α**

On pose : $h_3 = a_3$,

$$h_2 = a_2 + \alpha h_3,$$

$$h_1 = a_1 + \alpha h_2,$$

$$h_0 = a_0 + \alpha h_1,$$

- a. Calculer les coefficients de Hörner avec $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$ et $\alpha = 3$.
- b. Programmer en Python, une fonction `coeffHorner(a3, a2, a1, a0, alpha)` qui comme son nom l'indique va calculer les coefficients de Hörner pour un polynôme donné.

2. **Calcul de $P(\alpha)$**

- a. Vérifier que $P(x) = \left[(a_3 x + a_2) x + a_1 \right] x + a_0$.
- b. En déduire que $P(\alpha) = h_0$.
- c. Comparer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour le calcul de $P(\alpha)$:
 - avec l'écriture initiale de $P(x)$;
 - avec l'algorithme de Hörner.

3. **Factorisation par $(x - \alpha)$**

D'après l'exercice précédent, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + P(\alpha)$.

L'objectif, ici, est de trouver rapidement une expression de $Q(x)$.

- a. Prouver que $P(x) = (x - \alpha)(h_3x^2 + h_2x + h_1) + h_0$.
- b. Conclure.
- c. Programmer en Python, une fonction donnant les coefficients du polynôme $Q(x)$.

4. Applications

- a. Soit la fonction polynôme P , définie sur $\mathbb{R}$, par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$.
Calculer $P(3)$ puis factoriser P par $(x - 3)$.
- b. Soit la fonction polynôme P , définie sur $\mathbb{R}$, par $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x - 4$.
Calculer $P(1)$ puis factoriser P par $(x - 1)$.

Remarques : Le calcul des coefficients et les résultats obtenus se généralisent à un degré quelconque.

Les liens entre les coefficients h_i et la factorisation ont été étudiés par Hörner (1786-1837), mais le calcul de $P(\alpha)$ était déjà utilisé par Newton.

EXERCICE 50 : POLYNÔMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

30 minutes

1. Soit a , b et c trois réels deux à deux distincts, α , β et γ trois réels donnés.
Montrer qu'il ne peut pas exister deux polynômes P et Q distincts, de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :
 $P(a) = Q(a) = \alpha$, $P(b) = Q(b) = \beta$, $P(c) = Q(c) = \gamma$.
 2. On considère les trois polynômes :
$$L_1(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, L_2(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \text{ et } L_3(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$
 - a. Calculer $L_1(a)$, $L_2(a)$, $L_3(a)$, $L_1(b)$, $L_2(b)$, $L_3(b)$, $L_1(c)$, $L_2(c)$ et $L_3(c)$.
 - b. On pose $P(x) = \alpha L_1(x) + \beta L_2(x) + \gamma L_3(x)$.
Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
Vérifier que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
 3. Énoncer un résultat général établi dans les questions précédentes.
- Remarque :** Le polynôme P est le polynôme de Lagrange associé aux réels a , b et c . La méthode se généralise à plus de trois coefficients.

4. Applications :

- a. Déterminer le polynôme P , de degré inférieur ou égal à 2, vérifiant : $P(0) = 2$, $P(-1) = 3$ et $P(2) = 5$.
- b. Déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, qui prend les mêmes valeurs que la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ aux points -3 , -2 et 1 .
On dit que P réalise une interpolation de degré 2 de f .
- c. Quel est le nombre maximal de régions que déterminent n droites du plan ($n \geq 1$) ?
On admettra que ce nombre s'écrit $P(n)$, P étant un polynôme de degré 2. On commencera par calculer $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.

1.2 Equations du second degré

1.2.1 Point de cours

Définition 1 : Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont trois réels données (a étant non nul).

Définition 2 : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1 : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Propriété 2 : Lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par les relations : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Propriété 3 : Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 51

10 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 + x + 1 = 0$ | 4. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 9 = 0$ |
| 2. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ | 5. $x^2 + x - 6 = 0$ |
| 3. $-x^2 + 3x + 9 = 0$ | 6. $x^2 - 2 = 0$ |

EXERCICE 52

10 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 5x - 6 = 0$ | 4. $-5x^2 - 3x + 2 = 0$ |
| 2. $x^2 + x - 2 = 0$ | 5. $4x^2 + 12x + 4 = 0$ |
| 3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$ | 6. $-3x^2 - 4x = 0$ |

EXERCICE 53

15 minutes

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

- | | |
|------------------------|---|
| 1. $x^2 + 9x + 20 = 0$ | 4. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$ |
| 2. $-3x^2 + 2 = 0$ | 5. $2x^2 + \frac{1}{3}x + 5 = 0$ |
| 3. $-5x^2 + x = 0$ | 6. $3x^2 + 2x\sqrt{6} + 2 = 0$ |

EXERCICE 54**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en factorisant :

1. $(x+1)^2 - (2x+3)^2 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 + (2x-3)(x+1) = 0$
3. $x^2 - 16 + (x+4)(x-6) = 0$
4. $81 - (x^2 + 6x + 9) = 0$
5. $(3x-1)(2x+5) - (1-x)(2x+5) = 0$
6. $(2x+3)^2 - 2(2x+3) + 1 = 0$

EXERCICE 55**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la forme canonique :

1. $x^2 + 4x + 1 = 0$
2. $x^2 - 3x + 4 = 0$
3. $2x^2 + x - 2 = 0$
4. $-x^2 + 8x - 25 = 0$
5. $\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = 0$
6. $-5x^2 - 3x + 2 = 0$

EXERCICE 56**5 minutes**Soit l'équation $x^2 + 14x - 15 = 0$.

1. Donner une solution évidente.
2. En utilisant la propriété 2, déterminer la seconde solution.

EXERCICE 57**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode de l'exercice précédent :

1. $x^2 + x - 2 = 0$
2. $x^2 - x - 2 = 0$
3. $2x^2 - x - 1 = 0$
4. $-x^2 + 3x = 0$
5. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$
6. $x^2 - x - 20 = 0$

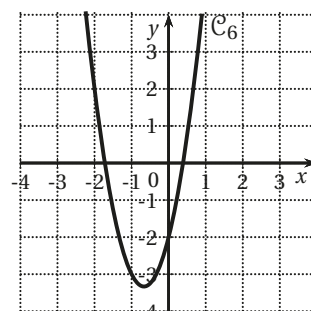
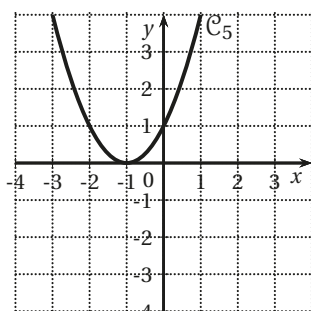
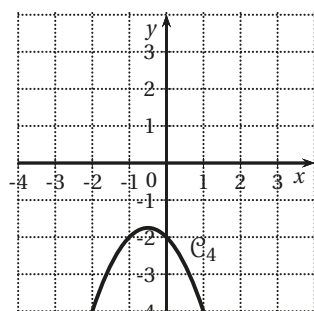
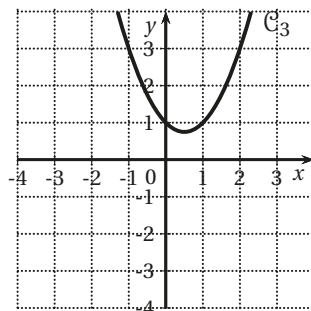
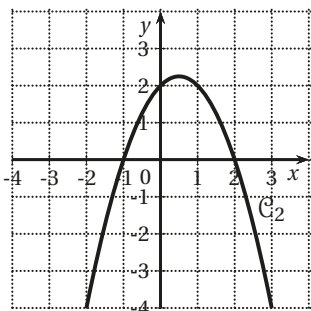
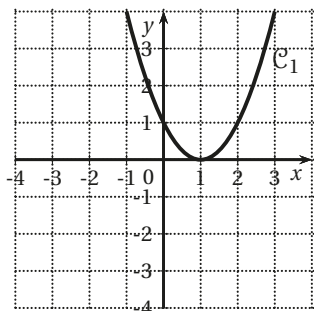
EXERCICE 58**10 minutes**

Résoudre les équations du second degré suivantes en utilisant la méthode la plus adaptée :

1. $9x^2 + x = 0$
2. $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$
3. $x^2 + 4x + 4 = 0$
4. $5 - x^2 = 0$
5. $(x+2)(3x-4) = x+2$
6. $5x^2 - 9x + 12 = 0$

EXERCICE 59**15 minutes**Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Dans chaque cas, déterminer graphiquement les signes des réels a et c , ainsi que le signe du discriminant.
2. Dans chaque cas, déterminer le signe de b .

**EXERCICE 60****5 minutes**Ecrire une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ dont les solutions sont :

1. 3 et 7
2. 2 et -6
3. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{5}$
4. $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

EXERCICE 61**10 minutes**Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P , en supposant $x \leq y$:

1. $S = 1$ et $P = -1$
2. $S = 12$ et $P = 36$
3. $S = 2\sqrt{5}$ et $P = 1$
4. $S = -7$ et $P = -44$

EXERCICE 62**10 minutes**Déterminer, s'ils existent, deux réels x et y connaissant leur somme S et leur produit P , en supposant $x \leq y$:

1. $S = 0$ et $P = 3$
2. $S = 1 + \pi$ et $P = \pi$
3. $S = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $P = \sqrt{10}$
4. $S = 2019$ et $P = 2019$

EXERCICE 63**10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases}$

EXERCICE 64**10 minutes**

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 126 cm^2 et de périmètre 50 cm.

EXERCICE 65**10 minutes**

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 3569 m^2 et de périmètre 252 m.

1.2.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 66****5 minutes**

Soit l'équation (E) : $(m+2)x^2 + 2(3m-1)x + (m+2) = 0$.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution double?
2. Calculer cette solution.

EXERCICE 67**10 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^2 + 6mx + (6m+1) = 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation admet-elle une des solutions égale à 2?
2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 68**5 minutes**

Soit l'équation (E) : $x^2 + 2(3m-1)x + (m+2) = 0$.

1. Pour quelle valeur de m l'équation admet-elle une des solutions égale à -1 ?
2. En déduire l'autre solution.

EXERCICE 69**15 minutes**

Démontrer la propriété 1.

EXERCICE 70**15 minutes**

1. Démontrer la propriété 2.
2. Démontrer la propriété 3.

EXERCICE 71**15 minutes**

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y = -\frac{1}{12} \\ xy = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y = \frac{5\sqrt{5}-3}{4} \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

☞ Pour le dernier système, on pourra poser $Y = -y$.

EXERCICE 72**10 minutes**

On considère l'équation (E) : $2x^2 + (2\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.

1. Résoudre (E).
2. Montrer que $(2\sqrt{3} + 1)^2 = 13 + 4\sqrt{3}$.
3. En déduire une expression simplifiée des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 73**10 minutes**

Résoudre les équations suivantes en posant $X = x^2$:

1. $x^4 - 84x^2 + 243 = 0$
2. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$
3. $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$
4. $-x^4 + x^2 + 2 = 0$

EXERCICE 74**20 minutes**

Résoudre les équations suivantes en utilisant un changement d'inconnue :

1. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
2. $2(\cos x)^2 - 3\cos x + 1 = 0$
3. $x + \sqrt{x} - 2 = 0$
4. $2(\sin x)^2 - 7\sin x + 3 = 0$
5. $\frac{6}{(x-7)^2} - \frac{11}{x-7} - 7 = 0$
6. $(2x-5) - 3\sqrt{2x-5} + 2 = 0$

EXERCICE 75**10 minutes**

1. soit P un polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

- a. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
- b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions des équations suivantes :

- a. $x^6 - x^4 - 14x + 24 = 0$
- b. $\frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^2} - \frac{28}{x} + 24 = 0$.

EXERCICE 76**10 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $5 - x = 2\sqrt{2x-2}$
2. $2 + x = \sqrt{2x+3}$

EXERCICE 77**15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + \frac{1}{x} = 4$
2. $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3} = 2$
3. $\frac{x}{3x+4} = \frac{x-1}{4x}$
4. $\frac{2x+m}{x} - \frac{3x}{x+m} = 2$ avec m un réel donné.

EXERCICE 78**15 minutes**

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{x + 4}{x + 1}$

3. $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2} = 0$

2. $\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{5}{x + 2} = 3$

4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x - 3}.$

EXERCICE 79 : LOGIQUE**15 minutes**Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.On considère la proposition P_1 : « Si $ac < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes ».

1. La proposition P_1 est-elle vraie? Justifier.
2. a. Enoncer la réciproque de P_1 , on la notera P_2 .
b. La proposition P_2 est-elle vraie? Justifier.
3. a. Enoncer la contraposée de P_1 , on la notera P_3 .
b. La proposition P_3 est-elle vraie? Justifier.

EXERCICE 80**10 minutes**

Alfred possède deux terrains rectangulaires de même aire. Le grand côté du premier terrain mesure 130 mètres de plus que son plus petit côté. Le grand côté du second terrain mesure 150 mètres de plus que le grand côté du premier terrain et son petit côté mesure 154 mètres.

Quelles sont les dimensions des deux terrains d'Alfred?

EXERCICE 81**10 minutes**La largeur d'un rectangle mesure 4 dm de moins que sa longueur. Sachant que son aire est égale à $8,25 \text{ dm}^2$, quelles sont les dimensions de ce rectangle?**EXERCICE 82****10 minutes**En multipliant par 2 puis en ajoutant 1 cm à chaque côté d'un triangle équilatéral, son aire augmente de $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Quelle est la longueur du côté du triangle d'origine?**EXERCICE 83****10 minutes**En multipliant par $\sqrt{3}$ puis en enlevant 1 m à chaque côté d'un triangle équilatéral, son aire diminue de $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$. Quelle est la longueur du côté du triangle d'origine?**EXERCICE 84 : UN PROBLÈME DE NEWTON****10 minutes**L'aire d'un rectangle est 540 m^2 et les diagonales mesurent 39 mètres. Quel est le périmètre de ce rectangle?**EXERCICE 85****10 minutes**

Un triangle de dimensions 5, 6 et 8 n'est pas rectangle. Peut-on, en ajoutant ou en retranchant une même longueur sur les trois côtés, obtenir un triangle rectangle?

EXERCICE 86**15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $BC = 5$ cm. Soit M un point de $[AB]$, N un point de $[BC]$, P un point de $[CD]$ et Q un point de $[DA]$ tels $AM = BN = CP = DQ = x$.

1. Sur quel intervalle varie x ?
2. Déterminer l'aire du quadrilatère $MNPQ$ que l'on notera $\mathcal{A}(x)$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à 22 cm^2 ?

EXERCICE 87**15 minutes**

Un train se dirige vers un tunnel à vitesse constante. Une vache, située à 5 mètres du milieu du tunnel, entend le train lorsque celui-ci se situe à 3 km de l'entrée du tunnel.

Quelle que soit sa direction, la vache arrive au bout du tunnel au même instant que le train. Quelle est la longueur du tunnel?

EXERCICE 88**20 minutes**

1. Factoriser les expressions $x^2 + 2x - 8$ et $3x^2 - 7x + 2$.
2. Résoudre l'équation $\frac{3}{x^2 + 2x - 8} + \frac{x}{3x^2 - 7x + 2} = 0$.

EXERCICE 89**15 minutes**

1. Factoriser les expressions $x^2 + x - 2$ et $2x^2 + x - 6$.
2. Résoudre l'équation $\frac{2x}{x^2 + x - 2} - \frac{3x}{2x^2 + x - 6} = 0$.

EXERCICE 90**20 minutes**

1. Déterminer le format d'un rectangle de longueur 8 et de largeur 5, c'est-à-dire le rapport :

$$f = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}.$$

2. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = x$ et de largeur $AD = 1$ avec $1 < x < 2$. Soit E le point de $[AB]$ et F le point de $[DC]$ tels que $AEFD$ soit un carré.
 - a. Exprimer les formats des rectangles $ABCD$ et $BEFC$ en fonction de x .
 - b. Le rectangle $ABCD$ est dit « **rectangle d'or** » s'il a le même format que le rectangle $BEFC$. Quelle valeur doit-on donner à x pour que $ABCD$ soit un rectangle d'or. On note Φ cette valeur.
 - c. Déterminer les valeurs exactes de $\Phi - 1$ et de $\Phi(\Phi - 1)$.
 - d. Montrer que l'inverse de Φ est $\Phi - 1$.

EXERCICE 91**15 minutes**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$.
 - a. Calculer $P(1)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

- b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a. $x^6 - 2x^4 - 19x^2 + 20 = 0$

b. $\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{19}{x} + 20 = 0$.

EXERCICE 92**15 minutes**

Soit l'équation $(E) : x^3 - x^2 - 50x - 48$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 2x - 48 = 0$.
2. Vérifier que -1 est solution de (E) .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^3 - x^2 - 50x - 48 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 93**15 minutes**

Soit l'équation $(E) : 3x^3 - 8x^2 - x + 10$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$.
2. Déterminer une solution « évidente » de (E) , on la notera x_0 .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $3x^3 - 8x^2 - x + 10 = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 94**15 minutes**

Soit l'équation $(E) : x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = 0$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 5x - 5 = 0$.
2. Déterminer deux solutions « évidentes » de (E) , on les notera x_3 et x_4 .
3. Déterminer les réels a, b, c tels que $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = (x - x_1)(x - x_2)(ax^2 + bx + c)$.
4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) .

EXERCICE 95**25 minutes**

Un triplet pythagoricien est un triplet $(x; y; z)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. Existe-t-il des triplets pythagoriciens constitués d'entiers consécutifs?
2. Ecrire une fonction, en langage Python, qui affiche les triplets pythagoriciens pour x et y inférieurs ou égaux à 100 et $x \leq y$.

EXERCICE 96**25 minutes**

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont trois réels et $a \neq 0$.

Dans un repère orthonormal (O, I, J) , on considère les points $A(a; 0)$, $B(a; b)$ et $C(a - c; b)$.

Soit P le point de coordonnées $(-1; a)$, avec a un réel quelconque et M le point d'intersection des droites (OP) et (AB) .

1. Déterminer les coordonnées du point M .

2. Démontrer que le triangle OMC est rectangle en M si et seulement si α vérifie l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Donner une construction géométrique permettant de résoudre graphiquement l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Appliquer cette méthode aux équations suivantes :
 - a. $x^2 + 6x - 8 = 0$
 - b. $x^2 + x + 1 = 0$
 - c. $4x^2 - 5x + 6 = 0$
 - d. $9x^2 + 6x + 1 = 0$
5. A quelle condition géométrique existe-t-il des solutions?

EXERCICE 97**20 minutes**

Alors qu'une colonne de l'armée de ℓ km de long, avance à vitesse constante, un messenger part de l'arrière-garde, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où la colonne a parcouru ℓ kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messenger?

☞ Non, il n'a pas parcouru 2ℓ kilomètres!

1.3 Inéquations**1.3.1 Point de cours**

Propriété : Soit la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$).

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de $P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double x_0 .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $P(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe du réel a .

1.3.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 98****20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = x^2 + x + 1$
2. $P(x) = -3x^2 + x + 10$
3. $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$
4. $P(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3$

EXERCICE 99**20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = 3 - 2x\sqrt{3} + x^2$

3. $P(x) = x^2 - 2x - 15$

2. $P(x) = -x^2 + 4x - 8$

4. $P(x) = \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{6}$

EXERCICE 100**20 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = -6x^2 - 5x + 6$

3. $P(x) = -x^2 - 4x + 4$

2. $P(x) = -6x^2 - x - 1$

4. $P(x) = x^2 + x + 3$

EXERCICE 101**20 minutes**

En choisissant la méthode la plus adaptée, établir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = (3x - 2)(2x + 3)$

3. $P(x) = (x + 2)^2 - 9(x - 1)^2$

2. $P(x) = (3x + 1)(x - 2) - (9x^2 + 3x)$

4. $P(x) = -2 - (2x - 9)^2$

EXERCICE 102**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x + 1 < 0$

3. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$

2. $-3x^2 + x + 10 \leq 0$

4. $2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3 > 0$

EXERCICE 103**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-6x^2 - 5x + 6 \leq 0$

3. $-x^2 - 4x + 4 \geq 0$

2. $-6x^2 - x - 1 \leq 0$

4. $x^2 + x + 3 \geq 0$

EXERCICE 104**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3 - 2x\sqrt{3} + x^2 \geq 0$

3. $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

2. $-x^2 + 4x - 8 < 0$

4. $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{6} < 0$

1.3.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 105****10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x + 2)^2 \leq (3x - 5)^2$

2. $x^2 + 6x - 4 \leq 2x^2 - 9x - 8$

EXERCICE 106**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-x^2 + 4x + 5 \geq -2x^2 + 3x + 4$

2. $3x^2 - 2x + 3 \geq x^2 - 2x + 7$

EXERCICE 107**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 5 \leq x^2 - x + 9$

2. $(3x - 2)^2 \geq (x + 3)^2$

EXERCICE 108**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^3 + 3x + 2 \leq x^3 - 2x^2 - 4x - 3$
2. $(2x + 1)^2 \geq (3x - 1)^2$
3. $-5x^2 + x + 2 \leq 3x^2 + 7x - 7$

EXERCICE 109**10 minutes**Soit une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 4$ et une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 2x^2 + 3x - 4$.

1. Résoudre l'équation $2x^2 + 3x - 4 = -x - 4$.
2. En déduire les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.
3. Résoudre l'inéquation $2x^2 + 3x - 4 \leq -x - 4$.
4. En déduire les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

EXERCICE 110**10 minutes**En utilisant la méthode de l'exercice **109**, étudier les positions relatives de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x + 2$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 3x^2 - 8x - 2$.**EXERCICE 111****10 minutes**En s'inspirant de la méthode de l'exercice **109**, étudier les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = -x^2 + 6x - 9$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = x^2 - 5x + 3$.**EXERCICE 112****10 minutes**

Etablir le tableau de signe des polynômes suivants :

1. $P(x) = (x + 2)(6x^2 - 5x - 6)$
2. $P(x) = (3 - 2x)(x^2 - 3x + 2)$

EXERCICE 113**10 minutes**

Etablir le tableau de signes des polynômes suivants :

1. $P(x) = (-x^2 - 4x + 4)(6 - 2x)$
2. $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

EXERCICE 114**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x + 2)(6x^2 - 5x - 6) \leq 0$
2. $(3 - 2x)(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

EXERCICE 115**10 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(-x^2 - 4x + 4)(6 - 2x) \leq 0$
2. $(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6) > 0$

EXERCICE 116 : DÉMONSTRATION**10 minutes**

Démontrer la propriété des tableaux de signes des trinômes du second degré.

EXERCICE 117 : LOGIQUE**15 minutes**Soit $f(x)$ une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.Soit la propriété P_1 : « S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$ alors $\Delta > 0$.

1. a. Énoncer la réciproque de la propriété P_1 , nous la noterons P_2 .
b. La propriété P_2 est-elle vraie? Justifier.
2. a. Énoncer la contraposée de la propriété P_1 , nous la noterons P_3 .
b. La propriété P_3 est-elle vraie? Justifier.
c. La propriété P_1 est-elle vraie? Justifier.

EXERCICE 118**15 minutes**

Soit $P(x) = 6x^4 - 41x^3 + 69x^2 + 6x - 40$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x - 1)(x - 4)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

EXERCICE 119**15 minutes**

Soit $P(x) = -6x^4 + 13x^3 + 96x^2 - 13x - 210$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x - 5)(x + 2)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

EXERCICE 120**15 minutes**

Soit $P(x) = -8x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 41x - 30$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x + 2)(x - 3)Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.

EXERCICE 121**15 minutes**

Soit $P(x) = -x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)x^3 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 5)x^2 + (2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2})x - 5\sqrt{6}$.

1. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x : $P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3})Q(x)$.
2. Après avoir déterminé les racines de Q , résoudre l'inéquation $P(x) < 0$.

EXERCICE 122**15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^2 + (1 - m)x + 2(m - 3) = 0$.

EXERCICE 123**15 minutes**

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + mx + (2m - 3) = 0$.

EXERCICE 124**15 minutes**

Sur route sèche, la distance de freinage d'une voiture est donnée par la formule $d = \frac{1}{150}v^2 + \frac{1}{5}v$, où d est exprimée en mètres et v en km/h.

Quelles sont les vitesses permettant de s'arrêter en moins de 10 mètres? En moins de 30 mètres?

EXERCICE 125**15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante : $\frac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 2)}{(3 - x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0$.

EXERCICE 126**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3x^2 + 1}{x + 4} \geq 2x$.

2. $\frac{x - 2}{x + 1} + \frac{2x - 5}{x - 2} \leq 2$.

EXERCICE 127**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{4}{2 - x} + \frac{3}{x + 2} \geq \frac{3x^2}{4 - x^2}$.

2. $\frac{x}{2x + 3} \leq \frac{2x + 3}{x}$.

EXERCICE 128**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{(6x - 3)(x - 4) - (2x - 1)(5x - 3)}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$.

2. $\frac{4 - 2x - 3x^2 - (x + 4)(2x + 2)}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.

EXERCICE 129**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{7x + 3}{3x + 2} \geq \frac{2 - 3x}{3x^2 + 5x + 2}$.

2. $\frac{-3x^2 - 7x + 6}{2x^2 - 13x + 20} \leq \frac{8x - 3}{5 - 2x}$.

EXERCICE 130**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{5x - 2}{x - 2} > \frac{4 - 3x}{x + 2}$.

2. $\frac{x - 3}{x^2 - 2x - 15} \leq \frac{2 - 3x}{5 - x}$.

EXERCICE 131**15 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3 - 2x}{x + 2} \geq \frac{12 - 4x}{2x + 1}$.

2. $\frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{2x - 3}{x - 1}$.

EXERCICE 132**20 minutes**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 3x - 4} < \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 1}$.

2. $-2 \leq \frac{x^2 - x - 30}{8 + 2x - x^2} \leq 2$.

EXERCICE 133**15 minutes**

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} \geq x.$$

EXERCICE 134**20 minutes**

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + ax + 9$ où a est un nombre réel.

1. Discuter le nombre de racines de P en fonction des valeurs de a .
2. Déterminer les valeurs de a telles que pour tout réel x , $P(x) > -3$.

EXERCICE 135**20 minutes**

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de P .
2. En déduire l'extremum de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$. Quelle est la nature de cet extremum?
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.
4. Déterminer les valeurs de x telles que $-1 < P(x) < 1$.

EXERCICE 136**15 minutes**

On considère la fonction $Q(x)$ définie par $Q(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $-6 < Q(x) < 5$.

EXERCICE 137**25 minutes**

On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2x + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $-2 \leq Q(x) \leq 4$.
3. Calculer $Q\left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)$. Montrer que le maximum de Q est $1 + \sqrt{5}$.
4. Calculer $Q\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$. Montrer que le minimum de Q est $1 - \sqrt{5}$.

EXERCICE 138**25 minutes**

On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Q .
2. Montrer que pour tout réel x , $0 \leq Q(x) \leq 6$.
3. Calculer $Q(\sqrt{2})$. Montrer que le maximum de Q est $2 + \sqrt{2}$.
4. Calculer $Q(-\sqrt{2})$. Montrer que le minimum de Q est $2 - \sqrt{2}$.

EXERCICE 139**25 minutes**

On considère les fonctions polynômes P et Q définies sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 9x + 1$, de courbes représentations respectives $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$.

1. **a.** Donner la forme canonique de $P(x)$.
b. En déduire l'extremum de la fonction $P(x)$.

- c. Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_P$ avec l'axe des abscisses.
2. a. Donner une racine évidente de $Q(x)$, on la notera α .
 b. En déduire un polynôme $R(x)$ tel que pour tout réel x : $Q(x) = (x - \alpha)R(x)$.
 c. Déterminer les racines de $Q(x)$.
 d. Dresser le tableau de signes de $Q(x)$.
3. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$.

1.4 Préparer l'examen

EXERCICE 140 : QCM

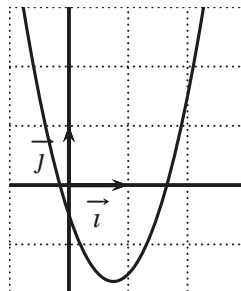
15 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Soit a , b et c trois réels, $a \neq 0$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Soit Δ son discriminant. On peut affirmer que :



- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a. $a < 0$ et $\Delta < 0$ | c. $a < 0$ et $\Delta > 0$ |
| b. $a > 0$ et $\Delta < 0$ | d. $a > 0$ et $\Delta > 0$ |

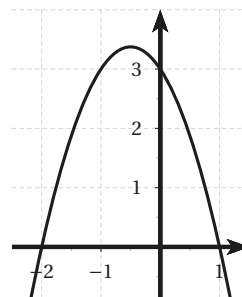
Question 2

L'inéquation $x^2 + 2x + 8 \geq 0$

- | | |
|--------------------------|---|
| a. n'a pas de solution | c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-4 ; 2]$ |
| b. a une unique solution | d. a pour solution l'ensemble des réels. |

Question 3

Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :



- a. $1,5(x + 2)(x - 1)$
- b. $1,5(x - 2)(x + 1)$
- c. $-1,5(x + 2)(x - 1)$
- d. $-1,5(x - 2)(x + 1)$

Question 4

On considère, dans un repère du plan, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 10x + 25$.

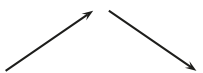
- a. $\mathcal{P}$ n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses
- b. $\mathcal{P}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses
- c. $\mathcal{P}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses

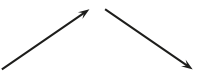
d. $\mathcal{P}$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 8$.

Le tableau de variations de la fonction f est :

a.	x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
	f			
c.	x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
	f			

b.	x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
	f			
d.	x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
	f			

EXERCICE 141 : QCM

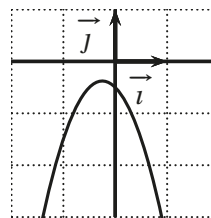
15 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Soit a , b et c trois réels, $a \neq 0$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$. La représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Soit Δ son discriminant. On peut affirmer que :

- a. $a < 0$ et $\Delta < 0$ c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
b. $a > 0$ et $\Delta < 0$ d. $a > 0$ et $\Delta > 0$



Question 2

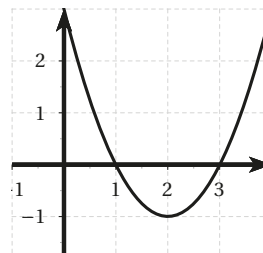
L'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$

- a. n'a pas de solution c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-2 ; 1]$
b. a une unique solution d. a pour solution l'ensemble des réels.

Question 3

Soit f une fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre. Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :

- a. $(x+1)(x+3)$ c. $(x-1)(x-3)$
b. $-(x+1)(x+3)$ d. $-(x-1)(x-3)$



Question 4

On considère, dans un repère du plan, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 2x - 3$.

- a. $\mathcal{P}$ n'admet aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses
b. $\mathcal{P}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses
c. $\mathcal{P}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses

d. $\mathcal{P}$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Question 5

L'équation $-2x^2 + x - 4 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

a. $S = 1$ et $P = -4$

b. $S = -\frac{1}{2}$ et $P = -2$

c. $S = \frac{1}{2}$ et $P = 2$

d. $S = -1$ et $P = -4$.

EXERCICE 142 : QCM

15 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 1)$. La fonction f :

a. n'a pas de racine réelle,

c. a exactement deux racines réelles,

b. a exactement une racine réelle,

d. a exactement trois racines réelles.

Question 2

L'inéquation $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ a pour ensemble de solutions :

a. $\mathcal{S} = \emptyset$,

c. $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cap [4; +\infty[$,

b. $\mathcal{S} = [-1; 4]$,

d. $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$

Question 3

Soit f une fonction polynôme du second degré dont le tableau de signes est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Une expression de $f(x)$ peut être :

a. $-x^2 - x + 6$,

c. $9 - x^2$,

b. $x^2 + x - 6$,

d. $-x^2 + x + 6$

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$.

Le tableau de variations de la fonction f est :

a.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

c.

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

b.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

d.

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
f			

Question 5

L'équation $3x^2 + x - 10 = 0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

a. $S = 1$ et $P = -10$

b. $S = -\frac{1}{3}$ et $P = -\frac{10}{3}$

c. $S = \frac{1}{3}$ et $P = -\frac{10}{3}$

d. $S = -1$ et $P = -10$.

EXERCICE 143 : QCM**15 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte?

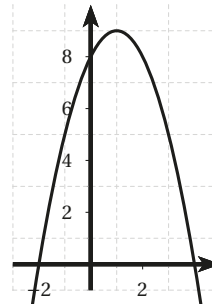
a. $f(x) = (3x + 3)(3x - 6)$

c. $f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$

b. $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$

d. $f(x) = (3x - 3)(3x + 6)$.

Pour les quatre questions suivantes, on se place dans un repère orthonormé du plan, on a tracé la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont trois réels, $a \neq 0$.

**Question 2**

L'équation $g(x) = 0$ a pour solution(s) :

a. 8

c. -2 et 4

b. 0

d. 4.

Question 3

L'équation $g(x) = 9$ admet :

a. aucune solution

c. deux solutions

b. une unique solution

d. trois solutions

Question 4 :

L'inéquation $g(x) > 5$

a. a pour solution l'ensemble des nombres réels

b. a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 3]$

c. a pour ensemble de solutions l'intervalle $] -1 ; 3[$

d. n'a pas de solution

Question 5 :

Soit Δ le discriminant de g . On peut affirmer que :

a. $a > 0$ et $\Delta > 0$

c. $a < 0$ et $\Delta > 0$

b. $a > 0$ et $\Delta < 0$

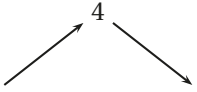
d. $a < 0$ et $\Delta < 0$

EXERCICE 144 : VRAI/FAUX**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$.

Pour chacune des cinq affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

1. La forme développée de f est $f(x) = -2x^2 + 2$.
2. Le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f			

3. La courbe représentative de la fonction f admet un sommet de coordonnées $(4 ; -1)$.
4. La fonction f admet un maximum en $(-1 ; 4)$.
5. Le tableau de signe de $f(x)$ est :

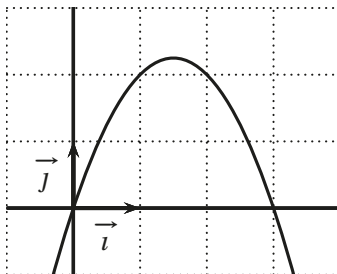
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

EXERCICE 145 : VRAI/FAUX**15 minutes**

Pour chacune des cinq affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

La courbe représentative de f , dans un repère orthonormé est tracée ci-dessous :



2. Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont trois réels, $a \neq 0$.
Si a et c sont de signes contraires alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes.
3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 5x - 4$ est $S = \{1\}$.
4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 2x + 3 > 0$, où x est un réel, est $S =]-1 ; 3[$.
5. Les courbes représentatives des fonction $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = 4x^2 + 2x + 1$ ont deux points d'intersection.

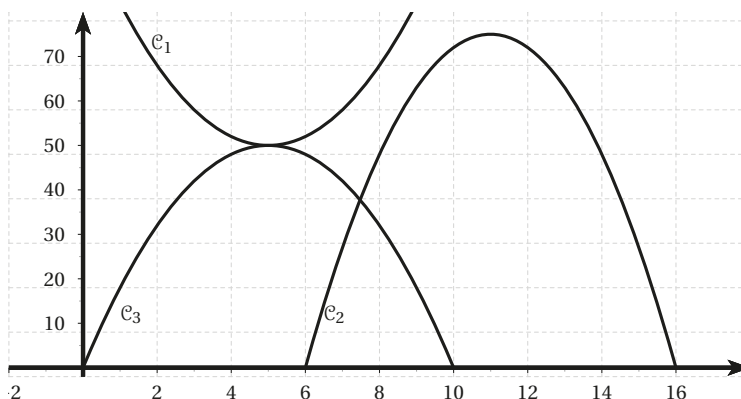
EXERCICE 146**20 minutes**

Un maître nageur veut délimiter la zone de baignade surveillée. Il souhaite réaliser une zone rectangulaire dont un côté est matérialisé par la plage et les trois autres par un cordon flottant amarré à la limite sable - eau. Il dispose de 200 mètres de cordon. Il souhaite délimiter une zone d'aire maximale.

Soit x la longueur, en dizaine de mètres, du côté de la zone perpendiculaire à la plage.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire de baignade.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 20x$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $-2(x - 5)^2 + 50$.
4. Parmi les courbes suivantes, identifier celle qui représente la fonction $\mathcal{A}$.



5. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
6. Pour quelle valeur de x l'aire de la zone de baignade est-elle maximale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

EXERCICE 147**20 minutes**

Un agriculteur veut délimiter un parc pour ses poules et un autre pour ses chèvres. Il souhaite réaliser deux zones carrées indépendantes (il n'y a pas de côté commun aux deux parcs). Il dispose pour cela de 100 mètres de grillages.

Soit x la longueur, en mètres, du côté du parc des poules.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire de totale des deux parcs.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 50x + 625$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $2(x - 12,5)^2 + 312,5$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire totale est-elle minimale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

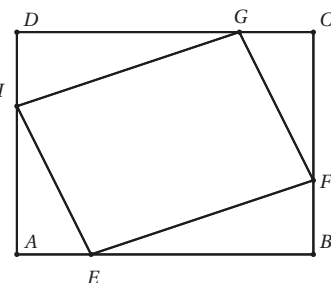
EXERCICE 148**20 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm.

Sur les côtés de ce rectangle, on place les points E , F , G et H comme sur la figure ci-contre tels que : $AE = BF = CG = DH$.

On pose $AE = x$ cm.

On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Vérifier que la somme des aires des quatre triangles AEH , BEF , CFG et DGH est égale à $7x - 2x^2$.
3. En déduire que $\mathcal{A}x = 2x^2 - 7x + 12$.
4. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
6. Existe-t-il une position de E pour laquelle $\mathcal{A}$ est minimale? Si oui, quelle est sa valeur?
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^2 - 7x + 5 = 0$
8. Existe-il une position du point E pour laquelle $\mathcal{A}$ est égale à 7 cm²?

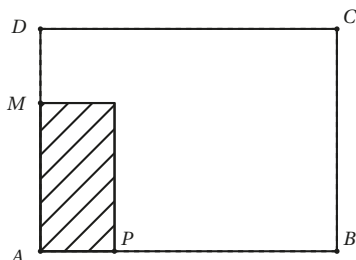
EXERCICE 149**20 minutes**

Dans son champ, Bob possède un poulailler de forme rectangulaire, de dimensions 6 m et 3 m. Il souhaite laisser plus d'espace à ses poules, pour cela il veut construire un enclos comme l'indique la figure ci-contre.

Bob dispose de 21 m de clôture.

Le poulailler est représenté par le rectangle hachuré, la partie en blanc représente la partie extérieure pour les poules.

On pose $AB = x$. On appelle $\mathcal{A}$ la fonction qui à x associe $\mathcal{A}(x)$ correspondant à l'aire extérieure.



1. Démontrer que $AD = 15 - x$.
2. Démontrer que $\mathcal{A} = -x^2 + 15x - 18$.
3. Démontrer que la forme canonique de $\mathcal{A}(x)$ est $-\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{153}{4}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire $\mathcal{A}$ est-elle maximale? Quelle est alors la valeur de cette aire?

1.5 Aller plus loin

EXERCICE 150

15 minutes

Pour un réel x , l'unique nombre dont le cube est égal à x s'appelle la racine cubique de x et se note $\sqrt[3]{x}$.

☞ On a donc pour tous réels x et y , $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ et $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$.

Soit $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

1. Montrer que $t^3 + 3t - 4 = 0$.
2. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $\forall t \in \mathbb{R} : t^3 + 3t - 4 = (t-1)(at^2 + bt + c)$.
3. En déduire que t est un nombre entier.

EXERCICE 151

10 minutes

Deux points M_1 et M_2 sont mobiles sur un même axe $x'Ox$. Leurs mouvements commencent à l'instant de date $t = 0$. L'équation horaire du mouvement de M_1 est $x_1 = -t^2 + 10t$, celle du mouvement de M_2 , $x_2 = -\frac{6}{5}t^2 + 7t + 20$, x_1 et x_2 désignant les abscisses des points M_1 et M_2 à l'instant t .

1. Montrer que les mobiles M_1 et M_2 se rencontrent une fois et une seule au cours du mouvement. Dire à quel instant et en quel point.
2. Calculer les vitesses instantanées des deux mobiles à l'instant de leur rencontre.
☞ Si un point A se déplace selon une trajectoire d'équation $x = f(t)$, sa vitesse à l'instant t_0 sera $v_0 = f'(t_0)$.

EXERCICE 152

15 minutes

Lors d'une course hippique, les chevaux sont numérotés de 1 à n . Un des chevaux, blessé, ne prend pas le départ, la somme des numéros des partants est 260.

Combien y a-t-il eu de partants et quel est le numéro du cheval non partant?

EXERCICE 153

15 minutes

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2^e en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3^e en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.

Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les enfants ont eu le même nombre de bonbons?

EXERCICE 154

10 minutes

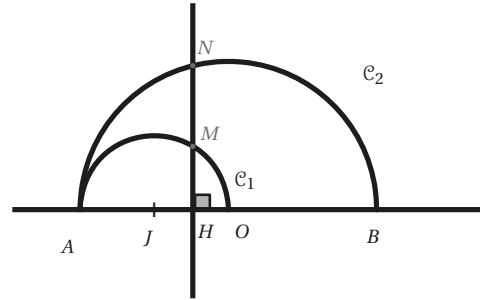
Existe-t-il des valeurs $n \in \mathbb{N}$, telles que les deux racines du polynôme $P(x) = x^2 + nx + 1$ soient rationnelles?

EXERCICE 155**20 minutes**

Soit $[AB]$ un segment de longueur 2, $\mathcal{C}_1$ le demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, $\mathcal{C}_2$ le demi-cercle de centre J et de diamètre $[AO]$.

Soit H un point du segment $[AO]$. La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe $\mathcal{C}_1$ en N et $\mathcal{C}_2$ en M .

Où placer le point H de sorte que $MN = \frac{1}{2}$?

**EXERCICE 156****10 minutes**

Comment choisir les constantes réelles a , b et c pour que la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation $xP'(x) - 2P(x) = 0$?

EXERCICE 157**20 minutes**

1. Déterminer les entiers relatifs a , b , c et d tels que, pour tout réel x , on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + 8 = (x + b)(x^2 + cx + d).$$

Attention, il y a plusieurs solutions.

2. Soit p un nombre premier donné, supérieur à 2, déterminer, en fonction de p , les entiers relatifs a , b , c et d tels que, pour tout réel x , on ait

$$x^3 + ax^2 + 4x + p = (x + b)(x^2 + cx + d).$$

EXERCICE 158**20 minutes**

1. Décomposer le polynôme $x^4 + 4$ en produit de deux facteurs du second degré.
2. En déduire que 5 est le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$, avec N entier naturel.
3. Montrer que si N n'est pas un multiple de 5, $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

EXERCICE 159**20 minutes**

Dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable x , on considère les cinq polynômes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 définis par

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 1, & A_1(x) &= x - 1, & A_2(x) &= (x - 1)(x - 2), \\ A_3(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3), & A_4(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4). \end{aligned}$$

1. Montrer que tout polynôme P qui possède un degré inférieur ou égal à 4 admet une expression, et une seule, de la forme

$$P = a_0 A_0 + a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 \text{ où } a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ et } a_4 \text{ sont des constantes réelles.}$$

2. On choisit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^4$.

Calculer les coefficients correspondants à ce polynôme.

EXERCICE 160**20 minutes**

Déterminer le réel a pour que l'équation $x^2 - 5x + a = 0$ admette deux solutions réelles distinctes comprises entre 1 et 9.

EXERCICE 161**15 minutes**

1. Démontrer que $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$.

☞ Pour tout réel $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

2. On suppose que $\tan a$ et $\tan b$ sont les solutions de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

Déterminer la relation entre p et q pour que $a + b = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 162**15 minutes**

1. Sachant que l'équation $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$ admet deux solutions réelles opposées, déterminer ces deux solutions.

2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

3. Montrer que l'équation n'admet que deux solutions réelles.

EXERCICE 163**15 minutes**

On considère l'ensemble (E) des équations de degré 4, à coefficients réels, de la forme

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (1).

2. Après avoir divisé l'équation par x^2 et posé $u = x + \frac{1}{x}$, montrer que la nouvelle inconnue u est solution de l'équation : (2) $u^2 + au + b - 2 = 0$.

3. En déduire les solutions de l'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 164 : MÉTHODE DE DEL FERRO**30 minutes**

Le but de l'exercice est d'établir une formule permettant de résoudre les équations de degré 3.

1. En posant $x = t - \frac{b}{3a}$, montrer que toute équation de degré 3, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3 + pt + q = 0$

2. En développant $(u + v)^3$, montrer que $t = u + v$ est solution de l'équation $t^3 + pt + q = 0$ si

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

3. En posant $X = u^3$ et $Y = v^3$, montrer que X vérifie l'équation $(E) \quad U^2 + qU - \frac{p^3}{27} = 0$.

4. Résoudre l'équation (E) .

5. En déduire les valeurs de u et v en fonction de p et q .

6. En déduire une solution exacte de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, en fonction de a, b, c et d .

7. Déterminer une solution exacte de chaque équation :

- a. $x^3 + 3x + 2 = 0$
- b. $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 0$.

EXERCICE 165**50 minutes**

On appelle polynôme réciproque de degré n , tout polynôme de degré n tel que, pour tout réel x non nul : $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x)$.

1. Démontrer que si α est une racine non nulle de P , alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P .
2. On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.
 - a. Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
 - b. Pour tout réel x non nul, on pose $X = x + \frac{1}{x}$. Calculer X^2 .
 - c. Démontrer que pour tout réel x non nul, résoudre l'équation $P(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $Q(X) = 0$, où Q est un polynôme de degré 2 que l'on déterminera.
 - d. Déterminer les racines de Q .
 - e. En déduire les racines de P .
3. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + \frac{27}{10}x^3 - 11x^2 + \frac{27}{10}x + 1$.
 - a. Démontrer que P est un polynôme réciproque de degré 4.
 - b. Déterminer une racine « évidente » de P , que l'on notera x_1 .
 - c. En déduire une autre racine de P , que l'on notera x_2 .
 - d. Déterminer un polynôme Q tel que pour tout réel x : $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q(x)$.
 - e. Déterminer les racines de Q .
 - f. En déduire toutes les racines de P .
4. Soit le polynôme $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$.
 - a. Démontrer que P est un polynôme réciproque.
 - b. Démontrer que -1 est une racine de P .
 - c. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x , $P(x) = (x + 1)Q(x)$. Que peut-on dire du polynôme Q ?
 - d. Que peut-on en déduire pour la recherche des racines d'un polynôme réciproque de degré 5?
 - e. Déterminer les racines de P lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

EXERCICE 166**15 minutes**

Mettre sous forme de produit de trinômes du second degré la fonction polynôme

$$f(x) = x^8 + x^4 + 1.$$

EXERCICE 167**15 minutes**

Soient trois fonctions polynômes :

$$A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, B(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0, C(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0.$$

Les constantes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1$ et c_2 sont réelles et choisies de telle façon que, pour

tout réel x , on ait $A^2(x) + B^2(x) = C^2(x)$.

De plus a_0 , b_0 et c_0 sont tous trois non nuls.

1. Montrer que, si deux de ces trois polynômes admettent une racine commune, cette racine est aussi racine du troisième.
2. Montrer que, si les deux polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent une racine commune, cette racine est également racine de $B(x)$ et de $C(x)$.

EXERCICE 168**30 minutes**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit Q une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$.
 - a. Calculer $(x-1)Q(x)$ et en déduire, pour $x \neq 1$ une expression de $Q(x)$ sous forme d'une fonction rationnelle.
 - b. A l'aide d'une dérivation, en déduire une autre expression du polynôme

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.$$

2. Soit p un nombre réel, $0 < p < 1$. Un coureur s'entraîne sur un parcours comportant n haies, numérotées de 1 à n . Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq n$, la probabilité de renverser la i -ème haie est p . Le coureur poursuit son parcours jusqu'à la $n-i$ ème haie, quel que soit le nombre de haies renversées.

Soit X la variable aléatoire définie par

$$X = \begin{cases} n+1 & \text{si aucune haie n'est renversée} \\ k & \text{si } k \text{ est le numéro de la première haie renversée} \end{cases}$$

- a. Calculer en fonction de p et k la probabilité $P(X = k)$.
- b. Préciser $P(X = 1)$ et $P(X = n+1)$.
- c. Vérifier que $P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n+1) = 1$.
- d. Calculer l'espérance de X en fonction de n et p .

EXERCICE 169 : POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV**30 minutes**

On définit une suite de polynômes (T_n) en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

1. Expliciter T_2 , T_3 , T_4 et T_5 .
2. Conjecturer le degré de T_n et la valeur de son coefficient dominant.
3. En supposant que les polynômes T_n et T_{n+1} sont de degrés respectifs n et $n+1$, montrer qu'alors le polynôme T_{n+2} est de degré $n+2$.
4. En supposant que les coefficients dominants des polynômes T_n et T_{n+1} sont respectivement 2^{n-1} et 2^n , montrer qu'alors le coefficient dominant de T_{n+2} est 2^{n+1} .
5. En utilisant les résultats de la première question, conjecturer la parité du polynôme T_n .
6. En supposant que T_n est une fonction paire et T_{n+1} est une fonction impaire, démontrer qu'alors T_{n+2} est une fonction paire.

7. En supposant que T_n est une fonction impaire et T_{n+1} est une fonction paire, démontrer qu'alors T_{n+2} est une fonction impaire.

EXERCICE 170**55 minutes**

Soit une équation du second degré, $x^2 - sx + p = 0$, admettant, par hypothèse, deux solutions réelles distinctes α et β .

Partie A

Dans cette question, on désigne par P la fonction polynôme définie par $P(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels donnés.

A chaque couple $(a; b)$ correspond donc une fonction P .

On représente par $P(x)$ l'image de x par la fonction P .

1. Montrer qu'il existe toujours une fonction P et une seule telle que l'on ait $P(\alpha) = A$ et $P(\beta) = B$, où A et B sont deux nombres fixés arbitrairement.
Calculer les valeurs correspondantes de a et b à l'aide de α , β , A et B .
2. A chaque entier naturel n , on associe la fonction P_n , une fonction P particulière, définie par les deux conditions $P_n(\alpha) = \alpha^n$ et $P_n(\beta) = \beta^n$.
Soit la fonction $Q_n = P_{n+1} - \alpha P_n$.
 - a. Calculer $Q_n(\alpha)$ et $Q_n(\beta)$.
 - b. En déduire que l'on a (1) $Q_n(x) = \beta^n(x - \alpha)$.
 - c. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$, les relations $Q_n = \beta Q_{n-1}$ et (2) $P_{n+1} - sP_n + pP_{n-1} = 0$.

Partie B

On désigne par u_n la dérivée (constante) de chaque fonction P_n .

1. Etablir la relation (3) $u_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$.
2. Démontrer les égalités suivantes :
pour $n \geq 0$, (4) $u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n$ et (4') $u_{n+1} - \beta u_n = \alpha^n$.
et pour $n \geq 1$, (5) $u_{n+1} - s u_n + p u_{n-1} = 0$.
3. En déduire que α et β sont racines de toute équation de la forme $x^n = u_n x - p u_{n-1}$.
4. Si n et m sont deux entiers naturels quelconques, vérifier que $u_{n+m} = u_n \alpha^m + u_m \beta^n$.
5. Etablir la formule (6) $u_{n+m} = s \cdot u_n u_m - p \cdot (u_n u_{m-1} + u_m u_{n-1})$.

Partie C : Application à la résolution approchée d'une équation

1. Expliquer la possibilité de calculer les termes successifs de la suite (u_n) en utilisant systématiquement la relation (5) à partir de $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
2. On suppose $|\alpha| < |\beta|$. Montrer, d'après (3), que la suite (x_n) définie pour $n \geq 1$ par $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers β lorsque n tend vers l'infini.
3. Montrer, d'après (4) et (4'), que les rapports successifs $\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$ forment une suite géométrique de raison $\frac{\alpha}{\beta}$.

4. Soit l'équation $x^2 - 6x - 1 = 0$ dont les solutions sont $\alpha = 3 - \sqrt{10} < 0$ et $\beta = 3 + \sqrt{10} > 0$.

- a. Calculer les termes de la suite (u_n) correspondante pour $n \leq 5$.
- b. Calculer les termes de la suite (x_n) pour $1 \leq n \leq 4$.
- c. Vérifier que β est compris entre x_1 et x_2 .
 - ☞ Plus généralement, le nombre β est encadré par deux termes consécutifs quelconques de la suite (x_n) .

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Suites numériques

2.1.1 Point de cours

Définition : une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) \text{ aussi noté } u_n.$$

On note cette suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ou même (u_n) .

Représentation graphique : une suite numérique (u_n) peut être représentée par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Notations : la suite u se note (u_n) .

Le terme de rang n de la suite (u_n) se note u_n .

Définition explicite : la suite (u_n) est définie par son terme général : $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Définition par récurrence : soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel, une suite (u_n) peut être définie par : $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sens de variation :

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- la suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite (u_n) est **monotone** lorsque la suite est **croissante** ou **décroissante**.

Encadrement d'une suite :

on dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n : $u_n \leq M$;

on dit qu'une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier n : $u_n \geq m$.

Une suite **majorée et minorée** est dite **bornée**.

2.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 171

10 minutes

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{3}{n}$.
3. Pour tout $n \geq 3$, $u_n = 3\sqrt{\frac{n}{n^2 - 3n}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 3n$.
5. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 172

10 minutes

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
2. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2115}$.

EXERCICE 173

10 minutes

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) définies par une relation de récurrence :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$.
2. $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n$.
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$.
5. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.
6. $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{3}{u_n^2 + 2}$.

EXERCICE 174

15 minutes

Calculer les 10 premiers termes des suites logiques (u_n) , puis exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

1. 1, 4, 7, 10, 13.
2. 1, 2, 4, 8.
3. 27, 24, 21
4. 1, -3, 9, -27, 81

EXERCICE 175

10 minutes

Calculer les cinq termes suivants des suites logiques :

1. 1, 1, 2, 3, 5, 8.
2. 1, 11, 21, 1211, 111221
3. 1, 2, 6, 42, 1806.
4. 4, 6, 15, 105.

EXERCICE 176

5 minutes

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) définies par :

1. u_n est le $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\frac{9}{11}$.
2. u_n est le chiffre des unités de 7^n .

EXERCICE 177

5 minutes

Calculer les 5 premiers termes des suites (u_n) définie par :

1. u_n est le reste de la division euclidienne de $3n + 5$ par 7.
2. u_n est la somme des inverses des n premiers entiers naturels non nuls.

EXERCICE 178

10 minutes

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24}{24}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule explicite plus simple pour u_n .
3. Calculer u_5 . Conclure.

EXERCICE 179**10 minutes**

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = u_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6}$.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .
2. Conjecturer une formule explicite plus simple pour u_n .
3. Calculer u_6 . Conclure.

EXERCICE 180**5 minutes**

Représenter sur un axe les six premiers termes de la suite (u_n) définie par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$
2. $u_n = (-1)^n$

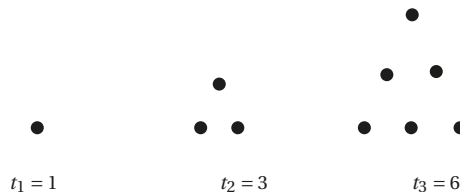
EXERCICE 181**5 minutes**

Représenter dans le plan les six premiers termes de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
2. $u_n = \sqrt{n}$

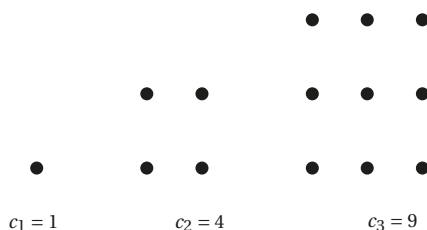
2.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 182****15 minutes**

1. Soit la suite (t_n) , où t_n est le nombre de points d'un réseau triangulaire à n étages, comme sur les figures suivantes :



- a. Calculer t_4 , t_5 et t_6 .
- b. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n .
- c. On conjecture l'existence de trois réels a , b et c tels que $t_n = an^2 + bn + c$. Calculer a , b et c .

- d. Démontrer cette conjecture.
 e. Combien y a-t-il de points dans un réseau triangulaire à 2019 étages?
2. Soit la suite (c_n) , où c_n est le nombre de points d'un réseau carré à n étages, comme sur les figures suivantes :



- a. Calculer c_4 , c_5 et c_6 .
 b. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n .
 c. Exprimer c_n en fonction de n .
 d. Combien y a-t-il de points dans un réseau carré à 2019 étages?

EXERCICE 183**10 minutes**

1. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal, représenter la droite $\mathcal{D}$, d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3\sqrt{x} + 1$.
 2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 1$.
 a. Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
 b. Vérifier que $u_1 = f(u_0)$, placer alors u_1 , puis le reporter sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $\mathcal{D}$.
 c. En procédant de la même manière, placer u_2 , u_3 et u_4 .
 3. Représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) en supposant maintenant que $u_0 = 20$.

EXERCICE 184**10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$.

1. En utilisant la méthode de l'exercice 183, représenter les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
 2. Conjecturer le comportement de la suite : sens de variation, bornes et limite.

EXERCICE 185**10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 3 + u_n^2$.

1. En utilisant la méthode de l'exercice 183, représenter les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
 2. Conjecturer le comportement de la suite : sens de variation, bornes et limite.

EXERCICE 186**15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = f(n)$ à l'aide des variations de la fonction f :

1. $u_n = 2 + \frac{3}{n}$

2. $u_n = 5 - \frac{2}{n}$

3. $u_n = n^2 - 2n$

4. $u_n = \frac{2n-1}{n^2}$

EXERCICE 187**15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la « méthode des différences » :

1. $u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. $u_n = 2^n - n$

2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 3$

EXERCICE 188**15 minutes**

Etudier la monotonie de la suite (u_n) à l'aide de la « méthode du quotient » :

1. $u_n = n \times 2^n$

3. $u_n = \frac{3^n \sqrt{n}}{5^n}$

2. $u_n = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n}$

4. $u_n = 2019 \times (0,99)^n$

EXERCICE 189**15 minutes**

En utilisant dans chaque cas une des méthodes des exercices **186**, **187**, **188**, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

3. $u_n = n^3 - n^2 + 5n - 3$

2. $u_n = 2020 \times 1,02^n$

4. $u_n = \frac{n+1}{2n}$

EXERCICE 190**10 minutes**

Montrer que les suites (u_n) sont bornées.

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

3. $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$

2. $u_n = 2 - \sin n$

4. $u_n = \frac{3n-5}{3n+5}$

EXERCICE 191**10 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n) .

2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3. En déduire une expression simplifiée de u_n .

4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

EXERCICE 192**15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} (n \text{ radicaux})$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
4. Conjecturer son comportement.

EXERCICE 193**20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ et la droite d'équation $y = x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Placer les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
3. Conjecturer le sens de variations et la limite de la suite (u_n) .
4. Démontrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors ℓ vérifie l'équation $\ell^2 - \ell - 3 = 0$.
5. On admet que la suite (u_n) converge vers ℓ . Déterminer la valeur exacte de ℓ .

EXERCICE 194 : SUITE DE FIBONACCI**15 minutes**

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$,
 $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Calculer les 11 premiers termes de la suite (u_n) .
2. Calculer les 10 premiers termes de la suite (v_n) .
3. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
4. Ecrire une fonction en Python qui détermine le plus petit n tel que $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - v_n \right| \leq 10^{-10}$.
5. En déduire la valeur de n tel que $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - v_n \right| \leq 10^{-10}$.

EXERCICE 195**15 minutes**

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Conjecturer une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 196 : MODÈLE DE MALTHUS**20 minutes**

Lorsque Malthus publie son *Essai* en 1800 :

- L'Angleterre compte 8 millions d'habitants et la population augmente de 2% chaque année;
- L'agriculture anglaise permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 0,4 millions d'habitants supplémentaires par an.

1. Modéliser la population p_n l'année $1800 + n$ suivant ces hypothèses avec $p_0 = 8$.
2. Modéliser le nombre d'habitants a_n que peut nourrir l'agriculture en $1800 + n$ avec $a_0 = 10$.
3. En utilisant la calculatrice ou un tableur, déterminer p_{100} et a_{100} pour l'année 1900.
4. Ecrire un programme en Python qui permet de déterminer l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise suivant ce modèle.

EXERCICE 197 : MODÈLE DE VOLTERRA**25 minutes**

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l'évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l'Adriatique : les effectifs des deux espèces varient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalée dans le temps.

Il s'agit, plus généralement, de l'étude de l'évolution de deux populations (proies et prédateurs) ayant une incidence l'une sur l'autre.

On note u_n le nombre de lièvres (les proies) et v_n le nombre de lynx (les prédateurs) l'année n .

- En l'absence de prédateurs, le taux de reproduction des lièvres est de 5% par an (les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire si elles ne sont soumises à aucune prédation).
- En l'absence des proies, le taux de mortalité des prédateurs est de 3% par an (il est supposé constant dans ce modèle : il représente la mort naturelle des prédateurs).
- Le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs est supposé, dans ce modèle, proportionnel au nombre de prédateurs : soit dans notre cas 0,1%.
- Le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées est supposé, là encore, proportionnel, soit dans notre cas 0,02%.

$$\text{On a donc } \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = 0,05 - 0,001 v_n & \text{équation des proies} \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = -0,03 + 0,0002 u_n & \text{équation des prédateurs} \end{cases}$$

1. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
2. Que se passe-t-il en l'absence de proies?
3. Que se passe-t-il en l'absence de prédateurs?
4. On suppose que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$. Montrer qu'il existe des conditions initiales u_0 et v_0 pour lesquelles le nombre de proies et de prédateurs reste constant.
5. Ecrire un programme en Python qui permet de calculer la population de proies et de prédateurs pour n , u_0 et v_0 paramètres donnés en entrée, soit la fonction `population(n, u, v)`.
6. Compléter ce programme pour qu'il trace la courbe des deux populations jusqu'à l'année n donnée.
7. Tester le programme pour $n = 20$ puis pour $n = 100$, $u_0 = 300$ et $v_0 = 50$.

EXERCICE 198 : MODÈLE DE VERHULST**25 minutes**

On étudie la dynamique de croissance de bactéries au cours du temps. Soit u_0 la population initiale exprimée en centaines de bactéries et u_n la population après n heures.

On suppose que cette dynamique obéit à deux règles :

- les bactéries se reproduisent chaque année avec un taux α donné,
- les ressources nutritives du milieu n'étant pas illimitées, les bactéries ont un taux de mortalité dû à la concurrence avec les bactéries déjà présentes.

Pierre Verhulst propose en 1840 la loi suivante :

$$0 < u_0 < 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 + \alpha)(1 - u_n).$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite dans les cas suivants :

- a. $u_0 = 0,2$ et $\alpha = 1$
- b. $u_0 = 0,5$ et $\alpha = 1$
- c. $u_0 = 0,9$ et $\alpha = 1$

2. Ecrire un programme en Python qui demande la valeur de u_0 et α et détermine le nombre de bactéries présentes au bout de 100 heures.

3. Tester le programme pour :

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a. $u_0 = 0,2, \alpha = 0,5$ | f. $u_0 = 0,5, \alpha = 0,5$ | k. $u_0 = 0,9, \alpha = 0,5$ |
| b. $u_0 = 0,2, \alpha = 1$ | g. $u_0 = 0,5, \alpha = 1$ | l. $u_0 = 0,9, \alpha = 1$ |
| c. $u_0 = 0,2, \alpha = 1,8$ | h. $u_0 = 0,5, \alpha = 1,8$ | m. $u_0 = 0,9, \alpha = 1,8$ |
| d. $u_0 = 0,2, \alpha = 2,5$ | i. $u_0 = 0,5, \alpha = 2,5$ | n. $u_0 = 0,9, \alpha = 2,5$ |
| e. $u_0 = 0,2, \alpha = 2,55$ | j. $u_0 = 0,5, \alpha = 2,55$ | o. $u_0 = 0,9, \alpha = 2,55$ |

4. Observer les résultats obtenus.

EXERCICE 199**20 minutes**

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n , cette évolution par :

$$\begin{cases} b_0 &= 1000 \\ c_0 &= 1500 \\ b_{n+1} &= 0,3b_n + 0,5c_n \\ c_{n+1} &= -0,5b_n + 1,3c_n \end{cases}$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1^{er} juin de l'année 2000 + n (où n désigne un entier naturel).

1. Calculer les dix premiers termes des suites (b_n) et (c_n) .
2. Lucie propose l'algorithme ci-dessous.

```

N ← 0
B ← 1000
C ← 1500
Tant que B > 2 ou C > 2
    N ← N + 1
    R ← B
    B ← 0,3R + 0,5C
    C ← -0,5R + 1,3C
Fin Tant Que
Afficher N

```

Programmer cet algorithme et l'exécuter.

Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols?

3. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$b_n = 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2}n \times 0,8^n \text{ et } c_n = 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2}n \times 0,8^n$$

et $n \leq 10 \times 1,1^n$.

- a. En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n) .
- b. Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus.
A la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l'exercice vous paraît-il cohérent?

EXERCICE 200 : Vrai/Faux

10 minutes

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$.

☞ **Notation :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ et $0! = 1$

1. Vrai/Faux : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$
2. Vrai/Faux : La suite (u_n) est croissante.
3. Vrai/Faux : Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geq 2$ alors $0 \leq u_n \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.
4. Vrai/Faux : La suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 201

20 minutes

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0,75u_n$.

1. Ecrire une fonction en Python permettant de calculer le $n^{\text{ème}}$ terme pour n donné.
2. Modifier la fonction pour qu'il affiche tous les termes jusqu'au $n^{\text{ème}}$.

EXERCICE 202

20 minutes

Le 1^{er} janvier, Math dépose 1000 € sur un livret qui rapporte 2% chaque premier janvier. Math ne touchera pas à l'argent déposé sur son livret tant que la somme sera inférieure à 2000 €. Soit (s_n) la somme sur le livret l'année n après le premier dépôt.

1. Déterminer s_0 , calculer s_1, s_2 .
2. Déterminer s_{n+1} en fonction s_n .
3. Ecrire un programme en Python permettant de savoir en quelle année la somme sur le livret dépassera les 2000 €.
4. Au bout de combien d'années, Math pourra retirer de l'argent sur son livret?

EXERCICE 203**20 minutes**

On considère une suite (T_n) telle que $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ et pour tout $n \geq 2$, $T_{n+1} = 1 + T_1 T_2 \cdots T_n$.

1. Déterminer T_3, T_4 et T_5 .
2. Ecrire une fonction en Python qui retourne, pour un n donné, la liste des T_k pour $1 \leq k \leq n$.

EXERCICE 204 : SUITE DE PROUHET-THUE-MORSE**20 minutes**

Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$.

1. Calculer t_{2019} et t_{2020} .
2. Ecrire une fonction en Python qui, pour n donné, retourne la valeur de t_n .

2.2 Suites arithmétiques

2.2.1 Point de cours

Définition : une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé **raison de la suite** (u_n) .

Forme explicite : si la suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

2.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 205**10 minutes**

Les suites (u_n) sont-elles arithmétiques? Si oui, donner la raison.

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1. $u_n = 2n + 3$. | 3. $u_{n+1} = u_n - 2$. | 5. $u_n = \sqrt{2017} - 2016n$. |
| 2. $u_n = \frac{n+1}{n}$. | 4. $u_n = n^2 + n + 3$. | 6. $u_n = u_{n-1} + n - 1$. |

EXERCICE 206**10 minutes**

Les suites (u_n) sont-elles arithmétiques? Si oui, donner la raison.

- | | | |
|---|--------------------------------------|------------------------------|
| 1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 - u_n$. | 3. Suite des entiers naturels pairs. | 5. $u_n = n(n - 2)$. |
| 2. $u_0 = -\sqrt{2}$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$. | 4. Suite des nombres premiers. | 6. $u_n = (n + 1)^2 - n^2$. |

EXERCICE 207**5 minutes**

Déterminer les cinq premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r :

1. $u_0 = 2$ et $r = 1,5$.
2. $u_0 = 0$ et $r = 0,3$.
3. $u_0 = 3$ et $r = -2$.
4. $u_0 = -1234$ et $r = 5$.

EXERCICE 208**5 minutes**

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est arithmétique de raison r :

1. $u_0 = 3$ et $r = 2$.
2. $u_2 = 5$ et $r = -3$.
3. $u_1 = 0$ et $r = \sqrt{2}$.
4. $u_0 = 0$ et $r = 1$.

EXERCICE 209**5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1. Calculer u_8 et u_{23} sachant que $u_0 = 2$ et $r = -5$.
2. Calculer u_{2019} sachant que $u_2 = -5$ et $r = 3$.
3. Calculer u_{2020} sachant que $u_0 = 1$ et $r = \sqrt{2}$.

EXERCICE 210**5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_{10} = 6$ et $u_{28} = 1,5$
2. $u_6 = 9$ et $u_{12} = 69$
3. $u_9 = 19$ et $u_{18} = 2017$
4. $u_3 = 2019$ et $u_{2019} = 3$.

EXERCICE 211**5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison des suites arithmétiques suivantes :

1. $u_1 = 5$ et $u_2 = 8$
2. $u_2 = 3$ et $u_6 = 7$
3. $u_5 = 2019$ et $u_{2019} = 5$
4. $u_{10} = 8$ et $u_{20} = 2$

EXERCICE 212**10 minutes**

Déterminer la forme explicite des suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = u_n + 2$
3. $u_1 = -7$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{3}$
4. $u_2 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{3}$

EXERCICE 213**10 minutes**

Déterminer la forme explicite des suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{3}$
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - \sqrt{15}$
3. $u_9 = 9$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{9}$
4. $u_5 = -3\sqrt{5}$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{5}$

EXERCICE 214**5 minutes**

Montrer que si la suite (u_n) est arithmétique, de premier terme u_0 ,

alors pour $n > 0$, $u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

EXERCICE 215**10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Montrer que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) sont des suites arithmétiques dont on précisera la raison et le premier terme.

$$a_n = 2u_n - 15$$

$$b_n = u_{3n}$$

$$c_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$$

EXERCICE 216**10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Etudier le sens de variations de la suite (u_n) en fonction de r .

EXERCICE 217**5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Démontrer que $u_n = u_0 + nr$.

EXERCICE 218**5 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p , p étant un entier naturel quelconque.

Démontrer que $u_n = u_p + (n - p)r$.

EXERCICE 219**15 minutes**

Tous les 5 ans, on effectue un relevé de la population d'une ville A. En 2000, ce relevé a donné 125 milliers d'habitants. Les relevés suivants montrent une augmentation régulière de 3750 habitants.

Soit R_n , la valeur (en milliers d'habitants) du relevé de rang n ($R_0 = 125$ en 2000, R_1 relevé en 2005 etc.).

1. Calculer R_1 , R_2 et R_3 .
2. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n . En déduire la nature de la suite (R_n) et préciser le premier terme et la raison.
3. Exprimer R_n en fonction de n .
4. Si cette évolution se poursuit, quelle population peut-on prévoir pour l'an 2030?
5. En quelle année la population dépassera 163 milliers d'habitants?

EXERCICE 220**15 minutes**

Math décide de s'entraîner pour le marathon qui se déroulera dans sa ville le premier dimanche du mois de septembre. Il commence son entraînement la première semaine (incomplète) du mois de janvier et décide de courir 5 km trois fois par semaine la première semaine, puis d'ajouter 500 m à ses trois entraînements chaque semaine.

Soit (u_n) la suite définissant le nombre de kilomètres parcourus par Math lors d'un entraînement de la semaine n , ainsi $u_1 = 5$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

5. Combien de kilomètres devra courir Math lors de ses trois entraînements de la dernière semaine du mois d'août?

2.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 221

10 minutes

Déterminer une progression arithmétique de 4 termes ayant pour raison 6 et telle que le produit de ses termes soit égal à 385.

EXERCICE 222 : VRAI/FAUX

20 minutes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites (v_n) et (w_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier la réponse.

1. La suite (v_n) est arithmétique.
2. La suite (w_n) est constante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
4. La suite (u_n) n'a pas de limite finie.

EXERCICE 223 : VRAI/FAUX

10 minutes

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on désigne par u_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n côtés.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier la réponse.

1. $u_5 = 6$ et $u_6 = 10$.
2. Pour tout $n \geq 3$, on a $u_{n+1} = u_n + n - 1$.
3. La suite (u_n) est arithmétique de raison $n - 1$.
4. Pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

EXERCICE 224

10 minutes

Le 1^{er} septembre 2017, Tom décide de mettre de l'argent de côté pour ses vacances d'été. Il dépose 500 € le 1^{er} septembre, puis 30 € de moins par rapport au mois précédent chaque 1^{er} du mois.

Soit t_n la somme mise de côté le n -ième mois. On pose $t_0 = 500$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n . En déduire la nature de la suite (t_n) .
2. En déduire t_n en fonction de n .
3. De combien disposera Tom le 31 juillet 2018.

EXERCICE 225

10 minutes

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

1. Démontrer que $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.
2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 226**10 minutes**

Math dispose de 4000 € qu'il place à intérêts simples au taux annuel de 5%. Les intérêts simples sont des intérêts perçus qui ne produisent pas eux-mêmes d'intérêts (seul le capital de départ produit des intérêts).

On note C_0 le capital de départ et C_n le capital constitué après n années de placement.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire la nature de la suite (C_n) .
3. Exprimer C_n en fonction de n .
4. De quelle somme disposera Math s'il laisse son argent placé pendant 15 ans?

EXERCICE 227**10 minutes**

Math dispose de 10000 € qu'il place à intérêts simples au taux annuel de 3%.

On note C_0 le capital de départ et C_n le capital constitué après n années de placement.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire la nature de la suite (C_n) .
3. Exprimer C_n en fonction de n .
4. De quelle somme disposera Math s'il laisse son argent placé pendant 10 ans?

EXERCICE 228**10 minutes**

Math dispose de 5000 € qu'il place à intérêts simples au taux annuel de 6%.

On note C_0 le capital de départ et C_n le capital constitué après n années de placement.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire la nature de la suite (C_n) .
3. Exprimer C_n en fonction de n .
4. De quelle somme disposera Math s'il laisse son argent placé pendant 5 ans?

EXERCICE 229**10 minutes**

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$

Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 230**10 minutes**

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, $\forall n \in \mathbb{N}^* : nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$. Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .
- Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2009} .

EXERCICE 231**15 minutes**

Pierre se constitue une tirelire afin d'acheter un vélo qui coûte 150 €.

Après un dépôt initial dans cette tirelire de 8 €, il décide qu'à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée à la fin de chaque mois sera augmentée de 2 € par rapport à celle du mois précédent. Ainsi, à la fin du premier mois, il déposera 10 € et la tirelire contiendra 18 €.

On note $p(0)$ le dépôt initial et $p(n)$ la somme déposée à la fin du n -ième mois. On obtient ainsi une suite notée p .

- Calculer $p(1)$ et $p(2)$.
- Montrer que la suite p est arithmétique et donner sa raison. En déduire que $p(n) = 2n + 8$.
- Quelle somme totale contiendra la tirelire au bout de deux mois?
 - Montrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de n mois est $(n+1)(n+8)$.
- Un ami de Pierre lui fait remarquer qu'il devra attendre 9 mois pour pouvoir acheter son vélo. Justifier cette affirmation.

EXERCICE 232**15 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite (u_n) est-elle arithmétique?
- On admet que $\forall n \geq 0, u_n > 0$. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
 - Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 233**15 minutes**

A la naissance de leur fils en 2007, des parents bloquent une somme d'argent afin de pouvoir financer d'éventuelles études à sa majorité.

La banque B leur propose un placement à intérêts simples à 5% par an. Ils décident de simuler un placement de 5 000 €.

On note B_n la somme disponible l'année $(2007 + n)$ suite au placement.

1. Dans le tableau suivant, on donne la copie de la simulation réalisée sur un tableur. Deux nombres ont été effacés, les retrouver et compléter le tableau.

	A	B
1	année	banque B
2	2007	5 000
3	2008	
4	2009	
5	2010	5 750,00
6	2011	6 000,00
7	2012	6 250,00
8	2013	6 500,00
9	2014	6 750,00
10	2015	7 000,00

	A	B
11	2016	7 250,00
12	2017	7 500,00
13	2018	7 750,00
14	2019	8 000,00
15	2020	8 250,00
16	2021	8 500,00
17	2022	8 750,00
18	2023	9 000,00
19	2024	9 250,00
20	2025	9 500,00

2. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n . Quelle est la nature de la suite (B_n) ? Préciser sa raison.
3. Dans le tableau, quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B3 et recopiée vers le bas?
4. Calculer le taux d'évolution exprimé en pourcentage, arrondi au centième, du capital à la fin des dix-huit années.
5. Les parents déposent 10 000 €, au lieu de 5 000 €. Quelle sera la somme disponible à la majorité de leur fils?

EXERCICE 234**15 minutes**

Un corps tombe en chute libre. La distance parcourue chaque seconde forme une suite arithmétique. Ainsi, il parcourt 4,9 m pendant la première seconde, 14,7 m pendant la deuxième seconde, 24,5 m pendant la troisième seconde et ainsi de suite.

Soit d_n la distance parcourue pendant la n^{e} seconde.

- Déterminer la forme explicite de la suite d_n .
- Déterminer la distance parcourue pendant la dixième seconde.
- A l'aide d'un programme, déterminer la distance parcourue par le corps en 10 secondes?

EXERCICE 235**15 minutes**

Un cône est formé de huit disques concentriques empilés. Les diamètres de ces disques sont les termes successifs d'une suite arithmétique. Le plus petit disque a un diamètre de 4 cm et le plus grand un diamètre de 12,4 cm.

- Déterminer la raison de cette suite.
- Déterminer le diamètre de tous les disques.

EXERCICE 236**15 minutes**

Math dispose de 20 000 € à intérêts simples au taux annuel de $t\%$, après 12 ans de placement, il dispose de 25 040 €.

On note C_0 le capital de départ et C_n le capital constitué après n années de placement.

1. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et de t . En déduire la nature de la suite (C_n) .
2. Exprimer C_n en fonction de n et de t .
3. Déterminer t .

EXERCICE 237**15 minutes**

Math dispose de 15 000 € à intérêts simples au taux annuel de $t\%$, après 5 ans de placement, il dispose de 18 000 €.

On note C_0 le capital de départ et C_n le capital constitué après n années de placement.

1. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et de t . En déduire la nature de la suite (C_n) .
2. Exprimer C_n en fonction de n et de t .
3. Déterminer t .

EXERCICE 238**15 minutes**

Une entreprise fabrique des boîtes. La machine fonctionne tous les jours. La production est de 2500 boîtes le 31 mars.

A partir du 1^{er} avril, la production augmente de 35 boîtes par jour. La production du 15 au 30 avril est vendue à un seul client.

On note a_n la production du jour n du mois d'avril.

1. Exprimer a_n en fonction de n .
2. Calculer le nombre de boîtes produites du 15 au 30 avril.
3. Chaque boîte est vendue 2,10 € TTC. Calculer le montant de la facture TTC pour le client.

EXERCICE 239**15 minutes**

Une entreprise met de la farine en sacs de 1 kg. La machine fonctionne tous les jours. La production est de 2000 sacs le 30 novembre.

A partir du 1^{er} décembre, la production augmente de 75 sacs par jour. La production du 5 au 23 décembre est achetée par Math.

On note f_n la production du jour n du mois de décembre.

1. Exprimer f_n en fonction de n .
2. Calculer le nombre de sacs stockés du 5 au 23 décembre.
3. Chaque sac de farine est vendu 0,50 € TTC. Calculer le montant de la facture TTC de Math.

EXERCICE 240**20 minutes**

Une entreprise fabrique des boîtes. La machine fonctionne tous les jours. La production est de 2500 boîtes le 31 mars.

A partir du 1^{er} avril, la production augmente de b boîtes par jour. L'entreprise produit 39 050 boîtes du 10 au 20 avril.

On note a_n la production du jour n du mois d'avril.

1. Exprimer a_n en fonction de n et de b .
2. Exprimer la production du 10 au 20 avril en fonction de b .
3. En déduire b .

EXERCICE 241**20 minutes**

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(an + 1)^2 = a(an^2 + 2n) + 1$.
2. Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = an + 1$ où a est un entier quelconque fixé. Démontrer que la suite (u_n) contient une infinité de carrés.
3. Démontrer que si $v_n = 3n + 4$, la suite (v_n) contient une infinité de carrés.
4. Démontrer plus généralement que si $w_n = an + b$ (a et b étant deux entiers fixés), la suite (w_n) contient une infinité de carrés.

EXERCICE 242**20 minutes**

Un film plastique est enroulé sur un cylindre de 40 mm de diamètre formant un rouleau de 130 mm de diamètre. Le film a une épaisseur de 0,1 mm. On suppose que le premier tour est complet. On assimile le film enroulé à un ensemble de cercles concentriques.

1. Déterminer le nombre total de tours.
2. Montrer que les circonférences de chacun des cercles constituant le rouleau sont les termes d'une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Calculer la longueur total du film.
4. a. Calculer le volume occupé par le film, en notant ℓ la largeur du film.
b. En considérant le film comme un parallélépipède rectangle, déterminer la longueur du film. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 3.

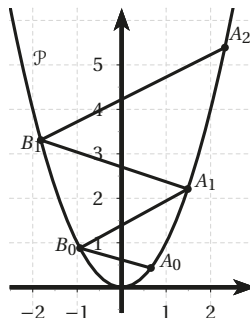
EXERCICE 243**20 minutes**

Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y = x^2$. Soit A_0 un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse $a_0 > 0$. On construit les points A_n et B_n de $\mathcal{P}$ tels que :

- $(A_0B_0), (A_1B_1), \dots, (A_nB_n)$ sont des droites de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$,
- $(B_0A_1), (B_1A_2), \dots, (B_{n-1}A_n)$ sont des droites de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

On désigne par a_n l'abscisse du point A_n et par b_n l'abscisse du point B_n .

1. Déterminer une relation entre a_n et b_n .
2. Déterminer une relation entre a_{n+1} et b_n .
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont deux suites arithmétiques dont on précisera la raison.

**EXERCICE 244****20 minutes**

On se propose de trouver une suite réelle (u_n) vérifiant :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$$

1. On suppose que la suite (u_n) existe.

- a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.
 - b. Démontrer que la suite (v_n) , définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ est une suite arithmétique.
 - c. Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n .
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 3. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit un entier relatif.

2.3 Suites géométriques

2.3.1 Point de cours

Définition : une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Le réel q est appelé **raison de la suite** (u_n) .

Forme explicite : si la suite (u_n) est **géométrique** de raison q et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n$.

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p q^{n-p}$.

2.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 245

10 minutes

Calculer les six premiers termes de la suite géométrique (u_n) , définie par :

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.
2. $u_0 = -1$ et $q = \sqrt{3}$.
3. $u_0 = 6$ et $q = -0,8$.
4. $u_0 = 0$ et $q = \sqrt{234}$.

EXERCICE 246

10 minutes

Calculer les trois premiers termes de la suite géométrique (u_n) , définie par son premier terme et sa raison q , puis donner la forme générale de u_n en fonction de n .

1. $u_0 = 2$ et $q = 0,5$.
2. $u_1 = -1$ et $q = \sqrt{5}$.
3. $u_2 = 4096$ et $q = 0,5$.
4. $u_{2019} = 0$ et $q = 1,4$.

EXERCICE 247

10 minutes

Vérifier que les suites suivantes ne sont pas géométriques :

1. $u_0 = 3$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 5$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{3}$
3. $u_1 = 6$, $u_2 = 3$, $u_3 = 1,5$ et $u_4 = 0,7$.
4. $u_0 = 0$, $u_1 = 3$.

EXERCICE 248

10 minutes

Les suites (u_n) sont-elles géométriques? Si oui, donner la raison.

1. $u_n = -7^{n+2}$.
2. $u_n = \frac{n+1}{n}$.
3. $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$.
4. $u_n = n^2 + n + 3$.
5. $u_n = 2016^n$.
6. $u_n = 2u_{n-1} + 2$.

EXERCICE 249**10 minutes**

Les suites (u_n) sont-elles géométriques? Si oui, donner la raison.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2$.
2. $u_n = (-1)^n$.
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 0,2u_n$.
4. $u_n = \frac{5^n}{2^{n-1}}$.
5. $u_n = 4^n + n^4$.
6. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$.

EXERCICE 250**5 minutes**

1. (u_n) est géométrique, $u_0 = 128$ et $q = -\frac{1}{2}$. Calculer u_3 , u_7 et u_{10} .
2. (v_n) est géométrique, $v_1 = \frac{1}{144}$ et $q = 3$. Calculer v_3 , v_7 et v_{10} .

EXERCICE 251**5 minutes**

1. (u_n) est géométrique, $u_0 = -2$ et $q = 3$. Calculer u_2 , u_5 et u_{12} .
2. (v_n) est géométrique, $v_2 = -1$ et $q = \sqrt{5}$. Calculer v_5 , v_7 et v_{10} .

EXERCICE 252**5 minutes**

Déterminer le premier terme u_0 et la raison ($q > 0$) des suites géométriques suivantes :

1. $u_{10} = 6$ et $u_{12} = 1,5$.
2. $u_9 = 81$ et $u_{13} = 729$.

EXERCICE 253**5 minutes**

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est géométrique de raison q .

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.
2. $u_2 = 5$ et $q = -3$.
3. $u_1 = 1$ et $q = \sqrt{2}$.
4. $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{3}$.

2.3.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 254****10 minutes**

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q .

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.
2. Démontrer que pour tous entiers n et p , $u_n = u_p q^{n-p}$.

EXERCICE 255**10 minutes**

Le premier microprocesseur, l'Intel 4004, intégrait en 1971, 2300 transistors.

En 1975, Gordon Moore, co-fondateur d'Intel, a prédit que le nombre de transistors intégrés dans un microprocesseur devait doubler tous les deux ans. Cette prédiction s'est vérifiée de 1971 à 2003.

1. On note u_0 le nombre de transistors contenus dans un microprocesseur en 1971, u_1 ce nombre en 1973, u_2 en 1975, etc.
Montrer que l'on définit ainsi une suite géométrique finie dont on donnera la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Donner le nombre de transistors contenus dans un microprocesseur en 2003.

EXERCICE 256**15 minutes**

On place un capital $C_0 = 1\,000$ € à 3,5% par an à « intérêts composés » sur un livret d'épargne.

☞ Dans un placement à intérêts composés, les intérêts d'une année, s'ils ne sont pas retirés, s'ajoutent au capital, l'année suivante ils génèrent eux aussi des intérêts.

Soit C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1 , C_2 et C_3 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .
3. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
4. En déduire une expression de C_n en fonction de n .
5. Donner une valeur arrondie au centime de C_{10} .

EXERCICE 257**15 minutes**

Lors de sa naissance, les grands parents de Math placent sur un livret d'épargne 2000 € à intérêts composés au taux annuel de 1,25%.

Aucun nouveau versement, ni aucun retrait ne sont effectués. Soit u_n la somme présente sur le livret dans n années.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. De quelle somme disposera Math le jour de ses 18 ans ?

EXERCICE 258**20 minutes**

Math place un capital $C_0 = 7\,500$ € à 5% par an à « intérêts composés ».

Soit C_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Calculer C_1 , C_2 et C_3 .
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .
3. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
4. En déduire une expression de C_n en fonction de n .
5. De quelle somme disposera Math s'il laisse son argent placé pendant 10 ans ?
6. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

EXERCICE 259**10 minutes**

Une société possède un gisement pétrolifère dont la réserve totale exploitable est estimée en décembre 2005 à 850 millions de barils de pétrole (l'unité choisie pour l'exercice est le million de barils). On note u_n la réserve exploitable restante en décembre de l'année $(2005 + n)$. On a : $u_0 = 850$. Chaque année le pétrole extrait représente 20 % du total de la réserve exploitable restante.

1. Justifier que $u_1 = 680$. Puis calculer les quantités restantes u_2 et u_3 respectivement en décembre 2007 et 2008.
2. Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n (on justifiera clairement chaque réponse).
3. Le tableau suivant est une copie d'une partie de la feuille de calcul d'un tableur.

	A	B
1	n	u_n
2	0	850
3	1	680
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

Quelle formule à recopier vers le bas faut-il inscrire dans la cellule B3? Que devient cette formule en B7?

- Le gisement sera considéré comme épuisé lorsque la réserve exploitable sera inférieure à un million de barils. Déterminer à partir de quelle année le gisement sera épuisé.
- Déterminer la production totale de pétrole extrait entre 2006 et 2017 inclus. Le résultat sera arrondi au millième.

EXERCICE 260**10 minutes**

Le vendredi 1^{er} septembre 2017, Math promet à Tom de lui donner tous les vendredis du chocolat pour son aide précieuse en mathématiques. Le 1^{er} septembre, il lui offre un carré et dit qu'il doublera la quantité toutes les semaines.

Soit c_n le nombre de carrés reçus par Tom la n -ième semaine. On pose $c_1 = 1$.

- Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n . En déduire la nature de la suite (c_n) .
- En déduire c_n en fonction de n .
- Combien de tablettes de chocolat Math donne-t-il à Tom le 29 décembre 2017 s'il respecte sa promesse? (Les tablettes de chocolat de Math ont 24 carrés).

EXERCICE 261**15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 3$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 15$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - En déduire v_n en fonction de n .
 - Exprimer u_n en fonction de n .

EXERCICE 262**15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n - 7$.

- Calculer u_2 et u_3 .
- Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 7$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- b. En déduire v_n en fonction de n .
- c. Exprimer u_n en fonction de n .

EXERCICE 263**15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 3$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$.
 - a. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. En déduire v_n en fonction de n .
 - c. Exprimer u_n en fonction de n .

EXERCICE 264**15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

1. Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

EXERCICE 265**15 minutes**

Math achète une voiture de grosse cylindrée à 50 000 €.

Mathilde achète une voiture de petite cylindrée à 25 000 €.

Les voitures perdent de leur valeur chaque semestre : 15% pour la grosse cylindrée et 10% pour la petite cylindrée.

Au bout de combien de semestres la voiture de Mathilde aura-t-elle plus de valeur que celle de Math?

EXERCICE 266**15 minutes**

Math voudrait disposer de 10 000 € dans 10 ans. Quel capital doit-il placer aujourd'hui s'il opte pour un placement à intérêts composés au taux de 3%?

EXERCICE 267**15 minutes**

Math a placé 15 000 € il y a 5 ans. Il dispose aujourd'hui d'un capital de 20 551,30 €. Quel est le taux du placement, sachant qu'il s'agit d'un placement à intérêts composés?

EXERCICE 268 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par leur premier terme $a_0 = 2$, $b_0 = 4$, respectivement et les relations, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n).$$

On désigne par A_n et B_n les points de l'axe orienté d'abscisse a_n et b_n respectivement. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier les réponses.

1. La suite $u_n = a_n + b_n$ est constante.
2. La suite $v_n = a_n - b_n$ est une suite géométrique convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les segments $[A_n B_n]$ ont le même milieu I, qui est le point de (Ox) d'abscisse 3.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = 3 - \frac{1}{2^n}$ et $b_n = 3 + \frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 269**20 minutes**

Une balle est lâchée d'une hauteur de 2 m. Elle rebondit plusieurs fois. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale à 85% de la hauteur du rebond précédent.

Soit h_n la hauteur en centimètres du $n^{\text{ème}}$ rebond.

1. Calculer h_1 , h_2 et h_3 .
2. Exprimer h_n en fonction de n .
3. Calculer à 10^{-3} près la hauteur du 8^e rebond.
4. A partir de quel rebond la hauteur deviendra inférieure à 5 mm?

EXERCICE 270**20 minutes**

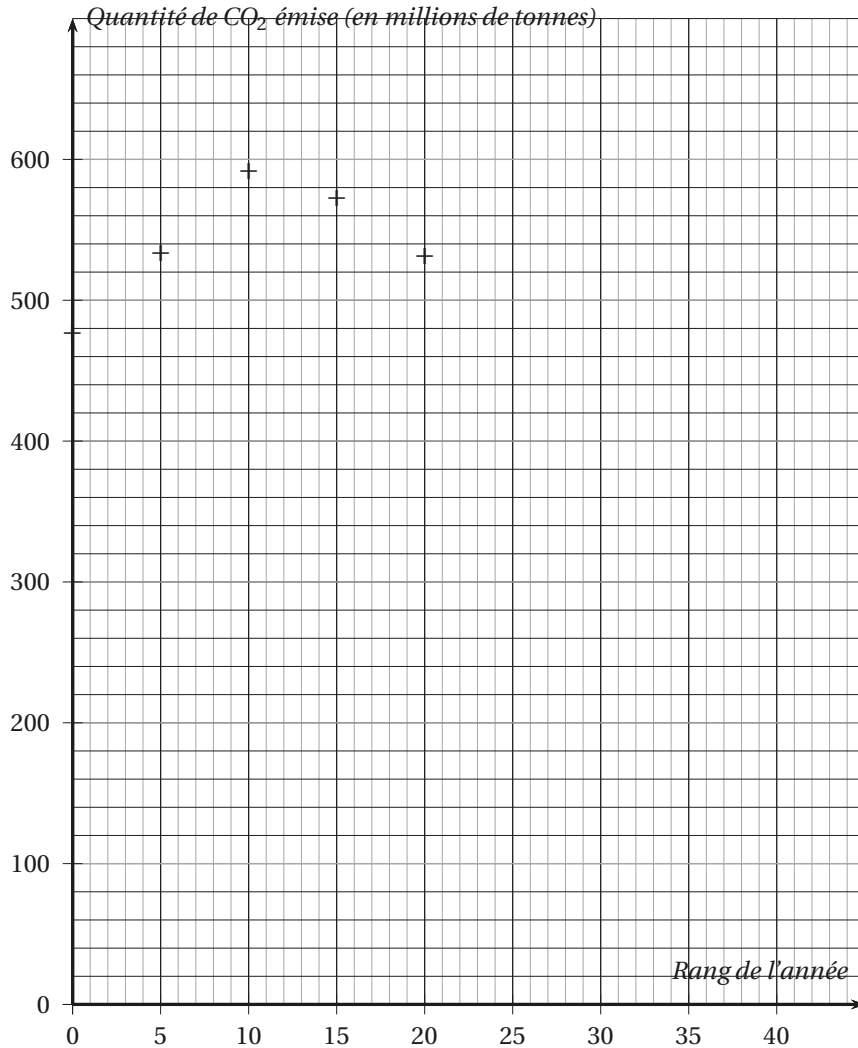
L'empreinte carbone est un indicateur des émissions de gaz à effet de serre qui intègre les émissions directes des ménages français (logements et voitures), les émissions de la production nationale (hors exportations), et celles associées aux produits importés.

Le tableau ci-dessous indique les émissions de CO_2 de la France selon l'empreinte carbone entre 1995 et 2015. Les émissions sont exprimées en million de tonnes équivalent CO_2 .

Année	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20
Emission de CO_2 (y_i)	477	534	592	573	532

Source : SOeS d'après Citepa, Eurostat, Insee, Douanes, AIE, 2016

On a représenté, dans un repère orthogonal, le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ associé à cette série statistique.



A l'issue de la conférence sur le climat en 2016, la France s'est engagée, d'ici 2030, à réduire ses émissions de CO₂ de 40 %, par rapport à leur niveau en 1990, estimé à 468 millions de tonnes équivalent CO₂.

Le but de l'exercice est de prévoir la quantité de CO₂ émise en 2030 à partir de deux modélisations différentes.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On propose de modéliser l'évolution des émissions de CO₂ par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 39]$ par : $f(x) = -0,8x^2 + 19,2x + 470$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[0; 39]$.

2. Etudier le signe de la fonction f' et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 39]$.

3. a. Compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	39
$f(x)$									

b. En utilisant le tableau de valeurs précédent, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 39]$ dans le repère orthogonal précédent.

4. D'après ce premier modèle, l'engagement de la France sera-t-il tenu en 2030? Justifier la réponse.

Partie B

On fait l'hypothèse qu'à partir de 2015, les émissions de CO_2 baissent annuellement de 3 %. On modélise alors les émissions de CO_2 à l'aide d'une suite numérique (u_n) .

Pour tout entier naturel n , u_n est égal aux émissions de CO_2 , en million de tonnes équivalent CO_2 , durant l'année $(2015 + n)$. Ainsi, $u_0 = 532$.

1. a. Montrer que $u_1 = 516,04$.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.

c. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

2. D'après ce second modèle, l'engagement de la France sera-t-il tenu en 2030? Justifier la réponse.

EXERCICE 271

20 minutes

Un entrepreneur achète à crédit le 01/01/2003 une machine coûtant 500 000 €. Il rembourse son prêt en 10 annuités en versant le 1^{er} janvier de chaque année (à partir du 01/01/2004), la somme de 64 752,29 € qui se décompose en deux parties :

- Les intérêts 5 % sur ce capital restant dû l'année précédente;
- L'amortissement du prêt (le capital remboursé).

Voici le détail de ces premiers versements donné à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D	E
1	Dates	Annuité	Intérêts	Amortissement	Capital restant dû
2	01/01/2003				500 000,00
3	01/01/2004	64 752,29	25 000,00	39 752,29	460 247,71
4	01/01/2005	64 752,29	23 012,39	41 739,90	418 507,81
5	01/01/2006	64 752,29	20 925,39	43 826,90	374 680,91
6					

Ainsi, les intérêts payés le 01/01/2004 représentent les 5 % du capital restant dû au 01/01/2003. La somme amortie en 2003 étant la différence entre le montant de l'annuité et les intérêts payés en 2003.

Toutes les sommes seront données avec deux décimales.

1. Vérifier que les sommes indiquées en C3 et D3 sont correctes. Faire de même avec les sommes indiquées en C4 et D4. Compléter alors la ligne 6 de ce tableau.
2. Dans la cellule D3 a été entrée la formule : =B3– C3 qui, par copier-glisser a permis de compléter la colonne D.
 - a. Donner, de la même façon, la formule entrée en C3. Que devient cette formule si on la recopie en C4?
 - b. Donner la formule entrée en E3 qui, par « copier-glisser » a permis de compléter la colonne E.
3. On définit les suites (i_n) , (a_n) et (c_n) pour $n \geq 1$ par :

Dates	Annuité	Intérêts	Amortissement	Capital restant dû
01/01/(2003+n)	64 752,29	i_n	a_n	c_n

Par exemple, $i_1 = 25\,000$ représente les intérêts au 01/01/2004.

Donner les valeurs de i_2 , i_3 , i_4 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , c_1 , c_2 , c_3 et c_4 .

4. Sachant qu'une de ces trois suites et une seule est géométrique, déterminer laquelle en précisant votre méthode. Quelle est la raison de cette suite? (On arrondira les calculs à 10^{-2} près)
5. Déterminer, sans calcul et en justifiant, la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$.
6. Par la méthode de votre choix, déterminer le montant total des intérêts payés par l'entrepreneur.

EXERCICE 272

30 minutes

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a. On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```

k ← 0
NbClients ← 1 000 000
Tant que k < 8
    k ← k + 1
    NbClients ← 0,9 × NbClients + 60 000
    Afficher NbClients
Fin Tant que
  
```

- b. Compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} U_0 &= 1\,000 \\ U_{n+1} &= 0,9U_n + 60. \end{cases}$$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en milliers, pour l'année $2010 + n$. Pour étudier la suite (U_n) , on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

- a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $0,9$.
 - b. Déterminer l'expression de V_n en fonction de n .
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $U_n = 400 \times 0,9^n + 600$.
 - d. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.
3. A la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.
Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8% de ses clients et regagne $100\,000$ nouveaux clients.
On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à $860\,000$.
En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 273**30 minutes**

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8% des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

```

C ← 300
n ← 0
Tant que C < 400 faire
    C ← C - C × 0,08 + 50
    n ← n + 1
Fin Tant que

```

- a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

- b. Quelle est la valeur de n à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.
 - a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n .
 - b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
 - d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024?
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.
 - a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question?
 - b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

EXERCICE 274**25 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 90$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et préciser la valeur de v_0 .
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.
3. Ecrire un programme permettant de résoudre l'inéquation $u_n \geq 85$.
4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.
Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :
 - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés;
 - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.
 - a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n -ième mois qui suit le mois de juillet 2017.
 - b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018? Justifier la réponse.
 - c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette? Argumenter la réponse.

EXERCICE 275**20 minutes**

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer

suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les événements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup »,

B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».

On pose $p_n = P(A_n)$.

Pour les questions 1. et 2. on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q .
4. Ecrire u_n puis p_n en fonction de n .
5. Conjecturer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$, interpréter ce résultat.

EXERCICE 276

15 minutes

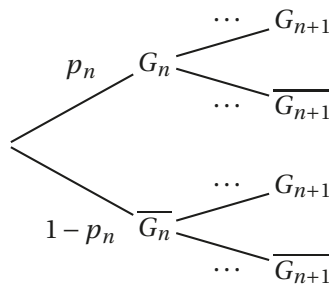
Un site internet propose un jeu en ligne :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$;
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

- a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
- b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
- c. Déterminer la limite de p_n .

EXERCICE 277**25 minutes**

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n -ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n -ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1 .

2. Calculer a_2 et b_2 . On pourra utiliser un arbre pondéré.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,

$$\text{puis : } a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

4. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

- a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. On précisera la raison et le premier terme u_1 .
- b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (a_n) .
- d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$.

EXERCICE 278 : VRAI/FAUX**15 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

1. Vrai/Faux : la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.
2. Vrai/Faux : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. Vrai/Faux : la suite (v_n) est décroissante.

4. Vrai/Faux : les suites (u_n) et (v_n) tendent vers la même limite.

EXERCICE 279**15 minutes**

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 0$, $b_0 = 12$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par $u_n = b_n - a_n$ et $v_n = 3a_n + 4b_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.
2. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .
3. Montrer que la suite (v_n) est constante et préciser son premier terme.
4. En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n .

EXERCICE 280**30 minutes**

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .
 - c. Exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel $n : w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
 - a. Calculer w_0 .
 - b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
 - c. En déduire la nature de la suite (w_n) .
 - d. Exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel $n ; u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

EXERCICE 281**20 minutes**

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés;
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n »;

M_n : « l'individu est malade en semaine n »;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

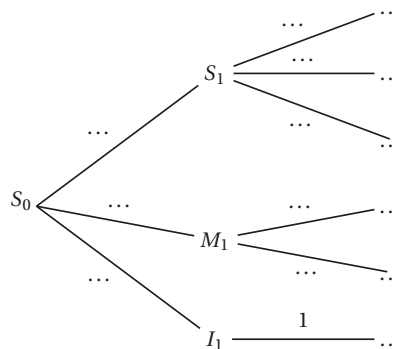
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 ; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millièème, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. A l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

- a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?
- b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. On admet que pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.
Calculer la limite de la suite (v_n) .
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

EXERCICE 282

20 minutes

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.
a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .
2. On considère deux dés, notés A et B . Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches. On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite. On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n -ième lancer », par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n , par R_n l'évènement « on obtient rouge au n -ième lancer », par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n , par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n .

- a. Déterminer a_1 .
- b. Déterminer r_1 . Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
- c. En remarquant que, pour tout $n \geq 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$,
montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.
- d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.
- e. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
- f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 283**20 minutes**

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 euros. Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.

On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Partie A

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer que Monica disposera d'un montant de 7 035 euros sur son livret le premier janvier 2015.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année 2014 + n .

On a donc $M_0 = 6000$ et $M_1 = 7035$.

Montrer que pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = 1,0225M_n + 900$.

Partie B

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra 19 125 €.

1. Première méthode :

On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n , par $G_n = M_n + 40000$.

- a. Montrer que la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,0225. On précisera le premier terme.
- b. Donner l'expression de G_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout entier naturel n , $M_n = 46000 \times 1,0225^n - 40000$.
- c. Déduire de l'expression de M_n obtenue en b. l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 euros sera atteint.

2. Deuxième méthode :

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

LIGNE	
1	MONTANT $\leftarrow$ 6 000
2	ANNEE $\leftarrow$ 2014
3	
4	Tant que MONTANT < 19 125
5	MONTANT $\leftarrow$ 1,0225 $\times$ MONTANT + 900
6	ANNEE $\leftarrow$ ANNEE + 1
7	
8	Afficher « Le plafond du livret sera atteint en ... »
9	Afficher ANNEE

- Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.
Indiquer les numéros des lignes et les modifications proposées.
- Proposer une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

EXERCICE 284**20 minutes**

A partir de l'année 2010, Pierre verse le 1^{er} janvier de chaque année 9 000 € sur un compte rémunéré à un taux annuel de 6% à intérêts composés. Ainsi, chaque 1^{er} janvier, il ajoute 9 000 € au capital déjà acquis.

On note u_n le capital disponible au 1^{er} janvier 2010 + n , ainsi $u_0 = 9 000$.

- Montrer que $u_1 = 18 540$ et que $u_{n+1} = 1,06u_n + 9 000$.
- Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 150 000$.
 - Calculer v_0 et v_1 .
 - Montrer que $v_{n+1} = 1,06v_n$. En déduire la nature de la suite (v_n) .
 - Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- A partir de quelle année Pierre disposera-t-il de plus de 200 000 €?

EXERCICE 285**20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{2}$.

- Calculer u_2 et u_3 .
La suite (u_n) est-elle arithmétique? géométrique? Justifier vos réponses.
- Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.
 - Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire u_n en fonction de n .
 - Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 286**20 minutes**

Déterminer les progressions géométriques de sept termes (à termes réels) telles que la somme

des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1 250.

EXERCICE 287**20 minutes**

Soient a , b et c trois nombres réels distincts avec $a \neq 0$.

Sachant que les trois nombres a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique et que les trois nombres $3a$, $2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, calculer la raison de la suite géométrique.

EXERCICE 288**20 minutes**

Trouver trois réels a , b et c tels que :

- c , a et b sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique,
- a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique,
- $abc = 8$.

EXERCICE 289 : VRAI/FAUX**10 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ et } v_n = u_n - 1 + \frac{1}{n!}$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{n+1}$.
2. La suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (v_n) est croissante.

EXERCICE 290 : VRAI/FAUX**10 minutes**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{-2}{u_n - 3} \end{cases} \text{ et } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

On admet que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. La suite (u_n) tend vers une limite finie.
2. (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + \frac{1}{1+2^n}$.

EXERCICE 291**20 minutes**

Mathilde a placé une somme S . A la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal à $\frac{1}{25}$ de la somme placée au début de cette même année. Mathilde peut percevoir l'intérêt ou bien le laisser placé à son tour. Elle choisit cette seconde solution.

1. De quelle somme dispose Mathilde à la fin de la deuxième année? de la troisième année? de la n -ème année?
2. Pendant combien d'années, au moins, lui faudra-t-il poursuivre son placement pour que Mathilde dispose d'une somme supérieure à $2S$?

EXERCICE 292**15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} &= \left(\frac{n+1}{2n+4} \right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) , arrondies au cent-millième.

Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

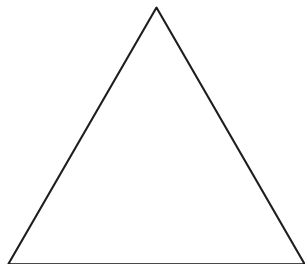
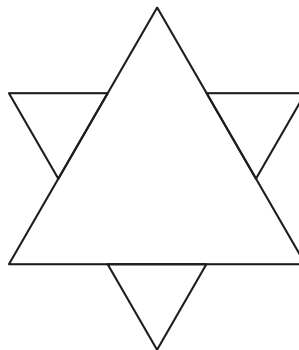
2. **a.** Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n .
b. Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

EXERCICE 293**20 minutes**

On considère un triangle équilatéral P_0 de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit sur le segment du milieu de chacun des côtés un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_0 . On obtient ainsi le polygone P_1 .

En procédant de manière analogue avec le polygone P_1 , on obtient le polygone P_2 , puis en répétant le processus on construit une suite de polygones P_n .

 P_0  P_1

Pour P_n , on note c_n le nombre de côtés de P_n , l_n la longueur de chaque côté, p_n son périmètre et a_n son aire.

1. Calculer $c_0, l_0, p_0, a_0, c_1, l_1, p_1, a_1$ puis c_2, l_2, p_2, a_2 .
2. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n . En déduire une expression de c_n en fonction de n .
3. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n . En déduire une expression de l_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n . Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Conjecturer la limite de cette suite.
5. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n . En déduire une expression de (a_n) en fonction de n . A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite a_n .

EXERCICE 294**20 minutes**

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis, il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine les matières stockées perdent, après décomposition ou prélèvement les trois quarts de leur volume.

Soit V_1, V_2, V_3 les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte.

De manière générale, soit V_n le volume stocké le n -ième samedi après la tonte.

1. **a.** Montrer que $V_1 = 120$ litres, $V_2 = 150$ litres, $V_3 = 157,5$ litres.
b. Calculer les volumes V_4, V_5, V_6 exprimés en litres, stockés respectivement les quatrième, cinquième, sixième samedis après la tonte.
2. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
3. On définit, pour tout $n \geq 1$, t_n par : $t_n = 160 - V_n$.
a. Montrer que (t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_1 = 40$ et de raison $\frac{1}{4}$.
b. En déduire les expressions de t_n puis de V_n en fonction de n .

- c. Déterminer la limite de (t_n) puis celle de (V_n) .

EXERCICE 295**20 minutes**

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n -ième hiver ;
- s_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n -ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $p_0 = 1$ et $s_0 = 0$.

Partie A

1. Calculer p_1 , s_1 , p_2 et s_2 .
2. Exprimer p_{n+1} et s_{n+1} en fonction de p_n et de s_n .
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. Ecrire un programme qui détermine, pour n donné, p_n et s_n .

Partie B

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0 .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

EXERCICE 296**20 minutes**

On définit la suite réelle (u_n) par : $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$ où p est un réel strictement positif différent de 1 et de 2.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p , n et a .
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a .
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n , puis en fonction de p , n et a .

EXERCICE 297**20 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1 .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Etude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
2. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
c. Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 298**20 minutes**

Un document statistique donne les renseignements suivants, concernant la région Rhône-Alpes :

« La population totale augmente régulièrement de 1,2 % par an ; la population agricole diminue régulièrement de 3 % par an.

Au 1^{er} janvier 1990, la population totale est de 4 650 000 habitants, et la population agricole représente 9 % de la population totale. »

1. a. Quelle était la population théorique totale au 1^{er} janvier 1991 ?
 b. Quelle était celle au 1^{er} janvier 1992 ?
 c. On désigne par $p(n)$ la population totale prévue au 1^{er} janvier $(1990 + n)$, où n est un entier positif.
 Démontrer que $p(n) = (1,012)^n \times p(0)$.
 d. Quelle population totale peut-on prévoir au 1^{er} janvier 1995 ?
2. a. Quelle est la population agricole au 1^{er} janvier 1990 ?
 b. On désigne par $a(n)$ la population agricole au 1^{er} janvier $(1990 + n)$. Calculer $a(n)$.
 c. Quelle population agricole peut-on prévoir au 1^{er} janvier 1995 ?
3. a. Exprimer le rapport $r(n) = \frac{a(n)}{p(n)}$ en fonction de n .
 b. Calculer la valeur minimale de n pour laquelle $r(n) \leq 0,03$.

EXERCICE 299**20 minutes**

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chaque année suivante on a constaté que :

- 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

```

X ← 80
Pour i allant de 1 à n
    X ← 0,9X + 20
Fin Pour
X ← E(X)
  
```

$E(X)$ étant la fonction partie entière du réel X .

1. Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur de X à la fin de cet algorithme ?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, la valeur de X à la fin de cet algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,9a_n + 20$.
Pour tout entier naturel n , on pose : $b_n = a_n - 200$.
 - a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer b_n en fonction de n .
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

EXERCICE 300**20 minutes**

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.

En 2015, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.

On admet qu'à partir de l'année 2015 :

- 14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.
- 6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.
- Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.

On note h_n le terme de la suite donnant le pourcentage des électeurs votant pour le parti Hirondelle l'année 2015 + n et p_n le terme de la suite donnant le pourcentage des électeurs votant pour le parti Phoenix.

1.
 - a. Calculer h_1 , p_1 , h_2 et p_2 .
 - b. Exprimer h_{n+1} et p_{n+1} en fonction de h_n et p_n .
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
 - b. On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n , $u_n = h_n - 0,3$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
3. A partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

EXERCICE 301**20 minutes**

Soit une suite (u_n) définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation (1) : $\forall n \geq 2$, $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$.

1. On donne la suite géométrique (v_n) telle que $v_n = r^n$. Montrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite géométrique vérifie (1).
On notera (a_n) et (b_n) ces deux suites.
2. Soit une suite (w_n) .
 - a. Montrer qu'il existe α et β réels, tels que
$$\begin{cases} w_0 &= \alpha a_0 + \beta b_0 \\ w_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 \end{cases}$$
 - b. Démontrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha a_n + \beta b_n$ alors (w_n) vérifie la relation (1).

EXERCICE 302**20 minutes**

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + au_n}{a + u_n}$.

1. Montrer que $u_n > 0 \implies u_{n+1} > 0$.
2. Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{a-1}{a+1}$.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Etudier la limite de la suite (v_n) . En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 303**20 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1. Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.
 - a. Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
 - b. Dans ce repère placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparents les traits de construction.
 - c. A l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 12$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
 - c. Donner le sens de variation de la suite (v_n) . En déduire celui de la suite (u_n) .
 - d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

- il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année;
- d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

- a. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$.
- b. En utilisant la question 2. b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.

EXERCICE 304

20 minutes

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{3}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x + 4}{3}$.
 - a. Tracer la représentation graphique d de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
 - b. En utilisant d et Δ , construire u_1 , u_2 et u_3 .
 - c. Conjecturer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ à l'aide de la construction d'un grand nombre de termes de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2.4 Sommes des termes d'une suite

2.4.1 Point de cours

Somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

Plus généralement : $S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

- si $q = 1$, alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$
- si $q \neq 1$, alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$

2.4.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 305****5 minutes**

Expliciter les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^5 k$

2. $S_2 = \sum_{k=8}^{15} k^2$

3. $S_3 = \sum_{k=0}^{12} (3k + 4)$

EXERCICE 306**5 minutes**Ecrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 97 + 99$

2. $S_2 = 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 4096$

3. $S_3 = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \cdots + 59049$

EXERCICE 307**5 minutes**Calculer la somme des cent premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.**EXERCICE 308****5 minutes**Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = -2$.**EXERCICE 309****5 minutes**Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 9$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 55$. Déterminer u_0 et la raison de la suite.**EXERCICE 310****5 minutes**Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_6 = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = 63$. Déterminer u_0 et la raison de la suite.**EXERCICE 311****5 minutes**

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 12 + 15 + 18 + \cdots + 1002$

2. $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 10$

EXERCICE 312**5 minutes**Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = -2$.

Calculer :

1. $S_6 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

2. $S_{12} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12}$

EXERCICE 313**5 minutes**Calculer la somme des cent premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 314**5 minutes**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 0,3$ telle que $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} u_n = 2885,709\,174$.

Déterminer u_0 .

EXERCICE 315**10 minutes**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 = 2$ telle que

$$S_2 = \sum_{n=0}^2 u_n = 18.$$

Déterminer q .

EXERCICE 316**15 minutes**

Le 01/01/2019, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule A il est augmenté tous les ans, au 1^{er} janvier, de 20 euros; dans la formule B, il est augmenté tous les ans, au 1^{er} janvier, de 1,5 %.

Son salaire mensuel initial durant l'année 2019 est de 1 200 euros. On note u_n (resp. v_n) le salaire annuel selon la formule A (resp. B) durant l'année 2019 + n .

1. Expliquer pourquoi, en 2019, on a : $u_0 = v_0 = 14400$.
2. Expliquer pourquoi, en 2020, on a : $u_1 = 14640$; $v_1 = 14616$.
3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n , en fonction de n .
5. Calculer et comparer les deux formules en 2019 puis en 2039. (Arrondir les résultats au centime d'euro).
6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière. On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n.$$

Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules A et B.

EXERCICE 317**10 minutes**

Le 1^{er} septembre 2017, Tom décide de mettre de l'argent de côté pour ses vacances d'été. Il dépose 500 € le 1^{er} septembre, puis 30 € de moins par rapport au mois précédent chaque 1^{er} du mois.

Soit t_n la somme épargnée le n -ième mois. On pose $t_1 = 500$.

1. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n . En déduire la nature de la suite (t_n) .
2. En déduire t_n en fonction de n .
3. Soit S_n la somme totale mise de côté par Tom depuis le 1^{er} septembre. Exprimer S_n en fonction de n .
4. De combien disposera Tom le 31 juillet 2018?

EXERCICE 318**10 minutes**

Le vendredi 1^{er} septembre 2017, Matt promet à Tom de lui donner tous les vendredis du chocolat pour son aide précieuse en mathématiques. Le 1^{er} septembre, il lui offre un carré et dit qu'il doublera la quantité toutes les semaines.

Soit c_n le nombre de carrés reçus par Tom la n -ième semaine. On pose $c_1 = 1$.

1. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n . En déduire la nature de la suite (c_n) .
2. En déduire c_n en fonction de n .
3. Soit S_n le nombre total de carrés de chocolat reçus par Tom depuis le 1^{er} septembre. Exprimer S_n en fonction de n .
4. Combien de tablettes de chocolat, au total, Matt aura-t-il donné à Tom le 29 décembre 2017 s'il respecte sa promesse? (Les tablettes de chocolat de Matt ont 24 carrés).

2.4.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 319****10 minutes**

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Calculer la somme des n premiers nombres pairs.
3. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a. } S_1 = \sum_{k=10}^{200} k$$

$$\text{b. } S_2 = \sum_{k=250}^{500} k$$

$$\text{c. } S_3 = \sum_{k=50}^{2020} 2k$$

EXERCICE 320**10 minutes**

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. En déduire $\sum_{k=p}^n q^k$.

EXERCICE 321**10 minutes**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

1. Démontrer que $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
2. Exprimer S en fonction de u_0, n et r .

EXERCICE 322**10 minutes**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 .

1. Démontrer que $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Exprimer la somme suivante en fonction de u_p, q, k et $n : u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$.

EXERCICE 323**15 minutes**

Simplifier les sommes suivantes :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=3}^n (k-1)^2 \quad 2. S_2 = \sum_{k=1}^n k - \sum_{i=1}^n i \quad 3. S_3 = \sum_{k=2}^n k^3 - \sum_{p=3}^{n+1} p^3$$

EXERCICE 324**5 minutes**

Calculer le premier terme, la raison et le n^e terme d'une progression arithmétique sachant que, quel que soit n , la somme de ses n premiers termes a pour valeur $s_n = 3n^2 + 5n$.

EXERCICE 325**20 minutes**

Soit la suite de terme générale $u_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ pour $n \geq 1$.

- Déterminer a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$.
- En déduire une expression simple de la somme $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 326**15 minutes**

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950. La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant depuis 1950, en raison des difficultés croissantes d'extraction, de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.

On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.

Les résultats seront arrondis à la tonne.

- Justifier que $T_1 = 19\,800$ puis calculer T_2 et T_3 .
- Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
- Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n .
- Quelle est la quantité extraite en 2008?
- Montrer que la quantité totale extraite entre 1950 et l'année $(1950 + n)$ est :

$$S_n = 2\,000\,000 \times (1 - 0,99^{n+1}).$$
- En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait 1 000 000 de tonnes de métal. En quelle année théoriquement le filon sera-t-il épuisé?

EXERCICE 327**20 minutes**

On considère un segment $[AB]$ tel que $AB = 8$. On note A_0 le milieu de $[AB]$, A_1 est le milieu de $[A_0B]$, A_2 est le milieu de $[A_1B]$.

On construit une suite de points A_n tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, A_n est le milieu de $[A_{n-1}B]$.

On pose $d_0 = AA_0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $d_n = A_{n-1}A_n$.

- Calculer d_1 et d_2 .
- Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n . En déduire la nature de la suite (d_n) .
- Donner l'expression de d_n en fonction de n .

4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n d_k$. Montrer que $S_n = 8 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]$.
5. Conjecturer la limite de (S_n) .
6. Existe-t-il une valeur de n telle que $S_n = 8$?
7. Déterminer le premier indice n tel que l'écart entre S_n et 8 soit inférieur à 10^{-3} .

EXERCICE 328**20 minutes**

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 2000 \times 1,008^{n-1}$$

où u_n représente le coût en euros du forage de la n -ième dizaine de mètres.

On a ainsi $u_1 = 2000$ et $u_2 = 2016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n) .
 - b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$ -ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n -ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```

u ← 2000
S ← 2000
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
    u ← u × 1,008
    S ← S + u
Fin Pour
  
```

La valeur de n saisie est 5.

- a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n . Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

- b. Quelle est la valeur de S à la fin de l'exécution de l'algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n) , n étant un entier naturel non nul. On admet que :

$$S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n.$$

Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.

- a. Déterminer la profondeur maximale par la méthode de votre choix.
- b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

EXERCICE 329**30 minutes**

Après ses trois entretiens d'embauche, Bob a reçu trois propositions, pour une embauche le 1^{er} juillet 2017 :

- L'entreprise A lui propose un salaire mensuel de 1300 € et une augmentation de 100 € chaque 1^{er} juillet.
- L'entreprise B lui propose un salaire mensuel de 1400 € et une augmentation de 5% chaque 1^{er} juillet.
- L'entreprise C lui propose un salaire mensuel de 1500 € et une augmentation de 2% plus 30€ chaque 1^{er} juillet.

1. On désigne par a_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise A .
 - a. Déterminer a_0 et a_1 .
 - b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire la nature de la suite (a_n) .
 - c. En déduire une expression de a_n en fonction de a_0 et de n .
 - d. Soit (A_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1^{er} juillet 2017 au 31 juin de l'année 2017 + n , s'il choisit l'entreprise A .
Montrer que $A_n = 600(n+1)(n+26)$.
2. On désigne par b_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise B .
 - a. Déterminer b_0 et b_1 .
 - b. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n) .
 - c. En déduire une expression de b_n en fonction de b_0 et de n .
 - d. Soit (B_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1^{er} juillet 2017 au 31 juin de l'année 2017 + n , s'il choisit l'entreprise B .
Montrer que $B_n = 336\,000(1,05^{n+1} - 1)$.
3. On désigne par c_0 le salaire de départ de Bob s'il choisit l'entreprise C .
 - a. Déterminer c_0 et c_1 .
 - b. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et en déduire la nature de la suite (c_n) .
 - c. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + \alpha$. Déterminer la valeur de α pour que la suite (u_n) soit géométrique de raison 1,02.

- d. En déduire une expression de u_n puis de c_n en fonction de n .
 - e. Soit (C_n) la suite représentant la somme de tous les salaires que Bob aura perçu du 1^{er} juillet 2017 au 31 juin de l'année 2017 + n , s'il choisit l'entreprise C.
Montrer que $C_n = 1\,260\,000(1,02^{n+1} - 1) - 7\,200(n + 1)$.
4. En utilisant le tableur de la calculatrice et en se limitant aux 15 prochaines années, aider Bob à choisir son entreprise en fonction du nombre d'années qu'il pense rester dans l'entreprise.

EXERCICE 330**20 minutes**

Marc postule pour un emploi dans deux entreprises.

La société ALLCAUR propose à compter du 1^{er} janvier 2018, un contrat à durée déterminé (CDD) de 2 ans avec un salaire net de 1 800 euros le premier mois, puis une augmentation de 0,7 % chaque mois sur la période des 2 ans.

La société CAURALL propose un salaire de départ de 1 750 euros augmenté de 20 euros chaque mois.

Partie A : Utilisation d'un tableur

Marc utilise un tableur pour visualiser les propositions des deux entreprises.

Voici les résultats qu'il obtient :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Mois		ALLCAUR			CAURALL	
2			Salaire	Salaire cumulé		Salaire	Salaire cumulé
3	1		1 800	1 800		1 750	1 750
4	2						
5							
...							

- La cellule F4 contient le salaire, proposé à Marc le deuxième mois par l'entreprise CAURALL. Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas, faut-il écrire dans la cellule F4?
- La formule saisie dans la cellule C4 est : $= C3 * 1,007$. Cette formule est recopiée vers le bas. Quelle formule se trouve alors dans la cellule C5?
- Parmi les trois formules suivantes, déterminer toutes celles que l'on peut écrire dans la cellule G4 et qui permettent de connaître par recopie vers le bas les salaires cumulés proposés par l'entreprise CAURALL.
 - a. $= \$G\$3 + F4$
 - b. $= G3 + F4$
 - c. $= \text{SOMME}(\$F\$3 : F4)$

Partie B : Etude de la rémunération proposée par ALLCAUR

On note U_n le salaire proposé à Marc par ALLCAUR au n -ième mois de son CDD.

- Déterminer U_1 , U_2 , U_3 et U_4 arrondis à 10^{-2} .

2. a. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
 b. En déduire la nature de la suite (U_n) , en précisant son premier terme et sa raison.
 c. Exprimer U_n en fonction de n .
3. Déterminer le salaire que percevrait Marc, au centime près, au dernier mois de son CDD.
4. Démontrer que la somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) est égale à :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

5. Démontrer que la somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ est donnée par :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

6. Calculer le montant total S des salaires qui seraient versés à Marc sur les 2 ans, arrondi au centime.

EXERCICE 331**10 minutes**

Un corps tombe en chute libre. Ces distances sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique. Ainsi, il parcourt 4,9 m pendant la première seconde, 14,7 m pendant la deuxième seconde, 24,5 m pendant la troisième seconde et ainsi de suite.

Soit d_n la distance parcourue pendant la $n^{\text{ème}}$ seconde et S_n la distance parcourue depuis le début de la chute.

1. Déterminer la forme explicite de la suite (d_n) .
2. En déduire la forme explicite de la suite (S_n) .
3. Quelle distance aura parcouru le corps en 15 secondes?
4. Le corps tombe d'un avion volant à 3900 m d'altitude. Au bout de combien de secondes, le corps arrivera-t-il au sol?

EXERCICE 332**10 minutes**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
4. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

EXERCICE 333**15 minutes**

Florent a besoin d'économiser au moins 1 250 € pour acheter un scooter. Pour cela, il décide d'effectuer un dépôt chaque mois.

Avec un tableur, il effectue une simulation de deux formules d'économies possibles :

Formule A : le 1^{er} mois, il fait un dépôt de 150 € ; il augmente ensuite chaque dépôt mensuel de 20 €.

Formule B : le 1^{er} mois, il fait un dépôt de 130 € ; il augmente ensuite chaque dépôt mensuel de 20 %.

On appelle A_n et B_n les montants respectifs du n -ième dépôt mensuel de Florent avec la formule A et la formule B.

	A	B	C
1	Mois (n)	A_n	B_n
2	1	150	130
3	2	170	156
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		

- Quelles formules destinées à être recopiées vers le bas Florent a-t-il écrites dans les cellules B3 et C3 pour compléter les colonnes B et C ?
- Déterminer la nature de la suite (A_n) et préciser son terme initial et sa raison.
 - Déterminer la nature de la suite (B_n) et préciser son terme initial et sa raison.
- Exprimer A_n et B_n en fonction de n .
- Florent souhaite acheter son scooter dans 6 mois.
 - Quel sera le montant du 6^e dépôt, arrondi à l'euro, pour chaque formule ?
 - Quelle somme Florent aura-t-il économisée au bout de six mois, arrondie à l'euro, avec chaque formule ?
 - Quelle formule va-t-il retenir pour acheter son scooter ?

EXERCICE 334**25 minutes**

Soit f une fonction définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On note $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses pour $x \in [0 ; 3]$.

On note $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ les points d'abscisses respectives $0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \dots, 3$.

Soit $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ les images des points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ par f . Ainsi le point B_p a pour abscisse $\frac{3p}{n}$ avec $0 \leq p \leq n$.

- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et pour $n = 6$, placer les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ et $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$.

2. Déterminer les coordonnées des points A_p et B_p pour $0 \leq p \leq n$.
3. Soit u_n l'aire obtenue en additionnant les aires des rectangles de largeur $[A_p A_{p+1}]$ et de longueur $[A_p B_p]$ pour $0 \leq p \leq n-1$.
 - a. Calculer l'aire d'un rectangle.
 - b. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

☞ On rappelle que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Soit v_n l'aire obtenue en additionnant les aires des rectangles de largeur $[A_p A_{p+1}]$ et de longueur $[A_{p+1} B_{p+1}]$ pour $0 \leq p \leq n-1$.
 - a. Calculer l'aire d'un rectangle.
 - b. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
5. Par construction, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.
 - a. Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ pour $n = 20$ puis pour $n = 100$.
 - b. Déterminer n tel que $v_n - u_n < 10^{-3}$.
 - c. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 335**25 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ et l'axe des abscisses pour $0 \leq x \leq 1$.

☞ On rappelle que : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 336**25 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^x$ et l'axe des abscisses pour $0 \leq x \leq 1$.

EXERCICE 337**30 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = 3x$, soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Par rotation autour de l'axe des ordonnées, $\mathcal{C}$ engendre un cône de révolution, soit $\mathcal{V}$ ce volume.

On note $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ les points d'abscisses respectives $0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \dots, 3$.

Soit $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ les images des points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ par f . Ainsi le point B_p a pour abscisse $\frac{3p}{n}$ avec $0 \leq p \leq n$.

Soit C_p le point d'abscisse 0 et de même ordonnée que le point B_p .

1. Déterminer les coordonnées des points A_p, B_p et C_p pour $0 \leq p \leq n$.
2. Déterminer le rayon du cercle de centre C_p et de rayon $B_p C_p$.
3. Déterminer le volume v_p d'un cylindre de centre C_p , de rayon $B_p C_p$ et d'épaisseur $C_p C_{p+1}$.
4. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} v_p$.

5. Calculer S_n pour $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10\,000$ et $n = 100\,000$. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{V}$ à 10^{-1} .
6. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{V}$ en utilisant la formule du volume d'un cône.
7. Ecrire un programme, en Python, qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $\mathcal{V} - S_n < 10^{-4}$.

EXERCICE 338**30 minutes**

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer le volume engendré par la parabole d'équation $f(x) = 16 - x^2$ pour $0 \leq x \leq 4$.

EXERCICE 339**30 minutes**

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .
 - c. Exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel $n : w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
 - a. Calculer w_0 .
 - b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
 - c. En déduire la nature de la suite (w_n) .
 - d. Exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel $n : u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

On admet que $\sum_{k=0}^n k2^{1-k} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N} : S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

EXERCICE 340**15 minutes**

Une petite ville des Pyrénées décide de relancer sa station de ski, en faisant certains investissements et de la publicité. Le directeur fait des prévisions. A l'aide d'un tableur, il construit le tableau suivant, donnant pour chaque saison de ski :

- le prix du forfait « journée » ;
- le nombre de forfaits « journée » vendus ;

- la recette correspondante.

Pendant la saison 2006/2007, il a été vendu 18 540 forfaits « journée » au prix de 16 euros l'unité. Le directeur de la station décide d'augmenter le prix du forfait de 1,20 € par an, jusqu'à la saison 2012/2013. Il obtient alors la suite des prix unitaires, en euros, notée (u_n) en colonne C sur la feuille de calcul proposée ci-dessous. On a donc $u_1 = 16$.

	A	B	C	D	E
1	Saison	Rang	Prix du « forfait journée » en euros	Nombre de forfaits vendus	Recette en euros
2	2006/2007	1	16	18 540	296 640
3	2007/2008	2	17,2	19 003	326 851,6
4	2008/2009	3			
5	2009/2010	4			
6	2010/2011	5			
7	2011/2012	6			
8	2012/2013	7			
9				TOTAL	
10					

Partie A : Etude de la suite (u_n) des prix du forfait « journée »

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
2. Quelle est la formule à saisir en C3 et à recopier vers le bas pour compléter la colonne C ?
3. Si on complétait le tableau jusqu'à la saison 2012/2013, quel serait le nombre obtenu dans la cellule C8 ?

Partie B : Etude de la suite des nombres de forfaits « journée » vendus

1. Quel est, en pourcentage, le taux d'évolution du nombre de forfaits vendus entre les saisons 2006/2007 et 2007/2008 ? (on arrondira à 0,1 % près).
2. Le directeur de la station suppose que chaque saison le taux d'augmentation sera celui trouvé à la question précédente et obtient ainsi en colonne D la suite notée (v_n) des nombres de forfaits vendus.
On a donc $v_1 = 18540$.
 - a. Quelle est la formule à saisir en D4 et à recopier vers le bas pour compléter la colonne D ?
 - b. Quel serait alors le nombre obtenu dans la cellule D8 ?

Partie C : Etude de la recette

1. Quelle est la formule à saisir en E2 et à recopier vers le bas dans la plage E3:E8 ?
2. Quelle formule peut-on saisir en E9 afin de calculer la recette totale des 7 saisons ?

EXERCICE 341

20 minutes

Sophie et Jean Durand veulent acheter une maison. Leurs économies ne suffisant pas, ils ont besoin d'emprunter 150 000 €.

Afin d'obtenir les meilleures conditions pour leur prêt, ils ont contacté plusieurs banques ; deux d'entre elles attirent particulièrement leur attention :

- La banque AA leur propose de rembourser le prêt sur 20 ans, avec des remboursements mensuels fixes de 1 047 €.
- La banque BB leur propose également de rembourser le prêt sur 20 ans, mais aux conditions suivantes :
 - la première année, chaque remboursement mensuel sera de 1 200 €,
 - les années suivantes, les remboursements mensuels seront à chaque fois en baisse de 2 % par rapport aux remboursements mensuels de l'année précédente.

Partie A : Proposition de la banque BB

On note u_n le montant, en euros, d'un remboursement mensuel au cours de la n -ième année de remboursement. On a donc $u_1 = 1\,200$.

1. Calculer u_2 puis u_3 .
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Partie B : Utilisation d'un tableur

Afin de mieux visualiser les propositions des banques AA et BB, Sophie et Jean créent une feuille de calcul à l'aide d'un tableur.

On en donne un extrait ci-dessous :

	A	B	C
1	Année n de remboursement	Montant (en €) du remboursement mensuel lors de la n -ième année Banque AA	Montant (en €) du remboursement mensuel u_n lors de la n -ième année Banque BB
2	1	1 047	1 200
3	2	1 047	
4	3	1 047	
⋮	⋮	⋮	⋮
21	20	1 047	

1. Quelle formule, destinée à être recopiée sur la plage C4:C21 Sophie et Jean peuvent-ils écrire dans la cellule C3 ?
2. Calculer la valeur de la cellule C21. On arrondira le résultat à 0,01 près.

Partie C : Comparaison des deux propositions

1. Calculer le montant total des remboursements sur les 20 ans si Sophie et Jean s'engagent avec la banque AA.
2. Calculer le montant total des remboursements sur les 20 ans si Sophie et Jean s'engagent avec la banque BB.

EXERCICE 342**20 minutes**

Le 1^{er} janvier suivant la date de sa naissance, les grands parents de Katia lui ouvrent un livret d'épargne et déposent un capital de 100 euros. Ils déposent ensuite 100 € sur ce livret tous les 1^{er} janvier suivants.

Ce placement est à intérêts composés au taux annuel de 3% fixe pour toute la durée du livret d'épargne. Les intérêts sont versés tous les 1^{er} janvier.

On pose $c_0 = 100$. Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.

On note c_n le capital, exprimé en euros, se trouvant sur le livret le 1^{er} janvier au terme d'un nombre n d'années de placement. On définit ainsi une suite c telle que $c_0 = 100$ et $c_1 = 203$.

1. Calculer c_2 et c_3 .
2. La suite c peut-elle être arithmétique? Peut-elle être géométrique? Justifier chaque réponse.
3. Le tableau ci-dessous est un extrait d'une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur. Il donne notamment les premiers termes de la suite c . Le format d'affichage est un format numérique à deux décimales.

	A	B	C	D
1	Valeurs de n	Capital se trouvant sur le livret au terme de n années de placement	Intérêts acquis au cours de l'année	Taux
2	0	100,00	3,00	0,03
3	1	203,00	6,09	
4	2	309,09	9,27	
5	3	418,36	12,55	
6	4			

Donner des formules qui, entrées dans les cellule B3 et C3, permettent par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellules B3 : C20.

4. On admet que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1,

$$c_n = 100(1 + 1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^n).$$
Montrer que le capital total se trouvant sur le livret de Katia le soir du 1^{er} janvier suivant son seizième anniversaire sera égal à 2 176,16 euros.

EXERCICE 343 : VRAI/FAUX**15 minutes**

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. Pour tout entier $n > 0$, on a : $S_n = \frac{n+1}{2n}$.
2. Pour tout entier $n > 0$, on a : $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$.

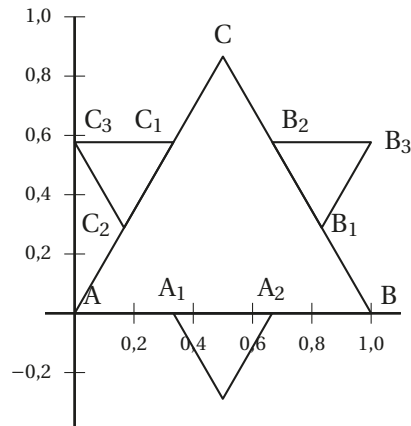
3. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

4. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

EXERCICE 344 : VRAI/FAUX

20 minutes

On effectue le programme de construction ci-dessous :

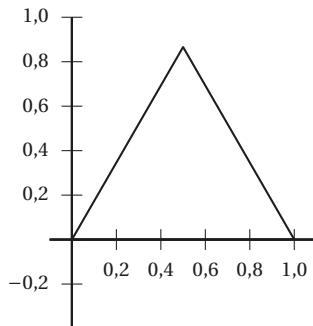


Etape 1 :

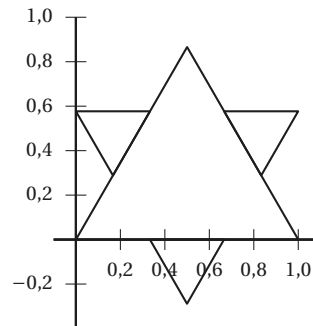
- On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté 1 en 3 segments de même longueur (par exemple les segments : $[A C_2]$, $[C_2 C_1]$ et $[C_1 C]$).
- Sur chacun des côtés du triangle, on construit, à l'extérieur du triangle, un triangle équilatéral ayant pour base le second segment (par exemple le triangle $C_1 C_2 C_3$ ayant pour base le segment $[C_2 C_1]$ pour le côté $[A C]$).

Étapes suivantes :

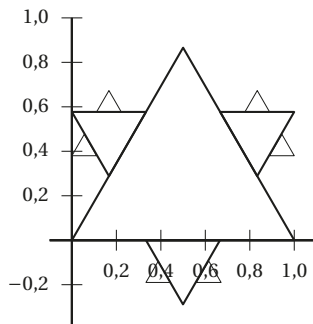
Sur chaque triangle obtenu à l'étape précédente, on construit deux nouveaux triangles équilatéraux selon le même procédé de construction que celui de l'étape 1.



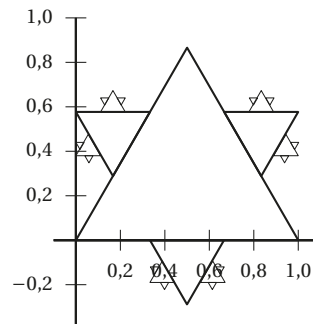
Etape 0



Etape 1



Etape 2



Etape 3

Pour tout entier naturel n , on pose :

- u_n le nombre de triangles construits à l'étape n ,

- ℓ_n la longueur du côté d'un triangle équilatéral construit à l'étape n ,
- h_n la hauteur d'un triangle équilatéral construit à l'étape n ,
- s_n la surface de la figure à l'étape n .

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. $h_1 = \frac{1}{2 \times \sqrt{3}}.$

2. La suite $(\ell_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}.$

3. $h_n = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}.$

4. Si $n \geq 1$, alors $s_n = \frac{3 \times \sqrt{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n}{8}.$

EXERCICE 345**20 minutes**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + 4$ (a est un réel).

On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel n .

- Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ soit une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- Dans la suite de l'exercice, on prend $a = \frac{1}{3}.$
Calculer v_n en fonction de n .
- Déduire de la question précédente la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n .
 - Etudier la convergence de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$.
 - En déduire la limite de la somme $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 346**20 minutes**

Une colonie de bactéries est mise en culture avec du glucose.

Pendant la 1^{re} période de 10 minutes, la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries est égale à 18,3 femtogrammes (1 gramme est égal à 10^{15} femtogrammes).

Pendant la 2^e période de 10 minutes, la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries augmente de 26 % par rapport à la masse de glucose absorbé pendant la 1^{re} période.

- Justifier que la masse de glucose absorbé pendant la 2^e période de 10 minutes est égale à 23,058 femtogrammes.

Dans la suite, on étudie l'évolution de la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries en prenant le modèle suivant :

- pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n la masse, en femtogrammes, de glucose absorbé pendant la n -ième période de 10 minutes;

- pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la masse de glucose u_{n+1} absorbé par la colonie de bactéries pendant la $(n+1)$ -ième période de 10 minutes augmente de 26 % par rapport à la masse de glucose u_n absorbé pendant la n -ième période de 10 minutes précédente.
2. a. Préciser les valeurs de u_1 et u_2 .
 - b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.
 - c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, exprimer u_n en fonction de n .
 - d. Calculer la masse de glucose absorbé pendant la 7^e période de 10 minutes. On donnera un résultat arrondi à 0,1 femtogramme.
3. On considère l'algorithme suivant :

```

 $n \leftarrow 1$ 
 $u \leftarrow 18,3$ 
Tant que  $u \leq 100$ 
     $n \leftarrow n + 1$ 
     $u \leftarrow 1,26 \times u$ 
Fin Tant que
  
```

Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à la masse totale de glucose absorbé depuis le début de la mise en culture. Dans ce cadre, on exploite la feuille de calcul suivante obtenue à l'aide d'un tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	1	18,3	18,3
3	2	23,058	41,358
4	3	29,05308	70,41108
5	4	36,6068808	107,017961
6	5	46,1246698	153,142631

4. a. Interpréter la valeur de la cellule C4 dans le contexte de l'exercice.
 - b. Quelle formule a été entrée dans la cellule C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs suivantes de la colonne C?
5. Exprimer S_n en fonction de n .
6. Déterminer le nombre d'heures nécessaire, depuis le début de la mise en culture, à l'absorption de 1 gramme de glucose par la colonie de bactéries (on rappelle que 1 gramme est égal à 10^{15} femtogrammes).

EXERCICE 347 : VRAI/ FAUX**15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 3 - \frac{4}{x+2}$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$$

On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. (v_n) est une suite géométrique de raison 4.
2. $\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 \times \frac{4^{10} - 1}{3}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 1}$.
4. La suite (u_n) tend vers -1 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 348 : VRAI/FAUX**15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = e + \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier les réponses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq e + 1$.
2. La suite (u_n) est croissante.
3. $\lim u_n = 0$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)e + \frac{e^{n+1} - 1}{e^n(e-1)}$.

EXERCICE 349**20 minutes**

Pour mettre en place la fabrication d'un modèle de fenêtre de toit, l'entreprise doit investir dans une nouvelle machine d'une valeur de 40 000 €.

Pour financer cet achat, le gestionnaire contacte deux organismes bancaires A et B.

1. Proposition de la banque A

La banque A propose un prêt sur 10 mois remboursé en 10 mensualités formant les termes consécutifs d'une suite arithmétique de 1^{er} terme $U_1 = 2000$ et de raison $r = 460$.

On note U_n le montant de la n -ième mensualité versée pour le remboursement de ce prêt.

- a. Montrer que pour tout entier naturel compris entre 1 et 10 on a : $U_n = 1540 + 460n$.
- b. Quel serait le montant du dernier versement ?
- c. L'entreprise souhaite connaître le montant total qu'elle devra rembourser dans ce cas. Ecrire un algorithme permettant de répondre à cet objectif.
- d. Déterminer le montant total que devra rembourser l'entreprise si le prêt est contracté auprès de la banque A.

2. Proposition de la banque B

La banque B propose un prêt sur 5 mois remboursé en 5 mensualités constantes au taux annuel de 5,75 %.

- a. Montrer que le taux mensuel équivalent au taux annuel de 5,75 % est d'environ 0,467 %.
- b. Déterminer le montant de la mensualité constante versée dans ce cas, arrondi à 0,01 près.

3. Quelle sera la proposition de prêt la plus avantageuse pour l'entreprise? Justifier.

☞ On rappelle la formule permettant de calculer le montant d'une mensualité constante :

$$a = C \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

où C est le montant emprunté, i est le taux mensuel et n le nombre de mensualités.

EXERCICE 350

20 minutes

Calculer la somme $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

2.5 Préparer l'examen

EXERCICE 351 : QCM

15 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 35$ et $u_7 = 20$. La raison de la suite (u_n) est égale à :

- a. -15
- b. -3
- c. $\frac{20}{35}$
- d. 3

Question 2

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2048$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Le terme u_5 est égal à :

- a. 64
- b. 128
- c. 256
- d. 2050

Question 3

On considère l'algorithme suivant, écrit en langage usuel :

```
Suite(n)
  U ← 5
  Pour k allant de 1 à n
    U ← 3 * U + 2
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Pour la valeur $n = 6$, le résultat renvoyé sera :

- a. 6 b. 485 c. 1457 d. 4373

Question 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5.

La somme S définie par $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$ est égale à :

- a. 38 b. 255 c. 308 d. 364

Question 5

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ est :

- a. arithmétique mais pas géométrique c. ni arithmétique, ni géométrique
b. géométrique mais pas arithmétique d. à la fois arithmétique et géométrique

EXERCICE 352**20 minutes**

Le 1^{er} juin 2020, Bob place 10000 € sur un livret rémunéré à 3% par an. Chaque 1^{er} juin, il ajoute 1000 €.

On appelle u_n la somme disponible sur le compte de Bob l'année 2020 + n , où n est un entier naturel. On a donc $u_0 = 10000$.

- Démontrer que $u_1 = 11300$.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,03u_n + 1000$.
- Bob veut savoir de quelle somme il disposera s'il retire son argent au bout de 10 ans. Il veut pour cela créer un programme en Python.
Compléter le programme suivant pour qu'il remplisse cette tâche.

```
def placement() :
    u = 10000
    for i in range(...):
        u = ...
    return ...
```

- On pose (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n + \frac{100000}{3}$
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,03.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- Calculer, à l'aide de la formule précédente, la somme disponible sur le livret de Bob au bout de 10 ans.

EXERCICE 353**20 minutes**

Un parc d'attraction U a ouvert ses portes en 2018. En 2018, le parc a accueilli 200000 visiteurs. Le directeur du parc prévoit une augmentation de 5% par an de la fréquentation du parc.

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de visiteurs, en milliers, du parc d'attraction pour l'année $(2018 + n)$. On a donc $u_0 = 200$.

1. Etude de la suite (u_n) .

- a. Calculer le nombre de visiteurs en 2019.
- b. Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.
- c. Exprimer u_n en fonction de n .

2. Un autre parc d'attraction V était déjà implanté dans la ville. En 2018, il a accueilli 300 000 visiteurs. Avec l'ouverture du parc U , le parc V prévoit de perdre 15 000 visiteurs par an. Pour n , entier naturel, on note v_n , le nombre de visiteurs, en milliers, accueillis dans le parc V l'année $(2018 + n)$. On a donc $v_0 = 300$.

- a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- b. On donne le programme suivant, écrit en Python.

```
def parc() :
    n = 0
    u = 200
    v = 300
    while u < v
        n = n + 1
        u = 1.05 * u
        v = v - 15
    return n
```

Quelle est la valeur renvoyée lors de l'exécution de la fonction `parc()` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 354**20 minutes**

Un bassin perd chaque semaine 5% de son volume d'eau par évaporation. Le bassin contient 100 m^3 après son remplissage.

1. Démontrer que ce bassin contient 95 m^3 d'eau une semaine après son remplissage.
2. On ne rajoute pas d'eau dans le bassin et l'eau continue à s'évaporer.
On modélise le volume d'eau contenue dans le bassin par une suite (u_n) , pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans le bassin n semaines après son remplissage. Ainsi $u_0 = 100$.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n$ et préciser la nature de la suite (u_n) ainsi définie.
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .
 - c. Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 6 semaines?
3. Pour compenser en partie les pertes d'eau par évaporation, on décide d'ajouter 3 m^3 d'eau chaque semaine dans le bassin.
On souhaite déterminer au bout de combien de semaines, le volume d'eau contenu dans le bassin devient inférieur à 75 m^3 .
Compléter la fonction, écrite en Python, afin que l'appel de `jours(75)` renvoie le nombre de

semaines à partir duquel le volume d'eau du bassin sera inférieur à 75 m^3 .

```
def jours(V) :
    n = 0
    u = 100
    while ... ≥ ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return ...
```

EXERCICE 355**20 minutes**

Durant l'année 2018, le nombre de familles qui ont loué un emplacement au « camping de la plage » est 500. Le directeur prévoit pour l'avenir une augmentation annuelle de 5 %.

On désigne par : u_0 le nombre de familles reçues par le camping en 2018 ($u_0 = 500$) et u_n le nombre de familles reçues par le camping en 2018 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
4. En supposant que la tendance se poursuive, combien de familles le directeur peut-il espérer pour l'année 2025?

EXERCICE 356**20 minutes**

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2019, il a recueilli 110 inscriptions.

D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.

On désigne par u_n le nombre d'exposants en (2019 + n) avec n un entier naturel.

Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2019, soit $u_0 = 110$.

1. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2020?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.
3. Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.
Ecrire un programme qui permet de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 300$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = -190 \times 0,9^n + 300$.
5. L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions. Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements. A-t-il raison de proposer ce nombre? Pourquoi?

EXERCICE 357**20 minutes**

Dans un village, l'association de gymnastique volontaire possédait 50 adhérents en 2000.

Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.

On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2000 + n$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et préciser la valeur de a_0 .
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geq 0$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.
3. Chaque semaine, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40 % pour deux heures de gymnastique.
 - a. Exprimer en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique à prévoir par semaine pour l'an $2000 + n$.
 - b. Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrer qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0,85^n < 8$. Résoudre cette inéquation et conclure.

EXERCICE 358**20 minutes**

Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.

On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.

Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs.

On note u_n le nombre de donateurs lors de la n -ième année; on a donc $u_1 = 1\,000$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 300$.
3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,8x + 300$. A l'aide d'une construction graphique, émettre une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n , par $v_n = 1500 - u_n$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Calculer la limite de (v_n) ; en déduire la limite de (u_n) .
Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association?

EXERCICE 359**20 minutes**

Le « continent de plastique » est la plus grande des plaques de déchets plastiques évoluant sur les océans. Elle occupe actuellement dans l'océan Pacifique une surface dont l'aire est évaluée à plus de 1,6 million de km^2 , entre Hawaï et la Californie.

En 2017, des scientifiques ont estimé la masse totale de déchets plastiques dans les océans à 300 millions de tonnes et ont prévu une augmentation de 5,4 % par an au cours des prochaines années.

On modélise l'évolution de la masse totale de ces déchets plastiques, si rien n'est fait pour la réduire, par une suite géométrique (u_n) de raison 1,054 et de premier terme $u_0 = 300$. L'arrondi au centième du terme u_n représente la masse totale de ces déchets, exprimée en million de tonnes, pour l'année $(2017 + n)$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. On souhaite déterminer en quelle année la masse totale de ces déchets plastiques aura pour la première fois augmenté de 50 % par rapport à sa valeur de 2017.
 - a. Voici un programme écrit en langage Python :

```
def annee(n) :  
    u = 300  
    while u < 450  
        n = ...  
        u = ...  
    return n
```

- b. Quelle est la valeur renvoyée lors de l'appel de la fonction `annee(2017)`?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 360**20 minutes**

Lors du lancement d'un nouveau jeu, 3 000 exemplaires ont été vendus.

Une étude de marché prévoit une progression des ventes de 10% chaque semaine pour les six prochains mois.

On modélise le nombre de jeux vendus par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de jeux vendus durant la n -ième semaine après le lancement.

On a donc $u_0 = 3000$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Voici une fonction écrite en langage Python :

```

def jeux() :
    u = 3000
    S = 3000
    n = 0
    while S < 100000 :
        n = n + 1
        u = u * 1.1
        S = S + u
    return n

```

La fonction retourne 15.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer le nombre total de jeux vendus au bout de six mois.

2.6 Aller plus loin

EXERCICE 361 : MÉTHODE DES CORDES OU MÉTHODE DE LAGRANGE

30 minutes

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 10 cm.

1. Etudier les variations de f .
2. Construire la courbe $\mathcal{C}$.
3. Montrer que l'équation $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3} = 0$ admet deux solutions dans $[0;2]$ dont une notée α dans $[1;2]$.
4. Soit A et B les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et 2.
 - a. Construire la droite (AB) , qui coupe l'axe des abscisses en m_1 .
 - b. Placer le point M_1 de $\mathcal{C}$ ayant pour abscisse m_1 .
 - c. Construire la droite (BM_1) qui coupe l'axe des abscisses en m_2 .
 - d. Placer le point M_2 de $\mathcal{C}$ ayant pour abscisse m_2 .
 - e. Construire la droite (BM_2) .
 - f. Que remarquez-vous?
5. On se propose de calculer avec une calculatrice des valeurs approchées des abscisses de M_1 , M_2 , ...
 Soit I le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a , avec $a \neq 2$.
 Montrer que la droite (IB) coupe l'axe des abscisses au point M d'abscisse $x = \frac{-2a^3 + 9a - 2}{-a^3 + 3a + 2}$.
6. Soit la fonction g définie sur $[0;2]$ par $g(a) = \frac{-2a^3 + 9a - 2}{-a^3 + 3a + 2}$
 Soit $a_0 = 1$ l'abscisse de A .

- a. Déterminer en fonction des termes de la suite (a_n) : $g(a_0)$, $g(a_1)$, $g(a_2)$.

- b. En utilisant la touche « Rep » de la calculatrice, déterminer les premiers termes de la suite (a_n) .
- c. Pour obtenir un encadrement de α à 10^{-1} près, à partir de quelle valeur de n le nombre a_n appartient-il à l'intervalle correspondant?
- d. Même question en remplaçant 10^{-1} par 10^{-2} , puis par 10^{-4} .

EXERCICE 362**15 minutes**

En utilisant la méthode de Lagrange, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près d'une racine de la fonction $f(x) = x^3 - x + 1$ dans l'intervalle $[-2; 0]$.

EXERCICE 363**15 minutes**

En utilisant la méthode de Lagrange, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine de la fonction $f(x) = x^4 + x - 2$ dans l'intervalle $[-2; 0]$.

EXERCICE 364 : MÉTHODE DES TANGENTES OU MÉTHODE DE NEWTON**25 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 10 cm.

1. Etudier les variations de f .
2. Construire la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 2.
3. Montrer que l'équation $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3} = 0$ admet deux solutions dans $[0; 2]$ dont une notée α dans $[1; 2]$.
4.
 - a. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B , elle coupe l'axe des abscisses en t_1 .
 - b. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point T_1 , d'abscisse t_1 , elle coupe l'axe des abscisses en t_2 .
 - c. Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point T_2 , d'abscisse t_2 , elle coupe l'axe des abscisses en t_3 .
 - d. Quelle remarque peut-on faire?
5. Soit J un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$, soit b son abscisse ($b \neq 1$).
 - a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point J .
 - b. En déduire que l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses vérifie : $x = \frac{2b^3 - 1}{3(b^2 - 1)}$.
6. Soit la fonction h définie sur $[0; 1[\cup]1; 2[$ par $h(b) = \frac{2b^3 - 1}{3(b^2 - 1)}$.
Soit $b_0 = 2$ l'abscisse de B .
 - a. Déterminer en fonction des termes de la suite (b_n) : $h(b_0)$, $h(b_1)$, $h(b_2)$.
 - b. En utilisant la touche « Rep » de la calculatrice, déterminer les cinq premiers termes de la suite (b_n) .
 - c. Comparer b_5 avec la valeur obtenue avec la commande « solve » de la calculatrice.

EXERCICE 365**15 minutes**

En utilisant la méthode de Newton, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine de la fonction $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ dans l'intervalle $[0 ; 2]$.

EXERCICE 366**15 minutes**

En utilisant la méthode de Newton, déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du zéro de la fonction $f(x) = e^x + x$ dans l'intervalle $[-2 ; 0]$.

EXERCICE 367**20 minutes**

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que ces relations permettent de définir une suite de réels, $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ dont chaque terme est positif.
2. Vérifier que $x_0^2 < 3$ puis montrer que pour tout entier naturel n , $x_n^2 < 3 \implies x_{n+1}^2 < 3$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (x_n) .
4. On admet que la suite admet une limite finie. Déterminer cette limite.

EXERCICE 368**20 minutes**

1. Calculer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
2. Calculer $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
3. En déduire P_{2019} .

EXERCICE 369**20 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geq 1 : u_{n+1} = -\frac{3}{4}u_n + \frac{11}{12}$,
et la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \frac{11}{21}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
3. A une date donnée Alfred et Bérénice décident de se téléphoner régulièrement. On désigne par B_n l'évènement : « Bérénice téléphone à Alfred le $n^{\text{ème}}$ jour qui suit leur décision ».

La probabilité que Bérénice téléphone à Alfred le premier jour est $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

Sachant que :

- Si Bérénice a téléphoné à Alfred le $n^{\text{ème}}$ jour, la probabilité pour qu'elle l'appelle le lendemain est de $\frac{1}{6}$;
- Par contre si Bérénice n'a pas appelé Alfred le $n^{\text{ème}}$ jour, la probabilité qu'elle le fasse le lendemain est de $\frac{11}{12}$.

a. Enoncer $\overline{B_n}$, évènement contraire de B_n .

b. Montrer que $P(B_{n+1} \cap B_n) = \frac{1}{6}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1} \cap \overline{B_n}) = \frac{11}{12}P(\overline{B_n})$.

- c. En déduire que $P(B_{n+1}) = -\frac{3}{4}P(B_n) + \frac{11}{12}$.
4. En utilisant les questions 1. et 2., déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité pour que Bérénice téléphone à Alfred le 60^e jour.

EXERCICE 370**20 minutes**

Deux constructeurs d'automobiles lancent simultanément deux modèles de voitures a et b . Afin de promouvoir leur produit, ils font appel à des sociétés de publicité qui procèdent à des sondages. La campagne publicitaire dure plusieurs mois. Chaque mois on interroge les mêmes individus.

On définit les événements suivants :

A_n : « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle a au n -ième mois ».

B_n : « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle b au n -ième mois ».

On pose : p_n = probabilité de A_n et q_n = probabilité de B_n .

1. On suppose qu'un individu interrogé est obligé de se déterminer soit pour le modèle a , soit pour le modèle b . Ecrire alors une relation entre p_n et q_n .
2. On constate qu'un individu favorable au modèle a à un moment donné, garde une fois sur deux le même avis le mois suivant, alors qu'un individu favorable au modèle b garde le même avis sept fois sur dix le mois suivant.

Déterminer dans ces conditions les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{A_n}(B_{n+1}) \text{ et } P_{B_n}(B_{n+1})$$

3. Démontrer que : $P(B_n \cap B_{n+1}) = 0,7 \times q_n$ et que $P(A_n \cap B_{n+1}) = 0,5 \times p_n$.
En déduire que $P(B_{n+1}) = 0,7q_n + 0,5p_n$.
4. Montrer que $q_{n+1} = 0,2q_n + 0,5$.
5. Démontrer que la suite (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$, de terme général : $u_n = q_n - 0,625$ est une suite géométrique de raison 0,2.
6. Déterminer la limite de (u_n) puis celle de (q_n) , en déduire la limite de (p_n) .

EXERCICE 371**15 minutes**

Une suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + 3$.

1. Etudier le cas où $u_0 = 4$.
2. On suppose $u_0 \neq 4$.
 - a. Montrer qu'il existe une suite géométrique (v_n) telle que $u_n - v_n$ soit indépendant de n .
 - b. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0 .
 - c. En déduire que la suite (u_n) tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini et calculer cette limite.

EXERCICE 372 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier les réponses.

1. Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+8} > u_n$.
2. Pour tout entier naturel n , on a : $-3 \leq u_n \leq 3$.
3. La suite (u_n) est monotone.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

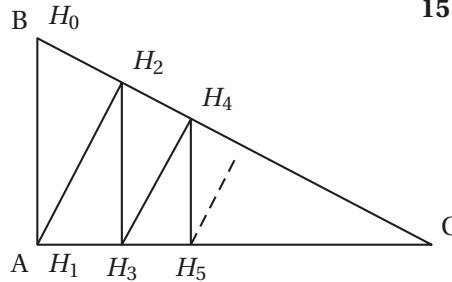
EXERCICE 373**20 minutes**

On pose $a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2 - \sqrt{3}$.

1. Calculer a^2 , b^2 , a^3 et b^3 .
2. Montrer que s'il existe deux entiers u_n et v_n tels que $a^n = u_n + v_n\sqrt{3}$ et $b^n = u_n - v_n\sqrt{3}$, alors il existe deux entiers u_{n+1} et v_{n+1} tels que $a^{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{3}$ et $b^{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}\sqrt{3}$.
Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n .
3. Etablir les égalités $u_n^2 - 3v_n^2 = 1$ et $u_n v_{n+1} - u_{n+1} v_n = 1$.
4. En déduire que la fraction $\frac{a^n}{b^n}$, est irréductible.

EXERCICE 374 : VRAI/FAUX**15 minutes**

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $BC = 8$. On définit la suite des points (H_n) ainsi : $H_0 = B$ et H_{n+1} est le projeté orthogonal de H_n sur (AC) si n est pair et sur (BC) si n est impair. On définit les suites (ℓ_n) et (L_n) par : $\ell_n = H_n H_{n+1}$ et $L_n = \ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_n$.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier les réponses.

1. $\ell_1 = H_1 H_2 = 2$.
2. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $H_n H_{n+1} H_{n+2}$ est un demi-triangle équilatéral.
3. La suite (ℓ_n) est géométrique.
4. Quand n tend vers $+\infty$, L_n tend vers un nombre fini inférieur à 30.

EXERCICE 375**25 minutes**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : Un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n .
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel?

Partie B : Un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
 - a. Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 . Interpréter.
 - b. Démontrer que, si $0 \leq u_n \leq 55$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq 55$.
 - c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - d. En déduire la convergence de la suite (u_n) .
 - e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

```

n ← 0
u ← 12
Tant Que .....
    u ← .....
    n ← .....
Fin Tant Que
Afficher .....
```

Compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

EXERCICE 376**30 minutes****Partie A**

Pour participer à la finale du jeu « Super Game », organisée par un magasin de jeu vidéo, deux enfants, Ulysse et Victor, s'entraînent chaque jour, pendant les vacances. Pour être sélectionné, un joueur doit obtenir un minimum de 2 000 points avant la date de la finale et contacter l'organisateur qui l'inscrit alors sur la liste des participants au concours.

Le premier jour de son « entraînement », Ulysse, féru de jeu vidéo, obtient un très bon score de 1 500 points. Victor, qui est plus jeune, marque 1 000 points. Au fur et à mesure des jours, Ulysse remarque que, quotidiennement, son score progresse de 3 % alors que celui de Victor augmente de 70 points.

On note u_0 et v_0 les scores obtenus respectivement par Ulysse et Victor le premier jour de leur entraînement, soit le 30 juin (on a donc $u_0 = 1\,500$ et $v_0 = 1\,000$).

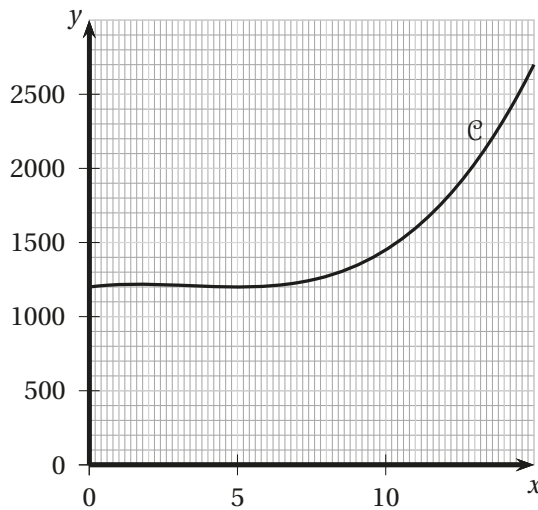
De même, u_n et v_n correspondront aux scores obtenus le n juillet.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 en arrondissant le score au point supérieur.
2. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
3. Quelle est la nature de chacune des suites (u_n) et (v_n) ? Justifier.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
5. La finale a lieu le 14 juillet. Qui sera sélectionné pour y participer? Justifier la réponse par un calcul.
6. A l'aide de la calculatrice, pour chacun des enfants, déterminer la date à laquelle il aura atteint le score fatidique des 2 000 points.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x + 1\,200$.

1.
 - a. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; 15]$. Déterminer $f'(x)$.
 - b. Montrer que $f'(x) = (3x - 5)(x - 5)$.
 - c. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 15]$.
2. La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f précédente.



A l'aide de cette courbe, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2\,000$. On fera apparaître sur le graphique le tracé utilisé.

3. Un troisième joueur, Fabrice, s'est également entraîné à partir du 30 juin pour la finale du jeu « Super Game ». La fonction précédente correspond aux points obtenus par Fabrice, où x représente le nombre de jours écoulés depuis le 30 juin.
 - a. Que représente $f(0)$?
 - b. Utiliser le résultat de la **question 2.** pour déterminer si ce joueur sera sélectionné pour la finale du 14 juillet. A quelle date?

Qui, entre Ulysse, Victor et Fabrice sera sélectionné le premier?

EXERCICE 377**30 minutes****Partie A : Croissance des lapins**

En 1228, Léonard de Pise (surnommé *Fibonacci* c'est-à-dire « fils de Bonaccio ») publiait dans un recueil intitulé *Liber Abaci* le problème suivant :

« On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun lapin ne meurt, combien y aura-t-il de couples le n -ième mois ? »

1. On note F_n le nombre cherché. Vérifier les égalités : $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$.
2. Vérifier la relation $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire la valeur de F_n pour $n \leq 20$

Partie B : La suite de Fibonacci

C'est la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ définie par :
$$\begin{cases} F_1 = 1 & , & F_2 = 1 \\ F_{n+2} & = & F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
Montrer que α et β sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
2. En déduire les égalités :
 - a. $\alpha^2 = \alpha + 1$
 - b. $\beta^2 = \beta + 1$
 - c. $\alpha + \beta = 1$
 - d. $\alpha - \beta = \sqrt{5}$
 - e. $\alpha^2 + \beta^2 = 3$
3. Prouver alors l'égalité : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} \pm 1$.

EXERCICE 378**25 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (1).

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .
2. Soit α et β les deux racines de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
Donner les valeurs exactes de α et β (on notera β la plus petite valeur).
3. Montrer que la suite définie pour tout entier naturel n , par $v_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$ est solution de (1).
4. Déterminer λ et μ telles que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
On admet désormais que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$.

5. Démontrer que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \sqrt{5}) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n (1 - \sqrt{5})}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n}$$

6. Donner un encadrement entre deux entiers naturels consécutifs de $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$.
7. En déduire la limite de $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. Conjecturer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 379**20 minutes**

A partir d'un nombre donné, on construit une suite (u_n) de la façon suivante : u_{n+1} est la somme des carrés des chiffres de u_n .

Ainsi, si $u_1 = 1234$, $u_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 28$

$u_3 = 2^2 + 8^2 = 68$.

1. Calculer les dix premiers termes de la suite (u_n) de premier terme $u_1 = 2019$.
2. a. Calculer les dix premiers termes de la suite (u_n) de premier terme $u_1 = 89$.
b. En déduire u_{2019} .
3. a. Vérifier que si $u_1 < 10^{11}$ alors pour tout $n \geq 2$, $u_n < 1000$.
b. Ecrire un programme en Python, qui permet de calculer u_n pour tout $u_1 < 1000$.
c. Adapter le programme pour calculer u_{2019} avec $u_1 = 123456789$.

EXERCICE 380**30 minutes**

1. En informatique, un mot est une suite de 0 et de 1. Par exemple : 010011 est un mot.
 - a. Combien peut-on former de mots de n chiffres (n non nul) ?
 - b. Expliquer pourquoi un mot d'au moins 4 chiffres comporte forcément, dans son écriture, deux blocs de chiffres consécutifs identiques.
2. On considère la transformation P qui opère sur les mots en remplaçant chaque 0 par 01 et chaque 1 par 10.

Ainsi : $P(0) = 01$ et $P(1) = 10$.

Par exemple $P(010) = (01)(10)(01) = 011001$

Déterminer $P(000)$, $P(111)$ et $P(1001)$.
3. La suite de Protéus (t_n) est définie ainsi : $t_0 = 0$; $t_1 = P(t_0)$; $t_2 = P(t_1)$; $t_3 = P(t_2) \dots$ c'est-à-dire pour tout entier $n \geq 0$, $t_{n+1} = P(t_n)$.
 - a. Déterminer t_1 , t_2 et t_3 .
 - b. Déterminer en fonction de n le nombre de chiffres qui composent t_n . Expliquer.
 - c. Y a-t-il toujours autant de 1 que de 0 dans chaque mot t_n de la suite de Protéus, pour tout entier n strictement positif? Expliquer.
4. Pour tout mot m , on note $\overline{m}$ le mot obtenu en remplaçant dans m le chiffre 0 par 1 et le chiffre 1 par 0.

Par exemple si $m = 10101$ alors $\overline{m} = 01010$.

 - a. Déterminer $P(\overline{0})$ et $P(\overline{1})$.
 - b. Pour tout mot m , comparer $P(\overline{m})$ et $\overline{P(m)}$.

- c. En observant les mots t_1 , t_2 et t_3 vérifier qu'on peut construire simplement t_2 à partir de t_1 ainsi que t_3 à partir de t_2 .
- d. Expliquer pourquoi cette relation se poursuit de proche en proche et comment on peut construire t_{n+1} à partir de t_n pour tout entier n .
- e. Comment peut-on retrouver à partir de cette relation le nombre de 0 et de 1 dans un mot quelconque t_n ?
- f. Quels sont les deux derniers chiffres du mot t_{2019} ?

EXERCICE 381 : SUITE DE SYRACUSE DE L. COLLATZ**20 minutes**

On choisit un entier naturel :

- Si le nombre est pair, on le divise par 2 et on obtient le terme suivant de la suite.
- Si le nombre est impair, on le multiplie par 3, on ajoute 1 au résultat et on obtient le terme suivant de la suite.

On recommence la procédure avec le nombre obtenu.

- On obtient ainsi une suite de nombres, appelée **vol** du nombre de départ,
- les nombres de la suite sont appelés les **étapes du vol**,
- le plus grand nombre obtenu dans la suite est appelé l'**altitude** maximale de la suite,
- le nombre d'étapes avant de passer sous le nombre de départ est appelé la **durée du vol en altitude**,
- le nombre d'étapes avant d'obtenir 1 est appelé la **durée du vol**.

1. On choisit 9 pour entier de départ.

- a. Calculer les termes de la suite jusqu'à obtenir 1.
- b. En déduire le vol de 9 : les étapes du vol, l'altitude maximale du vol, la durée du vol en altitude et la durée du vol.

2. On choisit 1 pour entier de départ.

- a. Calculer les termes de la suite jusqu'à obtenir à nouveau 1.
- b. En déduire le vol de 1 : les étapes du vol, l'altitude maximale du vol, la durée du vol en altitude et la durée du vol.

3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

4. Ecrire un programme qui demande un entier et calcule les étapes du vol.

5. Ecrire un programme qui demande un nombre et calcule l'altitude maximale du vol et la durée du vol.

EXERCICE 382**30 minutes**

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant la condition

$$(1) \quad \begin{cases} \text{pour tout } x \in [0 ; +\infty[, f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Partie A

On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1).

La méthode d'EULER permet de construire une suite de points (M_n) de coordonnées (x_n, y_n) ,

proches de la courbe représentative de la fonction f .

Nous allons tracer la courbe sur l'intervalle $I = [0 ; 10]$

Pour cela, on divise I en n intervalles et on choisit $h = \frac{10}{n}$. On prend $n = 20$. On aura donc $x_{n+1} = x_n + 0,5$.

1. Vérifier que $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.
2. Montrer que $y_{n+1} = y_n + \frac{0,5}{y_n}$
3. Calculer les coordonnées des points $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{20}$ (on arrondira au millième les valeurs trouvées) puis les placer dans un repère du plan. En déduire une ébauche de la courbe.

Partie B

On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant (1) est nécessairement strictement positive sur $[0 ; +\infty[$.

1. Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$.
2. On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; a]$.
3. Conclure.

EXERCICE 383

30 minutes

On considère les fonctions P_n , définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_1(x) = x^2 - 1 \text{ et pour tout } n \geq 1, P_{n+1}(x) = P_n^2(x) - 1.$$

1. Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$ et $P_3(x) = 0$.
3. Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations :
 $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1$ et $P_3(x) = 1$.
4. Déterminer une solution de l'équation $P_{2019}(x) = 0$.
5. Déterminer le nombre de solutions de cette équation.

EXERCICE 384

30 minutes

On définit une suite (u_n) par la donnée de ces deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence : (1) $\forall n \geq 2, u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$, a et b étant deux réels non nuls donnés.

Le but de l'exercice est de trouver une expression explicite de la suite, solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. On notera α et β ses solutions si elles existent.

1. Calculer u_3, u_4, u_5, u_6 et u_7 en fonction de u_1, u_2, a et b .
2. On suppose que $a^2 + 4b > 0$
 - a. Montrer qu'il existe deux réels distincts α et β tels que $\alpha + \beta = a$ et $\alpha\beta = -b$.
 - b. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n$ pour $n \geq 1$ est une suite géométrique de raison β .
 - c. Que peut-on en déduire pour la suite (w_n) définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$?

- d. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n .
 - e. En déduire une expression de u_n en fonction de u_1, u_2, α, β et n .
3. On suppose que $a^2 + 4b = 0$
- a. Montrer que la relation (1) peut s'écrire $u_{n+1} - \alpha u_n = \alpha(u_n - \alpha u_{n-1})$.
 - b. On pose $u_n = \alpha^n s_n$. Montrer que la suite (s_n) est une suite arithmétique.
 - c. En déduire l'expression de s_n puis de u_n en fonction de u_1, u_2, α et n .

EXERCICE 385**15 minutes**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

1. Vérifier $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.
2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 386**15 minutes**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2. Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $u_n = a \times 5^n + b$.
4. En déduire u_{15} .
5. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

EXERCICE 387**15 minutes**

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 &= -3 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 388**30 minutes**

Une cagnotte contient autant de pièces de 1 € et de 2 € que nécessaire.

On prélève dans cette cagnotte une somme de 5 € : cela peut se faire en utilisant cinq pièces de

1 € et deux pièces de 2 € :

- cinq pièces de 1 €, alignées sur la table, donnent le nombre 11111 ;
- trois pièces de 1 € et une pièce de 2 € donnent les nombres 1112, 1121, 1211 et 2111 ;
- une pièce de 1 € et deux pièces de 2 € donnent les nombres 122, 212 et 221.

Pour résumer la situation, on dira que la somme de 5 € génère huit nombres différents, ce que l'on note : $S_5 = 8$.

Que vaut S_{12} ?

EXERCICE 389

15 minutes

Les faces d'un dé tétraédrique sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur la table, la face « 1 » contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2019 étapes, en comptant le « 1 » initial.

1. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut obtenir pour S .
2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

EXERCICE 390

20 minutes

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

b. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Dans un repère orthonormal tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.
Placer u_0 , en utilisant ces deux droites, placer u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 6$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 391

20 minutes

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
Ecrire un programme qui affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} &= 0,032 \\ v_{n+1} &= 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie : $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction?

EXERCICE 392

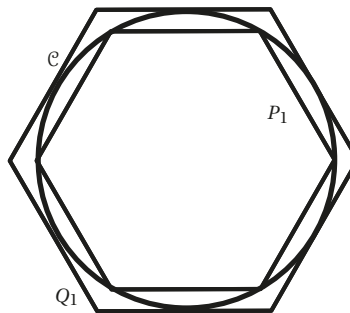
30 minutes

Dans un texte intitulé « De la mesure du cercle », Archimède imagine la première méthode permettant, en théorie, le calcul de π avec une aussi grande précision que l'on désire. Cet exercice reprend les idées d'Archimède avec les méthodes d'aujourd'hui.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1, on construit, pour tout $n \geq 1$ deux polygones réguliers P_n et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathcal{C}$ et Q_n exinscrit à $\mathcal{C}$.

Nous admettons que le périmètre de $\mathcal{C}$ est encadré par ceux des deux polygones. Dans la suite, on note p_n et q_n , les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n .

Ainsi $p_n < \pi < q_n$.



1. Cas $n = 1$

Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2. a. Déterminer, en fonction de n , l'angle au centre qui intercepte un côté de P_n ou de Q_n .

b. En déduire que $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

3. Relations de récurrence

a. On pose $\alpha = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n en fonction de n et de α .

b. Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

c. En déduire que, pour tout $n \geq 1$: $\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$.

d. A l'aide des relations précédentes, calculer q_2 et p_2 .

4. Ecrire un programme qui permet d'afficher un encadrement de π à la précision demandée, ainsi que la valeur de n .**EXERCICE 393****20 minutes**

Soit (q_n) une suite d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{q_0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \dots + \frac{1}{q_0 q_1 \dots q_n}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par une suite convergente ne dépendant que de q_0 .3. En déduire que la suite (u_n) a une limite qui appartient à l'intervalle $]0 ; 1]$.**EXERCICE 394****20 minutes**1. Soit deux urnes U_1 et U_2 , la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires; la seconde contient 8 boules blanches et 2 boules noires.

D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne :

si la boule est blanche on recommence le tirage dans la même urne ;

si la boule est noire on recommence le tirage dans l'autre urne.

Cette règle est appliquée à chaque tirage et on suppose que dans chaque urne les tirages sont équiprobables.

Soit P_n la probabilité pour que le $n - i\text{ème}$ tirage se fasse dans l'urne U_1 .

a. Déterminer P_1 .b. Déterminer P_2 . On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.c. Démontrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) de la forme : $\forall n \geq 2, P_n = aP_{n-1} + b$ où a et b sont des réels que l'on déterminera.2. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.a. Déterminer le réel α tel que la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.b. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

- c. Déterminer la limite de P_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 395**20 minutes**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A : Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous. Il a oublié de compléter deux lignes.

```

n ← 1
u ← 1,5
Tant que n < 9
    u ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
Afficher la variable u

```

1. Compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,265 6	0,206 3	...	0,010 2	0,010 1

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
 3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 4. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
- En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C : Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

EXERCICE 396**20 minutes**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_0 = 2$ et : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.

- b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
- c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
- 3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
 - a. Exprimer S_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de la suite (T_n) .

EXERCICE 397**20 minutes**

Dans cet exercice :

- * I désigne l'intervalle $[0,4; 0,7]$;
- * α est le réel tel que $e^{-\alpha} = \alpha$; on admet que $\alpha \in I$;
- * φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-x}$;
- * u est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 &= 0,4 \\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) \end{cases}$

☞ Inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction dérivable sur $]a; b[$. S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in]a; b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

1. Montrer qu'on a, pour tout $x \in I$.
 - a. $\varphi(x) \in I$.
 - b. $|\varphi'(x)| \leq 0,7$.
 - c. $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$.
2. a. Montrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$, puis en déduire par récurrence qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq 0,3 \times (0,7)^n.$$
 - b. Conclure alors quant à la convergence de la suite u .
3. Déterminer un entier p tel que, pour $n \geq p$, on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$, puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

EXERCICE 398**20 minutes**

Soit la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 1 - u_n$.

1. Calculer u_{2018} .
2. Déterminer le nombre d'indices n , inférieurs ou égaux à 2018, tels que $u_n = 0$.

EXERCICE 399**20 minutes**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 6$, $v_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n - \frac{4}{5}v_n$ et $v_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n$.

Existe-t-il un entier naturel k tel que $u_k = 7$ et $v_k = 2$?

EXERCICE 400**20 minutes**

1. Soit n un entier naturel non nul, démontrer que l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive, que l'on notera u_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$, où α est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(u_n)^n + (u_n - \alpha) \left(u_n + \frac{1}{\alpha} \right) = 0$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Nombre dérivé

3.1.1 Point de cours

Définition 1 :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I . On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie l en a , c'est-à-dire lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \text{ ou encore } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = l$$

Dans ce cas, l est appelé **le nombre dérivé** de f en a , on le note $f'(a)$.

Définition 2 :

Soit f une fonction dérivable en a .

On appelle **tangente** à la courbe représentative de f au point $A(a, f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est d'équation :

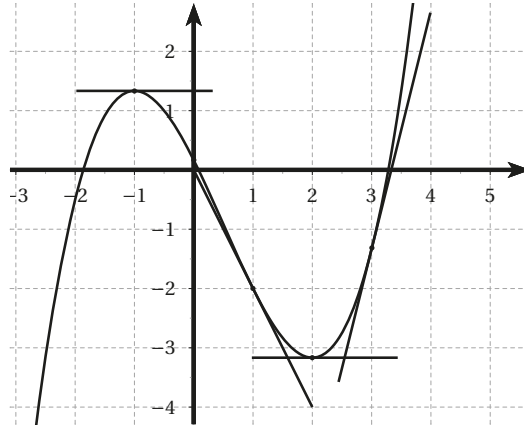
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 401

5 minutes

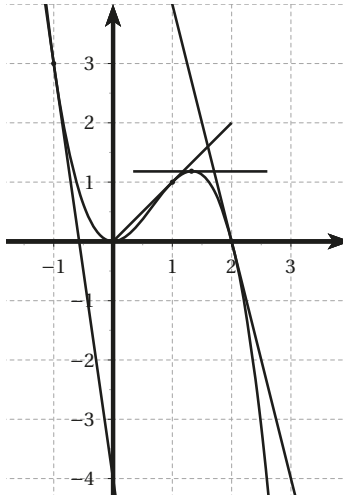
Soit la fonction f définie sur $[-3; 5]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous. La tangente au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.



1. Déterminer graphiquement $f(1)$.
2. Donner un encadrement à 0,5 de $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.
3. Déterminer par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
4. Sachant que la tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à la tangente au point d'abscisse 1, déterminer $f'(0)$.

EXERCICE 402**5 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-3; 5]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous. La tangente au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère.

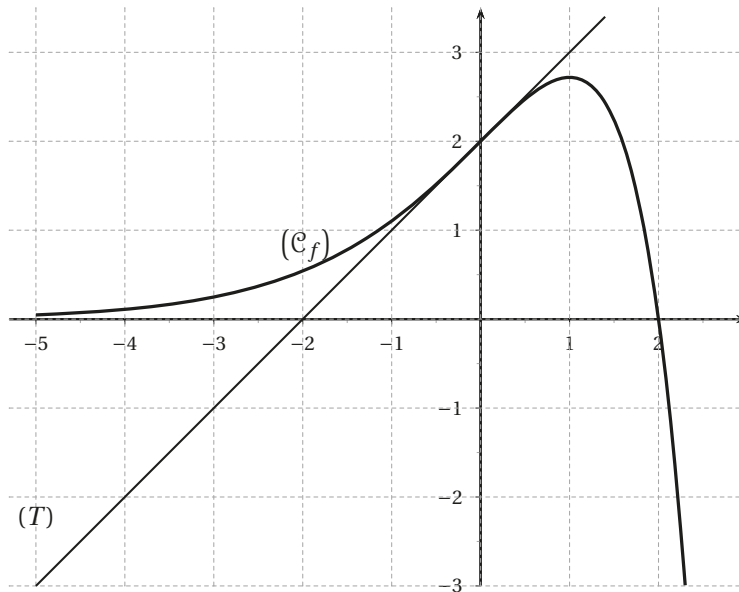


1. Déterminer graphiquement $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'\left(\frac{4}{3}\right)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.

EXERCICE 403**10 minutes**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-5; \frac{5}{2}\right]$. Le plan est muni d'un repère orthonormal.

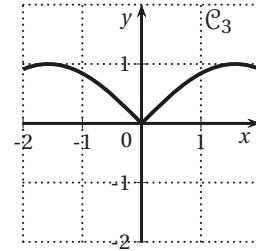
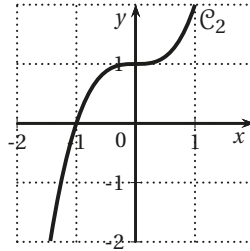
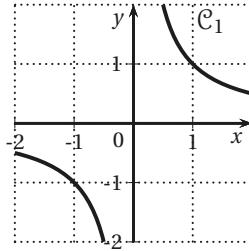
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentée ci-dessous est celle de la fonction f .
- Les points A(0; 2), B(1; e) et C(2; 0) appartiennent à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- Le point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse (-5) a une ordonnée strictement positive.
- La tangente (T) en A à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point D(-2; 0).
- La tangente en B à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f'(x) = 0$?
3. Donner, par lecture graphique, une équation de la droite (AC) .
4. Donner, par calcul, une équation de la droite (AB) .
5. Donner une équation de la droite (T) .

EXERCICE 404**5 minutes**

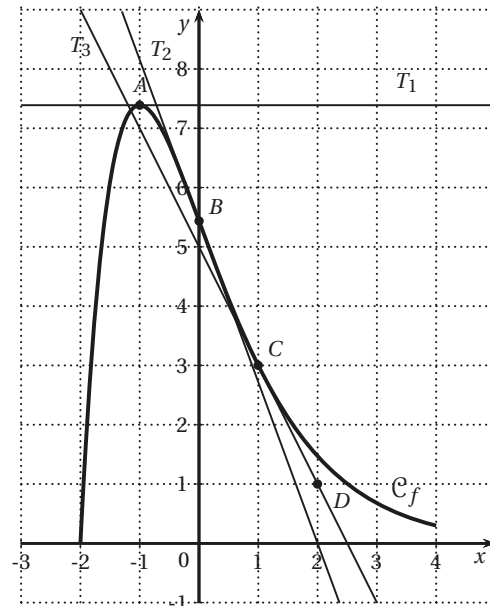
Par simple lecture graphique, déterminer les fonctions dérivables en 0.

**EXERCICE 405****10 minutes**

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$ ainsi que plusieurs tangentes à $\mathcal{C}_f$:

- T_1 est la tangente au point A de coordonnées $(-1; e^2)$,
- T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0; 2e)$,
- T_3 est la tangente au point C de coordonnées $(1; 3)$.

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées $(2; 1)$.

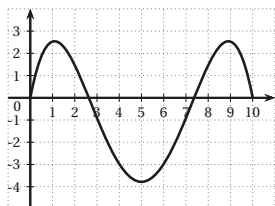
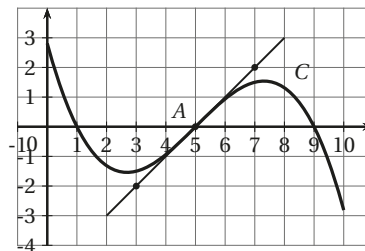
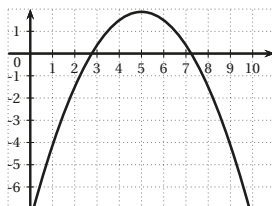
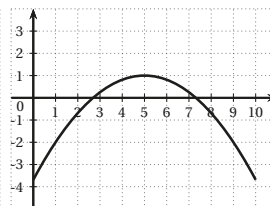
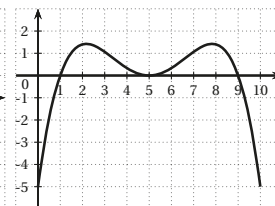


1. Déterminer $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C .

EXERCICE 406**5 minutes**

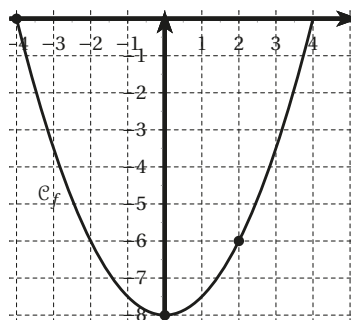
On donne ci-contre la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0 ; 10]$. La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée.

Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f .

**a. Courbe 1****b. Courbe 2****c. Courbe 3****d. Courbe 4****EXERCICE 407****5 minutes**

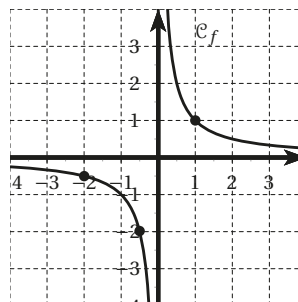
Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

1. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 sachant que $f'(2) = 2$.
2. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4 , sachant que $f'(-4) = -4$.
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, sachant que $f'(0) = 0$.

**EXERCICE 408****5 minutes**

Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$

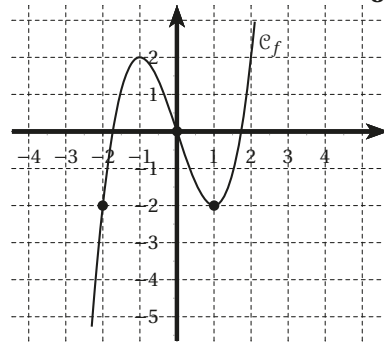
1. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 sachant que $f'(-2) = -\frac{1}{4}$.
2. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, sachant que $f'(1) = -1$.
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$, sachant que $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.



EXERCICE 409**5 minutes**

Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 3]$.

1. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 sachant que $f'(-2) = 9$.
2. Tracer la tangente $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 , sachant que $f'(0) = -3$.
3. Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 , sachant que $f'(1) = 0$.

**EXERCICE 410****10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Soit les points A, B, C et D de $\mathcal{C}_f$, d'abscisses respectives $-1, 0, 3$ et 7 .

1. Calculer le coefficient directeur de la corde (AB) .
2. Calculer le coefficient directeur de la corde (AC) .
3. Calculer le coefficient directeur de la corde (AD) .
4. Calculer le coefficient directeur de la corde (BC) .
5. Calculer le coefficient directeur de la corde (CD) .

EXERCICE 411**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 5x + \frac{1}{x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Soit les points A, B, C et D de $\mathcal{C}_f$, d'abscisses respectives $0, 1, 3$ et 7 .

1. Calculer le coefficient directeur de la corde (AB) .
2. Calculer le coefficient directeur de la corde (AC) .
3. Calculer le coefficient directeur de la corde (AD) .
4. Calculer le coefficient directeur de la corde (BC) .
5. Calculer le coefficient directeur de la corde (CD) .

EXERCICE 412**10 minutes**

Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
2. $f(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$
3. $f(x) = \sqrt{2x^3+9}$
4. $f(x) = 3 \sin x$

EXERCICE 413**10 minutes**

Simplifier $f(x)$ pour $x \neq a$, puis déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

1. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ avec $a = -1$
2. $f(x) = \frac{2x^2-x-15}{x-3}$ avec $a = 3$
3. $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ avec $a = 5$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ avec $a = 4$

EXERCICE 414**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}$. Soient A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives 1 et -2 .

1. Calculer l'ordonnée des points A et B .
2. En utilisant la calculatrice, déterminer $f'(1)$ et $f'(-2)$.

☞ Sur « NUMWORKS » : dans mode calcul, boîte à outils, diff(fonction, abscisse)

Sur « T.I. » : math-nbreDérivé et compléter (pour les anciens modèles (*fonction, x, abscisse*))

Sur « Casio » : OPTN-CALC-d/dx et compléter (pour les anciens modèles (*fonction, abscisse*))

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B .

EXERCICE 415**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + x + 2$, de courbe représentative $\mathcal{C}$. Soient A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives 0 et -1 .

1. Calculer l'ordonnée des points A et B .
2. En utilisant la calculatrice, déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B .

EXERCICE 416**5 minutes**

Sachant que $f'(3) = 4$ et que la courbe passe par le point $A(3 ; -1)$, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point A .

EXERCICE 417**5 minutes**

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -5x + 2$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4. Déterminer $f'(4)$ et $f(4)$.

EXERCICE 418**5 minutes**

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 6x$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 . Déterminer $f'(-2)$ et $f(-2)$.

3.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 419****10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
2. En déduire le rapport $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
3. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
4. Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 420**5 minutes**

1. Vérifier que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ pour tous réels x et y .

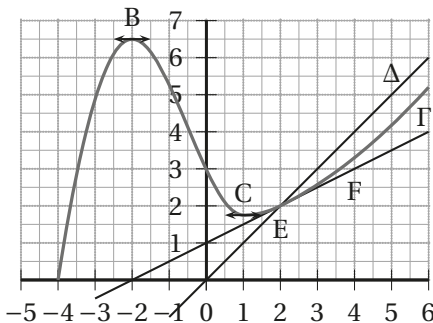
2. a. En déduire une factorisation de $(3 + h)^3 - 27$.
 b. Déterminer alors le nombre dérivé de la fonction $f : x \rightarrow x^3$ en 3.
 c. Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

EXERCICE 421**10 minutes**

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points $B(-2 ; 6,5)$ et $C(1 ; 1,75)$,
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées $(4 ; 3)$.



Déterminer par lecture graphique :

1. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;
2. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4 ; 6]$ vérifiant $f'(x) \geq 0$;
3. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4 ; 6]$ vérifiant $f(x) \leq x$.

EXERCICE 422**10 minutes**

Déterminer $f'(a)$ pour tout nombre réel a , avec :

1. $f(x) = x + k$ avec k une constante réelle quelconque.
2. $f(x) = x^2$.
3. $a > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $a \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

EXERCICE 423**10 minutes**

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 424**10 minutes**

Démontrer que la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 425**10 minutes**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ est-elle dérivable en 1 ?

3.2 Fonction dérivée

3.2.1 Point de cours

Propriété :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point a de I .

Propriétés :

- les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Dérivées usuelles

Fonction f	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée f'
k constante	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Sommes et produits :

- La somme et le produit de deux fonctions dérivables sur $]a; b[$ sont dérivables sur $]a; b[$.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- L'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $]a; b[$ est dérivable sur $]a; b[$.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Fonctions composées : Si f dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' et $ax + b \in I$ alors

$$(f(ax + b))' = a \times f'(ax + b)$$

3.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 426

20 minutes

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| 1. $f(x) = 3x + 4$ | 5. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ | 9. $f(x) = 4x^{123} - \sqrt{3}x + \sqrt{1789}$ |
| 2. $f(x) = -6x + \sqrt{2}$ | 6. $f(x) = 5x^3 + 2x$ | 10. $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{3}{7}$ |
| 3. $f(x) = x^2 + x - 4$ | 7. $f(x) = x^{2018} + 3\sqrt{x}$ | 11. $f(x) = 3x^9 - 9x^5 - \sqrt{2}$ |
| 4. $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ | 8. $f(x) = x^4 + \frac{3}{x} - \sqrt{2018}$ | 12. $f(x) = -\frac{1}{4x} + 5\sqrt{x}$ |

EXERCICE 427

10 minutes

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

- | | |
|--|--|
| 1. $f(x) = (2x^3 - 5x)(x^4 + 3x^3 - 5x)$ | 3. $f(x) = (3x^4 + 2x^2 + 1)(6x^3 + 8x)$ |
| 2. $f(x) = (x^3 + 5x)^5$ | 4. $f(x) = (3x^6 + 4x^3 + 3)^{2019}$ |

EXERCICE 428

10 minutes

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

- | | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{3x+2}{5x-3}$ | 2. $f(x) = \frac{x^2+3}{4-x^2}$ | 3. $f(x) = \frac{1}{x^6}$ | 4. $f(x) = \frac{x^4+2}{2x^2+6}$ |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------|----------------------------------|

EXERCICE 429

10 minutes

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x) = x^3 - \sqrt{x} + \sqrt{3}$ | 3. $f(x) = \sqrt{3}x + \frac{1}{3}$ | 5. $f(x) = \sqrt{8x-5}$ |
| 2. $f(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{2019}$ | 4. $f(x) = \sqrt{3x+2}$ | 6. $f(x) = x^2 + 3\sqrt{2-8x}$ |

EXERCICE 430

5 minutes

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3\sqrt{x}$.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 9.

EXERCICE 431

5 minutes

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3x + \frac{5}{x}$.

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 5.

EXERCICE 432**5 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; +\infty[$ et dérivable sur $]-4 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+8}$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2 .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 5 .

EXERCICE 433**10 minutes**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 .
3. Déterminer l'abscisse d'un point de la courbe représentative de f dont la tangente est parallèle à la tangente au point d'abscisse 1 .

EXERCICE 434**10 minutes**

☞ La dérivée de la position $f(t)$, par rapport à t , donne sa vitesse instantanée $v(t)$, la dérivée de sa vitesse instantanée donne son accélération $a(t)$.

Un point se déplace le long d'une droite x suivant l'équation $x(t) = t^3 - 2t^2 + 7$, où $x(t)$ exprime la distance, en mètre, du point à l'instant t , à partir du point de départ.

1. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération du point à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération du point à l'instant $t = 10$.

EXERCICE 435**10 minutes**

Une particule se déplace le long d'une droite x suivant l'équation $x(t) = t^2 + 3t + 5$, où $x(t)$ exprime la distance, en mètre, du point à l'instant t , à partir du point de départ.

1. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de la particule à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de la particule à l'instant $t = 4$.

EXERCICE 436**10 minutes**

Une entreprise fabrique des objets dont le coût de production s'exprime en fonction de la quantité q par : $C(q) = q^3 - 150q^2 + 350q + 2000$.

Le coût marginal pour une quantité q produite est égal au coût de fabrication d'une unité supplémentaire : $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

1. Calculer le coût marginal $C_m(q)$. En déduire $C_m(20)$.
2. Calculer $C'(q)$. En déduire $C'(20)$.
3. Calculer $E(q) = C'(q) - C_m(q)$.
☞ $|E(q)|$ représente l'erreur commise lorsqu'on assimile le coût marginal à $C'(q)$.
4. A partir de combien d'unités produites cette erreur est-elle inférieure à 1 ?

EXERCICE 437**10 minutes**

Dans une entreprise, le coût total de fabrication de q objets est donné en centaines d'euros par : $C(q) = 0,002q^3 - 0,6q^2 + 300q$.

L'entreprise fabrique au maximum 500 objets par jour.

On note C' la dérivée de la fonction C . Cette fonction représente une estimation du coût marginal.

Le coût moyen d'un article est donné par la formule : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1. Calculer le coût marginal pour $q = 500$.
2. Calculer le coût moyen lorsque q objets sont fabriqués.
3. Calculer le coût moyen d'un objet si 500 objets sont produits.
4. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de C_M en choisissant judicieusement la fenêtre.
5. Pour quelle valeur de q le coût moyen d'un objet semble-t-il minimal?

3.2.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 438

15 minutes

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$.
2. Démontrer que $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

EXERCICE 439

15 minutes

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Démontrer que $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

EXERCICE 440

15 minutes

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Factoriser $a^n - b^n$
2. En déduire une simplification de l'expression $\frac{f(a) - f(x)}{a - x}$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$.
4. En déduire la dérivée de $f(x) = x^n$.

EXERCICE 441

10 minutes

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet-elle des tangentes de coefficients directeurs 9 et -3 ?

EXERCICE 442

10 minutes

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$ admet-elle des tangentes de coefficients directeurs 1 et -1 ?

EXERCICE 443**20 minutes**

$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont les courbes représentant les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ et $h(x) = -x^2 + 4x - 1$.

- Déterminer la dérivée des fonctions f , g et h .
- Montrer que :
 - le point $A(1;2)$ est commun à $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$;
 - les trois courbes admettent en A la même tangente T .
- Ecrire une équation de T et étudier la position de chacune des courbes par rapport à T .
- Chacune des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$? Si oui, préciser en quel point, et écrire leur équation.

EXERCICE 444**15 minutes**

L'objectif de cet exercice est de tracer point par point la courbe représentative d'une fonction dont on connaît la dérivée et une valeur donnée en un point (condition initiale).

Soit la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(0) = 1$ et $f'(x) = x - 2$.

- En utilisant l'approximation $f(a+h) - f(a) = f'(a)h$ et en prenant $h = 0,5$, compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	...	5	5,5	6
$f(x)$	1				...			

- En utilisant les données précédentes, construire une approximation de la courbe représentative de f .
- Ecrire un programme en Python permettant de calculer les points de la courbe pour un intervalle et un pas donné.

EXERCICE 445**15 minutes**

La fonction logarithme népérien (qui sera étudiée en Terminale) est définie sur $]0; +\infty[$ par :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[: \ln' x = \frac{1}{x}$.

En utilisant la méthode vue dans l'exercice précédent, représenter graphiquement une approximation de la courbe représentative de la fonction $\ln$

- sur $[0,2; 2]$ avec le pas $h = 0,2$
- sur $[2; 15]$ avec le pas $h = 1$.

EXERCICE 446**15 minutes**

La fonction arc-tangente est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $\arctan(0) = 0$
- $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

En utilisant la méthode vue dans l'exercice 444, représenter graphiquement une approximation de la courbe représentative de la fonction $\arctan$:

1. sur $[0 ; 2]$ avec le pas $h = 0,2$
2. sur $[2 ; 15]$ avec le pas $h = 1$.
3. La fonction *arctan* étant impaire, en déduire une approximation de la courbe représentative de la fonction sur $[-15 ; 0]$.

☞ Rappel : une fonction f définie sur I est impaire si $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$.

EXERCICE 447**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Vérifier que pour tout nombre réel $x : x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.
3. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .

EXERCICE 448**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 .
2. Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.
3. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .

EXERCICE 449**10 minutes**

On cherche une courbe $\mathcal{C}$ qui passe par les points $O(0;0)$, $B(3;-3)$ et qui admet pour tangentes en O et B les droites (OC) et (BD) où $C(-1;-5)$ et $D(5;1)$.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont $\mathcal{C}$ serait la courbe représentative.

Est-il possible de trouver $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres réels?

EXERCICE 450**15 minutes**

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction g ne s'annulant pas sur I .

1. Démontrer que $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$.
2. Démontrer que $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

EXERCICE 451**15 minutes**

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{1}{x^{2018}}$

4. $f(x) = \sqrt{4-5x}$

7. $f(x) = (x^2 + 3x)^6$

2. $f(x) = \sqrt{3x+8}$

5. $f(x) = \frac{3}{x^4 + x^2 + \sqrt{2}}$

8. $f(x) = (2x^5 - 3x^3 + 7x)^9$

3. $f(x) = \frac{4}{x^{123}} - \sqrt{3}x$

6. $f(x) = \sqrt{2x-7}$

9. $f(x) = (5x^7 + 3x^4 - 9x^2 - 2019)^5$

EXERCICE 452**15 minutes**

Pour chaque fonction f , préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = (x^2 + 4x^3 - 5x^4)(3x^6 - 4x^3 + 7)$
2. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^4 + 2x^2 + 6}$
3. $f(x) = (x^2 + 3x - 4)(x^5 - 2x^3 + 6)$
4. $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4}$
5. $f(x) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}$
6. $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$
7. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + 2\sqrt{x})$
8. $f(x) = (x-1)^2(4-x^2)$

☞ Rappel : Si f dérivable sur I , de dérivée f' et $ax + b \in I$ alors $(f(ax + b))' = a \times f'(ax + b)$

EXERCICE 453**10 minutes**

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(0,4 ; 3,6)$, $B(3 ; 1)$, $C(1 ; 1)$, $D(1 ; 2)$, $E(0 ; 2)$, $F(1 ; 0)$, $G(3 ; 3)$ et $H(2 ; 1)$.

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; 3]$ de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$.

On donne les informations suivantes :

- La droite (OA) est tangente à $\mathcal{C}_u$ à l'origine du repère .
- La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_u$ au point B .
- Les droites (EF) et (GH) sont tangentes à $\mathcal{C}_v$ respectivement aux points E et G .
- $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ admettent respectivement aux points D et C une tangente horizontale.

Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $v'(3) = 3$.
2. $u'(0) = 9$.
3. $\left(\frac{1}{v}\right)'(1) = v'(1)$.
4. $(u \times v)'(3) = 1$.

EXERCICE 454**15 minutes**

Un point A se déplace sur une ligne droite (Ox) et la distance parcourue sur cette droite à partir du point O et au bout d'un temps t est donnée par la formule : $d(t) = 4t - 3t^2$.

1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point A en fonction de t . On rappelle que la vitesse du point est donnée par la dérivée et l'accélération par la dérivée seconde de la fonction d .
☞ Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , $\forall x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.
2. Au bout de quel temps le point A s'arrête-t-il pour rétrograder et après avoir parcouru quelle distance?
3. Au bout de quel temps le point A repasse-t-il par le point O ? Quelle est alors sa vitesse?
4. Etudier les variations de la distance et de la vitesse en fonction du temps.

EXERCICE 455**15 minutes**

Montrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 4x$ au point d'abscisse 1 est

parallèle aux tangentes à la courbe en trois points que l'on précisera.

EXERCICE 456**15 minutes**

On dit que deux courbes sont orthogonales lorsqu'elles se coupent et admettent en leur(s) point(s) d'intersection des tangentes perpendiculaires.

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de courbe représentative $\mathcal{C}$. Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a et b . T_A et T_B sont les tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en A et B .

Démontrer que $T_A \perp T_B \iff f'(a) \times f'(b) = -1$.

2. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$, de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Vérifier que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont orthogonales.
3. Les courbes représentatives des fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{2-x}$ sont-elles orthogonales?

EXERCICE 457**20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 2$, de courbe représentative $\mathcal{P}$.

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a .
2. En quels points de $\mathcal{P}$ peut-on mener une tangente passant par l'origine?
3. Existe-t-il des points de $\mathcal{P}$ dont la tangente passe par le point de coordonnées $(4; 1)$?
4. Existe-t-il des points de $\mathcal{P}$ dont la tangente passe par le point de coordonnées $(-2; 2)$?

EXERCICE 458**15 minutes**

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - 4x - 2$, de courbes représentatives $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_g$.

Soit $\mathcal{T}$ une droite d'équation $y = ax + b$. On suppose que $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{P}_f$ au point A d'abscisse α et à $\mathcal{P}_g$ au point B d'abscisse β .

1. Montrer que
$$\begin{cases} a &= 2\alpha &= 2\beta - 4 \\ b &= -\alpha^2 &= -\beta^2 - 2 \end{cases}$$
2. Calculer α et β .
3. Existe-t-il une tangente commune à $\mathcal{P}_f$ et à $\mathcal{P}_g$?

EXERCICE 459**20 minutes**

1. Soit la fonction polynôme $P(x) = 9x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 16$.

- a. Vérifier que 2 est une racine de P .
- b. En déduire une factorisation de P .
- c. On admet ici que P n'admet que deux racines réelles. En utilisant la calculatrice déterminer une valeur approchée à 10^{-3} de la seconde racine.

2. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + 4x$, de courbes représentatives $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_g$.

Existe-t-il une tangente commune à $\mathcal{P}_f$ et à $\mathcal{P}_g$?

EXERCICE 460**15 minutes**

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.

Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2 + 1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.

Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g .

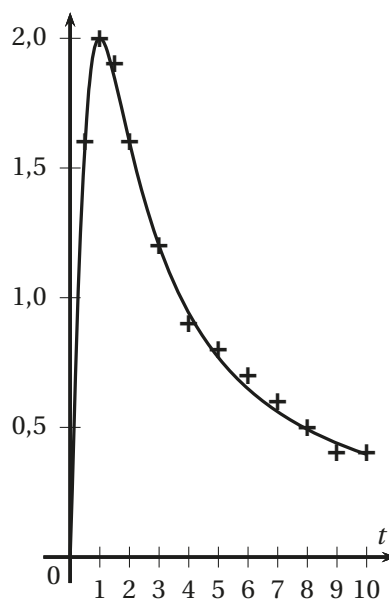
1. Par lecture graphique donner sans justification :

- les variations de la fonction g sur $[0 ; 10]$;
- la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
- l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et sa dérivée est g' .

Montrer que : $g'(t) = \frac{4(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}.$

- En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.



3. On définit la CMI (concentration minimale inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au-dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.

La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l.

Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

EXERCICE 461**25 minutes**

Soit a un réel et n un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction polynôme est factorisable par $(x - a)^n$ s'il existe une fonction polynôme R telle que $P(x) = (x - a)^n R(x)$.

1. On rappelle que pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1 et tout réel a , il existe une fonction polynôme Q tel que $P(x) = P(a) + (x - a)Q(x)$.
 - a. Démontrer que $P'(a) = Q(a)$.
 - b. En déduire que P est factorisable par $(x - a)^2$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.
 - c. Démontrer que P est factorisable par $(x - a)^3$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$.

☞ Plus généralement : Pour tout $n \geq 1$, P est factorisable par $(x - a)^n$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n)}(a) = 0$ avec $P^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de P .
2. Soit $P(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$.
 - a. Montrer que P est factorisable par $(x - 2)^4$.
 - b. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
3. Soit $P(x) = -x^7 + 3x^6 + 6x^5 - 22x^4 + 3x^3 + 39x^2 - 40x + 12$.
 - a. Montrer que P est factorisable par $(x + 2)^2$ et par $(x - 1)^4$.
 - b. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

3.3 Variations d'une fonction**3.3.1 Point de cours**

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de valeurs où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (resp. strictement décroissante) sur I .
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 un réel appartenant à I . Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un **extremum local**.

3.3.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 462****5 minutes**

Compléter les tableaux de variations suivants sachant que $f(1) = 3$ et $g(-2) = 6$.

1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f			

2.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$		+ 0 -	
g			

EXERCICE 463**5 minutes**

Compléter les tableaux de variations suivants :

1.

x	-9	-2	2	9
$f'(x)$				
f	5		6	-2

$\swarrow \quad \nearrow \quad \searrow$
 $\quad \quad \quad 3$

2.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$				
f	$-\infty$	2		$+\infty$

$\nearrow \quad \searrow$
 $\quad \quad \quad -\infty$

EXERCICE 464**5 minutes**

Compléter les tableaux de variations suivants sachant que :

1. $f(-1) = 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f				$+\infty$

$\searrow$
 $\quad \quad \quad -\infty$

2. $f(-9) = f(9) = 5$ et $f(2) = -3$.

x	-9	-2	2	9
$f'(x)$		-	0	+
f				

EXERCICE 465**10 minutes**Soit la fonction $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

- Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f .
- Déterminer la dérivée de f .
- Etudier le signe de f' .
- En déduire le tableau de variations de f .

EXERCICE 466**10 minutes**

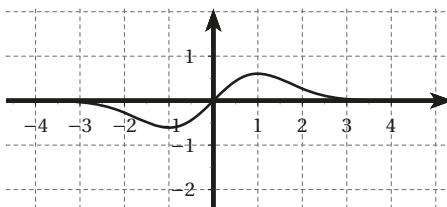
Pour chaque fonction, reprendre les questions de l'exercice précédent :

1. $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$ 2. $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ **EXERCICE 467****20 minutes**

Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 21$ 4. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 6$ 2. $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6$ 5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 9$ 6. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ **EXERCICE 468****5 minutes**

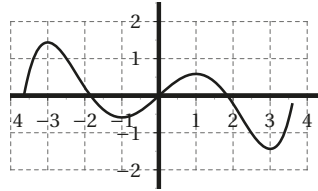
Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-4; 4]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ représentée ci-contre.

Déterminer les extrema de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 469**5 minutes**

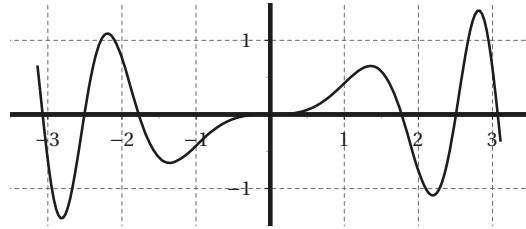
Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-3,6;3,6]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ représentée ci-contre.

Déterminer les extrema de $\mathcal{C}$.

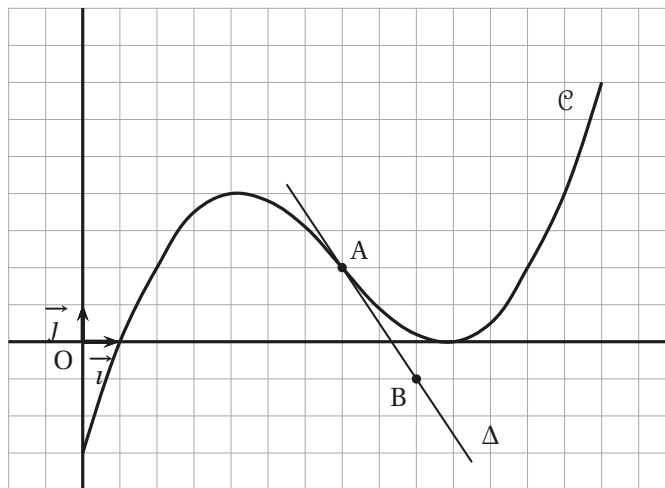
**EXERCICE 470****5 minutes**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-\pi; \pi]$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ représentée ci-contre.

Déterminer les extrema de $\mathcal{C}$ (avec la précision permise par le graphique).

**EXERCICE 471****15 minutes**

On considère une fonction définie et dérivable sur $I = [0; 14]$. Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous. Elle passe par le point $A(7; 2)$, et la tangente en A à $\mathcal{C}$ est la droite Δ qui passe par le point $B(9; -1)$.



1. Par lecture graphique :

- Dresser le tableau de variations de f .
Indiquer le signe de $f'(x)$ sur I .
- Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ sur I .
- Donner l'ensemble des réels tels que : $0 \leq f(x) \leq 2$.

2. Que valent $f(7)$ et $f'(7)$? Ecrire une équation de Δ .

3. Dresser le tableau de variation de $\frac{1}{f}$ sur $]1; 10[$.

3.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 472

15 minutes

La fonction f est définie pour tout x réel par : $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de f .
2. a. La fonction possède-t-elle des extrema locaux?
b. La fonction possède-t-elle des extrema (globaux)?

EXERCICE 473

15 minutes

La fonction f est définie pour tout $x \in]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

1. Etudier le sens de variation de f .
2. a. La fonction possède-t-elle des extrema locaux?
b. La fonction possède-t-elle des extrema (globaux)?

EXERCICE 474

10 minutes

On considère une fonction f :

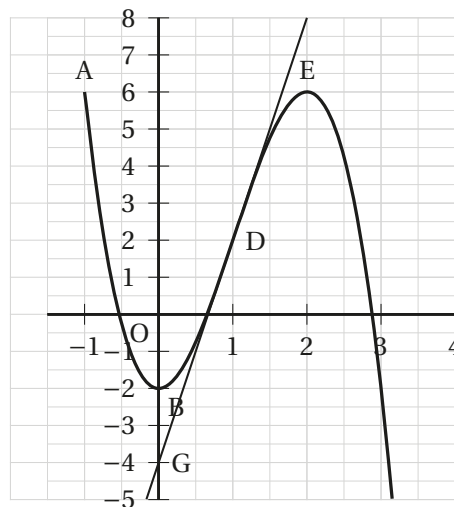
- définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; +\infty[$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0; 2]$;
- strictement décroissante sur les intervalles $[-1; 0]$ et $[2; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}$, tracée ci-contre, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Elle passe par les points $A(-1; 6)$, $B(0; -2)$, $D(1; 2)$ et $E(2; 6)$.

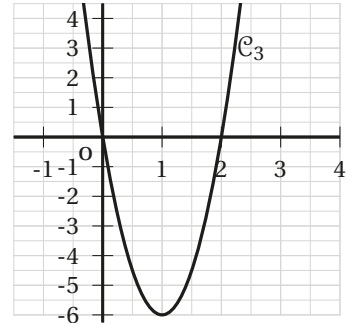
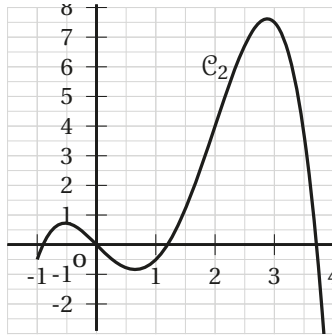
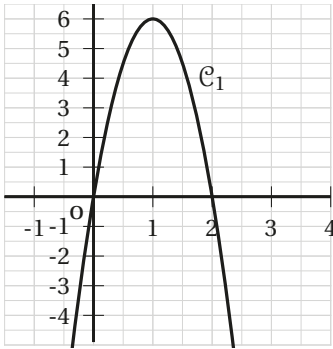
Elle admet au point D une tangente passant par le point $G(0; -4)$.

Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



1. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$. Justifier les réponses.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point D .
3. Montrer que sur l'intervalle $[-1; 0]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera x_1 .

4. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$, deux autres solutions que l'on notera x_2 et x_3 , avec $x_2 < x_3$. Dresser le tableau de signes de la fonction f .
5. Parmi les trois courbes suivantes, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente f' .

**EXERCICE 475****10 minutes**

Etudier les variations de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{2-x}$ pour $-1 \leq x \leq 2$.

EXERCICE 476**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$.

1. Etudier les variations de f sur $[-10; 10]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 .
3. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0 .

EXERCICE 477**15 minutes**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a. Etudier le sens de variation de f .
- b. Calculer $f(-20)$ et $f(30)$.
- c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (justifier).

2. Voici un algorithme :

Si $a > b$ alors

$c \leftarrow b$

$b \leftarrow a$

$a \leftarrow c$

FinSi

Si $f(b) \times f(a) \leq 0$ Alors

Tantque $b - a > 10^{-5}$ Faire

Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(a) \leq 0$

$b \leftarrow \frac{a+b}{2}$

```

        Sinon  $a \leftarrow \frac{a+b}{2}$ 
    FinSi
FinTanque
FinSi
Afficher  $a$  et  $b$ 

```

- Que peut-on dire de $f(a)$ et de $f(b)$ lorsque $f(b) \times f(a) \leq 0$?
- Que représente $\frac{a+b}{2}$ par rapport à a et b ?
- Que fait cet algorithme?
- Programmer cet algorithme en Python.
- Que se passe-t-il si l'utilisateur entre les valeurs :
 - $a = -20$ et $b = 30$?
 - $a = -20$ et $b = 3$?
 - $a = 0$ et $b = 3$?
- Comment peut-on s'assurer de trouver la solution souhaitée?

EXERCICE 478**15 minutes**

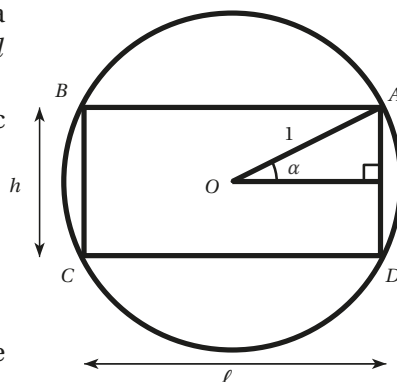
Quelle somme minimale peut-on obtenir en ajoutant un nombre strictement positif et son inverse?

EXERCICE 479**15 minutes**

Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $l \times h^2$ où l et h sont les deux dimensions ci-contre.

On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.

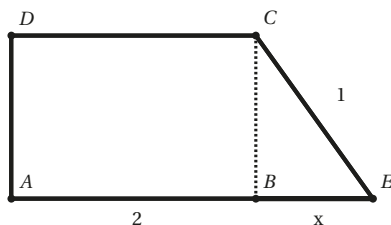
- Montrer que $h^2 = 4 - l^2$.
- En déduire que $lh^2 = -l^3 + 4l$.
- Soit $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.
 - Etudier le sens de variation de f sur $[0; 2]$.
 - Comment choisir l et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion?
- Quel est l'angle α correspondant à 0,1° près?

**EXERCICE 480****15 minutes**

Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1dm^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

- Justifier que $y = \frac{1}{x^2}$.
- En déduire que l'aire totale de la boîte est : $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

3. Montrer que pour $x > 0$, $S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
4. a. En déduire le sens de variation de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
 b. Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.

EXERCICE 481**20 minutes**

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle et BEC est un triangle rectangle. On donne les longueurs $AB = 2$ et $CE = 1$, on pose $BE = x$ avec $0 < x \leq 1$.

1. Exprimer l'aire $f(x)$ du trapèze en fonction de x .
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{1-x^2}}$.
3. Etudier les variations de f .
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire est-elle maximale?

EXERCICE 482**15 minutes**

Un grand lessivier commercialise son produit pour lave-vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme de parallélépipède rectangle de dimensions x , y et $2x$ en centimètres ($1 \leq x \leq 2$). Chaque lavage nécessite une dose d'un volume d'environ 12 cm^3 . Pour économiser l'emballage, on cherche à avoir une surface totale minimale.

1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x .
2. a. Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x}$ sur $[1; 2]$.
 b. Montrer que $S'(x)$ a même signe que $x^3 - \frac{9}{2}$.
3. Etude d'une fonction annexe :
 a. Dresser le tableau de variation de la fonction u définie sur $[1; 2]$ par $u(x) = x^3 - \frac{9}{2}$.
 b. En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $[1; 2]$ et en donner une valeur approchée à la calculatrice à $0,1$ près.
 c. En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. En déduire le tableau de variations de S .
5. Quelle valeur de x rend S minimale?

EXERCICE 483**25 minutes**

On considère un carré $ABCD$ de côté a .

Soient Γ et Γ' deux cercles intérieurs au carré et tangents. Γ est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AD]$, Γ' est tangent aux côtés $[CB]$ et $[CD]$.

Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ' , quelles sont les maximum et minimum de S ?

EXERCICE 484**15 minutes**

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal.

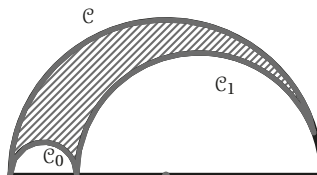
2. Soit la fonction g , définie sur $\mathbb{R}/\{1\}$, par $g(x) = \frac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

- Etudier le signe de $(x-1)(2x+1)$.
- En déduire une expression de $g(x)$ sans valeur absolue.
- Etudier la dérivabilité de g en $-\frac{1}{2}$.
- Comment peut-on déduire la courbe représentative de la fonction g de la courbe $\mathcal{C}_f$?

EXERCICE 485**15 minutes**

Soit $\mathcal{C}$ un demi-cercle de rayon 1. $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont demi-cercles tangents entre-eux et tangents à $\mathcal{C}$. Soit x le rayon de $\mathcal{C}_0$.

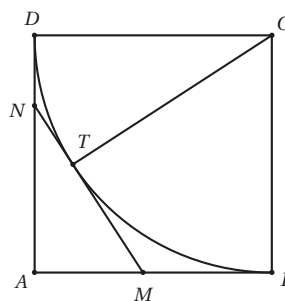
Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire hachurée est maximale.

**EXERCICE 486****15 minutes**

$ABCD$ est un carré de côté 1, $\mathcal{Q}$ est un quart de cercle de centre C , passant par B et D .

M est un point variable du segment $[AB]$, distinct de A et B . Par le point M on trace la tangente à $\mathcal{Q}$ qui coupe $[AD]$ en N . Soit T le point de contact de la tangente avec $\mathcal{Q}$.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.



- Démontrer que $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $MN = 2 - x - y$.
- En déduire que $y = 2 + \frac{2}{x-2}$.
- Pour quelle valeur de x , la distance MN est-elle minimale? Quelle est alors cette distance?
- Pour quelle valeur de x l'aire du triangle AMN est-elle maximale? Quelle est alors cette aire?

EXERCICE 487**20 minutes**

On considère le triangle isocèle ABC dans lequel $AB = AC = \ell$ et $BC = 2x$, avec $0 < x\ell$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A .

On construit sur la base BC le carré $BCDE$. Soit $S(x)$ l'aire du pentagone $ACDEB$.

1. Exprimer AH en fonction de x et de ℓ .
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x et de ℓ .
3. Démontrer que $S'(x) = \frac{(\sqrt{\ell^2 - x^2} + (4 + \sqrt{17})x)(\sqrt{\ell^2 - x^2} + (4 - \sqrt{17})x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}$.
4. En déduire les variations de $S(x)$ sur $[0; \ell]$.
5. Pour quelle valeur de x l'aire sera-t-elle maximale?

EXERCICE 488**15 minutes****Partie A**

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7]$ par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7]$, calculer $f'(x)$.
2. Etablir le tableau de variations de f .

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note c la fonction définie sur $[1; 7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1; 7]$: $c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}$.

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1; 7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1; 7]$, on a : $c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$.
2. a. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1; 7]$.
b. Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

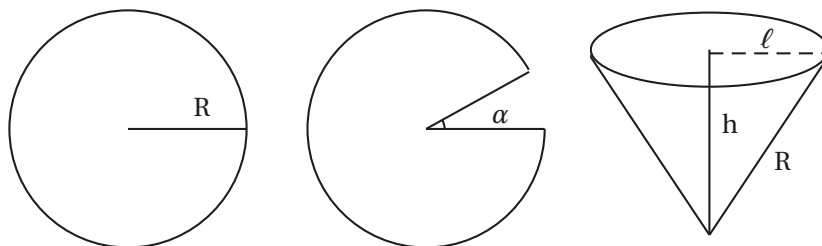
EXERCICE 489**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4|x - 3|$.

1. Etudier la dérivabilité de f .
2. Etudier les variations de la fonction f .

EXERCICE 490**25 minutes**

Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.



On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.

On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathcal{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathcal{A}h$;
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ , exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

- a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h , est $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.
- b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.
- c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton?

EXERCICE 491

20 minutes

On se propose de trouver dans quel cas la fonction $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier le signe du trinôme $3x^2 + 2ax + b$ (discuter en fonction des paramètres a et b).
2. Expliquer pourquoi les propriétés (P_1) et (P_2) sont équivalentes :
 (P_1) : « f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$ ».
 (P_2) : « $f'(x)$ est toujours du même signe ».
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f n'admette aucun extremum réel.
4. En déduire deux valeurs a et b pour lesquelles la fonction f n'admet aucun extremum réel.

EXERCICE 492

30 minutes

L'entreprise *BBE (Bio Bois Energie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

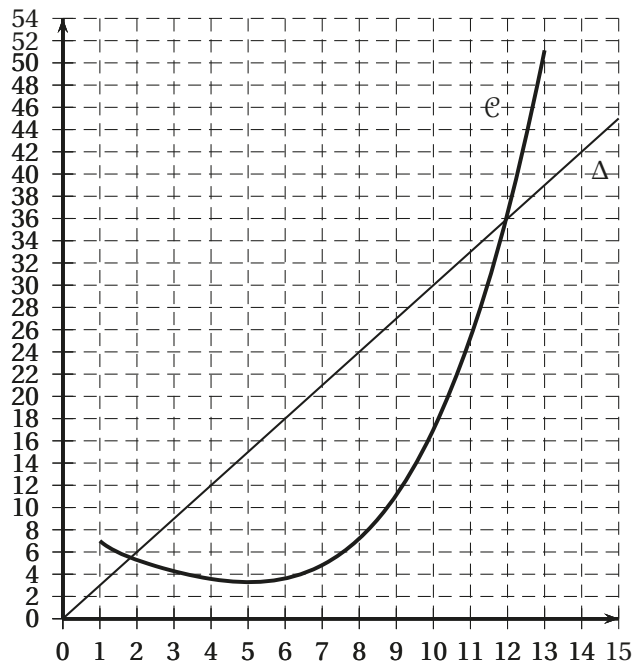
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Le coût de fabrication quotidien est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par : $C(x) = 0,002x^4 - x + \frac{1}{x^2} + 7$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros. La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par : $R(x) = 3x$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Etude graphique

Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O .



Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a. Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
b. Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1 ; 15]$ par : $g(x) = -0,008x^3 + 4 + \frac{1}{x}$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 15]$.
b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1 ; 15]$.
2. a. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1 ; 15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
b. Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; 15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
- c. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 15]$, on a : $D(x) = -0,002x^4 + 4x - \frac{1}{x^2} - 7$
2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1 ; 15]$.
4. a. Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal? On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.
b. Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

EXERCICE 493**25 minutes**

Lors d'une compétition d'athlétisme, un entraîneur analyse la technique d'un lanceur de poids, et plus particulièrement la trajectoire du poids lors du lancer.

On considère la fonction f donnée par $f(x) = -0,08x^2 + 0,8x + 1,92$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 12]$.

Cette fonction donne la hauteur (en mètres) du poids en fonction de la variable x (exprimée également en mètres). Cette variable x mesure la longueur entre les pieds du lanceur et l'ombre au sol du poids (en considérant que cette ombre au sol est à la verticale du poids).

1. Compléter, à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront donnés au centimètre près.

x (en mètres)	0	0,5	1	1,5	2,5	4,5	5	5,5	6	6,5	8	9	10	11	12
$f(x)$ (en mètres)															

2. Dériver la fonction f .
3. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 12]$.
4. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le poids (au cm près).
5. A quoi correspond la (ou les) valeur(s) de x , solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 12]$?

6. a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 12]$,

$$f(x) = -0,08(x+2)(x-12).$$

- b. Quelle est la longueur du lancer?

EXERCICE 494

30 minutes

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par : $f(x) = \frac{13}{x^2 + 1} + x - 1$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$ dans un repère orthonormé.

Partie A

1. Soit la fonction h définie sur $[1; 10]$ par $h(x) = x^2 - \sqrt{26}x + 1$.

a. Démontrer que pour tout réel $x \in [1; 10]$, $h'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \left(x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{26}}{4} \right)$.

- b. Etablir le tableau de variation de la fonction h sur $[1; 10]$.

- c. Montrer que sur l'intervalle $[1; 10]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

- d. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

- e. En déduire le signe de h sur $[1; 10]$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ on a : $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 - 26x}{(x^2 + 1)^2}$.

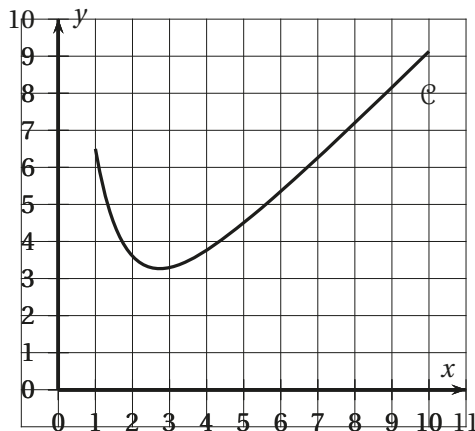
3. a. Vérifier que pour tout réel $x \in [1; 10]$, $(x^2 + 1)^2 - 26x = (x^2 + \sqrt{26}x + 1)(x^2 - \sqrt{26}x + 1)$.

- b. Montrer que sur l'intervalle $[1; 10]$, α est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$.

- c. Placer sur le graphique fourni ci-dessous le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse α .

4. Déterminer l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[1; 10]$ de l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

5. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.



Partie B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable.

Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.

La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi, si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors $f(x)$ représente le coût, en euros, de production d'une coque.

1. Calculer, au centime près, le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.
2. a. Montrer que produire 272 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire de production.
b. En déduire le coût minimal de production d'une coque, en euros, au centime près.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par : $g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$, où x désigne le nombre de centaines de coques produites et $g(x)$ le prix de vente d'une coque en euros.

Estimer les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise.

3.4 Fonction exponentielle**3.4.1 Point de cours**

Définition : il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. C'est la **fonction exponentielle**, notée $\exp(x)$.

Propriétés algébriques : Pour tous réels x et y , et tout entier relatif k ,

- $\exp(x) > 0$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

Sens de variation : La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Notation :

- $\exp(1) = e \approx 2,718$
- Pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

3.4.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 495****5 minutes**

Soit a et b deux réels strictement positifs. Simplifier les expressions suivantes sous la forme $a^n b^m$:

1. $a^3 \times a^7 \times b^5 \times b^6$

4. $(a^{-2}b^7)^3 (a^3b^{-6})^2$

7. $(a^2b^3)^4 (a^{-3}b^{-8})^7$

2. $(ab^2)^5$

5. $a^{39}b^{21}a^{-25}b^{20}a^5b^8$

8. $a^2b^{-9}b^3a^6a^7b^{-8}$

3. $\frac{a^3b^7}{a^2b^8}$

6. $\frac{a^3b^{-2}}{a^7b^{-3}}$

9. $\left(\frac{a^6b^5a^{-6}a^0}{a^2b^{-3}b^9}\right)^2$

EXERCICE 496**5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp(2x) \times \exp(5x)$

5. $\exp(2x) \times \exp(4x) \times \exp(-6x)$

2. $\exp(3x) \times \exp(-6x)$

6. $\exp(5x) \times \exp(3y) \times \exp(z)$

3. $(\exp(5x))^2$

7. $(\exp(x) \times \exp(2y) \times \exp(-x))^3$

4. $\frac{\exp(9x)}{\exp(8x)}$

8. $\frac{\exp(3x) \times \exp(2y)}{\exp(2x) \times \exp(-y)}$

EXERCICE 497**5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $(e^{2x+1})^3 \times (e^{-3x})^2$

3. $\frac{e \times e^{2x}}{e^{x+1}}$

5. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

2. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

4. $\frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e}$

6. $e^0 \times e^{3x} \times e^{2-3x} \times e$

EXERCICE 498**5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

3. $(e^x)^5 \times e^{-2x}$

5. $\sqrt[3]{e^4} \times (\sqrt[3]{e})^2$

2. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$

4. $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$

6. $\frac{e\sqrt{e}}{e^{1,2}\sqrt[3]{e}}$

☞ Rappel : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ **EXERCICE 499****10 minutes**Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $e^x = -2$

3. $e^{x^2} = e^9$

5. $e^x = e^{-x}$

2. $e^{2x} = e$

4. $e^x - 1 = 0$

6. $e^{-x} = e^3$

EXERCICE 500**10 minutes**Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $e^{x^2+3x+1} = e^3$

3. $e^{x^2+12x+35} = 1$

5. $(e^x + 8)(e^{-x^2+4} - e^{3x}) = 0$

2. $e^{5x} = e^{-3x}$

4. $(e^x - 1)(e^x - e^5) = 0$

6. $2xe^x - 6e^x = 0$

EXERCICE 501**10 minutes**Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $e^x \geq 1$

3. $(2x - 1)e^x > 0$

5. $(e^x - 1)(e^{-x} - 1) > 0$

2. $e^{2x} < e$

4. $e^x - e^{-x} < 0$

6. $2xe^x - 6e^x \geq 0$

EXERCICE 502**10 minutes**

Calculer la dérivée de chaque fonction après avoir déterminé son intervalle de dérivabilité.

1. $f(x) = e^x - x^2 + 2$

3. $f(x) = (x+2)e^x$

2. $f(x) = (e^x - 1)(e^x + 1)$

4. $f(x) = (e^x - x)(e^x + x^2)$

EXERCICE 503**10 minutes**

Calculer la dérivée de chaque fonction après avoir déterminé son intervalle de dérivabilité.

1. $f(x) = e^{3x} + e^{-2x}$

3. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

4. $f(x) = \frac{xe^{-x} + 1}{x^2 + 1}$

EXERCICE 504**15 minutes***Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a. $-e^{\frac{1}{a}}$

b. $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$

c. $\frac{1}{e^a}$

d. e^a

2. Pour tout réel a , le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a. $\sqrt{e^a}$

b. $\frac{e^a}{2}$

c. $\frac{e^a}{e^2}$

d. $e^{\sqrt{a}}$

3. $f(x) = xe^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x , on a :

a. $f'(x) = e^{-x}$

b. $f'(x) = -e^{-x}$

c. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

d. $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ au point d'abscisse 0 est :

a. $y = 2x$

b. $y = x - 1$

c. $y = x$

d. $y = 2x - 1$

3.4.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 505****10 minutes**Démontrer l'unicité de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.☞ On commencera par démontrer que la fonction f ne s'annule jamais en posant une fonction $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.**EXERCICE 506****15 minutes**Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 2$. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$.1. Vérifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.2. En déduire l'expression de $g(x)$.3. En déduire l'expression de $f(x)$.

4. Déterminer une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $h' = h$ et $h(0) = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 507**10 minutes**

Démontrer que pour tous réels a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

☞ On pourra poser une fonction $\Phi(x) = f(a+b-x) \times f(x)$ avec f fonction exponentielle.

EXERCICE 508**10 minutes**

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
2. Démontrer que pour tous réels x et y , $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

EXERCICE 509**10 minutes**

Démontrer que la fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

EXERCICE 510**10 minutes**

Soit la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. On admet que lorsque n devient très grand, u_n tend vers e .

1. Ecrire une fonction en Python qui calcule le terme u_n pour un entier n donné.
2. En déduire u_{10} , u_{20} , u_{50} .
3. Modifier la fonction pour qu'elle détermine la valeur de n correspondant pour laquelle la différence entre u_n et 2,7182818 est inférieure à 10^{-7} .

EXERCICE 511**15 minutes**

1. Démontrer que $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que si $(e^{nx})' = ne^{nx}$ alors $(e^{(n+1)x})' = (n+1)e^{(n+1)x}$.
☞ On admettra que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (e^{nx})' = ne^{nx}$.
3. Démontrer que $(e^{-x})' = -e^{-x}$.
4. Déterminer $\left(\frac{1}{e^{nx}}\right)'$.
5. En déduire la dérivée de $f(x) = e^{ax+b}$ avec a et b entiers relatifs.

EXERCICE 512**15 minutes**

On se propose de déterminer une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante :

« Pour tout point M de la courbe, si P est le point d'intersection de la tangente T en M avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à 1 ».

La segment $[PH]$ est appelé sous-tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$.

1. On note a l'abscisse d'un point quelconque M de $\mathcal{C}$. Ecrire, en fonction de a , une équation de la tangente T en M à la courbe $\mathcal{C}$.
2. Montrer que l'abscisse du point P est égale à $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

3. En déduire que la fonction f cherchée vérifie la condition $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = 1$.
4. Conclure que la fonction f vérifie l'une des égalités $f' = f$ ou $f' = -f$.

EXERCICE 513**10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. Conjecturer les limites aux infinis en utilisant la calculatrice.

EXERCICE 514**10 minutes**

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$. Conjecturer les limites aux infinis en utilisant la calculatrice.

EXERCICE 515**10 minutes**

1. Etudier les variations de la fonction ch définie sur $\mathbb{R}$ par $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Conjecturer les limites aux infinis en utilisant la calculatrice.
☞ Cette fonction est la fonction *cosinus hyperbolique*.
2. Etudier les variations de la fonction sh définie sur $\mathbb{R}$ par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Conjecturer les limites aux infinis en utilisant la calculatrice.
☞ Cette fonction est la fonction *sinus hyperbolique*.

EXERCICE 516**10 minutes**

Soit la fonction th définie sur $\mathbb{R}$ par $th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Vérifier que pour tout réel x , $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.
 2. Etudier les variations de la fonction th .
 3. Conjecturer les limites aux infinis en utilisant la calculatrice.
- ☞ Cette fonction est la fonction *tangente hyperbolique*.

EXERCICE 517**10 minutes**

Etudier le domaine de définition et les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Conjecturer les limites aux infinis et au voisinage de 0 en utilisant la calculatrice.

EXERCICE 518**15 minutes**

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = (1 - x)e^x$.

EXERCICE 519**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{1\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{|x - 1|}$.

1. Exprimer f sans valeur absolue.
2. Déterminer f' .

3. Conjecturer les limites aux infinis et au voisinage de 1 en utilisant la calculatrice.
4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}/\{1\}$.

EXERCICE 520**25 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans ce plan.

1. Etudier les variations de f . Dresser le tableau de ses variations.
2. Calculer :
 - a. l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0;
 - b. les coordonnées du point B en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Donner :
 - a. une équation de T_0 tangente à $\mathcal{C}$ en A ;
 - b. une équation de T_1 tangente à $\mathcal{C}$ en B . Déduire des questions précédentes la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T_1 ;
 - c. les coordonnées du point G , intersection de T_0 et T_1 .

EXERCICE 521**20 minutes**

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce. Une étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

1. Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(t) = 25e^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.
Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.
2. Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.
L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par : $g(t) = 20e^{-0,1t^2} + t - 4,65$.
 - a. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g .
Montrer que pour tout réel t de $[4; 10]$, $g'(t) = -4te^{-0,1t^2} + 1$.
☞ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée u' alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.
 - b. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur l'intervalle $[4; 10]$.
Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution, et une seule, α dans l'intervalle $[4; 10]$.
Donner la valeur arrondie au dixième de α .
 - c. En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4; 10]$.

- d. Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4; 10]$.
- e. Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes?

EXERCICE 522**20 minutes****Partie A**

On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 4$.

1. Etudier les variations de f sur $[0; 3]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1; 2[$. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0 .
3. Dédurre des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0; 3]$.

Partie B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par : $C_T(x) = (x - 3)e^x + 3x + 4$.

Le coût moyen est défini sur $]0; 3]$ par la formule suivante : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout x de $]0; 3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de C_m sur $]0; 3]$.
2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum?
Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit?

Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$.
Montrer que $B(x) = (3 - x)e^x - 4$.
b. Etudier le sens de variation de B sur $[0; 3]$.
c. Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum?
2. En traçant la courbe représentative de B sur la calculatrice, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

EXERCICE 523**25 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1 - x$.

1. Etudier le sens de variation de f et en déduire son tableau de variations.
2. Montrer que pour tout x réel, $1 + x \leq e^x$.
3. En déduire que pour $0 < x < 1$, $e^x < \frac{1}{1-x}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
5. Ecrire une fonction en Python qui détermine la valeur de n pour laquelle on obtient un encadrement d'amplitude inférieur à 10^{-5} de e .

EXERCICE 524**25 minutes**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-\frac{1}{2}x+3}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Etude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. Résoudre dans $[0 ; 10]$ l'inéquation : $e^{-\frac{1}{2}x+3} \leq 1$.
2. Calculer l'expression de $f'(x)$ pour x élément de $[0 ; 10]$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
4. Dresser alors le tableau de variation de f .

Partie B : Application économique

Un atelier fabrique x unités d'un produit. Ce nombre x est limité à 10.

$f(x)$ représente, en euros, le coût moyen de fabrication d'une unité lorsqu'on en fabrique x .

1. Quel est le nombre d'unités à produire pour avoir un coût moyen de fabrication minimal?
2. Chaque unité est vendue 5 €. On désire déterminer le nombre d'unités pour lequel l'atelier réalise un bénéfice.

Indiquer une méthode de résolution graphique puis l'appliquer pour répondre à la question.

EXERCICE 525**25 minutes**

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 10e^{u(x)}$ où u est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On admet que dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$ où u' est la fonction dérivée de u .

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$. En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. a. Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm?
3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que : $f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x))$.
a. Déterminer les variations de f' sur $[0 ; +\infty[$.

- b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

EXERCICE 526**25 minutes**

Soit P_n le polynôme définie, pour n entier naturel, par $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

On rappelle que pour tout $n > 0$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ et $0! = 1$.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = e^x - 1$

$$f_n(x) = e^x - P_n(x)$$

1. Etudier et représenter graphiquement les fonctions f_0 et f_1 .
2. a. Montrer que la fonction F_n définie, sur $\mathbb{R}$, par $F_n(x) = f_n(x) + f_n(-x)$ est paire.
b. Montrer que la fonction G_n définie, sur $\mathbb{R}$, par $G_n(x) = f_n(x) - f_n(-x)$ est impaire.
c. Etudier et représenter graphiquement les fonctions F_0 et G_0 .
3. Vérifier que, pour tout x réel, $f_n(x) = f'_{n+1}(x)$ et que $f_n(0) = 0$.
4. Montrer que : $f_1(x) > 0$ si $x \neq 0$
 $f_2(x) > 0$ si $x > 0$
 $f_2(x) < 0$ si $x < 0$

Plus généralement, discuter le signe de $f_n(x)$ en fonction du signe du réel non nul x et de la parité de l'entier naturel n .

5. Montrer que pour $x < 0$: $1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
6. En déduire un encadrement de $e^{-0,1}$.
7. Comment pourrait-on obtenir un encadrement plus précis?

EXERCICE 527**20 minutes****Partie A**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10 ; 30]$ par $f(x) = 5 + xe^{0,2x-1}$.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10 ; 30]$, $f'(x) = (0,2x + 1)e^{0,2x-1}$.
2. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10 ; 30]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; 20]$ et donner un encadrement de α à 0,1 près.

Partie B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.

Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0 ; 20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

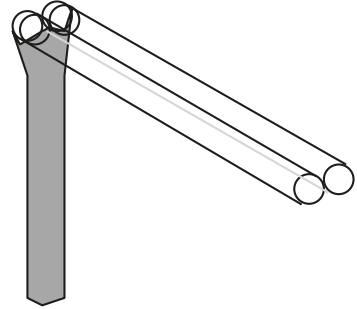
1. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.
2. En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.

EXERCICE 528**25 minutes**

Plusieurs projets de train à très haute vitesse et à propulsion électromagnétique sont en préparation, à l'image de l'Hyperloop.

Les wagons ont une forme cylindrique et sont propulsés dans un tube à basse pression afin de réduire les frottements.

Les ingénieurs ont fixé comme objectif impératif pour le départ de chaque wagon d'atteindre en moins de 2 minutes une vitesse instantanée de 400 km.h^{-1} .



On note $f(t)$ la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t en minute. On suppose que f est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; 3]$ par $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

- Déterminer $f'(t)$.
- Résoudre sur l'intervalle $[0; 3]$ l'inéquation $f'(t) \geq 0$.
- En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
- On rappelle que $f(t)$ correspond à la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t , en minute.
Déterminer le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une minute. Arrondir le résultat au dixième.
- a. La vitesse instantanée du wagon, en kilomètres par minute, à l'instant t , correspond à $f'(t)$.
En déduire la vitesse instantanée, en kilomètres par minute, du wagon à $t = 2$ minutes. Arrondir le résultat au dixième.
b. L'objectif des ingénieurs est-il atteint? Justifier la réponse.
- Etablir une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

EXERCICE 529**25 minutes****Partie A**

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5; 60]$ par : $C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$.

- On désigne par C' la dérivée de la fonction C .
Montrer que, pour tout $x \in [5; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.
- On considère la fonction f définie sur $[5; 60]$ par $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$.
 - Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5; 60]$.
 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5; 60]$.
 - Donner un encadrement à l'unité de α .
 - En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5; 60]$.
- En déduire le tableau de variations de C sur $[5; 60]$.

4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

- a. $C(x) = 2$.
- b. $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5; 60]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

EXERCICE 530

25 minutes

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$, on a : $f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$.
2. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. En utilisant la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
5. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue.

Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A : pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. a. Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
b. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 €. A l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.
3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 €. On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

EXERCICE 531**30 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = (x + 2,5)e^{1-0,5x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

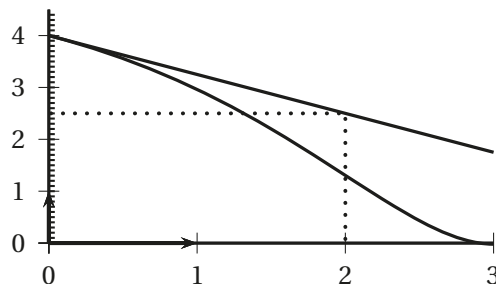
1.
 - a. Démontrer que $f'(x) = (-0,5x - 0,25)e^{1-0,5x}$.
 - b. Etudier le sens de variation de la fonction f .
 - c. Etablir le tableau de variations de la fonction f .
 - d. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur la calculatrice.
2. Soit g la fonction définie sur $[0; 10]$ par $g(x) = 0,3x + 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$.
Soit la fonction h définie sur $[0; 10]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - a. Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ sur la calculatrice (en conservant la courbe $\mathcal{C}_f$).
 - b. Démontrer que pour tout $x \in [0; 10]$, $h'(x) < 0$.
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction h .
 - d. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α .
 - e. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
3. Un produit est vendu p euros, $0 \leq p \leq 10$. La demande est modélisée par la fonction f et l'offre par la fonction g .
 - a. Donner le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
 - b. Vérifier que, pour un prix de 3,10 €, si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 1%.
4. La fonction E est définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$. En économie, E désigne l'élasticité de f .
 - a. Vérifier que, pour tout $x \in [0; 10]$, $E(x) = \frac{-0,5x^2 - 0,25x}{x + 2,5}$.
 - b. Résoudre l'équation $E(x) = -1$.
 - c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution.
 - d. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 532**15 minutes**

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = k + \frac{1}{4}(ax + b)e^x$, où a , b et k sont des nombres réels que l'on se propose de déterminer.

Sur la figure ci-dessous, on peut lire la représentation graphique de la fonction f obtenue sur l'intervalle $[0; 3]$ à l'aide d'un logiciel de tracé. On précise que :

- A est le point de la courbe d'abscisse 3,
- Au point A , la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses,
- Le point $B(0; 4)$ est un point de la courbe,
- La droite (BC) est tangente à la courbe au point B , avec $C(2; 2,5)$.



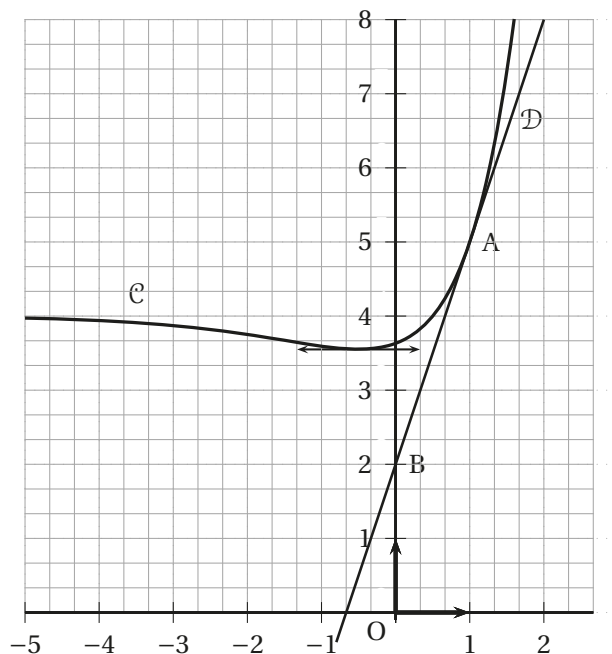
1. Déterminer une équation de la droite (BC) .
2. Donner les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a , b et k , f' désignant la fonction dérivée de f .
4. Dédire des résultats des questions 2. et 3. les valeurs des réels a , b et k . Vérifier que pour tout x réel : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x-4)e^x$.

EXERCICE 533**10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{x-1} + c$, où a , b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-dessous.

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; 5)$, elle admet la droite $\mathcal{D}$ comme tangente en ce point.
- Le point $B(0; 2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
- La courbe $\mathcal{C}$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.



1. a. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
 b. Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$. En déduire $f'(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}$.
3. Montrer que a , b et c vérifient le système :
$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a + 2b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de a , b et c .

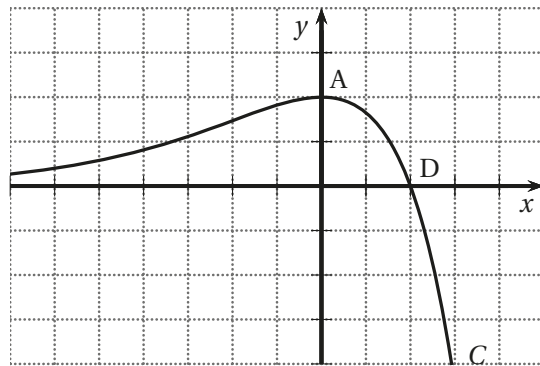
EXERCICE 534**10 minutes**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C est tracée ci-contre dans un repère orthonormé.

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0; 2)$ et $D(2; 0)$ appartiennent à la courbe C .
- La tangente à la courbe C au point A est parallèle à l'axe des abscisses.



On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :
$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$$
4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 535**15 minutes**

On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = -x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ .
2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$.
 b. Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 c. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 536**20 minutes**

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etude des variations de f
 - a. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f , puis démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $(-2x + 3)$.
 - b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Représentations graphiques.
 - a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
 - b. Déterminer une équation de chacune des tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
 - c. Tracer $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. a. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.
 b. En déduire une fonction F telle que $F' = f$
 ☞ F est une primitive de f .

EXERCICE 537**30 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

1. Tracer la courbe sur une calculatrice.
 A l'observation de cette courbe, conjecturer :
 - a. Le sens de variation de f .
 - b. La position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Première conjecture.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de la fonction $g(x)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$.
 - b. Etablir le tableau de variations de g (on déterminera les limites à l'aide de la calculatrice).
 - c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α .
 - d. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
 - e. Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .
 - f. En déduire le signe de $f'(x)$.
 - g. Que penser de la première conjecture?
3. Deuxième conjecture.
 - a. Sachant que $g(\alpha) = 0$, démontrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$.

- b. On considère la fonction h définie sur $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.
Etablir le tableau de variation de h sur $[0; 1]$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- c. Démontrer que, sur $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera β .
- d. Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près.
- e. Que penser de la deuxième conjecture?
4. Compte-tenu des résultats précédents, tracer la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-0,2; 0,4]$ avec les unités : 1 cm pour 0,05 unité en abscisses, 1 cm pour 0,001 unités en ordonnées.

EXERCICE 538**20 minutes**

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0; 3,6]$).

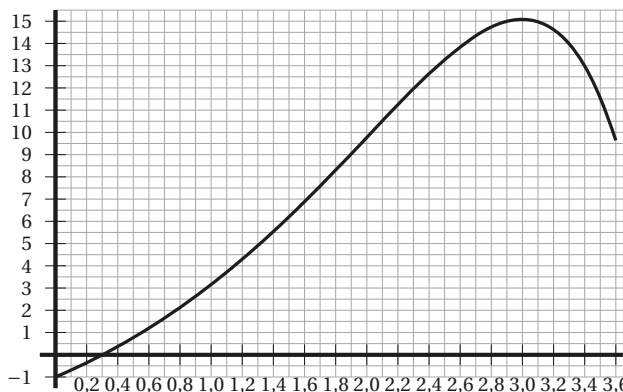
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Etude graphique

On a représenté, ci-contre, la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.



- Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
- Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise? Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé?

Partie B : Etude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4 - x)e^x$.

- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0; 3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$.
- Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .

- c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I . On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ l'autre dans l'intervalle $[3 ; 6]$.
- b. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

EXERCICE 539**20 minutes**

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx^2}$ où n est un entier naturel strictement positif. On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etablir le tableau de variation de f_n .
 ☞ Rappel : u étant une fonction dérivable, de dérivée u' , $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$
2. a. Montrer que la dérivée seconde de f_n s'annule pour deux valeurs opposées a_n et b_n . On note A_n et B_n les points de $\mathcal{C}_n$ d'abscisses respectives a_n et b_n .
- b. Montrer que quand n varie dans $\mathbb{N}^*$, les points A_n et B_n restent sur une même droite.
- c. Montrer que quand n varie dans $\mathbb{N}^*$, les tangentes en A_n et B_n à la courbe $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe que l'on déterminera.
3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$. On placera en particulier les points A_1 , B_1 , A_3 et B_3 .

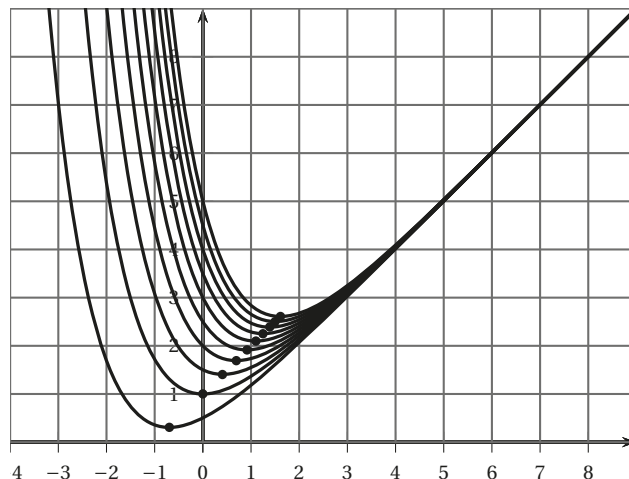
EXERCICE 540**15 minutes**

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que,

pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

☞ Info utile : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$: $e^x = y \iff x = \ln y$, $\ln$ la fonction logarithme népérien sera étudiée en terminale.

EXERCICE 541

15 minutes

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

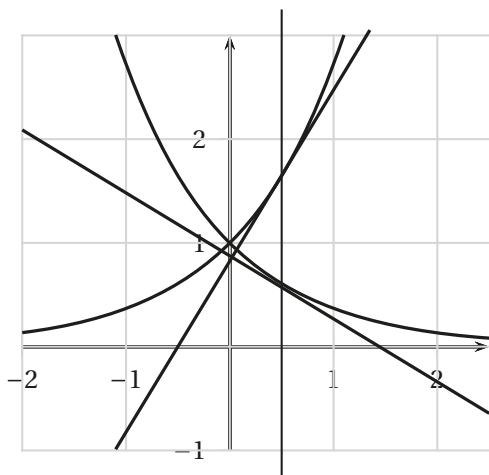
$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a , on note M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a .

La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P , la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q .

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableau la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a .



	A	B
1	Abcisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2,5	2
4	-2	2
5	-1,5	2
6	-1	2
7	-0,5	2
8	0	2
9	0,5	2
10	1	2
11	1,5	2
12	2	2
13	2,5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

- Démontrer que la tangente en M à $\mathcal{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathcal{C}_g$.
- Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
 - Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 542**25 minutes**

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est

modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heures,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromoles par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litres par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : Etude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace?

Partie B : Etude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
g	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : Détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

- a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
- b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromoles par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

EXERCICE 543

20 minutes

f est la fonction définie sur $[0; 12]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver($2 * x * \exp(-x)$)	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser($-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$)	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver($2 * (1 - x) * \exp(-x)$)	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser($2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$)	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 12]$ en le justifiant.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans $[0; 12]$.

Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heures) écoulé depuis la consommation d'alcool;
 - $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.
1.
 - a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
 - b. A quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal?
Quelle est alors sa valeur? Arrondir au centième.
 2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation?

EXERCICE 544**40 minutes**

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch , est définie sur $\mathbb{R}$ par : $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La fonction sinus hyperbolique, notée sh , est définie sur $\mathbb{R}$ par : $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ les courbes représentatives respectives des fonctions ch et sh dans un repère orthogonal.

1. Etude de la fonction ch

- a. Démontrer que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
- b. Démontrer que pour tout x réel, $ch'x = shx$.
- c. Etudier le sens de variation de la fonction ch sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction sh

- a. Démontrer que l'origine du repère est centre de symétrie de $\mathcal{S}$.
- b. Démontrer que pour tout x réel, $sh'x = chx$.
- c. Etudier le sens de variation de la fonction sh sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Représentations graphiques

- a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{S}$.
- b. Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$.

4. Des formules

- a. Vérifier que pour tous nombres réels a et b ,
 $ch(a+b) = cha chb + sha shb$;
 $sh(a+b) = sha chb + shb cha$.
- b. En déduire que pour tout réel x :
 $ch(2x) = ch^2x + sh^2x$ et $sh(2x) = 2shx chx$.
- c. Démontrer que pour tout réel x : $ch^2x - sh^2x = 1$.

3.5 Fonctions trigonométriques

3.5.1 Point de cours

Définitions

1. La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\sin x$.
2. La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\cos x$.

Périodicité : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**, de période 2π .

Conséquence : Pour tracer la courbe représentative des fonctions sinus et cosinus, il suffit de tracer chaque courbe sur un intervalle d'amplitude 2π , puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$.

Parité : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

On dit que la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

Conséquence : Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère. La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Dérivées :

Fonction	Dérivées	Intervalle de validité
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b) \ (a \neq 0)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b) \ (a \neq 0)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

3.5.2 Exercices d'application de cours**EXERCICE 545****10 minutes**

Les fonctions suivantes, définies sur un intervalle I , sont-elles paires?

1. $f(x) = \cos 2x + x^2, I = \mathbb{R}.$

3. $f(x) = x \cos x, I = \mathbb{R}.$

2. $f(x) = \sin x^2 + \frac{2}{x^2 - 1}, I = \mathbb{R} / \{-1; 1\}.$

4. $f(x) = \cos 3x + \frac{1}{\cos x}, I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[.$

☞ Rappel : Une fonction est paire si son intervalle de définition I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

EXERCICE 546**10 minutes**

Les fonctions suivantes, définies sur un intervalle I , sont-elles impaires?

1. $f(x) = \sin 2x - 2x^5, I = \mathbb{R}.$

3. $f(x) = x \sin x, I = \mathbb{R}.$

2. $f(x) = \sin x^3 + \frac{2x}{x^2 - 4}, I = \mathbb{R} / \{-2; 2\}.$

4. $f(x) = \sin 3x - \frac{x}{\cos x}, I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[.$

☞ Rappel : Une fonction est impaire si son intervalle de définition I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$ (ou encore $f(x) + f(-x) = 0$).

EXERCICE 547**10 minutes**

Donner l'ensemble de définition, puis étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.$

3. $f(x) = \frac{\cos^2 x - x^2 \sin 3x}{x^2 + 1}.$

2. $f(x) = x^2 \cos x - 3x^3 \sin 2x.$

4. $f(x) = (e^x - e^{-x}) \sin(2x).$

EXERCICE 548**10 minutes**

Vérifier que les fonctions suivantes sont périodiques, de période T .

1. $f(x) = \cos 3x$ et $T = \frac{2\pi}{3}.$

3. $f(x) = 3 \cos(x + 3) - 2 \sin(4 - 3x)$ et $T = 2\pi.$

2. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $T = 4\pi.$

4. $f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right)$ et $T = 12.$

☞ Rappel : f est périodique de période T (ou T -périodique) si $f(x + T) = f(x)$

EXERCICE 549**10 minutes**

Déterminer la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{253}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right).$

2. $f(x) = 3 \cos\left(\frac{5x}{97}\right) - 3 \cos\left(\frac{3x}{37}\right).$

EXERCICE 550**10 minutes**Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I :

1. $f(x) = \cos 3x$ et $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = (2x + 3) \cos 2x$ et $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. $f(x) = 3 \cos(x + 3) - 2 \sin(4 - 3x)$ et $I = \mathbb{R}$.

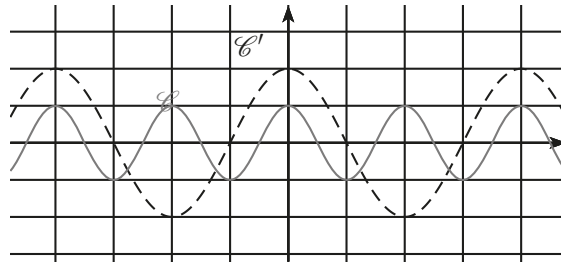
7. $f(x) = x \cos x - 2x \sin x$ et $I = \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right)$ et $I = \mathbb{R}$.

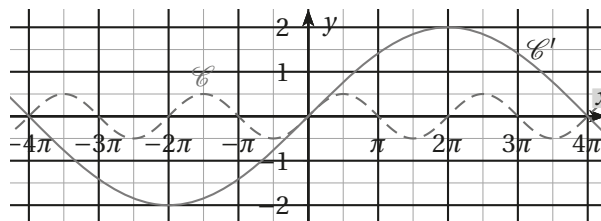
8. $f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$ et $I = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$.

EXERCICE 551**10 minutes**1. Etudier la fonction $f(x) = \sin x$ sur $[0; \pi]$.2. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[0; \pi]$.3. Sachant que f est impaire et 2π -périodique, tracer la courbe pour $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.**EXERCICE 552****15 minutes**1. Etudier la fonction $f(x) = \cos x$ sur $[0; \pi]$.2. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[0; \pi]$.3. Sachant que f est paire et 2π -périodique, tracer la courbe pour $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.**EXERCICE 553****10 minutes**Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 \cos x$ et $g(x) = \cos 2x$ représentées dans le repère ci-dessous.

Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant la réponse.

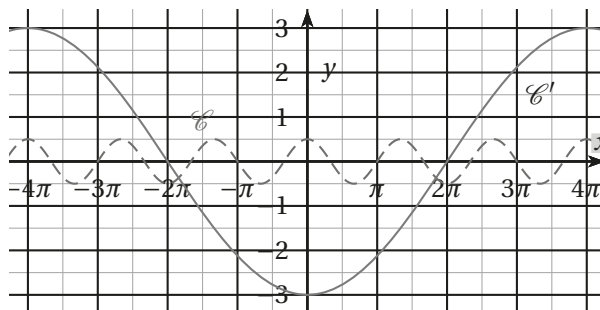
**EXERCICE 554****10 minutes**

Les deux courbes suivantes sont les courbes représentatives de fonctions de la forme

 $f(x) = a \sin \omega x$. Retrouver a et ω dans chaque cas.

EXERCICE 555**10 minutes**

Les deux courbes suivantes sont les courbes représentatives de fonctions de la forme $f(x) = a \cos \omega x$. Retrouver a et ω dans chaque cas.

**3.5.3 Exercices d'approfondissement****EXERCICE 556****10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$.

1. Démontrer que la fonction f est de période 2π . En déduire une restriction de l'intervalle d'étude de la fonction.
2. Vérifier que la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
3. Démontrer que $f'(x) = 4 \cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right)$. En déduire les variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

EXERCICE 557**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x (7 + \cos(2x))$.

1. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.
3. Montrer que $f'(x) = 2 \cos x + 6 \cos^3 x$. En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Représenter la courbe représentative de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. En utilisant les résultats des questions 1. et 2., construire la courbe sur $[-\pi; \pi]$.

EXERCICE 558**15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x) - x$.

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que l'équation (E) : $\cos(2x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Déterminer une valeur approchée au centième par défaut de cette solution.

EXERCICE 559**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

1. Etudier la parité et la périodicité de f .
2. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
4. Dédire de la question 1. la courbe $\mathcal{C}$ pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

EXERCICE 560**15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\cos 3x) \times (\cos^3 x)$.

1. Etudier la parité et la périodicité de f .
2. Exprimer $f(\pi - x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Démontrer que $f'(x) = -3\cos^2 x \sin 4x$. En déduire les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
5. Dédire des questions 1. et 2. la courbe $\mathcal{C}$ pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

EXERCICE 561**20 minutes**

Déterminer la dérivée de la fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $f(x) = \cos x \sin x$ | 4. $f(x) = \cos(2x + 1)$ | 7. $f(x) = \sin^5(2 - 7x)$ |
| 2. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 2}$ | 5. $f(x) = 4x - \cos x$ | 8. $f(x) = x \cos(2x)$ |
| 3. $f(x) = (\sin x)^3$ | 6. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 3}$ | 9. $f(x) = \frac{\sin(2x) + 2}{\cos(2x) + 2}$ |

EXERCICE 562**15 minutes**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction f .
3. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les limites aux bornes de $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Démontrer que sur I , $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
5. En déduire les variations de f .
6. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 563**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x$.

1. Etudier la parité et la périodicité de f .
2. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
3. Construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ pour $0 \leq x \leq \pi$.
4. Dédire de la question 1. la courbe $\mathcal{C}$ pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

EXERCICE 564**15 minutes**

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.
2. En déduire les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(2x) - 1}{x} \right) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin x - 5x}{4x} \right) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x}{x} \right) \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)$$

EXERCICE 565**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x - \lambda \cos(4x)$, où λ est une constante réelle.

1. Calculer la dérivée de f .
2. Vérifier que, pour $\lambda = \frac{3}{8}$, f est constante.

EXERCICE 566**20 minutes****1. Démonstration**

Prérequis : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

- a. a et h désignent des nombres réels, avec $h \neq 0$.

$$\text{Montrer que } \frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos \left(a + \frac{h}{2} \right).$$

- b. Etudier la dérivabilité en a de la fonction sinus et déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$

2. Application

Soit f la fonction définie sur $] \pi; 2\pi]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$

- a. Conjecturer à l'aide de la calculatrice, la limite de $f(x)$ quand x tend vers π .
- b. Utiliser la question 1. pour démontrer cette conjecture.

EXERCICE 567**10 minutes**

1. Exprimer $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ en fonction de $\cos x$.
2. Exprimer $\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ en fonction de $\sin x$.
3. Sachant que $\sin' x = \cos x$ en déduire la dérivée de $\cos x$.

EXERCICE 568**20 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est périodique, de période π .
3. Etudier les variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$.
4. Construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ pour $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

EXERCICE 569**10 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(x-3)f(x+3)$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que f est 18-périodique.

EXERCICE 570**10 minutes**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(x-1)f(x+1)$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la période de f .

EXERCICE 571**20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x$.

1. Etudier la parité et la périodicité de f . En déduire l'intervalle d'étude de f .
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.
3. Représenter la courbe représentative de f sur $[0; \pi]$.
4. En utilisant les résultats de la question 1., construire la courbe sur $[-3\pi; 3\pi]$.

EXERCICE 572**20 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Exprimer $f(x+2\pi)$, $f(x+\pi)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ en fonction de $f(x)$.
En déduire l'intervalle d'étude de f .
3. Démontrer que $f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$.
En déduire les variations de f sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.
4. Représenter la courbe représentative de f sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.
5. En utilisant les résultats de la question 2., construire la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 573**20 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos(3x)}{1 + \cos(2x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la parité et la périodicité de f .
3. Exprimer $f(\pi-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire l'intervalle d'étude de f .
4. Démontrer que $f'(x) = \frac{-\sin x(4\cos^2 x + 3)}{2\cos^2 x}$.
En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

5. Représenter la courbe représentative de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. En utilisant les résultats des questions 1. et 2., construire la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 574**20 minutes**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la périodicité de f . En déduire l'intervalle d'étude de f .
3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.
4. Représenter la courbe représentative de f sur $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.
5. En utilisant les résultats de la question 2., construire la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 575**20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$.

1. Etudier la périodicité de f .
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
4. Représenter la courbe représentative de f sur $[0; 2\pi]$.
5. En utilisant les résultats de la question 1., construire la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

EXERCICE 576**15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{(1 + \sin x)^2}{\sin x (1 - \sin x)}$.

Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 577**15 minutes**

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x , $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
4. Résoudre les équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$.
5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f , g et $-g$.

EXERCICE 578**15 minutes**

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x , $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
4. Résoudre les équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$.

5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f , g et $-g$.

EXERCICE 579**20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi x - 2 \sin x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la parité de f .
2. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f' sur $[0; \pi]$.
3. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; \pi]$.
5. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la construction de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 580**15 minutes**

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x - \sin x$ et $f_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$.

1. Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f_2 sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
4. Donner un encadrement de $\sin 0,01$. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} de $\sin 0,01$.

EXERCICE 581**15 minutes**

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$ et $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$.

1. Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f_2 sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
4. Donner un encadrement de $\cos 0,01$. En déduire une valeur approchée à 10^{-5} de $\cos 0,01$.

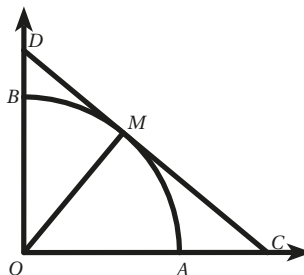
EXERCICE 582**20 minutes**

Soit $(O; \vec{OA}, \vec{OB})$ un repère orthonormé du plan. M est un point du quart de cercle de centre O et de rayon 1.

La tangente au quart de cercle en M coupe (OA) en C et (OB) en D .

On recherche la position du point M rendant la longueur CD minimale.

On pose $x = \left(\vec{OA}; \vec{OM} \right)$.



1. Sur quel intervalle varie x ?
2. Démontrer que $CD = OC \times OD$ puis que $CD = \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin(2x)}$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{2}{\sin(2x)}$. Déterminer $f'(x)$.

4. Démontrer que f admet un minimum. Quel est ce minimum?

EXERCICE 583 : COURBE PARAMÉTRÉE**20 minutes**

Soient x et y deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = \cos t$ et $y(t) = 3 \sin t$.

1. Etudier la parité et la périodicité des fonctions x et y .

2. Etudier les variations de la fonction x sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Etudier les variations de la fonction y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Soit Γ l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$.

Calculer les coordonnées de $M(t)$ pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

Placer les points dans un repère orthonormé et tracer l'allure de Γ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Déterminer les coordonnées de $M(-t)$ et $M(\pi - t)$. En déduire les éléments de symétrie de Γ .

6. Tracer l'allure de Γ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 584 : COURBE PARAMÉTRÉE**20 minutes**

Soient x et y deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = \cos 2t$ et $y(t) = \sin 3t$.

1. Etudier la parité et la périodicité des fonctions x et y .

2. Etudier les variations de la fonction x sur $[0; \pi]$.

3. Etudier les variations de la fonction y sur $[0; \pi]$.

4. Soit Γ l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$.

Calculer les coordonnées de $M(t)$ pour $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{2\pi}{3}$, $t = \frac{3\pi}{4}$,

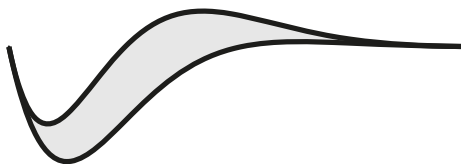
$t = \frac{5\pi}{6}$ et $t = \pi$. Placer les points dans un repère orthonormé et tracer l'allure de Γ sur $[0; \pi]$.

5. Déterminer les coordonnées de $M(-t)$. En déduire un élément de symétrie de Γ .

6. Tracer l'allure de Γ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 585**30 minutes**

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} : -e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.
2. En utilisant la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - b. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
5. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la courbe $\mathcal{C}_g$ sur le logo.

EXERCICE 586**40 minutes**

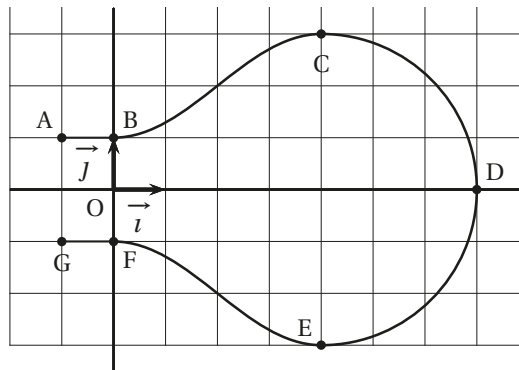
Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A : Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-1 ; 1)$, $B(0 ; 1)$, $C(4 ; 3)$, $D(7 ; 0)$, $E(4 ; -3)$, $F(0 ; -1)$ et $G(-1 ; -1)$.

On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ par $h(x) = 1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = a + b \sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, où a , b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre $[CE]$.

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

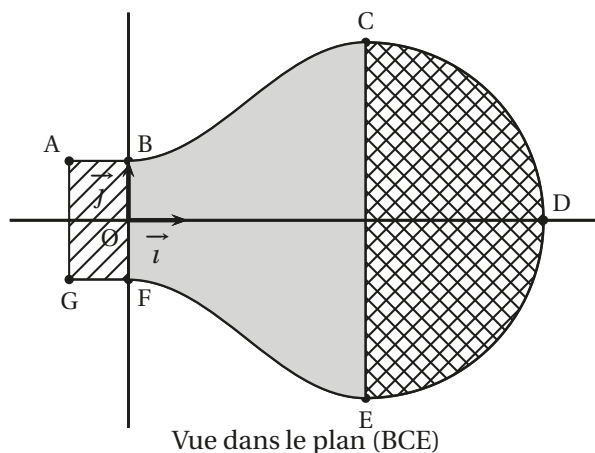
1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, déterminer $f'(x)$.

- b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c .
2. Déterminer les réels a et b .

Partie B : Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule.

Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :



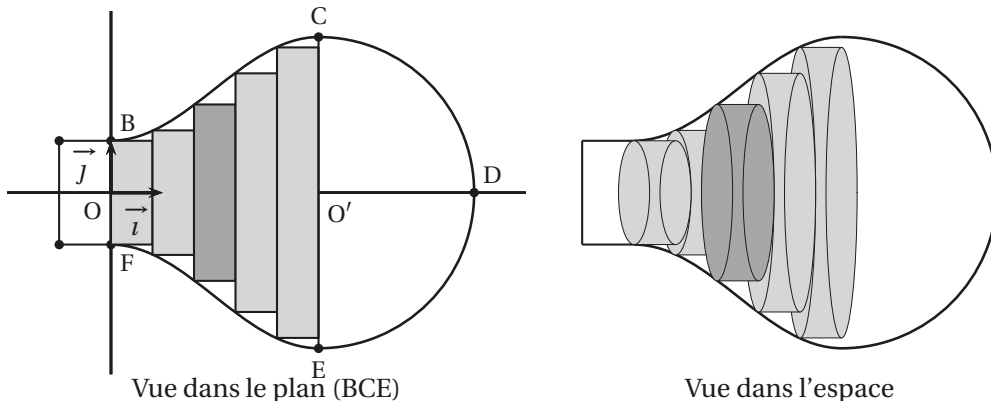
On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur;
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Soit O' le milieu du segment $[CE]$.

- Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.
- Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi disque de diamètre $[CE]$.
- Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment $[OO']$ en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.
 - Cas particulier :** dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.
Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-après, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2} .



- b. Cas général :** dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul. On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande. Compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n .

1	$V \leftarrow 0$
2	Pour k allant de ... à ... :
3	$V \leftarrow \dots$
4	Fin Pour

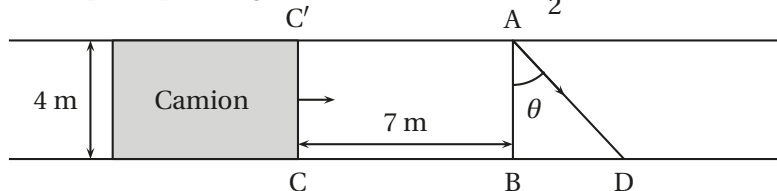
EXERCICE 587**30 minutes**

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ... 30 km/h!

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



- Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
- On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Conclure.

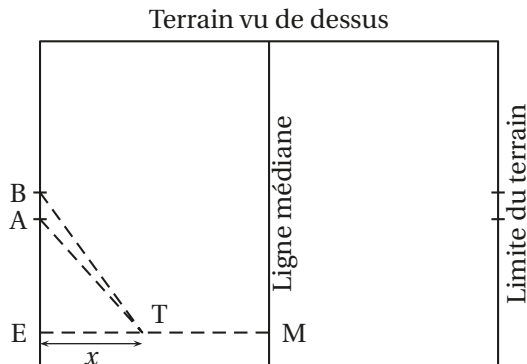
Rappel : La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

EXERCICE 588

30 minutes

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E . La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET , qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5,6$ m. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

EXERCICE 589**15 minutes**

Un mouvement rectiligne est défini par la loi horaire $x(t) = \cos^2 t$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un mouvement vibratoire simple.

☞ Un mouvement rectiligne est dit vibratoire simple si sa loi horaire est de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_0.$$

x_0 est le centre et A l'amplitude du mouvement.

2. En déterminer le centre et la période du mouvement.

3. Déterminer la position du mobile à l'instant $t = 0$.

4. Étudier les variations de la vitesse et de l'accélération du mobile.

☞ Rappel : la vitesse correspond à la dérivée de la loi horaire, l'accélération à la dérivée de la vitesse.

EXERCICE 590**15 minutes**

Un mouvement rectiligne est défini par la loi horaire $x(t) = \sqrt{3} \cos \pi t + \sin \pi t - 1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un mouvement vibratoire simple.

2. En déterminer le centre et la période du mouvement.

3. Déterminer la position du mobile à l'instant $t = 0$.

4. Étudier les variations de la vitesse et de l'accélération du mobile.

3.6 Préparer l'examen

EXERCICE 591 : QCM**20 minutes**

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; 2]$.

On note f' sa fonction dérivée.

Le tableau de variation de f est donné ci-dessous.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
Variation de f			

Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte?

- a. $f(0) = \frac{1}{2}$
 b. L'équation $f(x) = -2$ admet une solution
 c. $f\left(\frac{1}{4}\right)$ est positif
 d. La représentation graphique de f est un segment de droite.

2. Pour la fonction f de la question 1, parmi les quatre tableaux suivants, lequel est correct?

a.

x	-1	2
signe de $f'(x)$	+	

c.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
signe de $f'(x)$	+	0	-

b.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
signe de $f'(x)$	-	0	+

d.

x	-1	2
signe de $f'(x)$	-	

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2(2x + 1)$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte?

- a. $g'(x) = 2x^3 + x^2$
 b. $g'(x) = 4x$
 c. $g'(x) = 6x^2 + 2x$
 d. $g'(x) = 2x^2 + 2$.

EXERCICE 592

20 minutes

Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton.

La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu.

On note x la production de tissu en kilomètres.

Le coût moyen de production d'un kilomètre de tissu, en euros, pour x kilomètres produits, est donné par la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par $f(x) = \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x}$.

1. Calculer le coût moyen de production d'un kilomètre de tissu lorsque l'entreprise fabrique 3 kilomètres de tissu.

2. On admet que f est dérivable sur $[1 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout réel appartenant à $[1 ; 10]$, $f'(x) = \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}$.

3. Vérifier que $x^3 - 4x^2 - 25 = (x - 5)(x^2 + x + 5)$.

4. En déduire le tableau de variation de f sur $[1 ; 10]$.

5. Déterminer le nombre de kilomètres de tissu à fabriquer pour que le coût moyen de production d'un kilomètre soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

EXERCICE 593

20 minutes

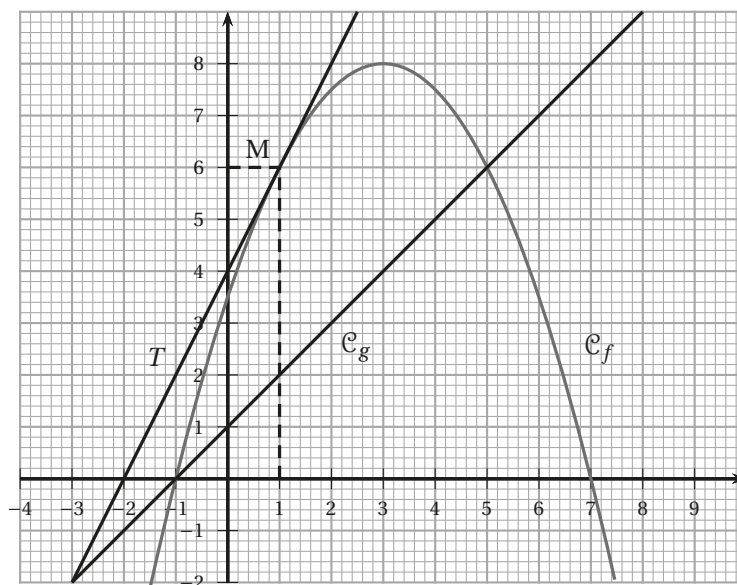
Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

Partie A

On a tracé dans le repère ci-dessous les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3 ; 9]$.

La droite T est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $M(1; 6)$.

La droite T passe par le point de coordonnées $(-2; 0)$.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique sans justification :

1. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[-3; 9]$.
2. Donner les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[-3; 9]$.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T .

Partie B

Pour chacune des trois affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

On étudie une fonction h définie sur l'intervalle $[-15; 20]$.

On donne ci-dessous le tableau de signe de sa fonction dérivée h' .

Valeur de x	-15	-5	4	20	
Signe de $h'(x)$	+	0	-	0	+

De plus, on sait que $h(-5) = 20$ et $h(4) = 2$.

Affirmation 1 : La fonction h est croissante sur l'intervalle $[4; 20]$.

Affirmation 2 : L'équation réduite de la tangente à la représentation graphique de la fonction h au point d'abscisse $x = -7$ est $y = -3x + 5$.

Affirmation 3 : $h'(3)$ est négatif.

Partie C

On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[-5; 5]$ par $B(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$. On note B' la fonction dérivée de B .

1. Pour x appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$, déterminer $B'(x)$.
2. Résoudre, sur l'intervalle $[-5; 5]$, l'équation $3x^2 + 8x - 3 = 0$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[-5; 5]$.

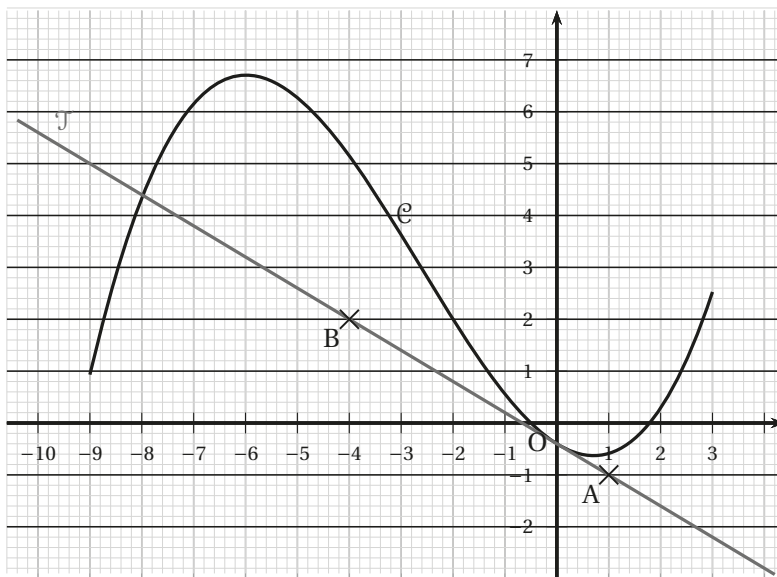
EXERCICE 594**20 minutes**

Pour chacune des cinq affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-9; 3]$. On note f' sa fonction dérivée.

La droite $\mathcal{T}$ représente la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

On admet que la droite $\mathcal{T}$ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(1; -1)$ et $(-4; 2)$.

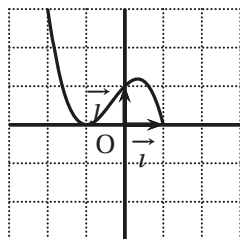
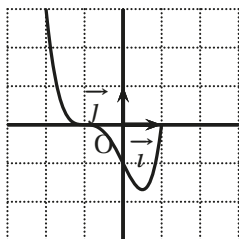
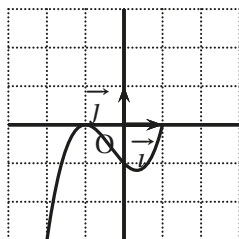
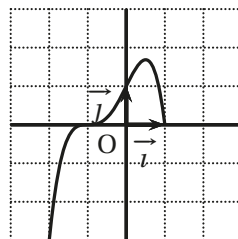


1. L'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x , admet exactement une solution dans l'intervalle $[-9; 3]$.
2. L'équation $f'(x) = 0$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-9; 3]$.
3. $f'(0) = -0,6$.
4. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ est $y = 3x - 1$.
5. La dérivée de f est positive sur $[1; 2]$.

EXERCICE 595

20 minutes

Partie A

Courbe de f_1 Courbe de f_2 Courbe de f_3 Courbe de f_4

Les courbes ci-dessus représentent quatre fonctions f_1 , f_2 , f_3 et f_4 définies et dérivables sur $[-2; 1]$.

1. On donne ci-dessous les tableaux de signes de ces fonctions.

x	-2	-1	1
Signe de la fonction	-	0	+

Tableau a

x	-2	-1	1
Signe de la fonction	+	0	+

Tableau b

x	-2	-1	1
Signe de la fonction	-	0	-

Tableau c

x	-2	-1	1
Signe de la fonction	+	0	-

Tableau d

Compléter le tableau suivant à l'aide de la lettre a, b, c ou d qui convient :

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Tableau de signes				

2. On donne ci-dessous les tableaux de variations de ces fonctions.

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	1
Variations	↗	↘	↗	

Tableau a

x	-2	$\frac{1}{2}$	1
Variations	↘	↗	

Tableau b

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	1
Variations	↘	↗	↘	

Tableau c

x	-2	$\frac{1}{2}$	1
Variations	↗	↘	

Tableau d

Compléter le tableau suivant à l'aide de la lettre a, b, c ou d qui convient :

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Tableau de variations				

3. On donne ci-dessous les tableaux de signes des dérivées de ces fonctions.

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	
Signe de la dérivée	+	0	+	0	-

Tableau a

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	
Signe de la dérivée	-	0	-	0	+

Tableau b

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	1	
Signe de la dérivée	-	0	+	0	-

Tableau c

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	1	
Signe de la dérivée	+	0	-	0	+

Tableau d

Compléter le tableau suivant à l'aide de la lettre a, b, c ou d qui convient :

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Tableau de signes des dérivées				

Partie B

Dans cette partie, on considère la fonction g , définie sur $[-2 ; 1]$ par : $g(x) = (1 - x) \times (x + 1)^2$.

- Vérifier que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.
- Déterminer la dérivée g' de g .
Vérifier que $g'(x) = (x + 1)(1 - 3x)$.
- Etudier le signe de g' sur $[-2 ; 1]$.
En déduire le tableau de variations de g .
- En fait la fonction g est l'une des quatre fonctions f_1 , f_2 , f_3 ou f_4 de la partie A.
Quelle est cette fonction? Justifier votre réponse.

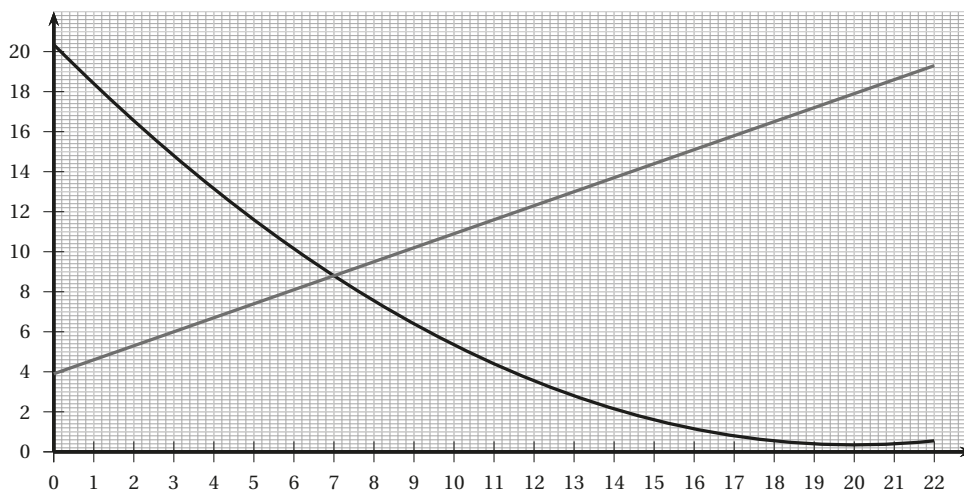
EXERCICE 596

20 minutes

Soient les fonctions f et g définies sur $[0 ; 22]$ par :

$$f(x) = 0,05x^2 - 2x + 20,35 \quad \text{et} \quad g(x) = 0,7x + 3,9.$$

Les deux fonctions sont représentées ci-dessous.



Partie A : lectures graphiques

1. Par lecture graphique, donner l'image de 3 par la fonction f .
2. A l'aide du graphique, donner une valeur approchée des coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Partie B : calculs

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation suivante

$$(E) : \quad 0,05x^2 - 2,7x + 16,45 = 0.$$

- b. Résoudre l'équation (E).
 - c. En déduire les coordonnées du point d'intersection des deux courbes sur l'intervalle $[0; 22]$.
2. a. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie par $f'(x) = 0,1x - 2$ pour tout x appartenant à $[0; 22]$.
 - b. Etudier le signe de la dérivée f' sur l'intervalle $[0; 22]$.
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 22]$.

EXERCICE 597

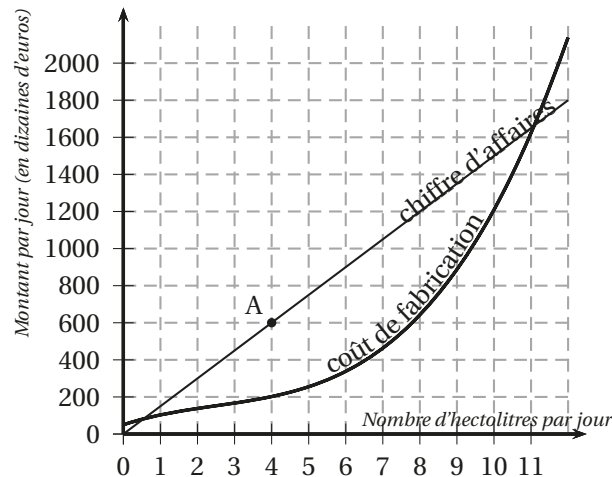
20 minutes

Une entreprise fabrique et vend un produit désinfectant liquide. Chaque jour, elle fabrique x hectolitres de désinfectant avec x compris entre 0 et 12. On considère que l'entreprise vend toute sa production.

Le coût de fabrication, en dizaine d'euros, de x hectolitres de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 12]$.

Le chiffre d'affaires pour la vente de x hectolitres de produit est $R(x)$, exprimé en dizaines d'euros.

Dans un repère orthogonal du plan, on a tracé les représentations graphiques des fonctions C et R .



1. On considère la production d'une journée. Par lecture graphique :
 - a. Déterminer le chiffre d'affaires réalisé pour la vente de 4 hectolitres.
 - b. Déterminer le coût de fabrication de 4 hectolitres.
 - c. En déduire le bénéfice réalisé pour la vente de 4 hectolitres.
 - d. Ce bénéfice est-il maximal pour la production et la vente de 4 hectolitres? Justifier.
2. Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, le nombre d'hectolitres que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits, c'est-à-dire un bénéfice strictement positif.
3. La représentation graphique de la fonction R est une droite qui passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées (4 ; 600).
Déterminer l'expression de $R(x)$.
4. On note B la fonction qui modélise le bénéfice de l'entreprise en fonction du nombre d'hectolitres de désinfectant vendus. Pour x appartenant à l'intervalle $[0; 12]$, on a :

$$B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 84x - 50.$$

- a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Calculer $B'(x)$.
- b. Résoudre l'équation $-6x^2 + 30x + 84 = 0$.
- c. Recopier et compléter le tableau de variations ci-dessous :

x	0	7	12
Signe de $B'(x)$	...	0	...
Variations de B			

- d. Pour quelle quantité de désinfectant produite et vendue le bénéfice est-il maximal? Quel est alors le bénéfice?

EXERCICE 598**20 minutes****PARTIE A**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 300]$ par $f(x) = -x^2 + 450x - 20\,000$.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0; 300]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Résoudre dans l'intervalle $[0; 300]$ l'équation $f(x) = 0$.
2. a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 300]$ et dresser son tableau de variations.
c. En déduire que la fonction f admet un maximum et préciser en quelle valeur il est atteint.

PARTIE B

Une entreprise est spécialisée dans la production de tablettes tactiles. Cette entreprise a une capacité de production hebdomadaire pouvant aller jusqu'à 300 unités.

Pour les valeurs entières de la variable x , qui représentent le nombre de tablettes tactiles fabriquées et vendues par semaine, on admet que $f(x)$ représente le résultat, en euro, de cette entreprise.

1. A partir de combien de tablettes tactiles produites et vendues par semaine l'entreprise réalise-t-elle un résultat positif, c'est-à-dire un bénéfice?
2. Déterminer le nombre de tablettes tactiles fabriquées et vendues permettant de réaliser le bénéfice hebdomadaire maximal et calculer la valeur de ce bénéfice.

EXERCICE 599**20 minutes**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 10]$, $f'(x) = (-2x + 7)e^{-x+4}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 10]$.
Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variations.
On admet que $f(1,60) = 0$, placer cette valeur sur le tableau de variations.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ par : $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum?
Quel est ce bénéfice maximal en euros?
2. A partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif?

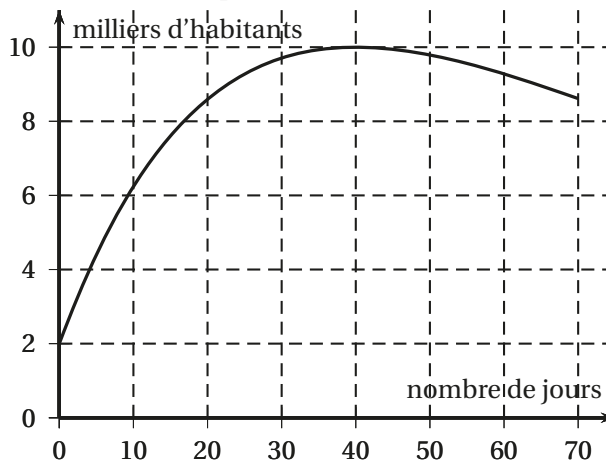
EXERCICE 600**20 minutes**

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.

Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.

On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique.

- Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
 - La commune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant?
- Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 70]$ par $f(x) = 2 + 0,2xe^{-0,025x+1}$.

- Calculer $f(9)$ puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324 890 litres.
- Démontrer que $f'(x) = (0,2 - 0,005x)e^{-0,025x+1}$ où f' est la fonction dérivée de f .
 - Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 70]$.
 - En déduire la date de la consommation d'eau maximale.

3.7 Aller plus loin**EXERCICE 601****20 minutes**

On suppose qu'une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie la propriété (P) : $f(m+n) = f(m) + f(f(n))$ pour tout m de $\mathbb{N}$ et tout n de $\mathbb{N}$.

- Déterminer la valeur de $f(f(0))$. En déduire la valeur de $f(0)$.
- Montrer que : $f(f(n)) = f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- Exprimer $f(m+1)$ en fonction de $f(m)$ et de $f(1)$.

4. Montrer que $f(m) = mf(1)$.
5. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).

EXERCICE 602**20 minutes**

L'objectif de l'exercice est de déterminer une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions :

- $f(1) = 1$
- Pour tous entiers naturels m et n , $f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(n) + f(m)$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe.
 - a. Calculer $f(0)$ (on pourra poser $n = 0$ et $m = 1$).
 - b. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $f(n+1) = 2f(n) + 1$
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = f(n) + 1$.
Vérifier que, pour tous les entiers naturels m et n : $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.
4. Donner une fonction f qui réponde au problème.

EXERCICE 603**20 minutes**

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-4\sqrt{x-1}} + 3 + \sqrt{x-6\sqrt{x-1}} + 8$.

1. A l'aide de la calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1 = [5; 10]$. Quelle conjecture suggère cette méthode?
2. Démontrer cette conjecture. On pourra poser $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$.
3. Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2 = [1; 5]$ et $I_3 = [10; +\infty[$.
4. Étudier la dérivabilité de f sur $[1; +\infty[$.
5. Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
6. Tracer la courbe représentative de f pour $1 \leq x \leq 15$.

EXERCICE 604**30 minutes**

On considère une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3,0103	4,7712		6,9897	7,7815	8,4510	
x	9	10	100	1000	10000	1000000	10^9
$f(x)$							

Cette fonction vérifie la propriété suivante :

Pour tous réels strictement positifs x et y , $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.

Ainsi, par exemple : $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3) = 3,0103 + 4,7712 = 7,7815$.

Partie A : Étude mathématique

1. Déterminer $f(4)$ puis compléter le tableau précédent.
2. Calculer $f(245)$.
3. Quelle est l'image de 1 par cette fonction?
4. Démontrer que, pour tout réel y strictement positif, $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$.

Partie B : Application

Le décibel (dB) est une unité servant à exprimer l'intensité acoustique d'un son. Pour simplifier, sur l'échelle des décibels (qui n'est pas linéaire), le son audible le plus faible (silence presque total) auquel nous affectons l'indice 1 mesure 0 dB. Par exemple, un son d'indice 5 (5 fois plus fort) s'élève à presque 7 dB.

En réalité, la fonction de la partie A fait correspondre à l'indice de l'intensité d'un son perçu par une personne sa mesure en décibel.

1. Justifier que si l'indice d'intensité d'un son donné est décuplé, la mesure en dB de celui-ci augmente de 10 dB.
2. Une conversation normale est mesurée à 60 dB. A quel indice d'intensité cela correspond-il?
3. Un son commence à devenir douloureux au-delà de 80 dB et dangereux à partir de 100 dB. Le son en discothèque est souvent de 110 dB. A quel indice d'intensité cela correspond-il?
4. Dans un supermarché, vous êtes face à deux lave vaisselle. Le produit A fait un bruit mesuré à 39 dB alors que le produit B est mesuré à 36 dB. Vous discutez avec le vendeur en lui disant que vous préférez la machine B car moins bruyante, mais le vendeur qui doit écouler son stock de machines A vous répond « Oh ! Pour 3 petits décibels, ça ne change pas grand chose ... ».

En calculant le rapport des intensités, trouver un argument à opposer au vendeur.

EXERCICE 605**10 minutes**

1. Calculer la dérivée de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} \sin(2x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 606**15 minutes**

Dans chaque cas, on recherche une fonction f connaissant sa dérivée f' . Est-ce possible de trouver plusieurs fonctions f pour une dérivée f' donnée?

- | | |
|---------------------|----------------------------------|
| 1. $f'(x) = 2$ | 3. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$ |
| 2. $f'(x) = 2x + 3$ | 4. $f'(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ |

☞ Remarque : f est une primitive de f' .

EXERCICE 607**10 minutes**

1. Trouver une fonction polynôme P telle que $g(x) = e^x P(x)$ ait pour dérivée $g'(x) = e^x (x-1)(x-2)$.
2. Etudier la fonction g obtenue.

EXERCICE 608**20 minutes**

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions polynômes de degré inférieur à 3, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ telles que pour tout $x \in [-1; 1]$, on a $-1 \leq f(x) \leq 1$.

1. Déterminer trois fonctions affines non constantes appartenant à $\mathcal{E}$.
2. On cherche à déterminer les fonctions du second degré à coefficients entiers appartenant à $\mathcal{E}$.

- a. Montrer que d ne peut prendre que les valeurs -1 ; 0 et 1 .
 - b. Premier cas $d = 0$.
 - i. Calculer $f(-1) + f(1)$ et en déduire les valeurs possibles de b .
 - ii. Déterminer complètement f .
 - c. Deuxième cas $d = -1$ ou $d = 1$.
 - i. Montrer que le point $S(0, d)$ est nécessairement le sommet de la parabole d'équation $y = f(x)$ dans un repère du plan.
 - ii. Déterminer complètement f .
3. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{E}$. On définit les fonctions g et h sur $\mathbb{R}$ par
- $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
- Prouver que g et h appartiennent à $\mathcal{E}$.
4. On cherche, dans cette partie, la plus grande valeur possible de M pour $|a|$ quand f est un élément de $\mathcal{E}$.
- a. A l'aide de la question 3, démontrer que si f est un élément de $\mathcal{E}$, alors $|a| \leq 4$.
 - b. Montrer que la fonction $p(x) = 4x^3 - 3x$ est un élément de $\mathcal{E}$.
 - c. En déduire la valeur de M .

EXERCICE 609**25 minutes**

On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

- si $x \in [0; 2]$, $f(x) = -4x^2 + 8x$
- si $x \in]2; 4]$, $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
- si $x > 4$, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x-2) + f(x-4))$.

1. Tracer la courbe représentative de f pour $0 \leq x \leq 8$.
2. Quelles sont les images des entiers naturels par la fonction f ?

EXERCICE 610**15 minutes**

La fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, possède les deux propriétés suivantes :

- pour tout réel x , $f(x+10) = f(10-x)$
- pour tout réel x , $f(20+x) = -f(20-x)$.

Démontrer que la fonction f est impaire et périodique.

EXERCICE 611**40 minutes**

Rappel : un nombre premier est en entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs distincts. Ainsi par exemple 1, 4 et 18 ne sont pas premiers mais 2, 5 et 19 le sont.

Les huit plus petits nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers.

On admet qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(p) = 1$ signifie que p est un nombre premier,
- pour tous réels x et y , on a $f(x \times y) = x \times f(y) + f(x) \times y$.

Partie A

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'aux entiers naturels.

1. Justifier que $f(13) = 1$ et que $f(6) = 5$.
2. Démontrer que $f(0) = 0$ puis que $f(1) = 0$.
3. Compléter, sans justifier, les tableaux suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	0	1	1		1	5	1		

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$				1				1			

4. a. Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers alors $f(p \times q) = p + q$.
b. En déduire $f(209)$.
c. Trouver tous les entiers naturels N s'écrivant sous la forme $N = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers tels que $f(N) = 30$.
5. On admet que si p est un nombre premier quelconque et n un entier naturel non nul alors $f(p^n) = np^{n-1}$.
a. Vérifier cette propriété pour $n = 1$, $n = 2$ puis $n = 3$.
b. Calculer $f(49)$, $f(392)$ puis $f(f(392))$.
6. Donner quatre nombres de la forme n^n qui vérifient la relation $f(n^n) = n^n$.

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers relatifs.

1. Déterminer $f(-1)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f(-n)$ en fonction de $f(n)$.

Partie C

Dans cette partie on s'intéresse aux nombres rationnels.

☞ **Rappel** : Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{bf(a) - af(b)}{b^2}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.
3. Calculer $f\left(\frac{17}{49}\right)$.

Partie D

Calculer $f(6\sqrt{3})$.

EXERCICE 612**40 minutes**

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances de gris intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède au-moins les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

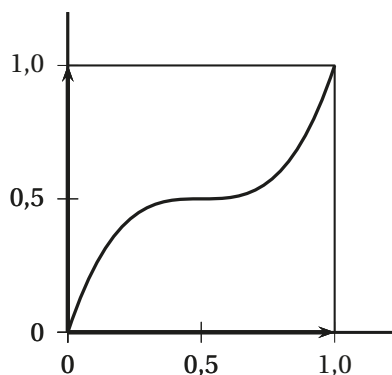
0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

- Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
- A l'aide du graphique, quelles sont les nuances codées x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$ qui seront éclaircies par la fonction f_1 ?
- Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leq x$.



2. a. Proposer une fonction de retouche f_2 définie sur $[0; 1]$ assombrissant tout nuance x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.
- b. Proposer une fonction de retouche f_3 définie sur $[0; 1]$ éclaircissant tout nuance x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

Partie B

1. Soit une fonction polynôme du second degré g_1 définie sur $[0; 1]$ vérifiant $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
Sachant que g_1 est une fonction de retouche, justifier qu'elle est définie sur $[0; 1]$ par $g_1(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}$.
2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0; 1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1 , permettrait de revenir aux nuances initiales.
 - a. Donner les valeurs de $g_2(0)$, $g_2(1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right)$.
 - b. Calculer $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$.
 - c. Résoudre l'équation de variable x , $g_1(x) = y$ avec $x \in [0; 1]$ et $y \in [0; 1]$.
 - d. En déduire l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1 , permet de revenir aux nuances initiales.

EXERCICE 613**15 minutes**

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x; y)$ associe l'entier naturel tel que :

$$f(0; y) = y + 1, f(x; 0) = f(x - 1; 1), f(x + 1; y + 1) = f(x; f(x + 1; y)).$$

Calculer $f(2; 1)$ et $f(2; 2)$.

EXERCICE 614**30 minutes**

Quatre amis se réunissent pour relever le défi suivant trouvé dans un vieux livre de mathématiques :

Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P) suivante :

Pour tous réels a et b , $(a - b) \times f(a + b) - (a + b) \times f(a - b) = 4ab(a^2 - b^2)$.

1. a. Ali, Ben et Chang testent la propriété (P) avec des fonctions particulières.
Ali utilise la fonction $x \mapsto x$, Ben utilise la fonction $x \mapsto x^2$ et Chang utilise la fonction $x \mapsto x^3$.
Lequel des trois aura trouvé une fonction vérifiant la propriété (P) ?
 - b. Dorice affirme que : « la fonction $x \mapsto \sin x$ ne vérifie pas la propriété (P) ».
Pour cela, elle a remplacé les réels a et b par deux valeurs particulières. Quelles valeurs de a et b a-t-elle pu choisir ?
 2. Ali affirme que : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P) , alors f est une fonction impaire ».
- a. Montrer qu'Ali a raison.
 - b. La fonction $x \mapsto x^4$ vérifie-t-elle la propriété (P) ?

- c. Chang s'interroge sur le fait que : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire, alors f vérifie la propriété (P) ? ». Quelle réponse lui donner ?
3. a. Ben affirme que : « si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P) alors $f(2) - 2f(1) = 6$ ».
Montrer que Ben a raison et expliquer sa démarche.
- b. Le groupe d'amis annonce avoir établi une relation entre $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(2)$. Quelle est cette relation ?
4. Déterminer, pour tout réel x , une relation entre $f(x)$ et $f(1)$. De quelle forme sont les fonctions vérifiant la propriété (P) ?
5. Relever le défi posé par les quatre amis.

EXERCICE 615**30 minutes**

Comment calculer $\sqrt{139}$ avec une calculatrice ne possédant que les opérations élémentaires et les parenthèses

Partie A : Motivation

1. Ecrire $\sqrt{56}$ sous la forme $a\sqrt{1-b}$ où a est un entier naturel et b une fraction d'entiers appartenant à l'intervalle $]0;1[$.
2. De même, trouver des décompositions pour $\sqrt{139}$ dont l'une où $a = 18$ que l'on utilisera dans les applications numériques ultérieures.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{n}$ admet une telle décomposition.

Partie B : Approximation sur $[0;1]$ de $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ par des polynômes

1. Déterminer $f(1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et $f\left(\frac{5}{9}\right)$ sous forme de fractions.
2. Donner d'autres nombres appartenant à $]0;1[$ dont on peut calculer l'image par f sous forme d'une fraction.
3. On pose $L_1(x) = 1$; $L_2(x) = x$ et $L_3(x) = x(x-1)$.
On cherche r , s , t tels que $f(x) = rL_1(x) + sL_2(x) + tL_3(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = \frac{3}{4}$.
Etablir le système associé et le résoudre.
4. Quelle est la précision obtenue pour le calcul de $\sqrt{139}$?

EXERCICE 616**20 minutes**

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1) - 2(x+2) + 3(x+3) - 4(x+4) + \dots + 2019(x+2019) - 2020(x+2020).$$

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier relatif impair k , $f(k)$ est un entier multiple de 2020.
3. Existe-t-il un entier k tel que $f(k) = 2020$?

EXERCICE 617**20 minutes**

Combien de solutions réelles négatives l'équation $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ possède-t-elle ?

☞ On pourra étudier les variations d'une certaine fonction ... et utiliser la calculatrice.

EXERCICE 618**30 minutes**

Soit ABC un triangle non aplati quelconque, d'aire $\mathcal{A}$.

Notons $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés. Soit H le pied de la hauteur issue de B : supposons que H appartienne au segment $[AC]$ et posons $h = BH$.

Soient quatre points P et Q appartenant au segment $[AC]$, R appartenant au segment $[AB]$ et S appartenant au segment $[BC]$, de sorte que $PQRS$ soit un rectangle.

Notons enfin $x = PQ$.

1. Exprimer l'aire $\mathcal{R}$ du rectangle $PQRS$ en fonction des longueurs x , h et b .
2. a. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire $\mathcal{R}$ est-elle maximale?
b. Dans ce cas, quel est le rapport des aires $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}}$?
3. a. Est-il possible que le rectangle $PQRS$ soit un carré?
b. Si oui, ce carré peut-il être d'aire maximale parmi tous les rectangles $PQRS$ possibles?

EXERCICE 619**25 minutes****Partie A**

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :
 $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Montrer que : $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$.
En déduire le sens de variation de f .
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Donner une équation de $\mathcal{T}$ et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Tracer, pour $-2 \leq x \leq 4$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

EXERCICE 620**20 minutes**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ et $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

- b. Soit M et M' deux points de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives x et x' . Soit Ω le point de coordonnées $(x_\Omega; y_\Omega)$.
On suppose que M et M' sont symétriques par rapport à Ω , établir alors une relation entre $f(x)$ et $f(x')$.
- c. Prouver que le point Ω de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
- d. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point Ω . Déterminer le coefficient directeur de T .
- e. Représenter T et $\mathcal{C}$.
- 2. a. En observant que, pour tout nombre réel x , on a $g(x) = f(-x)$, montrer que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie que l'on déterminera.
- b. Vérifier que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) + g(x) = 1$.
En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une autre symétrie que l'on déterminera.
- c. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T' à Γ au point Ω .
- d. Représenter T' et Γ sur la figure de la question 1.

EXERCICE 621**40 minutes**

On appelle partie entière d'un réel x , notée $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x , c'est-à-dire que l'on a : pour tout réel x , $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Par exemple : $E(2,4) = 2$; $E(-2,4) = -3$; $E(\sqrt{2}) = 1$; $E(5) = 5$ et $E(-\pi) = -4$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 46E(x) + 13$.

L'objet de cet exercice est la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{2057}$, puis vérifier que ce réel est solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. a. Vérifier que 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
b. Montrer que si $x < 1$ (dans ce cas $E(x) \leq 0$), l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
3. On note p la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - 46x + 13$.
a. En utilisant l'inégalité $E(x) \leq x$, montrer que pour tout réel x , $p(x) \leq f(x)$.
b. En déduire que si x est un réel vérifiant $p(x) > 0$, alors le réel x n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
4. Etablir le tableau de signe de $p(x)$.
En déduire que toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est strictement inférieure à 46.
5. a. Déduire de l'inégalité $x - 1 < E(x)$ que, pour tout réel x , $f(x) < p(x) + 46$.
b. Montrer alors que toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est strictement supérieure à 44.
6. a. Quelles sont les valeurs possible pour la partie entière des solutions de l'équation $f(x) = 0$?
b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, $\sqrt{2057}$ et une autre α dont on précisera la valeur exacte.

EXERCICE 622**10 minutes**

Soit f une fonction dérivable en a .

1. Montrer que la limite de $\frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ lorsque x tend vers a , $x \neq a$, est égale à $f(a) - af'(a)$.

☞ On pourra poser $x = a + h$.

2. Application :

- a. Déterminer la limite de $\frac{x^3a - a^3x}{x - a}$ lorsque x tend vers a .

- b. Déterminer la limite de $\frac{\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 623**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x + |x|)e^x$.

- Simplifier l'écriture de $f(x)$ dans chacun des deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.
- Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.
- Déterminer la limite de $\frac{f(x) - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0 dans les deux cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
- La fonction f est-elle dérivable en 0?
- Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative sur $[-5; 2]$.

EXERCICE 624**30 minutes****Préliminaires**

1. Soit x et y deux nombres réels strictement inférieurs à 1. On note S leur somme et P leur produit.

Montrer que $S < P + 1$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Recherche de triplets

On s'intéresse aux triplets (a, b, c) tels que $0 < a \leq b \leq c$, $abc > 1$ et $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

- Montrer que pour un tel triplet, $a < 1$.
- Se peut-il que $b < 1$?
☞ On pourra utiliser les préliminaires.
- Se peut-il que $b = 1$?
- Alice affirme : « Si $a < 1 < b$ et $b \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$, alors on peut trouver un réel c tel que le triplet (a, b, c) soit solution. » A-t-elle raison?
- Bob ajoute : « Ces conditions ne sont pas nécessaires. » A-t-il raison?

EXERCICE 625**15 minutes**

Un organisateur de spectacle organise un concert dans une salle de 800 places. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude du marché lui apprend que :

- Si le prix du billet est de 50 €, il vend 300 billets.
 - Chaque baisse de 0,06 € sur le prix du billet lui permet de vendre un billet supplémentaire.
- Déterminer le prix du billet pour que la recette soit maximale.

EXERCICE 626**25 minutes**

On considère le programme suivant, nommé $TAYLOR(a, b, c, d, t)$ dans lequel a, b, c, d, t, x sont des nombres, f, f_1, f_2, p sont des fonctions.

```

TAYLOR(a, b, c, d, t)
  f(x) := ax3 + bx2 + cx + d
  f1 := dérivée de f
  f2 := dérivée de f1
  p(x) := f(t) + f1(t)(x - t) +  $\frac{f_2(t)}{2}(x - t)^2$ .
  Afficher f2(t)
  Afficher p(x)

```

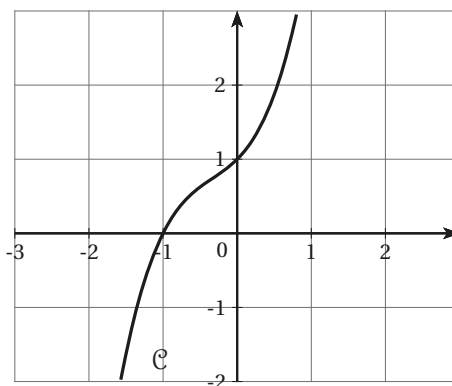
1. On exécute $TAYLOR(1, 0, 0, 0, 0)$. Qu'obtient-on en sortie?

Même question pour $TAYLOR(1, 0, 1, 0, 1)$.

Lorsque $f_2(t) \neq 0$, nous dirons que la représentation graphique de la fonction p est la « parabole de Taylor » de f au point d'abscisse t ; on le notera (P_1) .

2. On exécute $TAYLOR(1, 1, 1, 1, 0)$.

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f .



- Vérifier que l'on obtient $f_2(0) = 2$ et $p(x) = x^2 + x + 1$.
 - Tracer $\mathcal{P}_0$, la « parabole de Taylor » au point d'abscisse 0.
Quelle conjecture peut-on faire sur la position relative de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{C}$?
 - Etudier la position relative de $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{C}$.
3. On exécute $TAYLOR(a, b, c, d, t)$, on obtient :
- $$f_2(t) = 6at + 2b$$

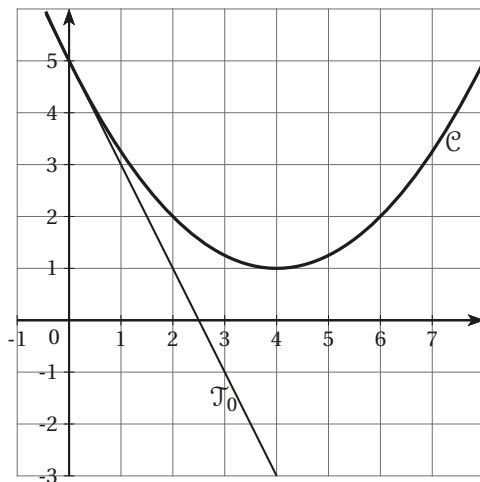
$$p(x) = at^3 + bt^2 + ct + d + (3at^2 + 2bt + c)(x - t) + \frac{(6at + 2b)}{2}(x - t)^2.$$

- a. Démontrer que $f(x) - p(x) = a(x - t)^3$.
- b. Tester le résultat précédent pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1, 0, 1)$
- c. Pour t réel quelconque, étudier la position relative de $\mathcal{P}_t$ et $\mathcal{C}$

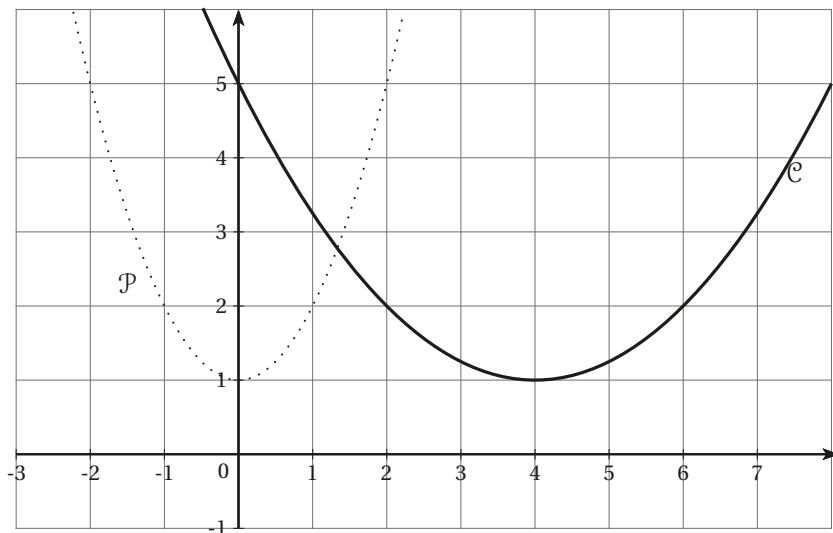
EXERCICE 627**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- b. Soit a un réel non nul, on appelle $\mathcal{T}_a$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
Montrer que $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_0$ se coupent en un point I dont on précisera l'abscisse en fonction de a .
- c. Dédurre de la question précédente un procédé simple de construction de la tangente $\mathcal{T}_a$ lorsque a est donné.
- d. Sur la figure donnée ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_0$. Construire avec précision et sans utiliser le calcul de la dérivée, les tangentes $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{T}_6$ et $\mathcal{T}_7$.



2. On définit la « parabole dérivée » $\mathcal{P}$ de la parabole $\mathcal{C}$ comme l'ensemble des points de coordonnées $(f'(x); f(x))$ où x décrit l'ensemble des réels.
 - a. Calculer $f'(x)$, puis montrer que $x = 2f'(x) + 4$.
 - b. Montrer que la « parabole dérivée » $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$ a pour équation $y = x^2 + 1$.
 - c. Sur la figure ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.
Construire avec précision et sans calcul de dérivée, les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 2, 4 et 6.

**EXERCICE 628****30 minutes**

On suppose qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :

(E) : pour tous x et y appartenant à $\mathbb{N}$, $f(x+y) = f(x)f(y) - xy$.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (E).

Préliminaire

Démontrer que $f(0) = 1$. On pourra admettre ce résultat dans les parties suivantes.

Partie A : Un premier exemple : on suppose ici que $f(1) = 3$.

1. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.
2. Montrer par deux calculs distincts que $f(4) = 60$ et que $f(4) = 63$. Conclure.

Partie B : Un second exemple : on suppose ici que $f(1) = 0$.

1. Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture.
4. Prouver que pour la fonction trouvée aux questions 2 et 3, la propriété (E) est bien vérifiée.

Partie C : Cas général

1. On note $f(1) = a$
 - a. Exprimer $f(2)$ et $f(3)$ en fonction de a .
 - b. Exprimer $f(4)$ en fonction de a de deux manières différentes.
 - c. En déduire que $a = 0$ ou $a = 2$.
2. On suppose ici que $f(1) = 2$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n .

EXERCICE 629**30 minutes**

Déterminer toutes les fonctions f définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous m et n entiers naturels, $f(m+n) = f(f(m)) + f(f(n))$.

☞ On pourra envisager les cas $m = 0$ et $m = 1$ pour n entier quelconque.

EXERCICE 630**30 minutes**

L'objet de cet exercice est d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ des couples (x, y) de réels tels que x et y sont les mesures des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est égal à 1.

1. Parmi les couples suivants, lesquels appartiennent à $\mathcal{F}$?

a. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

b. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

c. $\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right)$

2. On désigne par (a, b) un couple appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.

a. Le couple (b, a) appartient-il à $\mathcal{F}$?

b. Démontrer que les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $\left]0; \frac{1}{2}\right[$.

3. On désigne par ABC un triangle rectangle en C dont le périmètre est égal à 1 et on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

a. Démontrer que $b = \frac{1-2a}{2(1-a)}$.

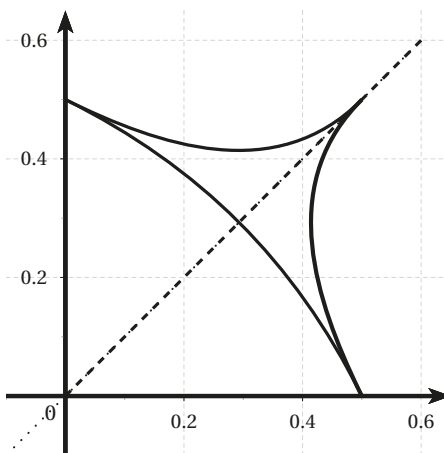
b. Exprimer c en fonction de a .

4. Soient f et g les fonctions définies sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1-2x}{2(1-x)} \text{ et } g(x) = -x + \frac{1}{2(1-x)}.$$

Vérifier que pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, les couples $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté ci-dessous l'ensemble des points $M(x, y)$ où (x, y) appartient à $\mathcal{F}$.



Déterminer les valeurs de y pour lesquelles il existe quatre couples distincts (x_1, y) , (x_2, y) , (x_3, y) , (x_4, y) appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$.

EXERCICE 631**40 minutes**

Les embouteillages sur une route sont en général dus à des différences de vitesse entre les véhicules et au nombre de véhicules circulant.

On se déplace sur une route avec une seule file de véhicules qui se suivent. Les vitesses sont exprimées en kilomètres par heure (km.h^{-1}) ou en mètres par seconde (m.s^{-1}) et les distances en kilomètres (km) ou en mètres (m) suivant les cas.

1. Distance d'arrêt

Lorsqu'un véhicule freine sur route sèche, il lui faut une certaine distance pour s'arrêter. Cette distance d'arrêt, exprimée en m, est proportionnelle au carré de sa vitesse v , exprimée en m.s^{-1} , c'est-à-dire que : $d_A = C \times v^2$ où C désigne un nombre réel.

a. Compléter le tableau suivant :

v en km.h^{-1}	v en m.s^{-1}	d_A en m	$\frac{d_A}{v^2}$
50	13,9	12,1	0,0627
90		39,1	
100		48,3	
130		81	
150		108,4	
170		139,9	

(Source : Gendarmerie nationale)

b. Donner une valeur moyenne de C à 10^{-2} près.

2. Distance de réaction

Un conducteur ne réagit en général pas tout de suite à l'allumage des feux de « STOP » du conducteur qui le précède : le temps de réaction noté T dépend d'un certain nombre de facteurs, mais on considère qu'une durée moyenne d'une seconde est raisonnable.

Justifier que la distance parcourue, exprimée en m, pendant cette seconde est :

$$d_R = v \text{ si } v \text{ est exprimée en } \text{m.s}^{-1}$$

$$d_R = \frac{10v}{36} \approx 0,277v \text{ si } v \text{ est exprimée en } \text{km.h}^{-1}.$$

3. Les véhicules

On considère que, sur la route, il y a 80% de véhicules légers d'une longueur moyenne de 4,50 m et 20% de camions d'une longueur moyenne de 12 m.

Quelle est la longueur moyenne L d'un véhicule ?

4. Le débit routier

Quand on fait couler de l'eau d'un robinet, le débit D du robinet est la quantité de liquide écoulee par unité de temps ; le débit est donc lié à la vitesse d'écoulement.

On désire exprimer le débit routier en tenant compte des éléments précédents. Pour cela, on suppose que les véhicules circulant sur la route forment un train continu roulant à la vitesse v , exprimée en m.s^{-1} et que les conducteurs respectent exactement les distances d'arrêt et de réaction avec le véhicule précédent.

On veut exprimer le débit routier en nombre de véhicules par heure.

- a. Montrer que, si la vitesse est exprimée en m.s^{-1} , le débit est donné par la formule

$$D(v) = \frac{3600v}{0,06v^2 + v + 6}.$$

- b. Etudier les variations de D en fonction de v .
 c. Montrer qu'il existe une vitesse $v_{\max}$ pour laquelle le débit est maximum; préciser ce débit maximum.

On donnera les résultats en m.s^{-1} puis en km.h^{-1} pour la vitesse et en véhicules par heure pour le débit.

5. Sur l'autoroute

Vous souhaitez réguler le trafic sur une portion d'autoroute un jour de départ en vacances. Vous savez que le débit maximal de cette portion à trois voies est de 3900 véhicules par heure.

Quelle vitesse conseillée allez-vous afficher sur les panneaux d'information à destination des conducteurs?

EXERCICE 632

30 minutes

Dans cet exercice, on considère des fonctions f admettant le tableau de variations (T) suivant :

x	$-\infty$	2014	$+\infty$
f	$+\infty$	2015	$+\infty$

- Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations (T) . On répondra par une expression de $f(x)$ en fonction de x et on donnera l'allure de la représentation graphique de la fonction.
- On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres réels;
 - f admet le tableau de variations (T) .

Déterminer le signe de chacun des trois réels a , b et c .

- On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 - f est le carré d'une fonction trinôme du second degré, c'est-à-dire que pour tout réel x , $f(x) = p(x)^2$ avec $p(x) = ux^2 + vx + w$, u , v et w désignant trois nombres réels, $u \neq 0$;
 - f admet le tableau de variations (T) .

L'expression développée réduite de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ où } a, b, c, d \text{ et } e \text{ sont des nombres réels.}$$

Déterminer le signe (strictement positif ou strictement négatif) de chacun des cinq réels a , b , c , d et e . On prendra soin de vérifier que chacun des cinq réels est non nul.

EXERCICE 633**40 minutes**

La partie A est indépendante des parties B et C

Partie A

Une banque propose un contrat d'assurance vie qui fonctionne de la façon suivante. À l'ouverture du contrat en janvier 2016, le client dépose 5 000 euros. Le 31 décembre de chaque année, la banque ajoute des intérêts à hauteur de 2 %. Puis chaque année, le 1^{er} janvier, le client dépose 500 euros. Les intérêts produits une année engendrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.

On note I_n le solde de l'assurance vie au 1^{er} janvier de l'année $(2016 + n)$. Ainsi $I_0 = 5\,000$.

1. Calculer I_1 , I_2 et I_3 .
2. Montrer que pour tout entier n , $I_{n+1} = 1,02I_n + 500$.
3. On note (K_n) la suite définie pour tout n par $K_n = I_n + 25\,000$. Montrer que la suite (K_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression de K_n puis celle de I_n en fonction de n .
5. Justifier que la suite (I_n) tend vers $+\infty$.

Ecrire un algorithme permettant de déterminer l'année au bout de laquelle le solde de l'assurance serait supérieur à 20 000 euros. Déterminer cette année.

Partie B

Soit f la fonction définie pour $x \geq 1$ par $f(x) = \frac{30x - 16}{15x - 2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(1)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{180}{(15x - 2)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f pour $x \geq 1$.

Partie C

Un cadre de la banque envisage la commercialisation d'un produit financier dont la valeur, en centaines d'euros à la fin de l'année $(2016 + n)$, serait modélisée par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer pour entier n , $1 \leq u_n \leq 2 \implies 1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
On admettra pour la suite que pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq 2$.
2. On introduit la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{15u_n - 20}{15u_n - 12}$$

- a. Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie.
- b. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $-\frac{5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$.

- c. Exprimer v_n en fonction de n .
- d. Après avoir donné l'expression de u_n en fonction de v_n , démontrer que

$$u_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}.$$

EXERCICE 634**20 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
2. Etablir le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
☞ Rappel : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
3. En utilisant la méthode vue dans l'exercice 334, calculer l'aire comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses pour $x \in [0; +\infty[$.

EXERCICE 635**25 minutes**

Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = e^{-x}$.

Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient trois points A , M_1 et M_2 d'abscisse m ($m \in \mathbb{R}$). Le point A appartient à l'axe des abscisses, M_1 à la courbe $\mathcal{C}_1$ et M_2 à la courbe $\mathcal{C}_2$. On note $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ les tangentes respectivement à $\mathcal{C}_1$ en M_1 et à $\mathcal{C}_2$ en M_2 .

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etablir une équation de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.
3. Démontrer que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont perpendiculaires.
4. $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ se coupent en un point P .
 Démontrer que P est de coordonnées $\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$.
5. Soit I le milieu de $[M_1 M_2]$.
 - a. Déterminer les coordonnées de I en fonction de m .
 - b. Tracer Γ , l'ensemble des points I , sur la même figure que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6.
 - a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{IP}$ en fonction de m .
 - b. Calculer la distance AP . Que peut-on en déduire?
 - c. Démontrer que la droite (IP) est tangente en I à Γ .

EXERCICE 636**20 minutes**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, $\dots$, $f^{(n)}$, les dérivées successives de f pour $n \geq 1$.

1.
 - a. Calculer $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.
 - b. Vérifier que l'on a $f^{(1)}(x) = (x^2 + a_1 x + b_1)e^x$ et $f^{(2)}(x) = (x^2 + a_2 x + b_2)e^x$, où a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des entiers que l'on déterminera.
2. On suppose qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$. Montrer qu'alors $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})e^x$ où a_{n+1} et b_{n+1} sont deux entiers que l'on exprimera en fonction de a_n et b_n .

3. Démontrer que la suite (a_n) , de terme général a_n trouvé précédemment, est une suite arithmétique.
En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
4. Vérifier que $\forall n > 0, b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 + b_0$.
En déduire l'expression de b_n en fonction de n .
5. Etablir la forme générale de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n .

EXERCICE 637**15 minutes**

Soit f la fonction définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = E(x) \sin(\pi x)$.

1. Etudier les variations de f sur $[-1; 2]$.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

☞ Rappel : $E(x)$ est la fonction partie entière. Par exemple $E(2,6) = 2$ et $E(-2,6) = -3$.

EXERCICE 638**10 minutes**

Discuter en fonction du réel m le nombre de solutions de l'équation $e^x + me^{-x} = 1$

☞ On pourra multiplier les deux membres de l'équation par e^x , puis faire un changement de variable.

☞ Pour x réel et y réel strictement positif : $e^x = y \iff x = \ln y$ (la fonction logarithme népérien (notée $\ln$) sera étudiée en terminale).

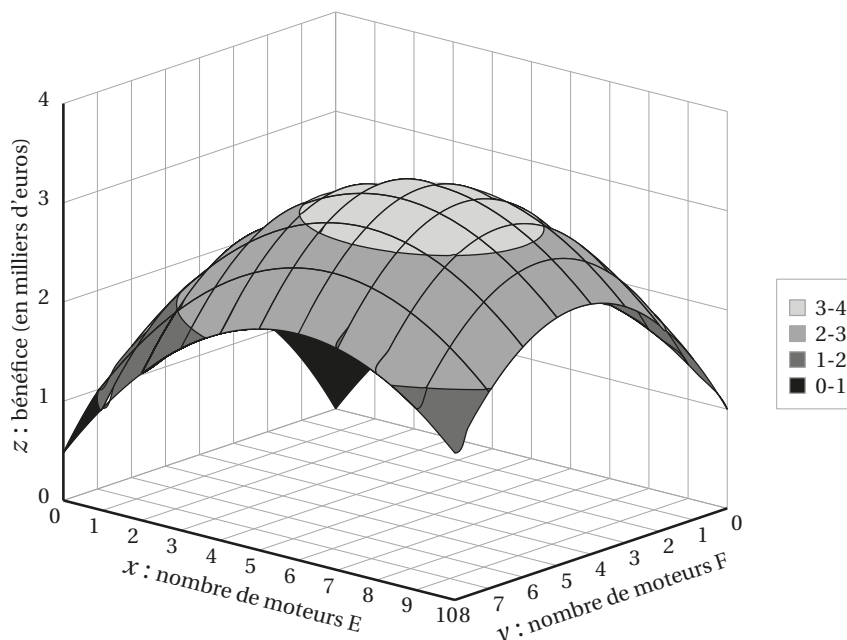
EXERCICE 639**20 minutes**

Une usine produit deux types E et F de moteurs.

Le bénéfice B , exprimé en milliers d'euros, pour une production journalière de x moteurs E et y moteurs F est : $B(x; y) = -0,05x^2 - 0,08y^2 + 0,6x + 0,7y$.

On admet que la production totale est vendue et que $0 \leq x \leq 10$; $0 \leq y \leq 8$.

1. Calculer le bénéfice réalisé avec :
 - a. Une production de 7 moteurs E et de 5 moteurs F.
 - b. Une production de 10 moteurs E et aucun moteur F.
2. La fonction B est représentée par la surface S (figure ci-dessous).
L'usine veut obtenir un bénéfice dépassant 3 000 €. Par lecture graphique de B :
 - a. Si l'usine fabrique 6 moteurs F, indiquer le nombre de moteurs E qu'il faut produire pour atteindre cet objectif. Préciser les différentes possibilités.
 - b. Si l'usine fabrique 8 moteurs E, indiquer le nombre de moteurs F qu'il faut produire pour atteindre cet objectif. Préciser les différentes possibilités.

Représentation graphique du bénéfice B 

3. La demande contraint l'usine à fabriquer autant de moteurs E que de moteurs F. Dans ce cas :
- Exprimer, en fonction de x , le bénéfice B réalisé, lorsque x varie de 0 à 8.
 - Déterminer la production permettant de réaliser le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal exprimé en euros.

EXERCICE 640

45 minutes

Les parties A, B et C de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

En économie, l'élasticité de la demande d'un produit mesure la sensibilité de cette demande par rapport aux variations de prix du produit. L'objet de ce problème est d'étudier l'élasticité d'un produit, afin de déterminer le prix le mieux adapté à la demande.

Étant donné un produit dont le prix est noté x et dont la demande $f(x)$ varie en fonction du prix selon une fonction f strictement positive et dérivable de dérivée f' , on appelle élasticité de la demande par rapport au prix la quantité :

$$E(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Partie A : Recette et élasticité

Le tarif mensuel d'accès à une salle de sports est de 30 €. Pour ce prix, il y a 1800 adhérents.

On étudie un modèle selon lequel pour un tarif mensuel p (nombre entier compris entre 30 et 119), le nombre d'adhérents $f(p)$ est égal à $2400 - 20p$. Ainsi, on a bien $f(30) = 1800$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel p compris entre 30 et 119, $E(p) = \frac{p}{p-120}$.
2. On dit que la demande est élastique, c'est-à-dire qu'elle est sensible aux variations de prix, si $E(p) < -1$. Quels sont les prix p pour lesquels la demande est élastique?
3. On note $R(p)$ la recette mensuelle obtenue pour le prix p , de sorte que $R(p) = p \times f(p)$.
On admet dans cette question que la recette mensuelle $R(p)$ est maximale lorsque l'élasticité $E(p)$ vaut -1 . Calculer cette recette mensuelle maximale.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la suite $(R(p))$, définie pour tout entier naturel p compris entre 30 et 119.

Partie B : Etude d'un cas particulier

La demande hebdomadaire d'un produit informatique est modélisée par la fonction f définie par : $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x}$ pour $x \in [1; +\infty[$.

Le nombre $f(x)$ est la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x , en centaines d'euros.

1. Etude de la fonction demande

- a. Etudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
- b. En utilisant la calculatrice, déterminer la limite de f en $+\infty$. En quoi ce résultat est-il cohérent?
- c. La recette R est définie sur $[1; +\infty[$ par $R(x) = x \times f(x)$. Déterminer le prix de ce produit informatique à l'euro près pour que la recette soit maximale.

2. Etude de l'élasticité de la demande par rapport au prix

- a. Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10}$, puis donner le signe de cette expression.
- b. On admet que l'élasticité est une approximation du taux de variation de la demande pour une variation de 1% d'un prix x donné. Calculer une valeur approchée du taux de variation de la demande lorsque le prix passe de 1000 à 1010 €.
- c. Résoudre l'équation $E(x) = -3,15$. Interpréter ce résultat.
- d. On dit que la demande est peu élastique si l'élasticité de la demande par rapport au prix est comprise entre -1 et 0 (dans ce cas, la demande est peu sensible aux variations de prix).

Pour quels prix la demande de ce produit est-elle peu élastique?

Partie C : Etude théorique

Dans cette partie, si f désigne une fonction ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$, de dérivée f' sur cet intervalle, on note $E_f(x)$ l'élasticité de la fonction f par rapport à la variable x , de sorte que :

$$E_f(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pour } x \in]0; +\infty[.$$

1. Vérifier que l'élasticité d'une fonction puissance $x \mapsto x^n$ avec n entier supérieur ou égal à 1 est constante sur $]0; +\infty[$.

2. Règles opératoires

Soient un réel λ et deux fonctions f et g ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$, dérivables sur cet intervalle. Montrer que pour tout $x > 0$:

a. $E_{\lambda \times f}(x) = E_f(x)$.

b. $E_{f \times g}(x) = E_f(x) + E_g(x)$.

c. $E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x)$.

3. En utilisant ces règles opératoires, déterminer l'élasticité de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{2017e^x}{x^2}$.

Chapitre 4

Géométrie

4.1 Produit scalaire

4.1.1 Point de cours

Propriété 1

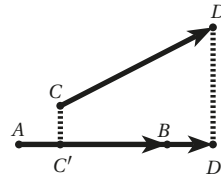
Soit $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs colinéaires et non nuls. Alors :

- s'ils sont de même sens : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AB \times CD$
- s'ils sont de sens contraires : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \times CD$

Propriété 2

Soit les points A , B , C et D avec A et B distincts.

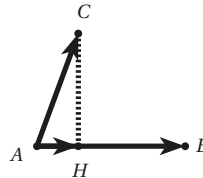
Soit C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) , alors $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$



Propriété 3

Soit trois points A , B et C avec A et B distincts.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$



Propriété 4 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriétés 5

- Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- Le produit scalaire est symétrique, c'est-à-dire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, appelé carré scalaire est noté $\vec{u}^2$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété 6 Soit, dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

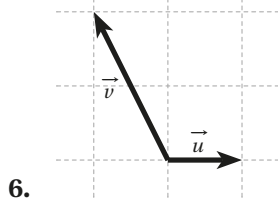
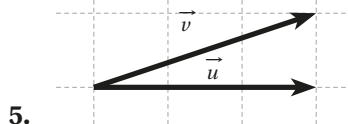
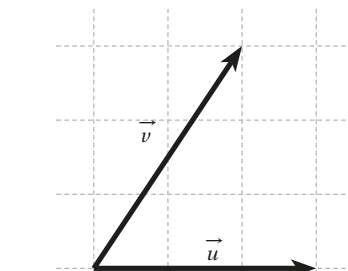
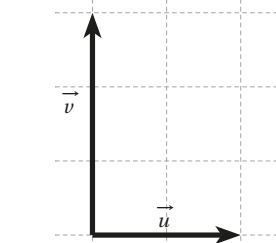
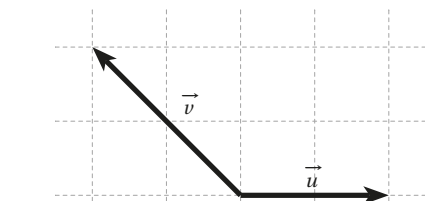
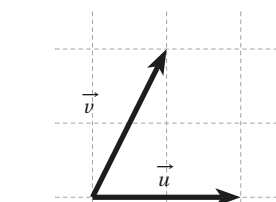
Propriété 7 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

4.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 641

10 minutes

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'unité 1 carreau. Déterminer, dans chaque cas, $\vec{u} \cdot \vec{v}$:



EXERCICE 642

10 minutes

Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 2. Déterminer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
3. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

4. $\vec{DA} \cdot \vec{OD}$
5. $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$
6. $\vec{OB} \cdot \vec{OD}$

EXERCICE 643**10 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O , tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. Déterminer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

4. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
5. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BD}$
6. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO}$

EXERCICE 644**10 minutes**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définis dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chaque cas, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

1. $\vec{u} (2;3)$ et $\vec{v} (1;7)$
2. $\vec{u} (-1;2)$ et $\vec{v} (0,5;3)$
3. $\vec{u} (1;1)$ et $\vec{v} (-2;1)$

4. $\vec{u} (1;0)$ et $\vec{v} (-1;0)$
5. $\vec{u} (\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ et $\vec{v} (\sqrt{3}; \sqrt{2})$
6. $\vec{u} (1; -5)$ et $\vec{v} (3; -2)$

EXERCICE 645**10 minutes**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définis dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer, dans chaque cas, le réel a tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u} (1;a)$ et $\vec{v} (2;3)$
2. $\vec{u} (a;2)$ et $\vec{v} (-1;5)$
3. $\vec{u} (1;\sqrt{2})$ et $\vec{v} (a;1)$

4. $\vec{u} (1;a)$ et $\vec{v} (-1;a)$
5. $\vec{u} (a;\sqrt{5})$ et $\vec{v} (-1;\sqrt{5})$
6. $\vec{u} (1;-5)$ et $\vec{v} (a;3)$

EXERCICE 646**10 minutes**

Soit $\vec{u}$ un vecteur défini dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Déterminer, dans chaque cas, les coordonnées de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ orthogonaux à $\vec{u}$.

1. $\vec{u} (-1;3)$
2. $\vec{u} (1;-2)$
3. $\vec{u} (1;0)$

4. $\vec{u} (-2;0)$
5. $\vec{u} (\sqrt{3}; -\sqrt{2})$
6. $\vec{u} (\sqrt{5}; -5)$

EXERCICE 647**5 minutes**

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit les points $A(-1;8)$, $B(1;2)$ et $C(4;3)$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .

EXERCICE 648**5 minutes**

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit les points $A(2;3)$, $B(6;4)$ et $C(1;8)$.

Le triangle ABC est-il rectangle?

EXERCICE 649**10 minutes**

Soit α une mesure en radian de l'angle $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 1$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

4. $\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2. $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

5. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 8$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 4$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

6. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \|\vec{v}\| = \sqrt{7}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 650**10 minutes**

Déterminer, dans chaque cas, une mesure en radian de l'angle $\alpha = \widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$.

1. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

3. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3}$.

2. $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{2}$.

4. $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}, \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

4.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 651****5 minutes**

Démontrer que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 652 : FORMULE D'AL-KASHI**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque.

1. En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, démontrer que $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \hat{C}$.

2. Que devient cette relation lorsque le triangle ABC est rectangle en C ?

3. Déterminer la longueur AB sachant que $AC = 2, BC = 3$ et $\hat{C} = 30^\circ$.

4. Déterminer la longueur AC sachant que $AB = 4, BC = 5$ et $\hat{B} = 60^\circ$.

5. Déterminer une mesure en degrés de $\hat{A}$ sachant que $AB = 6, BC = 7$ et $AC = 8$.

EXERCICE 653**15 minutes**

Soit deux points A et B du plan $\mathcal{P}$ tels que $AB = 4$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$ en fonction de MI .

2. Exprimer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MI .

3. Construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 10$.

4. Construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$.

5. Déterminer a tel que les points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a$ appartiennent à Γ_1 .

EXERCICE 654**5 minutes**

Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

EXERCICE 655**10 minutes**

1. Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2. En déduire une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(2;5)$ et $B(-3;3)$.

EXERCICE 656**15 minutes**

Soit $A(1;3)$, $B(-1;1)$ et $C(3;-2)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer BC et $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
2. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .
 - a. Pourquoi a-t-on $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$?
 - b. Pourquoi H appartient-il au segment $[BC]$?
 - c. En déduire BH et CH .

EXERCICE 657**10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

1. Démontrer que $(\vec{AB} + \vec{AD})^2 = 61$ et $(\vec{AB} - \vec{AD})^2 = 21$.
2. En déduire les longueurs AC et BD .
3. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 658**15 minutes**

On pose $\|\vec{u}\|^2 = a$, $\|\vec{v}\|^2 = b$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = c$.

Exprimer en fonction de a , b et c les produits scalaires suivants :

1. $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} + 3\vec{v})$
2. $(\vec{u} + 5\vec{v})^2$
3. $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$
4. $(2\vec{u} + \vec{v})^2 + (2\vec{u} - \vec{v})^2$

EXERCICE 659**15 minutes**

Démontrer que :

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(u^2 + v^2)$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

EXERCICE 660**25 minutes**

1. Démontrer que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire, c'est-à-dire tel que $\|\vec{u}\| = 1$.
Démontrer que, quel que soit $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

EXERCICE 661**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[BC]$.

1. Démontrer que :
 - $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$
 - $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$$\bullet AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

☞ Ces trois relations sont connues sous le nom de « théorème de la médiane ».

2. Calculer la longueur des médianes du triangle ABC sachant que $AB = 4$, $BC = 5$ et $AC = 6$.

EXERCICE 662**20 minutes**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient a et b deux réels. On considère les points A et B du cercle trigonométrique images respectives des réels a et b .

On a ainsi $\left(\vec{i}; \overrightarrow{OA}\right) = a \pmod{2\pi}$ et $\left(\vec{i}; \overrightarrow{OB}\right) = b \pmod{2\pi}$.

1. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right)$ en fonction de a et b . En déduire une expression de $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$.
2. Déterminer les coordonnées des points A et B dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire une seconde expression de $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$.
3. En comparant les deux expressions obtenues, démontrer que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
4. En déduire que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
5. Démontrer que $\sin(a - b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right)$.
6. En déduire que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
7. En déduire que $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

EXERCICE 663**15 minutes**

1. Soit A, B et C trois points alignés dans cet ordre, H un point sur la perpendiculaire à (AB) en A .

Démontrer que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = HA^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Déterminer l'angle $\widehat{BHC}$ sachant que $AB = 20$, $BC = 7$ et $AH = 40$.

EXERCICE 664**15 minutes**

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 5$ et Γ_λ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$.

1. Construire, si possible, Γ_λ dans les cas suivants :
 $\lambda = -9$ $\lambda = -4$ $\lambda = 0$ $\lambda = 8$.
2. Soit C un point tel que ABC équilatéral. Comment choisir λ pour que C soit un point de Γ_λ ?

EXERCICE 665**15 minutes**

Soit A, B et C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$, I le milieu de $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à I .

1. Simplifier les expressions $\vec{U} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$.

EXERCICE 666**20 minutes**

Soit le triangle ABC tel que : $AC = 1 \text{ m}$, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et $\widehat{ACB} = 25^\circ$.

Soit D le milieu du segment $[AC]$ et ADE le triangle tel que

$\widehat{DAE} = 85^\circ$, $\widehat{ADE} = 50^\circ$ et tel que E et B soient de part et d'autre du segment $[AC]$.

1. Faire une figure
2. Calculer les valeurs arrondies au mm des longueurs AE et AB .
3. Calculer les valeurs arrondies au cm^2 des aires des triangles ABC et ADE .
4. Construire l'image de la figure $ABCDE$ par la symétrie orthogonale d'axe (AE) . On obtient alors le contour d'un cerf-volant à recouvrir de tissu.
5. Calculer la valeur arrondie au dm^2 de la surface de tissu nécessaire au recouvrement de la structure de ce cerf-volant.

EXERCICE 667**15 minutes**

On considère le triangle ABC tel que $AC = 24 \text{ cm}$, $BC = 28 \text{ cm}$ et $AB = 40 \text{ cm}$.

1. Faire une figure.
2. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC . Arrondir à 10^{-2} .
3. On admet pour la suite que l'angle $\widehat{ACB}$ a une mesure égale à $100,3^\circ$.
Calculer l'aire S du triangle ABC . Arrondir à 10^{-1} .
4. On appelle H le pied de la hauteur issue du point C .
Donner l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de CH .
En déduire CH .
5. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir à 10^{-1} .
6. En utilisant un résultat admis au 3. et le résultat obtenu au 5., calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

EXERCICE 668**10 minutes**

En physique, on peut utiliser le produit scalaire pour calculer la résultante de deux forces.

Soit un point P soumis à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ formant un angle de 40° , d'intensités respectives 500 N et 300 N .

Calculer l'intensité de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

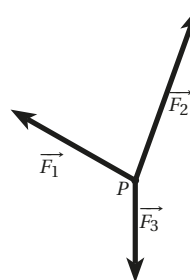
☞ On pourra utiliser le résultat de l'exercice 654.

EXERCICE 669**15 minutes**

Soit un point P soumis à trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.

$$\|\vec{F}_1\| = 800 \text{ N}, \|\vec{F}_2\| = 900 \text{ N} \text{ et } \|\vec{F}_3\| = 500 \text{ N}$$

$$\left(\vec{F}_1; \vec{F}_2\right) = 80^\circ \text{ et } \left(\vec{F}_2; \vec{F}_3\right) = 160^\circ.$$



EXERCICE 670**10 minutes**

En physique, le travail W d'une force $\vec{F}$ est égal au produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ par le vecteur déplacement $\vec{\ell}$: $W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$.

Une dépanneuse remorque une voiture jusqu'au garage distance d'un kilomètre en ligne droite. Le câble de traction fait un angle de 30° avec la route et exerce une tension de 1500 N .

1. Quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture?
2. A travail égal, quelle devrait-être l'intensité de la tension si le câble était parallèle à la route?

EXERCICE 671**15 minutes**

ABC est un triangle rectangle rectangle en A .

1. Démontrer qu'il existe un unique point M distinct de A tel que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$.
2. Déterminer ce point.

EXERCICE 672**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Déterminer l'ensemble, Γ_1 , des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble, Γ_2 , des points M tels que $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0$.
3. Démontrer que Γ_1 et Γ_2 ont deux points communs si, et seulement si : $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$

EXERCICE 673**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Démontrer que pour tout point M on a : $\vec{AM} \cdot \vec{BC} + \vec{BM} \cdot \vec{CA} + \vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$
2. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

EXERCICE 674**15 minutes**

Démontrer que dans un triangle « la somme des carrés des longueurs des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des longueurs des côtés ».

EXERCICE 675**15 minutes**

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centre O . Soient OAC et OBD deux triangles rectangles en O tels que les points A et C appartiennent à $\mathcal{C}$, B et D appartiennent à $\mathcal{C}'$, $C \in (OD)$ et $A \in (OB)$.

Démontrer que la médiane issue de O dans le triangle OAD est la hauteur issue de O dans le triangle OBC .

☞ On pourra s'intéresser à $\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}) \cdot \vec{BC}$

EXERCICE 676**15 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté $2a$, I , J , K et L les milieux respectifs des côtés AB , BC , CD et DA . Le segment $[AJ]$ coupe $[DI]$ en P et $[BK]$ en Q . Le segment $[CL]$ coupe $[DI]$ en S et $[BK]$ en R .

1. Démontrer que $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD}$.
3. En déduire une expression de PS en fonction de a .
4. Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$?
5. Exprimer l'aire de $PQRS$ en fonction de a .

EXERCICE 677**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, $ABDE$ et $ACFG$ deux carrés extérieurs au triangle. Soit I le milieu de $[BC]$.

Démontrer que (AI) est perpendiculaire à (EG) .

EXERCICE 678**10 minutes**

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = a$ et $DC = 2a$ et $AD = h$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a et h .
2. Déterminer la valeur de h pour laquelle $[AC]$ et $[BD]$ sont orthogonales.

EXERCICE 679**20 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque de centre de gravité G et f une application qui à tout point M du plan associe $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1. Démontrer que $f(M) = f(G) + 3MG^2$.
2. En déduire Γ_k , l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$.
3. Démontrer à l'aide du théorème de la médiane que $GA^2 + GB^2 = \frac{1}{2}GC^2 + \frac{1}{2}AB^2$.
4. Etablir deux relations analogues et en déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.
5. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = AB^2 + BC^2 + CA^2$.

EXERCICE 680**20 minutes**

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 3$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan associe $f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

1. Déterminer Δ_0 , l'ensemble des points M tels que $f(M) = 0$.
2. Soit H un point de (AB) tel que $d(A, H) = k$. Déterminer $f(H)$.
3. En déduire Δ_k , l'ensemble des points M tels que $f(M) = 3k$.
4. Déterminer Δ_3 , Δ_{-6} et Δ_{12} .
5. Déterminer l'ensemble des points M tels que $-6 \leq f(M) \leq 3$.
6. Déterminer l'ensemble des points M tels que $0 < f(M) \leq 12$.

EXERCICE 681**15 minutes**

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$, I le milieu du segment $[AB]$. Soit f l'application qui à tout point M du plan associe $f(M) = MA^2 - MB^2$.

1. Démontrer que pour tout point M du plan $f(M) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire Δ_0 , Δ_8 et Δ_{-8} ensembles des points M tels que $f(M) = 0$, $f(M) = 8$ et $f(M) = -8$.

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $-8 < f(M) < 8$.

EXERCICE 682**10 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, G son centre de gravité et I le milieu de $[AC]$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.
2. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

EXERCICE 683**20 minutes**

Soit ABC un triangle. On note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$.

1. Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

- a. Justifier que $BH = AB \times \sin \alpha$.
- b. En déduire que l'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$.
- c. Démontrer de même que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.
- d. En déduire les égalités $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$.

2. Soit ABC un triangle tel que :

- a. $AB = 4$, $\widehat{ABC} = 25^\circ$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Déterminer AC , BC et $\widehat{ACB}$.
- b. $AB = 6$, $BC = 7$ et $\widehat{ACB} = 55^\circ$. Déterminer AC , $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 684**25 minutes**

Soit $(EGFH)$ un carré de côté 6 cm, D le point du segment $[EF]$ tel que $ED = 2$ cm et I le milieu de $[FG]$.

1. Construire le point K de $[HG]$ tel que $\widehat{DIK} = 67^\circ$.
2. a. Calculer la distance DI .
- b. Calculer l'angle $\widehat{DIF}$ (donner sa mesure au degré près).
- c. En déduire l'angle $\widehat{KIG}$.
3. a. Calculer la distance KI .
- b. Calculer l'aire du triangle DIK . Donner sa mesure au mm^2 près.
4. a. Calculer la distance KD .
- b. Calculer l'angle $\widehat{KDI}$. Donner sa mesure au degré près.

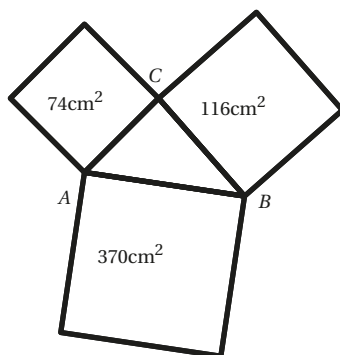
EXERCICE 685**15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A , A' le milieu du $[BC]$, H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur $[AB]$ et sur $[AC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
2. En déduire la position relative des droites (AA') et (IJ) .

EXERCICE 686**15 minutes**

Quelle est l'aire du triangle au centre de la figure?

**EXERCICE 687****15 minutes**

Soit $A(2 ; 3)$, $B(-1 ; 6)$ et $C(-3 ; 2)$ trois points du plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, H_A , H_B et H_C le pied des hauteurs issues respectivement de A , B et C dans le triangle ABC .

1. Déterminer une équation de la droite (BC) .
2. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$, en déduire les coordonnées du point H_A .
3. En procédant de manière analogue, déterminer les coordonnées des points H_B et H_C .

EXERCICE 688**15 minutes**

Soit $A(-2 ; 0)$, $B(0 ; 3)$ et $C(7 ; 2)$ trois points du plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, H_A , H_B et H_C le pied des hauteurs issues respectivement de A , B et C dans le triangle ABC .

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les coordonnées des points H_A , H_B et H_C .

EXERCICE 689**15 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = 200$, $\widehat{ABC} = 48^\circ$, $\widehat{CBD} = 25^\circ$, $\widehat{CAD} = 26^\circ$ et $\widehat{ABD} = 44^\circ$. Déterminer la longueur des côtés AC , BC , BD et CD .

EXERCICE 690**15 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = 10$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$, $\widehat{BAC} = \widehat{ABD} = 30^\circ$ et $\widehat{CBD} = 50^\circ$.

1. Déterminer la valeur exacte de AD et BD .
2. Déterminer une valeur approchée au centième de AC et BC .
3. En déduire une valeur approchée au centième de DC .

EXERCICE 691**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité. Soit M un point du plan.

1. Démontrer que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
2. Démontrer que $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

3. Exprimer $f(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MG et des longueurs du triangle ABC .
4. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que $f(M) = 0$.

EXERCICE 692**15 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral, de côté de longueur a et Γ l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$, k étant un réel donné.

Discuter en fonction de k et de a l'ensemble Γ .

EXERCICE 693**15 minutes**

1. Soit A, B et C trois points du plan. Construire le point D tel que $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
On distinguera le cas où A, B et C sont alignés et celui où ils ne sont pas alignés.
2. En utilisant le point D précédent, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = k$ (k constante réelle donnée).

EXERCICE 694**15 minutes**

Soit A, B, C et D des points fixés du plan, M un point quelconque et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M tels que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

EXERCICE 695**20 minutes**

Soit A, B et C trois points du plan tels que $AC = 3a$, $BC = 5a$ et $AB = 4a$ (a réel positif donné).

1. Démontrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{u}$ ($\vec{u}$ étant un vecteur donné du plan).
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2$.

EXERCICE 696**15 minutes**

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

1. Démontrer que, quel que soit le point M dans $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer un point M de $\mathcal{P}$ tel que les $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 697**25 minutes**

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, G le centre de gravité du triangle ABC .

On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Démontrer que pour tout M du plan $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
2. En calculant $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$ de deux manières différentes, établir que :
$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BC]$, montrer que, lorsqu'ils existent, ces points appartiennent à un cercle de centre G dont on précisera le rayon en fonction de a , b et c .

4.2 Trigonométrie

4.2.1 Point de cours

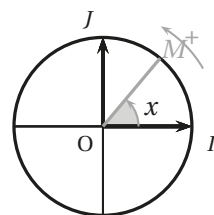
Définitions : le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O , de rayon 1 orienté dans le sens direct.

Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ on peut associer à tout réel x un unique point M de $\mathcal{C}$.

- Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique repéré par x .

On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$.



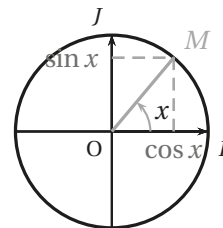
Par convention on note alors $(\vec{OI}, \vec{OM}) = x + 2k\pi$

où k est un entier relatif et on dit que $(\vec{OI}, \vec{OM})$ a pour mesure x radians à 2π près.

Mesure principale : la mesure principale d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Définition :

soit x une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ où M est un point du cercle trigonométrique.



- Le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M .
- Le sinus de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M .

Propriétés : pour tout réel x , pour tout entier relatif k , on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

4.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 698

5 minutes

Compléter le tableau suivant :

<i>radians</i>	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$		π	$\frac{5\pi}{3}$	
<i>degrés</i>			45	60			150			270

EXERCICE 699

5 minutes

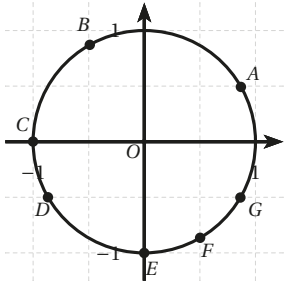
Compléter le tableau suivant :

<i>degrés</i>			15	22,5			160			315
<i>radians</i>	1	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$		$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{16\pi}{9}$	

EXERCICE 700

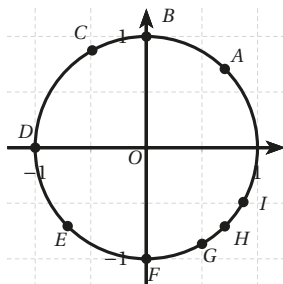
5 minutes

Pour chaque point déterminer un réel qui le repère sur le cercle trigonométrique :



10 minutes

Pour chaque point déterminer trois réels qui le repèrent sur le cercle trigonométrique, dont un appartenant à l'intervalle $] -\pi ; \pi]$:



10 minutes

Placer sur le cercle trigonométrique, les points correspondants à : $0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

10 minutes

Placer sur le cercle trigonométrique, les points correspondants à : $\frac{19\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, \frac{29\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, 15\pi, 2020\pi, -\frac{34\pi}{3}, -\frac{571\pi}{4}$.

10 minutes

Déterminer la mesure principale des angles suivants : 29π , 302π , $\frac{23\pi}{2}$, $\frac{181\pi}{4}$, $\frac{2021\pi}{6}$, $-\frac{37\pi}{3}$.

10 minutes

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\frac{234\pi}{5}$, $\frac{241\pi}{7}$, $\frac{8764\pi}{13}$, $\frac{273\pi}{7}$, $-\frac{9876\pi}{5}$.

10 minutes

Compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs exactes :

[illegible]

EXERCICE 707**10 minutes**

Compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs exactes :

θ	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{6}$	-3π	$\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{2}$	$-\frac{8\pi}{3}$
$\cos \theta$									
$\sin \theta$									

EXERCICE 708**10 minutes**Dans chaque cas, en s'aidant du cercle trigonométrique, déterminer la mesure de l'angle θ , en radians, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

1. $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$.

4. $\cos \theta = 0$ et $\sin \theta = -1$.

EXERCICE 709**10 minutes**Dans chaque cas, en s'aidant du cercle trigonométrique, déterminer la mesure de l'angle θ , en radians, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

1. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$.

3. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\cos \theta = -1$ et $\sin \theta = 0$.

EXERCICE 710**10 minutes**Dans chaque cas, en s'aidant de la calculatrice et du cercle trigonométrique, déterminer la mesure de l'angle θ , en radians, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

1. $\cos \theta = \frac{1}{3}$ et $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. $\cos \theta = -0,8$ et $\sin \theta = -0,6$.

3. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ et $\sin \theta = \frac{1}{4}$.

4. $\cos \theta = 0,6$ et $\sin \theta = -0,8$.

☞ Attention, la calculatrice donne des résultats pour :

 Arccos (ou $\cos^{-1}$) dans l'intervalle $[0 ; \pi[$, Arcsin (ou $\sin^{-1}$) dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.**EXERCICE 711****10 minutes**Dans chaque cas, en s'aidant de la calculatrice et du cercle trigonométrique, déterminer la mesure de l'angle θ , en radians, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $[0 ; 2\pi[$. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

1. $\cos \theta = 0,1$ et $\sin \theta = \sqrt{0,99}$.

2. $\cos \theta = -0,9$ et $\sin \theta = -\sqrt{0,19}$.

3. $\cos \theta = -0,3$ et $\sin \theta = \sqrt{0,91}$.

4. $\cos \theta = \sqrt{0,19}$ et $\sin \theta = -0,9$.

EXERCICE 712**10 minutes**Sans calculer x , déterminer la valeur exacte de $\sin x$ sachant que :

1. $\cos x = 0,15$ et $x \in [0; \pi]$.
2. $\cos x = -0,2$ et $x \in [0; \pi]$.
3. $\cos x = 0,15$ et $x \in [-\pi; 0]$.
4. $\cos x = -0,15$ et $x \in [\pi; 2\pi]$.
5. $\cos x = 0,2$ et $x \in [\pi; 2\pi]$.
6. $\cos x = -0,1$ et $x \in [0; \pi]$.

EXERCICE 713**10 minutes**Sans calculer x , déterminer la valeur exacte $\cos x$ sachant que :

1. $\sin x = 0,15$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin x = -0,2$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. $\sin x = 0,15$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\sin x = -0,15$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. $\sin x = 0,2$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
6. $\sin x = -0,1$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 714**10 minutes**

Compléter le tableau de signes :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$							
$\sin x$							

EXERCICE 715**5 minutes**Soit $x \in \mathbb{R}$, donner un encadrement des expressions suivantes :

1. $\cos x + 2$.
2. $3 \sin x - 1$.
3. $2 - 5 \cos 2x$.
4. $1 - 2 \sin 5x$.

4.2.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 716****10 minutes**Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AB = BC = 2x$, $AD = DC = x$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \frac{\pi}{2}$.Soit $\theta = \widehat{ABC}$. Que vaut $\sin \theta$?**EXERCICE 717****10 minutes**Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 37^\circ$ et $BC = 10$.Quelle est la longueur du segment $[AB]$?**EXERCICE 718****20 minutes**Soit A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon R . On note $\theta = \widehat{AOB}$ en degrés.

1. Exprimer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ en fonction de R et θ .
2. Une fourmi se déplace sur un cercle de rayon 3 m à la vitesse de $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Partant du point A , elle arrive au point B après 36 minutes de déplacement.
Quelle est la valeur de θ ?

EXERCICE 719**10 minutes**

Démontrer que pour tout x réel, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

EXERCICE 720**10 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté 1.

1. Déterminer AC et l'angle $\widehat{ACB}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 721**10 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1, H le pied de la hauteur issue de C .

1. Déterminer CH , les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCH}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 722**15 minutes**

Ecrire, en Python, une fonction *principal*(a , b) permettant de déterminer la mesure principale d'un angle donné sous la forme $\frac{a\pi}{b}$.

EXERCICE 723**25 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 5. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 9. $\cos 5x = -1$ |
| 2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 6. $\sin x = -\frac{1}{2}$ | 10. $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 3. $\cos x = \frac{1}{2}$ | 7. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 11. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 4. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 8. $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 12. $\sin 7x = -1$ |

EXERCICE 724**15 minutes**

Pré-requis : pour tous réels a et b

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En utilisant les pré-requis et la parité de sinus et cosinus, démontrer les égalités suivantes :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
2. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
3. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$.
4. $\sin 2a = 2 \cos a \sin a$.

EXERCICE 725**10 minutes**

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrer les égalités suivantes :

1. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$.
2. $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$.
3. $\cos(x+y)\sin(x-y) = \cos x \sin x - \cos y \sin y$.
4. $\cos(x-y)\sin(x+y) = \cos x \sin x + \cos y \sin y$.

EXERCICE 726**15 minutes**

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. Exprimer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 727**15 minutes**

1. Calculer $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.
2. Exprimer $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ en fonction de $\cos \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 728**10 minutes**

1. Démontrer que pour tout x réel, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 729**10 minutes**

Soit a et b deux réels appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos a = \frac{1}{4}$ et $\cos b = \frac{3}{4}$.
Calculer $\sin(2a+b)$ et $\sin(a-2b)$.

EXERCICE 730**15 minutes**

Montrer que, pour tout réel $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

☞ On pourra utiliser les formules démontrées dans l'exercice 724.

EXERCICE 731**15 minutes**

1. Démontrer que pour tout réel $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x}$.
2. Calculer $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.
3. Calculer $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$.

EXERCICE 732**10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = a \cos(x - b)$.
2. Démontrer que, dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions que l'on déterminera.

EXERCICE 733**10 minutes**

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x : $\cos x + \sin x = a \cos(x + b)$.
2. En déduire un encadrement de $\cos x + \sin x$.

EXERCICE 734**10 minutes**

Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ les inéquations suivantes :

1. $1 - 2 \sin x > 0$.
2. $1 + 2 \cos x > 0$.
3. $\sin x \cos x \geq 0$.
4. $2 \cos x + \sqrt{3} < 0$.

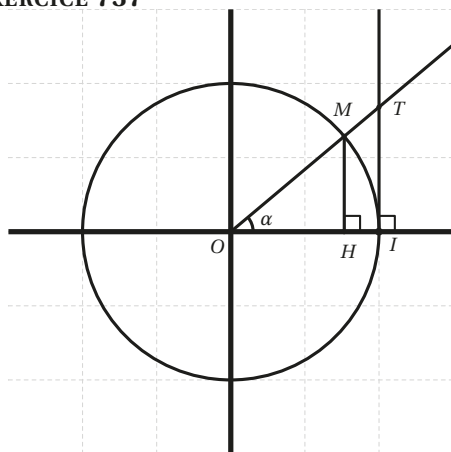
EXERCICE 735**10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.
2. $\sin^2 x - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$.

EXERCICE 736**20 minutes**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
2. Résoudre l'équation $\cos 4z = 0$.
3. Exprimer $\cos 4z$ en fonction de $\cos z$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{3\pi}{8}$.

EXERCICE 737**10 minutes**

1. Pour quelles valeurs de α le point T existe-t-il?
2. Exprimer IT en fonction de OH et HM .
3. On pose $IT = \tan \alpha$. Retrouver l'expression de $\tan \alpha$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.
4. Déterminer α tel que $\tan \alpha = 1$.

EXERCICE 738**15 minutes**

Démontrer les expressions suivantes :

1. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$

2. $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$

3. $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$

4. En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 739**30 minutes**

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 1$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en D .

1. Démontrer que les triangles ADB et BCD sont isocèles.

2. Démontrer que $AB = 2 \cos \frac{\pi}{5}$.

3. En déduire que $DC = 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1$.

4. En se plaçant dans le triangle BCD , montrer que $DC = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2$.

5. En déduire que $4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$.

6. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$

7. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{5}$.

8. Déterminer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 740**10 minutes**

Soit $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$.

2. En déduire la valeur de α .

EXERCICE 741**15 minutes**

Soit $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$ et $\cos(4\alpha)$.

2. En déduire la valeur de α .

EXERCICE 742**10 minutes**1. Soit p et q deux réels quelconques, démontrer les relations suivantes :

a. $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$

$$\text{b. } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\text{c. } \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$$\text{d. } \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

2. Transformer l'expression suivante en produit : $\cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x$.

3. Transformer l'expression suivante en produit : $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$.

EXERCICE 743**20 minutes**

Démontrer les égalités suivantes :

$$1. \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$$

$$2. \cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cos 3x.$$

$$3. \sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 2x.$$

$$4. 4 \cos 3x \sin^3 x + 4 \sin 3x \cos^3 x = 3 \sin 4x.$$

$$5. (\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x.$$

EXERCICE 744**20 minutes**

Démontrer les égalités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$1. \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}.$$

$$2. \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0.$$

$$3. \tan x - \frac{1}{\tan x} = -\frac{2}{\tan 2x}.$$

EXERCICE 745**20 minutes**

Démontrer les égalités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$1. \tan 2x - \tan x = \frac{\tan x}{\cos 2x}.$$

$$2. \tan 2x - \tan x = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos 3x}.$$

$$3. \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{\tan^2 2x}{2 + \tan^2 2x}.$$

EXERCICE 746**15 minutes**

Soit l'équation $\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = m$.

1. Résoudre cette équation pour $m = 1$.

2. Pour quelles valeurs de m cette équation a-t-elle des solutions?

4.3 Géométrie repérée

4.3.1 Point de cours

Repère du plan : soit (O, I, J) un repère du plan. Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Repère du plan : trois points non alignés définissent un repère du plan.

Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: soit A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notées $\|\overrightarrow{AB}\|$ correspond à la longueur du segment $[AB]$.

On a alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

☞ Pour utiliser les notions de distance ou d'orthogonalité, le repère utilisé doit obligatoirement être orthonormé.

Vecteurs colinéaires : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Critère de colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.

Vecteur normal, vecteur directeur : soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

- Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ est normal à la droite $\mathcal{D}$.
- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b; a)$ est un vecteur de la droite $\mathcal{D}$.

Equation d'un cercle : soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R .

$\mathcal{C}$ est d'équation : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

4.3.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 747

5 minutes

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier. Construire les points M , N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{FE}, \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PF}.$$

EXERCICE 748**5 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

1. Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 749**5 minutes**

On considère un parallélogramme $ABCD$. Le symétrique de B par rapport à A s'appelle I et le symétrique de D par rapport à C s'appelle J .

Comparer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CJ}$ et en déduire la nature du quadrilatère $IAJC$.

EXERCICE 750**10 minutes**

Soit A et B deux points distincts.

On se propose de construire un point M tel que : $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

1. Démontrer que le point M appartient à la droite (AB) .
2. Construire le point M .

EXERCICE 751**10 minutes**

Soit A , B et C trois points non alignés.

Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Expliquer pourquoi $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
3. Quelles sont les coordonnées des points A , B , C et N dans ce repère?
4. Calculer les coordonnées du point P .
5. Montrer que les points A , P et N sont alignés.

EXERCICE 752**10 minutes**

Soit A , B et C trois points non alignés. Les points D , E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Démontrer que les points D , E et F sont alignés.

EXERCICE 753**10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$ et K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
2. Donner les coordonnées des points A , B , D et C .
3. Déterminer les coordonnées des points I , J et K .
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KJ}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{CI} + 3\overrightarrow{IK}$.

EXERCICE 754**10 minutes**

On considère le carré $ABCD$, E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA})$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{CB}$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
2. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et F .
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
4. Que peut-on en déduire en ce qui concerne les points A, E et F .

EXERCICE 755**15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. Soit les points E, F, G et H définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HD}$.

L'objectif de l'exercice est d'établir la nature du quadrilatère $EFGH$ par deux méthodes.

1. Méthode vectorielle

- a. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- b. Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- c. En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

2. Méthode analytique

- a. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
- b. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.
- c. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.
- d. En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

EXERCICE 756**10 minutes**

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Le plan est muni du repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Déterminer les coordonnées des points $O, I, J, K, L, A, B, C, D$ puis des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK}$.
2. Même question dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

EXERCICE 757**10 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté 3, E et F deux points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

En utilisant un repère orthonormé, démontrer que les droites (CE) et (BF) sont perpendiculaires.

EXERCICE 758**10 minutes**

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en B et C tel que $AB = 6$, $BC = CD = 3$, E et F les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

En choisissant un repère orthonormé, démontrer que les droites (EF) et (CE) sont perpendiculaires.

EXERCICE 759**10 minutes**

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 1)$, $B(2; 0)$, $C(0; 1)$, $D(2; 3)$ et $G(-6; 0)$.

1. Déterminer les coordonnées des points P et Q tels que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{QB}$.
2. En déduire que les points P , Q et G sont alignés.

EXERCICE 760**10 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté 1, M un point du segment $[AC]$ distinct de A et de C , P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur $[AD]$ et $[DC]$.

1. Déterminer les coordonnées de B , M , P et Q dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.
2. Calculer $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{PC}$.
3. Que peut-on en conclure?

EXERCICE 761**15 minutes**

Pour chaque droite, déterminer un vecteur normal à la droite, un vecteur directeur et un point de cette droite :

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1. $2x + 3y + 1 = 0$. | 4. $y = 3x - 5$. |
| 2. $8x - y + 6 = 0$. | 5. $y = \sqrt{3}$. |
| 3. $-x + \sqrt{2}y - 1 = 0$. | 6. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + 5 = 0$. |

EXERCICE 762**10 minutes**

Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point A .

- | | |
|---|---|
| 1. $\vec{n}(1; 3)$ et $A(1; 1)$. | 4. $\vec{n}(2; -5)$ et $A(2; -3)$. |
| 2. $\vec{n}(-2; 1)$ et $A(0; -2)$. | 5. $\vec{n}(5; -1)$ et $A(2; 2)$. |
| 3. $\vec{n}\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$ et $A(1; 0)$. | 6. $\vec{n}\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right)$ et $A(0; 1)$. |

EXERCICE 763**10 minutes**

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles perpendiculaires?

1. $\mathcal{D}: x - 3y + 2 = 0$ et $\Delta: 6x + 2y - 8 = 0$.
2. $\mathcal{D}: 4x + y + \sqrt{3} = 0$ et $\Delta: x - 2y - \sqrt{6} = 0$.
3. $\mathcal{D}: x + (1 + \sqrt{2})y + 2 = 0$ et $\Delta: x + (1 - \sqrt{2})y - 8 = 0$.

EXERCICE 764**10 minutes**

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite $y = \frac{2}{3}x + 5$.

1. Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par le point $A(2; 3)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

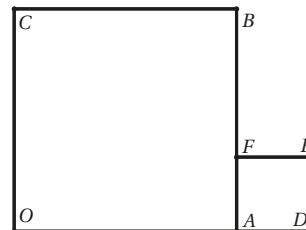
4.3.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 765

15 minutes

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on trace un carré $OABC$ de côté 3 et un carré $ADEF$ de côté 1.

1. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etablir une équation de (OF) , (CE) et (BD) .
3. Déterminer P le point d'intersection des droites (OF) et (CE) .
4. Les droites (OF) , (CE) et (BD) sont-elles concourantes?

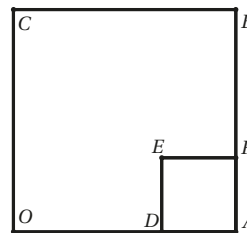


EXERCICE 766

15 minutes

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on trace un carré $OABC$ de côté 3 et un carré $ADEF$ de côté 1.

1. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etablir une équation de (OF) , (CE) et (BD) .
3. Déterminer P le point d'intersection des droites (OF) et (CE) .
4. Les droites (OF) , (CE) et (BD) sont-elles concourantes?

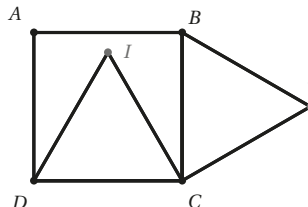


EXERCICE 767

10 minutes

Soit $ACBD$ un carré de côté 1, DCI et BDJ deux triangles équilatéraux.

1. Déterminer les coordonnées des points A , I et J dans le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$.
2. Démontrer que les points A , I et J sont alignés.



EXERCICE 768

5 minutes

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ passant par le point $A(x_A; y_A)$, $M(x; y)$ un point de $\mathcal{D}$.

1. Démontrer qu'une équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $ax + by + c = 0$.
2. Démontrer que $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

EXERCICE 769**10 minutes**

Soit $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et $M(x; y)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R .

1. Etablir une relation liant Ω , M et R .
2. En déduire qu'une équation de $\mathcal{C}$ est de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.
3. Démontrer réciproquement que si $M(x; y)$ vérifie l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ alors $M \in \mathcal{C}$.

EXERCICE 770**10 minutes**

Déterminer une équation du cercle de centre Ω et de rayon R :

1. $\Omega(0; 0)$ et $R = 2$.
2. $\Omega(-1; 8)$ et $R = 9$.
3. $\Omega(3; 2)$ et $R = 3$.
4. $\Omega(-1; -1)$ et $R = 1$.
5. $\Omega(6; -4)$ et $R = \sqrt{5}$.
6. $\Omega(-5; -2)$ et $R = \sqrt{2}$.
7. $\Omega(3; -3)$ et $R = 7$.
8. $\Omega(0; -\sqrt{2})$ et $R = \sqrt{3}$.

EXERCICE 771**15 minutes**

En utilisant la forme canonique, déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que :

1. $x^2 + 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$.
2. $x^2 - 4x + y^2 + 8y - 7 = 0$.
3. $x^2 + x + y^2 - 3y - \frac{7}{2} = 0$.
4. $x^2 + x + y^2 + y = 0$.
5. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.
6. $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 25 = 0$.
7. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y = 0$.
8. $x^2 + y^2 + 3x - 3y = 0$.

EXERCICE 772**15 minutes**

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.
3. Etablir une équation des tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

EXERCICE 773**15 minutes**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 2)$; $B(3; 0)$ et $C(-2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC .

EXERCICE 774**15 minutes**

Soit $A(-1; 2)$ et $B(3; 4)$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $[AB]$ et passant par $P(k; 0)$.
3. Discuter en fonction de k le nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de ces points.

EXERCICE 775**15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A , A' le milieu du $[BC]$, H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , I et J les projetés orthogonaux de H respectivement sur $[AB]$ et sur $[AC]$. On définit un repère orthonormé $(A; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $B(b; 0)$ et $C(0; c)$.

1. Déterminer les coordonnées des points A' , I et J .
2. Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire la position relative des droites (AA') et (IJ) .

EXERCICE 776**15 minutes**

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 0)$ et $B(0; 2)$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. Soit I et J les projetés orthogonaux respectivement de A et B sur $\mathcal{D}$, H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB .

Démontrer que H appartient au cercle de diamètre $[IJ]$.

EXERCICE 777**15 minutes**

L'objectif de l'exercice est de montrer que si les sommets d'un triangle ABC sont situés sur une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{a}{x}$ alors l'orthocentre du triangle est aussi un point de $\mathcal{H}$. On désigne par a , b et c les abscisses des points A , B et C .

1. Déterminer une équation de $\mathcal{D}_C$, la hauteur issue de C dans le triangle ABC .
2. En déduire les coordonnées x_H et y_H du point H , intersection de $\mathcal{D}_C$ avec $\mathcal{H}$.
3. Montrer, sans calculs, que H est l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE 778**15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A , non isocèle. On construit extérieurement au triangle ABC les carrés $ABDE$ et $ACFG$.

1. Démontrer que les points A , D et G d'une part et A , E et C d'autre part sont alignés.
2. Démontrer que les droites (BC) , (FD) et (GE) sont concourantes.

EXERCICE 779**15 minutes**

Soit $ABCD$ un rectangle de côtés de longueurs $AB = 5$ et $AD = 3$,

E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{16}{25} \overrightarrow{DC}$.

Démontrer que les droites (AC) et (BE) sont perpendiculaires.

EXERCICE 780**20 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque du plan, G son centre de gravité. On note $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les repères définis par $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $\mathcal{R}' = (G; \overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC})$.

1. Déterminer les coordonnées de A' , B' et C' milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, dans le repère $\mathcal{R}$.
2. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
3. En déduire que $\mathcal{R}'$ est bien un repère du plan.

4. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, A', B' et C' dans le repère $\mathcal{R}'$.
5. Quels sont les points ayant les mêmes coordonnées dans les deux repères?

EXERCICE 781**25 minutes**

Soit ABC un triangle tel que dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $A(0;6)$, $B(-4; -2)$ et $C(5; 4)$.

1. Déterminer les coordonnées de A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
2.
 - a. Déterminer une équation de la médiane du triangle ABC issue de A .
 - b. Déterminer une équation de la médiane du triangle ABC issue de B .
 - c. Déterminer une équation de la médiane du triangle ABC issue de C .
 - d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (AA') et (BB') , on notera G ce point.
 - e. Vérifier que G appartient à (CC') . Que représente ce point pour le triangle ABC ?
3.
 - a. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$, notée Δ_C .
 - b. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[BC]$, notée Δ_A .
 - c. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AC]$, notée Δ_B .
 - d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites Δ_B et Δ_C , on notera O ce point.
 - e. Vérifier que O appartient à Δ_A . Que représente ce point pour le triangle ABC ?
4.
 - a. Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A , notée $\mathcal{D}_A$.
 - b. Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de B , notée $\mathcal{D}_B$.
 - c. Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de C , notée $\mathcal{D}_C$.
 - d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_C$, on notera H ce point.
 - e. Vérifier que H appartient à $\mathcal{D}_B$. Que représente ce point pour le triangle ABC ?
5. Démontrer que les points G, O et H sont alignés.

☞ Cette droite est appelée droite d'Euler.

EXERCICE 782**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque de centre de gravité G , d'orthocentre H et de centre du cercle circonscrit O .

1. Démontrer que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.
2. Démontrer que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.
3. En déduire que les points O, G et H sont alignés.

EXERCICE 783**15 minutes**

Déterminer l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R avec les axes.

1. $\Omega(3; 3)$ et $R = 5$.
2. $\Omega(-1; 2)$ et $R = 6$.
3. $\Omega(1; 1)$ et $R = \sqrt{5}$.
4. $\Omega(0; -2)$ et $R = \sqrt{2}$.

EXERCICE 784**10 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit la famille $\mathcal{C}_k$ des cercles de centre $\Omega(0; k)$ et de rayon k avec k réel positif. A_k et B_k sont deux points de $\mathcal{C}_k$ d'ordonnée k .

1. Démontrer que tous les cercles $\mathcal{C}_k$ ont un point commun.
2. Déterminer l'ensemble des points A_k et l'ensemble des points B_k .

EXERCICE 785**15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit trois points $A(-2; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 5)$. Soit A' , B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C dans le triangle ABC .

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\det(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC})$. En déduire les coordonnées de A' .
2. De manière analogue, calculer les coordonnées de B' et C' .

EXERCICE 786**10 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côtés de longueur 4, I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$. $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[IJ]$ et de centre Ω .

Démontrer que $\mathcal{C}$ est tangent en I à la droite (AI) .

☞ On pourra se placer dans le repère $(D; \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}; \frac{1}{4}\overrightarrow{DA})$.

EXERCICE 787**15 minutes**

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$. On désigne par $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a; b)$ et H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

1. Etablir que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du plan tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = -c$.
2. Etablir que $\overrightarrow{M_0H}$ est colinéaire à $\vec{n}$.

Dans la suite de l'exercice on désigne par λ le réel tel que $\overrightarrow{M_0H} = \lambda \vec{n}$.

3. Démontrer que $\lambda = -\frac{\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n} + c}{\|\vec{n}\|^2}$.

☞ On pourra utiliser la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{n}$.

4. En déduire que la distance du point M_0 à la droite $\mathcal{D}$ est $d(M_0; \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

EXERCICE 788**15 minutes**

En utilisant le résultat obtenu dans l'exercice précédent déterminer dans chaque cas la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$.

1. $M(1; 3)$ $\mathcal{D}: 3x + 2y + 1 = 0$
2. $M(0; 0)$ $\mathcal{D}: 3x + 2y + 1 = 0$
3. $M(-2; \sqrt{5})$ $\mathcal{D}: 2x - 7y + 3 = 0$
4. $M(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3})$ $\mathcal{D}: y = 6x + 1$

EXERCICE 789**10 minutes**

Dans chaque cas, écrire l'équation du cercle de centre Ω tangent à la droite Δ .

1. $\Omega(3; 2)$ et Δ d'équation $x + y + 1 = 0$.
2. $\Omega(-1; 5)$ et Δ d'équation $4x - 3y - 1 = 0$.

EXERCICE 790**10 minutes**

Démontrer que les droites $\mathcal{D}_k$ d'équations $y = kx + \sqrt{4k^2 + 4}$ (k étant un nombre réel) sont tangentes à un cercle de centre O et de rayon R à préciser.

EXERCICE 791**15 minutes**

Soit ABC un triangle équilatéral de côtés de longueur a . On construit, à l'extérieur du triangle, les carrés $ABDE$, $BCFG$ et $ACHI$, de centres respectifs J , K et L .

L'objectif de l'exercice est de montrer que JKL est un triangle équilatéral.

On note O le milieu de $[AB]$ et P le centre du triangle ABC . On pose $\vec{u} = \frac{1}{a}\vec{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{OP}\vec{OP}$.

1. Vérifier que le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées des points A , B et C .
3. Déterminer les coordonnées des points G , I puis J , K et L .
4. Démontrer que le triangle JKL est équilatéral.

EXERCICE 792**10 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre $A(-1; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $B(1; 4)$ et de rayon 3.

Déterminer une équation de la droite passant par les points d'intersection des cercles.

EXERCICE 793**15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit trois points A , B et C de coordonnées respectives $(2; 3)$, $(-4; 5)$ et $(6; -7)$

1. Etablir une équation des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.
2. En déduire les coordonnées du point Ω , intersection des médiatrices du triangle ABC .
3. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .
4. Etablir une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

EXERCICE 794**25 minutes**

1. Etablir une équation du cercle passant par les points A , B et C , de coordonnées respectives $(1; 1)$, $(2; 3)$ et $(4; 1)$.

☞ On pourra s'inspirer très largement de l'exercice précédent.

2. Etablir une équation du centre circonscrit à un triangle équilatéral de côtés de longueur a .

☞ On commencera par choisir judicieusement un repère orthonormé.

4.4 Préparer l'examen

EXERCICE 795 : QCM

20 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

- Le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On a :
 a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x - 4y + 2 = 0$ est :
 a. $\vec{u}(3; -4)$ b. $\vec{u}(3; 4)$ c. $\vec{u}(4; -3)$ d. $\vec{u}(4; 3)$.
- Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(2; 3)$, $B(-5; 4)$ et $C(7; 2)$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à :
 a. -36 b. 2 c. 36 d. 14 .
- Soit A , B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$. Alors :
 a. $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$
 b. $AB = 6$, $AC = 2$ et $BC = 7$
 c. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$
 d. Dans un repère orthonormé du plan : $A(1; 2)$, $B(5; 2)$ et $C(-2; 4)$.
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ est :
 a. une droite b. un cercle c. une parabole d. vide.

EXERCICE 796 : QCM

20 minutes

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(3; 6)$ et $\vec{v}(2; -3)$. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :
 a. -12 b. 0 c. 21 d. 24 .
- Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 5$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$, alors AC est égal à :
 a. $\sqrt{34}$ b. 4 c. $\sqrt{19}$ d. 15 .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, une équation du cercle de centre $A(3; -4)$ et de rayon 5 est :
 a. $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$ b. $x^2 + 6x + y^2 - 8y - 25 = 0$
 c. $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ d. $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 25 = 0$.
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la droite passant par le point $A(1; -3)$ et de vecteur normal $\vec{u}(3; 6)$ a pour équation :
 a. $3x + 6y + 15 = 0$ b. $3x - 6y - 15 = 0$
 c. $6x + 3y + 3 = 0$ d. $6x - 3y - 15 = 0$.
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-1; 4)$, $B(4; 1)$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 5y + 7 = 0$ et le vecteur $\vec{u}(3; -5)$:
 a. le vecteur $\vec{u}$ est normal à la droite $\mathcal{D}$;

- b. la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite (AB) ;
- c. la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à la droite (AB) ;
- d. le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 797 : VRAI/FAUX**20 minutes**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points : $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 4)$, $C(1 ; -1)$ et $D(4 ; 2)$.

Affirmation 1 : Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

Affirmation 2 : Une équation de la droite perpendiculaire à (AC) passant par le point B est $2x + 3y - 6 = 0$.

Affirmation 3 : Une équation du cercle de centre A passant par B est : $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 15 = 0$.

Affirmation 4 : Une équation de la droite parallèle à la droite d'équation $2x - 5y + 1 = 0$ passant par C est $-4x + 10y - 4 = 0$.

Affirmation 5 : $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 80^\circ$.

EXERCICE 798 : VRAI/FAUX**20 minutes**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Affirmation 1 : ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28\sqrt{3}$.

Affirmation 2 : $ABCD$ est un carré de centre O et de côté de longueur 1, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0,5$.

Affirmation 3 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$, alors $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 2\vec{v}) = -12$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les droites Δ et (D) d'équations respectives $3x - 2y + 3 = 0$ et $-6x + 4y + 1 = 0$ sont sécantes.

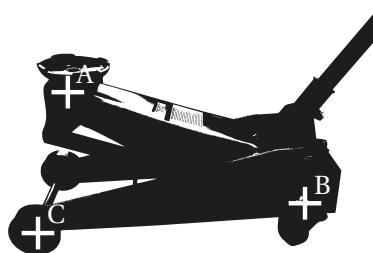
Affirmation 5 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la droite passant par le point $A(5 ; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a pour équation $5x - 2y - 16 = 0$.

EXERCICE 799**20 minutes**

Une société conçoit et fabrique des crics hydrauliques.

A , B , C sont les trois points repérés du cric sur le schéma.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points A , B et C par leurs coordonnées : $A(84 ; 233)$, $B(274 ; 123)$ et $C(0 ; 55)$.



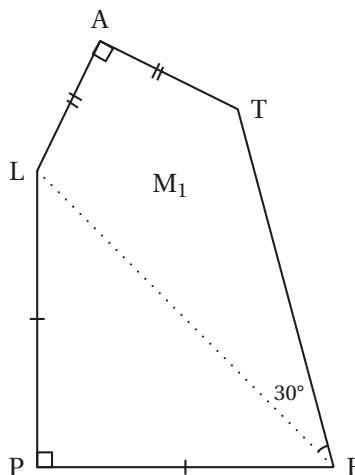
- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. Pour assurer un bon fonctionnement du cric, l'angle $\widehat{ABC}$ ne doit pas dépasser 45° . Cette contrainte est-elle respectée?

EXERCICE 800**20 minutes**

La maille *Pétale* M_1 est constituée :

- d'un triangle PLE rectangle et isocèle en P tel que $PE = PL = 4$;
 - d'un triangle LET tel que $\widehat{LET} = 30^\circ$ et $TE = 5$;
 - d'un triangle LAT rectangle et isocèle en A.
1. Calculer la longueur LE.
 2. En appliquant la formule d'Al-Kashi dans le triangle LET, calculer la longueur LT.
On arrondira le résultat au dixième.
 3. Calculer la longueur TA.
On arrondira le résultat au dixième.

**EXERCICE 801****20 minutes**

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-3 ; 4)$ et de rayon 5.

1. Démontrer qu'une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$.
2. Vérifier que le point $A(1 ; 7)$ appartient à $\mathcal{C}$.
3. Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A et de la droite (ΩA) ?
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes.

EXERCICE 802**20 minutes**

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le point $A(2 ; -4)$ et la droite Δ d'équation cartésienne $x + 2y + 1 = 0$.

1. Placer le point A et tracer la droite Δ dans le repère du plan.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à Δ .
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) , perpendiculaire à Δ et passant par A .
4. En déduire que le point H , projeté orthogonal de A sur la droite Δ , a pour coordonnées $(3 ; -2)$.
5. En déduire la distance entre le point A et la droite Δ .

EXERCICE 803**20 minutes**

Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1 ; 0)$, $B(7 ; 6)$ et $C(7 ; 2)$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC .

1. Placer les points A , B et C dans le plan puis construire $\mathcal{C}$.
2. Vérifier que la droite (D) d'équation $x + y - 7 = 0$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
3. Déterminer les coordonnées du point B' , milieu du segment $[AC]$.
4. Déterminer une équation de la droite (D') médiatrice du segment $[AC]$.
5. Déterminer les coordonnées du point Ω , centre de $\mathcal{C}$.
6. Calculer la valeur exacte du rayon de $\mathcal{C}$.
7. En déduire une équation de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 804**20 minutes**

Dans le plan est rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; -1)$ et $C(-3 ; 4)$.

1. a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$.
b. Déterminer la valeur exacte des $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
c. Démontrer que $\cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$.
2. a. Vérifier qu'une équation cartésienne de la droite (AC) est $3x + y + 5 = 0$.
b. Déterminer les coordonnées du point H , pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet B .

4.5 Aller plus loin**EXERCICE 805****15 minutes**

Soit $ABCD$ un carré de côté a et de centre O . On associe à tout point M du plan la fonction f définie par $f(M) = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

1. Démontrer que, $\overrightarrow{f(M)}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{f(M)}\|$.

EXERCICE 806 : FORMULE DE HÉRON**25 minutes**

Soit ABC un triangle d'aire $\mathcal{A}$ on note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, p le demi-périmètre du triangle ABC soit $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

1. Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$.
2. A l'aide de la formule d'Al-Kashi, démontrer que $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
3. Démontrer que $(\sin \hat{A})^2 = \frac{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)}{4b^2c^2}$.
☞ On pourra utiliser une formule de trigonométrie puis une identité remarquable.
4. En déduire que $(\sin \hat{A})^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2c^2}$.

5. A l'aide des questions précédentes, démontrer la formule de Héron :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin \hat{A} \leq 1.$$

6. Déterminer l'aire du triangle ABC tel que $AB = 5$, $BC = 6$ et $AC = 7$.

EXERCICE 807**15 minutes**

1. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \left(\det(\vec{u}, \vec{v})\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2.$$

- b. En déduire que pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v})$.

2. Soit ABC un triangle quelconque d'aire $\mathcal{A}$.

$$\text{Démontrer que } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|.$$

3. Soit $A(2; 8)$, $B(-3; 5)$ et $C(7; -2)$. Déterminer l'aire du triangle ABC .

EXERCICE 808**15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle point entier tout point M dont les coordonnées x et y sont deux entiers relatifs.

Un polygone à sommets entiers est un polygone dont tous les sommets sont des points entiers.

1. Montrer que l'aire d'un parallélogramme à sommets entiers, non aplati, est toujours supérieure ou égale à 1.

$\Leftrightarrow$ On utilisera le résultat de l'exercice précédent.

2. Soit ABC un triangle équilatéral. En exprimant l'aire du triangle de deux manières différentes, montrer que

$$\frac{2 \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|}{AB^2} = \sqrt{3}.$$

3. En déduire qu'il n'existe pas de triangle équilatéral à sommets entiers.

EXERCICE 809 : FORMULE DE BRAHMAGUPTA**15 minutes**

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle. On note a, b, c, d les longueurs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, p le demi-périmètre et $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère.

1. Etablir la formule $2(ab + cd) \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$.

2. Démontrer que $\mathcal{S} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

3. Soit $A(1; 0)$, $B(4; 1)$, $C(4; 3)$ et $D(1; 4)$.

- a. Vérifier que les quatre points appartiennent au cercle de centre $\Omega(2; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

- b. Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 810**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque du plan, $\mathcal{D}$ une droite coupe (BC) , (AC) et (AB) respectivement en P , Q et R .

On définit les points I , J et K tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$.

Démontrer que les points I , J et K sont alignés.

EXERCICE 811**15 minutes**

Déterminer les équations des droites passant par A et tangentes au cercle $\mathcal{C}$ lorsque :

1. $A(2;3)$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.
2. $A(0;0)$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

EXERCICE 812**20 minutes**

Définition et propriété du barycentre : Soit $(A_i; \alpha_i)$, $(1 \leq i \leq n)$, un système de points pondérés

de masse totale $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ non nulle.

(1) Il existe un unique point G , appelé **barycentre** du système, tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

On peut noter : $G = \text{bar} \left\{ (A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n) \right\}$.

(2) Pour tout point M , on a $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Remarque : Si $\forall i \in \mathbb{N}^*, \alpha_i = 1$, G est le centre de gravité du polygone $A_1 A_2 \dots A_n$.

1. Démontrer l'unicité du point G .
2. Démontrer la relation (2).
3. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on pose $A_i(x_{A_i}; y_{A_i})$. Déduire de la question précédente les coordonnées de G .
4. Démontrer qu'on ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.
5. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire le point $G = \text{bar} \left\{ (A; 1), (B; 1), (C; 2), (D; 4) \right\}$.

EXERCICE 813**10 minutes**

Soit ABC un triangle et G le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 3)$ et $(C; -2)$.

1. Construire le barycentre I de $(B; 3)$ et $(C; -2)$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$.

EXERCICE 814**5 minutes**

Soit les points $A(2;3)$, $B(-1;4)$ et $C(4;-7)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G , isobarycentre du triangle ABC .
2. Déterminer les coordonnées du barycentre des points $(A;2)$, $(B;3)$ et $(C;1)$.

EXERCICE 815**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, L le milieu de $[AC']$ et M le symétrique de A' par rapport à C .

1. Ecrire L comme barycentre de A et B et M comme barycentre de B et C .
2. Calculer $\overrightarrow{B'M} + 2\overrightarrow{B'L}$.
3. En déduire que les points B' , L et M sont alignés.

EXERCICE 816**20 minutes**

Soit A , B , C et D quatre points non alignés du plan, G le centre de gravité du triangle ABC et I le barycentre de $(A;2)$ et $(D;1)$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
2. Exprimer $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.
3. En déduire l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$.
4. En s'inspirant des questions précédentes, déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 817**15 minutes**

Soit ABC un triangle et M un point du plan.

On pose $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{f(M)}$ en utilisant le point I barycentre de $(A;1)$, $(B;3)$ et $(C;4)$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{g(M)}$ est un vecteur constant, que l'on précisera.
3. En déduire l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
4. En s'inspirant des questions précédentes, déterminer l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 818**15 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, $G = \text{bar}\{(A;2), (B;1)\}$, $H = \text{bar}\{(A;2), (B;1), (C;4)\}$ et

$I = \text{bar}\{(A;2), (B;1), (C;3)\}$.

1. Démontrer que
 - a. $\|2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\| = 0$
 - b. si $M \neq G$ alors $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \neq 0$
 - c. En déduire que G réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.
2. Quel point réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\|$?
3. Démontrer que I réalise le minimum de $\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 819**20 minutes**

Soit ABC un triangle quelconque, on pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

1. Soit D le barycentre de (B, b) et (C, c) . On définit les points B_0 et C_0 par $\overrightarrow{AB_0} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC_0} = \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$.
 - a. Démontrer que D vérifie $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
 - b. Quelle est la nature du quadrilatère AB_0DC_0 ?
 - c. En déduire que (AD) est la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC .
2. En déduire le centre du cercle inscrit du triangle ABC est le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) .

EXERCICE 820**25 minutes**

On désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ avec k un réel strictement positif.

1. Déterminer Γ_1 . On suppose pour la suite de l'exercice que $k \neq 1$.
2. Montrer que $M \in \Gamma_k \iff (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$.
3. En déduire que Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$, avec $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A; 1), (B; -k)\}$.
4. Construire l'ensemble des points M tels que $k = 3$.
5. Construire l'ensemble des points M tels que $k = \frac{a}{b}$ avec a et b deux réels distincts strictement positifs.

EXERCICE 821**15 minutes**

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites perpendiculaires et sécantes en O , M un point du plan distinct de O , M_1 et M_2 les projetés orthogonaux de M respectivement sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M_1M_2 = a$ avec a réel strictement positif.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que (M_1M_2) soit parallèle à une droite Δ donnée.

☞ On pourra travailler avec des coordonnées en choisissant judicieusement un repère.

EXERCICE 822**15 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A avec $AB = AC = a$, où a est un réel donné strictement positif.

1. Déterminer le barycentre G du système $\{(A; 4), (B; -1), (C; -1)\}$.
2. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M tels que $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$.
3. Démontrer que la fonction f définie par $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est une fonction constante que l'on précisera.
4. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$.

EXERCICE 823**15 minutes**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$, F le point de coordonnées $(0; \frac{1}{4})$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}$, M un point de $\mathcal{P}$ distinct de O , H et m les projetés orthogonaux de M respectivement sur $\mathcal{D}$ et sur l'axe des abscisses. La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en M coupe l'axe des abscisses en T .

1. Déterminer, en fonction de x , les coordonnées des points m , H et T .
En déduire que T est le milieu de $[FH]$ et de $[Om]$.
2. Démontrer que $\mathcal{T}$ est la médiatrice de $[FH]$.
En déduire une construction géométrique des points et tangentes de $\mathcal{P}$.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $MH = MF$.

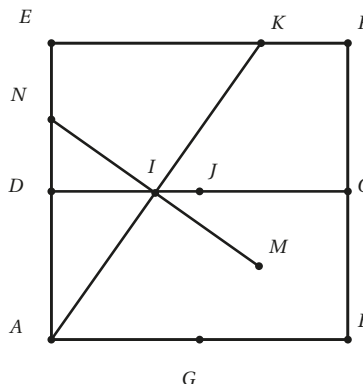
☞ La droite $\mathcal{D}$ est appelée la directrice et F le foyer de la parabole $\mathcal{P}$.

EXERCICE 824**25 minutes**

Soit $ABFE$ un carré de centre J et de côté de longueur 2, D , C et G les milieux respectifs de $[AE]$, $[BF]$ et $[AB]$.

Soit I un point quelconque de $[DC]$. La droite (AI) coupe (EF) en K , la perpendiculaire à (AI) passant par I coupe la droite (AE) en N . On désigne par M le symétrique de N par rapport à I .

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{P}_1$ des points M obtenus lorsque I décrit le segment $[DC]$.

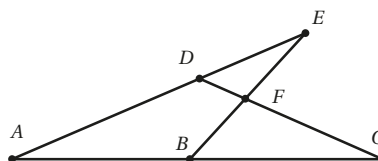


1. a. Préciser les positions de M lorsque I est en D puis en J .
b. Quelle est la nature du quadrilatère $AMKN$?
c. En déduire que $MA = MK$ et que K est le projeté orthogonal de M sur la droite (EF) .
d. Montrer que $\mathcal{P}_1$ est inclus dans une parabole $\mathcal{P}$ dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On munit le plan du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AD})$.
a. Donner une équation de $\mathcal{P}$.
b. Préciser l'ensemble des abscisses de M quand I décrit $[DC]$ et donner les coordonnées des extrémités de $\mathcal{P}$.

EXERCICE 825 : THÉORÈME D'UNQUHART**20 minutes**

L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème d'Unquhart :

Si $AB + BF = AD + DF$
alors $AC + CF = AE + EF$



1. Démontrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.
2. Soit RST un triangle. On note $(\widehat{SRT}) = r$, $(\widehat{TSR}) = s$ et $(\widehat{STR}) = t$.

Démontrer que $\frac{ST+TR}{RS} = \frac{\cos \frac{r-s}{2}}{\cos \frac{r+s}{2}}$.

3. Démontrer que si $\cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{c+d}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{c-d}{2}$

alors $\sin \frac{a-d}{2} \sin \frac{c+b}{2} = \sin \frac{a+d}{2} \sin \frac{c-b}{2}$.

4. Démontrer le théorème d'Urquhart.

EXERCICE 826 : THÉORÈME DE PTOLÉMÉE**20 minutes**

« Soit un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit de ses diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés ».

Soit $ABCD$ le quadrilatère, O le centre du cercle et R son rayon, α, β, γ et δ les mesures comprises entre 0 et 2π des angles $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA})$.

1. Exprimer $AC \times BD$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et R .
2. Exprimer $AB \times CD + AD \times BC$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et R .
3. Démontrer que pour tous réels x et y : $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$.
4. Conclure.

EXERCICE 827**15 minutes**

Soit ABC un triangle, I le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. Démontrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.
2. Démontrer que $AB \times AC = IB \times IC + AI^2$.
3. En calculant l'aire du triangle ABC de deux manières différentes, démontrer que

$$AI = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}.$$

EXERCICE 828**15 minutes**

Soit R le rayon du cercle inscrit au triangle ABC , d'aire S et de demi-périmètre p .

On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Etablir que $S = pR$.
2. Montrer que $R = \frac{bc}{a+b+c} \sin A$.

EXERCICE 829

15 minutes

La mairie d'un village fait appel à un graphiste pour le logo du nouveau skate-parc. Le graphiste propose le modèle suivant :



Partie A : Etude de la rampe de skateboard

Afin d'étudier au mieux ce logo, on se place dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce repère, la rampe de skateboard est constituée du segment horizontal $[OA]$, du segment vertical $[OB]$ et de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f reliant le point A au point B .

Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(4 ; 0)$ et $B(0 ; 3)$.

Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B sont horizontales.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres réels à déterminer.

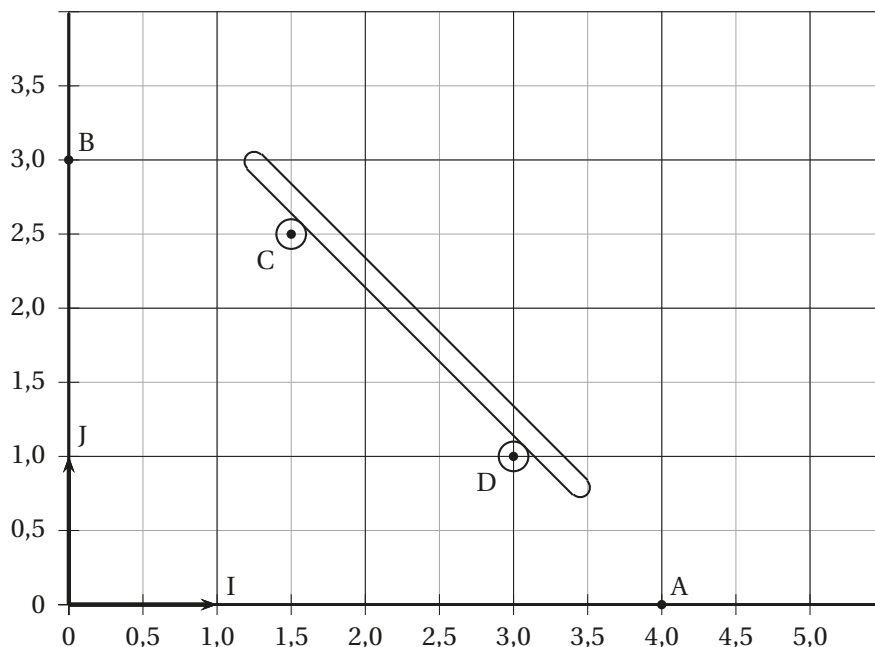
1. Donner l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f .
2.
 - a. Ecrire un système d'équations vérifié par les nombres réels a, b, c et d .
 - b. Résoudre ce système d'équations.
3. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{18}{32}x^2 + 3$.

a. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

On arrondira les résultats au dixième.

b. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère ci-dessous.



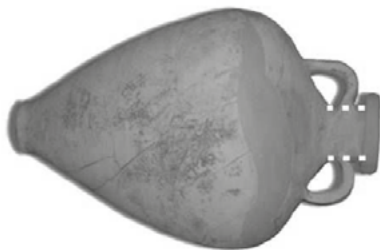
Partie B : Etude de quelques éléments de la planche de skateboard

1. Les roues de la planche de skateboard sont constituées de deux cercles de centres respectifs $C(1,5; 2,5)$ et $D(3; 1)$ et de rayon 1.
 - a. Donner une équation cartésienne du cercle de centre C et de rayon 0,1.
 - b. Donner une équation cartésienne du cercle de centre D et de rayon 0,1.
2. La planche est constituée de deux segments parallèles à la droite (CD) reliés par deux demi-cercles. On appelle E le point d'abscisse 2 situé sur la rampe de skateboard.
 - a. Calculer l'ordonnée du point E .
 - b. La tangente à la rampe au point E est-elle parallèle à la planche de skateboard?

EXERCICE 830

25 minutes

Une entreprise souhaite reproduire des amphores gallo-romaines sur le modèle original ci-dessous.



L'amphore est obtenue par rotation autour d'un axe horizontal d'un profil $\mathcal{P}$ constitué de la réunion de la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f et de deux segments $[AB]$ et $[CD]$.

Le but de l'exercice est de compléter le tracé du profil $\mathcal{P}$ sur le graphique donné en fin d'exercice.

Sur ce graphique, le segment vertical $[AB]$ représente le fond de l'amphore et le segment horizontal $[CD]$ représente le col de l'amphore, matérialisé par des pointillés sur la photo ci-dessus.

Dans le repère orthonormé de ce graphique, le point A a pour coordonnées $\left(-4; \frac{1}{2}\right)$, le point B a pour coordonnées $(-4; 0)$, le point C a pour coordonnées $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ et le point D a pour coordonnées $\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

Partie A : Etude du profil du corps de l'amphore

La fonction f est définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = -\frac{1}{16}(x^3 + 6x^2 - 40)$.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé précédent.

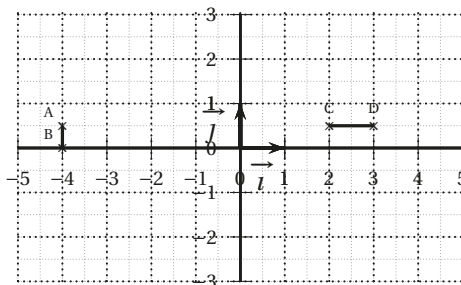
1. **a.** Calculer $f'(x)$.
b. Etudier le signe de $3x^2 + 12x$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-4; 2]$.
d. En quelle valeur la fonction f atteint-elle son maximum?
Donner la valeur de ce maximum.
2. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A et C .
3. Quel est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point C ?
4. Tracer, sur le graphique ci-dessous, la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$?

Partie B : Tracé d'une anse et du profil de l'amphore

On modélise l'anse supérieure de l'amphore par un arc du cercle Γ d'équation :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}.$$

1. Donner les coordonnées du centre Ω de ce cercle et la valeur exacte de son rayon r .
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle Γ et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
En déduire les coordonnées du point E , intersection du cercle Γ et du segment $[CD]$.
3. Compléter le graphique, en traçant l'arc du cercle Γ représentant l'anse supérieure de l'amphore.
4. Compléter le graphique en traçant le symétrique du profil $\mathcal{P}$ et de l'anse par rapport à l'axe des abscisses.

**EXERCICE 831****15 minutes**

On s'intéresse dans cet exercice à la conception de ce minuteur formé d'un cône et d'une sphère tronquée. Le rayon de la sphère est de 3 cm et la hauteur totale du minuteur est 9 cm. Ce minuteur est un solide de révolution, construit par rotation autour d'un axe vertical d'un arc de cercle et d'un segment.

**Partie A**

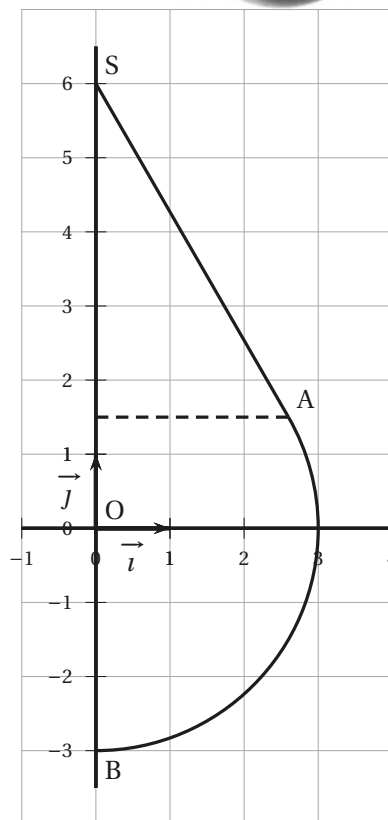
Sur le graphique ci-contre, on a représenté le profil du minuteur dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Un arc de cercle de centre O et de rayon 3 joint les points A et B. Un segment joint les points A et S. Les points B et S ont pour coordonnées $B(0; -3)$ et $S(0; 6)$. Le point I est le milieu du segment [OS].

H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAS.

On a un raccord « lisse » entre la partie sphérique et la partie conique. La droite (AS) est donc tangente à l'arc de cercle au point A.

Dans cette partie, on cherche à déterminer les coordonnées exactes du point de raccord A. Pour des raisons d'ergonomie, on souhaite aussi que l'angle au sommet du cône n'excède pas 65° .



1. Justifier que le triangle OAS est rectangle en A .
2. En déduire que A appartient au cercle de centre I et de rayon 3.
3. Prouver que le triangle OAI est équilatéral.
4. L'angle au sommet du cône est-il bien inférieur à 65° ?
5. Montrer que le point A a pour coordonnées $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Partie B

Le concepteur souhaite que la masse du minuteur soit inférieure à 300 grammes.

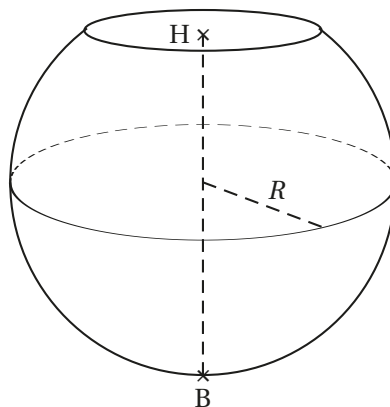
1. Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de sa hauteur par l'aire de sa base.
 - a. Déduire de la question précédente la hauteur du cône et le rayon de sa base.
 - b. En déduire que son volume vaut $V_c = \frac{81\pi}{8}\text{cm}^3$.
 - c. Déterminer la masse de la partie conique du minuteur, réalisée en plastique, sachant que la masse volumique du plastique est de 900 kg/m^3 (arrondir le résultat au gramme près).

2. Le volume d'une sphère tronquée est donné

$$\text{par } V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

où R désigne le rayon de la sphère tronquée, et h sa hauteur (sur la figure ci-contre, $h = HB$).

- a. Déduire de la question A. 5 la valeur de h .
- b. En déduire que le volume de la sphère tronquée vaut $V_s = \frac{243\pi}{8}\text{cm}^3$.

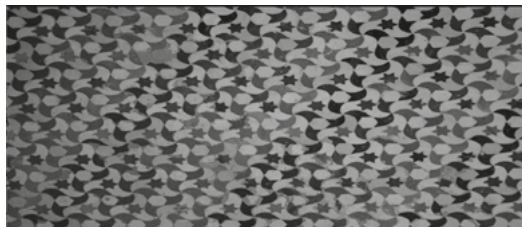


- c. Cette partie du minuteur comporte une cavité de 30 cm^3 . Déterminer la masse de cette partie, réalisée en aluminium, sachant que la masse volumique de l'aluminium est de $2\,700\text{ kg/m}^3$ (arrondir le résultat au gramme près).
- d. Dans la cavité, on loge un mécanisme de 100 grammes. La masse totale du minuteur est-elle bien inférieure à 300 grammes?

EXERCICE 832

20 minutes

Le palais de l'Alhambra à Grenade est réputé pour ses ornements muraux représentant différents pavages du plan. L'un des plus célèbres est représenté ci-dessous. Il est constitué de motifs *pajarita*.



Partie A : Construction d'un motif *pajarita* à partir d'un triangle équilatéral

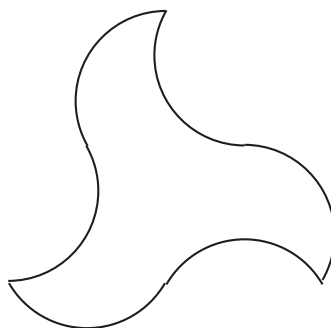
On veut compléter un triangle équilatéral ABC afin de construire le motif *pajarita* représenté ci-après.

1. Placer les points A' , B' et C' milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
2. Construire les droites Δ , Δ' et Δ'' médianes respectives des segments $[AB']$, $[BC']$ et $[CA']$.

On note :

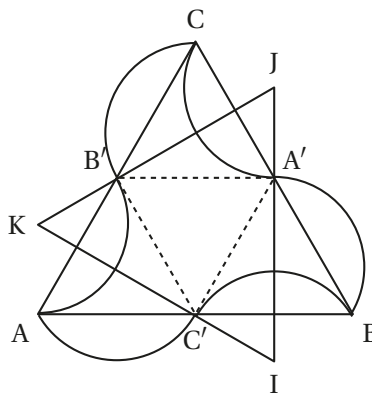
- I le point d'intersection de Δ et Δ'
- J le point d'intersection de Δ' et Δ''
- K le point d'intersection de Δ'' et Δ .

3. Construire les arcs de cercle, internes au triangle ABC , de centres respectifs I , J et K et reliant respectivement les points B et C' , C et A' et A et B' puis leurs symétriques respectifs par rapport aux points C' , A' et B' pour obtenir le motif *pajarita*.



Partie B : Quelques propriétés géométriques

On considère le motif *pajarita* obtenu à partir du triangle équilatéral ABC , construit dans la partie A et représenté ci-contre. Les sommets de ce motif *pajarita* sont les points A , B et C . Les points I , J et K construits dans la question 2. de la partie A sont les centres respectifs des arcs de cercle reliant les points B et C' , C et A' et A et B' .



1. Tangente commune

- a. Sur quel segment de la figure ci-contre se trouve le centre de l'arc de cercle reliant les points B' et C ? Justifier.
- b. Prouver que les arcs de cercle reliant les points A et B' et B' et C ont la même tangente au point B' . Justifier.

2. Tangente au sommet

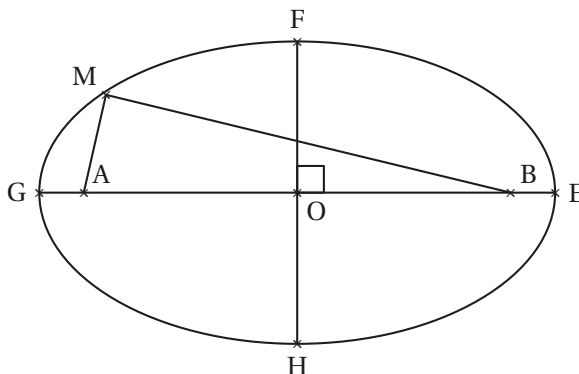
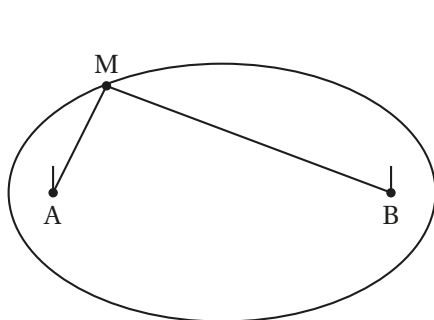
- a. Justifier que les droites $(A'B')$ et (IJ) sont perpendiculaires.
- b. En déduire que l'angle $\widehat{B'CJ}$ est droit.
- c. Quelle est la tangente en C l'arc reliant les points A' et C ? Justifier.

EXERCICE 833**20 minutes**

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux méthodes de construction d'une ellipse.

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.

Partie A : Construction d'une ellipse par la méthode du « jardinier ».

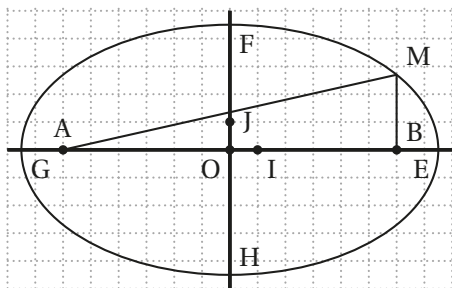


Pour tracer une ellipse, Paul plante deux piquets en A et B . Il fixe une extrémité d'une ficelle au piquet A et l'autre extrémité au piquet B . Il tend la ficelle avec un bâton, il déplace le bâton en maintenant la ficelle tendue et il contourne les deux piquets. Son bâton trace une ellipse sur le sol.

Paul a tracé une ellipse dont les axes mesurent respectivement 15 m et 9 m.

1. a. Exprimer la longueur ℓ de la ficelle en utilisant les points M , A et B .
b. En considérant les cas où M est en G et en E , montrer que $GA = BE$ puis que $\ell = 15$ mètres.
2. a. Exprimer ℓ lorsque M est en F . Déterminer la longueur FA .
b. Montrer que $OA = 6$ mètres.

- c. Quel est l'écartement entre les deux piquets A et B ?
3. L'ellipse est tracée dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.



- a. Lire les coordonnées des points A , B , E et F .
- b. On admet qu'une équation cartésienne de l'ellipse est $\frac{x^2}{7,5^2} + \frac{y^2}{4,5^2} = 1$.
Le point $M(6; 2,7)$ appartient-il à l'ellipse?

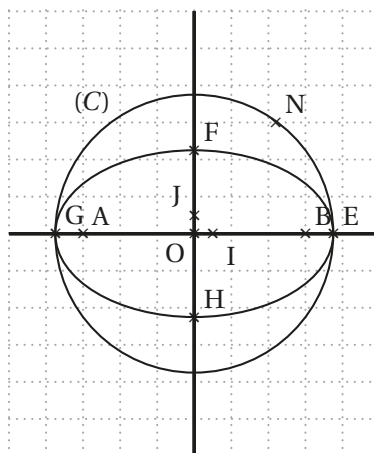
Partie B : Construction de cette ellipse à partir d'un cercle

Dans cette partie, on cherche à établir une autre méthode pour construire l'ellipse étudiée dans la partie A.

1. On considère le point $N(7,5 \cos(t); 7,5 \sin(t))$ où t est un nombre réel fixé.
Montrer que le point N appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $7,5$.

2. On a placé un point N sur la figure ci-contre.
La perpendiculaire à (Ox) en N coupe l'axe des abscisses en K .
On considère le point P du segment $[NK]$ tel que $\overrightarrow{KP} = 0,6\overrightarrow{KN}$.

- a. Quelles sont, en fonction de t , les coordonnées du point K ? du vecteur $\overrightarrow{KN}$?
- b. Montrer que les coordonnées du point P sont $(7,5 \cos(t); 4,5 \sin(t))$.
- c. En déduire, par le calcul, que le point P appartient à l'ellipse.



EXERCICE 834

25 minutes

Soit ABC un triangle dont les mesures des trois côtés sont des entiers tels que l'angle $\hat{B}$ est le double de $\hat{C}$.

Donner, dans l'ordre croissant les mesures des trois côtés sachant que AC a la plus petite valeur possible.

EXERCICE 835 : VRAI-FAUX

15 minutes

Soit A, B, C trois points distincts non alignés du plan et $x \in \mathbb{R}$. On définit les points M et N par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Pour $x = 3$, M est le barycentre du système pondéré $\left\{ \left(B, \frac{1}{2} \right), (C, -2) \right\}$.
2. Pour $x = \frac{1}{2}$, il existe deux réels b et c tels que M soit le barycentre du système pondéré $\{(B, b), (C, c)\}$.
3. Pour toute valeur de x , le point N appartient à la droite (BC) .
4. Il existe une valeur de x pour laquelle $BCNM$ est un parallélogramme.

EXERCICE 836 : VRAI-FAUX**15 minutes**

Soit :

- ABC un triangle équilatéral de côté 3;
- G le centre de gravité du triangle ABC ;
- H le symétrique de A par rapport à G ;
- I le milieu du segment $[BC]$;
- $\mathcal{P}$ le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (HC) .

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Le point H est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, -2); (C, -2)\}$.
2. On a : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = 3$.
3. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a : $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HC} = 3$.
4. Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{HC} = -9$.

EXERCICE 837**20 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A , dont l'hypoténuse mesure 4 cm. On désigne par O le milieu du segment $[BC]$ et par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC .

Soit I le milieu du segment $[OA]$.

A tout point M du plan, on associe les points P et Q définis par :

$$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

1. Montrer que I est barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et 1.
2. Exprimer $\overrightarrow{IP}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$, puis $\overrightarrow{MQ}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$.
3. En déduire que les points P et Q sont les images respectives de M par une homothétie et une translation dont on précisera les éléments.
4. Dans cette question, M décrit le cercle $\mathcal{C}$.
 - a. Déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2 que décrivent respectivement les points P et Q .
 - b. Montrer que le segment $[PQ]$ conserve une longueur constante.
 - c. Montrer que le segment $[PQ]$ contient toujours le point O' symétrique de O par rapport à A .

EXERCICE 838**25 minutes**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose $\vec{OA} = \vec{i}$ et $\vec{OB} = 2\vec{j}$.

- Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$. On pose : $d_1 = \det(\vec{MA}, \vec{MB})$;
 $d_2 = \det(\vec{MB}, \vec{MO})$ et $d_3 = \det(\vec{MO}, \vec{MA})$.
 - Calculer d_1 , d_2 et d_3 en fonction de x et y et prouver que $d_1 + d_2 + d_3 \neq 0$.
 - En déduire la relation : $\vec{OM} = \frac{1}{2}(d_2\vec{OA} + d_3\vec{OB})$ (1).
- Soit I le point tel que $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et α un réel strictement positif.
 On suppose que M est le barycentre du système pondéré $\{(0, \alpha), (A, 1), (B, 2)\}$.
 - Démontrer que M appartient au segment $[OI]$.
 - Exprimer $\vec{OM}$ en fonction de $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et α .
 - En déduire, en utilisant la relation (1), que $d_3 = 2d_2$ et $d_1 = \alpha d_2$.
 - Démontrer que $Aire(MAB) = \alpha \times Aire(MOB)$ et $Aire(MOA) = 2 \times Aire(MOB)$.

EXERCICE 839**15 minutes**

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est un angle droit direct; I désigne le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

- Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathcal{E}$.
- Déterminer $\mathcal{E}$.
- En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

EXERCICE 840**25 minutes**

Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A , de hauteur $[AH]$ tel que $AH = BC = 4$. On prendra le centimètre pour unité.

- En justifiant la construction, placer le point G , barycentre du système de points pondérés $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$.
- On désigne le point M un point quelconque du plan.
 - Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
 - Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{V}\|$
- On considère le système de points pondérés $\{(A; 2); (B; n); (C; n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
 - Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0 , G_1 , G_2 .
 - Montrer que le point G_n appartient au segment $[AH]$.
 - Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
 Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

- d. Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\overrightarrow{V}\|$.
Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un cercle qui passe par le point A , dont on précisera le centre et le rayon, noté R_n .
- e. Construire $\mathcal{E}_2$.

EXERCICE 841**25 minutes**

Soit A, B et C trois points distincts non alignés du plan, on note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a = BC, b = CA$ et $c = AB$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

- Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment $[BC]$.
 - Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2 .
 - En déduire : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
 - Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2 .
 - Montrer que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.
- On choisit $a = 5, b = 4$ et $c = 3$, placer trois points A, B, C et dessiner $\mathcal{E}$ dans ce cas particulier.

EXERCICE 842**25 minutes**

- On considère dans le plan un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R .
Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite passant par M et coupant le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B .
Soit A' le symétrique de A par rapport à O .
 - Etablir que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.
 - En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.
- Soit $EFGH$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et dont les diagonales (EG) et (FH) se coupent en un point I .
Démontrer que $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IH}$.
- Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2 , de rayons R_1 et R_2 .
 - Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$.
 - Représenter $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{E}$ pour $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 2$ cm et $O_1O_2 = 6$ cm.

EXERCICE 843**25 minutes**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$, I le milieu de $[AC]$ et G le barycentre du système $\{(A, 3); (B, -2); (C, 1)\}$.

- Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$.
- Exprimer les distances GA, GB et GC en fonction de a .
- A tout point M du plan, on associe le nombre réel $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.
 - Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a .

- b. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{T}$ des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$.
4. A tout point M du plan, on associe le nombre réel : $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
- a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $h(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} - 2a^2$.
- b. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = -2a^2$.
Vérifier que les points I et B appartiennent à $\mathcal{P}$, préciser la nature de cet ensemble.
Construire $\mathcal{P}$.
5. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont sécants en deux points E et F . Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

EXERCICE 844**25 minutes**

Soit A et B deux points distincts du plan et G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 2); (B, -1)\}$.

- Démontrer que le point A est le milieu du segment $[GB]$.
- Montrer que l'ensemble Γ des points N tels que $\frac{NB}{NA} = \sqrt{2}$ est un cercle de centre G dont on précisera le rayon en fonction de AB .
- Soit C un point de Γ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.
 - Montrer que le point C appartient à $\mathcal{L}$.
 - En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$, montrer que pour tout point M de $\mathcal{L}$, on a $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.
 - Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{L}$.

EXERCICE 845**20 minutes**

Soit $ABCD$ un quadrilatère, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$ et M le milieu de $[LK]$.

Le but de l'exercice est de montrer que les points M , I et J sont alignés et de donner la position du point M sur la droite (IJ) .

- Justifier l'existence du barycentre G du système $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1); (D, 2)\}$.
En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux droites (KL) et (IJ) .
- Montrer que G est en M , que M , I et J sont alignés et donner la position de M sur $[IJ]$.
- Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 846**20 minutes**

Soit $ABCD$ un carré, de côté de longueur $2a$, O le milieu du côté $[AD]$.

- Déterminer trois réels a , b et c pour que le point O soit barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que :
 $2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 4a^2$.

EXERCICE 847**20 minutes**

1. Déterminer les valeurs de x , en radians, vérifiant la relation :
 $2 \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin^2 x = 0$.
2. Déterminer, au centième de degré près, les valeurs de x vérifiant la relation :
 $2 \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin^2 x = 0, 1$.

EXERCICE 848**20 minutes**

1. Soit l'équation $(E) : a \cos x + b \sin x = c$.
 - a. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer qu'alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.
 - b. En déduire que (E) s'écrit alors $(a+c)t^2 - 2bt + (c-a) = 0$.
 - c. Résoudre cette équation.
 - d. En déduire les solutions de (E) .
2. Application : $(m-1) \cos x + (m-1) \sin x = \frac{1}{2}(3m+1)$.
 Pour quelles valeurs de m cette équation a-t-elle des solutions?

EXERCICE 849**20 minutes**

Résoudre l'inéquation $\sqrt{3+2\cos x} > 2 \sin x$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 850**15 minutes**

Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$.

☞ Rappel : pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\tan x = y \iff x = \arctan y$.

Chapitre 5

Probabilités

5.1 Probabilités conditionnelles

5.1.1 Point de cours

Définition : une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

Soit A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$, la probabilité de l'événement B sachant A réalisé, notée $P_A(B)$ est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

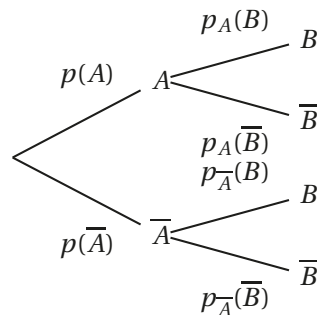
Propriété : une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

Soit A et B deux événements tels $P(A) \neq 0$ alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Remarque : si $P(B) \neq 0$ alors : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

La notion de probabilité conditionnelle a déjà été rencontrée lorsqu'une situation est modélisée par un arbre.

Ainsi, en considérant deux événements A et B , l'arbre ci-contre modélise la situation :



Probabilité totale :

$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ et les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles, on en déduit alors que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Indépendance :

- Dire que deux événements A et B sont **indépendants** signifie que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

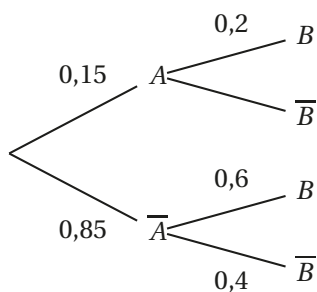
- Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

5.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 851 : QCM

5 minutes

On considère l'arbre de probabilités suivant :



Q1 : $P_A(\overline{B})$ a pour valeur :

- 0,85
- 0,4
- 0,8

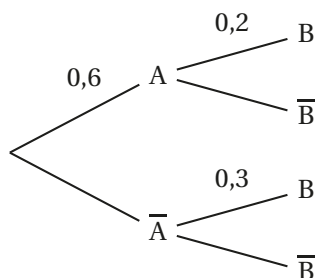
Q2 : $P(B)$ a pour valeur :

- 0,54
- 0,8
- 0,12

EXERCICE 852

5 minutes

On considère l'arbre de probabilités ci-dessous :



Quelle est la probabilité de l'événement B?

EXERCICE 853

10 minutes

Une société de hotline fait une enquête sur le niveau de satisfaction des personnes qui ont recours à leurs services par téléphone. Elle dispose de deux centres d'appel : un situé à Marseille, un autre situé à Lille.

L'enquête consiste à demander à chaque personne ayant téléphoné si elle est satisfaite ou non du service que la hotline lui a proposé.

La société estime que 58 % des appels reçus l'ont été par le centre de Marseille.

De plus, parmi les appels reçus par le centre de Marseille, on constate un taux de 34 % de personnes satisfaites; alors que pour le centre de Lille, on constate un taux de 44 % de personnes satisfaites.

On choisit au hasard une personne ayant téléphoné.

On considère les événements suivants :

M : « la personne a téléphoné au centre de Marseille »,

S : « la personne est satisfaite du service proposé ».

1.
 - a. Etablir un arbre de probabilité illustrant la situation.
 - b. Déterminer la probabilité que la personne ait téléphoné au centre de Marseille et soit satisfaite.
 - c. Montrer que la probabilité que la personne ayant téléphoné soit satisfaite est $p = 0,382$.
2. Sachant que la personne ayant téléphoné a été satisfaite, quelle est la probabilité que cette personne ait téléphoné au centre de Lille? Arrondir le résultat à 0,001 près.

EXERCICE 854 : QCM**10 minutes**

Dans une population, on estime qu'il naît 51 % de garçons et 49 % de filles. Dans cette population si le premier enfant d'une famille est une fille, dans 75 % des cas il y a un deuxième enfant. Si le premier enfant est un garçon, il y a un deuxième enfant dans 20 % des cas.

On choisit, au hasard dans cette population, une famille ayant au moins un enfant.

On considère les événements suivants :

F : « le premier enfant de cette famille est une fille »,

D : « cette famille a eu un deuxième enfant ».

1. On a $P(D) =$

a. 0,469 5	b. 0,75	c. 0,367 5	d. 0,530 25
------------	---------	------------	-------------
2. La probabilité que la famille choisie ait au moins deux enfants et que le premier soit une fille est :

a. 0,122 5	b. 0,49	c. 0,367 5	d. 1,24
------------	---------	------------	---------

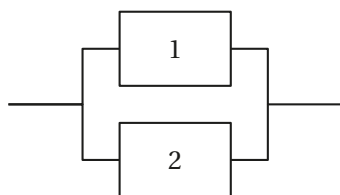
EXERCICE 855**10 minutes**

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que

$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

EXERCICE 856**5 minutes**

Démontrer la propriété : si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

EXERCICE 857**5 minutes**

Les événements A et B étant indépendants, calculer $A \cap B$ et $A \cup B$ sachant que :

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $p(A) = 0,2$ et $p(B) = 0,9$; | 3. $p(A) = p(B) = 0,5$; |
| 2. $p(A) = 0,35$ et $p(B) = 0,25$; | 4. $p(A) = p(\bar{B}) = 0,6$. |

EXERCICE 858**5 minutes**

Soit A et B deux événements tels que $p(A) = \frac{2}{3}$, $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(B) = p$ avec $0 \leq p \leq 1$.

Calculer p dans les cas suivants :

1. A et B sont indépendants.
2. A et B sont incompatibles.
3. A est une partie de B .

EXERCICE 859**5 minutes**

Un objet est composé de trois éléments électroniques C_1 , C_2 et C_3 . Sachant que 5% des composants C_1 , 3% des composants C_2 et 2% des composants C_3 sont défaillants.

Les défaillances des trois éléments sont indépendantes et une seule défaillance empêche l'objet de fonctionner.

Quelle est la probabilité que l'objet fonctionne correctement ?

EXERCICE 860**5 minutes**

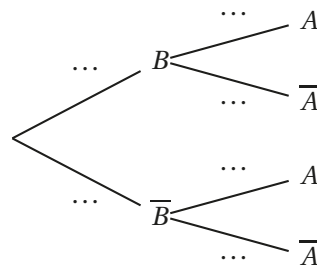
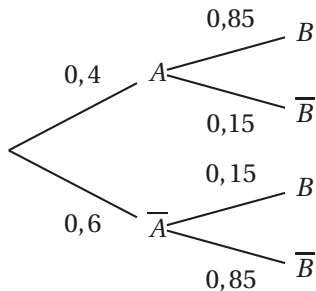
Les événements A et B sont-ils indépendants sachant que :

1. $p(A) = 0,2$, $p(B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,14$;
2. $p(\overline{A}) = 0,35$, $p(B) = 0,25$ et $p(A \cap B) = 0,163$;
3. $p(\overline{A}) = p(\overline{B}) = 0,15$ et $p(A \cup B) = 0,9775$;
4. $p(A) = p(\overline{B}) = 0,3$ et $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,21$.

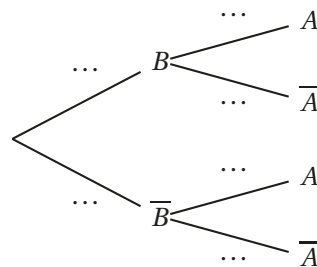
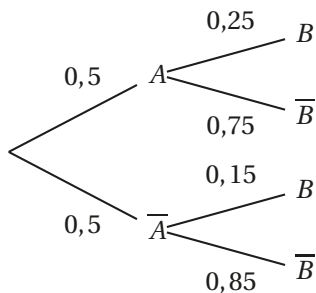
5.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 861****15 minutes**

Dans chaque cas compléter le second arbre en utilisant les données du premier :

1.

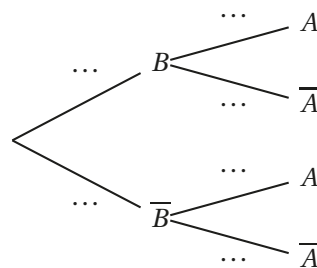
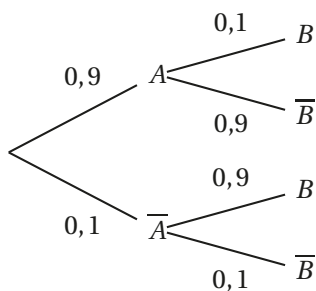


2.

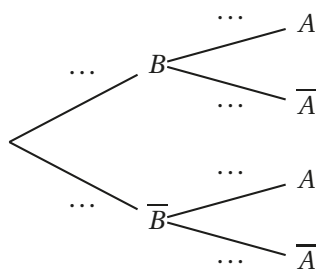
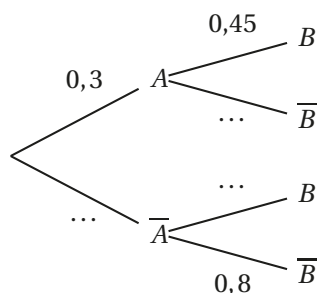
**EXERCICE 862****15 minutes**

Dans chaque cas compléter le second arbre en utilisant les données du premier :

1.



2.

**EXERCICE 863****15 minutes**

Dans le cadre d'une campagne de sensibilisation au tri des ordures ménagères, une enquête a été menée auprès de 1 500 habitants d'une ville, répartis de la manière suivante :

- moins de 35 ans : 25 %;
- entre 35 et 50 ans : 40 %;
- plus de 50 ans : 35 %.

A la question : « Triez-vous le papier? »,

- 80 % des moins de 35 ans ont répondu « oui »,
- 70 % des personnes âgées de 35 à 50 ans ont répondu « oui »,
- 60 % des personnes de plus de 50 ans ont répondu « oui ».

On interroge au hasard une personne parmi celles qui ont répondu à cette enquête. On considère les événements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans »;
- M : « la personne interrogée a un âge compris entre 35 et 50 ans »;
- S : « la personne interrogée a plus de 50 ans »;
- T : « la personne interrogée trie le papier ».

1. En utilisant les données de l'énoncé établir l'arbre de probabilités illustrant la situation :
2. a. Définir par une phrase l'événement $S \cap T$.
b. Calculer la probabilité de l'événement $S \cap T$.
3. Calculer la probabilité de l'événement : « la personne interrogée a moins de 35 ans et trie le papier ».
4. On note p la probabilité que la personne interrogée trie le papier. Montrer que $p = 0,69$.
5. Calculer la probabilité, arrondie au centième, que la personne interrogée ait moins de 35 ans sachant qu'elle trie le papier.

EXERCICE 864**15 minutes**

A une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies.

Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnés; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes;

- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement (pièces ou billets).

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les événements suivants :

- G : « l'automobiliste emprunte la voie de gauche »;
- C : « l'automobiliste emprunte la voie du centre »;
- D : « l'automobiliste emprunte la voie de droite »;
- T : « l'automobiliste franchit le péage en moins de 10 secondes ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

2. Calculer la probabilité $P(C \cap T)$.

3. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.

a. Justifier que $P(D \cap T) = 0,03$.

b. Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

EXERCICE 865

15 minutes

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x .

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».

Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

EXERCICE 866

10 minutes

Un maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

EXERCICE 867**15 minutes**

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A »;
- B : « l'ampoule provient de la machine B »;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
 - a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
 - b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
 - c. L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir 10 ampoules sans défaut.

EXERCICE 868**15 minutes**

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère;

— soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.

Le but de cet exercice est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\bar{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'événement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\bar{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\bar{F}}(A)$.
2. On pose $x = P(F)$.
 - a. Etablir l'arbre de probabilité illustrant la situation ?
 - b. En déduire une égalité vérifiée par x
3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 869

15 minutes

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya » ;
- T l'événement : « Le test de l'individu choisi est positif ».

On notera $\bar{M}$ (respectivement $\bar{T}$) l'événement contraire de l'événement M (respectivement T). On note p ($0 \leq p \leq 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Etablir un arbre de probabilité.
 b. Exprimer $P(M \cap T)$, $P(\bar{M} \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p .
2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$.

- b. Etudier les variations de la fonction f .
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable?

EXERCICE 870**25 minutes****1. Restitution organisée de connaissances :**

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

- a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.
- b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p , alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.
2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :
- R : « il n'entend pas son réveil sonner »;
 - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

- a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.
- b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.
- c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

Quelle la probabilité que Stéphane entende le réveil tous les jours d'une semaine?
Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

EXERCICE 871**20 minutes**

Dans une classe de 30 élèves, 14 sont des filles. Par ailleurs, 8 filles et 4 garçons sont internes. Les autres élèves sont externes.

On choisit un élève au hasard dans cette classe.

On considère les événements suivants :

A : « l'élève choisi est interne »;

B : « l'élève choisi est un garçon ».

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions simplifiées et seront justifiés.

1. Calculer la probabilité de l'événement A puis de l'événement B .
2. a. Calculer $p_A(B)$, c'est-à-dire la probabilité que l'élève choisi soit un garçon, sachant qu'il est interne.
b. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
3. Calculer $p_B(A)$.
4. Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$, à partir des questions précédentes, ou par une justification directe.

EXERCICE 872**20 minutes**

Une classe est composée de 17 filles dont 8 étudient le russe et 9 l'allemand et de 23 garçons dont 12 étudient le russe et 11 l'allemand.

Chaque élève étudie une et une seule de ces deux langues vivantes.

On choisit un élève au hasard dans la classe et on définit les événements :

F l'événement : « L'élève choisi est une fille » ;

G l'événement : « L'élève choisi est un garçon » ;

R l'événement : « L'élève choisi étudie le russe » ;

A l'événement : « L'élève choisi étudie l'allemand ».

Chaque résultat sera exprimé sous forme décimale exacte ou sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Calculer $P(G)$, $P(R \cap G)$ et $P(R)$.
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille qui étudie l'allemand ?
3. L'élève choisi étudie le russe. Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon.
4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève de la classe. Le même élève peut être choisi deux fois.
Calculer la probabilité de l'événement : « Les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue ».

EXERCICE 873**20 minutes**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un mélange de graines de fleurs contient :

- 50 graines de type A ;
- 90 graines de type B ;
- 60 graines de type C.

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit.

On considère que la probabilité pour qu'une graine germe correctement est de :

- 0,5 pour une graine de type A ;
- 0,8 pour une graine de type B ;

— 0,6 pour une graine de type C.

On sème une graine prise au hasard dans le mélange.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une graine de type A?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement?
3. Quelle est la probabilité que la graine semée soit une graine qui germe correctement?
4. Quelle est la probabilité que la graine semée soit une graine de type C qui ne germe pas correctement?

EXERCICE 874

15 minutes

Lors d'une promotion, un hypermarché vend par paquets de un kilogramme des clémentines et des oranges, en provenance de l'Union européenne (Italie, Espagne) et du Maroc.

Le nombre de kilos mis en vente est donné par le tableau suivant :

Fruits	Italie	Espagne	Maroc
Clémentines	100	250	200
Oranges	350	450	650

1. Un acheteur pressé prend au hasard un paquet de fruits. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a. Acheter des clémentines.
 - b. Acheter italien.
2. a. Quelle est la probabilité p_1 d'acheter des clémentines, sachant que l'acheteur ne veut que des produits « européens » ?
 - b. Quelle est la probabilité p_2 d'acheter « européen », sachant que des clémentines ont été choisies ?

EXERCICE 875

10 minutes

Trois dés cubiques sont placés dans une urne.

Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6.

Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.

On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'événement : « les deux dés tirés sont normaux ».

On note B l'événement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. a. Définir l'événement contraire de A que l'on notera $\overline{A}$.
 - b. Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$?
2. a. Calculer $P_A(B)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $P(B \cap A)$.
 - b. Calculer $P(B)$.
3. Calculer $P_B(A)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

EXERCICE 876**25 minutes**

Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique. Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.

On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables. On note :

- L : l'événement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'événement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'événement « le chocolat choisi est blanc » ;
- A : l'événement « le chocolat choisi est garni de praliné » ;
- $\bar{A}$: l'événement « le chocolat choisi est garni de caramel ».

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné.
Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à 0,7.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
 - a. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
 - b. En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.
6. On dispose de deux boîtes de chocolats identiques à celle décrite précédemment. Une personne prend au hasard un chocolat dans la première boîte, puis un chocolat dans la deuxième boîte (les tirages sont indépendants).
Déterminer la probabilité de l'événement : « l'un des chocolats choisi est garni de praliné et l'autre est garni de caramel ».

EXERCICE 877**10 minutes**

On dispose de deux urnes U et V et d'un jeu de 32 cartes ; l'urne U contient trois boules blanches et cinq boules noires, indiscernables au toucher ; l'urne V contient six boules blanches et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Une première expérience consiste à tirer une boule de l'urne U puis une boule de l'urne V. Calculer la probabilité de tirer :
 - a. deux boules noires ;

- b. deux boules de couleurs différentes.
2. On réalise maintenant une deuxième expérience consistant en le tirage d'une carte du jeu suivi du tirage d'une boule dans l'une des urnes.
 Une carte est une figure si c'est un ROI, une DAME ou un VALET. Il y en a douze.
 On tire une carte du jeu ; si cette carte est une figure, on tire une boule de l'urne U.
 Si la carte n'est pas une figure alors on tire une boule de l'urne V.
 On note F l'événement « la boule provient de l'urne U », G l'événement « la boule provient de l'urne V » et B l'événement « la boule tirée est blanche ».
- a. Montrer que $p_F(B) = \frac{3}{8}$. En déduire $p(B \cap F)$.
- b. Calculer de même $p(B \cap G)$.
- c. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

EXERCICE 878**15 minutes**

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues par paquets pour lesquels :

- dans 5% des cas l'emballage n'est pas intact ;
- dans 70% des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée ;
- 90% des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1. Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.

On note I l'événement : « l'emballage est intact » et C l'événement : « au moins une gaufrette est cassée ».

- a. Calculer la probabilité de I .
- b. On considère les événements suivants :
 E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée » ;
 F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
 Exprimer E et F en fonction de I , $\bar{I}$ et $\bar{C}$.
 Calculer les probabilités de E et F .
 En déduire la probabilité de $\bar{C}$ puis celle de C .

2. Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.
 Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il n'y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

EXERCICE 879**20 minutes**

Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes ;
- parmi les personnes favorables à la construction, 20% sont des écologistes.

On note :

C l'événement : « la personne interrogée est contre la construction », et $\overline{C}$ l'événement contraire.

E l'événement : « la personne interrogée est écologiste »;

F l'événement : « la personne interrogée est contre la construction et n'est pas écologiste ».

1. Déterminer $p(C)$, $p_C(E)$ et $p_{\overline{C}}(E)$.
2. Calculer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit contre cette construction et soit écologiste.
3. Calculer la probabilité pour qu'une personne interrogée soit pour cette construction et soit écologiste.
4. En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.
5. Montrer que $p(F) = 0,195$.
6. On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage. On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres.
 - a. Quelle est la probabilité qu'aucune personne ne soit contre la construction du barrage et ne soit pas écologiste?
 - b. En déduire la probabilité qu'il y en ait au moins une qui soit contre la construction du barrage et ne soit pas écologiste.

EXERCICE 880**20 minutes**

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne; on estime que 99% des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce on effectue un test de qualité.

Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité avec une probabilité de 0,995.

Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,99.

On note :

B l'événement « la pièce est bonne »,

T l'événement « le test indique que la pièce est bonne ».

Les résultats des questions suivantes seront données à 10^{-4} près par défaut.

1. Calculer $p(\overline{B} \cap \overline{T})$ et $p(B \cap \overline{T})$.
2. En déduire $p(\overline{T})$, puis $p(T)$.
3. On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.
 - a. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.
 - b. On tire au hasard successivement et avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente.
Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

EXERCICE 881**10 minutes**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante. On prendra $\pi \approx 3,14$.

Des parachutistes débutants sautant d'un avion atterrissent tous sur un terrain de un hectare (c'est-à-dire $10\,000\text{ m}^2$), constitué de la façon suivante :

- une cible circulaire de 60 m de diamètre;

- un champ de luzerne, rectangulaire, de 80 m de long et 50 m de large;
- une mare d'une superficie de 800 m^2 ;
- le reste étant en friche.

On assimilera un parachutiste à un point matériel et on supposera que la probabilité qu'un parachutiste débutant tombe sur une partie du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- A : « Le parachutiste tombe sur la cible »;
- B : « Le parachutiste tombe dans la mare »;
- C : « Le parachutiste tombe dans la luzerne »;
- D : « Le parachutiste tombe dans la friche ».

2. On admet que la probabilité pour qu'un parachutiste tombe sur la cible est 0,28.

Quatre parachutistes sautent l'un après l'autre de l'avion. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- E : « Aucun d'entre eux n'arrive sur la cible »;
- F : « L'un d'entre eux au moins arrive sur la cible ».

EXERCICE 882

10 minutes

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut »;
- B : « il y a au moins un stylo avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

- a. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
 - b. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.
- a. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

- b. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1. Quel commentaire peut-on faire?

EXERCICE 883**15 minutes**

Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client.

Cette machine distribue soit un expresso, soit du chocolat, soit du thé en suivant une programmation erronée.

Chaque boisson peut être sucrée ou non.

- La probabilité d'obtenir un expresso est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$.
- Si l'on obtient un expresso, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$.
- Si l'on obtient un chocolat, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.
- La probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$.

On pourra considérer les événements suivants :

T : « On a obtenu un thé »

E : « On a obtenu un expresso »

C : « On a obtenu un chocolat »

S : « La boisson obtenue est sucrée ».

1. Construire un arbre probabiliste modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un expresso sucré.
3. Démontrer que la probabilité d'obtenir un chocolat sucré est $\frac{1}{18}$.
4. En déduire la probabilité d'obtenir un chocolat.
5. Une personne obtient une boisson sucrée. Quelle est la probabilité que cette boisson soit un thé?

EXERCICE 884**10 minutes**

Deux joueurs Roger et Raphaël disputent un match de tennis.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux points gagnés par Roger lorsqu'il sert (c'est-à-dire lorsqu'il effectue la mise en jeu).

A chaque point disputé, Roger dispose de deux essais pour son service. S'il rate ces deux essais, il perd le point (on parle de double faute).

Roger s'apprête à servir. On note :

- A l'événement « Roger réussit son premier service »,
- B l'événement « Roger réussit son second service »,

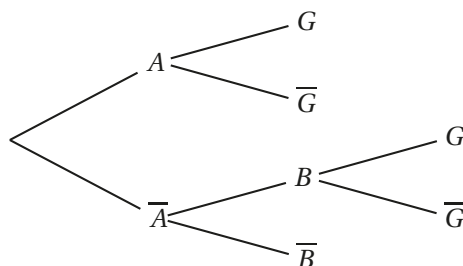
— G l'événement « Roger gagne le point ».

On note respectivement $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{G}$ les événements contraires respectifs des événements A , B et G .

Une étude sur les précédents matchs de Roger a permis d'établir que, lorsque Roger sert :

- il réussit dans 75 % des cas son premier essai et lorsque ce premier service est réussi, il gagne le point dans 92 % des cas.
- s'il ne réussit pas son premier essai, il réussit le second dans 96 % des cas et lorsque ce second service est réussi, il gagne le point dans 70 % des cas.

On va décrire la situation précédente par un arbre pondéré :



Les probabilités demandées seront données sous forme décimale arrondie, si nécessaire, au millième.

1. Reproduire l'arbre ci-dessus et le pondérer à l'aide des données du texte.
2. Quelle est la probabilité que Roger fasse une double faute?
3. Quelle est la probabilité que Roger rate son premier service, réussisse le second et gagne le point?
4. Montrer que la probabilité que Roger gagne le point est de 0,858.
5. Sachant que Roger a gagné le point joué, quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service?
6. Les deux joueurs disputent quatre points de suite (Roger servant à chaque fois). On admet que chaque point joué est indépendant des points joués précédemment. Quelle est la probabilité que Roger ne gagne pas la totalité des quatre points?

EXERCICE 885

10 minutes

Le quart de la population est vacciné contre une maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné?

EXERCICE 886**10 minutes**

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

On admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.

On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.

On considère les événements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
 - V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
 - E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».
1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V , sans mélanger les sucres des deux exploitations.
 - a. Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?
 - b. Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?
 2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U .
Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

EXERCICE 887**10 minutes**

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A , la destination G et la destination M .

50 % des clients choisissent la destination A ;

30 % des clients choisissent la destination G ;

20 % des clients choisissent la destination M .

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G .

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les événements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;

- S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
 - $\bar{S}$ « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».
1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
 2. a. Traduire par une phrase les événements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités $P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.
b. L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(A \cap S)$.
c. En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'événement S sachant que l'événement A est réalisé.
 3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.
Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).
 4. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

EXERCICE 888 : VRAI/FAUX**10 minutes**

60 % des candidats au concours de la FESIC sont des filles. Parmi elles, 30 % ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.

Par ailleurs, 20 % des candidats sont des garçons qui ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. On interroge un candidat au hasard. La probabilité que ce soit une fille qui ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 30 %.
2. On interroge un garçon qui est candidat. La probabilité qu'il ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 20 %.
3. 38 % des candidats ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.
4. On interroge un candidat qui a suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $\frac{9}{19}$.

EXERCICE 889 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes U et V .

L'urne U contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires.

On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise. On désigne par :

- U l'événement : « on choisit l'urne U » ;
- V l'événement : « on choisit l'urne V » ;
- B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. On a : $p(B \cap U) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$.
2. On a : $p(B) = \frac{n^2 - n + 2}{(n+2)(n+1)}$.
3. On a : $p_B(U) = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.
4. Pour que $p_B(U) \leq 0,1$, il suffit que $n \geq 4$.

EXERCICE 890**20 minutes**

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.

Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.

Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.

Un client téléphone à l'artisan.

On note :

R l'événement « le client obtient le répondeur » ;

A l'événement « l'artisan est présent » ;

$\bar{A}$ l'événement contraire de A ;

1. Déterminer la probabilité $P(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(R)$ et $P_{\bar{A}}(R)$.
2. a. Exprimer $P(R)$ en fonction de $P_A(R)$, $P_{\bar{A}}(R)$ et $P(A)$.
b. En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.
3. Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

EXERCICE 891**20 minutes**

Dans un lycée général et technologique, il y a 1 400 lycéens : des élèves de seconde, première ou terminale, et des étudiants en section de technicien supérieur (STS).

Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 € pour les élèves et 60 € pour les étudiants.

Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5 % sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS.

Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

- 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
- 56 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

- 96 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Les 1 400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

1. Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.
2. Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

Partie B

On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1 400 fiches.

On note :

- L l'événement « l'adhérent est un élève » ;
 - E l'événement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
 - C l'événement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
 - B l'événement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
 - A l'événement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».
1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
 2. a. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.
b. Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire.
c. Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.
 3. Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer la probabilité que ce soit un élève.

EXERCICE 892

10 minutes

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On réalise une expérience aléatoire. A désigne un événement et $\bar{A}$ son événement contraire.

On pose $p(A) = x$.

1. Exprimer $p(\bar{A})$ en fonction de x .
2. Déterminer les valeurs possibles de x sachant que : $p(A) \times p(\bar{A}) = 0,24$.

Partie B

La « Revue Spéciale d'économie » et le « Guide des Placements en Bourse » sont deux magazines mensuels offrant à leurs lecteurs la possibilité d'abonnement communs.

On s'intéresse à l'ensemble des lecteurs de l'une ou l'autre de ces deux revues.

Parmi ces lecteurs, certains sont abonnés. Les abonnés ont souscrit soit l'un des deux abonnements, soit les deux abonnements simultanément.

Une étude a permis de constater que :

- 60 % de l'ensemble des lecteurs ont souscrit un abonnement à la « Revue Spéciale d'économie », et parmi eux $\frac{3}{5}$ ont aussi choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse »;
- 10 % des lecteurs n'ayant pas choisi l'abonnement à la « Revue Spéciale d'économie », ont souscrit l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse ».

On note :

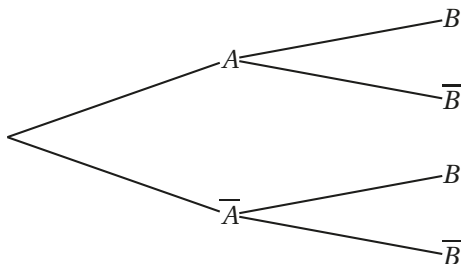
A l'événement : « le lecteur a choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'économie" »;

B l'événement : « le lecteur a choisi l'abonnement au "Guide des Placements en Bourse" ».

On interroge un lecteur au hasard.

1. Dédire de l'énoncé les probabilités $p(A)$, $p(\overline{A})$ et $p_{\overline{A}}(B)$.

Compléter l'arbre suivant :



2. a. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$. Donner sa probabilité.
b. Traduire par une phrase l'événement $\overline{A} \cap \overline{B}$. Donner sa probabilité.
3. Calculer $p(B)$. En déduire la probabilité qu'un lecteur soit abonné à la « Revue Spéciale d'économie » sachant qu'il est abonné au « Guide des Placements en Bourse ».
4. On interroge au hasard 3 lecteurs indépendamment les uns des autres.
 - a. Calculer la probabilité pour qu'aucun d'eux n'ait choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse ».
 - b. En déduire la probabilité pour qu'au moins l'un d'eux ait choisi l'abonnement au « Guide des Placements en Bourse ».

EXERCICE 893

10 minutes

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une étude sur le taux d'équipement en téléphonie des ménages d'une ville a permis d'établir les résultats suivants :

- 90 % des ménages possèdent un téléphone fixe;
- parmi les ménages ne possédant pas de téléphone fixe, 87 % ont un téléphone portable;
- 80 % des ménages possèdent à la fois un téléphone fixe et un téléphone portable.

On choisit un ménage au hasard et on note :

- F l'événement : « le ménage possède un téléphone fixe »;
- T l'événement : « le ménage possède un téléphone portable ».

1. a. Grâce aux données de l'énoncé, donner $P(F \cap T)$, $P(F)$ et $P_{\overline{F}}(T)$.
b. Calculer $P_F(T)$.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement T est 0,887.
3. Sachant que le ménage choisi n'a pas de téléphone portable, quelle est la probabilité que ce soit un ménage possédant un téléphone fixe?
4. On choisit successivement au hasard et de manière indépendante trois ménages. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un téléphone portable?

EXERCICE 894**10 minutes**

Maths a trois bonnets et deux chapeaux. Quand il va acheter un pain, il prend un couvre-chef au hasard. Sachant qu'il prend 3 fois sur 5 un pain complet et qu'une fois sur trois il oublie de s'habiller, quelle est la probabilité que Maths soit revenu de la boulangerie en pyjama, un chapeau sur la tête et un pain non complet à la main?

EXERCICE 895**10 minutes**

On considère une épreuve aléatoire à deux issues : S (succès) et E (échec), la probabilité d'un succès est $P(S) = p$. On répète n fois cette épreuve aléatoire, chaque épreuve étant indépendante des autres.

1. Déterminer $p(E)$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir n succès au cours de ces n épreuves?
3. Quelle est la probabilité d'avoir n échecs au cours de ces n épreuves?
4. En déduire la probabilité d'obtenir au-moins un succès au cours de ces n épreuves.

EXERCICE 896**10 minutes**

Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule (premier tirage), à la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur et à tirer une nouvelle fois une boule de l'urne (second tirage).

Le but de l'exercice est de montrer que la probabilité de tirer une boule rouge est la même dans les deux tirages.

On note : R_1 l'événement : « la première boule tirée est rouge »;

R_2 l'événement : « la deuxième boule tirée est rouge »;

1. Calculer $p(R_1)$, $p(\overline{R_1})$, $p_{R_1}(R_2)$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2)$.
2. En déduire $p(R_1 \cap R_2)$, $p(\overline{R_1} \cap R_2)$.
3. Calculer $p(R_2)$ et conclure.

EXERCICE 897**15 minutes**

Une entreprise de bateaux propose chaque jour une croisière sur le Rhône. Les relevés météorologiques permettent d'affirmer que, dans la région, l'événement, noté B , « le temps est au

beau fixe » se réalise 180 jours par an ; l'événement, noté N , « le temps est nuageux sans pluie » se réalise 120 jours par an ; l'événement, noté P , « le temps est pluvieux » se réalise 65 jours par an. On suppose qu'une année compte 365 jours.

On note $p_F(E)$ la probabilité d'un événement E sachant qu'un événement F est réalisé.

On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

Un jour est choisi au hasard.

1. Calculer les probabilités $p(B)$, $p(N)$, $p(P)$ pour que, ce jour-là, le temps soit respectivement beau, nuageux sans pluie, pluvieux.
2. Soit V le nombre de billets vendus ce jour-là.

On considère les événements :

$$A_1 : « 0 \leq V \leq 15 » \quad A_2 : « 15 < V \leq 30 » \quad A_3 : « 30 < V \leq 50 »$$

On dispose des renseignements suivants :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Probabilité de A_i sachant B	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
Probabilité de A_i sachant N	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
Probabilité de A_i sachant P	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exemple de lecture : la probabilité pour que « $15 < V \leq 30$ sachant que B est réalisé » est égale à $\frac{3}{8}$.

Calculer $p(A_1 \cap B)$ puis $p(A_1)$.

De manière analogue, on trouverait $p(A_2) = \frac{206}{584}$ et $p(A_3) = \frac{229}{584}$, résultats que l'on admettra.

3. On considère que le bilan quotidien de l'entreprise est positif si elle a vendu au moins seize billets.
 - a. Calculer la probabilité pour que le bilan soit positif.
 - b. Si le bilan est positif, quelle est la probabilité pour que le temps ait été nuageux ?

EXERCICE 898

10 minutes

La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville.

Afin de renouveler son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock.

- Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non.
- Parmi les 6 % de DVD défectueux sur l'ensemble du stock, 98 % sont retirés.
- On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92 % sont maintenus dans le stock ; les autres sont retirés.

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité.

On considère les événements suivants :

- D : « le DVD est défectueux » ;

- R : « le DVD est retiré du stock ».

On note $\overline{D}$ et $\overline{R}$ les événements contraires respectifs des événements D et R .

1. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,134.
2. Une association caritative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux.
Cette affirmation est-elle vraie?

EXERCICE 899**10 minutes**

Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire.

On y trouve :

- 40 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir;
- parmi les billes au chocolat blanc, 60 % sont fourrées au café; les autres sont fourrées au praliné;
- parmi les billes au chocolat noir, 70 % sont fourrées au café; les autres sont fourrées au praliné.

Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier.

On définit les événements suivants :

- B : « l'invité prend une bille au chocolat blanc »;
- C : « l'invité prend une bille fourrée au café ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café vaut 0,66.
3. Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat blanc?

EXERCICE 900**10 minutes**

Sofia souhaite se rendre au cinéma. Elle peut y aller à vélo, dans ce cas la probabilité qu'elle mette entre 12 et 14 minutes est égale à 0,409, ou en bus, dans ce cas la probabilité qu'elle mette entre 12 et 14 minutes est égale à 0,667. Sofia hésite entre le bus et le vélo. Elle décide de lancer un dé équilibré à 6 faces.

Si elle obtient 1 ou 2, elle prend le bus, sinon elle prend son vélo. On note :

- B l'événement « Sofia prend le bus »;
- V l'événement « Sofia prend son vélo »;
- C l'événement « Sofia met entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma ».

1. Démontrer que la probabilité, arrondie à 10^{-2} , que Sofia mette entre 12 et 14 minutes est de 0,495.

2. Sachant que Sofia a mis entre 12 et 14 minutes pour se rendre au cinéma, quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'elle ait emprunté le bus?

EXERCICE 901**15 minutes**

Une urne contient 8 jetons : trois jetons noirs et carrés, trois jetons noirs et ronds, un jeton vert et carré, un jeton vert et rond.

L'épreuve consiste à extraire, au hasard, deux jetons de l'urne selon une procédure qui est déterminée par le lancer d'une pièce truquée :

- si l'on obtient « PILE », on extrait les deux jetons simultanément,
- si l'on obtient « FACE », on extrait les deux jetons successivement avec remise.

Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'apparition de « PILE » est $\frac{7}{15}$.

On note :

P l'événement « on obtient PILE »;

F l'événement « on obtient FACE »;

A l'événement « les deux jetons tirés ont la même forme OU la même couleur »;

E_1 l'événement « obtenir deux jetons de la même couleur »;

E_2 l'événement « obtenir deux jetons de la même forme »;

E_3 l'événement « obtenir deux jetons de la même forme ET de la même couleur ».

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. On lance la pièce, on suppose que l'on a obtenu « PILE ».
 - a. Déterminer la probabilité des événements E_1 , E_2 et E_3 .
 - b. En déduire que la probabilité de l'événement A , sachant que P est réalisé, est $\frac{11}{14}$.
2. On lance la pièce, on suppose que l'on a obtenu « FACE ».
 - a. Déterminer la probabilité des événements E_1 , E_2 et E_3 .
 - b. En déduire que la probabilité de l'événement A , sachant que F est réalisé, est $\frac{13}{16}$.
3. Quelle est la probabilité de l'événement A ?

EXERCICE 902 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.

S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut $\frac{1}{9}$, tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut $\frac{1}{3}$.

S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses.

1. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de $\frac{1}{9}$.
2. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de $\frac{25}{81}$.
3. Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de $\frac{7}{9}$.
On note p_n (n étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'événement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n -ième représentation ».
4. Pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{2-p_n}{9}$.

5.2 Variables aléatoires réelles

5.2.1 Point de cours

Définition 1 : on appelle **univers** associé à une expérience aléatoire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience.

Définition 2 : une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent les valeurs prises par X , on note $(X = x_i)$ l'événement « X prend la valeur x_i ».

Définition 3 : établir la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X , c'est associer à chaque valeur prise par X une probabilité.

On la présente souvent sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

La somme des probabilités $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ doit être égale à 1.

Définition 4 : l'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Propriété 1 : loi des grands nombres.

Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , la valeur moyenne prise par X se rapproche de l'espérance de X .

Définition 5 :

- la **variance** de X est le nombre réel : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$;
- l'**écart type** de X est le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 2 :

- après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X , l'écart type de

la série statistique obtenu se rapproche de $\sigma(X)$;

- l'écart type mesure la dispersion autour de l'espérance.

5.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 903

10 minutes

Une loi de probabilité de X est définie dans un tableau.

Dans chaque cas, calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .

1.

x_i	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3

2.

x_i	-5	-2	-1	3	5
$p(X = x_i)$	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

EXERCICE 904

10 minutes

Un jeu consiste à lancer un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, la mise est de 2 €.

Si la face supérieure affiche un nombre n pair, le joueur gagne n €.

Si la face supérieure affiche un nombre n impair, le joueur ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain algébrique (en euros).

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Etablir la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$, interpréter le résultat.
4. Calculer la variance et l'écart type de X .

EXERCICE 905

10 minutes

Un jeu consiste à lancer deux dés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On regarde le numéro indiqué sur la face inférieure.

Si les deux dés indiquent le même numéro, le joueur gagne la somme obtenue en ajoutant les des deux numéros.

Si les deux numéros sont différents, le joueur gagne la somme correspondant au plus petit numéro.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain du joueur en euros.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Etablir la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$, interpréter le résultat.
4. Calculer la variance et l'écart type de X .

EXERCICE 906**10 minutes**

Une loi de probabilité de X est définie dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1

1. Calculer et interpréter la probabilité $P(X \geq 3)$.
2. La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$. Compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$F(x)$						

3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

EXERCICE 907**10 minutes**

Un sac contient cinq jetons numéros 1, 1, 2, 2, 3.

On extrait simultanément deux jetons et on désigne par X la somme des nombres inscrits sur les deux jetons. Tous les tirages sont équiprobables.

1. Etablir la loi de probabilité de la variable X ?
2. Calculer et interpréter la probabilité $P(X \leq 4)$.
3. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable X .

EXERCICE 908**15 minutes**

Un même devoir a été donné dans les trois classes de première du lycée notées P_1 , P_2 et P_3 . Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20
P_1	0	1	0	2	1	2	3	2	5	5	7	4	3	2	0	0	1	0	1	1
P_2	1	1	3	4	3	2	1	1	1	0	0	0	2	3	4	5	3	1	1	0
P_3	2	0	0	2	1	3	0	2	1	4	2	3	1	0	3	0	0	5	0	2

1. Calculer la moyenne et l'écart type pour chacune de ces trois variables aléatoires.
2. Quelle est la classe la plus homogène?
3. Quelle est la classe la plus hétérogène?
4. Quelle est la classe ayant la meilleure moyenne?

EXERCICE 909**15 minutes**

Une loi de probabilité de X est définie dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. On pose $Y = X + 2$, $Z = X - 3$ et $T = 2 - X$.
 - a. Etablir la loi de probabilité de chacune des ces variables aléatoire.
 - b. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de ces trois variables aléatoires.
 - c. Pour tout réel b , conjecturer une expression de $E(X + b)$, $V(X + b)$ et $\sigma(X + b)$ en fonction de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 910**15 minutes**

Une loi de probabilité de X est définie dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

1. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. On pose $Y = 2X$, $Z = -3X$ et $T = 2X + 3$.
 - a. Etablir la loi de probabilité de chacune des ces variables aléatoire.
 - b. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de ces trois variables aléatoires.
 - c. Pour tout réel a , conjecturer une expression de $E(aX)$, $V(aX)$ et $\sigma(aX)$ en fonction de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

5.2.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 911****15 minutes**

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, de variance $V(X)$ et d'écart type $\sigma(X)$, a et b deux nombres réels.

Démontrer les égalités suivantes :

1. $E(X + b) = E(X) + b$ et $E(aX) = aE(X)$.
2. $V(X + b) = V(X)$ et $V(aX) = a^2V(X)$.
3. $\sigma(X + b) = \sigma(X)$ et $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

EXERCICE 912**15 minutes**

Démontrer que :

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$.
2. $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$.
3. $V(aX + b) = a^2V(X)$.

EXERCICE 913**15 minutes**

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = E((X - x)^2) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - x)^2$ et $g_i(x) = (x_i - x)^2$.

1. Déterminer $g'_i(x)$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 2E(X)$.
3. Etablir le tableau de variations de f .
4. En déduire la valeur de x pour laquelle f est minimale. A quoi correspond ce minimum?

EXERCICE 914**20 minutes**

Dans cet exercice nous allons simuler un jeu de Pile-Face et calculer pour un grand nombre de lancer la différence entre la fréquence d'apparition de « Face » et la probabilité d'obtenir « Face ».

1. On lance une pièce non truquée, quelle la probabilité d'obtenir « Face »?
2. Ecrire en Python, une fonction qui simule n lancers d'une pièce et renvoie le nombre de « Face » obtenue.
3. Modifier la fonction pour qu'elle renvoie pour n lancers la différence entre la fréquence d'apparition de « Face » et la probabilité d'obtenir « Face ».

EXERCICE 915**10 minutes**

Dans cet exercice nous allons simuler un lancer de dé à 6 faces et calculer pour un grand nombre de lancer la différence entre la fréquence d'apparition de chaque face et la probabilité d'obtenir chacune des faces.

1. Ecrire en Python, une fonction qui simule n lancers d'un dé et stocke les résultats dans une liste de la forme $resultats = [d1, d2, d3, d4, d5, d6]$ avec d_i nombre de faces i obtenues.
2. Modifier la fonction pour qu'elle renvoie pour n lancers la différence entre la fréquence d'apparition et la probabilité d'obtenir chaque face.

EXERCICE 916**15 minutes**

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La partie est organisée selon les règles suivantes :

on mise 3 euros puis on lance le dé;

- pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros;
- pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros;
- pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro;
- dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain algébrique d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

Partie A

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain algébrique.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Etablir la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
 - d. Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête. Quelle bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu?
2. Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.
Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer deux parties.

Partie B

Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable. La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.

Déterminer cette nouvelle mise x qui rend le jeu équitable.

EXERCICE 917**20 minutes**

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie A

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience. En déduire les valeurs possibles de la somme S .
2. Soit A l'évènement : « la somme S est égale à 1,5 » et B l'évènement : « la somme S est égale à 1 ».
 - a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,4.
 - b. Déterminer la probabilité de l'évènement B .
3. Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie B

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimé en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie A, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

EXERCICE 918**20 minutes**

Un vendeur d'adoucisseurs d'eau a l'intention de proposer deux de ses produits (modèle *simple* et modèle *haut de gamme*) dans un lotissement nouvellement construit. Une enquête a montré

que 20 % des foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un adoucisseur.

L'expérience du vendeur lui a appris que, parmi les foyers se déclarant intéressés, 50 % achètent le modèle *simple*, 40 % le modèle *haut de gamme*, les autres renonçant finalement à l'achat.

On nomme :

I l'évènement : « le foyer est intéressé »;

A l'évènement : « le foyer achète le modèle *simple* »;

B l'évènement : « le foyer achète le modèle *haut de gamme* »;

C l'évènement : « le foyer renonce à l'achat ».

1. Calculer les probabilités des évènements $I \cap A$, $I \cap B$, $I \cap C$.
2. Montrer que la probabilité pour qu'un foyer pris au hasard n'achète pas d'adoucisseur est égale à 0,82.
3. Le vendeur envisage de fixer le prix du modèle *simple* à 4000 € et celui du *haut de gamme* à 8000 €.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la somme (éventuellement nulle) versée au vendeur par un foyer visité au hasard.

- a. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
- b. Pour que son bénéfice soit suffisant, l'espérance de gain du vendeur devrait être de 1300 € pour un foyer visité. S'il veut vendre le modèle *simple* à moitié prix du modèle *haut de gamme*, comment doit-il modifier ses prix?

EXERCICE 919

20 minutes

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : A et B.

Un contrôle qualité a permis d'établir qu'en moyenne :

- 10 % du total des pièces présentent le défaut A;
- 15 % du total des pièces présentent le défaut B;
- 2 % du total des pièces présentant à la fois les défauts A et B.

1. Présenter les données dans un tableau à double entrée.
2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.
 - a. Calculer la probabilité p_1 qu'elle n'ait aucun défaut.
 - b. Calculer la probabilité p_2 qu'elle présente un seul défaut.
3. Une entreprise commercialise les pièces fabriquées par cette machine.
 - Les pièces qui ne présentent aucun défaut sont vendues 20 € chacune.
 - Les pièces qui présentent les deux défauts ne sont pas mises en vente.
 - Parmi les pièces qui présentent un seul défaut, 80 % sont vendues 12 euros chacune et les autres ne sont pas mises en vente.
 - Dans tous les cas, le coût de fabrication d'une pièce est 10 €.
 - a. Calculer sur les 10 000 pièces fabriquées le nombre de pièces vendues 12 €.
 - b. Sur les 10 000 pièces fabriquées, montrer que l'entreprise peut espérer un bénéfice de 74 160 €.

EXERCICE 920**20 minutes**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces. La machine M_1 fournit les $\frac{4}{5}$ de la production.

Parmi les pièces produites, certaines sont défectueuses. C'est le cas pour 5 % de celles produites par M_1 et 4 % de celles produites par M_2 .

1. L'atelier produit 1 000 pièces par jour. Reproduire et compléter le tableau d'effectif suivant.

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			1 000

2. On choisit au hasard une pièce parmi la production totale de l'atelier d'un jour donné.

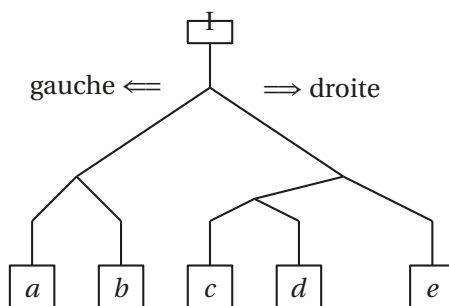
Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « la pièce choisie est produite par M_1 ».
- B : « la pièce choisie est défectueuse ».
- On sait que la pièce choisie a été produite par M_1 . Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse ?

3. En sortie de chaîne de production chaque pièce coûte 38 € à l'atelier. Les pièces qui sont défectueuses doivent être réparées pour être mises sur le marché. La réparation coûte 4,30 € pour une pièce fabriquée par M_1 et 4,50 € pour une pièce fabriquée par M_2 .

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pièce associe son coût de revient.

- Quelles sont les trois valeurs prises par X ?
- Donner la loi de probabilité de X .
- Calculer $E(X)$, espérance mathématique de X .
- Quel doit être, au centime près, le prix minimal de vente d'une pièce pour que l'atelier ne vende pas à perte ?

EXERCICE 921**20 minutes**

On considère le circuit de billes schématisé par la figure ci-dessus. Un joueur lâche une bille en I et on admet qu'à chaque bifurcation la bille prend la direction gauche avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

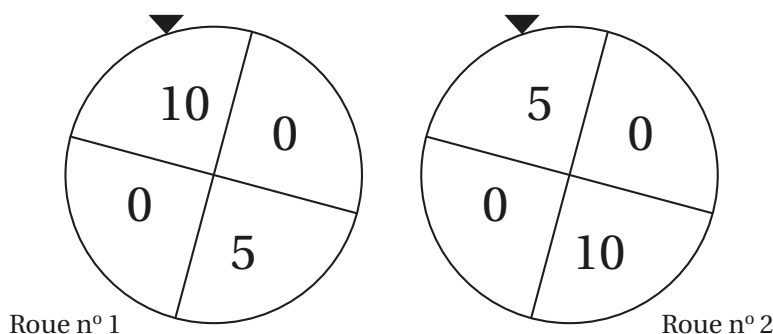
1. Réaliser un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.
2. a. Utiliser cet arbre pour déterminer les probabilités des événements élémentaires suivants, sous forme de fractions irréductibles :
 A : « La bille arrive en a » ; B : « La bille arrive en b » ;
 C : « La bille arrive en c » ; D : « La bille arrive en d » ;
 E : « La bille arrive en e ».
 Vérifier que la probabilité de l'évènement D est $\frac{9}{64}$.
- b. Parmi les événements précédents, quel est l'évènement le moins probable ? Le plus probable ?
3. Le joueur gagne 48 points si la bille arrive en a , 16 points si elle arrive en b et 64 points si elle arrive en c . Il ne gagne rien si la bille arrive en d et il perd 32 points si elle arrive en e .
 - a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus : ainsi si la bille arrive en e , on a $X = -32$. En utilisant les résultats de la deuxième question, donner la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer alors $E(X)$. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?
 - c. L'organisateur du jeu se doit de proposer un jeu équitable (c'est-à-dire tel que $E(X) = 0$). Pour cela il décide de modifier le nombre de points perdus si la bille arrive en e . Quel nombre de points perdus doit-il choisir pour que $E(X) = 0$?

EXERCICE 922**20 minutes**

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :

- Le joueur mise 10 euros.
- Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère.

Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros 10 ; 0 ; 5 ; 0. Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère. Le gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Etude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.
 On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

- a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n° 1	10	0	5	0
Roue n° 2				
10				
0				
5				
0				

- b. Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.
- c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
- d. Calculer la probabilité, notée $p(G > 10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.
- e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G , puis donner son interprétation.
2. Etude du bénéfice de l'association pour une mise de m euros.
On suppose dans cette question que la mise du joueur est m euros.
On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.
- a. Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique de la variable aléatoire B .
- b. Déterminer m pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

EXERCICE 923**15 minutes**

Un commercial vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Nombre de voitures vendues	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,26	0,23		0,15	0,05

- Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine.
- Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.
- Donner une représentation graphique de la fonction de répartition F de cette loi dans un repère convenablement choisi.
- Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. En déduire le nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).
- Le prix de vente d'une voiture est de 13 500 €. Le vendeur perçoit une commission de 0,4 % sur le prix de vente pour chaque voiture vendue. Déterminer le montant moyen de la commission perçue en un an.

EXERCICE 924**20 minutes**

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.

1. Déterminer les différents résultats possibles, sachant qu'un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face. Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 € ;
sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.
 - a. Quelles valeurs peut prendre X ?
 - b. Donner la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leq 2$ ».
3. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique du gain est égale à 0.
 - a. Ce jeu est-il équitable ?
 - b. Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

EXERCICE 925**15 minutes**

On s'intéresse aux visiteurs de la « Tour Mathématiques ».

Cette tour a trois étages. Elle est desservie par un ascenseur et par un escalier.

Neuf visiteurs sur dix utilisent l'ascenseur et, parmi ceux-ci :

- la moitié va au troisième étage ;
- un tiers va au deuxième étage ;
- les autres vont au premier étage.

Les autres visiteurs utilisent l'escalier, et, parmi ceux-ci :

- la moitié va au deuxième étage ;
- les autres vont au premier étage.

1. On interroge un visiteur, au hasard, à la sortie de la tour. Quelle est la probabilité pour que :
 - a. le visiteur soit allé au deuxième étage, en ascenseur ?
 - b. le visiteur soit allé au deuxième étage ?
 - c. le visiteur soit monté à pied, sachant qu'il est allé au deuxième étage ?
(On donnera les valeurs exactes des résultats.)
2. Les tarifs affichés pour la visite de la tour sont les suivants :

Ascenseur :

Premier étage 17 €

Deuxième étage 34 €

Troisième étage 51 €

Escalier, quel que soit l'étage 7 €

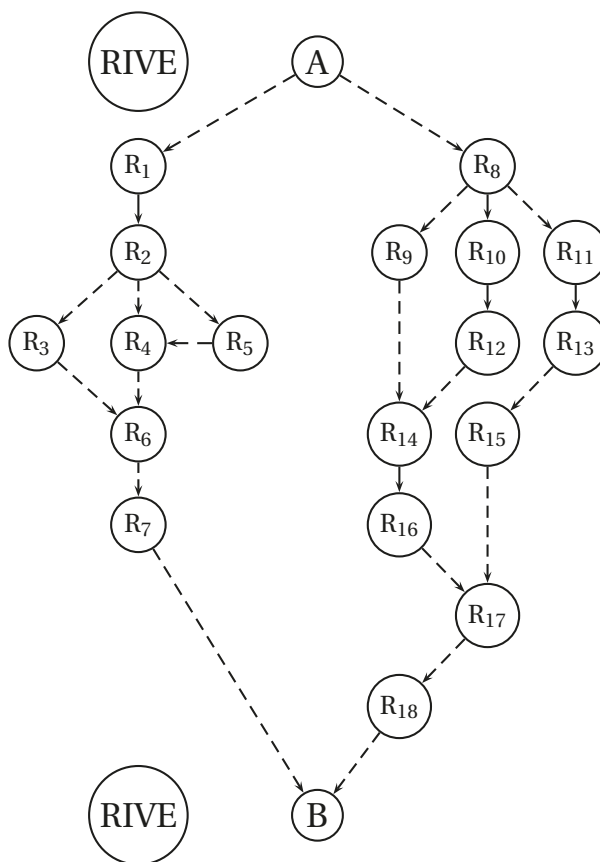
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe le prix qu'il a payé pour la visite.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer son espérance mathématique $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type.

EXERCICE 926**20 minutes**

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.

Le torrent se présente de la manière suivante (les disques $R_1, R_2, \dots, R_{17}, R_{18}$, représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.

Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.

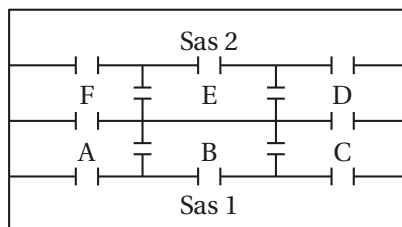
Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

- Déterminer les six parcours possibles.

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.
 - a. Quelle est la probabilité p_1 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 »?
 - b. Quelle est la probabilité p_2 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} »?
3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.
 - a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes?

EXERCICE 927**20 minutes**

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

- Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
- Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
- Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
- Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
- Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :
 - soit par le sas 1,
 - soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.

Exemples :

- ABC et BCD sont des trajets.
 - CBA et ABC sont deux trajets différents.
 - ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
 - DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).
1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.
 2. a. Calculer la probabilité p_1 de l'événement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».
b. Calculer la probabilité p_2 de l'événement « le robot sort par la sas 2 ».
 3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

- a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente ce nombre ?
 - d. Calculer la probabilité p_3 de l'événement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60 minutes » ?
4. a. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(X)$.
b. Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7. Soit n un entier naturel non nul. On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre : $n \times E(X) + 1,5 \times \sigma(X) \times \sqrt{n}$ est inférieur à 500 heures. Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an ?

EXERCICE 928

15 minutes

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'événement « la chaudière est sous garantie » et D l'événement « la chaudière est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - a. « la chaudière est garantie et est défectueuse »;
 - b. « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.
On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie?

EXERCICE 929

15 minutes

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à $\frac{1}{50}$;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On note : A l'événement « l'alarme se déclenche » et I l'événement « un incident se produit »;

Partie A

1. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

- 5 000 € pour un incident lorsque l'alarme fonctionne;
- 15 000 € pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas;
- 1 000 € lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.

Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Quel est le coût journalier moyen des anomalies?

EXERCICE 930**15 minutes**

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif).

Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard.

- Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 €,
- si la boule est jaune, il reçoit 2 €,
- si la boule est noire, il reçoit 1 €.

Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 €.

On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?
 - b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_6 .
 - c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6 .

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.

2. Etude de la variable aléatoire X_n .
 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .
 - b. Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n .
 - c. Le club souhaite une espérance de X_n strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

EXERCICE 931**20 minutes**

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ($N > 1$).

On effectue dans cette urne deux tirages au hasard avec remise (le numéro de chaque boule tirée est noté et la boule est remise dans l'urne).

On considère les variables aléatoires : X_1 prenant pour valeur le numéro de la première boule tirée en premier, et X_2 prenant pour valeur le numéro de la boule tirée en second.

1. Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables X_1 et X_2 . Calculer l'espérance mathématique de X_1 et X_2 .
2. On suppose désormais que $N = 5$.
 - a. Déterminer les valeurs de la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
 - b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y .
 - c. Calculer $P(2 < Y < 10)$.

EXERCICE 932**25 minutes**

Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat. Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin :

- 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10 % achètent un salon.
- Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon.

Une personne entre dans le magasin.

On note :

- B l'événement « la personne a un bon publicitaire ».
- $\bar{B}$ l'événement « la personne n'a pas de bon publicitaire ».
- S l'événement « la personne achète un salon ».
- $\bar{S}$ l'événement contraire de S .

Partie A

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.
2. A l'aide de B , $\bar{B}$, S , $\bar{S}$, traduire les événements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près :
 - a. la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ;
 - b. la personne achète un salon ;
 - c. la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon.

Partie B

Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin. Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. Compléter le tableau suivant :

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

2. Calculer le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant.
3. Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x .
4. Le directeur souhaite réaliser 76 € de bénéfice moyen par personne entrant. Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ?

EXERCICE 933

20 minutes

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'en-

retien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60% des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20% ne souscrivent aucune formule d'entretien;
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45% des locataires de Studio et par 55% des locataires de deux-pièces;
- 18% des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soit S l'événement « Le résident a loué un studio »

A l'événement « Le résident a souscrit la formule Simple »

B l'événement « Le résident a souscrit la formule Confort »

R l'événement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces?
b. Calculer $P_S(B)$.
3. a. Calculer $P(R \cap S)$. En déduire $P(R \cap \bar{S})$.
b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros. La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros.
Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs L_i . On désigne par p_i , la probabilité que le coût de la semaine soit égal à L_i .
a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12		0,21			0,12

- b. Calculer l'espérance de L . En donner une interprétation.

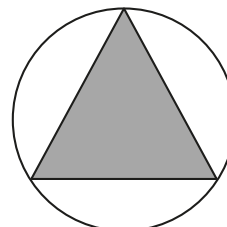
EXERCICE 934

10 minutes

On considère que le disque déterminé par $\mathcal{C}$ forme une cible décomposée en deux zones :

- une zone triangulaire noire nommée N ,
- une zone blanche nommée B .

On suppose que la probabilité, pour un tireur, d'atteindre N est 0,5 et celle de rater la cible est 0,2.

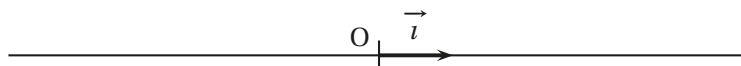


Cible

1. a. Quelle est la probabilité d'atteindre la cible?
b. Quelle est la probabilité d'atteindre B?
2. On considère un tireur qui tire sur la cible.
 - S'il atteint B, il gagne 5 euros.
 - S'il atteint N, il gagne 2 euros.
 - S'il rate la cible, il doit payer 8 euros.
 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tir associe le gain correspondant (positif ou négatif).
 - a. Définir la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il équitable?
 - c. Calculer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'écart type de X .

EXERCICE 935**25 minutes**

Un pion se déplace par sauts successifs sur la droite Δ munie du repère $(O; \vec{i})$.

**Son point de départ est le point O.**

Deux types de sauts sont possibles :

D : 2 unités vers la droite,

G : 1 unité vers la gauche.

Les sauts successifs sont supposés indépendants les uns des autres, et chaque type de saut a la même probabilité d'être effectué.

On suppose que le pion va effectuer 3 sauts successifs.

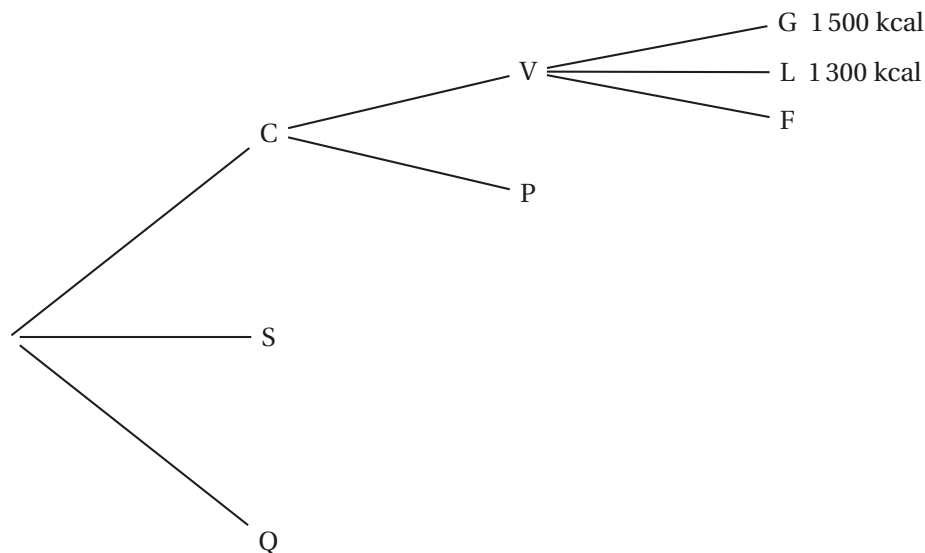
1. Donner la liste des différents parcours possibles. On pourra, éventuellement, dessiner « l'arbre des parcours », et désigner chaque parcours à l'aide d'un triplet, par exemple : (D, D, G) signifie que le pion s'est déplacé d'abord deux fois vers la droite, puis une fois vers la gauche.
2. Pour chaque parcours trouvé, préciser l'abscisse du point occupé par le pion après les 3 sauts.
3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe l'abscisse du point où aboutit le pion. Donner la loi de probabilité de X , et son espérance mathématique.

EXERCICE 936**15 minutes**

Au libre-service d'un restaurant d'entreprise, un repas est composé obligatoirement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Pour chaque repas, un employé choisit au hasard :

- une entrée parmi trois : Crudités (C), Salade (S) ou Quiche (Q),
- un plat parmi deux : Poisson (P) ou Viande (V),
- un dessert parmi trois : Glace (G), Fruits (F) ou Laitage (L).

1. Compléter l'arbre des repas (les extrémités seront complétées ultérieurement).



2. En déduire le nombre de repas que peut composer un employé.
3. On appelle :
 - A l'événement : « le repas composé contient le plat de poisson »,
 - B l'événement : « le repas composé contient des fruits au dessert ».
 Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et en déduire $P(A \cup B)$.
4. Le tableau suivant donne en kcal le bilan calorique des mets proposés :

Entrées	Cruautés (C) : 300	Salade composée (S) : 300	Quiche (Q) : 400
Plats	Viande (V) : 900		Poisson (P) : 600
Desserts	Glace (G) : 300	Laitage (L) : 100	Fruits (F) : 100

Ajouter aux extrémités de l'arbre, le bilan calorique de chaque repas.

5. On appelle R la variable aléatoire qui à chaque repas associe son bilan calorique.
 - a. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire R .
 - b. Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire R .
 - c. Montrer que le bilan calorique moyen d'un repas est 1 250 kcal.

EXERCICE 937

20 minutes

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».

Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».

Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

Partie A

Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

- La probabilité que Pierre réponde correctement à une question « Cinéma » est égale à $\frac{1}{2}$.

- La probabilité que Pierre réponde correctement une question « Musique » est égale à $\frac{3}{4}$.

On considère les événements suivants :

C : la question porte sur le thème « Cinéma »,

M : la question porte sur le thème « Musique »,

E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'événement : « La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement ».
2. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à $\frac{2}{3}$.
3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée. Quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » ?

Partie B

En fait le jeu se déroule de la façon suivante :

On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la partie A) et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.

Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.

A chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

EXERCICE 938

20 minutes

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
Calculer la probabilité qu'il en gagne au moins une et en donner une valeur approchée à 10^{-3} , près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 €;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
 - a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
 - b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur?

EXERCICE 939**20 minutes**

1. On note (x_n) la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 10$ et de raison r .
Sachant que $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, déterminer r et en déduire les valeurs de x_1 , x_2 , x_3 et x_4 .
2. Un sac contient 100 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros 0, 1, 2, 3 ou 4. Le nombre de boules portant chaque numéro est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la boule	0	1	2	3	4
Nombre de boules portant ce numéro	10	15	20	25	30

Un joueur tire au hasard une boule dans le sac, et on admet que les tirages sont équiprobables.

Pour chaque entier n compris entre 0 et 4, on note P_n la probabilité que le joueur tire une boule portant le numéro n .

Déterminer les valeurs des nombres P_0 , P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

3. On convient de la règle du jeu suivante :
 - si le numéro n de la boule tirée est impair, le joueur perd n euros;
 - si le numéro n de la boule tirée est pair, le joueur gagne n euros.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une boule associe le gain du joueur.

- a. Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X .

- b. Justifier que $P(X = 2) = 0,2$.
- c. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis déterminer son espérance mathématique $E(X)$.
- d. On modifie la règle du jeu de façon à ce que les numéros pairs soient perdants et les impairs gagnants.
Calculer, selon cette nouvelle règle, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y associée au gain du joueur.

EXERCICE 940**25 minutes**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

A la gare A , 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :

- 7 pour la gare B (prix du billet 50 €)
 - 5 pour la gare C (prix du billet 60 €)
 - 4 pour la gare D (prix du billet 75 €).
1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en euros).
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .
 2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
 - a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
 - b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B .
 - c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B , sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

5.3 Préparer l'examen

EXERCICE 941 : VRAI/FAUX**20 minutes**

Un traiteur propose deux plats : des pizzas et des quiches. Il propose également des desserts. Le chef constate que 70% des clients qui achètent un plat choisissent une quiche et que parmi ceux-ci 30% prennent également un dessert.

Il constate également que 60% des clients qui choisissent une pizza ne prennent pas de dessert. On choisit au hasard un client ayant acheté un plat chez ce traiteur.

On considère les événements suivants :

Q : « le client interrogé a choisi une quiche » ;

D : « le client interrogé a choisi un dessert ».

Pour chacune des cinq affirmations, dire si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse devra être justifiée.

1. La probabilité que le client ait choisi une pizza et un dessert est égale à 0,12.

2. La probabilité que le client ait choisi un dessert est égale à 0,7.
3. Le client a acheté un dessert, la probabilité qu'il ait acheté une pizza est égale à $\frac{4}{11}$.
4. Les événements Q et D sont indépendants.
5. Les pizzas sont vendues 6 €, les quiches 5 € et les desserts 3 €. Le traiteur travaille 6 jours par semaine et vend en moyenne 200 plats par jour. Il gagne 7548 € par semaine.

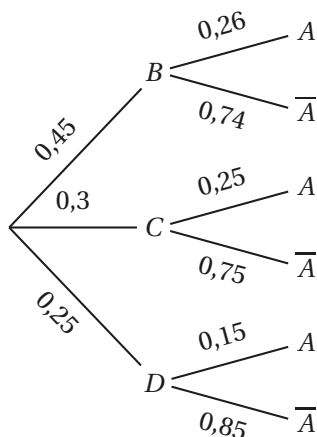
EXERCICE 942 : QCM**20 minutes**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) comportant cinq questions.

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

L'arbre pondéré ci-dessous représente une situation où A , B , C et D sont des événements d'une expérience aléatoire :

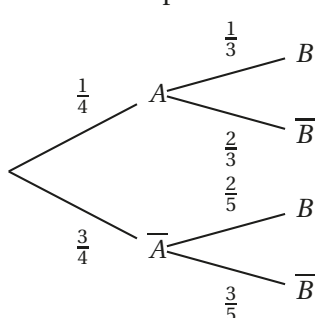


La probabilité de l'événement A est égale à :

- a. 0,66 b. 0,117 c. 0,2295 d. 0,26

Question 2

En utilisant l'arbre de probabilité ci-dessous, on obtient :



a. $P(B) = \frac{1}{3}$

b. $P(B) = \frac{2}{5}$

c. $P(B) = \frac{23}{60}$

d. $P(B) = \frac{11}{15}$

Question 3

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par ce tableau :

x_i	-5	0	2	15
$P(X = x_i)$	0,5	0,24	0,2	0,06

On en déduit que :

- a. $P(X \geq 0) = 0,74$ b. $P(X \geq 0) = 0,26$ c. $P(X > 0) = 0,74$ d. $P(X > 0) = 0,26$

Question 4

L'espérance de la variable aléatoire X définie dans la question 3 est égale à :

- a. 1,2 b. -1,2 c. 12 d. 1

Question 5

La variance de la variable aléatoire X définie dans la question 3 est égale à :

- a. 5 b. 26,8 c. -1,116 d. 25,36

EXERCICE 943**15 minutes**

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.

Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.

On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
5. a. Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
b. Compléter l'arbre construit dans la question 2.

EXERCICE 944**15 minutes**

Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.

Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.

On tire au hasard une médaille de la boîte. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée »;

D l'évènement « la médaille tirée est dorée »;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois »;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais »;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
 - a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
 - b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
 - c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée?
2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

EXERCICE 945**15 minutes**

En 2013, le parc automobile français s'élevait à 38,204 millions de véhicules, parmi lesquels on comptait 31,622 millions de voitures particulières, les autres véhicules étant des utilitaires légers ou des véhicules lourds (Source INSEE).

D'autre part, on sait que :

- 62 % des voitures particulières sont des véhicules diesel;
- parmi les autres véhicules, 6 % sont des véhicules essence.

On choisit au hasard un véhicule dans le parc automobile français.

On considère les évènements suivants :

V : « Le véhicule est un véhicule particulier. »

D : « Le véhicule est un véhicule diesel. »

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Justifier que la probabilité $p(V)$ est égale à 0,828.
2. Etablir un arbre de probabilité.
3.
 - a. Calculer la probabilité que le véhicule choisi soit une voiture particulière roulant au diesel.
 - b. Montrer que $p(D) = 0,675$.
 - c. On suppose que le véhicule choisi roule au diesel.
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas une voiture particulière?

EXERCICE 946**20 minutes**

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité. On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

- le stock contient 40 % de pneus neige;
- parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité;
- parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

- N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige »;
- C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique »;
- Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité. ».

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $P(Q) = 0,944$.
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige?

EXERCICE 947**20 minutes**

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».

La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les événements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »;

B : « La bouteille d'eau provient de la source B »;

S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
3. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

EXERCICE 948**20 minutes**

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents :

le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} .
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif?

EXERCICE 949**20 minutes**

Un jardinier propose ses services pour la plantation de la pelouse dans un lotissement nouvellement construit. Il dispose de deux produits : soit un gazon sport, soit un gazon anglais. Parmi les foyers du lotissement, 60 % se déclarent intéressés par cette offre ; cependant le jardinier sait par expérience que, parmi ceux qui se disent intéressés, 50 % se décident pour le gazon sport, 30 % pour le gazon anglais, les autres renonçant finalement à faire appel à lui.

On note :

- I l'évènement « le foyer est intéressé » ;
- S l'évènement « le foyer prend du gazon sport » ;
- A l'évènement « le foyer prend le gazon anglais » ;
- R l'évènement « le foyer renonce à faire appel au jardinier ».

Un foyer du lotissement est pris au hasard.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - « le foyer est intéressé et prend du gazon sport » soit $I \cap S$;
 - $I \cap A$;
 - $I \cap R$.
2. Calculer la probabilité que le jardinier ne plante pas la pelouse dans ce foyer.
3. La plantation du gazon sport est facturée 2000 € et celle du gazon anglais s €. On appelle X la variable aléatoire égale au montant (qui peut être nul) versé au jardinier par un foyer pris au hasard dans le lotissement.
 - a. Donner la loi de probabilité de X .
 - b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de s .
 - c. Calculer s pour que le jardinier espère gagner en moyenne 1200 € par foyer dans ce lotissement.

EXERCICE 950**20 minutes**

Lors de la fête de l'école, Bob organise un jeu.

Une urne opaque contient 250 boules indiscernables au toucher : 25 boules bleues, 75 boules rouges, les autres sont blanches.

Pour chaque partie, chaque joueur mise 2 €. Il prélève ensuite une boule au hasard dans l'urne.

- Si la boule est bleue, le joueur gagne 8 €.

- Si la boule est rouge, le joueur gagne 4 €.
- Si la boule est blanche, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Etablir que la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

- b. Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance est nulle.
 - c. Calculer la variance et l'écart type de X . On arrondira les résultats au centième.
2. Pour financer le séjour au ski, Bob veut modifier le jeu pour qu'il lui devienne favorable. Il veut pour cela ajouter des boules blanches dans l'urne.
Combien de boules blanches doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à $-1,5$?

5.4 Aller plus loin

EXERCICE 951

20 minutes

Au cours d'une quinzaine commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tout acheteur d'un appareil électroménager. Les 500 billets sont numérotés de 001 à 500 et ils sont tous distribués.

A la fin de la quinzaine, on effectue un tirage au sort, à l'issue duquel :

- le numéro 397 gagne 10 000 € ;
- les 4 autres numéros se terminant par 97 gagnent chacun 1 000 € ;
- les 45 autres numéros se terminant par 7 gagnent chacun 100 €.

Il y a ainsi en tout 50 numéros gagnants.

Après l'achat d'un appareil, une personne tire un billet au hasard.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, au numéro de ce billet, associe le gain correspondant.
 - a. Préciser les valeurs que peut prendre X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.
2. On considère les deux événements :
 A : « le numéro obtenu est gagnant » et B : « le deuxième chiffre du numéro est 9 ».
 - a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.
 - b. Les événements A et B sont-ils indépendants?
3. Le magasin annonce dans sa publicité : « Pour doubler vos chances d'avoir au moins un billet gagnant, achetez deux appareils! ». Une personne achète deux appareils et tire deux billets au hasard.

- a. On considère l'événement C : « aucun des deux numéros n'est gagnant ». Calculer la probabilité $p(C)$.
- b. En déduire la probabilité pour qu'un numéro au moins soit gagnant.
Cette annonce publicitaire est-elle correcte? Justifier la réponse par le calcul.

EXERCICE 952**15 minutes**

L'ensemble Ω est défini par : $\Omega = \{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 1); (1, 2, 2); (2, 1, 1); (2, 1, 2); (2, 2, 1); (2, 2, 2)\}$.

On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

L'application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}^+$ est définie sur les événements élémentaires par :

$$p((x, y, z)) = a(x + y + z) + b, \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que p est une probabilité si $36a + 8b = 1$ et $-\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{1}{12}$.
2. Soit A l'événement $\{(1, y, z)\}$ et B l'événement $\{(2, 2, z)\}$
Déterminer a et b pour que $p(A) = p(B)$.
3. Dans cette question a et b sont deux réels satisfaisant les conditions du 1.

On définit la variable aléatoire X par :

$$X((x, y, z)) = 3 \text{ si } x + y + z = 3$$

$$X((x, y, z)) = 4 \text{ si } x + y + z = 4$$

$$X((x, y, z)) = -3 \text{ si } x + y + z = 5$$

$$X((x, y, z)) = -4 \text{ si } x + y + z = 6$$

- a. Déterminer la loi de probabilité de X .
- b. Déterminer a et b pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 0. Calculer dans ce cas la variance de X .

EXERCICE 953**10 minutes**

Une urne contient $n + 8$ boules de trois couleurs : 3 boules vertes, 5 boules rouges et n boules bleues ($n \geq 2$).

1. Vérifier qu'il y a $\frac{p(p-1)}{2}$ façons de choisir deux boules parmi p .
2. On tire deux boules de l'urne sans remise et on se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité :
 - on gagne quand on tire deux boules de la même couleur,
 - on perd quand on tire deux boules de couleurs différentes.
 Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n de gain puis la probabilité q_n de perte.
Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Ce résultat était-il prévisible?
3. On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules, comme dans la question précédente, en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.
Calculer, en fonction de n , la probabilité p_n pour obtenir 9 fois et 9 fois seulement un tirage de deux boules de la même couleur.
Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Ce résultat était-il prévisible?

EXERCICE 954 : VRAI/FAUX**15 minutes**

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs.

On note :

- U l'événement « le dé tiré est normal »;
- V l'événement « on obtient 1 au premier lancer »;
- pour tout entier n non nul, S_n l'événement « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers ».

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $P(U) = \frac{2}{9}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(S_n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé truqué, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

4. p_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 955**25 minutes**

Les habitants d'un petit village de montagne sont touchés par un virus peu dangereux (la guérison est très rapide), mais contagieux.

On suppose que la propagation de ce virus suit le schéma suivant :

- tout individu qui contracte le virus tombe malade le jour même, mais est systématiquement guéri le jour suivant;
- tout individu en bonne santé un jour, contracte le virus le jour suivant avec une probabilité de 60%;
- aucun individu n'est immunisé, même en ayant déjà contracté le virus.

Mathix arrive dans ce village, un dimanche soir, en bonne santé, pour un séjour d'une semaine.

1. Quelle est la probabilité que Mathix soit malade tous les jours de la semaine ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit malade le mercredi ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas malade au cours de la semaine ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit malade trois jours de la semaine ?

EXERCICE 956**40 minutes**

On dispose de trois pièces qui présentent chacune un côté pile $\mathbb{P}$ et un côté face $\mathbb{F}$.

L'état des trois pièces est donné sous la forme d'un triplet, par exemple si la pièce 1 est sur pile, la pièce 2 sur pile et la pièce 3 sur face, on notera $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.

Partie A : Retournements successifs

Au départ de l'expérience, à l'instant $n = 0$, on dispose les pièces dans l'état $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Ensuite, on retourne une pièce à chaque instant. On retourne d'abord la pièce 1, puis la pièce 2, puis la pièce 3, puis à nouveau à 1 etc.

Par exemple, à l'instant $n = 2$, les pièces seront dans l'état suivant : $(\mathbb{F}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$.

1. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 5$? A l'instant $n = 6$?
2. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 2020$?
3. A quel instant retournera-t-on pour la 2020^e fois la pièce 2?

Partie B : Retournements aléatoires

Dans cette partie, on repart de l'état initial $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ à l'instant $n = 0$. Puis, à chaque instant, on choisit une pièce au hasard parmi les 3 et on la retourne.

Lorsque les 3 pièces présentent le même côté, on arrête les retournements.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n(i)$ la probabilité de voir i côtés piles à l'instant n .

Par exemple, à l'instant $n = 0$, on est dans l'état $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et on voit obligatoirement 2 piles donc : $P_0(0) = P_0(1) = P_0(3) = 0$ et $P_0(2) = 1$.

1. Représenter l'expérience par un arbre. Au bout de chaque branche, on note le nombre de côtés piles visibles, aux instants n et $n + 1$:
2. A l'aide de l'arbre précédent,
 - a. Expliquer les relations : $P_{n+1}(0) = P_n(0) + \frac{1}{3}P_n(1)$ et $P_{n+1}(1) = \frac{2}{3}P_n(2)$.
 - b. Etablir de même une relation entre $P_{n+1}(2)$ et $P_n(1)$.
 - c. Etablir une relation entre $P_{n+1}(3)$, $P_n(2)$ et $P_n(3)$.
3. Dans cette question, on souhaite étudier l'évolution des valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(2)$ en fonction de n .
 - a. A l'aide des relations de la question 2, compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
$P_n(1)$	0					
$P_n(2)$	1					

- b. Ecrire, sous forme d'une puissance puis sous forme approchée, les valeurs de $P_{20}(1)$ et $P_{20}(2)$, puis celles de $P_{21}(1)$ et $P_{21}(2)$.
 - c. Conjecturer la valeur vers laquelle $P_n(1)$ tend lorsque n devient très grand.
 - d. Conjecturer la valeur vers laquelle $P_n(2)$ tend lorsque n devient très grand.
- On admettra ces deux conjectures.
4. On souhaite maintenant calculer la valeur vers laquelle tend $P_n(3)$ lorsque n devient très grand.

Cette valeur représente la probabilité, après un très grand nombre n de retournements, d'avoir 3 piles visibles; c'est-à-dire la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$.

Pour cela on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 2P_n(1) + 3P_n(2) + 5P_n(3)$.

- a. Calculer T_0 .
- b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_{n+1} = T_n$. Quelle est la valeur de T_{2020} ?
- c. Déterminer la valeur vers laquelle $P_n(3)$ tend lorsque n devient très grand.
- d. Quelle est la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état $(\mathbb{F}, \mathbb{F}, \mathbb{F})$?

EXERCICE 957 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Une urne contient :

- n boules blanches, dont 2 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2;
- $n + 1$ boules rouges, dont 3 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2;
- $n + 2$ boules noires, dont 4 sont numérotées 1, les autres étant numérotées 2.

Toutes les boules sont indiscernables entre elles au toucher.

On prélève successivement, avec remise intermédiaire, 3 boules de l'urne.

On appelle A l'événement : « les trois boules tirées sont de la même couleur ».

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. La probabilité d'obtenir A est $\frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}$.
2. L'événement contraire de A est : « les trois boules tirées sont de couleur deux à deux distincte ».
3. La probabilité que les trois boules tirées soient rouges est constante.
4. La probabilité que les trois boules tirées soient de couleur différente et portent chacune le numéro 1 est $\frac{2}{n} + \frac{3}{n+1} + \frac{4}{n+2}$.

EXERCICE 958 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Soient b et n deux entiers naturels tels que $b > 2$ et $n \geq 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $(b-2)$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on repère sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ainsi n fois cette expérience.

On désigne par :

a_n la probabilité de tirer une alternance de couleurs lors des n tirages.

p_n la probabilité de tirer une boule blanche et une seule lors des $(n-1)$ premiers tirages et une boule noire au n -ième tirage.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. $a_2 = \frac{2}{b} - \frac{4}{b^2}$.
2. $b_3 = \frac{2}{b} \left(1 - \frac{2}{b}\right)$.
3. $p_2 = 1 - \frac{2}{b^2}$.
4. $p_n = \frac{2(n-1)}{b} \left(1 - \frac{2}{b}\right)^{n-1}$.

EXERCICE 959 : VRAI/FAUX**10 minutes**

Un sondage fait état de l'intérêt d'un certain nombre de personnes pour la lecture de trois revues, appelées A, B et C. Tous les chiffres cités ci-dessous font référence à ces personnes sondées.

Parmi les personnes interrogées, 75 lisent A, 58 lisent B et 60 lisent C. On sait de plus que 18 lisent A et B, 18 lisent B et C et 15 lisent A et C. Enfin 3 personnes lisent les trois revues et 5 personnes ne lisent aucune de ces revues.

Par ailleurs parmi les personnes qui ne lisent que la revue A, 20 sont des femmes; parmi les personnes qui ne lisent que la revue B, les deux-cinquièmes sont des femmes; parmi les per-

sonnes qui ne lisent que la revue C, il y a moitié-moitié d'hommes et de femmes.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. 150 personnes ont été sondées.
2. 100 personnes lisent une et une seulement de ces trois revues.
3. On interroge au hasard une personne du sexe masculin qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25% de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.
4. On interroge au hasard une personne qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25% de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

EXERCICE 960 : VRAI/FAUX

10 minutes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- une boule numérotée 0;
- une boule numérotée 1;
- 2^1 boules numérotées 2;
- 2^2 boules numérotées 3;
-
- 2^{k-1} boules numérotées k (où k est un entier compris entre 1 et n);
-
- 2^{n-1} boules numérotées n .

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. L'urne contient $2^n - 1$ boules.
2. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.
3. On a pour $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. On a $E(X) = (n-1)2^n + 1$.

EXERCICE 961

20 minutes

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S »;
- soit malade (atteint par le virus);
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés.
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

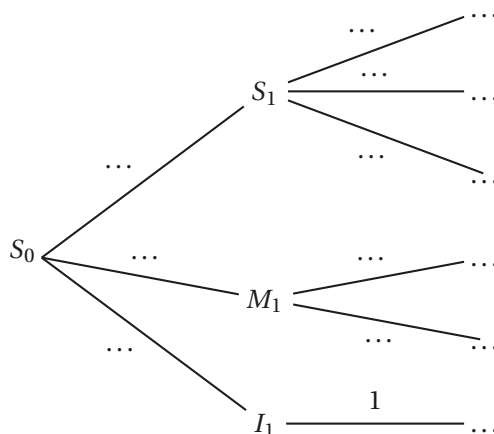
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes : $P(S_0) = 1$; $P(M_0) = 0$ et $P(I_0) = 0$.

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millièmes, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n , M_n et I_n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. A l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

- a.** Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?
 - b.** On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
- 3. a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - b.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n).$$

- 4.** Calculer les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle?

EXERCICE 962

15 minutes

- 1.** Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a , porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a; -5; 1-a)$ et $(1+b; 1; b)$.
Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n , on désigne par :

A_n l'événement : « A gagne la n -ième partie »,

B_n l'événement : « B gagne la n -ième partie »,

C_n l'événement : « le jeu continue après la n -ième partie »

- a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

- b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(A_n) = \frac{3}{16} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. a. Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 963

20 minutes

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement « Amélie est arrêtée par le n^{e} feu rouge ou orange » et $\overline{E_n}$ l'événement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

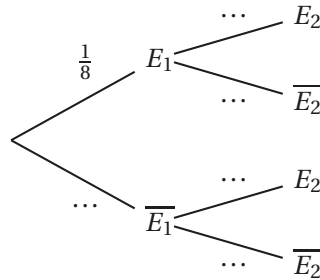
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$;
- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

- a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. On se place maintenant dans le cas général.
 - a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.
 - b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E_n})$, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$
 - c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n .
3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.
 - a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k .
 - b. Exprimer u_n , puis p_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n , quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 964**20 minutes**

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.
 - a. Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
 - b. Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
 - c. Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
 - d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0,99$?
2. Ce tireur participe au jeu suivant :
 Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
 Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

- a. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
- b. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2 .
- c. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2 . On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D ₁	Q ₁	Médiane	Q ₃	D ₉	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé?

EXERCICE 965

20 minutes

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

- On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
 - Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.
 - Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages.
- On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.
- n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.
 - Calculer P_1 , P_2 , P_3 et P_n .
 - Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n .

EXERCICE 966

20 minutes

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :

G_n l'événement « Juliette gagne la n -ième partie »

P_n l'événement « Juliette perd la n -ième partie »

1.
 - a. Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$. En déduire la probabilité $p(G_2)$.
 - b. Calculer $p(P_2)$.
2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
 - a. Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p_{G_n}(P_{n+1})$ et $p_{P_n}(G_{n+1})$.
 - b. Montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$
3. Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
 - b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .
4.
 - a. Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de la suite (x_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 967**20 minutes***Les deux parties sont indépendantes*

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

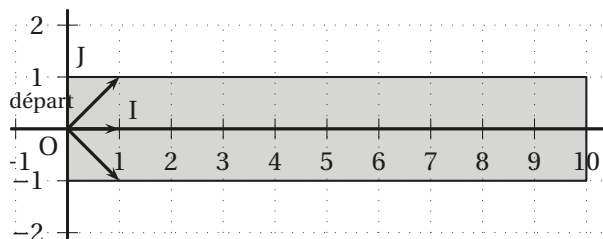
- Soit il avance d'un pas tout droit.
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit).
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'événement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : Modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0; 0)$ au début de la traversée. On note $(x; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```

 $x \leftarrow 0$ 
 $y \leftarrow 0$ 
Tant que  $y \geq -1$  et  $y \leq 1$  et  $x \leq 9$ 
     $n$  prend une valeur choisie au hasard entre  $-1, 0$  et  $1$ 
     $y \leftarrow y + n$ 
     $x \leftarrow x + 1$ 
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » ( $x ; y$ )

```

- On donne les couples suivants : $(-1 ; 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.
- Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est ($x ; y$) », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

- A_n l'événement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
- B_n l'événement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
- C_n l'événement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n .

- Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.
- Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
- Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

- A l'aide d'un tableau, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

EXERCICE 968**20 minutes**

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules.

1. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

A : « Obtenir 2 boules blanches ».

B : « Obtenir 2 boules rouges ».

C : « Obtenir 2 boules de couleurs différentes ».

2. On fixe la règle du jeu suivante : lors d'un tirage de deux boules

- on gagne 10 euros si l'on tire deux boules blanches (événement A) ;
- on gagne 2 euros si l'on tire deux boules rouges (événement B) ;
- on perd 5 euros si l'on tire deux boules de couleur différente (événement C).

On définit ainsi une variable aléatoire X égale au gain, positif ou négatif, associé à une partie. Quelle est l'espérance de gain au cours d'une partie ?

3. On répète 5 fois de suite le tirage, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne, de sorte que les tirages successifs peuvent être considérés comme indépendants. Le joueur est satisfait à chaque fois que A est réalisé.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit satisfait 4 fois sur 5 ? On donnera une valeur décimale approchée à 10^{-5} près.

EXERCICE 969**20 minutes**

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables.

Dans U_1 une boule est marquée G , l'autre est marquée A ; dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5; dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$, l'autre est marquée 2.

Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne. On définit une suite u de la façon suivante :

- si la boule tirée dans U_1 est marquée A , la suite est arithmétique,
- si elle est marquée G , la suite est géométrique;
- la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 ,
- la boule tirée dans U_3 désigne la raison.

1. Calculer la probabilité d'avoir :

- a. une suite u arithmétique;
- b. une suite u convergente;
- c. une suite u telle que u_4 soit un nombre entier pair.

2. Calculer la probabilité d'avoir une suite u qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.

3. Un joueur tire une boule dans chaque urne et définit ainsi une suite numérique u :

- si u est géométrique, il gagne 5 €;
- si u est arithmétique et $u_4 \leq 7$, il perd 4 €;

— si u est arithmétique et $u_4 > 7$, il perd 6 €.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur :

- a. établir la loi de probabilité de X ;
- b. calculer l'espérance de X .

EXERCICE 970

30 minutes

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C;
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C;
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n -ième année est de type C ».

On désigne par p_n , q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n , B_n et C_n .

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n^0) on pose :

$p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Etablir un arbre pondéré illustrant cette situation.
2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1 .
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} &= 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.
 - a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
Dans la suite, on admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

- b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n) .
- c. En déduire les limites des suites (p_n) , (q_n) et (r_n) . Interpréter le résultat.

EXERCICE 971**15 minutes**

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$;
- si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois n » et par B_n l'événement contraire.

On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$, on a $p_1 = \frac{1}{2}$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.
- b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}p_n \quad \text{et} \quad p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}q_n.$$

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1 .

3. Ecrire u_n puis p_n en fonction de n . Déterminer la limite de (p_n) .

EXERCICE 972 : VRAI/FAUX**15 minutes**

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire prenant les valeurs entières $0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n ; n+1$ et vérifiant, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. On a : $P(X \geq 2) = p(X = 1)$.
2. On a : $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.
3. On a : $P(X = n) = P(X = n+1)$.
4. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [P(X \geq n)] = 1$.

EXERCICE 973**15 minutes**

On s'intéresse aux timbres postaux de type P : 80 % d'entre eux comportent deux bandes de phosphore, l'une à gauche et l'autre à droite; les 20 % restants ont une seule bande de phosphore, 10 % parmi ceux-ci à gauche et les autres à droite.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. La probabilité pour qu'un timbre de type P (choisi au hasard) ait une bande de phosphore à droite est $p_1 = 0,98$.
2. Une machine détecte sur un timbre de type P une bande de phosphore à droite. La probabilité pour que le timbre ait deux bandes de phosphore est $p_2 = \frac{4}{49}$.

Sur une enveloppe, on a collé trois timbres de type P, choisis au hasard et de manière indépendante.

3. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe un total de 5 bandes de phosphore est $p_3 = 0,128$.
4. La probabilité d'avoir sur l'enveloppe au moins 5 bandes de phosphore est égale à la probabilité d'en avoir au plus 4.

EXERCICE 974**15 minutes**

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

- a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges?
- b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires?
- c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur?
- d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.

On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les trois boules tirées sont rouges »

D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »

B : « La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».

- a. Calculer la probabilité de l'événement R .
- b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur?
- c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

EXERCICE 975**15 minutes**

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la

règle suivante :

- si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ;
- si elle est blanche, on ne la remet pas.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'événement « seule la k -ième boule tirée est blanche ». Par exemple, E_1 est l'événement « seule la première boule tirée est blanche ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1) = \frac{5}{36}$.

2. Calculer les probabilités des événements E_2 et E_3 .

En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.

3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

Partie B

On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0,99$?

EXERCICE 976

15 minutes

1. Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$?

Dans **toute la suite du problème** on prend $n = 4$.

2. Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

- A_0 l'événement : « le joueur a tiré deux boules noires » ;
- A_1 l'événement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche » ;
- A_2 l'événement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».

- a. Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1 .

- b. Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.

Soit X le nombre de points marqués.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Déterminer $E(X)$.

3. Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules. Soit B_i l'événement : « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0, 1$ ou 2).

- a. Donner $p_{A_2}(B_0)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.
En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.
- b. Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$.
- c. En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE 977**20 minutes**

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leq n \leq 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a. R : « la boule tirée est rouge »;
 - b. B : « la boule tirée est blanche »;
 - c. V : « la boule tirée est verte ».
2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous. Le joueur tire une boule de l'urne
 - si elle est rouge, il gagne 16 € ;
 - si elle est blanche, il perd 12 € ;
 - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
 - si cette boule est rouge, il gagne 8 € ;
 - si cette boule est blanche, il perd 2 € ;
 - si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.

Au début de la partie, le joueur possède 12 €.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).

- a. Déterminer les valeurs prises par X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Montrer que l'espérance mathématique de X est $12 + 16 \frac{n}{(n+7)^2}$.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.
Etudier les variations de f .
4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

EXERCICE 978**20 minutes**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

- a. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'événement A peut s'écrire : $p(A) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$.
- b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ». Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'événement B peut s'écrire $p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$.

3. Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 .

- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ €.
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €.
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

- a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
- b. Déterminer la loi de probabilité de X .
- c. Calculer l'espérance mathématique de X .
- d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 979**25 minutes**

1. Soit n un entier naturel et P le polynôme $P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

- a. Exprimer $P(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle.
- b. En dérivant P , exprimer $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ sous forme d'une fraction.

2. Une expérience consiste à lancer vingt fois de suite une pièce de monnaie. A chacun des vingt lancers on note 1 si « pile » apparaît, 0 si « face » apparaît. Un résultat d'une telle expérience est donc une suite de vingt nombres dont chacun est égal à 0 ou à 1. On appelle Ω l'ensemble des résultats possibles et on admet que les résultats possibles sont équiprobables.

- a. Quel est le nombre d'éléments de Ω ?
- b. On définit sur Ω la variable aléatoire, qui, à chaque résultat possible fait correspondre le rang du premier « 1 » dans la suite des vingt nombres correspondants (au résultat dont

tous les termes sont nuls, on fait correspondre 0).

Calculer l'espérance mathématique de X , à un dix millièmè près.

EXERCICE 980**20 minutes**

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématique est-elle strictement supérieure à 10 ?
3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
 - soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
 - soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

EXERCICE 981**20 minutes**

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules rouges. Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. A l'issue d'un tirage de trois boules :
 - si aucune boule n'est rouge, le joueur perd 10 € ;
 - si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 € ;
 - si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 €. X est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage. Donner la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
2. Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites. Y est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages.
 - a. Donner les valeurs possibles pour Y (on pourra utiliser un tableau à double entrée).
 - b. Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 10 € à l'issue des deux parties. (On pourra s'aider d'un arbre ou le tableau précédent.)
 - c. Etablir la loi de probabilité de Y .
 - d. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

EXERCICE 982**20 minutes**

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,4

- a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
- C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
 C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
 E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».
- a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.
 - b. Montrer que $P_{C_2}(E) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
 - c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.
- a. Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b. Calculer $E(Y)$.

EXERCICE 983**15 minutes**

Un meuble est composé de 10 tiroirs $T_1, T_2, \dots, T_{10}$.

Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de *trouver la tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :

la personne ouvre le tiroir T_1 .

Si la boule est dans le tiroir T_1 , la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2 , et ainsi de suite ... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.

Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leq i \leq 10$), on appelle B_i l'événement « La boule se trouve dans le tiroir T_i ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X .
2. a. Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leq i \leq 8$), l'événement $(X = i)$ est l'événement B_i .
- b. Justifier que l'événement $(X = 9)$ est la réunion des événements B_9 et B_{10} .
- c. Déterminer la loi de probabilité de X .
- d. Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 984**15 minutes**

Un jeu consiste à lancer simultanément deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (un dé vert et un dé rouge), et à lire les points marqués sur chacune des faces supérieures. Chaque face a la même probabilité d'apparaître.

Les résultats sont donnés sous la forme d'un couple, le premier nombre correspondant aux points marqués sur le dé vert. Par exemple : (2 ; 5) signifie 2 sur la face supérieure du dé vert et 5 sur celle du dé rouge. La somme S des points marqués est alors 7.

1. Combien y a-t-il de couples possibles?
2. a. Quelle est la probabilité p_1 pour que la somme S des points marqués soit un multiple de 5?
b. Quelle est la probabilité p_2 pour que la somme S des points marqués soit un multiple de 2 qui ne soit pas multiple de 5?
3. Un joueur gagne 3 € si la somme S est un multiple de 5 et 2 € si S est un nombre pair qui n'est pas multiple de 5.
Il perd 4 € dans les autres cas.
On appelle X la variable aléatoire représentant en euros la somme gagnée ou perdue.
Déterminer la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique $E(X)$.
Le jeu est-il avantageux pour le joueur?

EXERCICE 985**15 minutes**

On veut ranger trois boules distinctes numérotées de 1 à 3 dans deux cases A et B . On suppose que chacune des cases peut contenir de zéro à trois boules. La place des boules dans les cases est considérée comme sans importance.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. Montrer qu'il y a 2^3 rangements possibles.
2. On suppose que tous les rangements ont la même probabilité de se réaliser. Calculer les probabilités des événements suivants :
 E : « toutes les boules sont dans la case A »
 F : « il n'y a pas de boule dans la case A »
 G : « A contient la boule portant le numéro 2 ».
3. Soit X la variable aléatoire qui, à tout rangement associe le nombre de boules contenues dans la case A .
 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 986**30 minutes**

Un jeu de hasard consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée :

- Si la pièce tombe sur « Pile », le joueur perd 1 €.
- Si la pièce tombe sur « Face », le joueur gagne 1 €.

Un joueur commence avec une mise de N euros (N entier positif), il effectue plusieurs lancers.

On note S la somme dont il dispose à la fin du jeu. On admet que le jeu s'arrête si le joueur perd la totalité de sa mise. Lorsque la mise est perdue, on dit que le joueur est ruiné. Par exemple, si $N = 3$ et qu'il obtient *Face, Pile, Pile, Pile, Pile*, alors il est ruiné.

Partie A : Mise de 4 euros

On suppose dans cette partie que $N = 4$.

1. Combien de lancers peut-il effectuer au maximum pour avoir la garantie de ne pas être ruiné?
2. Un joueur décide de s'arrêter au bout de troisième lancer.
 - a. Représenter cette situation par un arbre.
 - b. Compléter le tableau de probabilités suivant :

Somme s_i après trois lancers					
$P(S = s_i)$					

3. Il décide de poursuivre jusqu'au cinquième lancer.
Quelle est la probabilité qu'il soit ruiné?

Partie B : Mise de 6 euros

On suppose dans cette partie que $N = 6$.

Un joueur décide d'effectuer jusqu'à huit lancers. Par exemple, un tirage obtenu pour huit lancers serait : *PPFPFF*, pour une somme finale de 8 €.

1. Quelle est la somme maximale dont peut disposer le joueur à l'issue de ce jeu? Donner le(s) tirage(s) offrant cette somme maximale.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne aucun lancer, c'est-à-dire qu'il n'obtienne jamais *Face*?
3.
 - a. Lister les tirages menant à la ruine.
 - b. Déterminer $P(S = 0)$, autrement dit la probabilité que le joueur soit ruiné.
4.
 - a. Est-il possible que la somme finale S soit égale à 10 €? Si oui, donner un tirage possible menant à cette somme, et déterminer le nombre total de tels tirages.
 - b. Quelle est la probabilité que la somme S soit égale à 13 €?
 - c. Quelle est la probabilité que le joueur dispose, à l'issue du jeu, d'une somme paire?

Partie C : Généralisation

On appelle N la mise de départ, N étant un entier positif quelconque.

Un joueur décide d'effectuer jusqu'à $N + 2$ lancers.

Déterminer la probabilité que le joueur soit ruiné à l'issue du jeu.

EXERCICE 987

10 minutes

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires, chaque boule ayant même probabilité d'être tirée.

On tire successivement 3 boules en remettant la boule après tirage si celle-ci est noire et ne remettant pas la boule après tirage si celle est blanche.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 3 boules associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance et l'écart type de X .

EXERCICE 988**20 minutes**

Les réponses seront données sous forme de fractions.

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'événement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 l'événement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de l'événement A .

1. Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{19}$.
2. a. Calculer directement la probabilité conditionnelle $p_{A_1}(A_2)$ de l'événement A_2 sachant que A_1 est réalisé.
b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.
3. a. Calculer la probabilité $p_{\bar{A}_1}(A_2)$.
b. En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$, calculer la probabilité $p(A_2)$ puis en déduire que $p(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.
a. Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X .
b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

EXERCICE 989**20 minutes**

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un second service.

La probabilité pour que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$.

S'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, il y a « double faute », sinon, la mise en jeu est réussie.

1. a. Donner la probabilité pour que le second service ne soit pas réussi, sachant que le premier service n'est pas réussi.
b. Montrer que, sur une mise en jeu, la probabilité pour que ce joueur fasse une double faute est égale à $\frac{1}{15}$.
c. En déduire la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

2. Ce joueur fait un pari avec un de ses camarades. Il effectue 10 mises en jeu successives (de manière indépendante). Les résultats seront arrondis au millième.
- Calculer la probabilité p_{10} pour que le joueur réussisse les 10 mises en jeu.
 - Calculer la probabilité p_9 pour que le joueur réussisse 9 mises en jeu.
 - S'il réussit 10 ou 9 mises en jeu, il gagne 10 € par mise en jeu réussie. Sinon, il perd 50 €. Soit X la variable aléatoire représentant la somme gagnée (comptée positivement), ou perdue (comptée négativement), par ce joueur.
 - Etablir la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

EXERCICE 990 : LOI GÉOMÉTRIQUE TRONQUÉE**20 minutes**

Math cherche à joindre par téléphone un service médical. La probabilité que son appel soit pris sans attente est de 0,3. Si son appel n'est pas pris sans attente, Math raccroche son téléphone et fait une autre tentative. Il fait au maximum trois tentatives.

On note X la variable aléatoire égale au rang de son premier appel aboutissant sans attente. Si au bout de trois appels Math n'a pas réussi à joindre le service médical sans attente, on convient alors que $X = 0$.

On note R l'événement : « Math est mis en relation avec le service médical sans attente ».

- Représenter la situation par un arbre de probabilités.
- Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
- Déterminer alors la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X , et interpréter ce résultat.
- Reprendre la loi de probabilité (sans faire l'arbre de probabilités) en supposant que Math s'accorde au maximum six tentatives.

EXERCICE 991 : LOI GÉOMÉTRIQUE**20 minutes**

On jette un dé truqué jusqu'à ce que le 6 apparaisse pour la première fois.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6.

On suppose que la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à p avec $p \in]0; 1[$.

- Calculer, en fonction de p , la probabilité que le 6 apparaisse au $k^{\text{ème}}$ lancer.
- Démontrer que $P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k$.
- Démontrer que la loi géométrique est sans mémoire, c'est-à-dire que :
Pour tous entiers naturels non nuls n et k , $P_{X>k}(X > n + k) = P(X > n)$.
- Démontrer que $E(X) = \frac{1}{p}$.
- On suppose que $p = 0,2$
 - Calculer la probabilité que le 6 apparaisse au 3^e lancer.
 - Calculer $P(X \leq 4)$. Interpréter le résultat.
 - Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 992**20 minutes**

Une urne contient 3 boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a (a est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

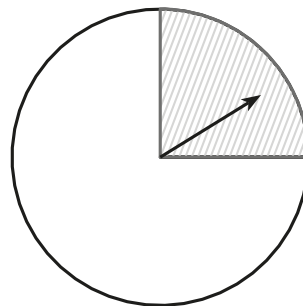
Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne :

1. Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
 - a. trois boules de la même couleur;
 - b. trois boules de couleurs différentes;
 - c. deux boules et deux seulement de la même couleur.
2. Le joueur reçoit, en euros, la somme des numéros marqués sur les boules tirées. Les gains possibles du joueur sont donc : 0 ; 5 ; 10 ; a ; $5 + a$; $10 + a$.
 - a. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a .
 - c. Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit de 20 euros.

EXERCICE 993 : Loi binomiale**20 minutes****Partie A : Une expérience aléatoire élémentaire**

On fait tourner la roue de loterie représentée ci-contre. On gagne si l'issue « la flèche tombe dans la zone grise » se réalise.

On note S (comme « succès ») cette issue et E (comme « échec ») l'autre issue. On suppose que $P(S) = \frac{1}{4}$. Préciser l'issue E et donner sa probabilité $P(E)$.

**Partie B : Quatre répétitions**

On répète quatre fois l'expérience élémentaire de la première partie de façon indépendante.

1. a. Représenter cette nouvelle expérience par un arbre.
 b. Quelles sont les probabilités des issues $SESE$ et $EESS$?
 c. Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir deux succès »?
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de succès obtenus au cours des 4 répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X .

☞ On dira que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,25$.

Partie C : Vingt répétitions

On répète vingt fois l'expérience élémentaire de la première partie de façon indépendante.

Y donne le nombre de succès obtenus au cours de ces 20 répétitions.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements ($Y = 0$) et ($Y = 20$).
 2. a. Calculer la probabilité de l'issue SSSSSSSSEEEEEEEEEEEEEEE.
 b. Que se passe-t-il si on modifie l'ordre des S et des E, sans en changer le nombre?
 c. Que nous manque-t-il pour connaître la probabilité $P(Y = 7)$?
 d. On note $\binom{20}{7}$ le nombre de chemins représentant l'événement ($Y = 7$) sur un arbre illustrant cette expérience. Exprimer $P(Y = 7)$.
 e. En utilisant une calculatrice, déterminer $\binom{20}{7}$
Casio : OPTION - PROBA - 20 nCr 7
NumWorks : Calculs - Toolbox - Dénombrement - binomial(n, k)
T.I. : 20 - MATH - PROBA- nCr 7
 f. En déduire une valeur approchée de $P(Y = 7)$ à 10^{-4} près.
- ☞ On dira que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

EXERCICE 994 : LOI BINOMIALE**15 minutes**

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4}

1. Julien lance le ballon huit fois de suite. Les huit lancers sont indépendants les uns des autres.
 - a. Montrer que la probabilité que Julien ne marque aucun panier est égale à 0,0007.
 - b. Calculer la probabilité que Julien marque au moins un panier.
 - c. Calculer la probabilité que Julien marque exactement 6 paniers.
2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999?

EXERCICE 995**30 minutes**

Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier naturel.

Partie A : Listes

1. Combien de mots de trois lettres peut-on faire avec les lettres a, b, c et d . On peut utiliser une lettre plusieurs fois, les mots n'ont pas forcément une signification.
2. Soit E un ensemble composé de n éléments distincts. On appelle **p-uplet** une liste de p éléments pris dans E .
 Démontrer qu'il y a n^p p-uplets différents.
3. **Application :**
 - a. Déterminer le nombre de manières d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chacune des cinq boulangeries d'une même ville.
 - b. Les initiales d'une personne sont le couple formé par la première lettre de son prénom et la première lettre de son nom (qu'ils soient composés ou non).
 Montrer que, dans un village de 667 habitants ou plus, il existe au moins deux personnes ayant les mêmes initiales.

Partie B : Arrangements et permutations

1. Huit chevaux participent à une course. Combien y a-t-il de classement possibles? (on classe tous les chevaux en supposant qu'ils franchissent tous la ligne d'arrivée).
2. Démontrer que le nombre de p -uplets à éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ avec $p \leq n$. Ce nombre est un arrangement de p éléments pris parmi n , il se note A_p^n .
3. Vérifier que $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$.
4. On appelle permutation, un arrangement de n éléments parmi n . Vérifier qu'il y a $n!$ permutations de n éléments.
5. **Application :**
 - a. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot TIRAGES (les anagrammes n'ont pas obligatoirement une signification).
 - b. Quelle est la probabilité qu'un anagramme du mot TIRAGES commence par un A et finisse par un E?

Partie C : Combinaisons

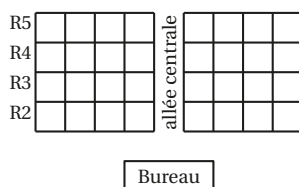
1. Math dispose d'une urne contenant six boules numérotées de 1 à 6. Combien de tirages de 3 boules simultanément peut faire Math?
2. On appelle **combinaison** de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments ($p \leq n$). Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est $\binom{n}{p}$.

Démontrer que $\binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

3. **Application :** Le loto de la Française des Jeux vient de modifier ses règles :
 - dans l'ancienne formule, il fallait cocher 6 cases sur une grille dont les cases sont numérotées de 1 à 49;
 - dans la nouvelle formule, il faut cocher 5 cases sur une grille dont les cases sont numérotées de 1 à 49, puis choisir un « numéro de la chance » entre 1 et 10.
 Un gagnant du premier rang 1 a coché les 6 numéros sortis au tirage.
 - a. Quelle était la probabilité de gagner au rang 1 avec l'ancienne formule?
 - b. Quelle est la probabilité de gagner au rang 1 avec la nouvelle formule?
 - c. Commenter ces résultats.

EXERCICE 996**15 minutes**

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont.



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de 1^{re}5 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle.

La classe de 1^{re}5 comporte 28 élèves.

1.
 - a. Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées?
 - b. Calculer à 10^{-3} près, les probabilités des événements suivants :
 A : « les huit places du rang R4 sont toutes occupées » ;
 B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale ».
2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire « nombre de places inoccupées au rang R4 ».
 - a. Donner la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 997

20 minutes

Six personnes jouent au bowling. On appelle *strike* le fait de renverser toutes les quilles d'un seul lancer de boule.

Parmi les six personnes, quatre d'entre elles, qui ont l'expérience du jeu, réussissent le *strike* avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$.

Les deux autres débutantes, réussissent le *strike* avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Partie A

Un des six joueurs désigné par le hasard se prépare à lancer la boule.

On note E l'événement : « c'est un des quatre joueurs expérimentés » et S l'événement : « le joueur fait *strike* ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement $E \cap S$: « le joueur est expérimenté et réussit son *strike* ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\bar{E} \cap S$: « le joueur est débutant et réussit son *strike* ».
3. En déduire la probabilité de l'événement S .
4. Un *strike* vient d'être réussi. Quelle est la probabilité pour que le joueur qui l'a réussi soit un débutant?

Partie B

Parmi les six joueurs, on choisit un joueur A expérimenté, et un joueur B débutant.

Ils jouent chacun quatre parties; une partie consistant à lancer une seule boule : si c'est *strike* la partie est gagnée, sinon elle est perdue. La probabilité de gagner une partie est donc égale à $\frac{3}{4}$ pour le joueur A et à $\frac{1}{4}$ pour le joueur B .

1. On note X le nombre de parties gagnées par le joueur A ; donner la loi de probabilité de X (on donnera les résultats sous forme de fractions de dénominateur 256).
2. On note Y le nombre de parties gagnées par le joueur B ; on suppose que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

$Y = y_i$	0	1	2	3	4
Probabilité de $Y = y_i$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Si x_i et y_i sont des éléments de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, on suppose que les événements « $X = x_i$ » et « $Y = y_i$ » sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement « $X < Y$ » c'est-à-dire que le joueur B gagne davantage de parties que le joueur A .

EXERCICE 998**15 minutes**

Deux tireurs A et B visent une cible.

Soit l'univers $\Omega : \Omega = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$ où chaque élément de Ω est un couple

de premier élément : + si A atteint la cible, – sinon

de deuxième élément : + si B atteint la cible, – sinon

La probabilité sur Ω est définie par :

$$p(+, +) = \frac{1}{32}, p(+, -) = \frac{7}{32}, p(-, +) = \frac{3}{32} \text{ et } p(-, -) = \frac{21}{32}.$$

1. Déterminer la probabilité pour que A atteigne la cible.
2. Déterminer la probabilité pour que B atteigne la cible.
3. Les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont-ils indépendants?
4. A tire 5 fois. On admet que les cinq tirs sont indépendants entre eux. Quelle est la probabilité pour que A atteigne la cible au-moins quatre fois?

EXERCICE 999 : LOI BINOMIALE**20 minutes**

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h. Sur le parcours, il rencontre 5 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{3}{4}$ et celle qu'il soit au rouge ou à l'orange est $\frac{1}{4}$. Un feu rouge ou orange fait perdre une minute et demie.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. a. Exprimer T en fonction de X .
b. Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
3. L'élève part 20 minutes avant le début des cours, il lui faut 6 minutes pour attacher son vélo et rejoindre sa salle de classe.
 - a. Peut-il espérer être à l'heure pour son premier cours?
 - b. Calculer la probabilité qu'il arrive en retard.
 - c. 5 minutes après la sonnerie, un élève ne peut plus entrer en classe et doit se rendre en salle de permanence. Quelle est la probabilité qu'il passe sa première heure de cours en salle de permanence?

EXERCICE 1000**20 minutes****Formule du binôme :** Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel strictement positif.

On a $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$.

1. En déduire un développement de $(a+b)^5$ et $(a-b)^5$
2. Calculer les sommes $S_0 = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$, $S_1 = \sum_{2p=0}^n \binom{n}{2p}$ et $S_2 = \sum_{2p+1=1}^n \binom{n}{2p+1}$.
3. Calculer la somme $S = \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$

EXERCICE 1001**20 minutes**

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on rappelle que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

1. Vérifier que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.
2. Démontrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$.

Chapitre 6

Corrigés

6.1 Polynômes du second degré

EXERCICE 1

Les fonctions 3 (présence de $\sqrt{x}$) et 4 (fonction rationnelle) ne sont pas des fonctions polynômes.

EXERCICE 2

1. $f(x) = 3x^5 + x^2 - 3$ est de degré 5
2. $f(x) = 1 + 9x + 4x^8$ est de degré 8
3. $f(x) = x^2 - 2x^4 + 6x^3$ est de degré 4
4. $f(x) = x^3 + 2x - 2$ est de degré 3
5. $f(x) = -6x^{201} + 4x^{102} + 8$ est de degré 201
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ est de degré 3

EXERCICE 3

Pour répondre aux questions, il suffit de considérer le terme de plus haut degré dans chaque parenthèse, puis le terme de degré le plus bas.

1. $Deg(f) = 5$, le coefficient du plus haut degré est 1, le coefficient du degré le plus bas est -16 .
2. $Deg(f) = 7$, le coefficient du plus haut degré est 10, le coefficient du degré le plus bas est -28 .
3. $Deg(f) = 5$, le coefficient du plus haut degré est -4 , le coefficient du degré le plus bas est -9 .
4. $Deg(f) = 8$, le coefficient du plus haut degré est -2 , le coefficient du degré le plus bas est 14.
5. $Deg(f) = 229$, le coefficient du plus haut degré est -6 , le coefficient du degré le plus bas est -72 .
6. $Deg(f) = 5$, le coefficient du plus haut degré est 2, le

coefficient du degré le plus bas est 1.

EXERCICE 4

PQ est de degré 5, PR est de degré 7, QR est de degré 8 et PQR est de degré 10.

EXERCICE 5

1. $(x^2 + x + 1) \times P(x)$ est de degré $n + 2$.
2. $P^3 = P \times P \times P$ est de degré $3n$.
3. P^k est de degré kn , avec k un entier naturel non nul.
4. λP est de degré n , avec λ réel non nul.

EXERCICE 6

Dans chaque cas, on vérifie que $f(x_0) = 0$.

EXERCICE 7

Dans chaque cas, on applique la propriété :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

1. Les racines sont -1 et 2.
2. Les racines sont $-\frac{3}{2}$ et -2 .
3. Les racines sont 2 et $\frac{1}{3}$.
4. Les racines sont -1 et 1.
5. La racine (double) est 2.
6. Les racines sont $-\frac{3}{2}$, 1 et 2.

EXERCICE 8

1. $f(x) = (x+1)^2 - 4$
2. $f(x) = (x+2)^2 + 5$
3. $f(x) = (x-3)^2 - 10$
4. $f(x) = (x-1)^2 - 4$
5. $f(x) = (x-5)^2 - 15$
6. $f(x) = (x+9)^2 - 51$

EXERCICE 9

1. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
2. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$
3. $f(x) = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$
4. $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$
5. $f(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$
6. $f(x) = \left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{105}{4}$

EXERCICE 10

1. $f(x) = 2(x+1)^2 - 5$
2. $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{107}{12}$
3. $f(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$
4. $f(x) = 5\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{31}{5}$
5. $f(x) = -4\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{33}{4}$
6. $f(x) = -5\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{51}{5}$

EXERCICE 11

1. $f(x) = (x+1)^2 - 4$
 $a > 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f		-4	

2. $f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{31}{3}$
 $a < 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f		$\frac{31}{3}$	

3. $f(x) = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{13}{4}$
 $a > 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f		$-\frac{13}{4}$	

4. $f(x) = -5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{21}{5}$
 $a < 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
f		$\frac{21}{5}$	

5. $f(x) = (x-5)^2 - 15$
 $a > 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f		-15	

6. $f(x) = 3(x+3)^2 + 3$
 $a > 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f		3	

EXERCICE 12

1. $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
2. Par identification des coefficients de même degré, on

$$\text{obtient le système } \begin{cases} a = 2 \\ b-a = -3 \\ c-b = -4 \\ -c = 5 \end{cases}$$

En résolvant le système, nous obtenons : $a = 2$,
 $b = -1$ et $c = -5$ d'où $f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 5)$.

EXERCICE 13

1. $(x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$.

2. Par identification des coefficients de même degré, on

$$\text{obtient le système } \begin{cases} a &= 2 \\ 2a + b &= 5 \\ 2b + c &= -2 \\ 2c &= -8 \end{cases}$$

En résolvant le système, nous obtenons : $a = 2$, $b = 1$ et $c = -4$ d'où $f(x) = (x+2)(2x^2 + x - 4)$.

EXERCICE 14

On remarque que le terme de plus haut degré est $3x^3$ dans la première expression et ax^3 d'où $a = 3$. De manière analogue en utilisant le terme de plus bas degré, on obtient $c = -1$.

EXERCICE 15

En procédant comme dans l'exercice 14, on obtient $a = 1$ et $c = 1$.

EXERCICE 16

En procédant comme dans l'exercice 14, on obtient $a = -5$ et $c = 6$.

EXERCICE 17

1. En procédant comme dans l'exercice 14, on obtient $a = 1$ et $c = 4$.
2. $(x-2)(x^2 + bx + 4) = x^3 + (b-2)x^2 + (4-2b)x - 8$ on en déduit alors que $b = -4$.
3. D'après les questions précédentes,
 $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^3$.

EXERCICE 18

1. On remarque que la somme des coefficients est nulle, donc 1 est une racine de f .
En effet $f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$.
2. On remarque que le terme constant est nul, donc 0 est une racine de f .
En effet, $f(0) = 2 \times 0^3 + 3 \times 0^2 + 0 = 0$.
La somme des coefficients des termes de puissance paires est égale au coefficient du terme impair, donc -1 est une racine de f .
3. 2 est une racine de f .
En effet, $f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$.
La somme des coefficients des termes de puissance

paires et égale au coefficient du terme impair, donc -1 est une racine de f .

4. On remarque que la somme des coefficients des termes de degrés pairs est égale à la somme des coefficients des termes de degrés impairs, donc -1 est une racine de f .
En effet, $f(-1) = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$.
5. -2 est une racine de f .
En effet, $f(-2) = -6 \times (-2)^2 - 10 \times (-2) + 4 = 0$.
6. On remarque que la somme des coefficients est nulle, donc 1 est une racine de f .
En effet $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$

EXERCICE 19

1. $\mathcal{A}(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$.
2. En utilisant la forme canonique, on obtient
 $\mathcal{A}(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. La somme des aires sera minimale pour $x = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 20

Soit x la largeur de la zone de baignade, la longueur est égale à $(150 - 2x)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= (150 - 2x)x = -2(x^2 + 75x) \\ &= -2(x - 37,5)^2 + 2812,5. \end{aligned}$$

Le maximum sera atteint pour $x = 37,5$ m, l'aire sera alors égale à $2812,5 \text{ m}^2$.

EXERCICE 21

Soit x la largeur du rectangle, sa longueur sera alors $2x$ et son périmètre $6x$. Le périmètre du carré est égal à $1 - 6x$ alors le côté est de longueur $\frac{1}{4}(1 - 6x)$.

La somme des deux aires est

$$\mathcal{A}(x) = x \times 2x + \left(\frac{1}{4}(1 - 6x)\right)^2 = \frac{17}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}.$$

Le minimum est obtenu pour $x = \frac{3}{34}$, le périmètre du rectangle sera alors égal à $\frac{9}{17}$ m, celui du carré à $\frac{8}{17}$ m.

EXERCICE 22

1. Le point M varie entre A et B , on en déduit donc que $0 \leq x \leq 2$.
2. Soit $\mathcal{A}_0$ l'aire de $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}_1$ l'aire de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{A}_2$ l'aire de $\mathcal{D}_2$.
 $\mathcal{A}_0 = \pi$, $\mathcal{A}_1 = \frac{\pi x^2}{4}$ et $\mathcal{A}_2 = \frac{\pi(2-x)^2}{4}$

3. $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \pi - \frac{\pi(2x^2 - 4x + 4)}{4}$
 $= -\frac{\pi}{2}x^2 + \pi x$.
4. $a < 0$, on en déduit le tableau de variations :

x	0	1	2
f		$\frac{\pi}{2}$	
	0		0

5. $\mathcal{A}$ est maximale pour $x = 1$, elle sera égale à $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 23

1. $AH = 4 - x$, l'aire de AHJI est alors égale à $(4 - x)^2$.
 L'aire de la partie hachurée est donnée par
 $M = (4 - x)^2 - 2^2$.
2. $Q = (4 - x)^2 - 4 = x^2 - 8x + 12$.
3. $Q = (4 - x - 2)(4 - x + 2) = (2 - x)(6 - x)$.
4. Pour $x = 2$, $Q = 0$. L'aire hachurée est alors nulle.

EXERCICE 24

1. $f(x) = 2x^2 - 13x + 6$.
2. $f(x) = (2x - 1)(x - 6)$.
3. En utilisant la forme développée, nous obtenons :
 $f(x) = 2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{121}{8}$.
4. a. $f(0) = 6$ (utilisation de la forme développée),
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ (utilisation de la forme factorisée),
 $f(1 + \sqrt{2}) = -1 - 9\sqrt{2}$ (utilisation de la forme développée),
 $f\left(\frac{13}{4}\right) = -\frac{121}{8}$ (utilisation de la forme canonique).
- b. D'après la forme canonique, f admet un minimum en $\frac{13}{4}$, ce minimum est égal à $-\frac{121}{8}$.
- c. D'après la forme factorisée, les racines de f sont $\frac{1}{2}$ et 6.

EXERCICE 25

1. $f(x) = (2x - 3)(3x + 2)$.
2. $f(x) = 6x^2 - 5x - 6$.
3. $f(x) = 6\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{169}{24}$.
4. a. $f(0) = -6$ (utilisation de la forme développée),
 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ (utilisation de la forme factorisée),

- $f(\sqrt{3}) = 12 - 5\sqrt{3}$ (utilisation de la forme développée),
 $f\left(\frac{5}{12}\right) = -\frac{169}{24}$ (utilisation de la forme canonique).
- b. D'après la forme canonique, f admet un minimum en $\frac{5}{12}$, ce minimum est égal à $-\frac{169}{24}$.
- c. D'après la forme factorisée, f admet deux racines $\frac{3}{2}$ et $-\frac{2}{3}$.

EXERCICE 26

1. $f(x) = (2x + 3)(2x - 3) + (2x + 3)(x - 1)$
 $= (2x + 3)(3x - 4)$.
2. $f(x) = 6x^2 + x - 12$.
3. $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{289}{24}$.
4. a. $f(0) = -12$ en utilisant la forme développée
 $f(1) = -5$, en utilisant la forme factorisée
 $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, en utilisant la forme développée
 $f\left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{289}{24}$, en utilisant la forme canonique.
- b. D'après la forme canonique, f admet un minimum en $-\frac{1}{12}$, ce minimum est égal à $-\frac{289}{24}$.
- c. D'après la forme factorisée, f admet deux racines $-\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

EXERCICE 27

1. $f(x) = -2x^2 - 10x - 8$.
2. $f(x) = -2(x + 4)(x + 1)$.
3. $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$.
4. a. $f(0) = -8$, $f(-4) = 0$, $f(3\sqrt{2}) = -44 - 30\sqrt{2}$ et
 $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{2}$.
- b. D'après la forme canonique, f admet un maximum en $-\frac{5}{2}$, ce maximum est égal à $\frac{9}{2}$.
- c. D'après la forme factorisée, f admet deux racines -4 et -1 .

EXERCICE 28

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

EXERCICE 29

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines 1 et 2, il s'écrit donc sous forme factorisée

$$f(x) = a(x-1)(x-2).$$

Sachant de plus que $f(0) = 2a$ et que par hypothèse $f(0) = 2$, on en déduit que $a = 1$. Ainsi $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

EXERCICE 30

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -3 et 4 , il s'écrit donc sous forme factorisée

$$f(x) = a(x+3)(x-4).$$

Sachant de plus que $f(0) = -12a$ et que par hypothèse $f(0) = -2$, on en déduit que $a = \frac{1}{6}$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - 2.$$

EXERCICE 31

La fonction polynôme du second degré f admet pour racines -2 et 2 , il s'écrit donc sous forme factorisée $f(x) = a(x+2)(x-2)$.

Sachant de plus que $f(0) = -4a$ et que par hypothèse $f(0) = 8$, on en déduit que $a = -2$. Ainsi $f(x) = -2x^2 + 8$.

EXERCICE 32

$f(2) = 8 - 20 - 14 + 26 = 0$, 2 est une racine du polynôme f donc il existe un polynôme $g(x)$ de degré 2 tel que $f(x) = (x-2)g(x)$ c'est-à-dire $f(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 26$ est divisible par $x-2$.

En considérant le coefficient de degré 3 et celui de degré 0 , on obtient $f(x) = (x-2)(x^2 + bx - 13)$.

En effectuant un développement partiel (degré 2 par exemple), on obtient $b = -3$.

$$\text{Ainsi } f(x) = (x-2)(x^2 - 3x - 13).$$

EXERCICE 33

$f(2) = 8 - 32 + 50 - 26 = 0$, 2 est une racine du polynôme f donc il existe un polynôme $g(x)$ de degré 2 tel que $f(x) = (x-2)g(x)$ c'est-à-dire $f(x) = x^3 - 8x^2 + 25x - 26$ est divisible par $x-2$.

En considérant le coefficient de degré 3 et celui de degré 0 , on obtient $f(x) = (x-2)(x^2 + bx + 13)$.

En effectuant un développement partiel (degré 2 par exemple), on obtient $b = -6$.

$$\text{Ainsi } f(x) = (x-2)(x^2 - 6x + 13).$$

EXERCICE 34

1. $P(-5) = 0$, $P(-3) = 0$ et $P(7) = 0$.

2. D'après la question précédente, 5 , -3 et 7 sont racines de P , on peut donc écrire

$$P(x) = (x+5)(x+3)(x-7)(ax+b).$$

En effectuant le produit des termes de degré 1 , on obtient $a = 1$.

En effectuant le produit des termes de degré 0 , on obtient $b = -9$.

$$\text{D'où } P(x) = (x+5)(x+3)(x-7)(x-9)$$

3. La quatrième racine du polynôme P est donc 9 .

EXERCICE 35

1. $P(-4) = 0$, $P(-1) = 0$ et $P(2) = 0$.

2. D'après la question précédente, -4 , -1 et 2 sont racines de P , on peut donc écrire

$$P(x) = (x+4)(x+1)(x-2)(ax+b).$$

En effectuant le produit des termes de degré 1 , on obtient $a = 2$.

En effectuant le produit des termes de degré 0 , on obtient $b = -3$.

$$\text{D'où } P(x) = (x+5)(x+3)(x-7)(2x-3).$$

3. La quatrième racine du polynôme P est donc $\frac{3}{2}$.

EXERCICE 36

La fonction polynôme $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ est divisible par $x-2$ si et seulement si $f(2) = 0$.

$$f(2) = 16 + 4a. f \text{ s'annule en } 2 \text{ si et seulement si } a = -4.$$

EXERCICE 37

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^3 + (b+c)x^2 + (bc+d)x + bd. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des termes de mêmes degrés dans les deux expressions de $f(x)$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} b+c &= a \\ bc+d &= 3 \\ bd &= 9 \end{cases}$$

Par hypothèse, a , b , c et d sont des entiers relatifs. Nous décomposons 9 en produit de deux entiers relatifs, puis nous en déduisons les valeurs possibles de c et a .

Le plus simple est de présenter les résultats sous forme d'un tableau.

b	d	c	a
1	9	-6	-5
-1	-9	-12	-13
3	3	0	3
-3	-3	-2	-5
9	1	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$
-9	-1	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$

Il y a donc quatre quadruplets de solutions.

EXERCICE 38

$P(q) = q^3 + (p-q)q^2 + p(p-q)q - p^2q = q^3 + pq^2 - q^3 + p^2q - pq^2 - p^2q = 0$, le réel q est une racine de $P(x)$, le polynôme est donc divisible par $x - q$.

En considérant le coefficient de degré 3 et celui de degré 0, on obtient $P(x) = (x - q)(x^2 + ax + p^2)$.

En effectuant un développement partiel (degré 2 par exemple), on obtient $a = p$.

Ainsi $f(x) = (x - q)(x^2 + px + p^2)$.

EXERCICE 39

$$1. (x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1.$$

$$2. N = 10001000100010001 = 10^{16} + 10^{12} + 10^8 + 10^4 + 1$$

$$= (10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) \times (10^8 - 10^6 + 10^4 - 10^2 + 1)$$

$$\text{d'où } N = 101010101 \times 99009901$$

N n'est donc pas un nombre premier.

EXERCICE 40

1. Quel que soit x réel, $f(x) = x^4 + 1 > 0$, f n'admet donc pas de racines réelles.

$$2. f(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1.$$

Par identification des coefficients des termes de mêmes degrés dans les deux expressions de $f(x)$,

$$\text{nous obtenons le système } \begin{cases} a+b &= 0 \\ ab+2 &= 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} a &= \sqrt{2} \\ b &= -\sqrt{2} \end{cases}$$

On en déduit $f(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$.

$$3. f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$$

EXERCICE 41

$$P(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

EXERCICE 42

1. $f(a) = 3a(a - b)$, $f(b) = 2b(b - a)$ et $f(0) = ab$.
2. Supposons $0 < a < b$ on a alors $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ de plus $f(0) > 0$, la fonction f étant une fonction polynôme de degré 2, on en déduit que sa courbe représentative est une parabole « pointée vers le bas ». La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points, le premier appartient à $]0; a[$, le second à $]a; b[$. a et b étant positifs, on en déduit que les deux racines sont positives.

On raisonne de même pour $0 < b < a$.

EXERCICE 43

1. $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1$.
2. $P_n(1) = 1^n - 1 = 0$ donc 1 est une racine du polynôme P .
3. D'après les questions précédentes $P_n(x) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.
4. $P_2(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et $P_3(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

EXERCICE 44

1. $P_n\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{1}{b}\right)^n (a^n - b^n)$
2. En utilisant la question précédente et le résultat de l'exercice précédent, on peut écrire :
$$a^n - b^n = b^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 \right) = b^n \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$
3. a. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
b. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
c. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
d. $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

EXERCICE 45

1. $Q(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$.
2. $Q(x) = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.
3. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$, alors $P(x + 1) = a_n (x + 1)^n + a_{n-1} (x + 1)^{n-1} + \dots$

$\dots + a_1(x+1) + a_0 = a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ avec b_i somme de coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

On en déduit alors

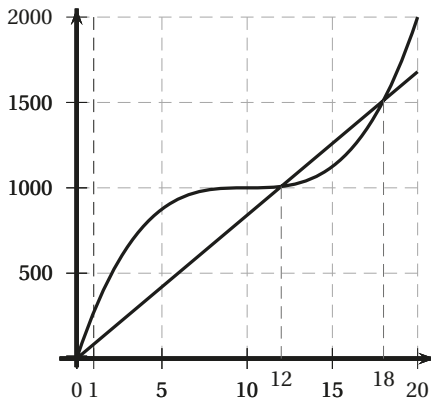
$$Q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 - \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \\ = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i) x^i,$$

Q est donc un polynôme de degré $n-1$.

4. Supposons P polynôme de degré $n > 0$, donc d'après la question précédente, Q est de degré $n-1$, or P un polynôme périodique, de période 1, donc $Q(x) = P(x+1) - P(x) = 0$ ce qui contredit $n-1 > 0$ donc $n = 1$, Q est le polynôme nul on en déduit alors que P est une fonction constante.

EXERCICE 46

1. a. $R(x) = 84x$.
b. Voir graphique : il y aura un bénéfice lorsque la droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts, c'est-à-dire $x \in [12; 18]$.
c. Le bénéfice sera maximal lorsque la distance entre la droite et la courbe sera la plus grande, soit pour environ $x = 15$.



2. a. $C_m(x) = x^2 - 30x + 300$.
 $a > 0$, on en déduit alors le tableau de variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.

x	0	15	20
C_m	300	75	100

- b. D'après le tableau précédent, $x_m = 15$ assure un coût moyen minimum. Le prix d'une tonne sera alors de 75 milliers d'euros.

EXERCICE 47

1. a. Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, on a alors $P(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)$.
 $P(x+1) - P(x) = x \implies 2ax + (a+b) = x$ par identification des coefficients des termes de mêmes degrés, nous obtenons $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, nous obtenons $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$ avec c constante réelle.

$$\text{b. } S_1 = \sum_{k=1}^n (P(k+1) - P(k)) \\ = (P(n+1) - P(n)) + (P(n) - P(n-1)) + \dots \\ + (P(3) - P(2)) + (P(2) - P(1)) \\ S_1 = P(n+1) - P(1).$$

$$\text{c. } S_1 = P(n+1) - P(1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c - c = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Soit la somme $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

a. Soit le polynôme $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on a alors $Q(x) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c+d)$

$$Q(x+1) - Q(x) = x^2 \\ \implies 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = x^2,$$

par identification des coefficients des termes de mêmes degrés,

$$\text{nous obtenons } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, nous obtenons $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ avec d constante réelle.

$$\text{b. } S_2 = \sum_{k=1}^n (Q(k+1) - Q(k)) = Q(n+1) - Q(1).$$

$$\text{c. } S_2 = Q(n+1) - Q(1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d - d \\ = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Soit la somme $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Soit R une fonction polynôme de degré 4, telle que $R(x+1) - R(x) = x^4$.

En utilisant la même méthode que précédemment, nous obtenons $R(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + e$, avec e

constante réelle.

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^n (R(k+1) - R(k)) = R(n+1) - R(1) \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n^2 - 2n + 1)}{4} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

EXERCICE 48

1. En utilisant une identité établie dans l'exercice 44, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(x) - P(\alpha) &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \dots + a_1(x - \alpha) \\ &= (x - \alpha) \left(a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \dots + x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}) \right) \\ &\quad + (x - \alpha) \left(a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \dots + x\alpha^{n-3} + \alpha^{n-2}) \right) \\ &\quad + \dots + (x - \alpha)a_1 \\ &= (x - \alpha) \left(a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \dots + x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\alpha + \dots + x\alpha^{n-3} + \alpha^{n-2}) + \dots + a_1 \right) \\ &= (x - \alpha) Q(x) \end{aligned}$$

$P(x) - P(\alpha)$ se factorise donc par $(x - \alpha)$.

2. D'après la question précédente, pour tout polynôme P de degré $n \geq 1$ et tout réel α , il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha)Q(x)$ soit encore $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$.

3. Si $P(\alpha) = 0$ alors

$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha) = (x - \alpha)Q(x)$ c'est-à-dire $P(x)$ factorisable par $(x - \alpha)$.

Réciproquement, si $P(x)$ est factorisable par $(x - \alpha)$ alors il existe un polynôme Q tel que

$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ ce qui implique donc $P(\alpha) = 0$.

Nous avons ainsi démontré la propriété : « Un polynôme de degré $n \geq 1$ peut se factoriser par $x - \alpha$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$ ».

EXERCICE 49

1. a. Pour $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 9$ et $\alpha = 3$, nous obtenons $h_3 = 2$, $h_2 = 3$, $h_1 = 14$ et $h_0 = 33$.

b. `def coeffHorner(a0, a1, a2, a3, alpha) :`

`h3 = a3`

`h2 = a2 + alpha * h3`

`h1 = a1 + alpha * h2`

`h0 = a0 + alpha * h1`

`print('h3 =', h3, 'h2 =', h2, 'h1 =', h1, 'h0 =', h0)`

2. Calcul de $P(\alpha)$

a. $P(x) = (a_3x^2 + a_2x + a_1)x + a_0$
 $= ((a_3x + a_2)x + a_1)\alpha + a_0.$

b. $P(\alpha) = ((a_3\alpha + a_2)\alpha + a_1)\alpha + a_0$
 $= ((h_3\alpha + a_2)\alpha + a_1)\alpha + a_0$
 $= (h_2\alpha + a_1)\alpha + a_0 = h_1\alpha + a_0 = h_0.$

c. Comparer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour le calcul de $P(\alpha)$:

- avec l'écriture initiale de $P(x)$, on exécute 6 multiplications et 3 additions soit 9 opérations ;
- avec l'algorithme de Hörner, on exécute 3 multiplications et 3 additions soit 6 opérations.

3. Factorisation par $(x - \alpha)$

D'après l'exercice précédent, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$.

L'objectif, ici, est de trouver rapidement une expression de $Q(x)$.

a. $P(x) - P(\alpha) = a_3(x^3 - \alpha^3) + a_2(x^2 - \alpha^2) + a_1(x - \alpha)$
 $= (x - \alpha)(a_3(x^2 + x\alpha + \alpha^2) + a_2(x + \alpha) + a_1)$
 $= (x - \alpha)(a_3x^2 + (a_2 + a_3\alpha)x + (a_3\alpha + a_2)\alpha + a_1)$
 $= (x - \alpha)(h_3x^2 + h_2x + h_1)$ de plus $P(\alpha) = h_0$

d'où $P(x) = (x - \alpha)(h_3x^2 + h_2x + h_1) + h_0$.

b. D'après la question précédente,

$Q(x) = h_3x^2 + h_2x + h_1.$

c. `def polynome(a0, a1, a2, a3, alpha) :`

`h3 = a3`

`h2 = a2 + alpha * h3`

`h1 = a1 + alpha * h2`

`h0 = a0 + alpha * h1`

`print('Q(x) =', h3, 'x^2 +', h2, 'x +', h1)`

4. Applications

a. En utilisant le programme nous obtenons

$P(3) = 33$ et $P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x + 14) + 33.$

b. Pour $\alpha = 1$, nous obtenons $h_3 = 5$, $h_2 = 7$, $h_1 = 4$ et $h_0 = 0$. $P(x) = (x - 1)(5x^2 + 7x + 4).$

EXERCICE 50

1. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q distincts, de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$P(a) = Q(a) = \alpha$, $P(b) = Q(b) = \beta$, $P(c) = Q(c) = \gamma$.

Soit $R(x) = P(x) - Q(x)$, R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et $R(a) = R(b) = R(c) = 0$ le polynôme R a donc trois racines distinctes. Il peut donc s'écrire $R(x) = d(x-a)(x-b)(x-c)$, il est donc de degré 3, ce qui est impossible.

2. a. $L_1(a) = 1, L_2(a) = 0, L_3(a) = 0, L_1(b) = 0, L_2(b) = 1, L_3(b) = 0, L_1(c) = 0, L_2(c) = 0$ et $L_3(c) = 1$.

b. $P(a) = \alpha, P(b) = \beta$ et $P(c) = \gamma$.

L_1, L_2 et L_3 sont des fonctions polynômes de degré 2, donc P somme de ces trois fonctions est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

3. Un polynôme P vérifiant $P(a) = \alpha, P(b) = \beta, P(c) = \gamma$ est unique et peut s'écrire sous la forme

$P(x) = \alpha L_1(x) + \beta L_2(x) + \gamma L_3(x)$ avec

$$L_1(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, L_2(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$\text{et } L_3(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Remarque : Le polynôme P est le polynôme de Lagrange associé aux réels a, b et c . La méthode se généralise à plus de trois coefficients.

4. Applications :

a. $L_1(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2), L_2(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)$

et $L_3(x) = \frac{1}{6}(x^2 + x)$.

On en déduit $P(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2$.

b. On a $P(-3) = 0, P(-2) = 1$ et $P(1) = 2$, on en déduit alors $L_1(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x - 2)$,

$$L_2(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) \text{ et } L_3(x) = \frac{1}{12}(x^2 + 5x + 6),$$

d'où $P(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 2$.

c. On a $P(1) = 2, P(2) = 4$ et $P(3) = 7$,

on en déduit alors $L_1(n) = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$,

$$L_2(x) = -(n^2 - 4n + 3) \text{ et } L_3(x) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2),$$

d'où $P(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

EXERCICE 51

1. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

2. $\Delta = 16$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$.

3. $\Delta = 45$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$.

4. $\Delta = -14 < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

5. $\Delta = 25$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.

6. $\Delta = 8$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$.

EXERCICE 52

1. $\Delta = 49$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$.

2. $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

3. $\Delta = 41$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{4}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$.

4. $\Delta = 49$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{2}{5}$.

5. $\Delta = 80$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

6. $\Delta = 16$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{4}{3}$.

EXERCICE 53

1. $\Delta = 1$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -4$ et $x_2 = -5$.

2. $\Delta = 24$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$ et $x_2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

3. $\Delta = 1$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{1}{5}$.

4. $\Delta = \frac{25}{36}$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$.

5. $\Delta = -\frac{359}{9} < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

6. $\Delta = 0$, l'équation admet une solution $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

EXERCICE 54

- $(3x+4)(-x-2) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{4}{3}$.
- $(3x-2)(x+1) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.
- $(x+4)(2x-10) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -4$ et $x_2 = 5$.
- $9^2 - (x+3)^3 = 0 \iff (6-x)(x+12) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 6$ et $x_2 = -12$.
- $(4x-2)(2x+5) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$.
- $(2x+2)^2 = 0$, l'équation admet une solution $x_0 = -1$.

EXERCICE 55

- $(x+2)^2 - 3 = 0 \iff (x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3}) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -2-\sqrt{3}$ et $x_2 = -2+\sqrt{3}$.
- $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
- $2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{8} = 0$

$$\iff 2\left(x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right) = 0$$
, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
 $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.
- $-(x-4)^2 - 9 = 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
- $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2} = 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.
- $-5\left(x+\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{49}{20} = 0 \iff -5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{2}{5}$.

EXERCICE 56

- 1 est une solution « évidente ».
- Le produit étant égal à -15 , la seconde solution est donc -15 .

EXERCICE 57

- 1 est une solution « évidente », la seconde est -2 .
- -1 est une solution « évidente », la seconde est 2 .

- 1 est une solution « évidente », la seconde est $-\frac{1}{2}$.
- 0 est une solution « évidente », la seconde est 3 .
- 1 est une solution « évidente », la seconde est -2 .
- 5 est une solution « évidente », la seconde est -4 .

EXERCICE 58

- $(9x+1)x = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{1}{9}$.
- $\Delta = 14$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$.
- $(x+2)^2 = 0$, l'équation admet une solution double $x_0 = -2$.
- $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \sqrt{5}$ et $x_2 = -\sqrt{5}$.
- $(x+2)(3x-5) = 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{5}{3}$.
- $\Delta = -159$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

EXERCICE 59

• Courbe $\mathcal{C}_1$: la courbe est « pointée vers le bas », donc $a > 0$, $f(0) > 0$ donc $c > 0$. La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un point donc $\Delta < 0$.

L'abscisse du minimum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est positive donc $b < 0$.

• Courbe $\mathcal{C}_2$: la courbe est « pointée vers le haut », donc $a < 0$, $f(0) > 0$ donc $c > 0$.

La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points donc $\Delta > 0$.

L'abscisse du maximum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est positive donc $b > 0$.

• Courbe $\mathcal{C}_3$: la courbe est « pointée vers le bas », donc $a > 0$, $f(0) > 0$ donc $c > 0$.

La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses donc $\Delta < 0$.

L'abscisse du minimum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est positive donc $b < 0$.

• Courbe $\mathcal{C}_4$: la courbe est « pointée vers le haut », donc $a < 0$, $f(0) < 0$ donc $c < 0$.

La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses donc $\Delta < 0$.

L'abscisse du minimum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est négative donc $b < 0$.

• Courbe $\mathcal{C}_5$: la courbe est « pointée vers le bas », donc $a > 0$, $f(0) > 0$ donc $c > 0$.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un point donc $\Delta = 0$.

L'abscisse du minimum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est négative donc $b > 0$.

• Courbe C_6 : la courbe est « pointée vers le bas », donc $a > 0$, $f(0) < 0$ donc $c < 0$

La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points donc $\Delta > 0$.

L'abscisse du minimum $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est négative donc $b > 0$.

EXERCICE 60

1. $S = 10$ et $P = 21$, d'où l'équation : $x^2 - 10x + 21 = 0$.
2. $S = -4$ et $P = -12$, d'où l'équation : $x^2 + 4x - 12 = 0$.
3. $S = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ et $P = -\sqrt{10}$, on en déduit l'équation $x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})x - \sqrt{10} = 0$.
4. $S = 2$ et $P = -2$, d'où l'équation : $x^2 - 2x - 2 = 0$.

EXERCICE 61

1. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - t - 1 = 0$,
 $\Delta = 5$, on en déduit $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
2. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 12t + 36 = 0$,
 $\Delta = 0$, on en déduit $x = y = 6$
3. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 2\sqrt{5}t + 1 = 0$,
 $\Delta = 16$, on en déduit $x = \sqrt{5} + 2$ et $y = \sqrt{5} - 2$.
4. x et y sont solutions de l'équation $t^2 + 7t - 44 = 0$,
 $\Delta = 225$, on en déduit $x = -11$ et $y = 4$

EXERCICE 62

1. x et y sont solutions de l'équation $t^2 + 3 = 0$, $\Delta^2 = -12$, x et y n'existent pas.
2. $x = 1$ et $y = \pi$
3. $x = -\sqrt{5}$ et $y = -\sqrt{2}$.
4. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 2019t + 2019 = 0$, $\Delta = 4068285$, on en déduit
 $x = \frac{2019 - \sqrt{4068285}}{2}$ et $y = \frac{2019 + \sqrt{4068285}}{2}$.

EXERCICE 63

1. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$, on obtient $x = 1$ et $y = 3$.
2. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 2t + 1 = 0$
Soit encore $(t - 1)^2 = 0$, on en déduit $x = y = 1$.
3. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 12t + 36 = 0$
Soit encore $(t - 6)^2 = 0$, on en déduit $x = y = 6$.
4. x et y sont solutions de l'équation $t^2 + 7t + 10 = 0$,
 $\Delta = 9$, on en déduit $x = -5$ et $y = -2$.

EXERCICE 64

Soit x et y la longueur et la largeur du rectangle. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 25t + 126 = 0$, $\Delta = 121$, on en déduit $x = 18$ cm et $y = 7$ cm.

EXERCICE 65

Soit x et y la longueur et la largeur du rectangle. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - 126t + 3569 = 0$, $\Delta = 1600$, on en déduit $x = 83$ m et $y = 43$ m.

EXERCICE 66

1. L'équation est du second degré donc $m \neq -2$.
 $\Delta = 4(3m - 1)^2 - 4(m + 2)^2 = 4(2m - 3)(4m + 1)$.
L'équation admet une solution double
si et seulement si $\Delta = 0$
si et seulement si $m = \frac{3}{2}$ ou $m = -\frac{1}{4}$.
2. Si $m = \frac{3}{2}$ alors $x = -\frac{b}{2a} = -1$.
Si $m = -\frac{1}{4}$ alors $x = 1$.

EXERCICE 67

1. 2 est solution si et seulement si $4 + 12m + (6m + 1) = 0$
d'où $m = -\frac{5}{18}$.
2. Soit a la seconde solution, alors $6m + 1 = 2a$,
d'où $a = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$.

EXERCICE 68

1. Une des solutions égale à -1 , la seconde solution a vérifie $6m - 2 = -a + 1$ et $m + 2 = -a$.
On en déduit alors $6m - 2 = m + 2 + 1$ soit $m = 1$.
2. On en déduit alors la seconde solution :
 $a = -3$.

EXERCICE 69

Nous avons démontré dans l'exercice 28 que

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

$$\text{Soit encore } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

• si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ on en conclut
que $\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] > 0$, le trinôme ne s'annule
donc jamais dans $\mathbb{R}$.

• si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$,

le trinôme s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$.

• si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

le trinôme s'annule pour deux réels : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

EXERCICE 70

1. Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, notées x_1 et x_2 alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Soit en développant la dernière expression

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2).$$

Par identification des coefficients des termes de mêmes degrés, nous en déduisons : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Nous avons démontré dans la question précédente que si l'équation $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ admet deux solutions distinctes ou confondues de somme S et de produit P alors l'équation s'écrit $x^2 - Sx + P = 0$.

Démontrons la réciproque : soient x_1 et x_2 deux réels de somme S et de produit P .

$$x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = 0 \text{ donc } x_1 \text{ est solution de l'équation } x^2 - Sx + P = 0.$$

De la même manière, on peut montrer que x_2 est solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

EXERCICE 71

1. x et y sont solutions de l'équation $t^2 + \frac{1}{12}t - \frac{1}{12} = 0$,

$$\Delta = \frac{49}{144}, \text{ on en déduit } x = \frac{1}{4} \text{ et } y = -\frac{1}{3}$$

2. x et y sont solutions de l'équation $t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12} = 0$,

$$\Delta = -\frac{1}{12}, \text{ il n'existe aucun réel vérifiant le système.}$$

3. x et y sont solutions de l'équation :

$$t^2 - \frac{5\sqrt{5}-3}{4}t + 1 = 0,$$

$$\Delta = \frac{35-15\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{4}\right)^2,$$

on en déduit $x = -1 + \sqrt{5}$ et $y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4. On pose $Y = -y$, le système devient alors

$$\begin{cases} x+Y = 1 \\ xY = -6 \end{cases}$$

x et Y sont solutions de l'équation $t^2 - t - 6 = 0$, $\Delta = 25$, on en déduit $x = -2$ et $Y = 3$ donc $y = -3$.

EXERCICE 72

1. $\Delta = 13 + 4\sqrt{3} > 0$, l'équation (E) admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+1-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{4}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+1+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{4}$$

2. $(2\sqrt{3}+1)^2 = 12 + 4\sqrt{3} + 1 = 13 + 4\sqrt{3}$.

3. Ainsi, les solutions simplifiées de l'équation (E) sont $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 73

1. On pose $X = x^2$, l'équation s'écrit $X^2 - 84X + 243 = 0$, $\Delta = 78^2$, l'équation admet deux solutions $X_1 = 3$ et $X_2 = 81$.

On en déduit alors les solutions de l'équation initiale : $x_1 = -\sqrt{3}$, $x'_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -9$ et $x'_2 = 9$.

2. On pose $X = x^2$, l'équation s'écrit $X^2 + 8X - 9 = 0$, $X_1 = 1$ est une solution évidente, on en déduit alors $X_2 = -9$.

$X_2 < 0$ ce qui est impossible, on en déduit alors les solutions de l'équation initiale : $x_1 = -1$ et $x'_1 = 1$.

3. On pose $X = x^2$, l'équation s'écrit $2X^2 + 5X + 2 = 0$, $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = -2$.

Les deux solutions sont négatives, l'équation initiale n'admet donc aucune solution réelle.

4. On pose $X = x^2$, l'équation s'écrit $-X^2 + X + 2 = 0$, $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$.

$X_1 < 0$ ce qui est impossible, on en déduit alors les solutions de l'équation initiale : $x_2 = -\sqrt{2}$ et $x'_2 = \sqrt{2}$.

EXERCICE 74

1. On pose $X = x^3$, l'équation s'écrit $X^2 - 3X + 2 = 0$, $\Delta = 1$, l'équation admet deux solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.

On en déduit alors les solutions de l'équation initiale de la forme $x = \sqrt[3]{X}$ ou encore $x = X^{\frac{1}{3}}$: $x_1 = \sqrt[3]{1} = 1$ et $x_2 = \sqrt[3]{2}$.

2. On pose $X = \cos x$, l'équation s'écrit $2X^2 - 3X + 1 = 0$, $\Delta = 1$, l'équation admet deux solutions $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$.

$$\cos x = 1 \iff x = 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \text{ avec } k \text{ entier relatif. On en déduit alors les solutions de l'équation initiale : } x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{et } x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

3. On pose, pour $x \geq 0$, $X = \sqrt{x}$, l'équation s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$, $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$.

$X_1 < 0$ ce qui est impossible. L'équation initiale n'admet donc qu'une solution : $x_1 = 1^2 = 1$.

4. On pose $X = \sin x$, l'équation s'écrit $2X^2 - 7X + 3 = 0$, $\Delta = 25$, l'équation admet deux solutions $X_1 = 3$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

$X_1 = \sin x = 3 > 1$ est impossible.

$$X_2 = \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

On en déduit alors les solutions de l'équation initiale : $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

5. On pose, pour $x \neq 7$, $X = \frac{1}{x-7}$, l'équation s'écrit $6X^2 - 11X - 7 = 0$, $\Delta = 17^2$, l'équation admet deux solutions $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{7}{3}$.

$$x = \frac{1}{X} + 7, \text{ on en déduit alors les solutions de l'équation initiale } x_1 = 5 \text{ et } x_2 = \frac{52}{7}.$$

6. On pose, pour $x \geq \frac{5}{2}$, $X = \sqrt{2x-5}$, l'équation s'écrit alors $X^2 - 3X + 2 = 0$, l'équation admet deux solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.

$$x = \frac{X^2 + 5}{2}, \text{ on en déduit alors les solutions de l'équation initiale de la forme } x_1 = 3 \text{ et } x_2 = \frac{9}{2}.$$

EXERCICE 75

1. a. $P(2) = 0$, on en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x-2)$.

En considérant les coefficients de mêmes degrés dans les deux expressions de $P(x)$, on obtient

$$P(x) = (x-2)(x^2 + x - 12).$$

$$\text{b. } P(x) = 0 \iff (x-2=0 \text{ ou } x^2 + x - 12 = 0).$$

Les solutions de l'équation sont 2, -4 et 3.

2. a. En posant $X = x^2$ nous retrouvons l'équation précédente. Nous avons donc

$$X_1 = 2 \text{ soit } x_1 = \sqrt{2} \text{ et } x'_1 = -\sqrt{2},$$

$$X_2 = -4 < 0 \text{ impossible}$$

$$X_3 = 3 \text{ soit } x_3 = \sqrt{3} \text{ et } x'_3 = -\sqrt{3}.$$

- b. En posant pour $x \neq 0$, $X = \frac{2}{x}$, nous retrouvons l'équation de la question 1. Nous avons donc

$$X_1 = 2 \text{ soit } x_1 = 1,$$

$$X_2 = -4 \text{ soit } x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$X_3 = 3 \text{ soit } x_3 = \frac{2}{3}.$$

EXERCICE 76

1. Pour $1 \leq x \leq 5$,

$$5 - x = 2\sqrt{2x-2} \iff (5-x)^2 = 4(2x-2) \\ \iff x^2 - 18x + 33 = 0$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = 9 - 4\sqrt{3} \text{ et } x_2 = 9 + 4\sqrt{3} > 5.$$

La seule solution est donc $x_1 = 9 - 4\sqrt{3}$.

2. Pour $x \geq -\frac{3}{2}$,

$$2 + x = \sqrt{2x+3} \iff (2+x)^2 = (2x+3) \\ \iff (x+1)^2 = 0$$

L'équation admet une solution double $x_0 = -1$.

EXERCICE 77

1. Pour $x \neq 0$, $x + \frac{1}{x} = 4 \iff x^2 - 4x + 1 = 0$.

$\Delta = 12$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$,

$$\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3} = 2 \iff 3(x+3) + 5(x-2) = 2(x-2)(x+3).$$

Soit après simplification : $2x^2 - 6x - 11 = 0$, $\Delta = 124$,

l'équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{31}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{31}}{2}.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{3}; 0\}$,

$$\frac{x}{3x+4} = \frac{x-1}{4x} \iff 4x^2 = (x-1)(3x+4).$$

Soit en développant et en ordonnant : $x^2 - x + 4 = 0$.

$\Delta = -15 < 0$, l'équation n'admet donc aucune solution réelle.

$$4. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -m\}, \frac{2x+m}{x} - \frac{3x}{x+m} = 2 \\ \iff (2x+m)(x+m) - 3x^2 = 2x(x+m).$$

En développant et en ordonnant, nous obtenons l'équation (E) : $-3x^2 + mx + m^2 = 0$. $\Delta = 13m^2$.

Si $m = 0$, l'équation (E) admet une solution double : $x_0 = 0$ qui n'appartient pas à $\mathbb{R} \setminus \{0; -m\}$. Donc si $m = 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $m \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{m+|m|\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{m-|m|\sqrt{13}}{6}$.

EXERCICE 78

1. Il faut que $x^2 - 2x + 2$ et $x + 1$ soient différents de 0. Pour la première expression $\Delta = -4 < 0$, l'expression n'est donc jamais nulle.

On résout l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{x + 4}{x + 1} \\ \iff (x+1)(x^2 + x + 1) = (x+4)(x^2 - 2x + 2),$$

Soit en développant et en ordonnant : $8x - 7 = 0$.

L'équation admet une unique solution $x = \frac{7}{8}$.

2. Il faut que $x^2 - 4$ et $x + 2$ soient non nuls, c'est-à-dire x différent de 2 et de -2.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$$\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{5}{x + 2} = 3 \iff 1 + 5(x - 2) = 3(x^2 - 4).$$

soit en développant et en ordonnant $3x^2 - 5x - 3 = 0$, $\Delta = 61$, l'équation admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{61}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{61}}{6}.$$

3. Il faut que $x - 1$ et x^2 soient non nuls, c'est-à-dire x différent de 1 et de 0.

Pour tout réel x différent de 0 et 1,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2} = 0 \iff x^2 + 3x - 3 = 0, \Delta = 21,$$

l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}.$$

4. Il faut que $x^2 - 3x + 2$ et $x - 3$ soient positifs.

• $x - 3 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 3$.

• $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ en établissant un tableau de signe, on en déduit $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ si et seulement

si $x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$.

L'intersection des deux ensembles est $[3; +\infty[$.

Si $x \in [3; +\infty[$, $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x-3}$ si et seulement si $x^2 - 3x + 2 = x - 3$,

Soit en ordonnant $x^2 - 4x + 5 = 0$, $\Delta = -4 < 0$, l'équation n'admet donc aucune solution réelle.

EXERCICE 79

- La proposition P_1 est vraie. En effet, si $ac < 0$ alors $-4ac > 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet alors deux solutions distinctes.
- P_2 : « Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes alors $ac < 0$ ».
 - La proposition P_2 est fautive, en effet l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$ admet deux solutions distinctes -1 et -2 et $ac = 2 > 0$.
- P_3 : « Si l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas deux solutions distinctes alors $ac \geq 0$ ».
 - La proposition P_3 est vraie car P_1 est vraie.

EXERCICE 80

Soit x la longueur du grand côté du premier terrain d'Alfred. L'aire du premier terrain est égale à $x(x-130)$, celle du second à $154(x+150)$.

Le problème se ramène à la résolution de l'équation $x^2 - 130x = 154x + 23100$ soit encore $x^2 - 284x - 23100 = 0$ $\Delta = 416^2$, l'équation admet deux solutions 350 et -66, la seconde négative ne convient pas.

Les terrains d'Alfred sont donc de dimensions 350 sur 220 mètres pour le premier et 154 sur 500 mètres pour le second.

EXERCICE 81

Soit x la longueur du rectangle, sa largeur est alors égale à $x - 4$.

Déterminer les dimensions du rectangle revient à résoudre l'équation $x(x-4) = 8,25$,

soit encore $x^2 - 4x - 8,25 = 0$.

$\Delta = 49$, l'équation admet deux solutions distinctes

$x_1 = -1,5$ et $x_2 = 5,5$. La première solution, négative ne convient pas.

Le rectangle est de longueur 5,5 dm et de largeur 1,5 dm.

EXERCICE 82

Soit x la longueur d'un côté du triangle équilatéral initial. Sa hauteur est alors égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}x$, en effet

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}}.$$

Son aire est égale à $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Résoudre le problème revient à résoudre l'équation $\frac{(2x+1)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 10\sqrt{3}$, soit encore après simplification $3x^2 + 4x - 39 = 0$. $\Delta = 22^2$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{13}{3}$.

On remarque que $x_2 < 0$ ce qui est impossible pour une longueur.

Le problème n'a donc qu'une solution, la longueur du côté du triangle d'origine est donc 3 cm.

EXERCICE 83

Soit x la longueur d'un côté du triangle équilatéral initial, l'aire est égale à $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (voir exercice précédent).

Résoudre le problème revient à résoudre l'équation $\frac{(\sqrt{3}x-1)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$, soit encore après simplifications $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$.

$\Delta = 0$, l'équation admet une solution :

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La longueur du côté du triangle d'origine est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit 0,87 m à 10^{-2} près.

EXERCICE 84

Soit x et y les dimensions des côtés du rectangle (on suppose $x < y$).

D'après l'énoncé $x^2 + y^2 = 39^2$ et $xy = 540$.

On recherche le périmètre, soit $2(x+y)$.

En utilisant les données de l'énoncé, on peut écrire

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 2601$$

x et y étant des longueurs, leur somme est positive donc $x+y = \sqrt{2601} = 51$.

Le périmètre du rectangle est donc égal à 102 mètres.

EXERCICE 85

Soit x la longueur ajoutée ou retranchée.

Le triangle est rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore $(x+5)^2 + (x+6)^2 = (x+8)^2$,

soit après simplifications $x^2 + 6x - 3 = 0$, $\Delta = 48$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -3 - 2\sqrt{3}$ et $x_2 = -3 + 2\sqrt{3}$.

$x_1 < -5$ ce qui est impossible, il faut donc ajouter $2\sqrt{3}-3$ aux trois côtés.

EXERCICE 86

1. $0 \leq BN \leq BC$ d'où $0 \leq x \leq 5$.

2. $\mathcal{A}(x) = 40 - x(8-x) - x(5-x) = 2x^2 - 13x + 40$.

3. L'aire est minimale pour $x = \frac{13}{4}$.

4. L'aire est égale à 22 cm² si $2x^2 - 13x + 40 = 22$, soit encore après simplification $2x^2 - 13x + 18 = 0$.

$\Delta = 25$, l'équation admet deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{9}{2}$.

EXERCICE 87

Soit v_C la vitesse de la vache, v_T la vitesse du train et x la moitié de la longueur du tunnel.

On suppose la vache dans la première moitié du tunnel (la plus proche du train).

• Si la vache va vers le train, dans le même temps t_1 , elle parcourt $(x-5)$ mètres pendant que le train parcourt 3000 mètres.

$$\text{Soit } t_1 = (x-5)v_C = 3000v_T.$$

• Si la vache va dans le même sens que le train, dans le même temps t_2 , elle parcourt $(x+5)$ mètres pendant que le train parcourt $3000 + 2x$ mètres.

$$\text{Soit } t_2 = (x+5)v_C = (3000+2x)v_T.$$

$$\text{On en déduit } \frac{v_C}{v_T} = \frac{3000}{x-5} = \frac{3000+2x}{x+5},$$

Soit après simplifications $x^2 - 5x - 15000 = 0$.

$\Delta = 245^2$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = 125$ et $x_2 = -120$.

$x_2 < 0$ ce qui est impossible, la seule solution est

$$x_1 = 125.$$

Si on suppose la vache dans la seconde moitié du tunnel, on obtient l'équation $x^2 + 5x + 15000 = 0$ qui n'a pas de solution réelle.

Le tunnel est donc de longueur 250 mètres.

EXERCICE 88

1. $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$ et $3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$.

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4; \frac{1}{3}; 2\right\}$,

$$\frac{3}{x^2 + 2x - 8} + \frac{x}{3x^2 - 7x + 2} = 0$$

$$\iff \frac{3(3x-1) + x(x+4)}{(x-2)(x+4)(3x-1)} = 0$$

$$\implies x^2 + 13x - 3 = 0.$$

$\Delta = 181$, l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{181}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-13 + \sqrt{181}}{2}.$$

EXERCICE 89

1. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ et $2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3)$.

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2; 1; \frac{3}{2}\right\}$,

$$\frac{2x}{x^2 + x - 2} - \frac{3x}{2x^2 + x - 6} = 0$$

$$\iff \frac{2x(2x-3) - 3x(x-1)}{(x-1)(x+2)(2x-3)} = 0$$

$$\implies x(x-3) = 0.$$

L'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 3.$$

EXERCICE 90

1. $f = \frac{8}{5} = 1,6$.

2. a. Soit f_1 le format du rectangle $ABCD$, $f_1 = \frac{AB}{AD} = x$.

Soit f_2 le format du rectangle $BEFC$,

$$f_2 = \frac{BC}{BE} = \frac{1}{x-1}.$$

b. Le rectangle $ABCD$ est dit «rectangle d'or» si

$$x = \frac{1}{x-1},$$

soit après simplification $x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 5$, l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Seule la solution x_2 est positive, donc $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

c. $\Phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\Phi(\Phi - 1) = \Phi^2 - \Phi = 1$ car Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

d. D'après la question 2.b et la définition de Φ ,

$\Phi = \frac{1}{\Phi - 1}$ ou encore $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$, $\Phi - 1$ est donc l'inverse de Φ .

EXERCICE 91

1. a. $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 19 \times 1 + 20 = 0$. 1 est une racine de $P(x)$, le polynôme est donc factorisable par $(x-1)$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x-1)(x^2 - x - 20)$$

b. $P(x) = 0 \iff (x-1=0 \text{ ou } x^2 - x - 20 = 0)$.

Résolution de l'équation $x^2 - x - 20 = 0$, $\Delta = 81$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -4$ et $x_2 = 5$.

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont ainsi $x_0 = 1$, $x_1 = -4$ et $x_2 = 5$.

2. a. En posant $X = x^2$, nous retrouvons l'équation résolue dans la question précédente.

$X_1 = -4 < 0$ est impossible dans $\mathbb{R}$, les solutions sont donc $x_0 = 1$, $x'_0 = -1$, $x_2 = \sqrt{5}$ et $x_2 = -\sqrt{5}$.

b. En posant, pour $x \neq 0$, $X = \frac{1}{x}$, nous retrouvons l'équation résolue dans la question précédente.

Les solutions sont donc $x_0 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

EXERCICE 92

1. $x^2 - 2x - 48 = 0$, $\Delta = 196$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -6$ et $x_2 = 8$.

2. $-1 - 1 + 50 - 48 = 0$, ce qui prouve que -1 est solution de (E).

3. En considérant les coefficients des termes de plus haut degré et de degré le plus bas, nous obtenons $a = 1$ et $c = -48$.

En développant et en identifiant les coefficients des termes de degré 2 (ou 1), nous obtenons $b = -2$, ainsi $x^3 - x^2 - 50x - 48 = (x+1)(x^2 - 2x - 48)$.

4. D'après les questions précédentes, l'équation (E) admet trois solutions $x_0 = -1$, $x_1 = -6$ et $x_2 = 8$.

EXERCICE 93

1. $3x^2 - 2x - 5 = 0$, $\Delta = 64$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{3}$.

2. $x_0 = 2$.

3. En considérant les coefficients des termes de plus haut degré et de degré le plus bas, nous obtenons $a = 3$ et $c = -5$.

En développant et en identifiant les coefficients des termes de degré 2 (ou 1), nous obtenons $b = -2$, ainsi $3x^3 - 8x^2 - x + 10 = (x-2)(3x^2 - 2x - 5)$.

4. D'après les questions précédentes, l'équation (E) admet trois solutions $x_0 = 2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{3}$.

EXERCICE 94

- $\Delta = 45$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$.
- $x_3 = 1$ et $x_4 = 2$ sont solutions de (E).
- En considérant les termes de degré 4 et de degré 0, nous obtenons :

$$x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = (x-1)(x-2)(x^2 + bx - 5).$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + bx - 5) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + bx - 5)$$

$$= x^4 + (b-3)x^3 + (-3-5b)x^2 + (15+2b)x - 10$$
 Par identification des coefficients des termes de même degré, nous obtenons $b = -5$. Ainsi

$$x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 5x - 10 = (x-1)(x-2)(x^2 - 5x - 5)$$
- D'après les questions précédentes, l'équation (E) admet quatre solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{5-3\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, x_3 = 1 \text{ et } x_4 = 2.$$

EXERCICE 95

- Soient $x-1$, x et $x+1$ trois entiers consécutifs. Ces trois entiers forment un triplet pythagoricien si $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$.
 Soit après développement et simplification,
 $x(x-4) = 0$. Cette équation admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$.
 $(-1; 0; 1)$ ne peut pas être solution du problème, seul le triplet $(3; 4; 5)$ est solution du problème.
- def triplet() :
 for x in range(1,101) :
 for y in range(x,101) :
 $z = \text{sqrt}\{x^2 + y^2\}$
 partielle = (z*10)//10
 if z == partiele :
 print(x, ":", y, ":", z)

EXERCICE 96

- La droite (OP) est d'équation réduite $y = -ax$.
 La droite (AB) est d'équation $x = a$.
 Le point M étant le point d'intersection de ces deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations. Nous en déduisons ainsi $M(a; -a)$.

2. $OM^2 = a^2 + a^2 a^2$,

$$MC^2 = c^2 + (b + \alpha a)^2 = b^2 + c^2 + a^2 a^2 + 2ab\alpha$$

$$OC^2 = (a-c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac.$$

En appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

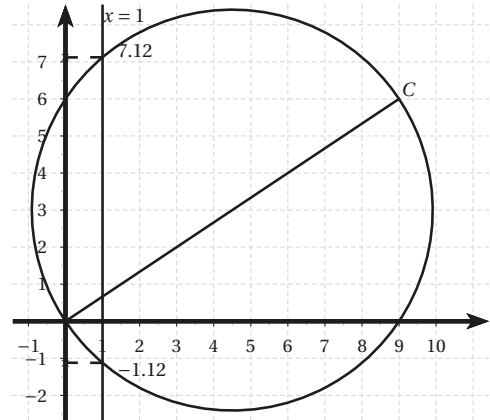
$$OM^2 + MC^2 = OC^2 \iff 2a^2 a^2 + 2ab\alpha + 2ac = 0$$

le réel a étant non nul, nous pouvons simplifier et l'équation s'écrit alors $aa^2 + b\alpha + c = 0$.

Ceci démontre que α est solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

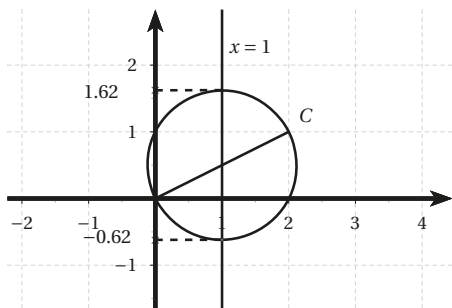
Remarque : Pour les élèves ayant fait le chapitre du produit scalaire, la démonstration pouvait se faire en utilisant $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.

- Placer le point $C(a-c; b)$ et tracer la droite (AB) d'équation $x = c$.
 Tracer le segment [OC] et le cercle de diamètre [OC].
 Les solutions de l'équation sont les opposées des ordonnées divisées par a des points d'intersection du cercle et de la droite (AB).
- a. $x^2 + 6x - 8 = 0$



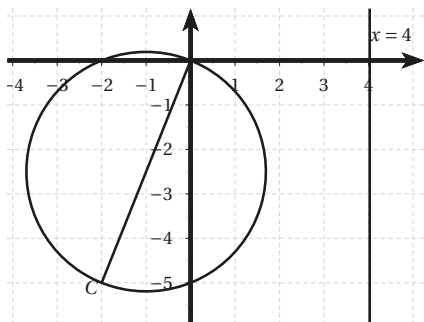
Les valeurs approchées des solutions de l'équation $x^2 + 6x - 8 = 0$ sont $x_1 \approx 1,12$ et $x_2 \approx -7,12$

b. $x^2 + x - 1 = 0$



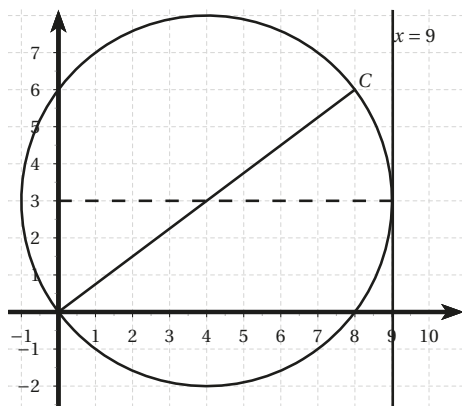
Les valeurs approchées des solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sont $x_1 \approx 0,62$ et $x_2 \approx -1,62$

c. $4x^2 - 5x + 6 = 0$,



La droite (AB) ne coupe pas le cercle de diamètre [OC], l'équation n'a pas de solution réelle.

d. $9x^2 + 6x + 1 = 0$



L'équation $9x^2 + 6x + 1 = 0$ n'admet qu'une solution $x_0 = -\frac{1}{3}$.

5. Il n'existe des solutions réelles que si la droite (AB) coupe le cercle de diamètre [OC].

EXERCICE 97

Soit v_C la vitesse de la colonne et v_M la vitesse du messager.

Soit t_A le temps aller du messager et t_R son temps de retour.

La distance parcourue par le messager à l'aller est

$$d_A = v_M t_A = \ell + v_C t_A.$$

La distance parcourue par le messager au retour est

$$d_R = v_M t_R = \ell - v_C t_R.$$

Nous en déduisons $t_A = \frac{\ell}{v_M - v_C}$ et $t_R = \frac{\ell}{v_M + v_C}$.

La colonne a parcouru au total la distance

$$v_C t_A + v_C t_R = \ell.$$

En remplaçant t_A et t_R par les expressions trouvées précédemment et en simplifiant, nous obtenons

$$\frac{v_C}{v_M - v_C} + \frac{v_C}{v_M + v_C} = 1.$$

Ce qui peut encore s'écrire : $2v_C v_M = v_M^2 - v_C^2$.

v_C étant non nul, on peut poser $x = \frac{v_M}{v_C}$, en simplifiant,

nous obtenons l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

$x_1 < 0$ est impossible dans notre contexte, on en déduit que $v_M = (1 + \sqrt{2}) v_C$.

$$\text{Ainsi } d_M = v_M t = (1 + \sqrt{2}) v_C t = (1 + \sqrt{2}) \ell.$$

EXERCICE 98

1. $P(x) = x^2 + x + 1$, $\Delta = -3 < 0$, et $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$	+	

2. $P(x) = -3x^2 + x + 10$, $\Delta = 121$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{5}{3}$ et $x_2 = 2$. $a = -3 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	2	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

3. $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$, $\Delta = 49$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = 1$. $a = 2 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	1	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+

4. $P(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{6} + 3$, $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $a = 2 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
signe de $P(x)$		0	

EXERCICE 99

1. $P(x) = 3 - 2x\sqrt{3} + x^2$, $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double $x_0 = \sqrt{3}$, $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
signe de $P(x)$		0	

2. $P(x) = -x^2 + 4x - 8$, $\Delta = -16 < 0$, et $a = -1 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$		-

3. $P(x) = x^2 - 2x - 15$, $\Delta = 64$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -3$ et $x_2 = 5$. $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
Signe de $P(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$

4. $P(x) = \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{6}$, $\Delta = 14 - 24\sqrt{3} < 0$, et $a = \sqrt{2} > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$		+

EXERCICE 100

1. $P(x) = -6x^2 - 5x + 6$, $\Delta = 169$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{2}{3}$. $a = -6 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		-	0	+	0	-

2. $P(x) = -6x^2 - x - 1$, $\Delta = -23 < 0$, et $a = -6 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$		-

3. $P(x) = -x^2 - 4x + 4$, $\Delta = 32$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$. $a = -1 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		-	0	+	0	-

4. $P(x) = x^2 + x + 3$, $\Delta = -11 < 0$, et $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$		+

EXERCICE 101

1. $P(x) = (3x - 2)(2x + 3)$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
Signe de $3x - 2$		-	-	0	+	
Signe de $2x + 3$		-	0	+	+	
Signe de $P(x)$		+	0	-	0	+

2. $P(x) = (3x + 1)(x - 2) - (9x^2 + 3x)$
 $= (3x + 1)(x - 2 - 3x) = (3x + 1)(-2x - 2)$,
le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	
Signe de $3x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	
Signe de $-x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	
Signe de $P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3. $P(x) = (x + 2)^2 - 9(x - 1)^2 = (5 - 2x)(4x - 1)$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{5}{2}$. On en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Signe de $5 - 2x$		+	+	0 -
Signe de $4x - 1$		-	0 +	+
Signe de $P(x)$		-	0 +	0 -

4. Quel que soit le réel x , $(2x-9)^2 > 0$
d'où $P(x) = -2 - (2x-9)^2 < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $P(x)$	-	

EXERCICE 102

☞ Pour résoudre une inéquation du second degré, il faut rechercher les racines de l'équation, établir (si nécessaire) le tableau du signe puis conclure.

On utilise les résultats obtenus dans l'exercice 98.

1. $S = \emptyset$.
2. $S =]-\infty; -\frac{5}{3}] \cup [2; +\infty[$.

3. $S =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; +\infty[$.

☞ L'inégalité étant large, les valeurs annulant le polynôme appartiennent à l'ensemble des solutions.

4. $S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$.

☞ L'inégalité étant stricte, la valeur annulant le polynôme n'appartient pas à l'ensemble des solutions.

EXERCICE 103

On utilise les résultats obtenus dans l'exercice 100

1. $S =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{2}{3}; +\infty[$.
2. $S = \mathbb{R}$.
3. $S = [-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}]$.
4. $S = \mathbb{R}$.

EXERCICE 104

On utilise les résultats obtenus dans l'exercice 99.

1. $S = \mathbb{R}$.
2. $S = \mathbb{R}$.
3. $S = [-3; 5]$.
4. $S = \emptyset$.

EXERCICE 105

☞ Il faut se ramener à une inéquation de la forme de celles des exercices précédents.

1. $(x+2)^2 \leq (3x-5)^2 \iff -8x^2 + 34x - 21 \leq 0$
 $\Delta = 22^2$, le polynôme $P(x) = -8x^2 + 34x - 21$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{7}{2}$. $a = -8 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

$$S =]-\infty; \frac{3}{4}] \cup [\frac{7}{2}; +\infty[.$$

2. $x^2 + 6x - 4 \leq 2x^2 - 9x - 8 \iff -x^2 + 15x + 4 \leq 0$, le polynôme $P(x) = -x^2 + 15x + 4$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{15 - \sqrt{241}}{2}$ et $x_2 = \frac{15 + \sqrt{241}}{2}$. $a = -1 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

$$S =]-\infty; \frac{15 - \sqrt{241}}{2}] \cup [\frac{15 + \sqrt{241}}{2}; +\infty[.$$

EXERCICE 106

1. $-x^2 + 4x + 5 \geq -2x^2 + 3x + 4 \implies x^2 + x + 1 \geq 0$. Nous avons vu précédemment que $P(x) = x^2 + x + 1$ était toujours positif, donc $S = \mathbb{R}$.
2. $3x^2 - 2x + 3 \geq x^2 - 2x + 7 \implies x^2 - 2 \geq 0$, le polynôme $P(x) = x^2 - 2$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$. $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+

$$S =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[.$$

EXERCICE 107

1. $x^2 + 3x + 5 \leq x^2 - x + 9 \implies x \leq 1$
donc $S =]-\infty; 1]$.
2. $(3x-2)^2 \geq (x+3)^2 \implies 8x^2 - 18x - 5 \geq 0$, $\Delta = 22^2$, le polynôme $P(x) = 8x^2 - 18x - 5$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{5}{2}$. $a = 8 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+

$$S =]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[.$$

EXERCICE 108

1. $x^3 + 3x + 2 \leq x^3 - 2x^2 - 4x - 3 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 \leq 0$, $\Delta = 9$, le polynôme $P(x) = 2x^2 + 7x + 5$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = -1$. $a = 2 > 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S = \left[-\frac{5}{2}; -1 \right].$$

2. $(2x+1)^2 \geq (3x-1)^2 \Rightarrow -5x^2 + 10x \geq 0$, le polynôme $P(x) = -5x^2 + 10x$ admet deux racines distinctes $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$. $a = -5 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		-	0	+	0	-

$$S = [0; 2].$$

3. $-5x^2 + x + 2 \leq 3x^2 + 7x - 7 \Rightarrow -8x^2 - 6x + 9 \leq 0$, $\Delta = 18^2$, le polynôme $P(x) = -8x^2 - 6x + 9$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{4}$. $a = -8 < 0$, on en déduit le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		-	0	+	0	-

$$S = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty \right[.$$

EXERCICE 109

1. $2x^2 + 3x - 4 = -x - 4 \Rightarrow 2x(x+2) = 0$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ revient à résoudre le système
- $$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 4 = -x - 4 \\ y = -x - 4 \end{cases}$$
- D'après la question précédente, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ se coupent aux points $M_1(-2; -2)$ et $M_2(0; -4)$.
3. $2x^2 + 3x - 4 \leq -x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x \leq 0$. D'après les résultats précédents, nous en déduisons le tableau de signes du polynôme $P(x) = 2x^2 + 4x$:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

$$S = [-2; 0]$$

4. Si $2x^2 + 3x - 4 \leq -x - 4$ alors la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$.

D'après le tableau de signes précédent :

- la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$ sur les intervalles $]-\infty; -2[$ et $]0; +\infty[$;
- la droite $\mathcal{D}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]-2; 0[$;
- la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{P}$ se coupent aux points d'abscisses -2 et 0 .

EXERCICE 110

- $3x^2 - 8x - 2 = 3x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0$, $\Delta = 169$, l'équation admet deux racines distinctes

$$x_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = 4.$$

- Tableau de signes du polynôme $P(x) = 3x^2 - 11x - 4$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
Signe de $P(x)$		+	0	-	0	+

- Si $3x^2 - 8x - 2 < 3x + 2$ c'est-à-dire si $P(x) < 0$ alors la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$.

D'après le tableau de signes précédent :

- la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur les intervalles $]-\infty; -\frac{1}{3}[$ et $]4; +\infty[$;
- la droite $\mathcal{D}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; 4[$;
- la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{P}$ se coupent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 4 .

EXERCICE 111

- $-x^2 + 6x - 9 = x^2 - 5x + 3 \Rightarrow -2x^2 + 11x - 12 = 0$, $\Delta = 25$, l'équation admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$.

- Tableau de signes du polynôme $P(x) = -2x^2 + 11x - 12$:

x	$-\infty$	1,5	4	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	-	0	+	0	-

- Si $-x^2 + 6x - 9 < x^2 - 5x + 3$ c'est-à-dire si $P(x) < 0$ alors la courbe $\mathcal{P}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{P}_2$.

D'après le tableau de signes précédent, nous obtenons :

La courbe $\mathcal{P}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{P}_2$ sur les intervalles $]-\infty; 1,5[$ et $]4; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{P}_2$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{P}_1$ sur l'intervalle $]1, 5[$.

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 1, 5 et 4.

EXERCICE 112

1. $P(x) = (x+2)(6x^2 - 5x - 6)$

• **Recherche des racines du polynôme :**

$$P(x) = 0 \iff (x+2=0 \text{ ou } 6x^2 - 5x - 6 = 0).$$

La première équation a une solution $x_0 = -2$.

Pour la seconde équation : $\Delta = 169$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

• Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$			
$(x+2)$		$-$	0	$+$	$+$			
$(6x^2-5x-6)$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. $P(x) = (3-2x)(x^2 - 3x + 2)$

• **Recherche des racines du polynôme :**

$$P(x) = 0 \iff (3-2x=0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0).$$

La première équation a une solution $x_0 = \frac{3}{2}$.

La seconde équation admet deux solutions distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

• Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	1	$1,5$	2	$+\infty$			
$(3-2x)$		+	+	0	-	-		
(x^2-3x+2)		+	0	-	-	0	+	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-

EXERCICE 113

1. $P(x) = (-x^2 - 4x + 4)(6-2x)$

• **Recherche des racines du polynôme :**

$$P(x) = 0 \iff (6-2x=0 \text{ ou } -x^2 - 4x + 4 = 0).$$

La première équation a une solution $x_0 = 3$.

Pour la seconde équation, $\Delta = 32$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -2 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + 2\sqrt{2}$.

• Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	$-2 - 2\sqrt{2}$		$-2 + 2\sqrt{2}$	
$(6-2x)$		+		+	
$(-x^2 - 4x + 4)$	-	0	+	0	-
$P(x)$	-	0	+	0	-

x	$-2+2\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$(6-2x)$		$+$	$0 \quad -$
$(-x^2-4x+4)$	0	$-$	$-$
$P(x)$	0	$-$	$0 \quad +$

2. $P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

• **Recherche des racines du polynôme :**

$$P(x) = 0 \iff (x^2 + x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 5x + 6 = 0).$$

Pour la première équation : $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

Pour la seconde équation : $\Delta = 1$, l'équation admet deux solutions distinctes $x_3 = 2$ et $x_4 = 3$.

• Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$(x^2 + x - 2)$		+	0	-	0	+
$(6x^2 - 5x - 6)$	+	+	+	+	0	
$P(x)$	+	0	-	0	+	0

x	1	2	3	$+\infty$		
(x^2+x-2)	0	+	+	+		
$(6x^2-5x-6)$		+	0	-	0	+
$P(x)$	0	+	0	-	0	+

EXERCICE 114

Pour répondre à la question, il faut établir le tableau de signes du polynôme et conclure à l'aide du tableau.

1. $(x+2)(6x^2 - 5x - 6) \leq 0$

Le tableau de signes de $P(x) = (x+2)(6x^2 - 5x - 6)$ a été établi dans l'exercice 112.

$$\text{Ainsi } S =]-\infty; -2] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right].$$

2. $(3-2x)(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

Le tableau de signes de $P(x) = (3-2x)(x^2 - 3x + 2)$ a été établi dans l'exercice 112.

$$\text{Ainsi } S =]-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right].$$

EXERCICE 115

1. $(-x^2 - 4x + 4)(6-2x) \leq 0$

Le tableau de signes du polynôme

$P(x) = (-x^2 - 4x + 4)(6-2x)$ a été établi dans l'exercice 113.

$$\text{Ainsi } S =]-\infty; -2 - 2\sqrt{2}] \cup [-2 + 2\sqrt{2}; 3].$$

2. $(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6) > 0$

Le tableau de signes du polynôme

$P(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)$ a été établi dans

l'exercice 113.

Ainsi $S =]-\infty; -2[\cup]1; 2[\cup]3; +\infty[$.

EXERCICE 116

- Si $\Delta > 0$ alors $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 (en supposant $x_1 < x_2$),

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nous en déduisons le tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1
signe de a	signe de a	
signe de $(x - x_1)$		0
signe de $(x - x_2)$		–
signe de $Q(x)$	signe de a	

x	x_1	x_2	$+\infty$
signe de a	signe de a		signe de a
signe de $(x - x_1)$	0	+	+
signe de $(x - x_2)$		–	0
signe de $P(x)$	0	signe de $-a$	0

- Si $\Delta = 0$ alors $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet une racine double x_0 , $P(x) = a(x - x_0)^2$.

Pour tout réel $x \neq x_0$, $(x - x_0)^2 > 0$ donc $P(x)$ est du signe de a et $P(x_0) = 0$.

- Si $\Delta < 0$ alors $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $P(x)$ est toujours du signe de a .

EXERCICE 117

Soit $f(x)$ une fonction polynôme de degré 2 et Δ son discriminant.

Soit la propriété P_1 : « S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$ alors $\Delta > 0$ ».

1. a. P_2 « Si $\Delta > 0$ alors il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$ ».

b. La propriété P_2 est vraie. En effet, si $\Delta > 0$ alors la fonction polynôme $f(x)$ s'annule et change de signe, il existe donc deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$.

2. a. P_3 : « Si $\Delta < 0$ alors il n'existe pas de réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$ ».

b. La propriété P_3 est vraie. En effet, si $\Delta < 0$ alors la fonction polynôme $f(x)$ est toujours du signe de a donc quels que soient les réels x_1 et x_2 , $f(x_1)$ et $f(x_2)$

sont de même signe d'où $f(x_1)f(x_2) > 0$.

c. La propriété P_1 est vraie car sa contraposée est vraie.

EXERCICE 118

1. On vérifie que $P(1) = 0$ et $P(4) = 0$, on en déduit que pour tout réel x : $P(x) = (x - 1)(x - 4)(6x^2 + bx - 10)$. En développant et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient $b = -11$.

$$\text{Ainsi } P(x) = (x - 1)(x - 4)(6x^2 - 11x - 10).$$

2. $Q(x) = 6x^2 - 11x - 10$, admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{5}{2}$.

Le tableau de signes de $P(x)$ permet d'obtenir :

$$S = \left[-\frac{2}{3}; 1\right] \cup \left[\frac{5}{2}; 4\right].$$

EXERCICE 119

1. Pour tout réel x : $P(x) = (x - 5)(x + 2)(-6x^2 - 5x + 21)$.
2. $Q(x) = -6x^2 - 5x + 21$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{7}{3}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

Le tableau de signes de $P(x)$ permet d'obtenir :

$$S = \left[-\frac{7}{3}; -2\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 5\right].$$

EXERCICE 120

$$P(x) = -8x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 41x - 30.$$

1. $\forall x : P(x) = (x + 2)(x - 3)(-8x^2 + 6x + 5)$.
2. $Q(x) = -8x^2 + 6x + 5$ admet deux racines distinctes $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5}{4}$.

Le tableau de signes de $P(x)$ permet d'obtenir :

$$S = \left]-2; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{5}{4}; 3\right[.$$

EXERCICE 121

$$P(x) = -x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2)x^3 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 5)x^2 + (2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2})x - 5\sqrt{6}.$$

1. $\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{3})(-x^2 - 2x + 5)$.
2. La fonction polynôme $Q(x) = -x^2 - 2x + 5$ admet deux racines distinctes $x_1 = -1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6}$.

Le tableau de signes de $P(x)$ permet d'obtenir :

$$S =]-\infty; -1 - \sqrt{6}[\cup]-\sqrt{3}; \sqrt{2}[\cup]-1 + \sqrt{6}; +\infty[.$$

EXERCICE 122

$\Delta = m^2 - 18m + 49$, l'équation $m^2 - 18m + 49 = 0$ admet deux solutions distinctes $m_1 = 9 - 4\sqrt{2}$ et $m_2 = 9 + 4\sqrt{2}$.

• Si $m \in]-\infty; 9 - 4\sqrt{2}[\cup]9 + 4\sqrt{2}; +\infty[$,

$\Delta > 0$ alors l'équation $2x^2 + (1 - m)x + 2(m - 3) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

• Si $m \in \{9 - 4\sqrt{2}; 9 + 4\sqrt{2}\}$, $\Delta = 0$ alors l'équation $2x^2 + (1 - m)x + 2(m - 3) = 0$ admet une solution.

• Si $m \in]9 - 4\sqrt{2}; 9 + 4\sqrt{2}[$, $\Delta < 0$ alors l'équation $2x^2 + (1 - m)x + 2(m - 3) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

EXERCICE 123

$\Delta = m^2 - 8m + 12$, l'équation $m^2 - 8m + 12 = 0$ admet deux solutions distinctes $m_1 = 2$ et $m_2 = 6$.

• Si $m \in]-\infty; 2[\cup]6; +\infty[$, $\Delta > 0$ alors l'équation $x^2 + mx + (2m - 3) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

• Si $m \in \{2; 6\}$, $\Delta = 0$ alors l'équation $x^2 + mx + (2m - 3) = 0$ admet une solution.

• Si $m \in]2; 6[$, $\Delta < 0$ alors l'équation $x^2 + mx + (2m - 3) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

EXERCICE 124

Il faut résoudre l'inéquation $v^2 + 30v - 150d < 0$

• Si $d = 10$ l'équation s'écrit $x^2 + 30v - 1500 = 0$, $\Delta = 6900$

l'équation admet deux solutions distinctes

$$v_1 = -15 - 5\sqrt{69} \text{ et } v_2 = -15 + 5\sqrt{69}$$

$v_1 < 0$ ce qui est impossible et $v_2 \approx 26,53$ à 10^{-2} près.

Il faut rouler à moins de 26 km/h pour s'arrêter en moins de 10 m.

• Si $d = 30$ l'équation s'écrit $x^2 + 30v - 4500 = 0$,

$\Delta = 18900$, l'équation admet deux solutions distinctes

$$v_1 = -15 - 15\sqrt{21} \text{ et } v_2 = -15 + 15\sqrt{21}$$

$v_1 < 0$ ce qui est impossible et $v_2 \approx 53,74$ à 10^{-2} près.

Il faut rouler à moins de 53 km/h pour s'arrêter en moins de 30 m.

EXERCICE 125

Soit $P_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $P_2(x) = x^2 + x + 2$,

$Q_1(x) = 3 - x^2$ et $Q_2(x) = x^2 - x - 6$.

☞ Etapes pour la résolution :

- Déterminer les valeurs interdites, c'est-à-dire les racines des polynômes Q_1 et Q_2 .
- Déterminer les racines de P_1 et de P_2 .
- Etablir le tableau de signes des quatre polynômes, puis de l'expression de l'énoncé que nous noterons $E(x)$.
- Conclure.

Détermination des valeurs interdites :

Les racines de Q_1 sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Les racines de Q_2 sont -2 et 3 .

Les valeurs interdites sont donc -2 , $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et 3 .

Détermination des racines de P_1 et de P_2 :

Les racines de P_1 sont -1 et $\frac{1}{3}$.

Le discriminant de P_2 est négatif, $P_2(x)$ est toujours du signe de a , donc strictement positif. Il est inutile de le placer dans le tableau, son signe strictement positif ne modifiant pas le signe du produit.

$$\frac{(3x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 2)}{(3 - x^2)(x^2 - x - 6)} \geq 0.$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$
$(3x^2 + 2x - 1)$	+	+	+	+	0	-	0
$(3 - x^2)$	-	-	0	+	+	-	-
$(x^2 - x - 6)$	+	0	-	-	-	-	-
$E(x)$	-		+		-	0	+

x	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
Signe de $(3x^2 + 2x - 1)$	0	+	+	+
Signe de $(3 - x^2)$	+	0	-	-
Signe de $(x^2 - x - 6)$	-	-	-	0
Signe de $E(x)$	0	-		+

Ainsi $S =]-2; -\sqrt{3}[\cup \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup]\sqrt{3}; 3[$.

EXERCICE 126

☞ **Attention :** Ne connaissant pas le signe de chaque membre de l'inéquation, on ne peut pas simplifier par un « produit en croix ».

1. Pour $x \neq -4$,

$$\frac{3x^2 + 1}{x + 4} \geq 2x \iff \frac{3x^2 + 1}{x + 4} - \frac{2x(x + 4)}{x + 4} \geq 0.$$

$$\text{Soit après simplification } \frac{x^2 - 8x + 1}{x + 4} \geq 0.$$

Le polynôme $P(x) = x^2 - 8x + 1$ admet deux racines distinctes $x_1 = 4 - \sqrt{15}$ et $x_2 = 4 + \sqrt{15}$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{x^2 - 8x + 1}{x + 4}$ permet d'obtenir $\mathcal{S} =]-4; 4 - \sqrt{15}] \cup [4 + \sqrt{15}; +\infty[$.

2. Pour x différent de -1 et de 2 ,

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{2x-5}{x-2} \leq 2$$

$$\iff \frac{(x-2)^2 + (2x-5)(x+1) - 2(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \leq 0.$$

Soit après simplification : $\frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)} \leq 0$.

Le polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 3$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)}$ permet d'obtenir $\mathcal{S} = \left] -1; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left] 2; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right[$.

EXERCICE 127

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $\frac{4}{2-x} + \frac{3}{x+2} \geq \frac{3x^2}{4-x^2}$
- $$\iff \frac{4(x+2) + 3(2-x) - 3x^2}{(x+2)(2-x)} \geq 0.$$

Soit après simplifications : $\frac{-3x^2 + x + 14}{(x+2)(2-x)} \geq 0$.

Le polynôme $P(x) = -3x^2 + x + 14$ admet deux racines distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{7}{3}$.

Tableau de signes de $Q(x) = \frac{-3x^2 + x + 14}{(x+2)(2-x)}$:

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$(-3x^2 + x + 14)$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
$(x+2)(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$Q(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$

$$\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup \left[\frac{7}{3}; +\infty \right[.$$

2. Pour x différent de $-\frac{3}{2}$ et de 0 ,

$$\frac{x}{2x+3} \leq \frac{2x+3}{x} \iff \frac{x^2 - (2x+3)^2}{x(2x+3)} \leq 0.$$

Soit après simplifications $\frac{-3(x+1)(x+3)}{x(2x+3)} \leq 0$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{-3(x+1)(x+3)}{x(2x+3)}$

permet d'obtenir

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -3 \right] \cup \left] -1,5; -1 \right] \cup \left] 0; +\infty \right[.$$

EXERCICE 128

1. Pour $x \neq -1$, $\frac{(6x-3)(x-4) - (2x-1)(5x-3)}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$
- $$\iff \frac{(2x-1)(-2x-9)}{(x+1)^2} \geq 0.$$

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{(2x-1)(-2x-9)}{(x+1)^2}$ permet d'obtenir $\mathcal{S} = [-4,5; -1[\cup]-1; 0,5]$.

2. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$,
- $$\frac{4-2x-3x^2 - (x+4)(2x+2)}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$
- $$\iff \frac{-5x^2 - 12x - 4}{x^2 - 5x + 6} \leq 0.$$

Le polynôme $P(x) = -5x^2 - 12x - 4$ admet deux racines distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{2}{5}$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{-5x^2 - 12x - 4}{x^2 - 5x + 6}$ permet d'obtenir

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -2 \right] \cup \left[-\frac{2}{5}; 2 \right[\cup \left] 3; +\infty \right[.$$

EXERCICE 129

1. $3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x(x+1) + 2(x+1)$
- $$= (3x+2)(x+1)$$
- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -1; -\frac{2}{3} \right\}$, $\frac{7x+3}{3x+2} \geq \frac{2-3x}{3x^2 + 5x + 2}$
- $$\iff \frac{(7x+3)(x+1) - (2-3x)}{(3x+2)(x+1)} \geq 0.$$

Soit après simplifications $\frac{7x^2 + 13x + 1}{(3x+2)(x+1)} \geq 0$.

Le polynôme $P(x) = 7x^2 + 13x + 1$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{141}}{14}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{141}}{14}$.

Tableau de signes de $Q(x) = \frac{7x^2 + 13x + 1}{(3x+2)(x+1)}$.

x	$-\infty$	x_1	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $(7x^2 + 13x + 1)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
Signe de $(3x+2)(x+1)$	$+$	$+$	0	$-$	0
Signe de $Q(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

x	$-\frac{2}{3}$	x_2	$+\infty$
Signe de $(7x^2 + 13x + 1)$	$-$	0	$+$
Signe de $(3x+2)(x+1)$	0	$+$	$+$
Signe de $Q(x)$	$\parallel$	$-$	$+$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{-13 - \sqrt{141}}{14} \right] \cup \left] -1; -\frac{2}{3} \right[\cup \left[\frac{-13 + \sqrt{141}}{14}; +\infty \right[.$$

2. $2x^2 - 13x + 20 = (2x-5)(x-4)$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2}; 4 \right\}, \frac{-3x^2 - 7x + 6}{2x^2 - 13x + 20} \leq \frac{8x - 3}{5 - 2x}$$

$$\iff \frac{-3x^2 - 7x + 6 + (8x - 3)(x - 4)}{(x - 4)(2x - 5)} \leq 0.$$

$$\text{Soit après simplifications } \frac{5x^2 - 42x + 18}{(2x - 5)(x - 4)} \leq 0.$$

Le polynôme $P(x) = 5x^2 - 42x + 18$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{21 - 3\sqrt{39}}{5}$ et $x_2 = \frac{21 + 3\sqrt{39}}{5}$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{5x^2 - 42x + 18}{(2x - 5)(x - 4)}$ permet d'obtenir :

$$S = \left[\frac{21 - 3\sqrt{39}}{5}; \frac{5}{2} \right] \cup \left[4; \frac{21 + 3\sqrt{39}}{5} \right].$$

EXERCICE 130

$$1. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}, \frac{5x - 2}{x - 2} > \frac{4 - 3x}{x + 2}$$

$$\iff \frac{(5x - 2)(x + 2) - (4 - 3x)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} > 0.$$

$$\text{Soit après simplifications : } \frac{8x^2 - 2x + 4}{(x - 2)(x + 2)} > 0.$$

Le polynôme $P(x) = 8x^2 - 2x + 4$ n'admet pas de racines réelles ($\Delta < 0$), il est donc toujours du signe de a , c'est-à-dire positif.

Le signe de $Q(x) = \frac{8x^2 - 2x + 4}{(x - 2)(x + 2)}$ est donc donnée par le dénominateur.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
Signe de $Q(x)$	+		-		+

$$S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

$$2. x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}, \frac{x - 3}{x^2 - 2x - 15} \leq \frac{2 - 3x}{5 - x}$$

$$\iff \frac{(x - 3) + (2 - 3x)(x + 3)}{(x - 5)(x + 3)} \leq 0.$$

$$\text{Soit après simplifications : } \frac{-3x^2 - 6x + 3}{(x - 5)(x + 3)}.$$

Le polynôme $P(x) = -3x^2 - 6x + 3$ admet deux racines distinctes $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

Le tableau de signes de $Q(x) = \frac{-3x^2 - 6x + 3}{(x - 5)(x + 3)}$ permet d'obtenir :

$$S =]-\infty; -3[\cup [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}] \cup]5; +\infty[.$$

EXERCICE 131

$$1. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -2; -\frac{1}{2} \right\}, \frac{3 - 2x}{x + 2} \geq \frac{12 - 4x}{2x + 1}$$

$$\iff \frac{(3 - 2x)(2x + 1) - (12 - 4x)(x + 2)}{(x + 2)(2x + 1)} \geq 0.$$

$$\text{Soit après simplifications : } \frac{-21}{(x + 2)(2x + 1)} \geq 0$$

$$\text{Tableau de signes de } Q(x) = \frac{-21}{(x + 2)(2x + 1)}.$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
Signe de $(x+2)(2x+1)$	+	0	-	0	+
Signe de $Q(x)$	-		+		-

Nous en déduisons l'ensemble des solutions :

$$S = \left] -2; -\frac{1}{2} \right[.$$

$$2. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{2x - 3}{x - 1}$$

$$\iff \frac{-2x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2} \leq 0$$

$$S = \left] -\infty; 2 - \sqrt{2} \right] \cup \left[2 + \sqrt{2}; +\infty \right[.$$

EXERCICE 132

$$1. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}, \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 3x - 4} < \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 1}$$

$$\iff \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 1)(x - 4)} - \frac{x^3 - 3x - 4}{(x + 2)(x - 5)(x - 4)} < 0.$$

$$\text{Soit encore } \frac{(x + 2)(-x^2 + 10x - 17)}{(x + 1)(x - 4)} < 0.$$

L'équation $-x^2 + 10x - 17 = 0$ admet deux racines distinctes $x_1 = 5 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 5 + 2\sqrt{2}$.

En établissant le tableau de signe de l'expression $P(x) = \frac{(x + 2)(-x^2 + 10x - 17)}{(x + 1)(x - 4)}$, nous obtenons l'ensemble des solutions :

$$S =]-2; -1[\cup]5 - 2\sqrt{2}; 4[\cup]5 + 2\sqrt{2}; +\infty[.$$

$$2. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}, -2 \leq \frac{x^2 - x - 30}{8 + 2x - x^2} \leq 2 \iff$$

$$\left(\frac{x^2 - x - 30}{(x + 2)(4 - x)} + 2 \geq 0 \right) \text{ et } \left(\frac{x^2 - x - 30}{(x + 2)(4 - x)} - 2 \leq 0 \right).$$

Après simplifications, nous en déduisons que

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\} \text{ doit vérifier } \frac{-x^2 + 3x - 14}{(x + 2)(4 - x)} \geq 0 \text{ et}$$

$$\frac{3x^2 - 5x - 46}{(x + 2)(4 - x)} \leq 0.$$

• La résolution de la première inéquation donne

$$S_1 =]-\infty; -2[\cup]4; +\infty[$$

• La résolution de la seconde inéquation donne

$$S_2 = \left] -\infty; \frac{5 - \sqrt{577}}{6} \right] \cup]-2; 4[\cup \left[\frac{5 + \sqrt{577}}{6}; +\infty \right[$$

• Il ne reste plus qu'à faire l'intersection des deux ensembles obtenus.

$$\text{Ainsi } S = \left] -\infty; \frac{5 - \sqrt{577}}{6} \right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{577}}{6}; +\infty \right[$$

EXERCICE 133

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq x$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^4 + 4x^2 - 1}{x(x+1)(x-1)} \geq 0.$$

Soit $Q(x) = -x^4 + 4x^2 - 1$, en posant $X = x^2$ nous résolvons l'équation $-X^2 + 4X - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions

$$X_1 = 2 - \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2 \text{ et } X_2 = 2 + \sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

$Q(x)$ admet quatre racines distinctes $x_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$,

$$x'_1 = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ et } x'_2 = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Le tableau de signes permet de conclure :

$$S = \left] -\infty; -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right] \cup \left] -1; -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right] \cup \left] 0; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right] \cup \left] 1; \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right].$$

EXERCICE 134

1. $\Delta = a^2 - 36$. Le polynôme $q(x) = x^2 - 36$ admet deux racines distinctes -6 et 6 ,

Nous en déduisons que :

- si $a \in]-\infty; -6[\cup]6; +\infty[$, $\Delta > 0$, le polynôme $P(x)$ admet deux racines distinctes,
- si $a \in \{-6; 6\}$, $\Delta = 0$, le polynôme $P(x)$ admet une racine unique,
- si $a \in]-6; 6[$, $\Delta < 0$, le polynôme $P(x)$ n'admet aucune racine réelle.

2. $P(x) > -3 \Leftrightarrow x^2 + ax + 12 > 0$.

$$\Delta = a^2 - 48 = (a - 4\sqrt{3})(a + 4\sqrt{3}).$$

Si $a \in]-4\sqrt{3}; 4 + \sqrt{3}[$, $\Delta < 0$ donc $P(x) + 3$ n'admet aucune racine réelle et reste de signe constant soit positif.

EXERCICE 135

1. $P(x) = 3(x+1)^2 - 10$, P est une fonction polynôme du second degré, avec $a > 0$, nous en déduisons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
P		-10	

2. D'après la question précédente, $P(x)$ admet un minimum égal à -10 en $x = -1$.

3. $P(x)$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{30}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{30}}{3}.$$

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{30}}{3}; \frac{-3 + \sqrt{30}}{3} \right].$$

4. $-1 < P(x) < 1 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x - 6 > 0 \text{ et } 3x^2 + 6x - 8 < 0)$

• $P_1(x) = 3x^2 + 6x - 6$ admet deux racines distinctes

$$x_1 = -1 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{3}.$$

$$3x^2 + 6x - 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}; +\infty[$$

• $P_2(x) = 3x^2 + 6x - 8$ admet deux racines distinctes

$$x_3 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{3} \text{ et } x_4 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{3}.$$

$$3x^2 + 6x - 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{-3 - \sqrt{33}}{3}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{3} \right[$$

• Il ne reste plus qu'à déterminer l'intersection de ces deux ensembles de solutions :

$$S = \left] \frac{-3 - \sqrt{33}}{3}; -1 - \sqrt{3} \right[\cup \left] -1 + \sqrt{3}; \frac{-3 + \sqrt{33}}{3} \right[.$$

EXERCICE 136

On considère la fonction $Q(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$.

1. Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ n'admet pas de solutions réelles ($\Delta = -3$), Q est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Sachant que pour tout réel x , $x^2 + x + 1 > 0$,

$$-6 < Q(x) < 5$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 - 6x - 6 \leq 4x^2 - 5 \leq 5x^2 + 5x + 5$$

$$\Rightarrow (10x^2 + 6x + 1 > 0 \text{ et } -x^2 - 5x - 10 < 0).$$

• Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = 10x^2 + 6x + 1 > 0$ car $\Delta = -4$ et $a = 10 > 0$.

• Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = -x^2 - 5x - 10 < 0$ car $\Delta = -15$ et $a = -1 < 0$.

Ainsi pour tout réel x , $-6 < Q(x) < 5$.

EXERCICE 137

1. Le polynôme $q(x) = x^2 + 2x + 2$ a un discriminant négatif ($\Delta = -4$), il ne s'annule donc jamais sur $\mathbb{R}$. La fonction Q est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. Sachant que pour tout réel x , $x^2 + 2x + 2 > 0$,

$$-2 \leq Q(x) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 4x - 4 \leq 2x^2 - 2 \leq 4x^2 + 8x + 8$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ et } x^2 + 4x + 5 \geq 0).$$

Dans les deux cas le discriminant est négatif et le coefficient du terme de degré 2 est positif, les deux équations sont donc toujours vérifiées.

$$3. \quad Q\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 + \sqrt{5}.$$

$$Q(x) - Q\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2x^2-2}{x^2+2x+2} - 1 - \sqrt{5} = \frac{(1-\sqrt{5})x^2 - 2(1+\sqrt{5})x - 4 - 2\sqrt{5}}{x^2+2x+2}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de l'expression ne dépend que du signe du numérateur.

Le discriminant du numérateur est nul et le coefficient du terme de degré 2 est négatif, le numérateur est donc toujours négatif ou nul.

On en déduit alors que $Q(x) \leq 1 + \sqrt{5}$, le maximum de Q est $1 + \sqrt{5}$.

$$4. \quad Q\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \sqrt{5}.$$

$$Q(x) - Q\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2x^2-2}{x^2+2x+2} - 1 + \sqrt{5} = \frac{(1+\sqrt{5})x^2 - 2(1-\sqrt{5})x - 4 + 2\sqrt{5}}{x^2+2x+2}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de l'expression ne dépend que du signe du numérateur.

Le discriminant du numérateur est nul et le coefficient du terme de degré 2 est positif, le numérateur est donc toujours positif ou nul.

On en déduit que $Q(x) \geq 1 - \sqrt{5}$, le minimum de Q est $1 - \sqrt{5}$.

EXERCICE 138

- Le polynôme $q(x) = x^2 - 2x + 2$ a un discriminant négatif ($\Delta = -4$), il ne s'annule donc jamais sur $\mathbb{R}$. La fonction Q est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- $x^2 + 2 > 0$ et d'après la réponse précédente $x^2 - 2x + 2 > 0$ donc quel que soit x réel, $Q(x) \geq 0$.
 $Q(x) \leq 6 \iff x^2 + 2 \leq 6x^2 - 12x + 12$
car $x^2 - 2x + 2 > 0$.
 $x^2 + 2 \leq 6x^2 - 12x + 12 \iff 5x^2 - 12x + 10 \geq 0$
ce qui est toujours vrai car le discriminant du polynôme $5x^2 - 12x + 10$ est négatif ($\Delta = -56$) et le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Ans pour tout réel x , $0 \leq Q(x) \leq 6$.

$$3. \quad Q(\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}.$$

$$Q(x) - 2 - \sqrt{2} = \frac{-(1+\sqrt{2})x^2 + (6+2\sqrt{2})x - (4+2\sqrt{2})}{(x^2-2x+2)}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de l'expression ne dépend que du signe du numérateur.

Le discriminant du numérateur est nul et le coefficient du terme de degré 2 est négatif, le numérateur est donc toujours négatif ou nul.

On en déduit alors que $Q(x) \leq 2 + \sqrt{2}$, le maximum de Q est $2 + \sqrt{2}$.

$$4. \quad Q(-\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}.$$

$$Q(x) - 2 + \sqrt{2} = \frac{-(1-\sqrt{2})x^2 + (6-2\sqrt{2})x - (4-2\sqrt{2})}{(x^2-2x+2)}.$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de l'expression ne dépend que du signe du numérateur.

Le discriminant du numérateur est nul et le coefficient du terme de degré 2 est positif, le numérateur est donc toujours positif ou nul.

On en déduit alors que $Q(x) \geq 2 - \sqrt{2}$, le minimum de Q est $2 - \sqrt{2}$.

EXERCICE 139

- $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.
 - D'après la question réponse précédente, $P(x)$ admet $-\frac{5}{4}$ pour minimum en $\frac{3}{2}$.
 - $P(x) = \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. On en déduit alors que la courbe $\mathcal{C}_P$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- En remarquant que la somme des coefficients de $Q(x)$ est nulle, on déduit que $\alpha = 1$ est une racine du polynôme $Q(x)$.
 - Pour tout réel x : $Q(x) = (x-1)(4x^2+8x-1)$.
 - $Q(x)$ admet trois racines distinctes $x_0 = 1$
 $x_1 = \frac{-2-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$.
 - Tableau de signes de $Q(x)$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	1	$+\infty$
$4x^2 + 8x - 1$		+	0	-	+
$(x+1)$		-	-	-	0
$Q(x)$		-	0	+	0

3. $P(x) = Q(x) \iff x(4x^2 + 3x - 6) = 0$.

Cette dernière équation a trois solutions distinctes

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{8} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{8}.$$

Les courbes $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_Q$ se coupent aux points

$$A_0(0; 1), \quad A_1\left(\frac{-3 - \sqrt{105}}{8}; \frac{125 + 15\sqrt{105}}{32}\right) \text{ et}$$

$$A_2\left(\frac{-3 + \sqrt{105}}{8}; \frac{125 - 15\sqrt{105}}{32}\right)$$

EXERCICE 140

1. d 2. d 3. c 4. b 5. d

EXERCICE 141

1. a 2. c 3. c 4. a 5. c

EXERCICE 142

1. b 2. c 3. a 4. c 5. b

EXERCICE 143

1. b 2. c 3. b 4. c 5. c

EXERCICE 144

1. $f(x) = -2(x+1)^2 + 4 = -2(x^2 + 2x + 1) + 4$

On en déduit alors que $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

L'affirmation est donc fausse.

2. En utilisant la forme canonique, on vérifie que l'affirmation est vraie.

3. D'après le tableau de variation précédent, la courbe admet un sommet de coordonnées $(-1; 4)$.

L'affirmation est donc fausse.

4. Les deux questions précédentes permettent de conclure que l'affirmation est vraie.

5. $f(1) = -4$, l'affirmation est donc fausse.

EXERCICE 145

1. $a > 0$, la courbe est donc décroissante puis croissante. L'affirmation est fausse.

2. Si a et c sont de signes contraires alors $4ac < 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet donc deux solutions réelles distinctes.

L'affirmation est vraie.

3. $x^2 = 5x - 4 \iff (x-1)(x-4) = 0$ donc $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.

L'affirmation est fausse.

4. $\Delta = 16$, l'équation $-x^2 + 2x + 3 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

$-x^2 + 2x + 3 > 0$ donc du signe de $-a$ entre les deux solutions. L'inégalité étant stricte, les bornes sont exclues, $\mathcal{S} =]-1; 3[$.

L'affirmation est vraie.

5. $f(x) = g(x) \implies x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 13 > 0$ l'équation admet donc deux solutions réelles distinctes.

L'affirmation est vraie.

EXERCICE 146

1. $0 \leq x \leq 10$.

2. Deux côtés mesurent x dizaine de mètres.

Soit y la longueur du troisième côté.

Alors $2x + y = 20$ donc $y = 20 - 2x$.

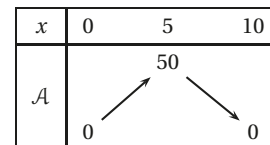
On en déduit alors que $\mathcal{A}(x) = xy = -2x^2 + 20x$.

3. $\mathcal{A}(x) = -2(x^2 - 10x) = -2[(x-5)^2 - 25]$

d'où $\mathcal{A}(x) = -2(x-5)^2 + 50$.

4. D'après la forme canonique, la courbe de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{C}_3$.

5.



6. D'après la question précédente, $\mathcal{A}$ admet un maximum pour $x = 5$, ce maximum est égal à 50.

On en déduit que l'aire de baignade maximale est égale à 5000 m^2 .

EXERCICE 147

1. $0 < x < 25$.

2. Le côté du parc des poules mesure x mètres, il reste donc $100 - 4x$ mètres pour le parc des chèvres. Le côté du parc des chèvres mesure donc $\frac{100 - 4x}{4} = 25 - x$.

On en déduit l'aire totale des deux parcs :

$$\mathcal{A}(x) = x^2 + (25 - x)^2 = 2x^2 - 50x + 625.$$

3. $\mathcal{A}(x) = 2(x^2 - 25x) + 625 = 2[(x - 12,5)^2 - 12,5^2] + 625$

d'où $\mathcal{A}(x) = 2(x - 12,5)^2 + 312,5$.

4.

x	0	12,5	25
$\mathcal{A}$	625	312,5	625

5. D'après le tableau précédent, l'aire totale sera minimale pour $x = 12,5$. L'aire totale sera alors égale à $312,5 \text{ m}^2$.

EXERCICE 148

- $0 \leq x \leq 3$.
- Les aires des triangles AEH et CFG sont égales à $\frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{2}(3x-x^2)$
Les aires des triangles BEF et DGH sont égales à $\frac{1}{2}x(4-x) = \frac{1}{2}(4x-x^2)$.
On en déduit alors que la somme des aires des quatre triangles est égale à $7x-2x^2$.
- $\mathcal{A}(x) = 12 - (7x-2x^2) = 2x^2 - 7x + 12$.
- $\mathcal{A}(x) = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 12 = 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] + 12$
d'où $\mathcal{A}(x) = 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{8}$.

x	0	$\frac{7}{4}$	3
$\mathcal{A}$	12	$\frac{47}{8}$	12

- D'après le tableau précédent, $\mathcal{A}$ est minimale pour $x = \frac{7}{4}$.
L'aire est alors égale à $5,875 \text{ cm}^2$.
- Résolution de l'équation $2x^2 - 7x + 5 = 0$
 $\Delta = 9$, l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = 1$
- Déterminer position du point E pour laquelle $\mathcal{A}$ est égale à 7 cm^2 revient à résoudre l'équation $2x^2 - 7x + 12 = 7$ ou encore $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
On déduit de la question précédente que $AE = 1 \text{ cm}$ ou $AE = 2,5 \text{ cm}$.

EXERCICE 149

- Posons $AD = y$, d'après les contraintes de l'exercice :

$$2x + 2y - 9 = 21$$

$$\text{d'où } y = 15 - x$$

- $\mathcal{A} = x(15-x) - 18 = -x^2 + 15x - 18$.
- $\mathcal{A}(x) = -(x^2 - 15x) - 18 = -\left[\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right] - 18$
d'où $\mathcal{A}(x) = -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{153}{4}$.

4.

x	$\frac{15}{2}$
$\mathcal{A}$	$\frac{153}{4}$

- D'après le tableau précédent, l'aire est maximale pour $x = 7,5 \text{ cm}$. L'aire est alors égale à $38,25 \text{ cm}^2$.

EXERCICE 150

- Rappel :** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
 $t^3 = \sqrt{5} + 2 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} +$
 $3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2 - \sqrt{5} + 2$
 $= 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right) + 4$
 $= -3t + 4$
car $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{5-4} = 1$.
Ainsi $t^3 + 3t - 4 = 0$.

- 1 est une racine du polynôme $P(t) = t^3 + 3t - 4$, on en déduit alors que $P(t)$ est factorisable par $(t-1)$.
En considérant les coefficients, on obtient $t^3 + 3t - 4 = (t-1)(t^2 + t + 4)$.
- L'équation $t^2 + t + 4 = 0$ n'admet aucune solution réelle car $\Delta = -8$.
On en déduit que P n'admet qu'une racine réelle, elle est égale à 1. Or d'après la première question t est aussi une racine de P , on en déduit donc que $t = 1$.

EXERCICE 151

- Les mobiles M_1 et M_2 se rencontrent lorsque $x_1 = x_2$. Ceci revient à résoudre l'équation $t^2 + 15t - 100 = 0$. Cette équation admet deux solutions distinctes -20 et 5 . La solution négative est impossible car $t \geq 0$. Nous en déduisons alors que les deux mobiles ne se rencontrent qu'une fois : à l'instant $t = 5$ au point d'abscisse 25.

2. Les vitesses algébriques des deux mobiles à l'instant de leur rencontre sont les dérivées en $t = 5$ des équations horaires.

$$x'_1(t) = -2t \text{ d'où } x'_1(5) = -10.$$

$$x'_2(t) = -\frac{12}{5}t + 7 \text{ d'où } x'_2(5) = -5.$$

EXERCICE 152

Les chevaux sont numérotés de 1 à n , la somme des numéros est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Le cheval numéro x , blessé, ne prend pas le départ, la somme des numéros des partants est alors égale à $\frac{n(n+1)}{2} - x = 260$.

Si le cheval blessé est le numéro n , alors $\frac{n(n-1)}{2} = 260$ soit $n^2 - n - 520 = 0$. La résolution de l'équation permet de conclure qu'il y a au maximum 23 partants.

Réolvons l'équation d'inconnue n : $\frac{n(n+1)}{2} - x = 260$ soit encore $n^2 + n - 2x - 520 = 0$.

$\Delta = 8x + 2081$. n étant un entier, il faut que $8x + 2081$ soit un carré parfait.

Soit $f(x) = \sqrt{8x + 2081}$, on utilise la tableur de la calculatrice et on recherche pour quels entiers $x < 23$, $f(x)$ est entier. Seul 16 répond au problème.

Pour $x = 16$, on obtient $\Delta = 47^2$, l'équation admet deux solutions $n_1 = -23$ et $n_2 = 24$. La première solution, négative, ne convient pas.

Il y avait 24 chevaux, soit 23 partants et le numéro 16 non partant.

EXERCICE 153

Soit n le nombre de bonbons.

Le premier enfant prend $1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+5}{6}$.

Le deuxième enfant prend $2 + \frac{n - \frac{n+5}{6} - 2}{6} = \frac{5n+55}{36}$.

Les deux enfants ont le même nombre de bonbons donc $\frac{n+5}{6} = \frac{5n+55}{36}$.

Après simplification et résolution de l'équation, on obtient $n = 25$.

Le premier enfant prend $\frac{25+5}{6}$ soit 5 bonbons. Les enfants sont donc 5.

EXERCICE 154

$\Delta = n^2 - 4$, $P(x) = x^2 + nx + 1$ admet une racine lorsque

$n = 2$, cette racine est égale à -1 .

$P(x)$ admet deux racines distinctes si et seulement si $n > 2$.

Les racines seront rationnelles si Δ est un carré parfait soit $n^2 - 4 = x^2$.

$n^2 - 4 = x^2 \iff (n-x)(n+x) = 4$ la décomposition de 4 en produit de deux entiers relatifs permet d'obtenir six systèmes de deux équations :

$$S_1 : \begin{cases} n - x = 1 \\ n + x = 4 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} n - x = 2 \\ n + x = 2 \end{cases}$$

etc.

Aucun système n'admet de solution telle que $n > 2$.

Le polynôme $P(x) = x^2 + nx + 1$ n'admet donc jamais deux solutions rationnelles distinctes quelle que soit la valeur de l'entier naturel n .

EXERCICE 155

Posons $OH = x$ avec $0 < x < \frac{1}{2}$.

• Le triangle OHN est rectangle en H , ON est un rayon de C_1 , la relation de Pythagore permet d'obtenir $HN = \sqrt{1-x^2}$.

• Le triangle JHM est rectangle en H , JM est un rayon de C_2 et $JH = \frac{1}{2} - x$, la relation de Pythagore permet

d'obtenir $HM = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2} = \sqrt{x-x^2}$.

$$\begin{aligned} \bullet MN = \frac{1}{2} &\iff \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x-x^2} = \frac{1}{2} \\ &\implies 1+x-2x^2-2\sqrt{(1-x^2)(x-x^2)} = \frac{1}{4} \\ &\implies 2\sqrt{(1-x^2)(x-x^2)} = \frac{3}{4} + x - 2x^2 \\ &\implies 4(1-x^2)(x-x^2) = \left(\frac{3}{4} + x - 2x^2\right)^2 \\ &\implies 32x^2 - 40x + 9 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{7}}{8} \text{ et } x_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{8}.$$

$$x_2 > \frac{1}{2} \text{ et } 0 < x_1 < \frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons que $OH = \frac{5-\sqrt{7}}{8}$.

EXERCICE 156

$P(x) = ax^2 + bx + c$ fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, $P'(x) = 2ax + b$.

$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$

$$\iff 2ax^2 + bx - 2ax^2 - 2bx - 2c = 0$$

$$\implies (b = 0 \text{ et } c = 0).$$

Ainsi $P(x) = ax^2$ avec a constante réelle quelconque.

EXERCICE 157

1. Nous cherchons a, b, c et d entiers relatifs tels que $x^3 + ax^2 + 4x + 8 = (x + b)(x^2 + cx + d)$.

$$\text{or } (x + b)(x^2 + cx + d) = x^3 + (b + c)x^2 + (d + bc)x + bd.$$

En identifiant les coefficients des termes de mêmes degrés, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} b + c = a \\ bc + d = 4 \\ bd = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} bd = 8 \\ c = \frac{4-d}{b} \\ a = b + c \end{cases}$$

Sachant que a, b, c et d sont des entiers relatifs, nous commençons par décomposer 8 en produit de deux entiers relatifs, puis calculons les valeurs de c et a .

b	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
d	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
c	4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-12	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{8}$
a	-3	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{67}{8}$	-13	-6	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{69}{8}$

Il y a donc quatre quadruplets solutions : $(-3; 1; -4; 8)$, $(2; 2; 0; 4)$, $(-13; -1; -12; -8)$ et $(-6; -2; -4; -4)$.

2. En développant et en identifiant les coefficients des termes de mêmes degrés, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} b + c = a \\ bc + d = 4 \\ bd = p \end{cases} \implies \begin{cases} bd = p \\ c = \frac{4-d}{b} \\ a = b + c \end{cases}$$

p étant un nombre premier nous en déduisons que $(b = 1 \text{ et } d = p)$ ou $(b = -1 \text{ et } d = -p)$ ou $(b = p \text{ et } d = 1)$ ou $(b = -p \text{ et } d = -1)$

- Si $b = p$ ou $b = -p$ c n'est pas un entier relatif.
- Si $b = 1$ et $d = p$ alors $c = 4 - p$ et $a = 5 - p$, cette solution convient.
- Si $b = -1$ et $d = -p$ alors $c = -4 - p$ et $a = -5 - p$, cette solution convient.

Il y a donc deux quadruplets solutions : $(5 - p; 1; 4 - p; p)$ et $(-5 - p; -1; -4 - p; -p)$.

EXERCICE 158

$$\begin{aligned} 1. \quad x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

2. On remarque que $5 = 1^4 + 4$ et 5 est un nombre premier.

D'après la question précédente un nombre de la forme $N^4 + 4$ se décompose en produit de deux entiers différents de 1 si $N > 1$, il n'est donc pas premier. 5 est donc le seul nombre premier de la forme $N^4 + 4$.

3. N n'est pas un multiple de 5, il existe donc deux entiers naturels p et r avec $1 \leq r \leq 4$ tels que $N = 5p + r$. On a alors $N^4 + 4 = (5p(5p + 2r + 2) + r^2 + 2r + 2)(5p(5p + 2r - 2) + r^2 - 2r + 2)$.

Travaillons par disjonction des cas :

- Si $r = 1$ alors $r^2 + 2r + 2 = 5$ et $r^2 - 2r + 2 = 1$,

$$\begin{aligned} N^4 + 4 &= (5p(5p + 2r + 2) + 5)(5p(5p + 2r - 2) + 1) \\ &= 5(p(5p + 2r + 2) + 1)(5p(5p + 2r - 2) + 1). \end{aligned}$$

- Si $r = 2$ alors $r^2 + 2r + 2 = 10$ et $r^2 - 2r + 2 = 2$,

$$\begin{aligned} N^4 + 4 &= (5p(5p + 2r + 2) + 10)(5p(5p + 2r - 2) + 2) \\ &= 5(p(5p + 2r + 2) + 2)(5p(5p + 2r - 2) + 2). \end{aligned}$$

- Si $r = 3$ alors $r^2 + 2r + 2 = 17$ et $r^2 - 2r + 2 = 5$,

$$\begin{aligned} N^4 + 4 &= (5p(5p + 2r + 2) + 17)(5p(5p + 2r - 2) + 5) \\ &= 5(5p(5p + 2r + 2) + 17)(p(5p + 2r - 2) + 1). \end{aligned}$$

- Si $r = 4$ alors $r^2 + 2r + 2 = 26$ et $r^2 - 2r + 2 = 10$,

$$\begin{aligned} N^4 + 4 &= (5p(5p + 2r + 2) + 26)(5p(5p + 2r - 2) + 10) \\ &= 5(5p(5p + 2r + 2) + 26)(p(5p + 2r - 2) + 2). \end{aligned}$$

ce qui prouve que $N^4 + 4$ est un multiple de 5.

EXERCICE 159

1. $A_0(x) = 1$ soit $1 = A_0(x)$

$$A_1(x) = x - 1 \text{ soit } x = A_1(x) + 1$$

$$A_2(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ soit } x^2 = A_2(x) + 3x - 2$$

$$A_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ soit } x^3 = A_3(x) + 6x^2 - 11x + 6$$

$$A_4(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

$$\text{soit } x^4 = A_4(x) + 10x^3 - 35x^2 - 50x + 24.$$

Tout polynôme de degré inférieur ou égal à 4 s'écrit $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ avec a, b, c, d et e constantes réelles.

Nous allons remplacer x^4 , simplifier, puis x^3 etc.

$$P(x) = a(A_4(x) + 10x^3 - 35x^2 - 50x + 24) + bx^3$$

$$\begin{aligned}
 &+cx^2+dx+e \\
 P(x) &= aA_4(x) + (10a+b)x^3 + (c-35a)x^2 \\
 &\quad + (50a+d)x + (e-24a)
 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 P(x) &= aA_4(x) + (10a+b)A_3(x) + (25a+6b+c)A_2(x) + \\
 &\quad (15a+7b+3c+d)A_1(x) + (a+b+c+d+e)A_0.
 \end{aligned}$$

Ceci démontre que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 4 admet une expression, et une seule, de la forme

$$P = a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4.$$

2. En utilisant ce qui précède avec $a = 1$ et

$b = c = d = e = 0$, nous obtenons :

$$x^4 = A_4(x) + 10A_3(x) + 25A_2(x) + 15A_1(x) + A_0(x).$$

EXERCICE 160

$$\Delta = 25 - 4a > 0 \iff a < \frac{25}{4}.$$

Si $a < \frac{25}{4}$ les deux solutions de l'équation sont

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4a}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4a}}{2}.$$

$$\bullet 1 \leq \frac{5 - \sqrt{25 - 4a}}{2} \leq 9 \implies -13 \leq \sqrt{25 - 4a} \leq 3$$

$$\implies 0 \leq 25 - 4a \leq 9$$

$$\implies 4 \leq a \leq \frac{25}{4}$$

$$\bullet 1 \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 4a}}{2} \leq 9 \implies -3 \leq \sqrt{25 - 4a} \leq 13$$

$$\implies 0 \leq 25 - 4a \leq 169$$

$$\implies -36 \leq a \leq \frac{25}{4}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer l'intersection des deux intervalles obtenus sachant de plus que $a < \frac{25}{4}$.

$$\text{Ainsi } a \in \left[4; \frac{25}{4}\right[$$

EXERCICE 161

$$1. \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}
 \end{aligned}$$

2. On suppose que $\tan a$ et $\tan b$ sont les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

On a alors $p = -\tan a - \tan b$ et $q = \tan a \tan b$.

D'après la question précédente : $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{-p}{1-q}$,

d'autre part $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

On en déduit alors $p = \sqrt{3}(q-1)$.

EXERCICE 162

1. Soient a et $-a$ deux solutions de l'équation (E)

$$x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0.$$

Nous avons donc $a^4 - 3a^3 - 12a^2 + 48a - 64 = 0$ et

$$a^4 + 3a^3 - 12a^2 - 48a - 64 = 0$$

ces deux équations implique que $a^3 - 16a = 0$.

cette équation a trois solutions distinctes $x_1 = -4$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 0$.

$x_3 = 0$ ne convient pas et $x_1 = -x_2$.

Nous en déduisons alors $a = 4$.

2. D'après la question précédente :

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

$$= (x-4)(x+4)(x^2 - 3x + 4).$$

3. $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$

$$\iff (x-4=0 \text{ ou } x+4=0 \text{ ou } x^2 - 3x + 4 = 0)$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ étant négatif, l'équation n'admet aucune solution réelle, l'équation (E) n'admet que deux solutions réelles : -4 et 4 .

EXERCICE 163

1. $0^4 + a \times 0^3 + b \times 0^2 + a \times 0 + 1 = 1$, 0 n'est donc pas solution de l'équation (1).

$$\begin{aligned}
 2. \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 &= x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b \right) \\
 &= x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 + a \left(x + \frac{1}{x} \right) + b \right) \\
 &= x^2 (u^2 + au + b - 2),
 \end{aligned}$$

en posant $u = x + \frac{1}{x}$.

3. D'après ce qui précède

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \iff u^2 + u - 6 = 0$$

2 et -3 sont solutions de l'équation $u^2 + u - 6 = 0$.

$$\bullet x + \frac{1}{x} = 2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0,$$

l'équation admet une solution double $x_0 = 1$.

$$\bullet x + \frac{1}{x} = -3 \iff x^2 + 3x + 1 = 0,$$

l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

L'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ admet donc trois

$$\text{solutions : } x_0 = 1, x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

EXERCICE 164

1. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(t - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(t - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(t - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow at^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)t + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

L'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut se ramener à une équation de la forme $t^3 + pt + q = 0$ avec

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \text{ et } q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

2. $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$$= 3uv(u+v) + (u^3 + v^3).$$

Soit encore $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$.

En posant $t = u+v$, nous obtenons

$t^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$ qui est équivalent à

$$t^3 + pt + q = 0 \text{ si } \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}.$$

Soit en posant $X = u^3$ et $Y = v^3$,

$$\begin{cases} X + Y = -q \\ XY = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

X et Y sont donc solutions de l'équation

$$(E) U^2 + qU - \frac{p^3}{27} = 0.$$

4. $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}.$

• Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet aucune solution réelle.

• Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution double $X = Y = -\frac{q}{2}.$

• Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

$$X = \frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right) \text{ et } Y = \frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right).$$

5. • Si $27q^2 + 4p^3 < 0$, u et v n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

• Si $27q^2 + 4p^3 = 0$, $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$

• Si $27q^2 + 4p^3 > 0$, $u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right)}$ et

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right)}.$$

6. D'après les questions précédentes :

$$x = u + v - \frac{b}{3a}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \right)} - \frac{b}{3a}.$$

avec $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ et $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$

7. a. $x^3 + 3x + 2 = 0$

$$p = 3, q = 2 \text{ et } \frac{27q^2 + 4p^3}{27} = 8$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-2 - \sqrt{8})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-2 + \sqrt{8})} = -\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}}.$$

b. $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 - 5(x+1) + 8 = 0.$

On pose $t = x+1$, l'équation s'écrit $t^3 - 5t + 8 = 0$

On a $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ soit encore $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$

En posant $t = u+v$ on a donc
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -8 \\ 3uv = 5 \end{cases}$$

Soit encore
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -8 \\ 27u^3v^3 = 125 \end{cases}.$$

On pose $X = u^3$ et $Y = v^3$, X et Y sont alors solutions de l'équation $27Z^2 + 216Z + 125 = 0$.

La résolution de cette équation donne

$$X = -4 + \frac{\sqrt{921}}{9} < 0 \text{ et } Y = -4 - \frac{\sqrt{921}}{9} < 0.$$

$$\text{On obtient } t = -\sqrt[3]{4 - \frac{\sqrt{921}}{9}} - \sqrt[3]{4 + \frac{\sqrt{921}}{9}}$$

$$\text{et } x = t - 1 = -\sqrt[3]{4 - \frac{\sqrt{921}}{9}} - \sqrt[3]{4 + \frac{\sqrt{921}}{9}} - 1.$$

EXERCICE 165

1. Si α est une racine non nulle de P , alors

$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^n} P(\alpha) = 0$ ce qui démontre que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de P .

2. a. $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$

$$= \frac{1}{x^4} (2 - 3x - 5x^2 - 3x^3 + 2x^4) = \frac{1}{x^4} P(x).$$

P est un polynôme réciproque de degré 4.

b. $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$

c. Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 &= x^2 \left(2x^2 - 3x - 5 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left(2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 9 \right). \end{aligned}$$

donc $P(x) = 0 \iff 2X^2 - 3X - 9 = 0$.

d. Le polynôme $Q(X) = 2X^2 - 3X - 9$ admet deux racines distinctes $X_1 = 3$ et $X_2 = -\frac{3}{2}$.

e. $\bullet x + \frac{1}{x} = 3 \iff x^2 - 3x + 1 = 0$ cette équation admet deux solutions $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x'_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

$\bullet x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \iff 2x^2 + 3x + 2, \Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

Le polynôme P admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x'_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a. } P\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^4} + \frac{27}{10x^3} - \frac{11}{x^2} - \frac{27}{10x} + 1 \\ &= \frac{1}{x^4} \left(1 + \frac{27}{10}x - 11x^2 + \frac{27}{10}x^3 + x^4\right) \\ &= \frac{1}{x^4} P(x). \end{aligned}$$

P est un polynôme réciproque de degré 4.

b. $P(2) = 0$, donc $x_1 = 2$ est une racine de P .

c. P étant un polynôme réciproque, $x_2 = \frac{1}{2}$ est une racine de P .

$$d. P(x) = (x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{26}{5}x + 1\right).$$

e. Le polynôme $Q(x) = x^2 + \frac{26}{5}x + 1$ admet deux racines distinctes $x_3 = -5$ et $x_4 = -\frac{1}{5}$.

f. Les racines de P sont donc $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -5$ et $x_4 = -\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} 4. \text{ a. } P\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{a}{x^5} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a \\ &= \frac{1}{x^5} (a + bx + cx^2 + cx^3 + bx^4 + cx^5) \\ &= \frac{1}{x^5} P(x). \end{aligned}$$

P est un polynôme réciproque.

b. $P(-1) = -a + b - c + c - b + a = 0$, -1 est donc une racine de P .

$$c. P(x) = (x+1)(ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a).$$

$$Q(x) = ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a$$

$Q(x)$ est un polynôme réciproque.

d. La recherche des racines d'un polynôme réciproque P de degré 5 se ramène à la recherche des racines d'un polynôme réciproque Q de degré 4 vérifiant $P(x) = (x+1)Q(x)$.

e. $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$, 1 est une racine évidente, 1 étant son propre inverse, elle est donc racine double de Q

$$\text{ainsi } Q(x) = (x-1)^2 (x^2 + 3x + 1).$$

Les solutions de l'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ sont $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

Les racines de P sont donc $-1, 1$ (racine double), $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

EXERCICE 166

$$\begin{aligned} \bullet X^4 + X^2 + 1 &= X^2 \left(X^2 + 1 + \frac{1}{X^2} \right) = X^2 \left(\left(X + \frac{1}{X} \right)^2 - 1 \right) \\ &= X^2 \left(X + \frac{1}{X} + 1 \right) \left(X + \frac{1}{X} - 1 \right) \\ &= (X^2 + X + 1) (X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet X^4 - X^2 + 1 &= X^2 \left(X^2 - 1 + \frac{1}{X^2} \right) = X^2 \left(\left(X + \frac{1}{X} \right)^2 - 3 \right) \\ &= X^2 \left(X + \frac{1}{X} + \sqrt{3} \right) \left(X + \frac{1}{X} - \sqrt{3} \right) \\ &= (X^2 + \sqrt{3}X + 1) (X^2 - \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1). \end{aligned}$$

EXERCICE 167

1. Supposons que α est racine des polynômes A et B , on a alors $C^2(\alpha) = A^2(\alpha) + B^2(\alpha) = 0$ donc $C(\alpha) = 0$, c'est-à-dire α racine de C .

Supposons que α est racine des polynômes A et C , on a alors $B^2(\alpha) = C^2(\alpha) - A^2(\alpha) = 0$ donc $B(\alpha) = 0$, c'est-à-dire α racine de B .

On démontre de manière analogue que si α est racine de B et C alors α est aussi racine de A .

2. Supposons que α est racine de $B(x) - C(x)$ et de $B(x) + C(x)$, on obtient alors le système
$$\begin{cases} B(\alpha) + C(\alpha) = 0 \\ B(\alpha) - C(\alpha) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B(\alpha) = 0 \\ C(\alpha) = 0 \end{cases}$$
 α est donc racine de $B(x)$ et de $C(x)$.

EXERCICE 168

1. Soit Q une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$.

a. $(x-1)Q(x) = x^n - 1$, on en déduit pour $x \neq 1$

$$Q(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

b. $Q(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$Q'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2}.$$

D'autre part, pour tout $x \neq 1$,

$$Q'(x) = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.$$

On en déduit alors pour tout $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2}.$$

2. a. $P(X = k) = (1-p)^k p$.

b. $P(X = 1) = p$ et $P(X = n+1) = (1-p)^n$.

$$\begin{aligned} \text{c. } P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = n+1) \\ &= p + (1-p)p + \dots + (1-p)^{n-1}p + (1-p)^n \\ &= p(1 + (1-p) + \dots + (1-p)^{n-1}) + (1-p)^n \\ &= p \frac{1 - (1-p)^n}{p} + (1-p)^n \\ &= 1 - (1-p)^n + (1-p)^n = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } E(X) &= p + 2(1-p)p + \dots + n(1-p)^{n-1}p \\ &\quad + (n+1)(1-p)^n \\ &= p(1 + 2(1-p) + \dots + n(1-p)^{n-1}) \\ &\quad + (n+1)(1-p)^n \\ &= p \left(\frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1}{(1-p-1)^2} \right) \\ &\quad + (n+1)(1-p)^n \\ &= \frac{1}{p} (1 - (1-p)^{n+1}). \end{aligned}$$

EXERCICE 169

1. $T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$,

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X,$$

$$T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1,$$

$$T_5(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

2. Conjecture : $T_n(X)$ est de degré n et son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} .

3. On suppose que les polynômes T_n et T_{n+1} sont de degrés respectifs n et $n+1$, on a donc

$$T_n(X) = a_n X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \text{ avec } a_n \neq 0 \text{ et}$$

$$T_{n+1}(X) = b_{n+1} X^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j X^j \text{ avec } b_{n+1} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } T_{n+2}(X) &= 2X \left(b_{n+1} X^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j X^j \right) \\ &\quad - \left(a_n X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2b_{n+1} X^{n+2} + \sum_{j=0}^n 2b_j X^{j+1} - a_n X^n \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i. \end{aligned}$$

Le polynôme T_{n+2} est donc de degré $n+2$.

4. On suppose que $T_n(X) = 2^{n-1} X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et

$$T_{n+1}(X) = 2^n X^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j X^j. \text{ On a alors}$$

$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2X \left(2^n X^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j X^j \right) \\ &\quad - \left(2^{n-1} X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2^{n+1} X^{n+2} + \sum_{j=0}^n 2b_j X^{j+1} - 2^{n-1} X^n \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i. \end{aligned}$$

Le coefficient dominant de T_{n+2} est 2^{n+1} .

5. Conjecture : le polynôme T_n est de même parité que n .

6. On suppose que T_n est une fonction paire et T_{n+1} est une fonction impaire, c'est-à-dire $T_n(-X) = T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = -T_{n+1}(X)$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } T_{n+2}(-X) &= -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &= 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \\ &= T_{n+2}(X), \end{aligned}$$

la fonction T_{n+2} est une fonction paire.

7. On suppose que T_n est une fonction impaire et T_{n+1} est une fonction paire, c'est-à-dire $T_n(-X) = -T_n(X)$ et $T_{n+1}(-X) = T_{n+1}(X)$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } T_{n+2}(-X) &= -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) \\ &= -2XT_{n+1}(X) + T_n(X) \\ &= -T_{n+2}(X), \end{aligned}$$

la fonction T_{n+2} est une fonction impaire.

EXERCICE 170

Partie A

1. $P(\alpha) = A$ et $P(\beta) = B$ définissent deux points du plan. On peut donc déterminer l'équation réduite de la droite (AB) qui correspond à une fonction polynôme $P(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} P(\alpha) = A \\ P(\beta) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha + b = A \\ a\beta + b = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{A-B}{\alpha-\beta} \\ b = \frac{B\alpha-A\beta}{\alpha-\beta} \end{cases}.$$

2. a. $Q_n(\alpha) = P_{n+1}(\alpha) - \alpha P_n(\alpha) = \alpha^{n+1} - \alpha^{n+1} = 0$

$Q_n(\beta) = \beta^{n+1} - \alpha\beta^n = (\beta - \alpha)\beta^n.$

b. D'après les questions précédentes :

$$a = \frac{0 - (\beta - \alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} = \beta^n \text{ et } b = \frac{(\beta - \alpha)\beta^n \alpha}{\alpha - \beta} = -\alpha\beta^n$$

On en déduit alors $Q_n(x) = \beta^n x - \alpha\beta^n = \beta^n(x - \alpha).$

c. Pour tout $n \geq 1$,

$$Q_n(x) = \beta^n(x - \alpha) = \beta \times \beta^{n-1}(x - \alpha) = \beta Q_{n-1}(x)$$

$$\begin{aligned} P_{n+1} - \alpha P_n + \beta P_{n-1} &= P_{n+1} - \alpha P_n - \beta P_n + \alpha\beta P_{n-1} \\ &= (P_{n+1} - \alpha P_n) - \beta(P_n - \alpha P_{n-1}) \\ &= Q_n - \beta Q_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Partie B

1. $u_n = P'_n(x) = a$ donc d'après la question 1

$$u_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}.$$

2. Pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha u_n &= \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha\beta^n - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\beta^n(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \beta^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \beta u_n &= \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} - \frac{\beta^{n+1} - \alpha^n \beta}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\alpha^n(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \alpha^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha u_n + \beta u_n - \beta u_n &= u_{n+1} - \alpha u_n - \beta(u_n - \alpha u_{n-1}) \\ &= \beta^n - \beta^n = 0. \end{aligned}$$

3. $u_{n+1} - \alpha u_n + \beta u_{n-1} = 0$

$$\Rightarrow u_{n+1} - \alpha u_n = \beta u_n - \beta u_{n-1}$$

$$\Rightarrow \beta^n = \beta u_n - \beta u_{n-1}$$

de même $u_{n+1} - \alpha u_n + \beta u_{n-1} = 0$

$$\Rightarrow u_{n+1} - \beta u_n = \alpha u_n - \alpha u_{n-1}$$

$$\Rightarrow \alpha^n = \alpha u_n - \alpha u_{n-1}$$

c'est-à-dire α et β sont racines de toute équation de la forme $x^n = u_n x - p u_{n-1}$.

$$\begin{aligned} 4. \quad u_{n+m} - u_n \alpha^m - u_m \beta^n &= \frac{\beta^{n+m} - \alpha^{n+m} - (\beta^n - \alpha^n) \alpha^m - (\beta^m - \alpha^m) \beta^n}{\beta - \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } u_{n+m} = u_n \alpha^m + u_m \beta^n.$$

5. $u_{n+m} = u_n \alpha^m + u_m \beta^n$

$$= u_n(u_m \alpha - p u_{m-1}) + u_m(u_n \beta - p u_{n-1})$$

$$\text{d'où } u_{n+m} = s \cdot u_n u_m - p \cdot (u_n u_{m-1} + u_m u_{n-1}).$$

Partie C

1. D'après (5) $u_{n+1} = s u_n - p u_{n-1}$, la suite (u_n) est définie par récurrence.

2. D'après (3), pour $n \geq 1$

$$x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0 \text{ on en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta.$$

3. D'après (4) et (4'),

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - \beta}{x_{n+1} - \alpha} \times \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} &= \frac{u_{n+2} - \beta u_{n+1}}{u_{n+2} - \alpha u_{n+1}} \times \frac{u_{n+1} - \alpha u_n}{u_{n+1} - \beta u_n} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \text{ Les rapports successifs}$$

$$\frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} \text{ forment une suite géométrique de raison } \frac{\alpha}{\beta}.$$

4. Soit l'équation $x^2 - 6x - 1 = 0$ dont les solutions sont $\alpha = 3 - \sqrt{10} < 0$ et $\beta = 3 + \sqrt{10} > 0$.

a. (u_n) correspondante pour $u_{n+1} = 6u_n + u_{n-1}$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Ainsi $u_2 = 6$, $u_3 = 37$, $u_4 = 228$ et $u_5 = 1405$.

b. Pour $1 \leq n \leq 4$,

$$x_1 = 6, x_2 = \frac{37}{6}, x_3 = \frac{228}{37} \text{ et } x_4 = \frac{1405}{228}.$$

c. $x_1 - \beta = 3 - \sqrt{10} < 0$ et

$$x_2 - \beta = \frac{19}{6} - \sqrt{10} \approx 0,0044 > 0$$

on en déduit donc que $x_1 < \beta < x_2$.

6.2 Suites numériques

EXERCICE 171

1. On remplace successivement n par 0, 1, 2, 3 et 4 dans l'expression de u_n :

$$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = -1, u_3 = 1 \text{ et } u_4 = 5.$$

2. On remplace successivement n par 1, 2, 3, 4 et 5 dans l'expression de u_n :

$$u_1 = -2, u_2 = -\frac{1}{2}, u_3 = 0, u_4 = \frac{1}{4} \text{ et } u_5 = \frac{2}{5}.$$

3. $u_3 = 0$, $u_4 = 6$, $u_5 = 3\sqrt{10}$, $u_6 = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$ et $u_7 = 3\sqrt{28} = 6\sqrt{7}$.

4. $u_0 = 5$, $u_1 = \frac{7}{2}$, $u_2 = -1$, $u_3 = -4$ et $u_4 = -7$.

5. $u_2 = 5$, $u_3 = \frac{7}{3}$, $u_4 = 3$, $u_5 = \frac{11}{4}$ et $u_6 = \frac{13}{5}$.

6. $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u_3 = 0$ et $u_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 172

- $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2} - 1, u_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $u_3 = 2 - \sqrt{3}$.
- $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2115}$
 $= \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2116} - \sqrt{2115}$
 $= \sqrt{2116} = 46$.

EXERCICE 173

- $u_0 = 1, u_1 = u_0 + 1 = 2, u_2 = u_1 + 1 = 3, u_3 = u_2 + 1 = 4$
et $u_4 = u_3 + 1 = 5$.
- $u_1 = 2, u_2 = 2 \times u_1 = 4, u_3 = 2 \times u_2 = 8, u_4 = 2 \times u_3 = 16$
et $u_5 = 2 \times u_4 = 32$.
- $u_0 = 0, u_1 = 2u_0 + 3 = 3, u_2 = 9, u_3 = 21$ et $u_4 = 45$.
- $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{5}$ et $u_4 = \frac{5}{8}$.
- $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{5}, u_3 = \sqrt{6}$ et $u_4 = \sqrt{7}$.
- $u_1 = 0, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{12}{17}, u_4 = \frac{867}{722}$ et $u_5 = \frac{1563852}{1794257}$.

EXERCICE 174

- 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
 $u_{n+1} = u_n + 3$.
- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
 $u_{n+1} = 2u_n$.
- 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0
 $u_{n+1} = u_n - 3$.
- 1, -3, 9, -27, 81, -243, 729, -2187, 6561, -19683
 $u_{n+1} = -3u_n$

EXERCICE 175

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89
 en effet $1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8,$
 $5 + 8 = 13, \dots$
- 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,
 1113213211, 31131211131221,
 13211311123113112211
 Il s'agit de la suite de Conway : 1 s'écrit avec un 1 soit 11, 11 s'écrit avec deux 1 soit 21, 21 s'écrit avec un 2 et un 1 soit 1211 $\dots$
- 1, 2, $2 \times 3 = 6, 6 \times 7 = 42, 42 \times 43 = 1806$
 alors $1806 \times 1807 = 3263442$
- $4, 6 = \frac{4 \times 3}{2}, 15 = \frac{6 \times 5}{2}, 105 = \frac{15 \times 14}{2}$
 alors $\frac{105 \times 104}{2} = 5460$

EXERCICE 176

- $\frac{9}{11} = 0,818181818181 \dots$, on en déduit :
 $u_1 = u_3 = u_5 = 8$ et $u_2 = u_4 = 1$.
- $7^0 = 1$ d'où $u_0 = 1, 7^1 = 7$ d'où $u_1 = 7, 7^2 = 49$ d'où
 $u_2 = 9$.
 En procédant de manière analogue, on obtient
 $u_3 = 3, u_4 = 1$ et $u_5 = 7$.

EXERCICE 177

n	0	1	2	3	4
$3n + 5$	5	8	11	14	17
reste division par 7	5	1	4	0	3

- Ainsi $u_0 = 5, u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 0$ et $u_4 = 3$.
- $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$
 $u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$ et $u_5 = u_4 + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$.

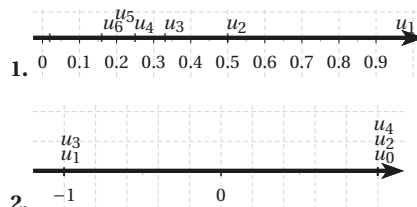
EXERCICE 178

- $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8$ et $u_4 = 16$
- Il semble que $u_n = 2^n$.
- $u_5 = 31 \neq 2^5$. La conjecture est donc fausse.

EXERCICE 179

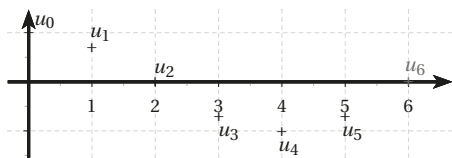
- $u_2 = u_1 + \frac{1-3+8}{6} = 2, u_3 = 2 + \frac{8-12+16}{6} = 4,$
 $u_4 = 4 + \frac{27-27+24}{6} = 8$ et $u_5 = 16$.
- Conjecture : $u_n = 2^{n-1}$.
- $u_6 = 31 \neq 2^5$. La conjecture est donc fausse.

EXERCICE 180

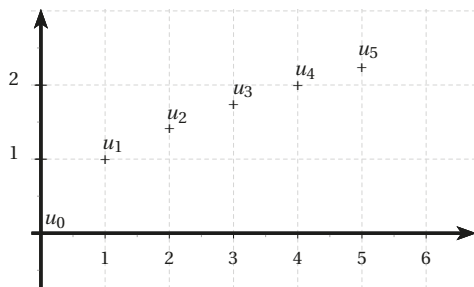


EXERCICE 181

- $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$



2. $u_n = \sqrt{n}$



EXERCICE 182

1. Soit la suite (t_n) , où t_n est le nombre de points d'un réseau triangulaire à n étages.

a. $t_4 = 10$, $t_5 = 15$ et $t_6 = 21$.

b. $t_{n+1} = t_n + n + 1$.

c. On suppose qu'il existe trois réels a , b et c tels que $t_n = an^2 + bn + c$, alors a , b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 4a+2b+c = 3 \\ 9a+3b+c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ 3a+b = 2 \\ 8a+2b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1-a-b \\ b = 2-3a \\ 2a = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 0$.

Ainsi $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

d. $t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

e. $t_{2019} = \frac{2019 \times 2020}{2} = 2039190$, un réseau triangulaire à 2019 étages contient donc 2039190 points.

2. Soit la suite (c_n) , où c_n est le nombre de points d'un réseau carré à n étages.

a. $c_4 = 16$, $c_5 = 25$ et $c_6 = 36$.

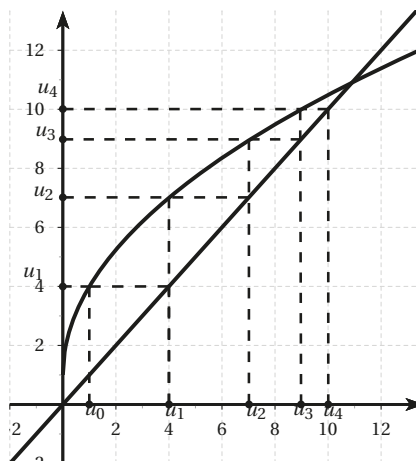
b. $c_{n+1} = c_n + 2n + 1$.

c. $c_n = n^2$.

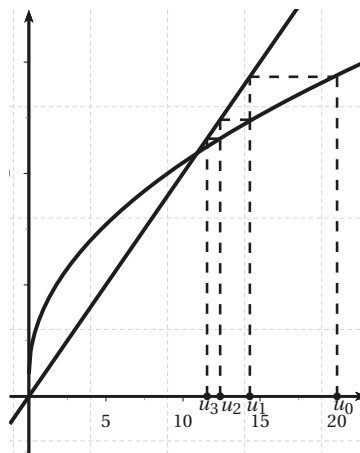
d. $c_{2019} = 2019^2 = 4076361$, un réseau carré à 2019 étages contient donc 4076361 points.

EXERCICE 183

1. et 2.



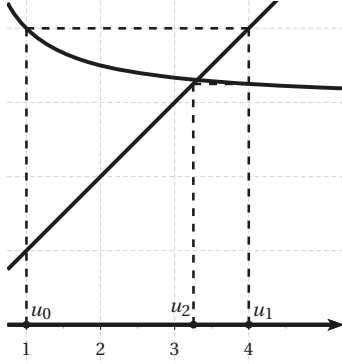
3. En supposant $u_0 = 20$



EXERCICE 184

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$.

1.

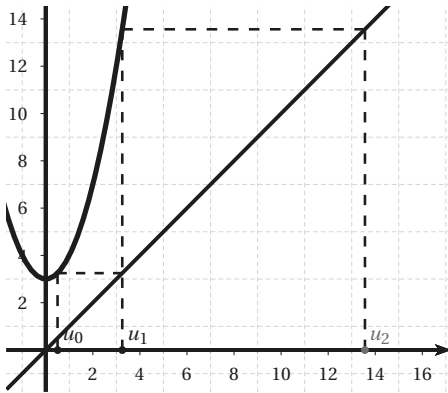


2. Conjectures : la suite (u_n) n'est pas monotone,
 $1 \leq u_n \leq 4$ et u_n tend vers 3,3 lorsque n tend vers l'infini (abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite).

EXERCICE 185

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 3 + u_n^2$.

1.



2. La suite (u_n) semble croissante, minorée par 0,5 et semble tendre vers l'infini.

EXERCICE 186

1. $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$, la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$, nous en déduisons que la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est décroissante.

2. $f(x) = 5 - \frac{2}{x}$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$, la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$, nous en déduisons que la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est croissante.

3. $f(x) = x^2 - 2x$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$
 $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ pour $x \geq 1$, la fonction f est croissante pour $x > 1$, nous en déduisons que la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est croissante à partir du rang $n = 1$.

4. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{2(1-x)}{x^3} \leq 0$ pour $x \geq 1$, la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$, nous en déduisons que la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

EXERCICE 187

1. $u_{n+1} - u_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$,
la suite (u_n) est donc croissante.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$,
la suite (u_n) est donc croissante.

3. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1 \geq 0$,
la suite (u_n) est donc croissante.

4. $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$,
la suite (u_n) est donc décroissante.

EXERCICE 188

1. Pour tout $n > 0$, $u_n = n \times (2)^n \neq 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \times 2^{n+1}}{n \times 2^n} = 2 \frac{n+1}{n} > 1,$$

la suite (u_n) est donc croissante.

2. Pour tout $n > 0$, $u_n = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} \neq 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n+1}}{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} < 1,$$

la suite (u_n) est donc décroissante.

3. Pour tout $n > 0$, $u_n = \frac{3^n \sqrt{n}}{5^n} \neq 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} \times 5^n \sqrt{n+1}}{3^n \times 5^{n+1} \sqrt{n}} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{n+1}{n}} < 1 \text{ lorsque}$$

$$n > 1 \text{ car } \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \frac{5}{3} \text{ lorsque } n > 1.$$

En effet $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x}{x+1}} < 0, \text{ la fonction } f \text{ est décrois-}$$

sante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f(1) = \sqrt{2} > \frac{5}{3}$, $f(2) = \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{5}{3}$.

4. $u_n = 2019 \times (0,99)^n \neq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,99 < 1, \text{ la suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}$$

EXERCICE 189

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$,

la suite (u_n) est donc croissante.

2. $u_n = 2020 \times 1,02^n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,02 > 1$,

la suite (u_n) est donc croissante.

3. $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 3$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, le discriminant étant négatif, $f'(x) > 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est donc croissante.

4. $f(x) = \frac{x+1}{2x}$, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$. La fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$, la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est donc décroissante.

EXERCICE 190

1. Pour tout $n > 0$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$, d'où $1 \leq u_n \leq 2$

2. $-1 \leq \sin n \leq 1$ d'où $1 \leq u_n \leq 3$

3. Pour tout $n > 0$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$, d'où $2 \leq u_n \leq 3$

4. $u_0 = -1$, $u_1 = -\frac{1}{4}$ et pour tout $n > 1$, $\frac{3n-5}{3n+5} > 0$

$$\text{d'autre part } 3n-5 < 3n+5 \text{ donc } \frac{3n-5}{3n+5} < 1$$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq 1.$$

EXERCICE 191

1. $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,

$$u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \text{ et } u_4 = u_3 + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1+n-n}{n+1} = \frac{1+n}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente

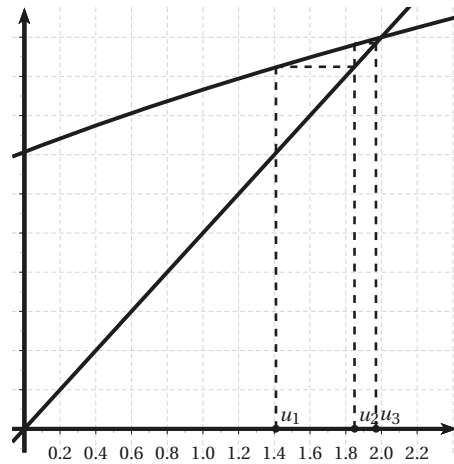
$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

4. Pour tout $n > 0$, $0 < n < n+1$ d'où $0 < u_n < 1$.

EXERCICE 192

1. Pour $n \geq 1$, $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

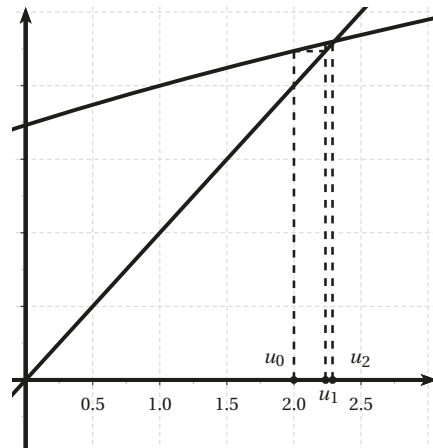
2. et 3.



4. La suite (u_n) semble croissante et tendre vers 2.

EXERCICE 193

1. et 2.



- La suite (u_n) semble croissante et tendre vers 2,3.
- Dire que la suite (u_n) converge vers ℓ c'est dire que lorsque n tend vers l'infini, u_n et u_{n+1} sont « très proches » de ℓ . On a alors $\ell = \sqrt{\ell+3}$. Soit par passage au carré et regroupement des termes : $\ell^2 - \ell - 3 = 0$.
- Les solutions de l'équation $\ell^2 - \ell - 3 = 0$ sont $\ell_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
 u_n étant positif, ℓ est aussi positif. On en déduit alors que $\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

EXERCICE 194

- $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8,$
 $u_6 = 13, u_7 = 21, u_8 = 34, u_9 = 55, u_{10} = 89$ et $u_{11} = 144$.
- $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = \frac{3}{2}, v_4 = \frac{5}{3}, v_5 = \frac{8}{5}, v_6 = \frac{13}{8},$
 $v_7 = \frac{21}{13}, v_8 = \frac{34}{21}, v_9 = \frac{55}{34}, v_{10} = \frac{89}{55}$ et $v_{11} = \frac{144}{89}$.
- La suite (v_n) semble tendre vers 1,7.
- ```
def fibo():
 u0 = 1
 u1 = 1
 v = 1
 n = 1
 phi = (1 + sqrt(5)) / 2
 while (abs(phi - v) >= 1e-10):
 a = u1
 u1 = u1 + u0
 u0 = a
 v = u1 / u0
 n = n + 1
 print(n)
```
- En utilisant le programme précédent, nous obtenons  $n = 25$

**EXERCICE 195**

- $C2 = B2 + 2 * A2^2 + 3 * A2 + 5$   
 $B3 = 2 * B2 + 2 * A2^2 - A2$
- On remarque que  $v_1 = 7 \times 2, v_2 = 7 \times 2^2, v_3 = 7 \times 2^3$   
on conjecture que  $v_n = 7 \times 2^n$   
On en déduit alors que  
 $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5 = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ .

**EXERCICE 196**

- $p_n = p_{n-1} + \frac{2}{100} p_{n-1} = 1,02 p_{n-1}$  avec  $p_0 = 8$ .
- $a_n = a_{n-1} + 0,4$  avec  $a_0 = 10$ .
- En utilisant un tableur, nous obtenons  $p_{100} = 57,957$  et  $a_{100} = 50$ .
- ```
def malthus():
    p = 8
    a = 10
    n = 1800
    while a >= p:
        p = 1,02 * p
        a = a + 0,4
        n = n + 1
    print(n)
```

Selon ce modèle, l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise en 1887.

EXERCICE 197

- $u_{n+1} = 1,05 u_n - 0,001 u_n v_n$
 $v_{n+1} = 0,97 v_n + 0,0002 u_n v_n$.
- En l'absence de proies, $u_n = 0$ et $v_{n+1} = 0,97 v_n$ il s'agit d'une suite décroissante. A long terme, la population des prédateurs va disparaître.
- En l'absence de prédateurs, $v_n = 0$ et $u_{n+1} = 1,05 u_n$ il s'agit d'une suite croissante. La population des proies va augmenter indéfiniment.
- Le nombre de proies et de prédateurs reste constant, on a donc $u_{n+1} - u_n = 0$ et $v_{n+1} - v_n = 0$
d'où $v_n = \frac{0,05}{0,001} = 50$ et $u_n = \frac{0,03}{0,0002} = 150$.
- ```
def population(n, u, v):
 for i in range(n):
 a = u
 b = v
 u = 1.05 * a - 0.001 * a * b
 v = 0.97 * b + 0.0002 * a * b
 print("u = ", u, "v = ", v)
```
- ```
from numpy import*
from matplotlib.pyplot import*
def points(n, u, v):
    for i in range(n):
        a = u
        b = v
```

```

u = 1.05 * a - 0.001 * a * b
v = 0.97 * b + 0.0002 * a * b
plot(i + 1, u)
plot(i + 1, v)
show()

```

EXERCICE 198

- $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$
 - $u_0 = 0,2$, $u_1 = 0,32$, $u_2 = 0,4352$
 $u_3 \approx 0,4916$, $u_4 \approx 0,4998$, $u_5 \approx 0,5$.
 - $u_0 = 0,5$, $u_1 = 0,5$, $\dots$, $u_5 = 0,5$.
 - $u_0 = 0,9$, $u_1 = 0,18$, $u_2 = 0,2952$, $u_3 \approx 0,4161$,
 $u_4 \approx 0,4859$, $u_5 \approx 0,4996$.
- `def verhulst(u, alpha) :`
`for i in range(100) :`
`u = (1 + alpha) * (1 - u) * u`
`print(u)`
- $u_{100} = 0,3333333333333333$
 - $u_{100} = 0,4999999999999999$
 - $u_{100} = 0,6428571428730687$
 - $u_{100} = 0,8269407065914386$
 - $u_{100} = 0,8126558897598105$
 - $u_{100} = 0,3333333333333333$
 - $u_{100} = 0,5$
 - $u_{100} = 0,6428571428426734$
 - $u_{100} = 0,5008842103072181$
 - $u_{100} = 0,540474880119789$
 - $u_{100} = 0,3333333333333333$
 - $u_{100} = 0,5$
 - $u_{100} = 0,6428571428352872$
 - $u_{100} = 0,8269407065914386$
 - $u_{100} = 0,8278051682351442$
- Si $\alpha = 0,5$, quelle que soit la valeur de u_0 , $u_{100} \approx \frac{1}{3}$.
Si $\alpha = 1$, quelle que soit la valeur de u_0 , $u_{100} \approx 0,5$.
Si $\alpha = 1,8$, quelle que soit la valeur de u_0 , $u_{100} \approx 0,64$.

EXERCICE 199

- $b_0 = 1000$, $b_1 = 1050$, $b_2 = 1040$, $b_3 = 992$,
 $b_4 = 922$, $b_5 = 840$, $b_6 = 754$, $b_7 = 668$,
 $b_8 = 587$, $b_9 = 512$, $b_{10} = 443$
 $c_0 = 1500$, $c_1 = 1450$, $c_2 = 1360$, $c_3 = 1248$,

$c_4 = 1126$, $c_5 = 1004$, $c_6 = 885$, $c_7 = 773$,
 $c_8 = 671$, $c_9 = 579$, $b_{10} = 497$

- Si l'évolution reste la même, en 2040, une des deux espèces aura disparu.
- Les suites (b_n) et (c_n) tendent vers 0.
 - Dans le modèle le nombre de campagnols tend vers 0 ce qui ne correspond pas aux mesures effectuées. Le modèle n'est pas cohérent.

EXERCICE 200

- Si $n = 1$, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \neq u_1$. L'affirmation est FAUSSE.
- Lorsque $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$. L'affirmation est FAUSSE.
- Pour $n = 2$, $u_2 = \frac{3}{8}$ et $0 \leq u_2 \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 2$ montrons qu'alors elle est vraie au rang $n + 1$.
 $0 \leq u_n \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$
 $\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) u_n \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \times 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.
or $n \geq 2$ donc $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{3}{4}$
et $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) u_n = u_{n+1}$
d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
La propriété est vraie au rang 2 et est héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 2$.
L'affirmation est VRAIE.
- D'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$,
 $0 \leq u_n \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$
sachant que $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ alors le terme $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
La suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 201

- `def terme(n) :`
`u = 100`
`for k in range(n) :`
`u = 0.75 * u`
`print(u)`
- Il suffit de mettre `print(u)` dans la boucle `for`.

EXERCICE 202

- $s_0 = 1000, s_1 = 1,02 \times 1000 = 1020,$
 $s_2 = 1,02 \times 1020 = 1040,4.$
- $s_{n+1} = 1,02s_n.$
- `def math() :`
 $u = 1000$
 $n = 0$
 while $u < 2000$:
 $u = 1.02 * u$
 $n = n + 1$
 print(n)
- Math pourra retirer de l'argent sur son livret dans 36 ans.

EXERCICE 203

- $T_3 = 1 + 1 \times 2 = 3, T_4 = 1 + 1 \times 2 \times 3 = 7$
 $T_5 = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times 7 = 43.$
- `def terme(n) :`
 $t = [1]$
 $i = 1$
 while $i < n$:
 $a = 1$
 for j in range(i) :
 $a = a * t[j]$
 t.append($a + 1$) #ajoute l'élément $a + 1$
 à la fin de la liste t
 $i = i + 1$
 print(t)

EXERCICE 204

- $t_{2019} = 1 - t_{1009} = t_{504} = t_{252} = t_{126} = t_{63}$
 $t_{63} = 1 - t_{31} = t_{15} = 1 - t_7 = t_3 = 1 - t_1 = 0$
 $t_{2020} = t_{1010} = t_{505} = 1 - t_{252} = 1.$
- `def PTM(n) :`
 $t = [0]$
 for i in range(1, n) :
 if $i \% 2 == 1$: #si i est impair
 t.append($1 - t[i // 2]$)
 else :
 t.append($t[i // 2]$)
 print($t[n]$)

EXERCICE 205

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - 2n - 3 = 2,$
la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.
- $u_2 - u_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}, u_3 - u_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}.$
 $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2,$ la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2,$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $-2.$
- $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 3 - n^2 - n - 3 = 2n + 2$
dépend de $n,$ la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2016,$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2016.$
- $u_n - u_{n-1} = n - 1$ dépend de $n,$ la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.

EXERCICE 206

- $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $u_2 = 2, u_1 - u_0 = -1$ et $u_2 - u_1 = 1$
 $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0,$ la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2,$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.
- Soit (u_n) la suite des nombres pairs, on a $u_n = 2n,$ donc quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2,$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.
- Soit (u_n) la suite des nombres premiers. Les trois premiers termes de la suite sont $u_1 = 2, u_2 = 3$ et $u_3 = 5.$
 $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2,$ la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
- $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$ dépend de $n,$ la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2,$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

EXERCICE 207

- $u_0 = 2, u_1 = 3,5, u_2 = 5, u_3 = 6,5, u_4 = 8$
- $u_0 = 0, u_1 = 0,3, u_2 = 0,6, u_3 = 0,9, u_4 = 1,2$
- $u_0 = 3, u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = -3, u_4 = -5$
- $u_0 = -1234, u_1 = -1229, u_2 = -1224,$
 $u_3 = -1219, u_4 = -1214$

EXERCICE 208

- $u_n = u_0 + nr = 3 + 2n.$
- $u_n = u_2 + (n-2)r = 5 - 3(n-2) = 11 - 3n.$
- $u_n = u_1 + (n-1)r = \sqrt{2}(n-1).$
- $u_n = u_0 + nr = n.$

EXERCICE 209

- $u_8 = u_0 + 8r = -38$ et $u_{23} = u_0 + 23r = -113$.
- $u_{2019} = u_2 + 2017r = 6046$.
- $u_{2020} = u_0 + 2020r = 1 + 2020\sqrt{2}$.

EXERCICE 210

- $u_{28} = u_{10} + 18r \Rightarrow 18r = 1,5 - 6$ soit $r = -0,25$
 $u_{10} = u_0 + 10r \Rightarrow u_0 = u_{10} - 10r$ soit $u_0 = 8,5$.
- $u_{12} = u_6 + 6r \Rightarrow 6r = u_{12} - u_6$ soit $r = 10$
 $u_6 = u_0 + 6r \Rightarrow u_0 = u_6 - 6r$ soit $u_0 = -51$
- $u_{18} = u_9 + 9r \Rightarrow 9r = u_{18} - u_9$ soit $r = 222$
 $u_0 = u_9 - 9r = -1979$.
- $u_{2019} = u_3 + 2016r \Rightarrow 2016r = u_{2019} - u_3$ soit $r = -1$
 $u_0 = u_3 - 3r = 2022$.

EXERCICE 211

- $r = 3$ et $u_0 = 2$
- $r = 1$ et $u_0 = 1$
- $r = -1$ et $u_0 = 2024$
- $r = -0,6$ et $u_0 = 14$

EXERCICE 212

- La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 1$,
on a donc $u_n = u_0 + nr = 1 - 3n$.
- $u_n = u_0 + nr = 9 + 2n$
- $u_n = u_1 + (n-1)r = -7 + \frac{5}{3}(n-1)$
- $u_n = u_2 + (n-2)r = \sqrt{3} + \sqrt{3}(n-2) = \sqrt{3}(n-1)$

EXERCICE 213

- $u_n = u_0 + nr = 3 - \frac{n}{3}$
- $u_n = u_0 + nr = -n\sqrt{15}$
- $u_n = u_9 + (n-9)r = 9 + \frac{5}{9}(n-9) = \frac{5}{9}n + 4$
- $u_n = u_5 + (n-5)r = -3\sqrt{5} + (n-5)\sqrt{5} = (n-8)\sqrt{5}$

EXERCICE 214

Si la suite (u_n) est arithmétique, de premier terme u_0 , alors $u_{n+1} = u_n + r$ soit encore $u_n = u_{n+1} - r$.
 D'autre part pour $n > 0$, $u_n = u_{n-1} + r$
 En ajoutant les deux égalités, nous obtenons
 $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ soit $u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

EXERCICE 215

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , donc de forme explicite $u_n = u_0 + nr$.
 $a_n = 2u_n - 15 = 2nr + 2u_0 - 15$, (a_n) est une suite arithmétique de raison $2r$ et de premier terme $a_0 = 2u_0 - 15$
 $b_n = u_{3n} = u_0 + 3nr$, (b_n) est une suite arithmétique de raison $3r$ et de premier terme $b_0 = u_0$
 $c_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_{n+1} + u_n)(u_{n+1} - u_n)$
 $= (2u_0 + (2n+1)r)r = (2u_0r + r^2) + 2nr^2$,
 (c_n) est une suite arithmétique de raison $2r^2$ et de premier terme $c_0 = (2u_0r + r^2)$

EXERCICE 216

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , donc $u_{n+1} - u_n = r$.
 • Si $r > 0$ alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
 • Si $r < 0$ alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
 • Si $r = 0$ alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$, la suite (u_n) est constante.

EXERCICE 217

La suite (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ alors

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} u_n & - & u_{n-1} & = & r \\ u_{n-1} & - & u_{n-2} & = & r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_2 & - & u_1 & = & r \\ u_1 & - & u_0 & = & r \end{array} \right. \quad \text{En ajoutant les } n \text{ lignes,}$$

nous obtenons $u_n - u_0 = nr$

soit $u_n = u_0 + nr$.

EXERCICE 218

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r d'après l'exercice précédent :
 $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$,
 par différence, nous obtenons $u_n = u_p + (n-p)r$.

EXERCICE 219

- $R_1 = 125 + 3,75 = 128,75$, $R_2 = 128,75 + 3,75 = 132,5$
 et $R_3 = 132,5 + 3,75 = 136,25$.

2. $R_{n+1} = R_n + 3,75$. La suite (R_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3,75$ et de premier terme $R_0 = 125$.
3. $R_n = R_0 + nr = 125 + 3,75n$.
4. L'année 2030 correspond à $n = 6$, $R_6 = 147,5$.
5. $R_n > 163 \Rightarrow 3,75n > 38 \Rightarrow n > \frac{38}{3,75}$ soit en 2055.

EXERCICE 220

1. $u_2 = 5 + 0,5 = 5,5$ et $u_3 = 5,5 + 0,5 = 6$.
2. $u_{n+1} = u_n + 0,5$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $r = 0,5$.
4. $u_n = u_1 + (n-1)r = 4,5 + 0,5n$.
5. La dernière semaine du mois d'août correspond à $n = 35$, $u_{35} = 22$. Math devra courir 22 km lors de ses trois entraînements.

EXERCICE 221

$$385 = 1 \times 5 \times 7 \times 11 = (-7) \times (-1) \times 5 \times 11$$

Ainsi les quatre termes sont : $-7, -1, 5, 11$.

EXERCICE 222

1. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$.
(v_n) n'est pas arithmétique. L'affirmation est FAUSSE.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = 0$
La suite (w_n) est constante. L'affirmation est VRAIE.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n - v_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n = \frac{5}{3}u_n$.
L'affirmation est VRAIE.
4. D'après les questions précédentes
 $u_n = \frac{3}{5}\left(1 - 1 + \frac{2}{3}n\right) = \frac{2}{5}n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 223

1. $u_5 = 5$ et $u_6 = 9$. L'affirmation est FAUSSE.
2. $u_6 \neq u_5 + 5 - 1$. L'affirmation est FAUSSE.
3. Dans une suite arithmétique la raison ne dépend pas de n . L'affirmation est FAUSSE.
4. Chaque sommet est relié à $n-1$ sommets, deux liaisons sont des arêtes du polygone (sommets adjacents)

cent) de chaque sommet partent donc $(n-3)$ diagonales.

Les diagonales sont comptées deux fois (pour chaque sommet), il y a donc $u_n = \frac{n(n-3)}{2}$. L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 224

1. $t_{n+1} = t_n - 30$, la suite (t_n) est une suite arithmétique de raison -30 et de premier terme $t_0 = 500$.
2. $t_n = t_0 + nr = 500 - 30n$.
3. $S = 500 + 470 + 440 + 410 + 380 + 350 + 320 + 290 + 260 + 230 + 200 = 3850$. Tom disposera de 3850 €.

EXERCICE 225

1. $u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.
2. $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{u_{n+1} - 1}{1}} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1 + 3}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{3} + v_n$

la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

3. D'après la question précédente,
 $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n = \frac{3+4n}{12}$
 $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{15+4n}{3+4n}$.
4. $v_n = \frac{\frac{15}{n} + 4}{\frac{3}{n} + 4}$, on en déduit que (u_n) tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 226

1. $C_1 = 4000 + 0,05 \times 4000 = 4200$
 $C_2 = 4200 + 200 = 4400$.
2. $C_{n+1} = C_n + 200$. La suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme C_0 .
3. $C_n = 4000 + 200n$.
4. $C_{15} = 4000 + 15 \times 200 = 7000$. S'il laisse son argent placé pendant 15 ans, Math disposera de 7000 €.

EXERCICE 227

1. $C_1 = 10000 + 0,03 \times 10000 = 10300$
 $C_2 = 10300 + 300 = 10600$.
2. $C_{n+1} = C_n + 300$. La suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 300$ et de premier terme C_0 .
3. $C_n = 10000 + 300n$.

4. $C_{10} = 13000$, s'il laisse son argent placé pendant 10 ans, Math disposera de 13000 €.

EXERCICE 228

- $C_1 = 5000 + 0,06 \times 5000 = 5300$
 $C_2 = 5300 + 300 = 5600$.
- $C_{n+1} = C_n + 300$. La suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 300$ et de premier terme C_0 .
- $C_n = 5000 + 300n$.
- $C_5 = 6500$, s'il laisse son argent placé pendant 5 ans, Math disposera de 6500 €.

EXERCICE 229

- $u_{n+1} - 3 = \frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n} = \frac{3(u_n - 3)}{6 - u_n}$
 $v_{n+1} - v_n = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = -\frac{1}{3}$
la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{6}$.
- $v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\frac{1+2n}{6}$
 $u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{6n-3}{1+2n}$
- $\frac{1}{v_n} = -\frac{6}{1+2n}$ tend vers 0,
 $u_n = \frac{1}{v_n} + 3$ admet donc pour limite 3 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 230

- $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ d'où $w_{10} = 21$.
- Conjecture : (w_n) est une suite arithmétique de raison 2.
Vérification : soit $v_n = 2n + 1$, $v_0 = 1$ et
 $nv_n - (n+1)v_{n-1} = n(2n+1) - (n+1)(2n-1)$
 $= 2n^2 + n - 2n^2 - n + 1 = 1$
d'où $v_n = w_n$.
 $w_{2009} = 1 + 2009 \times 2 = 4019$.

EXERCICE 231

- $p(1) = 8 + 2 = 10$ et $p(2) = 10 + 2 = 12$.
- $p(n+1) = p(n) + 2$, la suite p est arithmétique de raison $r = 2$.
On en déduit alors : $p(n) = p(0) + nr = 2n + 8$.

3. a. $S_1 = p(0) + p(1) = 18$.

Au bout de deux mois, la tirelire contiendra : 18 €.

$$\begin{aligned} \text{b. } S_n &= p(0) + p(1) + \dots + p(n) \\ &= (n+1) \times 8 + 2(1+2+\dots+n) \\ &= 8(n+1) + 2 \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(n+8). \end{aligned}$$

4. $S_8 = 9 \times 16 = 144$ et $S_9 = 10 \times 17 = 170$.

Pierre devra bien attendre 9 mois après son dépôt initial.

EXERCICE 232

- $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$ et $u_3 = \frac{1}{4}$.
 $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
- a. $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$ et $v_3 = 4$
b. $v_{n+1} - v_n = \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = 1$, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
c. $v_n = \frac{1}{n} + n$.
- $u_n = \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 233

	A	B
1	année	banque B
2	2007	5 000
3	2008	5 250,00
4	2009	5 500,00

-
- $B_{n+1} = B_n + 250$. La suite (B_n) est arithmétique de raison 250.
- $B_3 = B_2 + 250$ ou $B_3 = B_2 + 0,05 * B_2$
- $t = \frac{9500 - 5000}{5000} = 0,9$ soit 90% d'augmentation sur 18 ans.
- $B'_{18} = 10000 + 500 \times 18 = 19000$. A la majorité de leur fils, le capital sera de 19000 €.

EXERCICE 234

- $d_{n+1} = d_n + 9,8$, la suite (d_n) est arithmétique de raison et de premier terme $d_1 = 4,9$.
D'où $d_n = 4,9 + 9,8(n-1)$.
- $d_{10} = 93,1$ soit 93,1 m parcourus pendant la dixième seconde.
- Programme :
 $def \text{ totalChute}(n) :$
 $d = 4,9$

somme = 4,9

for i in range(1, n) :

d = d + 9,8

somme = somme + d

print(somme)

Le corps aura parcouru 490 mètres en 10 secondes.

EXERCICE 235

1. Soit d_n le diamètre du disque n , d'après l'énoncé :
 $d_8 = d_1 + 7r \iff 12,4 = 4 + 7r$ d'où $r = 1,2$.
2. $d_1 = 4$, $d_2 = 5,2$, $d_3 = 6,4$, $d_4 = 7,6$, $d_5 = 8,8$,
 $d_6 = 10$, $d_7 = 11,2$ et $d_8 = 12,4$.

EXERCICE 236

1. $C_{n+1} = C_n + \frac{t}{100} \times 20000$. La suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{t}{100} \times 20000$.
2. $C_n = 20000 + n \times \frac{t}{100} \times 20000$.
3. $t = (C_{12} - 20000) \times \frac{100}{12 \times 20000} = 2,1$.

EXERCICE 237

1. $C_{n+1} = C_n + \frac{t}{100} \times 15000$. La suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{t}{100} \times 15000$.
2. $C_n = 15000 + n \times \frac{t}{100} \times 15000$.
3. $t = (C_5 - 15000) \times \frac{100}{5 \times 15000} = 4$.

EXERCICE 238

1. $a_n = 2500 + 35n$.
2. Soit N le nombre de boîtes produites du 15 au 30 avril,
 $N = 16 \times 2500 + 35 \times (15 + 16 + \dots + 30) = 52600$.
3. $52600 \times 2,1 = 110460$. Le montant de la facture est de 110460 € TTC.

EXERCICE 239

1. $f_n = 2000 + 75n$.
2. Soit N le nombre de sacs stockés du 5 au 23 décembre,
 $N = 19 \times 2000 + 75 \times (5 + 6 + \dots + 23) = 57950$.
3. $57950 \times 0,5 = 28975$. Le montant de la facture est de 28975 € TTC.

EXERCICE 240

1. $a_n = 2500 + nb$.
2. Soit N la production du 10 au 20 avril.
 $N = 11 \times 2500 + (10 + 11 + 12 + \dots + 20) \times b = 27500 + 165b$
3. $b = \frac{39050 - 27500}{165} = 70$.

EXERCICE 241

1. $(an+1)^2 = a^2n^2 + 2an + 1 = a(an^2 + 2n) + 1$.
2. Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = an + 1$ où a est un entier quelconque fixé.
 Si $N = an^2 + 2n$ alors
 $u_N = a(an^2 + 2n) + 1 = (an+1)^2$, ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) contient donc une infinité de carrés.
3. $v_n = 3n + 4 = 3(n+1) + 1$ donc $v_{n-1} = 3n + 1$ on se ramène à la question précédente. La suite (v_n) contient donc aussi une infinité de carrés.
4. Si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $w_p = k^2$ alors les termes de la suite sont de la forme $k^2 + an$.
 On remarque que si $n = a + 2k$ alors $k^2 + a(a + 2k) = (k + a)^2$.
 Ainsi, la suite (w_n) contient une infinité de carrés.

EXERCICE 242

1. Soit N le nombre total de tours, $N = \frac{65-20}{0,1} = 450$.
2. Soit r_n le rayon du $n^{\text{ème}}$ tour et c_n sa circonférence. le rayon augmente de l'épaisseur du tour précédent soit $r_{n+1} = r_n + 0,1$.
 $c_{n+1} = 2\pi r_{n+1} = 2\pi r_n + 0,2\pi = c_n + 0,2\pi$.
 La suite (c_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,2\pi$ et de premier terme $c_1 = 40\pi$.
3. Soit L la longueur total du film,

$$L = \sum_{n=1}^{450} c_n = \sum_{n=1}^{450} (40\pi + 0,2\pi(n-1))$$

$$= 40\pi \times 450 + 0,2\pi \sum_{n=1}^{450} (n-1)$$

$$= 40\pi \times 450 + 0,2\pi \times \frac{449 \times 450}{2} = 38205\pi.$$
 Soit 120 mètres.
4. a. $V = 65^2\pi\ell - 20^2\pi\ell = 3825\pi\ell$.
 b. En considérant le film comme un parallélépipède rectangulaire, nous obtenons : $0,1 \times L \times \ell = 3825\pi\ell$ soit

$L = \frac{3825\pi}{0,1} = 38250\pi$. L'écart entre les deux résultats s'explique par l'approximation faite dans la première partie, en effet, les tours ne sont pas tout-à-fait des cercles.

EXERCICE 243

1. On a $A_n(a_n; a_n^2)$ et $B_n(b_n; b_n^2)$.

La droite $(A_n B_n)$ a un coefficient directeur égal à $-\frac{1}{3}$

donc $\frac{b_n^2 - a_n^2}{b_n - a_n} = -\frac{1}{3}$ soit après simplification

$$b_n + a_n = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Ainsi } b_n = -\frac{1}{3} - a_n.$$

2. En procédant de manière analogue, nous obtenons

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} - b_n.$$

3. D'après les questions précédentes, $a_{n+1} = \frac{5}{6} + a_n$ et

$b_{n+1} = -\frac{5}{6} + b_n$, les suites (a_n) et (b_n) sont deux suites arithmétiques de raisons respectives $\frac{5}{6}$ et $-\frac{5}{6}$.

EXERCICE 244

1. a. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = -2$, alors

$u_{n+1} = \frac{6}{-3} = -2$. La suite (u_n) est constante, on a alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ or $u_0 = 1$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.

$$\begin{aligned} \text{b. } v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_n + 4 + 2u_n + 1}{u_n + 2} = 2 + v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

$$\begin{aligned} \text{c. } v_n &= 1 + 2n \\ v_n &= \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \iff u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n - 2}, \text{ on en déduit alors} \\ u_n &= \frac{4n + 1}{1 - 2n}. \end{aligned}$$

2. $u_n = \frac{4n + 1}{1 - 2n} = -2 + \frac{3}{1 - 2n}$, la suite (u_n) tend vers -2 lorsque n tend vers l'infini.

3. u_n est un entier relatif si et seulement si $\frac{3}{1 - 2n}$ est un entier relatif, c'est-à-dire si $1 - 2n$ est un diviseur de 3.

Les diviseurs de 3 sont $-3; 3; -1; 1$. La résolution des quatre équations donne quatre valeurs de n : 2, -1 , 1 et 0.

$-1 \notin \mathbb{N}$, il n'y a donc que trois valeurs de n tel que u_n soit un entier relatif : 0; 1 et 2.

EXERCICE 245

- $u_0 = 3, u_1 = 3 \times 2 = 6, u_2 = 6 \times 2 = 12$
 $u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96.$
- $u_0 = -1, u_1 = -1 \times \sqrt{3} = -\sqrt{3}, u_2 = -\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$
 $u_3 = -3\sqrt{3}, u_4 = -9, u_5 = -9\sqrt{3}.$
- $u_0 = 6, u_1 = 6 \times (-0,8) = -4,8,$
 $u_2 = -4,8 \times (-0,8) = 3,84$
 $u_3 = -3,072, u_4 = 2.4576, u_5 = -1.96608.$
- $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0.$

EXERCICE 246

- $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = 0,5,$
 $u_n = u_0 q^n = 2 \times 0,5^n.$
- $u_1 = -1, u_2 = -\sqrt{5}, u_3 = -5,$
 $u_n = u_1 q^{n-1} = -(\sqrt{5})^{n-1}.$
- $u_2 = 4096, u_3 = 2048, u_4 = 1024$
 $u_n = u_2 q^{n-2} = 4096 \times 0,5^{n-2}.$
- $u_{2019} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0.$

EXERCICE 247

- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{3}, \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{4}.$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
- $\frac{u_1}{u_0} = \sqrt{2}, \frac{u_2}{u_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
- $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}, \frac{u_4}{u_3} = \frac{7}{15}.$
 $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
- $u_0 = 0, u_1 = 3 \neq 0$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

EXERCICE 248

- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 7.$
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 7.$
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$
 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de n , la suite n'est donc pas géométrique.
- $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}.$

4. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + n + 3}$.
 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépend de n , la suite n'est donc pas géométrique.
5. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2016$.
 La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2016$.
6. $u_n = 2u_{n-1} + 2$, la suite n'est pas de la forme $u_n = qu_{n-1}$, la suite n'est donc pas géométrique.

EXERCICE 249

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 16$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
2. $u_n = (-1)^n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -1$.
3. $u_{n+1} = 0,8u_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.
4. $u_n = 2\left(\frac{5}{2}\right)^n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{2}$.
5. $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 32$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.
6. $u_0 = 4$, $u_1 = 0,25$, $u_2 = 4$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

EXERCICE 250

1. $u_3 = u_0 q^3 = -16$, $u_7 = u_0 q^7 = -1$ et $u_{10} = \frac{1}{8}$.
2. $v_3 = v_1 q^2 = \frac{1}{16}$, $v_7 = v_1 q^6 = \frac{81}{16}$ et $v_{10} = \frac{2187}{16}$.

EXERCICE 251

1. $u_2 = u_0 q^2 = -18$, $u_5 = u_0 q^5 = -486$
 $u_{12} = -1062882$.
2. $v_5 = v_2 q^3 = -5\sqrt{5}$, $v_7 = v_2 q^5 = -25\sqrt{5}$
 $v_{10} = -625$.

EXERCICE 252

1. $\frac{u_{12}}{u_{10}} = q^2 = 0,25$ et $q > 0$ donc $q = \sqrt{0,25} = 0,5$
 $u_{10} = u_0 q^{10} = 6$ d'où $u_0 = \frac{6}{0,5^{10}} = 6144$.
2. $\frac{u_{13}}{u_9} = q^4 = 9$ et $q > 0$ donc $q = 9^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$
 $u_9 = u_0 q^9 = 81$ d'où $u_0 = \frac{81}{(\sqrt{3})^9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

EXERCICE 253

1. $u_n = 3 \times 2^n$.
2. $u_n = 5 \times (-3)^{n-2}$.
3. $u_n = (\sqrt{2})^{n-1}$.
4. $u_n = 3 \times \frac{1}{3^n} = 3^{1-n}$.

EXERCICE 254

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
 ainsi $\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_1}{u_0} = q \times q \times \dots \times q \times q$
 (n facteurs)
 d'où après simplifications termes à termes : $\frac{u_n}{u_0} = q^n$
 Soit $u_n = u_0 q^n$.
2. Pour tous entiers n et p , $u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$
 on a donc $\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$ d'où $u_n = u_p q^{n-p}$.

EXERCICE 255

1. $u_{n+1} = 2u_n$, le premier terme est $u_0 = 2300$, le dernier terme est u_{16} correspondant au nombre de transistors contenus dans un microprocesseur en 2003.
 La suite (u_n) est une suite géométrique finie de raison $q = 2$.
2. $u_n = 2300 \times 2^n$.
3. $u_{16} = 150732800$, selon ce modèle, en 2003, un microprocesseur contient 150732800 transistors.

EXERCICE 256

1. $C_1 = C_0 + \frac{3,5}{100}C_0 = 1,035C_0 = 1035$
 $C_2 = C_1 + \frac{3,5}{100}C_1 = 1,035C_1 \approx 1071,23$ à 10^{-2} près
 $C_3 = C_2 + \frac{3,5}{100}C_2 = 1,035C_2 \approx 1108,72$ à 10^{-2} près.
2. $C_{n+1} = C_n + \frac{3,5}{100}C_n = 1,035C_n$.
3. La suite (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,035$.
4. $C_n = 1000 \times 1,035^n$.
5. $C_{10} = 1000 \times 1,035^{10} \approx 1410,60$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 257

1. $u_1 = u_0 + \frac{1,25}{100}u_0 = 1,0125u_0 = 2025$

$$u_2 = u_1 + \frac{1,25}{100} u_1 = 1,0125 u_1 \approx 2050,31 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2. $u_{n+1} = u_n + \frac{1,25}{100} u_n = 1,0125 u_n$,
(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,0125$.
3. $u_{18} \approx 2501,15$ à 10^{-2} près. Le jour de ses 18 ans, Math disposera de 2501,15 €.

EXERCICE 258

1. $C_1 = C_0 + \frac{5}{100} C_0 = 1,05 C_0 = 7875$
 $C_2 = C_1 + \frac{5}{100} C_1 = 1,05 C_1 = 8268,75$
 $C_3 = C_2 + \frac{5}{100} C_2 = 1,05 C_2 \approx 8682,19$ à 10^{-2} près.
2. $C_{n+1} = C_n + \frac{5}{100} C_n = 1,05 C_n$.
3. La suite (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,05$.
4. $C_n = 7500 \times 1,05^n$.
5. $C_{10} = 7500 \times 1,05^{10} \approx 12216,71$ à 10^{-2} près. Math disposera de 12216,71 € au bout de 10 ans.
6. La suite est strictement croissante, $C_{14} \approx 14849,49$ et $C_{15} \approx 15591,96$. Le capital initial aura doublé au bout de 15 ans.

EXERCICE 259

1. $u_1 = u_0 - \frac{20}{100} u_0 = 0,8 u_0 = 680$.
 $u_2 = 0,8 u_1 = 544$ et $u_3 = 0,8 u_2 = 435,2$.
2. $u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100} u_n = 0,8 u_n$
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = 850$, on en déduit donc que $u_n = 850 \times 0,8^n$.
3. $B_3 = 0,8 * B_2$. En B_7 la formule devient $= 0,8 * B_6$.
4. La suite (u_n) est décroissante, $u_{30} \approx 1,05 > 1$ et $u_{31} \approx 0,84 < 1$. Le gisement sera épuisé en 2036.
5. Soit P la production totale de pétrole extrait entre 2006 et 2017 inclus, ce qui correspond à la différence entre les réserves disponibles fin 2005 et fin 2017.
 $N = u_0 - u_{12} = 850 \times (1 - 0,8^{12}) \approx 791,5884$
soit 791,588 millions de barils, arrondi au millième.

EXERCICE 260

1. $c_{n+1} = 2 c_n$, la suite (c_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$2. c_n = c_1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

3. Le 29 décembre 2017 correspond à la semaine 18.
 $u_{18} = 131\,072$, soit 5461 tablettes et 8 carrés.

EXERCICE 261

1. $u_1 = 163$ et $u_2 = 133,4$.
2. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite n'est pas arithmétique
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite n'est pas géométrique.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 15 = 0,8 u_n - 12$
 $= 0,8(u_n - 15) = 0,8 v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 185$.
b. $v_n = 185 \times 0,8^n$.
c. $u_n = v_n + 15 = 185 \times 0,8^n + 15$.

EXERCICE 262

1. $u_2 = -7$ et $u_3 = -21$.
2. $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$, la suite n'est pas arithmétique
 $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$, la suite n'est pas géométrique.
3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 7 = 2 u_n - 14$
 $= 2(u_n - 7) = 2 v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_1 = -7$.
b. $v_n = -7 \times 2^{n-1}$.
c. $u_n = v_n + 7 = 7 - 7 \times 2^{n-1}$.

EXERCICE 263

1. $u_1 = 4,8$ et $u_2 = 7,32$.
2. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite n'est pas arithmétique
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite n'est pas géométrique.
3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} + a = 0,9 u_n + 3 + a$
 $= 0,9 \left(u_n + \frac{a+3}{0,9} \right)$
 $v_{n+1} = 0,9 v_n \iff \frac{a+3}{0,9} = a \iff a = -30$.
Si $a = -30$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = -28$.
b. $v_n = -28 \times 0,9^n$.
c. $u_n = v_n + 30 = 30 - 28 \times 0,9^n$.

EXERCICE 264

- $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6)$
 $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -5$.
- $v_n = v_0 q^n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, on en déduit alors
 $u_n = v_n + 6 = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
- La suite (v_n) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
 On en déduit alors que (u_n) converge vers 6.

EXERCICE 265

Soit u_n la valeur de la voiture de Math le $n^{\text{ème}}$ semestre. La suite vérifie $u_0 = 50\,000$ et $u_{n+1} = 0,85u_n$.

Soit v_n la valeur de la voiture de Mathilde le $n^{\text{ème}}$ semestre. La suite vérifie $v_0 = 25\,000$ et $v_{n+1} = 0,9v_n$.

Nous avons ainsi : $u_n = 50\,000 \times 0,85^n$ et
 $v_n = 25\,000 \times 0,9^n$.

En utilisant un tableur par exemple, nous obtenons :

$$u_{12} \approx 7\,112,09 \text{ et } v_{12} \approx 7\,060,74$$

$$u_{13} \approx 6\,045,27 \text{ et } v_{13} \approx 6\,354,66.$$

La voiture de Mathilde aura plus de valeur que celle de Math à partir du 13^e semestre.

EXERCICE 266

Soit C_n le capital de Math l'année n . La suite (C_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme C_0 . D'après l'énoncé, $10\,000 = C_0 \times 1,03^{10}$.

$$\text{Soit } C_0 = \frac{10\,000}{1,03^{10}} \approx 7\,440,94 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Math doit placer aujourd'hui 7441 €.

EXERCICE 267

Soit C_n le capital de Math l'année n . La suite (C_n) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ et de premier terme C_0 .

$$\text{D'après l'énoncé, } 20\,551,30 = 15\,000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^5$$

$$\text{On en déduit alors } \left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 \approx 1,37009$$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1,37009^{\frac{1}{5}} \approx 1,065$$

Math a placé son capital au taux de 6,5%.

EXERCICE 268

- $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = u_n$. L'affirmation est

VRAIE

- $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ la suite est donc convergente.
 L'affirmation est VRAIE.
- $\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}u_n = 3$, car $u_n = u_0 = 6$.
 L'affirmation est VRAIE.
- D'après les questions précédentes : $a_n + b_n = 6$ et
 $a_n - b_n = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d'où
 $a_n = 3 - \frac{1}{(-2)^n}$ et $b_n = 3 + \frac{1}{(-2)^n}$.
 L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 269

- $h_1 = 0,85 \times 2 = 1,7$, $h_2 = 1,445$
 $h_3 = 1,22825$.
- $h_n = 2 \times 0,85^n$.
- $h_8 \approx 0,545$
- En utilisant un tableur nous obtenons
 $u_{36} \approx 0,0058 > 0,005$ et $u_{37} \approx 0,0049 < 0,005$.
 La hauteur du rebond sera inférieure à 5 mm au 37^e rebond.

EXERCICE 270**Partie A**

- La fonction f , fonction polynôme, est dérivable sur $[0 ; 39]$.
 $f'(x) = -1,6x + 19,2$.
- $f'(x) > 0 \iff x < 12$

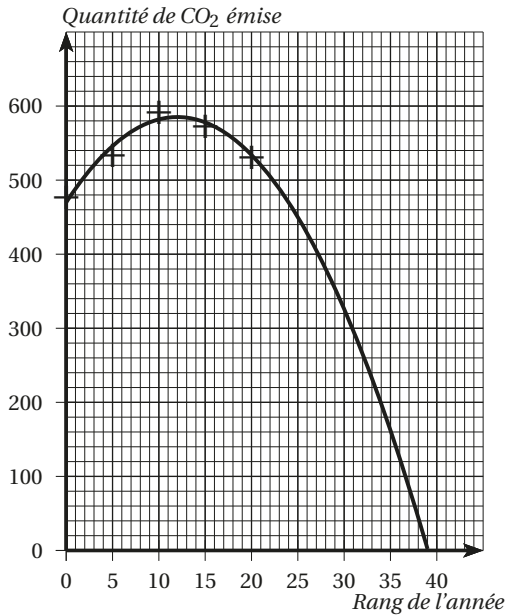
x	0	12	39
$f'(x)$	+	0	-
f	470	585,2	2

- a.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	39
$f(x)$	470	546	582	578	534	450	326	162	2

- b. Le graphique est à la fin de la partie A.

4. Seuil d'émissions en millions de tonnes équivalent CO_2 à atteindre en 2030 : $468 \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 280,8$.
L'année 2030 correspond au rang 35 et d'après le tableau précédent $f(35) = 162$.
D'après ce premier modèle, l'engagement de la France sera tenu en 2030.

**Partie B**

1. a. $u_1 = 0,97u_0 = 516,04$.
b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 532$.
c. $u_n = 532 \times 0,97^n$.
2. 2030 correspond au rang de l'année 15,
 $u_{15} = 532 \times (0,97)^{15} \approx 336,89$.
D'après ce second modèle, l'engagement de la France ne sera pas tenu en 2030.

EXERCICE 271

1. On a en C3 : $500\,000 \times 0,05 = 25\,000$ € ; ce sont les intérêts.
On a en D3 : $64\,752,29 - 25\,000 = 39\,752,29$.
On a en C4 : $460\,247,71 \times 0,05 \approx 23\,012,39$.
On a en D4 : $64\,752,29 - 23\,012,39 = 41\,739,90$.
On aura en C6 :
 $374\,680,91 \times 0,05 = 18\,734,05$: intérêts.

On aura en D6 :

$$64\,752,29 - 18\,734,05 = 46\,018,24 : \text{amortissement.}$$

On aura en E6 :

$$374\,680,91 - 46\,018,24 = 328\,662,67 : \text{capital restant dû.}$$

2. a. En C3 : $=E2*0,05$.

Après recopie on aura en C4 : $=E3*0,05$.

b. En E3 : $=E2 - D3$.

3. $i_2 = 23\,012,39$; $i_3 = 20\,925,39$; $i_4 = 18\,734,05$.

$$a_1 = 39\,752,29; a_2 = 41\,739,90; a_3 = 43\,826,90;$$

$$a_4 = 46\,018,24.$$

$$c_1 = 460\,247,71; c_2 = 418\,507,81; c_3 = 374\,680,91;$$

$$c_4 = 328\,662,67.$$

4. On a $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = 1,05$, ce qui montre que l'on passe pour les premiers termes de la suite (a_n) d'un terme au suivant en multipliant par 1,05 : cette suite est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $a_1 = 39\,752,29$.

5. La somme des amortissements doit être égale au montant emprunté soit : $a_1 + a_2 + \dots = a_{10} = 500\,000$.

6. La somme des intérêts et des amortissements est égale à la somme des annuités, donc la somme des intérêts est la différence des annuités et des amortissements soit :

$$64\,752,29 \times 10 - 500\,000 = 147\,522,90 \text{ €}.$$

EXERCICE 272

1. a. Cet algorithme calcule et affiche le nombre de clients pour les années 2011 à 2018.

b. Soit NC le nombre de clients

k	0	1	2	3	4	5
NC	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. a. $V_{n+1} = U_{n+1} - 600 = 0,9U_n - 540$

$$= 0,9(V_n - 600) = 0,9V_n$$

la suite (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 0,9$.

b. Pour tout n , $V_n = V_0 q^n = 400 \times 0,9^n$.

c. $U_n = V_n + 600 = 400 \times 0,9^n + 600$.

d. $U_{n+1} - U_n = 400 \times 0,9^{n+1} - 400 \times 0,9^n$

$$= 400 \times 0,9^n (0,9 - 1) = -400 \times 0,9^n \times 0,1 < 0$$

La suite (U_n) est donc décroissante.

U_n donnant une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année 2010 + n , on en déduit que ce

nombre de clients diminue au fil des années.

3. L'évolution depuis 2014 peut être modélisée par une suite (W_n) , définie par :

$$W_0 = 860\,000 \text{ et } W_{n+1} = 0,92W_n + 100\,000.$$

$$W_5 \approx 99\,258 < 1\,000\,000 \text{ et } W_6 \approx 1\,013\,521 > 1\,000\,000$$

Il faut donc 6 ans pour que l'opérateur retrouve plus d'un million d'abonnés.

EXERCICE 273

1. a.

Test $C < 400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

b. La valeur affichée en sortie d'algorithme est 5. Le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400 l'année de rang 5, soit en 2019.

2. a. D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année $n+1$ est $C_{n+1} = 0,92C_n + 50$

$$\begin{aligned} \text{b. } V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92C_n \\ &= 0,92 \times (625 - C_n) = 0,92 \times V_n \end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 625 - C_0 = 325$.

$$\text{Donc, pour tout } n, V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n.$$

$$\text{et } C_n = 625 - V_n = 625 - 325 \times 0,92^n.$$

d. Le mois de juillet 2024 correspond à $n = 10$;

l'apiculteur peut espérer posséder C_{10} colonies soit : $C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$ colonies.

3. a. Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre au moins 600 colonies; il suffit donc de remplacer dans l'algorithme « Tant que $C < 400$ faire » par « Tant que $C < 600$ faire ».

b. On cherche n tel que $C_n \geq 600$: En programmant l'algorithme, nous obtenons $n = 31$

Au bout de 31 années, le nombre de colonies aura doublé.

EXERCICE 274

1. $u_1 = 0,8u_0 + 18 = 0,8 \times 65 + 18 = 52 + 18 = 70$

$$u_2 = 0,8u_1 + 18 = 0,8 \times 70 + 18 = 56 + 18 = 74.$$

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8u_n + 18 - 90$
 $= 0,8(v_n + 90) - 72 = 0,8v_n + 72 - 72 = 0,8v_n$

$$v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.

$$\text{et } u_n = v_n + 90 = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. *def* suite() :

$$u = 65$$

$$n = 0$$

while $u < 85$:

$$u = 0,8 \times u + 18$$

$$n = n + 1$$

print(n)

Le programme permet d'obtenir : $n = 8$.

4. a. En juillet 2017, il y avait 65 particuliers qui avaient souscrit l'abonnement, ce qui correspond à $u_0 = 65$. Chaque mois, 20 % des abonnements sont résiliés, il en reste donc 80 % et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

On passe d'un mois n au mois suivant $n+1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 18 donc la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout n , par

$u_{n+1} = 0,8u_n + 18$ modélise le nombre d'abonnés au panier bio.

b. Chaque abonnement coûte 52 € par mois, la recette mensuelle le mois n est donc en euro de $52u_n$.

On cherche donc n tel que $52u_n$ dépasse 4 420 €.

ce qui revient à résoudre l'inéquation :

$$52u_n > 4420 \iff u_n > 85 \iff n \geq 8 \text{ (d'après la question 3.)}$$

La recette mensuelle dépassera 4 420 € à partir de $n = 8$, soit à partir de mars 2018.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8; or $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

Pour tout n , $u_n = v_n + 90$ donc la suite (u_n) a pour limite 90.

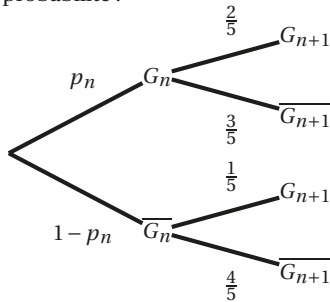
La recette étant de $52u_n$ pour le mois n , la recette mensuelle tend vers $52 \times 90 = 4680$ €.

EXERCICE 275

1. $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$
 $p_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$.
2. $p_n = P(A_n) = P(A_{n-1} \cap A_n) + P(B_{n-1} \cap A_n)$
 $= p_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5}$
 $= \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} p_n - \frac{2}{65}$
 $= \frac{2}{15} \left(p_n - \frac{3}{13} \right) = \frac{2}{15} u_n$
 La suite (u_n) est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = \frac{7}{26}$ et de raison $q = \frac{2}{15}$.
4. $u_n = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15} \right)^{n-1}$
 $p_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15} \right)^{n-1}$.
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{15} \right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{13}$, ceci correspond à la probabilité qu'Alice atteigne la cible après un grand nombre de partie.

EXERCICE 276

1. Arbre de probabilité :



2. D'après la loi des probabilités totales :
 $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$
 $= \frac{2}{5} p_n + \frac{1}{5} (1 - p_n) = \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5}$.
3. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} p_n - \frac{1}{20}$
 $= \frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{5} u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- b. On sait que pour tout
- $n \geq 1$
- :

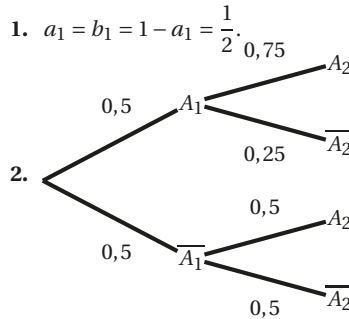
$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}.$$

Comme $u_n = p_n - \frac{1}{4} \iff p_n = u_n + \frac{1}{4}$, on a finalement : $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

- c. Comme
- $0 < \frac{1}{5} < 1$
- ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 0$
- et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 0$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}$.
 Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

EXERCICE 277



Avec la formule des probabilités totales :

$$a_2 = p(A_2) = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap \overline{A_1})$$

$$\text{donc } a_2 = a_1 \times \frac{3}{4} + b_1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ et } b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$$

3. On réutilise un arbre et la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$$

$$= \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} (1 - a_n) = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2}$$

4. a.
- $u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} u_n$
- .

(u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = -\frac{1}{6}$.

- b. On en déduit
- $u_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$

$$\text{puis } a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}.$$

- c.
- $\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$
- est le terme général d'une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre
- -1
- et
- 1
- , elle converge donc vers
- 0
- . On en déduit que
- (a_n)
- converge vers
- $\frac{2}{3}$
- .

d. Un programme (voir exercice 274) permet d'obtenir $n = 6$.

EXERCICE 278

$$1. w_{n+1} - w_n = \frac{(\sqrt{2}-1)(v_n - u_n)}{2(1+\sqrt{2})} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) w_n.$$

L'affirmation est VRAIE

$$2. w_n = (\sqrt{2}-1) \times \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^n > 0 \text{ d'où } u_n \leq v_n.$$

L'affirmation est VRAIE

$$3. v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{1 + \sqrt{2}} < 0 \text{ d'après la question précédente.}$$

L'affirmation est VRAIE

4. On peut le vérifier en utilisant le programme suivant avec de grandes valeurs de n :

def suite(n):

$u = 1$

$v = \text{sqr}(t(2))$

 for i in range(1, n):

$a = u$

$u = (u + v)/2$

$v = (u + v * \text{sqr}(t(2)))/(1 + \text{sqr}(t(2)))$

 print("u = ", u, "v = ", v)

L'affirmation est VRAIE

EXERCICE 279

$$1. u_{n+1} = \frac{5(b_n - a_n)}{12} = \frac{5}{12} u_n$$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison

$$q = \frac{5}{12}.$$

$$2. u_n = 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

$$3. v_{n+1} = 3a_n + 4b_n = v_n.$$

La suite (v_n) est constante de premier terme $v_0 = 48$.

$$4. a_n = \frac{1}{7}(v_n - 4u_n) = \frac{1}{7}\left(48 - 48 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)$$

$$b_n = \frac{1}{7}(3u_n + v_n) = \frac{1}{7}\left(48 + 36 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right).$$

EXERCICE 280

$$1. u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

• $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite n'est pas arithmétique,

• $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite n'est pas géométrique.

$$2. a. v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1.$$

$$b. v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.

$$c. \text{ On a donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

$$3. a. w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$b. \text{ On a } w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}.$$

c. Par définition $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc l'égalité ci-dessus s'écrit : $w_{n+1} = 2 + w_n$.

La suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = -1$ et de raison 2.

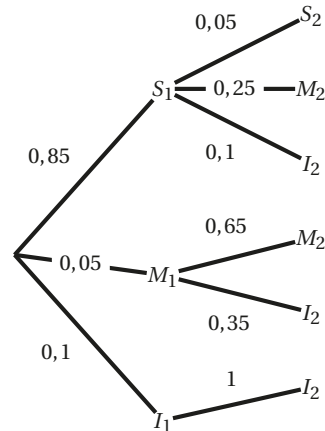
d. On a donc $w_n = w_0 + n \times 2 = -1 + 2n$.

$$4. w_n = 2n - 1 = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = 2^n \times u_n.$$

Donc $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$, car $2^n \neq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 281**Partie A**

1.



$$2. P(I_2) = P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap I_1)$$

$$= 0,1 \times 0,85 + 0,35 \times 0,05 + 1 \times 0,1 = 0,2025$$

$$3. P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{P_{M_1}(I_2) \times P(M_1)}{0,2025}$$

$$= \frac{0,0175}{0,2025} = \frac{7}{81} \approx 0,086$$

PARTIE B

- S_n , M_n et I_n forment une partition de l'univers puisque qu'un individu est soit de type S soit malade soit immunisé donc $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$
on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n + w_n = 1$.
- a.** $C3 = 0,65 * C2 + 0,05 * B2$
car $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$
b. D'après le tableur, le « pic épidémique » est atteint lors de la 4^e semaine.
- a.** $u_{n+1} = P(S_{n+1})$ or la seule façon d'être de type S à la semaine $(n+1)$ est de l'avoir été à la semaine n donc $P(S_{n+1}) = P_{S_n}(S_{n+1}) \times P(S_n)$
or $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,85$ d'après l'énoncé et $P(S_n) = u_n$
Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85u_n$.
b. On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 1$.
on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,85^n$.
- $0 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ et de même,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,65^n = 0$
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée.

EXERCICE 282

- a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6}\left(u_n - \frac{2}{5}\right)$
 $= \frac{1}{6}v_n$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{10}$.
b. $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ et
 $u_n = \frac{2}{5} + v_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.
- a.** Il y a deux dés, au premier lancer on a alors $a_1 = \frac{1}{2}$.
b. $r_1 = P(R_1) = P(A_1 \cap R_1) + P(\overline{A_1} \cap R_1) = \frac{7}{12}$.
c. $r_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n})$
 $= \frac{3}{6} \times a_n + \frac{4}{6} \times (1 - a_n) = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.
d. Pour lancer le dé A au $(n+1)$ -ième lancer, il faut avoir lancé le dé A au n -ième lancer et avoir obtenu une face rouge ou avoir lancé le dé B et avoir ob-

tenu une face blanche. Ce qui s'écrit, pour tout $n \geq 1$,
 $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.

e. D'après la question précédente :

pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = P(A_{n+1})$

$$a_{n+1} = P(A_n \cap R_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{6} \times a_n + \frac{2}{6} \times (1 - a_n) = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$$

$$\text{D'après la question 1.b, } a_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\text{f. } r_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{5} - \frac{1}{60} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$0 < \frac{1}{6} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{3}{5} = 0,6.$$

EXERCICE 283

Partie A

- Les intérêts la première année sont de :
 $6000 \times \frac{2,25}{100} = 135 \text{ €}$.
Au 1^{er} janvier 2015, Monica dispose de :
 $6000 + 135 + 900 = 7035 \text{ €}$.
- La somme M_n au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n est augmentée des intérêts de l'année, elle devient $1,0225M_n$.
Au 1^{er} janvier de l'année 2014 + $(n+1)$, on ajoute 900€ donc le montant disponible est
 $M_{n+1} = 1,0225M_n + 900$.

Partie B

- Première méthode :
a. $G_{n+1} = M_{n+1} + 40000 = 1,0225M_n + 900 + 40000$;
or $G_n = M_n + 40000$ donc $M_n = G_n - 40000$.
 $G_{n+1} = 1,0225(G_n - 40000) + 900 + 40000$
 $= 1,0225G_n - 1,0225 \times 40000 + 40900$
 $= 1,0225G_n - 40900 + 40900 = 1,0225G_n$
 $G_0 = M_0 + 40000 = 6000 + 40000 = 46000$
Donc la suite (G_n) est une suite géométrique de premier terme $G_0 = 46000$ et de raison $q = 1,0225$.
b. D'après la question précédente,
 $G_n = 46000 \times 1,0225^n$.
Donc $M_n = 46000 \times 1,0225^n - 40000$.
c. En utilisant le tableur, on obtient $M_{11} \approx 18756$ et $M_{12} \approx 20078$.
Le plafond de 19 125 € est atteint la douzième année.

2. Deuxième méthode :

a. On modifie la ligne 1 de l'algorithme fourni dans le texte ainsi « MONTANT $\leftarrow$ 5000 »

pour changer la valeur de départ.

On modifie la ligne 5 ainsi

« MONTANT $\leftarrow$ 1,0225 $\times$ MONTANT + 1000 »

pour changer la somme que l'on ajoute chaque année.

b. Il suffit d'ajouter à l'intérieur de la boucle TANT QUE, en ligne 7 :

« Afficher MONTANT »

EXERCICE 284

1. $u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 9000 = 18540$

La somme u_n au 1^{er} janvier de l'année 2010 + n est augmentée des intérêts de l'année, elle devient 1,06 u_n .

Au 1^{er} janvier de l'année 2010 + ($n + 1$), on ajoute 9000 € le montant disponible est donc

$$u_{n+1} = 1,06u_n + 9000.$$

2. a. $v_0 = 159000$ et $v_1 = 168540$.

b. $v_{n+1} = 1,06u_n + 159000 = 1,06(u_n + 150000) = 1,06v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,06$.

c. $v_n = 159000 \times 1,06^n$,

$$u_n = v_n - 150000 = 159000 \times 1,06^n - 150000.$$

3. En utilisant le tableur, on obtient $u_{13} \approx 189135$ et $u_{14} \approx 209483$.

Pierre disposera de plus de 200000 € en 2024.

EXERCICE 285

1. $u_2 = \frac{9}{4}$ et $u_3 = \frac{21}{8}$.

• $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$, la suite n'est pas arithmétique,

• $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$, la suite n'est pas géométrique.

2. a. $u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{2} = \frac{1}{2}v_n$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et

de premier terme $v_1 = \frac{3}{2}$.

b. $v_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \times 2^{-n}$.

c. $u_n = 3 - v_n = 3 - 3 \times 2^{-n}$.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^{-n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

EXERCICE 286

Soit u_0 le premier terme de la suite et q la raison.

D'après l'énoncé : $u_0 + u_0q + u_0q^2 = 2$

et $u_0q^4 + u_0q^5 + u_0q^6 = 1250$.

$u_0q^4 + u_0q^5 + u_0q^6 = q^4(u_0 + u_0q + u_0q^2) = 1250$ on en déduit donc que $q^4 = 625$ donc $q = 5$ ou $q = -5$.

Si $q = 5$ alors $1 + q + q^2 = 31$ d'où $u_0 = \frac{2}{31}$

ainsi $u_n = \frac{2}{31} \times 5^n$

Si $q = -5$ alors $1 + q + q^2 = 21$ d'où $u_0 = \frac{2}{21}$

ainsi $u_n = \frac{2}{21} \times (-5)^n$.

EXERCICE 287

a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, il existe donc un réel q tel que $b = aq$

et $c = aq^2$

$3a$, $2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il existe donc un réel r tel que $2b = 3a + r$ et $c = 3a + 2r$.

$$2b = 3a + r \text{ et } c = 3a + 2r \text{ impliquent } 4b - c = 3a$$

D'où, en utilisant les premières relations : $4aq - aq^2 = 3a$ or $a \neq 0$ donc $q^2 - 4q + 3 = 0$, cette équation admet deux solutions $q_1 = 1$ et $q_2 = 3$.

q_1 est impossible, car a , b et c sont distincts, la suite n'est donc pas constante.

On en déduit donc que $q = 3$.

EXERCICE 288

• a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique,

Il existe un réel q tel que $b = aq$ et $c = aq^2$

$$\text{alors } abc = 8 \implies aq^3 = 8 \implies q = \frac{2}{a}.$$

D'où $b = 2$ et $c = \frac{4}{a}$.

• c , a et b sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique,

$$\text{donc } a - c = b - a$$

$$\text{soit } a - \frac{4}{a} = 2 - a \text{ ce qui s'écrit encore } a^2 - a - 2 = 0$$

Cette équation admet deux solutions -1 et 2 .

Si $a = -1$ alors $b = 2$ et $c = -4$

Si $a = 2$ alors $b = c = 2$ (suite constante).

EXERCICE 289

1. La raison ne peut pas dépendre de n .

L'affirmation est FAUSSE.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, la suite (u_n) est croissante.

L'affirmation est FAUSSE.

3. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$
 $= \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$ pour
 tout $n \geq 1$, la suite (v_n) est décroissante à partir du
 rang 1.

L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 290

1. En utilisant la calculatrice, la suite (u_n) tend vers une

limite finie 1. L'affirmation est VRAIE.

2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2u_n + 4}{-u_n + 1} \times \frac{u_n - 1}{u_n - 2} = 2$ et $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = -1$.
 L'affirmation est VRAIE.

3. $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = 1 + \frac{1}{1 - v_n} = 1 + \frac{1}{1 + 2^n}$. L'affirmation
 est VRAIE.

EXERCICE 291

1. $u_1 = S + 0,04S = 1,04S$, $u_2 = 1,04^2S$, $u_3 = 1,04^3S$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison
 $q = 1,04$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1,04^n S$.

2. On cherche le plus petit n tel que $1,04^n > 2$.

En utilisant le tableur, on obtient $1,04^{17} \approx 1,95$ et
 $1,04^{18} \approx 2,03$

Mathilde doit poursuivre son placement pendant
 18 ans.

EXERCICE 292

1. $B3 = ((A2 + 1)/(2 * A2 + 4)) * B2$.

2. a. Conjecture : la suite (v_n) est une suite géométrique
 de raison $q = 0,5$.

$$\text{b. } v_{n+1} = (n+2) \times \left(\frac{n+1}{2n+4} \right) u_n = \frac{1}{2}(n+1)u_n = 0,5v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison
 $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = 1$.

3. $u_n = \frac{0,5^n}{n+1} = \frac{1}{(n+1) \times 2^n}$, la suite (u_n) tend vers 0
 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 293

1. $c_0 = 3$, $l_0 = 1$, $p_0 = c_0 \times l_0 = 3$, $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$$c_1 = 12$$
, $l_1 = \frac{1}{3}$, $p_1 = c_1 \times l_1 = 4$,

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c_2 = 48$$
, $l_2 = \frac{1}{9}$, $p_2 = c_2 \times l_2 = \frac{16}{3}$,

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + 12 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{10\sqrt{3}}{27}.$$

☞ L'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à
 $c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. $c_{n+1} = 4c_n$. La suite (c_n) est une suite géométrique
 de raison 4 d'où $c_n = 3 \times 4^n$.

3. $l_{n+1} = \frac{1}{3}l_n$. La suite (l_n) est une suite géométrique
 de raison $\frac{1}{3}$ d'où $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. $p_n = c_n \times l_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$. La suite (p_n) est une suite géo-
 métrique de raison $\frac{4}{3}$. La suite (p_n) tend vers l'infini.

5. $a_{n+1} = a_n + c_n \times l_{n+1}^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = a_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

$$\text{On en déduit } a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

EXERCICE 294

1. a. Dépôt initial donc $V_1 = 120$ litres

$$V_2 = \frac{1}{4} \times 120 + 120 = 150 \text{ litres,}$$

$$V_3 = \frac{1}{4} \times 150 + 120 = 157,5 \text{ litres.}$$

$$\text{b. } V_4 \approx 0,25 \times 157,5 = 159,375,$$

$$V_5 = 0,25 \times 159,375 = 159,84375$$

$$V_6 = 159,96$$

2. $V_{n+1} = 0,25V_n + 120$.

3. a. $t_{n+1} = 40 - 0,25V_n = 0,25(160 - V_n) = 0,25t_n$

La suite (t_n) est une suite géométrique de premier
 terme $t_1 = 40$ et de raison $\frac{1}{4}$.

$$\text{b. } t_n = 40 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$V_n = 160 - t_n = 160 - 40 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

- c. (t_n) tend vers 0 et (V_n) tend alors vers 160.

EXERCICE 295

Partie A

- $p_1 = 0,8p_0 + 0,3s_0 = 0,8$, $s_1 = 0,2$,
 $p_2 = 0,8p_1 + 0,3s_1 = 0,7$ et $s_2 = 0,3$.
- $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3s_n$
 $s_{n+1} = 0,2p_n + 0,7s_n$.
- $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3(1 - p_n) = 0,5p_n + 0,3$.
- def suite(n) :
 $p = 1$
 for i in range(0, n) :
 $p = 0,5 * p + 0,3$
 print("p = ", p, "s = ", 1 - p)

Partie B

- $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,6 = 0,5p_n - 0,3 = 0,5(p_n - 0,6)$
 $= 0,5u_n$
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier $u_0 = 0,4$.
- $u_n = 0,4 \times 0,5^n$
 $p_n = 0,6 + u_n = 0,6 + 0,4 \times 0,5^n$.
- (u_n) tend vers 0 et (p_n) tend alors vers 0,6.
A long terme, il y a 60% de chances qu'une personne pratique le ski de piste.

EXERCICE 296

- $w_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (p-1)(u_{n+1} - u_n) = (p-1)w_n$.
La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $p-1$ et de premier terme $w_0 = a$
 $w_n = a(p-1)^n$.
- $t_{n+1} - t_n = u_{n+2} - (p-1)u_{n+1} - u_{n+1} + (p-1)u_n$
 $= pu_{n+1} - (p-1)u_n - (p-1)u_{n+1} - u_{n+1} + (p-1)u_n = 0$.
 (t_n) est une suite constante, $t_n = t_0 = a$.
- $w_n - t_n = (p-2)u_n$ d'où
 $u_n = \frac{1}{p-2}(w_n - t_n) = \frac{a}{p-2}((p-1)^n - 1)$.

EXERCICE 297

Partie A

- $B_4 = 1,25 * B_3 - 0,25 * B_2$.

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6

4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,985
7	5	6,997

- La suite (u_n) semble converger vers 7.

Partie B

- $v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0$
 (v_n) est une suite constante, $v_n = v_0 = \frac{21}{4}$.
 - $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
- $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 7) = \frac{1}{4}w_n$
 (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
 - $u_n = w_n + 7 = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
 - (w_n) tend vers 0 et (u_n) tend alors vers 7.

EXERCICE 298

- Population théorique totale au 1^{er} janvier 1991 :
 $4650000 \times 1,012 = 4705800$
 - Population théorique totale au 1^{er} janvier 1992 :
 $4705800 \times 1,012 = 4762269,2$
 - $p(n+1) = 1,012p(n)$, la suite est géométrique de raison $q = 1,012$ et de premier terme $p(0)$ d'où
 $p(n) = (1,012)^n \times p(0)$.
 - 1^{er} janvier 1995 correspond à $n = 5$,
 $p(5) = 4935776,835$
- Population agricole au 1^{er} janvier 1990 :
 $4650000 \times 0,09 = 418500$
 - $a(n+1) = 0,97a(n)$, la suite est géométrique de raison 0,97 d'où
 $a(n) = 418500 \times 0,97^n$.
 - $a(5) = 359380,1898$.
- $r(n) = \frac{a(n)}{p(n)} = 0,09 \left(\frac{0,97}{1,012}\right)^n$.
 - la suite $(r(n))$ est décroissante, $r(25) \approx 0,0311$ et $r(26) \approx 0,0298$
On en déduit que $n = 26$.

EXERCICE 299**Partie A**

1. Pour la valeur $n = 2$ saisie, à la fin de l'algorithme, X vaut 102.
2. $n = 2$ correspond à l'année 2007.
Donc on peut supposer qu'en 2007 il y a 102 adhérents au club de randonnée.

Partie B

1. a. Pour tout n , $b_{n+1} = a_{n+1} - 200 = 0,9a_n - 180$
 $= 0,9(a_n - 200) = 0,9b_n$
 La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $b_0 = -120$.
 b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n = -120 \times 0,9^n$.
2. Pour tout n , $a_n = b_n + 200 = 200 - 120 \times 0,9^n$.
3. La suite (b_n) est géométrique de raison $0,9$;
 or $0 < 0,9 < 1$ donc la suite (b_n) est convergente et a pour limite 0,
 comme pour tout n , $a_n = b_n + 200$, on peut dire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 200.

Partie C

1. A la calculatrice, on trouve $a_{17} \approx 179,99$ et $a_{18} \approx 181,99$. L'objectif des 180 adhérents sera atteint dans 18 ans.
2. Pour tout n , $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n < 200$.
 L'objectif d'atteindre 300 adhérents est donc impossible.

EXERCICE 300

1. a. $h_1 = 0,7 \times 0,86 + 0,3 \times 0,06 = 0,62$,
 $p_1 = 1 - 0,62 = 0,38$
 $h_2 = 0,62 \times 0,86 + 0,38 \times 0,06 = 0,556$ et $p_2 = 0,444$.
 b. $h_{n+1} = 0,86h_n + 0,06p_n$
 $p_{n+1} = 0,14h_n + 0,94p_n$
2. a. $h_{n+1} = 0,86h_n + 0,06(1 - h_n) = 0,8h_n + 0,06$.
 b. $u_{n+1} = h_{n+1} - 0,3 = 0,8h_n - 0,24$
 $= 0,8(h_n - 0,3) = 0,8u_n$
 La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,4$ et de raison $q = 0,8$.
 c. Pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n = 0,4 \times 0,8^n$.
 $h_n = u_n + 0,3 = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
3. A la calculatrice on obtient $h_{13} \approx 0,332 > 0,32$ et $h_{14} \approx 0,318 < 0,32$.

La probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera inférieure à 0,32 à partir de la 14^e année.

EXERCICE 301

1. $v_n = r^n$ vérifie (1) $\iff r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$
 $\iff r^2 - 5r + 6 = 0$ car $r \neq 0$.
 cette équation admet deux solutions $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
 On pose $a_n = 2^n$ et $b_n = 3^n$
2. a. $\begin{cases} w_0 = \alpha a_0 + \beta b_0 \\ w_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \end{cases}$
 $\implies \begin{cases} w_0 = \alpha + \beta \\ w_1 = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 3w_0 - w_1 \\ \beta = w_1 - 2w_0 \end{cases}$
 b. $5w_{n-1} - 6w_{n-2}$
 $= 5\alpha a_{n-1} + 5\beta b_{n-1} - 6\alpha a_{n-2} - 6\beta b_{n-2}$
 $= \alpha(5a_{n-1} - 6a_{n-2}) + \beta(5b_{n-1} - 6b_{n-2})$
 $= \alpha a_n + \beta b_n = w_n$.
 La suite (w_n) vérifie donc la relation (1).

EXERCICE 302

1. $u_n > 0 \implies (1 + au_n > 0 \text{ et } a + u_n > 0) \implies u_{n+1} > 0$.
2. a. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{(1 + au_n - a - u_n)}{1 + au_n + a + u_n}$
 $= \frac{(a-1)(u_n - 1)}{(a+1)(u_n + 1)} = \frac{a-1}{a+1} v_n$
 La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{a-1}{a+1}$.
 b. $v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n$
 $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \frac{3 + \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n}{3 - \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^n}$.
3. $\left| \frac{a-1}{a+1} \right| < 1$ donc (v_n) converge vers 0, on en déduit alors que (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 303

1. a. et b. voir en fin d'exercice.
 c. Le graphique montre que la limite de la suite est voisine de 12.
2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,85u_n + 1,8 - 12$
 $= 0,85u_n - 10,2 = 0,85(u_n - 12) = 0,85v_n$
 La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme : $v_0 = -4$
 b. On a donc : $v_n = v_0 \times 0,85^n = -4 \times 0,85^n$.

Il résulte que $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0,85^n$.

c. On a $v_{n+1} - v_n = 0,85v_n - v_n = -0,15v_n$.

Comme $v_0 < 0$ et $0,85 > 0$, tous les termes de la suite (v_n) sont négatifs, donc $-0,15v_n > 0$ et finalement $v_{n+1} - v_n > 0$, ce qui signifie que la suite (v_n) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + 12 - (v_n + 12) = v_{n+1} - v_n > 0$.

La suite (u_n) est croissante.

d. Comme $-1 < 0,85 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$, ce qui confirme la conjecture précédente.

3. a. Soit w_n le nombre d'abonnés (en milliers) l'année $2008 + n$.

On a $w_0 = 8$ et

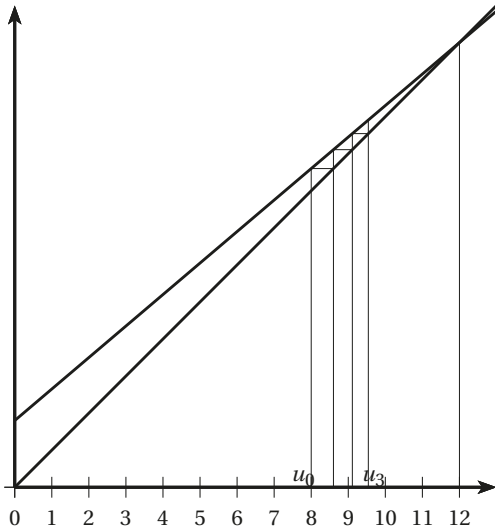
$w_{n+1} = (1 - 0,15)w_n + 1,8 = 0,85w_n + 1,8$.

On a donc $w_n = u_n$ pour tout naturel n .

b. D'après la question 2. b. le nombre d'abonnés en $2014 = 2008 + 6$ est :

$u_6 = 12 - 4 \times 0,85^6 \approx 10,4914$.

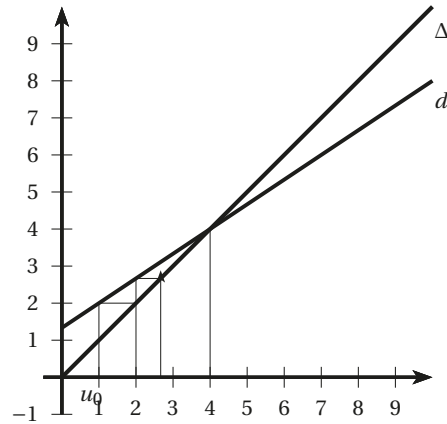
En 2014 il y aura environ 10 491 abonnés.



EXERCICE 304

1. $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{2u_0 + 4}{3} = \frac{2 \times 1 + 4}{3} = 2$;
 $u_2 = \frac{2u_1 + 4}{3} = \frac{2 \times 2 + 4}{3} = \frac{8}{3}$;
 $u_3 = \frac{2u_2 + 4}{3} = \frac{2 \times \frac{8}{3} + 4}{3} = \frac{\frac{28}{3}}{3} = \frac{28}{9}$.

2. a. et b.



c. On conjecture que la suite a pour limite l'abscisse du point commun à d et à Δ , soit le nombre 4.

3. a. Pour tout entier naturel n ,
 $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{2u_n + 4}{3} - 4 = \frac{2u_n - 8}{3}$
 $= \frac{2}{3}(u_n - 4) = \frac{2}{3}v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

b. Pour tout entier naturel n , $v_n = -3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

d'où $u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4.$$

EXERCICE 305

1. $S_1 = \sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
2. $S_2 = \sum_{k=8}^{15} k^2 = 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{12} (3k + 4) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$
 $+ 25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 40$

EXERCICE 306

1. $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99 = \sum_{k=0}^{49} (2k + 1)$

$$2. S_2 = 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 4096 = \sum_{k=2}^{12} 2^k$$

$$3. S_3 = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots + 59049 = \sum_{k=0}^{10} (-3)^k$$

EXERCICE 307

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{99} = 3 + 5 \times 99 = 498$$

$$S = 100 \times \frac{3 + 498}{2} = 25\,050.$$

EXERCICE 308

$$\text{Le vingtième terme est } u_{20} = u_1 + 19r = -37$$

$$S = 20 \times \frac{1 - 37}{2} = -360.$$

EXERCICE 309

$$u_4 = u_0 + 4r = 9 \text{ on en déduit alors que } u_0 = 9 - 4r$$

$$u_9 = u_0 + 9r = 9 + 5r$$

$$S = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 5 \times (18 + r) = 55 \text{ d'où } r = 11 - 18 = -7.$$

$$\text{On en déduit alors } u_0 = 9 + 28 = 37.$$

EXERCICE 310

$$u_6 = u_0 + 6r = 2, \text{ on en déduit alors que } u_0 = 2 - 6r$$

$$u_{20} = u_0 + 20r = 2 + 14r$$

$$S = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times (4r + 2) = 63 \text{ d'où } r = 0,25.$$

$$\text{On en déduit alors } u_0 = 0,5.$$

EXERCICE 311**1. Première méthode :**

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme

$$u_0 = 12 \text{ et de raison } 3$$

$$1002 = 12 + 3 \times 330 = u_{330}.$$

$$\text{alors } S = 331 \times \frac{12 + 1002}{2} = 167\,817.$$

Deuxième méthode :

$$S = 12 + (12 + 3 \times 1) + (12 + 3 \times 2) + \dots + (12 + 3 \times 330)$$

$$= 12 \times 331 + 3 \times (1 + 2 + \dots + 330)$$

$$= 12 \times 331 + 3 \times \frac{330 \times 331}{2} = 167\,817$$

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et de raison } \frac{1}{4}$$

$$10 = \frac{1}{4} + 39 \times \frac{1}{4} = u_{39}.$$

$$\text{alors } S = 40 \times \frac{0,25 + 10}{2} = 205.$$

EXERCICE 312

$$1. S_6 = u_0 + u_1 + \dots + u_6 = u_0 \left(\frac{1 - q^7}{1 - q} \right) = -\frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^7 \right)$$

$$S_6 \approx -2,666\,503\,9$$

$$2. S_{12} = u_0 \left(\frac{1 - q^{13}}{1 - q} \right) = -\frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{13} \right) \approx -2,666\,666\,6.$$

EXERCICE 313

$$S = u_0 \left(\frac{1 - q^{100}}{1 - q} \right) = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{100} \right) \approx 4.$$

EXERCICE 314

$$S = u_0 \left(\frac{1 - 0,3^{11}}{1 - 0,3} \right) = 2885,709\,174$$

$$\text{d'où } u_0 = 2885,709\,174 \times \frac{0,7}{1 - 0,3^{11}} = 2020.$$

EXERCICE 315

$$S_2 = 2 + 2q + 2q^2 = 18 \implies q^2 + q - 8 = 0,$$

cette équation admet deux solutions :

$$\frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \text{ et } \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Par hypothèse } q > 0, \text{ on en déduit que } q = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$$

EXERCICE 316

$$1. \text{ En 2019, on a : } u_0 = v_0 = 12 \times 1\,200 = 14\,400.$$

$$2. \text{ En 2020, on a : } u_1 = 12 \times (1\,200 + 20) = 14\,640$$

$$v_1 = 12 \times (1\,200 \times 1,015) = 1,015v_0 = 14\,616.$$

$$3. u_{n+1} = u_n + 12 \times 20, \text{ la suite } (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = 240.$$

$$v_{n+1} = 1,015v_n, \text{ la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 1,015.$$

$$4. u_n = 14\,400 + 240n \text{ et } v_n = 14\,400 \times 1,015^n.$$

$$5. \text{ En 2019 : } u_0 = v_0 = 14\,400$$

$$\text{En 2039 : } u_{20} = 19\,200 \text{ et } v_{20} \approx 19\,394,71 \text{ la formule B est plus intéressante.}$$

$$6. S_{41} = u_0 + u_1 + \dots + u_{41} = 42 \times \frac{u_0 + u_{41}}{2}$$

$$= 21 \times (14\,400 + 24\,240) = 811\,440$$

$$T_{41} = v_0 + v_1 + \dots + v_{41} = 14\,400 \times \left(\frac{1 - 1,015^{42}}{1 - 1,015} \right)$$

$$= 834\,093,2305.$$

Il gagnera 834 093,23 € s'il opte pour la formule B et seulement 811 440 € pour la formule A.

EXERCICE 317

$$1. t_{n+1} = t_n - 30. \text{ La suite } (t_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -30.$$

2. $t_n = t_0 + nr = 500 - 30n$.
3. $S_n = (n+1) \frac{t_0 + t_n}{2} = \frac{(n+1)(1000 - 30n)}{2}$
 $= (n+1)(500 - 15n)$.
4. $S_{10} = 11 \times 350 = 3850$
 Tom disposera de 3850 € le 31 juillet 2018.

EXERCICE 318

1. $c_{n+1} = 2c_n$, la suite (c_n) est une suite géométrique de raison 2.
2. $c_n = c_1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.
3. $S_n = c_1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$
4. Le 29 décembre 2017 correspond à la semaine 18,
 $S_{18} = 2^{18} - 1 = 131072$
 $\frac{131072}{24} = 5461 + \frac{8}{24}$.
 S'il respecte sa promesse, Math aura donné du 1^{er} septembre au 29 décembre 5461 tablettes et 8 carrés.

EXERCICE 319

1. $\begin{cases} S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \end{cases}$
 En ajoutant les lignes membres à membres nous obtenons :
 $2S = (n+1) + (n-1+2) + \dots + (2+n-1) + (n+1)$
 il y a n termes égaux à $n+1$ d'où :
 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) + 2n = 2(1 + 2 + \dots + (n-1) + n)$
 $= n(n+1)$.
3. a. $S_1 = \sum_{k=10}^{200} k = \sum_{k=1}^{200} k - \sum_{k=1}^9 k$
 $= \frac{200 \times 201}{2} - \frac{9 \times 10}{2} = 20055$
- b. $S_2 = \sum_{k=250}^{500} k = \sum_{k=1}^{500} k - \sum_{k=1}^{249} k$
 $= \frac{500 \times 501}{2} - \frac{249 \times 250}{2} = 94125$
- c. $S_3 = \sum_{k=50}^{2020} 2k = 2 \sum_{k=1}^{2020} k - 2 \sum_{k=1}^{49} k$
 $= 2020 \times 2021 - 49 \times 50 = 4079970$

EXERCICE 320

1. Soit $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$
 alors $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$
 En retranchant la seconde égalité à la première, nous

obtenons : $S - qS = 1 - q^{n+1}$
 d'où pour $q \neq 1$, $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

2. $\sum_{k=p}^n q^k = q^p + q^{p+1} + \dots + q^n = q^p (1 + q + \dots + q^{n-p})$
 $= q^p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$.

EXERCICE 321

1. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 + r(1+2+3+\dots+n)$
 $= (n+1)u_0 + \frac{r n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}$
 $= \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
2. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}$.

EXERCICE 322

1. $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^n$
 $= u_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$
 $= u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

EXERCICE 323

1. $S_1 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=3}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=2}^{n-1} k^2 = 1 + n^2$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^n k - \sum_{i=1}^n i = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k = 0$
3. $S_3 = \sum_{k=2}^n k^3 - \sum_{p=3}^{n+1} p^3 = \sum_{k=2}^n k^3 - \sum_{k=3}^{n+1} k^3 = 2^3 - (n+1)^3$

EXERCICE 324

Soit u_1 le premier terme de la suite et $u_n = u_1 + (n-1)r$ le n^e terme avec r raison de la suite.

La somme de ses n premiers termes a pour valeur

$$s_n = 3n^2 + 5n \text{ d'où } \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 3n^2 + 5n.$$

$$\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 3n^2 + 5n \Rightarrow u_1 + u_n = 6n + 10$$

$$\Rightarrow 2u_1 + (n-1)r = 16 + 6(n-1).$$

On en déduit alors que $u_1 = 8$, $r = 6$ et $u_n = 8 + 6(n-1)$.

EXERCICE 325

- $u_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n+3-2n-1}{(2n+1)(2n+3)}$
 $= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$.
- $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$
 $= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$
 $+ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$
 $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}$.
- S_n tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 326

- $T_1 = 20\,000 \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 20\,000 \times 0,99 = 19\,800$
 $T_2 = 19\,800 \times 0,99 = 19\,602$
 $T_3 = 19\,405,98$.
- $T_{n+1} = 0,99 T_n$.
- La suite (T_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,99$ d'où $T_n = 20\,000 \times 0,99^n$.
- L'année 2008 correspond à $n = 58$. $T_{58} \approx 11\,165$.
- $S_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n = 20\,000 \times \frac{1 - 0,99^{n+1}}{1 - 0,99}$
 $= 2\,000\,000 \times (1 - 0,99^{n+1})$.
- $S_{67} \approx 990\,228$ et $S_{68} \approx 1\,000\,325$.
 Le filon sera théoriquement épuisé en 2018.

EXERCICE 327

- $d_1 = A_0 A_1 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ et $d_2 = A_1 A_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.
- $d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n$. La suite (d_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.
- $d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n = d_0 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$
 $= 8 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.
- Conjecture : la limite de (S_n) semble être égale à 8.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 1$ donc $S_n < 8$.
- $|S_{11} - 8| \approx 0,0019$ et $|S_{12} - 8| \approx 0,00097$.
 Le premier indice recherché est donc $n = 12$.

EXERCICE 328

- $u_3 = 2\,000 \times 1,008^2 \approx 2\,032,13$.
 Le coût total des 30 premiers mètres est égal à :
 $2\,000 + 2\,016 + 2\,032,13$ soit au centime près 6 048,13 €.
- a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,008$ d'où $u_{n+1} = 1,008 u_n$.
 (u_n) est une suite géométrique de raison : $q = 1,008$.
 b. $u_{n+1} = 1,008 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \left(1 + \frac{0,8}{100}\right) \times u_n$.
 Le pourcentage d'augmentation permettant de passer de la n -ième dizaine de mètres à la $(n+1)$ -ième dizaine de mètres est égal à $t = 0,8\%$.

3. a.

valeurs de i		2	3	4	5
Valeur de u	2000	2016	2032,128	2048,38	2064,77
Valeur de S	2000	4016	6048,128	8096,51	10161,29

- A la fin de l'exécution de l'algorithme,
 $S \approx 10\,161,29$, ce qui correspond au coût d'un forage à 50 mètres de profondeur.
- a. On recherche le plus grand entier n pour lequel :
 $S_n \leq 125\,000$
 En utilisant la calculatrice, on obtient $S_{50} \approx 122\,363$ et $S_{51} \approx 125\,342$.
 Le coût est supérieur à 125 000 pour n plus grand que 50. La profondeur maximale est donc égale à 500 mètres.
 b. Voici l'algorithme modifié :

```

u ← 2000
S ← 2000
n ← 1
Tant que S ≤ 125000
    u ← u × 1,008
    S ← S + u
    n ← n + 1
Fin Tantque
Afficher (n - 1) × 10

```

EXERCICE 329

- a. $a_0 = 1\,300$ et $a_1 = 1\,300 + 100 = 1\,400$.
 b. $a_{n+1} = a_n + 100$, la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme $a_0 = 1\,300$.
 c. D'après la question précédente,
 $a_n = a_0 + nr = 1\,300 + 100n$.

- d. $A_n = \sum_{k=0}^n 12a_k = 12(n+1) \frac{a_0 + a_n}{2}$
 $= 12(n+1) \frac{2\,600 + 100n}{2} = 600(n+1)(n+26).$
2. a. $b_0 = 1\,400$ et $b_1 = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times 1\,400 = 1\,470.$
 b. $b_{n+1} = 1,05b_n$, la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $b_0 = 1\,400.$
 c. D'après la question précédente,
 $b_n = b_0 q^n = 1\,400 \times 1,05^n.$
 d. $B_n = \sum_{k=0}^n 12b_k = 12b_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$
 $= 336\,000(1,05^{n+1} - 1).$
3. a. $c_0 = 1\,500$ et $c_1 = \left(1 + \frac{2}{100}\right) \times 1\,500 + 30 = 1\,560.$
 b. $c_{n+1} = 1,02c_n + 30$, la suite (c_n) est une suite arithmético-géométrique.
 c. $u_{n+1} = c_{n+1} + \alpha = 1,02c_n + 30 + \alpha$
 $= 1,02\left(c_n + \frac{30 + \alpha}{1,02}\right) = 1,02u_n$ car la suite (u_n) est géométrique, ce qui implique $\frac{30 + \alpha}{1,02} = \alpha$ soit $\alpha = 600.$
 d. D'après la question précédente
 $u_n = u_0 q^n = 2\,100 \times 1,02^n$
 $c_n = u_n - 600 = 2\,100 \times 1,02^n - 600$
 e. $C_n = \sum_{k=0}^n 12c_k = 12\left(2\,100 \frac{1,02^{n+1} - 1}{1,02 - 1} - 600(n+1)\right)$
 $C_n = 1\,260\,000(1,02^{n+1} - 1) - 7\,200(n+1).$
4. En utilisant un tableur (les sommes B_n et C_n sont tronquées à l'euro), on obtient :

n	a_n	b_n	c_n	A_n	B_n	C_n
4	1700	1701,71	1747,30	90 000	92 830	97 345
5	1800	1786,79	1812,24	111 600	114 272	119 092
6	1900	1876,13	1878,49	134 400	136 785	141 634
7	2000	1969,94	1946,06	158 400	160 425	164 986
8	2100	2068,44	2014,98	183 600	185 246	189 166
9	2200	2171,86	2085,28	210 000	211 308	214 189
10	2300	2280,45	2156,98	237 600	238 674	240 073
11	2400	2394,48	2230,12	266 400	267 407	266 835
12	2500	2514,20	2304,73	296 400	297 578	294 491
13	2600	2639,91	2380,82	327 600	329 257	323 061
14	2700	2771,90	2458,44	360 000	362 519	352 563
15	2800	2910,50	2537,61	393 600	397 445	383 014

Si Bob pense changer d'emploi dans les 10 ans à venir, il devrait choisir le contrat C, s'il compte rester plus de 10 ans, il devrait choisir le contrat B.

EXERCICE 330

Partie A

1. F4 : « $F3 + 20$ »

2. La formule saisie dans la cellule C4 est : $= 1,007 * C3$.
 En C5 : « $= C4 * 1,007$ »
3. Deux formules possibles :
 $= G3 + F4$ et $= \text{SOMME}(\$F\$3 : F4)$

Partie B

1. $U_1 = 1\,800$
 $U_2 = \left(1 + \frac{0,7}{100}\right) U_0 = 1,007 U_0 = 1\,812,6$
 $U_3 = 1,007 U_1 \approx 1\,825,29$
 $U_4 = 1,007 U_2 \approx 1\,838,07$
2. a. $U_{n+1} = 1,007 U_n.$
 b. La suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_1 = 1\,800$ et de raison $q = 1,007.$
 c. $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 1\,800 \times 1,007^{n-1}.$
3. $U_{24} = 2\,113,25$, au dernier mois de son CDD, Marc devrait percevoir 2213,25 €.
4. Voir exercice 321.
5. Voir exercice 320.
6. $S = 1800 \times \frac{1 - 1,007^{24}}{1 - 1,007} = 46\,862,87.$

EXERCICE 331

1. $d_n = 4,9 + 9,8(n-1).$
2. $S_n = n \times \frac{d_1 + d_n}{2} = n(4,9 + 4,9(n-1)) = 4,9n^2$
3. $S_{15} = 1\,102,5$, le corps aura parcouru 1102,5 m en 15 secondes.
4. $4,9n^2 = 3900 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{3900}{4,9}} \approx 28,21.$
 Le corps arrivera au sol au bout de 28,21 secondes.

EXERCICE 332

1. $v_{n+1} = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) + 24 = 2u_n - 4n + 12$
 $= \frac{1}{2}v_n.$
 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 28$ d'où $v_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n$
 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} < 1$, la suite (v_n) est décroissante.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}v_n + 2n - 6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 = x_n + y_n$
 avec $x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $y_n = 2n - 6$
 (x_n) est une suite géométrique de premier terme

$x_0 = 7$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

(y_n) est une suite arithmétique de premier terme

$y_0 = -6$ et de raison $r = 2$.

$$4. \sum_{k=0}^n x_k = 7 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^n y_k = (n+1) \frac{-6 + 2n - 6}{2} = (n+1)(n-3)$$

On en déduit alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = 14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-3).$$

EXERCICE 333

1. Dans la cellule B3, deux formules possibles :

=B2+20 ou =B2+20;

dans la cellule C3, 3 formules possibles :

=C2*1,2 ou =C2*1,2 ou =C2*(1+20/100)

2. a. La suite (A_n) est une suite arithmétique de premier terme 150 et de raison 20.

b. La suite (B_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 130.

3. $A_n = 150 + 20(n-1) = 130 + 20n$.

$B_n = 130 \times 1,2^{n-1}$.

4. a. Le montant du 6^e dépôt correspond à $n = 6$,
 $A_6 = 150 + 5 \times 20 = 250$ $B_6 = 130 \times 1,2^5 \approx 323$.

b. Formule A :

$$A_1 + A_2 + \dots + A_6 = \frac{6 \times (150 + 250)}{2} = 1200$$

Formule B :

$$B_1 + B_2 + \dots + B_6 = 130 \times \frac{1,2^6 - 1}{1,2 - 1} \approx 1291$$

c. La formule que Florent va retenir pour acheter son scooter est la formule B car il aura économisé suffisamment.

EXERCICE 334

1. Graphique en fin d'exercice.

2. $A_p \left(\frac{3p}{n}; 0 \right)$ et $B_p \left(\frac{3p}{n}; \frac{9p^2}{n^2} \right)$ pour $0 \leq p \leq n$.

3. a. $A_p = \frac{3}{n} \times \frac{9p^2}{n^2} = \frac{27p^2}{n^3}$

b. $u_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{27p^2}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}$.

4. a. $A'_p = \frac{3}{n} \times \frac{9(p+1)^2}{n^2} = \frac{27(p+1)^2}{n^3}$

b. $v_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{27(p+1)^2}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$

$$u_n = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}.$$

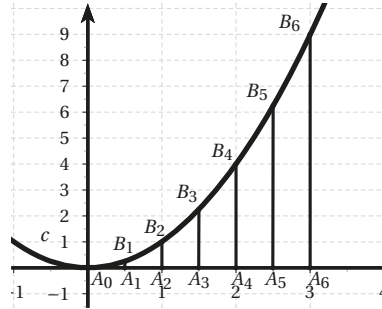
5. a. $u_{20} \approx 8,33$ et $v_{20} \approx 9,68$ d'où $8,33 \leq \mathcal{A} \leq 9,68$

$u_{100} \approx 8,87$ et $v_{100} \approx 9,13$ d'où $8,87 \leq \mathcal{A} \leq 9,13$

b. En faisant un programme, on obtient $n = 27001$,

$u_{27001} \approx 8,9995$ et $v_{27001} \approx 9,0005$

c. On en déduit $\mathcal{A} = 9$.



EXERCICE 335

Aire d'un rectangle « sous la courbe » : $A_p = \frac{1}{n} \times \frac{p^3}{n^3} = \frac{p^3}{n^4}$

$$u_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p^3}{n^4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

Aire d'un rectangle « au-dessus de la courbe » :

$$A'_p = \frac{1}{n} \times \frac{(p+1)^3}{n^3} = \frac{(p+1)^3}{n^4}$$

$$v_n = \sum_{p=1}^n \frac{p^3}{n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

On en déduit $\mathcal{A} = \frac{1}{4}$

EXERCICE 336

Aire d'un rectangle « sous la courbe » : $A_p = \frac{1}{n} \times e^{\frac{p}{n}} = \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n}$

$$u_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{p}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \times \left(\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{p}{n}} \right) = \frac{1-e}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$$

On en déduit $\mathcal{A} \approx 1,718$

EXERCICE 337

1. $A_p \left(\frac{3p}{n}; 0 \right)$ $B_p \left(\frac{3p}{n}; \frac{9p}{n} \right)$ $C_p \left(0; \frac{9p}{n} \right)$

2. Soit R_p le rayon du cercle cherché.

$$R_p = d(B_p, C_p) = \frac{3p}{n}.$$

3. Soit e_p l'épaisseur du cylindre,

$$e_p = d(C_p, C_{p+1}) = \frac{9}{n}.$$

$$v_p = \pi R_p^2 e_p = \frac{81p^2 \pi}{n^3}.$$

4. $S_n = \frac{81\pi}{n^3} \sum_{p=0}^{n-1} p^2 = \frac{81\pi}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
 $S_n = \frac{27\pi(n-1)(2n-1)}{2n^2}.$
5. $S_{100} \approx 83,55$, $S_{1000} \approx 84,70$
 $S_{10000} \approx 84,81$ et $S_{100000} \approx 84,82$
 On en déduit alors que $\mathcal{V} = 84,8$ à 10^{-1} près.
6. $\mathcal{V} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 9}{3} = 27\pi.$
7. `def volume() :`
`V = 27 * pi`
`n = 1`
`S = 0`
`while V - S > 1e-4 :`
`n = n + 1`
`S = 27 * pi * (n - 1) * (2 * n - 1) / (2 * n * n)`
`print("S = ", S, "n = ", n)`

On obtient alors $n = 1272345$.

EXERCICE 338

1. $A_p \left(\frac{4p}{n} ; 0 \right) \quad B_p \left(\frac{4p}{n} ; 16 - \frac{16p^2}{n^2} \right)$
 $C_p \left(0 ; 16 - \frac{16p^2}{n^2} \right)$
2. Soit R_p le rayon du cercle cherché.
 $R_p = d(B_p, C_p) = \frac{4p}{n}.$
3. Soit e_p l'épaisseur du cylindre,
 $e_p = d(C_p, C_{p+1}) = \frac{16(2p+1)}{n^2}.$
 $v_p = \pi R_p^2 e_p = \frac{256p^2 \pi (2p+1)}{n^4}.$
4. $S_n = \frac{256\pi}{n^4} \sum_{p=0}^{n-1} (2p^3 + p^2)$
 $= \frac{256\pi}{n^4} \times \left(\frac{2(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right)$
 $= \frac{256\pi(n-1)(3n^2 - n - 1)}{6n^3}.$
5. $S_{100} \approx 396,76$, $S_{1000} \approx 401,59$
 $S_{10000} \approx 402,07$ et $S_{100000} \approx 402,11$
 On en déduit alors que $\mathcal{V} = 402,1$ à 10^{-1} près.

EXERCICE 339

1. $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{3}{4}$
 $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est donc pas arith-

métique
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est donc pas géométrique.

2. a. $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1.$
 b. $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$
 $= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = \frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}.$

- c. $v_n = \frac{1}{2^n}.$
 3. a. $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1.$

b. $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}.$

c. $w_{n+1} = w_n + 2$, la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2.$

d. $w_n = 2n - 1.$

4. Pour tout entier naturel n ; $u_n = v_n w_n = \frac{2n-1}{2^n}.$

5. $S_n = \sum_{k=0}^n k 2^{1-k} - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k$
 $S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$

EXERCICE 340

Partie A

1. Si chaque année le prix augmente de 1,20 €, on a
 $u_{n+1} = u_n + 1,2$: la suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 1,2 et de premier terme $u_1 = 16.$
2. Formule en C3 : = C2+1,2
3. $u_n = u_1 + (n-1)r = 16 + 1,2(n-1),$
 donc $u_7 = 16 + 1,2 \times 6 = 23,20.$

Partie B

1. Le taux d'évolution du nombre de forfaits vendus entre les saisons 2006/2007 et 2007/2008 est égal à :
 $\frac{19003 - 18540}{18540} \approx 0,025$ soit 2,5 % à 0,1 %.
2. a. Pour passer d'un rang au suivant on multiplie par 1,025

On a donc $v_{n+1} = v_n \times 1,025$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 1,025, de premier terme $v_1 = 18540.$

La formule est donc : = D3*1,025

b. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 18540 \times 1,025^{n-1}$,
donc $v_7 = 18540 \times 1,025^6 \approx 21500,72$.

Partie C

- Il faut multiplier le nombre de forfaits journée par le prix du forfait. La formule est donc en E2 : =C2*D2.
- Formule en E9 : =SOMME(E2:E8).

EXERCICE 341**Partie A**

- $u_2 = u_1 \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0,98u_1 = 0,98 \times 1200 = 1176$.
De même $u_3 = 0,98u_2 = 0,98 \times 1176 = 1152,48$.
- Retrancher 2 % chaque année revient à multiplier par 0,98, donc pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,98u_n$,
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $u_1 = 1200$.

Partie B

- Formule dans C3 : = C2*0,98
- $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1200 \times 0,98^{n-1}$.
Donc pour $n = 20$, $u_{20} = 1200 \times 0,98^{19} \approx 817,48$.

Partie C

- Ils rembourseraient à la banque AA :
 $20 \times 12 \times 1047 = 251280$ (€).
- Ils rembourseraient à la banque BB :
 $1200 \times \frac{1 - 0,98^{20}}{1 - 0,98} \times 12 \approx 239322,26$ (€), donc moins qu'à la banque AA.

EXERCICE 342

- $c_2 = 100 + 203 + 203 \times 0,03 = 309,09$.
 $c_3 = 100 + 309,09 + 309,09 \times 0,03 = 418,3627 \approx 418,36$.
- On a $c_1 - c_0 = 103$ et $c_2 - c_1 = 106,09$
 $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$, la suite (c_n) n'est pas arithmétique.
On a $\frac{c_1}{c_0} = 2,03$ et $\frac{c_2}{c_1} \approx 1,52$
 $\frac{c_1}{c_0} \neq \frac{c_2}{c_1}$, la suite (c_n) n'est pas géométrique.
- On peut écrire en B3 « = 1,03 * B2 + 100 »
On peut écrire en C3 « = B3 * 0,03 »
- Il faut calculer :
 $c_{16} = 100(1 + 1,03 + 1,03^2 + 1,03^3 + \dots + 1,03^{16})$
C'est la somme des 17 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,03, soit :

$$1 + 1,03 + 1,03^2 + 1,03^3 + \dots + 1,03^{16} = \frac{1,03^{17} - 1}{1,03 - 1} \approx 21,7616.$$

Conclusion : le jour de son seizième anniversaire
Katia aura 2176,16 €.

EXERCICE 343

- $S_n = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$. L'affirmation est VRAIE.
- $S_n = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$. L'affirmation est FAUSSE.
- D'après la question précédente, $S_n \geq \frac{1}{2}$, la limite ne peut donc pas être nulle. L'affirmation est FAUSSE.
- $S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{2n(n+1)} < 0$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 344

- $h_1 = \frac{h_0}{3} = \frac{1}{2 \times \sqrt{3}}$. L'affirmation est VRAIE.
- Chaque nouveau triangle est une réduction au tiers du précédent. L'affirmation est VRAIE.
- (h_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $h_n = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}$. L'affirmation est VRAIE.
- Si $n \geq 1$, d'après les questions précédentes
 $h_n = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}$ et $\ell_n = \frac{1}{3^n}$
de plus $u_n = 3 \times 2^{n-1}$
d'où $s_n = u_n \frac{\ell_n h_n}{2} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n}{8}$. L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 345

- $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = a \left(u_n - \frac{2}{a}\right)$.
La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une suite géométrique si et seulement si $\frac{2}{a} = 6$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{3}$.
 (v_n) est de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$.
- $v_n = -\frac{1}{3^n}$.
- (v_n) tend vers 0 et $u_n = v_n + 6$ d'où (u_n) tend vers 6 lorsque n tend vers $+\infty$.
- a. $S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.
b. $\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ tend vers 0, on en déduit que la suite (S_n)

converge vers $-\frac{3}{2}$.

- c. $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_n + 6(n+1)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 346

- $18,3 + 18,3 \times \frac{26}{100} = 23,058$.
- a. $u_1 = 18,3$ et $u_2 = 23,058$.
b. $u_{n+1} = 1,26u_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,26 et de premier terme $u_1 = 18,3$.
c. $u_n = 18,3 \times 1,26^{n-1}$.
d. $u_7 = 18,3 \times 1,26^6 \approx 73,2$ arrondi à 0,1 femto-gramme.
- A la fin de l'exécution de l'algorithme $n = 9$. La masse de glucose absorbé dépassera 100 femtogrammes pendant la 9^e période.
- a. Pendant les 30 premières minutes, la masse totale de glucose absorbé est égale à 70,41108 femtogrammes.
b. Formule dans la cellule C3 : « = C2 + B3 ».
- $S_n = 18,3 \times \frac{1 - 1,26^n}{1 - 1,26} = \frac{915}{13} (1,26^n - 1)$.
- Grace à la calculatrice, nous obtenons $S_{131} \approx 9,9 \cdot 10^{14}$ et $S_{132} \approx 1,2 \cdot 10^{15}$
 $1320 = 22 \times 60$.
22 heures sont nécessaires, depuis le début de la mise en culture, à l'absorption de 1 gramme de glucose par la colonie de bactéries.

EXERCICE 347

- $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} - 2} = \frac{4u_n + 4}{u_n - 2} = 4v_n$
 (v_n) est une suite géométrique de raison 4. L'affirmation est VRAIE.
- $\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5 (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{10}) = v_5 \times \frac{4^{11} - 1}{3}$. L'affirmation est FAUSSE.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$
 $\Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = 2v_n + 1$
 $\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{v_n - 1}$. L'affirmation est VRAIE.
- Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ sa limite ne peut donc pas être négative. L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 348

- $0 < \frac{1}{e} < 1$ d'où $0 < \left(\frac{1}{e}\right)^n < 1$
ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq e + 1$. L'affirmation est VRAIE.
- $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e} - 1\right) < 0$, la suite (u_n) est décroissante. L'affirmation est FAUSSE.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$. L'affirmation est FAUSSE.

- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= (e+1) + \left(e + \left(\frac{1}{e}\right)\right) + \left(e + \left(\frac{1}{e}\right)^2\right) + \dots + \left(e + \left(\frac{1}{e}\right)^n\right)$$

$$= (n+1)e + \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}} = (n+1)e + \frac{e^{n+1} - 1}{e^n(e-1)}.$$

L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 349

1. Proposition de la banque A

- $U_n = U_1 + (n-1)r = 2000 + 460(n-1) = 1540 + 460n$.
- $U_{10} = 6140$, le dernier versement sera de 6140 €.
-

$U \leftarrow 2000$
 $S \leftarrow 2000$
 Pour k allant de 2 à 10 faire
 $U \leftarrow 1540 + 460k$
 $S \leftarrow S + U$
 Fin Pour
 Afficher S

- $S = 10 \times \frac{U_1 + U_{10}}{2} = 40700$.

Si le prêt est contracté auprès de la banque A, l'entreprise devra rembourser 40700 €.

2. Proposition de la banque B

- Soit t le taux mensuel : $(1+t)^{12} = 1 + \frac{5,75}{100}$

$$\Leftrightarrow t = (1,0575)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,00467$$

soit environ 0,467 %.

- $a = 40000 \times \frac{0,00467}{1 - (1,00467)^{-5}} \approx 8112,43$ arrondi à 0,01 près.

- $5 \times 8112,43 = 40562,14$. La proposition de la banque B est plus intéressante.

EXERCICE 350

On sait que pour $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

$$S_n = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)'$$

$$\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

On en déduit $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

$$S_n = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

EXERCICE 351

1. b 2. b 3. d 4. c 5. c

EXERCICE 352

- $u_1 = 10000 \times 1,03 + 1000 = 11300$.
- Chaque année, la somme placée augmente de 3% somme à laquelle s'ajoute 1000 €. Augmenter de 3% revient à multiplier par $\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ soit 1,03 d'où $u_{n+1} = 1,03u_n + 1000$.
- Programme complété :

```
def placement() :
    u = 10000
    for i in range(10)
        u = u * 1.03 + 1000
    return u
```

- a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{100000}{3}$

$$v_{n+1} = 1,03u_n + 1000 + \frac{100000}{3} = 1,03u_n + \frac{103000}{3}$$

$$v_{n+1} = 1,03 \left(u_n + \frac{100000}{3} \right) = 1,03v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{100000}{3} = \frac{130000}{3}$.

b. D'après la question précédente :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{130000}{3} (1,03)^n.$$

$$c. u_n = v_n - \frac{100000}{3} = \frac{130000}{3} (1,03)^n - \frac{100000}{3}.$$

- $u_{10} \approx 24903,04$ à 10^{-3} près.
Bob disposera de 24903 euros.

EXERCICE 353

- a. Le nombre de visiteurs en 2019 est donné par u_1
 $u_1 = 1,05 \times 200 = 210$ soit 210 000 visiteurs.
b. On a, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n$, la

suite (u_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $u_0 = 200$.

$$c. u_n = u_0 q^n = 200 \times (1,05)^n.$$

- a. On a $v_{n+1} = v_n - 15$, (v_n) est une suite arithmétique de raison 15 et de premier terme $v_0 = 300$.
b. La fonction parc() revoit 4.
En 2022, la fréquentation du parc U deviendra supérieure à la fréquentation du parc V .

EXERCICE 354

- $100 \times 1,05 = 95$, le bassin contient 95 m³ d'eau une semaine après son remplissage.
- a. Diminuer de 5% revient à multiplier par $\left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95$ d'où $u_{n+1} = 0,95u_n$
La suite (u_n) est géométrique de raison 0,95 et de premier terme $u_0 = 100$.
b. $u_n = u_0 \times q^n = 100 \times 0,95^n$.
c. $u_6 = 100 \times 0,95^6 = 73,51$ à 10^{-2} près.
Au bout de 6 semaines, le bassin contiendra 73,51 m³ d'eau.

3.

```
def jours(V) :
    n = 0
    u = 100
    while u >= V :
        n = n + 1
        u = 0.95 * u + 3
    return n
```

EXERCICE 355

- $u_1 = 1,05u_0 = 525$ et $u_2 = 1,05u_1 = 551,25$.
- $u_{n+1} = 1,05u_n$.
- La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,05$.
- $u_7 \approx 703,55$. Si la tendance se poursuit, le directeur peut espérer 703 familles pour l'année 2025.

EXERCICE 356

- $u_1 = 0,9u_0 + 30 = 129$.
Le nombre d'exposants attendus en 2020 est 129.
- Pour déterminer u_{n+1} , on prend 90% de u_n soit $0,9u_n$, puis on ajoute 30 au résultat, ce qui donne

$$0,9u_n + 30.$$

Donc, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

3. *def* exposants()

$$u = 110$$

$$n = 2019$$

$$\text{while } u \leq 220 :$$

$$u = 0,9 \times u + 30$$

$$n = n + 1$$

$$\text{print}(n)$$

4. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0,9u_n - 270$

$$v_{n+1} = 0,9(u_n - 300) = 0,9v_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison

$$q = 0,9 \text{ et de premier terme } v_0 = -190.$$

b. Pour tout n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0,9^n.$$

$$u_n = v_n + 300 = -190 \times 0,9^n + 300.$$

5. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$;

or $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite (v_n) tend 0 lorsque n est très grand.

Comme pour tout n , $u_n = v_n + 300$, on peut dire que la suite (u_n) a pour limite 300.

De plus, en calculant quelques termes de la suite (u_n) , on peut conjecturer que cette suite est croissante.

La suite (u_n) est croissante et admet pour limite 300, donc tous ses termes sont inférieurs à 300.

L'organisateur a donc raison de dire au maire qu'avec 300 emplacements, il aura assez de place pour ne pas refuser d'inscriptions.

EXERCICE 357

1. $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0,85a_n + 18$

2. a. Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 120 = 0,85a_n - 102$$

$$= 0,85\left(a_n - \frac{102}{0,85}\right) = 0,85(a_n - 120) = 0,85u_n.$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $u_0 = -70$.

b. Pour tout $n \geq 0$, $u_n = -70 \times 0,85^n$.

$$\text{D'où } a_n = u_n + 120 = 120 - 70 \times 0,85^n.$$

c. Comme $0 < 0,85 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 120$.

Ceci signifie qu'à terme le nombre d'adhérents atteindra 120 sans jamais le dépasser.

3. a. Au départ il faut

$$e_0 = 1 \times 0,6 \times 50 + 2 \times 0,4 \times 50 = 70 \text{ heures de gymnastique.}$$

Si la répartition se maintient avec les nouveaux adhérents il faudra prévoir un nombre d'heures e_n tel que :

$$e_n = 1 \times 0,6 \times a_n + 2 \times 0,4 \times a_n = 1,4a_n, \text{ soit}$$

$$e_n = 1,4(120 - 70 \times 0,85^n) = 168 - 98 \times 0,85^n.$$

b. D'après la question précédente le nombre d'heures de gymnastique était pour l'année $2000 + n$, $e_n = 168 - 98 \times 0,85^n$.

Donc à raison de 20 participants par heure il faut trouver un nombre entier n de séances tel que :

$$\frac{168 - 98 \times 0,85^n}{20} > 8 \iff 168 - 98 \times 0,85^n > 160$$

$$\iff 98 \times 0,85^n < 8$$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$$98 \times 0,85^{15} > 8 \text{ et } 0,85 \times 0,85^{16} < 8$$

Le plus petit entier est $n = 16$, ce qui correspond à l'année 2016.

EXERCICE 358

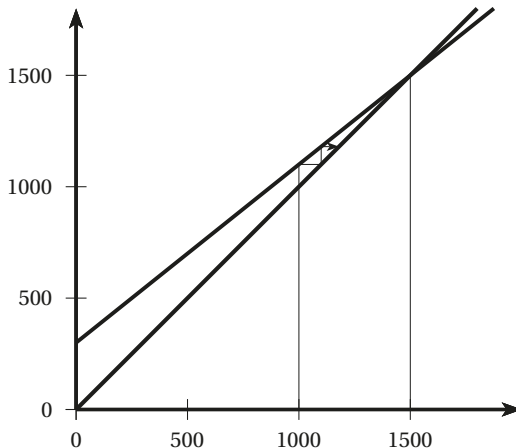
$$1. u_2 = 1000 - 0,2 \times 1000 + 300 = 1000 - 200 + 300 = 1100;$$

$$u_3 = 1100 - 0,2 \times 1100 + 300 = 1100 - 220 + 300 = 1180.$$

2. D'une année sur l'autre l'effectif est multiplié par 0,8 puis augmenté de 300, soit :

$$u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 300.$$

3.



En partant du point (1000; 0) et en allant « vers le haut » jusqu'à la droite d'équation $y = 0,8x + 300$ et « vers la droite » jusqu'à la droite $y = x$, on constate que la suite semble converger vers l'abscisse du point commun aux deux droites donc vers 1500.

4. a. Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1500 - u_{n+1} = 1200 - 0,8u_n \\ &= 0,8 \left(\frac{1200}{0,8} - u_n \right) = 0,8(1500 - u_n) = 0,8v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8, de premier terme $v_1 = 1500 - u_1 = 1500 - 1000 = 500$.

b. On a pour tout naturel non nul :

$$v_n = 0,8^{n-1} v_1 = 500 \times 0,8^{n-1}$$

Comme $0 < 0,8 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Or $u_n = 1500 - v_n$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1500$

le nombre de donateurs va se stabiliser vers 1500.

EXERCICE 359

1. $u_1 = 300 \times 1,054 = 316,2$ et $u_2 = 316,2 \times 1,054 \approx 333,27$.

2. $u_n = 300 \times (1,054)^n$.

3. a.

```
def annee(n) :
    u = 300
    while u < 450
        n = n + 1
        u = 1,054 * u
    return n
```

b. Exécution pas à pas de la fonction annee(2017)

n	2017	2018	2019	2020	2021
U	300	316,2	333,27	351,27	370,24
U<450	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux

n	2022	2023	2024	2025
U	390,23	411,31	433,52	456,93
U<450	Faux	Faux	Faux	Vrai

annee(2017) retourne donc la valeur 2025.

En 2025, la masse des déchets aura dépassé 450 millions de tonnes.

EXERCICE 360

1. $u_1 = 1,1 \times 3000 = 3300$

$$u_2 = 1,1 \times 3300 = 3630$$

3300 jeux seront vendus une semaine après son lancement, 3630 seront vendus la semaine suivante.

2. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $u_0 = 3000$, d'où $u_n = 3000 \times 1,1^n$.

3. La barre des 100000 jeux vendus sera dépassée au bout de 15 semaines.

$$4. S = u_0 + u_1 + \dots + u_{24} = u_0 \times \frac{q^{25} - 1}{q - 1} \approx 295041,18.$$

Au bout de six mois, 295041 jeux auront été vendus.

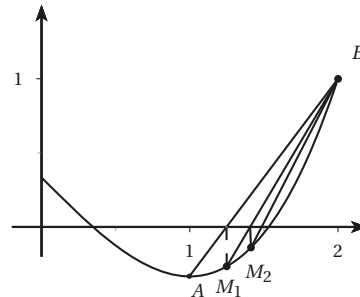
EXERCICE 361

1. La fonction f est dérivable sur $[0; 2]$

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
f	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

- 2.



3. D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe deux fois sur l'intervalle $[0; 2]$, l'équation $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3} = 0$ admet donc deux solutions dans $[0; 2]$.

4. Voir le graphique précédent. Les points M se rapprochent de la solution recherchée.

5. Soit M le point de coordonnées $(x; 0)$

$$\overrightarrow{BM} (x-2; -1) \text{ et } \overrightarrow{BI} \left(a-2; \frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3} \right).$$

La condition de colinéarité permet d'écrire $(x-2) \left(\frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3} \right) = 2-a$ soit après simplifications

$$x = \frac{-2a^3 + 9a - 2}{-a^3 + 3a + 2}.$$

6. a. $g(a_0) = a_1, g(a_1) = a_2, g(a_2) = a_3$.

$$\text{b. } a_1 = \frac{5}{4}, a_2 \approx 1,40741, a_3 \approx 1,48237,$$

$$a_4 \approx 1,51316, a_5 \approx 1,52501, a_6 \approx 1,52946$$

$$a_7 \approx 1,53112, a_8 \approx 1,53173, a_9 \approx 1,53196$$

$$a_{10} \approx 1,53204, a_{11} \approx 1,53207.$$

c. D'après les réponses précédentes, $n = 3$.

d. Un encadrement à 10^{-2} sera obtenu à partir de $n = 5$,

un encadrement à 10^{-4} sera obtenu à partir de $n = 9$.

EXERCICE 362

La fonction f est dérivable sur $[-2; 0]$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

x	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$f'(x)$	+	0	-
f	-5	$1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$	1

D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe sur l'intervalle $[-2; 0]$, l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet donc une solution, notée α dans $[-2; 0]$.

Soit les points $M(x; 0)$, $A(-2; -5)$ et $I(a; a^3 - a + 1)$

$$\overrightarrow{AM} (x+2; 5) \text{ et } \overrightarrow{AI} (a+2; a^3 - a + 6).$$

La condition de colinéarité permet d'écrire $(x+2)(a^3 - a + 6) = 5a + 10$ soit après simplifications

$$x = \frac{-2a^3 + 7a - 2}{a^3 - a + 6}.$$

En prenant $a_0 = 0$, nous obtenons $\alpha \approx -1,324$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 363

La fonction f est dérivable sur $[-2; 0]$

$$f'(x) = 4x^3 + 1$$

x	-2	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	0
$f'(x)$	-	0	+
f	12	$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$	-2

D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe sur l'intervalle $[-2; 0]$, l'équation $x^4 + x - 2 = 0$ admet donc une solution, notée α dans $[-2; 0]$.

Soit les points $M(x; 0)$, $A(-2; 12)$ et $I(a; a^4 + a - 2)$

$$\overrightarrow{AM} (x+2; -12) \text{ et } \overrightarrow{AI} (a+2; a^4 + a - 14).$$

La condition de colinéarité permet d'écrire $(x+2)(a^4 + a - 14) = -12a - 24$ soit après simplifications

$$x = \frac{-2a^4 - 14a + 4}{a^4 + a - 14}.$$

En prenant $a_0 = 0$, $\alpha \approx -1,353$ à 10^{-3} près.

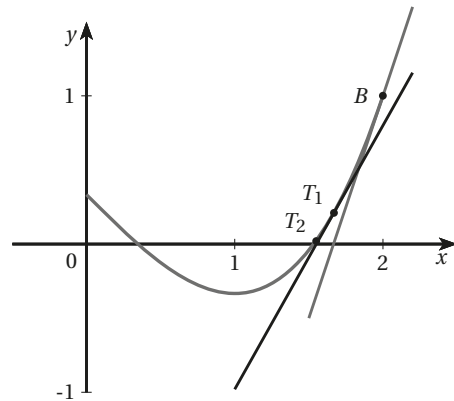
EXERCICE 364

1. La fonction f est dérivable sur $[0; 2]$

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
f	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1

2.



3. D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe deux fois sur l'intervalle $[0; 2]$, l'équation

$$\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{3} = 0 \text{ admet donc deux solutions dans } [0; 2].$$

4. Voir le graphique précédent. Les points T se rapprochent de la solution recherchée.

5. a. Equation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point J de la forme $y = f'(b)(x-b) + f(b)$.

$$\text{Soit } y = (b^2 - 1)x - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{3}.$$

b. Le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses vérifie : $(b^2 - 1)x - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{3} = 0$ soit

$$x = \frac{2b^3 - 1}{3(b^2 - 1)}.$$

6. a. $h(b_0) = b_1$, $h(b_1) = b_2$, $h(b_2) = b_3$.

$$b_1 = \frac{5}{3}, b_2 = \frac{223}{144}, b_3 \approx 1,53239$$

$$b_4 \approx 1,53208899, b_5 \approx 1,53208889$$

c. La calculatrice donne une valeur de la solution égale à b_5 à 10^{-5} près.

EXERCICE 365

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 2]$, $f'(x) = 9x^2 + 2$

x	0	2
$f'(x)$		+
f	-1	27

D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe sur l'intervalle $[0 ; 2]$, l'équation $3x^3 + 2x - 1 = 0$ admet donc une solution, notée α dans $[0; 2]$.

Soit J un point de la courbe d'abscisse b . L'équation de la tangente à la courbe en J est $y = (9b^2 + 2)x - 6b^3 - 1$. Le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est d'abscisse $x = \frac{6b^3 + 1}{9b^2 + 2}$. En utilisant la méthode de Newton et $b_0 = 2$, nous obtenons $\alpha = 0,402$ à 10^{-3} .

EXERCICE 366

La fonction f est dérivable sur $[-2 ; 0]$, $f'(x) = e^x + 1$

x	-2	0
$f'(x)$		+
f	$e^{-2} - 2$	1

D'après le tableau de variation, la fonction f change de signe sur l'intervalle $[-2 ; 0]$, l'équation $e^x + x = 0$ admet donc une solution, notée α dans $[-2; 0]$.

Soit J un point de la courbe d'abscisse b . L'équation de la tangente à la courbe en J est $y = (e^b + 1)x + (1 - b)e^b$. Le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est d'abscisse $x = \frac{(b-1)e^b}{e^b + 1}$. En utilisant la méthode de Newton et $b_0 = 0$, nous obtenons $\alpha = -0,567$ à 10^{-3} .

EXERCICE 367

1. $x_0 = 1 > 0$, $x_1 = \frac{2x_0 + 3}{x_0 + 2} > 0$ car quotient de sommes strictement positives.

Supposons $x_n > 0$ alors $x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2} > 0$ pour la même raison que précédemment.

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_0 > 0 \implies x_1 > 0 \implies x_2 > 0 \implies x_n > 0.$$

2. $x_0^2 = 1 < 3$

$$x_{n+1}^2 - 3 = \frac{(2x_n + 3)^2 - 3(x_n + 2)^2}{(x_n + 2)^2} = \frac{x_n^2 - 3}{(x_n + 2)^2} < 0 \text{ car par hypothèse } x_n^2 < 3.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = \frac{3 - x_n^2}{x_n + 2} > 0$ d'après les questions précédentes.

On en déduit que la suite (x_n) est croissante.

4. On admet que la suite admet une limite finie ℓ , alors ℓ vérifie $\ell = \frac{2\ell + 3}{\ell + 2} \iff \ell^2 = 3$

D'après 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ donc $\ell \geq 0$

On en déduit alors que $\ell = \sqrt{3}$.

☞ Un théorème qui sera vu plus tard permet de justifier l'existence de la limite : « Toute suite croissante et majorée est convergente ».

Ici la suite est croissante et majorée par 3, elle est donc convergente, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.

EXERCICE 368

$$1. \forall n \geq 2, \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$\begin{aligned} 2. P_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

$$3. P_{2019} = \frac{2020}{4038} = \frac{1010}{2019}.$$

EXERCICE 369

$$\begin{aligned} 1. v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{11}{21} = -\frac{3}{4}u_n + \frac{11}{28} \\ &= -\frac{3}{4} \left(u_n - \frac{11}{21}\right) = -\frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

la suite (v_n) est géométrique, de raison $q = -\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = -\frac{1}{42}$.

$$\begin{aligned} 2. v_n &= -\frac{1}{42} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ u_n &= \frac{11}{21} + v_n = \frac{11}{21} - \frac{1}{42} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

3. a_n désigne l'événement « Bérénice ne téléphone pas à Alfred le $n^{\text{ème}}$ jour qui suit leur décision ».

$$\text{b. } P(B_{n+1} \cap B_n) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6} P(B_n)$$

$$P(B_{n+1} \cap \overline{B_n}) = P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{11}{12} P(\overline{B_n})$$

c. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap \overline{B_n}) \\ = -\frac{3}{4} P(B_n) + \frac{11}{12}.$$

$$4. \quad P(B_n) = u_n = \frac{11}{21} - \frac{1}{42} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ \text{d'où } P(B_{60}) = 0,524 \text{ à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 370

$$1. \quad p_n + q_n = 1.$$

$$2. \quad P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,5 \text{ et } P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$$

$$3. \quad P(B_n \cap B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) = 0,7 \times q_n \\ P(A_n \cap B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) = 0,5 \times p_n.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_{n+1}) = P(B_n \cap B_{n+1}) + P(A_n \cap B_{n+1}) \\ = 0,7q_n + 0,5p_n.$$

4. D'après les questions précédentes :

$$q_{n+1} = 0,7q_n + 0,5(1 - q_n) = 0,2q_n + 0,5.$$

$$5. \quad u_{n+1} = q_{n+1} - 0,625 = 0,2q_n - 0,125 \\ = 0,2(q_n - 0,625) = 0,2u_n$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme u_1 .

$$6. \quad 0 < 0,2 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$q_n = u_n + 0,625 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0,625$$

$$p_n = 1 - q_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,375$$

A long terme, il y a 62,5% de chance pour que l'individu interrogé choisisse le modèle b et 37,5% qu'il choisisse le modèle a .

EXERCICE 371

$$1. \quad \text{Si } u_0 = 4 \text{ alors } u_1 = 1 + 3 = 4$$

Supposons que $u_n = 4$ alors $u_{n+1} = 1 + 3 = 4$

Ainsi si $u_0 = 4$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4$

2. On suppose $u_0 \neq 4$.

a. Soit une suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4$

$$\text{On a alors } v_{n+1} = \frac{1}{4}u_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4)$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4$

$$\text{b. } u_n = v_n + 4 = 4 + (u_0 - 4) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\text{c. } 0 \leq \frac{1}{4} < 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

On en déduit alors que (u_n) tend vers 4 lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 372

1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+8} = (-1)^{n+8} + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n + 2\pi\right)$$

$$u_{n+8} = (-1)^n + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) = u_n.$$

L'affirmation est FAUSSE.

2. Pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leq 1$ d'où $-3 \leq u_n \leq 3$. L'affirmation est VRAIE.

$$3. \quad u_0 = 1, u_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ et } u_2 = 3$$

$$u_1 - u_0 < 0 \text{ et } u_2 - u_1 > 0$$

La suite (u_n) n'est donc pas monotone.

L'affirmation est FAUSSE.

$$4. \quad -\frac{3}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

L'affirmation est VRAIE.

☞ Ce théorème sera vu l'an prochain sous le nom de « théorème des gendarmes » ou « théorème d'encadrement ».

EXERCICE 373

$$1. \quad a^2 = 7 + 4\sqrt{3}, b^2 = 7 - 4\sqrt{3},$$

$$a^3 = 26 + 15\sqrt{3} \text{ et } b^3 = 26 - 15\sqrt{3}.$$

2. Supposons qu'il existe deux entiers u_n et v_n tels que

$$a^n = u_n + v_n\sqrt{3} \text{ et } b^n = u_n - v_n\sqrt{3},$$

$$\text{alors } a^{n+1} = (2u_n + 3v_n) + (u_n + 2v_n)\sqrt{3}$$

$$= u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{3}$$

$$b^{n+1} = (2u_n + 3v_n) - (u_n + 2v_n)\sqrt{3} = u_{n+1} - v_{n+1}\sqrt{3}.$$

$$\text{avec } u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

$$3. \quad u_{n+1}^2 - 3v_{n+1}^2 = (2u_n + 3v_n)^2 - 3(u_n + 2v_n)^2 \\ = u_n^2 - 3v_n^2$$

$$\text{La suite est constante d'où } u_n^2 - 3v_n^2 = u_1^2 - 3v_1^2 = 1$$

$$u_n v_{n+1} - u_{n+1} v_n = u_n(u_n + 2v_n) - (2u_n + 3v_n)v_n$$

$$= u_n^2 - 3v_n^2 = 1.$$

$$4. \quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{u_n^2 - 3v_n^2}{(u_n - v_n\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(u_n - v_n\sqrt{3})^2} \text{ la fraction est irréductible.}$$

EXERCICE 374

1. $AB = 4$, $BC = 8$ et d'après le théorème de Pythagore $AC = 4\sqrt{3}$

En calculant l'aire du triangle ABC de deux manières, on obtient $AB \times AC = BC \times H_1 H_2$

d'où $\ell_1 = H_1 H_2 = \frac{16\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}$. L'affirmation est FAUSSE.

2. Par construction $H_0 H_1 H_2$ est rectangle en H_2

$$H_0 H_2 = \sqrt{AB^2 - H_1 H_2^2} = 2$$

$$\cos ABH_2 = \cos ABC = \frac{1}{2} \text{ donc } \widehat{H_1 H_0 H_2} = 60^\circ$$

Par construction tous les triangles $H_n H_{n+1} H_{n+2}$ sont rectangles en H_{n+2} et

$$\widehat{H_{n+1} H_n H_{n+2}} = 60^\circ \text{ donc}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $H_n H_{n+1} H_{n+2}$ est un demi-triangle équilatéral. L'affirmation est VRAIE.

3. D'après ce qui précède, $l_{n+1} = l_n \times \sin(60) = \frac{l_n \sqrt{3}}{2}$.

La suite (ℓ_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'affirmation est VRAIE.

4. $L_n = 4 \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{8}{2 - \sqrt{3}} =$

$$8(2 + \sqrt{3}) < 30.$$

L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 375

Partie A : Un premier modèle

1. $v_{n+1} = 1,05v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05. $v_n = 12 \times 1,05^n$.
2. $v_{35} \approx 66,19 > 60$, ce modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : Un second modèle

1. a. La fonction g est dérivable sur $[0; 60]$,
 $g'(x) = \frac{1,1}{605} (605 - 2x) > 0$ donc g est croissante sur $[0; 60]$.

b. $g(x) = x \Rightarrow x \left(1 - \frac{1}{55}x\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55$

2. a. $u_1 = g(u_0) = 12,938$ à 10^{-3} près.

En 2017, la population sera de 12938 individus.

b. D'après la question 1.a, la fonction g est croissante sur $[0; 55]$, de plus $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$

On en déduit que $0 \leq u_n \leq 55 \Rightarrow 0 \leq g(u_n) \leq 55$.

c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 55$

c. $u_{n+1} - u_n = \frac{0,1}{55} u_n (55 - u_n) > 0$

donc la suite (u_n) est croissante.

d. La suite (u_n) est croissante et majorée par 55, elle est donc convergente.

☞ Cette propriété sera vu l'an prochain.

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. D'après la question 1.a, $\ell = 55$

3.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
Tant Que $u < 50$
$u \leftarrow 1,1 * u - 1,1 * u^2 / 605$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant Que
Afficher n

EXERCICE 376

Partie A

1. $u_1 = 1,03u_0 = 1545$, $u_2 = 1,03u_1 \approx 1591$
 $u_3 \approx 1639$ en arrondissant le score au point supérieur.
2. $v_1 = v_0 + 70 = 1070$, $v_2 = v_1 + 70 = 1140$
 $v_3 = 1210$.
3. $u_{n+1} = 1,03u_n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$
 $v_{n+1} = v_n + 70$, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 70$.
4. D'après la question précédente : $u_n = 1500 \times (1,03)^n$
 $v_n = 1000 + 70n$.
5. $u_{13} = 2203 > 2000$ et $v_{13} = 1910 < 2000$
 Seul Ulysse sera sélectionné pour participer à la finale du 14 juillet.
6. A l'aide de la calculatrice, on obtient $u_9 \approx 1957$ et $u_{10} \approx 2016$, Ulysse sera qualifié le 10 juillet
 $v_{14} = 1980$ et $v_{15} = 2050$, Victor n'atteindra le score fatidique des 2000 points que le 15 juillet.

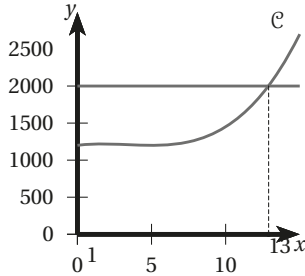
Partie B

1. a. f est dérivable sur $[0; 15]$ et $f'(x) = 3x^2 - 20x + 25$ la dérivée de la fonction f sur $[0; 15]$.
- b. En calculant le discriminant de $f'(x)$, nous obtenons deux racines : 5 et $\frac{5}{3}$ d'où la factorisation :
 $f'(x) = (3x - 5)(x - 5)$.

c.

x	0	$\frac{5}{2}$	5	15
$f'(x)$	+	0	-	0
f	1200	$\frac{32900}{27}$	1200	2700

2. La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f précédente.



À l'aide de cette courbe, nous obtenons une solution : $x \approx 13$.

3. a. $f(0)$ représente le nombre de points obtenus par Fabrice le 30 juin.
 b. D'après la question 2., Fabrice sera sélectionné le 13 juillet.
 Le premier sélectionné sera donc Ulysse.

EXERCICE 377

Partie A. Croissance des lapins

1. Il y a un couple les premier et deuxième mois soit $F_1 = 1$, $F_2 = 1$,
 le troisième mois, ce couple donne naissance à un nouveau couple soit $F_3 = 2$
 le quatrième mois le premier couple donne naissance à un nouveau couple soit $F_4 = 3$.
 2. Le mois $n + 2$, les couples nés au plus tard le mois n donnent naissance à autant de couples soit F_n d'où $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour $n \geq 1$.
 3.

n	1	2	3	4	5	6	7
F_n	1	1	2	3	5	8	13
n	8	9	10	11	12	13	14
F_n	21	34	55	89	144	233	377
n	15	16	17	18	19	20	21
F_n	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

Partie B : La suite de Fibonacci

1. En résolvant l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ par la méthode du discriminant, on obtient deux solutions $x_1 = \alpha$ et $x_2 = \beta$.

2. a. α solution de l'équation donc $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ soit encore $\alpha^2 = \alpha + 1$
 b. de même $\beta^2 = \beta + 1$
 c. $\alpha + \beta = 1$ la somme des deux racines correspond à l'opposé du coefficient du terme x dans l'équation.
 d. $\alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
 e. $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha + \beta + 2 = 3$
 3. Pour prouver l'égalité : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$ nous allons faire une démonstration par récurrence :

Initialisation : Vérifions que la propriété est vérifiée pour F_1 et F_2

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1 = F_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^2 - \beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha + 1 - \beta - 1) = 1 = F_2$$

Hérédité : Montrons que si la propriété est vérifiée jusqu'au rang $n + 1$ alors elle sera vraie au rang $n + 2$

On suppose que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$ et

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$$

alors $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n (\alpha + 1) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n (\beta + 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n \alpha^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n \beta^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})$$

la propriété est donc vérifiée au rang $n + 2$

Conclusion : La propriété est vraie aux rangs 1 et 2 et est héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

$$\text{Ainsi } \forall n \geq 1, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n)$$

$$\begin{aligned} 4. F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} &= \frac{1}{5} \alpha^{n-1} \beta^{n-1} (-2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2) \\ &= (\alpha\beta)^{n-1} \\ &= (-1)^n = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} \pm 1.$$

EXERCICE 378

1. $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ et $u_5 = 5$.
 2. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.
 3. $v_{n+1} + v_n = \lambda \alpha^{n+1} + \mu \beta^{n+1} + \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$
 $= \lambda \alpha^n (\alpha + 1) + \mu \beta^n (\beta + 1)$

$$v_{n+1} + v_n = (\lambda\alpha^{n+2} + \mu\beta^{n+2}) = v_{n+2}$$

(v_n) est donc solution de (1).

4. $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$ alors λ et μ vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 1 \end{cases}$$

La résolution du système permet d'obtenir

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$.

5. Immédiat en factorisant par α^n .

6. $\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, on en déduit alors $0 < \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} < 1$.

7. $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$.

EXERCICE 379

1. $u_1 = 2019, u_2 = 86, u_3 = 100, u_4 = 1$.
pour tout $n \geq 4, u_n = 1$
2. a. $u_1 = 89, u_2 = 145, u_3 = 42, u_4 = 20, u_5 = 4, u_6 = 16, u_7 = 37, u_8 = 58, u_9 = 89 = u_1, u_{10} = u_2 = 145$.
b. $2019 = 8 \times 252 + 3$ d'où $u_{2019} = u_3 = 42$.
3. a. Si $u_1 < 10^{11}$ alors $u_2 \leq 10 \times 9^2$ donc $u_2 < 1000$
 u_2 étant un nombre à maximum trois chiffres u_3 sera inférieur ou égale à 3×9^2 donc inférieur à 1000
On en déduit que pour tout $n \geq 2, u_n < 1000$.
- b. *def* suite(u, n) :
for i in range(1, n) :
 $un = u \% 100$
 $cent = u // 100$
 $dix = (u - cent * 100) // 10$
 $u = un * 2 + dix * 2 + cent * 2$
print("u = ", u)
- c. Il suffit de calculer $u_2 = 285$ et de changer «range(2, n)». On obtient alors $u_{2019} = 145$.

EXERCICE 380

1. a. Il y a deux possibilités pour chaque chiffre, soit 2^n mots de n chiffres.
b. Considérons un mot de 4 chiffres :
• si le premier chiffre est 0, si on ne veut pas deux chiffres consécutifs égaux, le suivant est 1, le troisième est 0;

• si le quatrième chiffre est 1 alors le mot comporte deux bloc 01;

• si le quatrième chiffre est 0 alors le mot comporte deux 0 consécutifs.

Le raisonnement est analogue si le premier chiffre est 1.

2. $P(000) = (01)(01)(01) = 010101$,

$P(111) = 101010$

$P(1001) = 10010110$.

3. a. $t_1 = P(0) = 01, t_2 = P(01) = 0110$

$t_3 = P(0110) = 01101001$.

b. t_0 comporte 1 chiffre, t_1 comporte 2 chiffres, t_2 comporte 4 chiffres.

A chaque étape, on remplace chaque chiffre par deux chiffres, on double le nombre de chiffres donc t_n comporte 2^n chiffres.

c. Dans t_1 il y a autant de 0 que de 1. Cette propriété est héréditaire puisqu'à chaque étape chaque 1 produit un 0 et chaque 0 produit un 1. Pour tout $n > 0$, il y a donc toujours autant de 1 que de 0 dans chaque mot t_n de la suite de Protéus.

4. a. $P(\overline{0}) = P(1) = 10 = \overline{P(0)}$

$P(\overline{1}) = P(0) = 01 = \overline{P(1)}$.

b. Pour tout mot $m, P(\overline{m}) = \overline{P(m)}$.

c. $t_1 = 01, t_2 = 0110$ et $t_3 = 01101001$

$t_2 = t_1 \overline{t_1}$ et $t_3 = t_2 \overline{t_2}$.

d. Si un mot est de la forme $m\overline{m}$ alors

$P(m\overline{m}) = P(m)P(\overline{m}) = P(m)\overline{P(m)}$ et donc la propriété est héréditaire, soit pour tout $n > 0, t_{n+1} = t_n \overline{t_n}$

e. m et $\overline{m}$ ont autant de 0 que de 1, un mot quelconque t_n a donc autant de 0 que de 1.

f. 2019 est impair, les deux derniers chiffres du mot t_{2019} sont donc 01.

EXERCICE 381

1. a. $9 - 28 - 14 - 7 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$

b. Les étapes du vol sont données ci-dessus,

l'altitude maximale du vol : 52

la durée du vol en altitude : 2

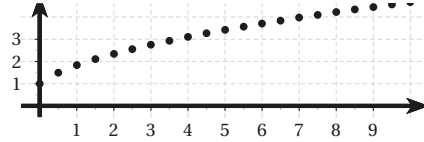
la durée du vol : 19.

2. a. $1 - 4 - 2 - 1$.

- b. altitude maximale du vol : 4,
durée du vol en altitude : 3 et la durée du vol : 3.
3. $u_{n+1} = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$
4. *def* Syracuse(u) :
 while $u > 1$:
 if $u \% 2 == 0$:
 $u = u/2$
 else :
 $u = 3 * u + 1$
 print(u)
5. *def* Syracuse2(n) :
 altitude = n
 dureeVol = 0
 while $u > 1$:
 if $u \% 2 == 0$:
 $u = u/2$
 else :
 $u = 3 * u + 1$
 dureeVol = dureeVol + 1
 if $u > \text{altitude}$:
 altitude = u
 print("altitude max = ", altitude)
 print("duree de vol = ", dureeVol)

EXERCICE 382**Partie A**

1. $f(0) = 1$ d'où $x_0 = 0$ et $y_0 = f(x_0) = 1$.
2. Par définition de la tangente au point d'abscisse x_n , on peut écrire $f(x_{n+1}) = f(x_n) + hf'(x_n)$
D'autre part f vérifie (1) donc $f'(x_n) = \frac{1}{f(x_n)}$, d'où
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0,5}{y_n}$$
3. $M_1(0,5;1,5)$, $M_2(1;1,833)$, $M_3(1,5;2,106)$,
 $M_4(2;2,343)$, $M_5(2,5;2,557)$, $M_6(3;2,752)$
 $M_7(3,5;2,934)$, $M_8(4;3,104)$, $M_9(4,5;3,266)$
 $M_{10}(5;3,419)$, $M_{11}(5,5;3,565)$, $M_{12}(6;3,705)$
 $M_{13}(6,5;3,840)$, $M_{14}(7;3,970)$, $M_{15}(7,5;4,096)$
 $M_{16}(8;4,218)$, $M_{17}(8,5;4,337)$, $M_{18}(9;4,452)$
 $M_{19}(9,5;4,564)$, $M_{20}(10;4,674)$

**Partie B**

1. Supposons que la fonction f vérifie (1) et s'annule en α réel strictement positif
alors $f(\alpha) = 0$ et $f(\alpha)f'(\alpha) = 1$ ceci est impossible, on en déduit donc que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.
2. On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$
Or f est dérivable et $f(0) = 1 > 0$ il existe donc au moins un réel $\beta \in [0; a]$ tel que $f(\beta) = 0$.
3. La conclusion de la question 2. contredit la question 1., la fonction f est donc strictement positive.
De plus $f'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$ donc f strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 383

1. $P_2(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$
 $P_3(x) = (x^2 - 1)^2((x^2 - 1)^2 - 2)$
 $= (x^2 - 1)^2(x^2 - 1 - \sqrt{2})(x^2 - 1 + \sqrt{2})$.
2. $P_1(x) = 0$, a pour ensemble de solutions $\mathcal{Z}_1 = \{-1; 1\}$
 $P_2(x) = 0$ a pour ensemble de solutions
 $\mathcal{Z}_2 = \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$
 $P_3(x) = 0$ a pour ensemble des solutions est
 $\mathcal{Z}_3 = \{-1; 1; \sqrt{1+\sqrt{2}}; -\sqrt{1+\sqrt{2}}\}$
3. $P_1(x) = 1$ a pour ensemble de solutions
 $\mathcal{U}_1 = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
 $P_2(x) = 1 \iff (x^2 - 1 - \sqrt{2})(x^2 - 1 + \sqrt{2}) = 0$,
l'équation a pour ensemble de solutions
 $\mathcal{U}_2 = \{-\sqrt{1+\sqrt{2}}; \sqrt{1+\sqrt{2}}\}$
 $P_3(x) = 1$
 $\iff (x^2 - 1 - \sqrt{1+\sqrt{2}})(x^2 - 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}) = 0$,
l'ensemble de solutions
 $\mathcal{U}_3 = \{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}; -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\}$
4. L'équation $P_{2019}(x) = 0$ s'écrit encore
 $(P_{2018}(x) - 1)(P_{2018}(x) + 1) = 0$.
Les solutions de $P_{2018}(x) = -1$ sont les solutions de

$$P_{2017}(x) = 0$$

On remarque que si l'on retrouve les solutions de $P_{2019}(x) = 0$ parmi les solutions de $P_{2017}(x) = 0$, en poursuivant le processus on va retrouver les solutions de $P_1(x) = 0$. Ainsi 1 et -1 sont racines de P_{2019} .

$$5. P_{2018}(x) = 1 \iff P_{2017}^2(x) = 2$$

Il y a deux catégories de solutions :

- les solutions de l'équation $P_{2017}(x) = \sqrt{2}$ (E_1)
- les solutions de l'équation $P_{2017}(x) = -\sqrt{2}$ (E_2)

Les solutions de (E_1) sont les solutions de

$$P_{2016}^2 = 1 + \sqrt{2}$$

Les solutions de (E_2) sont les solutions de

$$P_{2016}^2 = 1 - \sqrt{2} < 0, \text{ il n'y a pas}$$

Premier bilan : l'ensemble des solutions de $P_{2019}(x) = 0$ est la réunion de l'ensemble des solutions de $P_{2017}(x) = 0$ et de l'ensemble des solutions de $P_{2017}(x) = \sqrt{2}$. Ces deux ensembles sont disjoints.

Les solutions de (E_1) sont les solutions de

$$P_{2016}^2(x) = 1 + \sqrt{2} \text{ c'est-à-dire les solutions de}$$

- $P_{2016}^2(x) = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ (E'_1)
- $P_{2016}^2(x) = 1 - \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ (E'_2)

$1 - \sqrt{1 + \sqrt{2}} < 0$ donc (E'_2) n'a pas de solution réelle.

Les solutions de (E'_1) sont celles de

$$P_{2016}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} \text{ ou de}$$

$$P_{2016}(x) = -\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

De proche en proche, on en arrive aux solutions de

$$P_1(x) = a \text{ où } a \text{ est un réel supérieur à } 1.$$

Il y en a donc 2.

Si on note S_n le nombre de solutions de l'équation $P_n(x) = 0$, on a : $S_{2019} = S_{2017} + 2$

La suite des termes d'indices impairs est une suite arithmétique de raison 2.

Comme $S_1 = 2$ on a $S_{2019} = 2020$.

EXERCICE 384

$$1. u_3 = au_2 + bu_1$$

$$u_4 = (a^2 + b)u_2 + abu_1$$

$$u_5 = (a^3 + 2ab)u_2 + (a^2b + b^2)u_1$$

$$u_6 = (a^4 + 3a^2b + b^2)u_2 + (a^3b + 2ab^2)u_1$$

$$u_7 = (a^5 + 4a^3b + 3ab^2)u_2 + (a^4b + 3a^2b^2 + b^3)u_1$$

$$2. \text{ On suppose que } a^2 + 4b > 0$$

a. Le discriminant de l'équation $x^2 - ax - b = 0$ est

positif, l'équation admet donc deux solutions telles que $\text{Somme} = a$ et $\text{Produit} = -b$.

$$b. v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n = \beta(u_n - \alpha u_{n-1}) = \beta v_n$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison β .

c. On démontre de même que (w_n) définie par $w_{n+1} = u_{n+1} - \beta u_n$ est une suite géométrique de raison α .

$$d. v_{n+1} = v_2 \beta^{n-1} = (u_2 - \alpha u_1) \beta^{n-1}$$

$$w_{n+1} = w_2 \alpha^{n-1} = (u_2 - \beta u_1) \alpha^{n-1}$$

e. On en déduit alors

$$u_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} u_2 - \frac{\alpha^{n-1} \beta - \alpha \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} u_1$$

$$3. \text{ On suppose que } a^2 + 4b = 0$$

$$a. \text{ On a } \alpha = \beta = \frac{a}{2} \text{ et } b = -\frac{a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } u_{n+1} - \alpha u_n &= \frac{a}{2} u_n - \frac{a^2}{4} u_{n-1} \\ &= \frac{a}{2} \left(u_n - \frac{a}{2} u_{n-1} \right) \\ &= \alpha (u_n - \alpha u_{n-1}). \end{aligned}$$

b. On pose $u_n = \alpha^n s_n$.

En utilisant la relation précédente, nous obtenons :

$s_{n+1} - s_n = s_n - s_{n-1}$, la suite (s_n) est une suite arithmétique de raison $r = s_2 - s_1 = \frac{u_2 - \alpha u_1}{\alpha^2}$.

$$c. s_n = s_1 + (n-1)r = \frac{u_1}{\alpha} + (n-1) \frac{u_2 - \alpha u_1}{\alpha^2}$$

$$u_n = \alpha^n s_n = \alpha^n \left(\frac{u_1}{\alpha} + (n-1) \frac{u_2 - \alpha u_1}{\alpha^2} \right).$$

EXERCICE 385

$$1. u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}.$$

$$2. v_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1 + 3}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} + v_n$$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}$.

$$3. v_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3} \text{ et } u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = \frac{15 + 4n}{3 + 4n}.$$

$$4. \text{ Pour tout } n \neq 0, u_n = \frac{\frac{15}{n} + 4}{\frac{3}{n} + 4} \text{ on en déduit que}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

EXERCICE 386

$$1. u_2 = 7, u_3 = 32 \text{ et } u_4 = 157.$$

$$2. \text{ L'équation } x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ admet deux solutions } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 5.$$

3. En utilisant les valeurs de u_0 et u_1 , on obtient le système :

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ 5a+b = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$.

On vérifie que si $u_n = \frac{1}{4} \times 5^n + \frac{3}{4}$ et si

$$u_{n+1} = \frac{1}{4} \times 5^{n+1} + \frac{3}{4} \text{ alors } u_{n+2} = \frac{1}{4} \times 5^{n+2} + \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } u_{n+2} &= u_n = \frac{6}{4} \times 5^n + \frac{18}{4} - \frac{5}{4} \times 5^n - \frac{15}{4} \\ &= \frac{1}{4} \times (6-1) 5^{n+1} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \times 5^{n+2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. $u_{15} = \frac{5^{15} + 3}{4} = 7629394532.$

5. $S_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n (5^k + 3) = \frac{5^{n+1} - 1}{16} + \frac{3(n+1)}{4}.$

EXERCICE 387

1. $u_{n+1} - 3 = \frac{3(u_n - 3)}{6 - u_n}$

On obtient alors $v_{n+1} = -\frac{1}{3} + v_n$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{6}$.

2. $v_n = \frac{-2n-1}{6}$
 $u_n = 3 + \frac{1}{v_n} = \frac{3-6n}{-1-2n}.$

3. Pour tout $n \neq 0$, $v_n = \frac{6-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

La suite (u_n) tend vers 3 lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 388

Pour une somme S_n avec $n > 2$, les nombres obtenus se terminent par 1 ou 2. On peut donc les regrouper en deux-sous ensembles qui forment une partition de S_n .

☞ Soit A et B deux sous-ensembles de S , A et B forment une partition de S si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = S$,

Il y a autant de nombres se terminant par 1 que de nombres obtenus par une somme $n-1$, à savoir s_{n-1} .

Il y a autant de nombres se terminant par 2 que de nombres obtenus par une somme $n-2$, à savoir s_{n-2} .

On a donc $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, avec $S_0 = 0$ et $S_1 = 1$, on

reconnaît la suite de Fibonacci.

On obtient alors $S_{12} = 233$.

EXERCICE 389

1. Le plus petit total est obtenu en alternant des « 1 » et des « 2 », les « 2 » apparaissant après un nombre impair de mouvements.

$$S_{min} = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + \dots + 2 + 1 + 2 = 3 \times 1010 = 3030.$$

Le plus grand total est obtenu en alternant des « 3 » et des « 4 », il y a 2019 nombres, il faut donc commencer et finir par « 4 ».

$$S_{Max} = 1 + 4 + 3 + \dots + 4 + 3 + 4 = 5 + 7 \times 1009 = 7068.$$

2. On peut ajouter « 1 » à une somme qui ne contient pas que des « 3 » et des « 4 », c'est-à-dire inférieure à S_{Max} , tous les totaux intermédiaires peuvent être atteints.

EXERCICE 390

1. a. $u_2 = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{9}{2}$

$$u_3 = \frac{3}{2} \times \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{27}{4} - \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

$$u_4 = \frac{3}{2} \times \frac{21}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{8}.$$

b. Démonstration par récurrence :

Initialisation : $u_1 = 3 = \frac{1}{2} \times u_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 0 + 3$ est bien vraie; la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$

on ait $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$.

$$\text{Or } u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \iff u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2} u_n$$

$$\iff u_n = 2(u_{n+1} - 3) \quad (*)$$

On a par définition :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} u_n + 3 \right) - \frac{1}{2} u_n \\ &= \frac{1}{4} u_n + \frac{9}{2}; \end{aligned}$$

En utilisant la relation (*), on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{4} \times 2(u_{n+1} - 3) + \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{2} u_{n+1} + 3. \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est au rang $n+1$. On a donc démontré par récurrence que pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$.

c. Le graphique est en fin d'exercice.

La suite semble être croissante, convergente vers l'ordonnée du point commun aux deux droites c'est-à-dire 6.

$$2. \text{ a. } v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n.$$

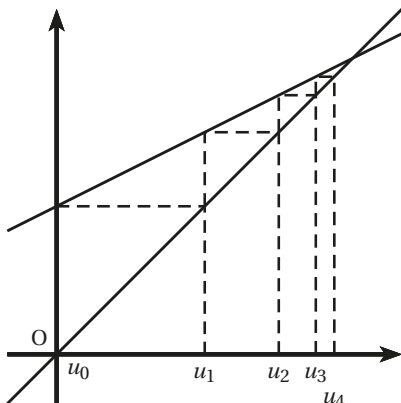
La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -6$.

$$\text{b. } v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{6}{2^n}.$$

$$u_n = v_n + 6 = 6 - \frac{6}{2^n}$$

c. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

De $u_n = v_n + 6$ on en déduit par limite en plus l'infini que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.



EXERCICE 391

Partie A

$$1. \quad u_1 = 0,9u_0(1 - u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,189$$

Il y a 189 tortues en 2001.

$$u_2 = 0,9u_1(1 - u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1 - 0,189) \approx 0,138$$

Il y a 138 tortues en 2002.

2. a. On sait que $0 \leq 1 - u_n \leq 1$, on multiplie les trois membres de cette inégalité par le nombre u_n de l'intervalle $[0; 1]$, donc : $0 \leq u_n(1 - u_n) \leq u_n$.

On en déduit en multipliant par 0,9 l'inégalité

$$0 \leq 0,9u_n(1 - u_n) \leq 0,9u_n \text{ c'est-à-dire}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n.$$

b. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

• Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$

donc $u_0 \leq 0,3 \times 0,9^0$.

La propriété est vraie au rang 0.

• Hérédité

On suppose que, pour $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après la question précédente : $u_{n+1} \leq 0,9u_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

On déduit : $u_{n+1} \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}$.

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.

• Conclusion

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré par récurrence que, pour tout n , $u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$, et on a donc par conséquence : $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.

c. $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0;

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.

On sait que, pour tout n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ donc, on peut déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

☞ On utilise le théorème des gendarmes qui sera étudié ultérieurement.

Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3.

$$u \leftarrow 0,3$$

$$n \leftarrow 0$$

Tant que $u \geq 0,03$ faire :

$$n \leftarrow n + 1$$

$$u \leftarrow 0,9u(1 - u)$$

Fin Tant que

$$\text{Afficher } 2000 + (n - 1)$$

Partie B

$$1. \quad v_{11} = 1,06v_{10}(1 - v_{10}) \approx 0,033;$$

il y aura donc 33 tortues en 2011.

$v_{12} = 1,06v_{11}(1 - v_{11}) \approx 0,034$;
il y aura donc 34 tortues en 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente vers ℓ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 1 - \ell$
on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,06v_n(1 - v_n) = 1,06\ell(1 - \ell).$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que

$$\ell = 1,06\ell(1 - \ell).$$

3. La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a 32 tortues en 2010.

Donc, $\forall n \geq 10$, $v_n \geq v_0$ autrement dit $v_n \geq 0,032$.

Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

EXERCICE 392

1. Cas $n = 1$

P_1 est un hexagone régulier de côtés de longueur 1 donc $p_1 = 3 \times 1 = 3$.

Q_1 est un hexagone régulier, constitué de six triangles équilatéraux de hauteur 1 et de côté $2a$ inconnu.

En utilisant la relation de Pythagore ou $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{1}$ dans le « demi triangle équilatéral »,

on obtient $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2. a. On coupe le cercle en 3×2^n parts égales, l'angle au centre est donc égal à $\frac{2\pi}{3 \times 2^n}$.

b. Pour p_n , le côté utile est obtenu en utilisant le sinus du demi-angle au centre.

Pour q_n , le côté utile est obtenu en utilisant la tangente du même angle.

On obtient alors $p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

et $q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

3. a. $p_n = 3 \times 2^n \sin(2\alpha)$

$$q_n = 3 \times 2^n \tan(2\alpha)$$

$$\text{b. } \sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$$

☞ Rappels : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{c. } \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{3 \times 2^n \sin(2\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{3 \times 2^n \sin \alpha} = \frac{2}{q_{n+1}}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right)$$

$$p_n q_{n+1} = \frac{2p_n^2 q_n}{p_n + q_n} = 2 \times (3 \times 2^n)^2 \frac{\sin^2(2\alpha)}{\cos(2\alpha) + 1} = (3 \times 2^{n+1})^2 \sin^2 \alpha = p_{n+1}^2$$

$$\text{d'où } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}.$$

d. A l'aide des relations précédentes, on obtient

$$q_2 = 24 - 12\sqrt{3}, p_2 = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}.$$

4. *def approx(precision) :*

$$p = 3$$

$$q = 2 * \text{sqrt}(3)$$

$$n = 1$$

while $q - p > \text{precision} :$

$$q = 2 * p * q / (p + q)$$

$$p = \text{sqrt}(p * q)$$

$$n = n + 1$$

print($p, "< pi < ", q, "n = ", n$)

EXERCICE 393

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_{n+1}} > 0$, la suite (u_n) est donc croissante.

2. Par hypothèse (q_n) est une suite d'entiers naturels, croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2 donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{q_0}$

$$\text{On en déduit que } 0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{q_0} \right)^k$$

$$\text{d'autre part } \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{q_0} \right)^k = \frac{1}{q_0} \frac{1 - \left(\frac{1}{q_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{q_0}} < \frac{1}{q_0 - 1}$$

$$\text{D'où } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{q_0 - 1}$$

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{q_0 - 1} \leq 1$, elle a donc une limite qui appartient à l'intervalle $]0; 1]$.

EXERCICE 394

1. a. $P_1 = 0,5$.

$$\text{b. } P_2 = 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,2 = 0,4.$$

$$\text{c. } P_n = 0,6P_{n-1} + 0,2(1 - P_{n-1}) = 0,4P_{n-1} + 0,2$$

2. a. $v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \alpha = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5\alpha - 1}{2}\right)$
 (v_n) est une suite géométrique si $\alpha = \frac{5\alpha - 1}{2}$ donc
 $\alpha = \frac{1}{3}$
 (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{6}$.
 b. $v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$
 $u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$.
 c. On remarque que $P_n = v_n + \frac{1}{3}$
 $0 < \frac{2}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
 P_n tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers l'infini.
 A long terme, il y a une chance sur 3 pour que le tirage soit effectué dans l'urne U_1 .

EXERCICE 395**Partie A : Algorithmique et conjectures**

1. $u \leftarrow \frac{n \times u + 1}{2(n+1)}$
 $n \leftarrow n + 1$.
 2. Il faut déplacer avant le Fin Tant que : « Afficher la variable u ».
 3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B : Etude mathématique

1. Pour tout entier $n \geq 1$,
 $v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1$
 $= \frac{n \times u_n - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n$.
 Cette relation montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$.
 2. On a donc pour tout entier $n \geq 1$,
 $v_n = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$.
 Or $v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{1 + 0,5^n}{n}$.
 3. Comme $-1 < 0,5 < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :
 $u_{n+1} - u_n = \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0,5)^n}{n}$
 $= \frac{n+1}{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}$
 $= -\frac{n(n+1)}{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante (vers zéro).

Partie C : Retour à l'algorithmique

Il suffit de changer la ligne « Tant que $u \geq 0,001$ ».

EXERCICE 396

1. a. On calcule les premiers termes et on obtient :
 $u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33$, $u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$,
 $u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59$, $u_4 = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$.
 b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante.
 2. a. Démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$:
 « Pour tout entier naturel n : $u_n \leq n + 3$ ».
 • **Initialisation** : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, on vérifie bien : $u_0 \leq 0 + 3$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.
 • **Hérédité** : Pour k entier naturel quelconque, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.
 Alors $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}(k+3) + \frac{2}{3}k + 1$
 Ce qui donne : $u_{k+1} \leq k + 3 \leq k + 4$
 On a donc $u_{k+1} \leq (k+1) + 3$, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
 • **Conclusion** : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et ($\mathcal{P}_n$ vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie), c'est-à-dire $\mathcal{P}_n$ est héréditaire, on peut en déduire, par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n , on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \leq n + 3$.
 b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$
 On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
 c. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leq n + 3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n + 3 - u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien croissante.
 3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$
 $= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b. On peut donc en déduire : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Enfin, puisque pour tout n , $v_n = u_n - n$, on en déduit : $u_n = v_n + n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1 , on en déduit que la limite de la suite v est 0 , et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

- 4. a.** S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite (u_n) . Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n , donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premiers entiers naturels. La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est-à-dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 , donc elle vaut :

$$\frac{0+n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b. On en déduit : } T_n &= \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \\ &= \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Puisque, q est entre -1 et 1 , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par opérations sur les limites de suites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$,

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$,

et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on conclut que la suite T converge vers $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 397

- 1. a.** On a pour tout réel x , $\varphi'(x) = -e^{-x} < 0$, donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur I .

$$0,4 \leq x \leq 0,7 \implies \varphi(0,7) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0,4) \text{ soit}$$

$$0,496 < \varphi(x) < 0,671, \text{ donc } \varphi(x) \in I.$$

b. $\varphi'(x) = -e^{-x}$, donc en reprenant les encadrements précédents :

$$0,4 \leq x \leq 0,7 \implies 0,496 < \varphi(x) < 0,671$$

$$\implies -0,671 < -\varphi(x) < -0,496 \implies |\varphi'(x)| < 0,7.$$

c. Par hypothèse $e^{-\alpha} = \alpha$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ , avec $x \in I$ et $\alpha \in I$,

$$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \alpha|$$

$$\iff |\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|.$$

- 2. a.** On a vu que pour $x \in I$, $\varphi(x) \in I$: tous les termes de la suite appartiennent donc à I , le premier terme appartenant lui aussi à I .

L'inégalité des accroissements finis précédente s'écrit donc :

$$|\varphi(u_n) - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha| \text{ soit}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|.$$

• *Initialisation* : De $0,4 < \alpha < 0,7$, on déduit que $|u_0 - \alpha| = |0,4 - \alpha| < 0,3$, donc on a bien

$$|u_0 - \alpha| \geq 0,3 \times 0,7^0.$$

• *Hérédité* : Supposons qu'il existe un naturel p tel que :

$$|u_p - \alpha| \leq 0,3 \times (0,7)^p.$$

Or d'après le résultat précédent :

$$|u_{p+1} - \alpha| \leq 0,7|u_p - \alpha| \leq 0,7 \times 0,3 \times (0,7)^p \text{ ou}$$

$$|u_{p+1} - \alpha| \leq 0,3 \times 0,7^{p+1}.$$

• *Conclusion* : On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 0,3 \times (0,7)^n$.

b. Comme $-1 < 0,7 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, ce qui signifie que la suite u a pour limite α .

- 3.** On a $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ lorsque $0,3 \times (0,7)^n < 10^{-3}$ ou $0,7^n < \frac{10^{-3}}{0,3}$

La suite géométrique de terme général $0,3 \times 0,7^n$ est strictement décroissante, de plus $0,3 \times 0,7^{15} \approx$

$0,001424 > 10^{-3}$ et $0,3 \times 0,7^{16} \approx 0,000997 < 10^{-3}$.

Il faut donc prendre au moins $p = 16$.

On a alors $u_{16} \approx 0,567$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 398

$$1. \quad u_{2018} = u_{1009} = 1 - u_{504} = 1 - u_{252} = 1 - u_{126} \\ = 1 - u_{63} = u_{31} = 1 - u_{15} = u_7 = 1 - u_3 = u_1 = 1.$$

2. $u_{2n+1} = 1 - u_n$ ou $u_n = u_{2n}$ on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n+1} + u_{2n} = 1$, ainsi

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = 1 \\ u_2 + u_3 = 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_{2n} + u_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on en déduit

$$\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = n+1 \text{ d'où } \sum_{k=0}^{2017} u_k = 1009.$$

On démonte par récurrence que pour tout n de

$$\mathbb{N} : u_n \in \{0; 1\}, \text{ or } \sum_{k=0}^{2017} u_k = 1009 \text{ donc il existe } 1009$$

indices n inférieurs ou égaux à 2017 tels que $u_n = 1$ et 1009 indices n tels que $u_n \neq 1$ donc $u_n = 0$, de plus

$u_{2018} = 1$, il existe donc 1009 indices n , inférieurs ou égaux à 2018, tels que $u_n = 0$.

EXERCICE 399

Soit $I_n = u_n^2 + v_n^2$. On vérifie que la suite (I_n) est constante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = I_0 = 52$.

Si k existe alors $I_k = 7^2 + 2^2 = 53$ ce qui est impossible. Il n'existe donc aucun entier naturel k vérifiant $u_k = 7$ et $v_k = 2$.

EXERCICE 400

1. On pose $f(x) = x^n + x^2 + x - 1$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1} + 2x + 1 > 0$ si $x > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

f est dérivable et strictement croissante sur $[0; 1]$, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$, il existe donc un unique $u_n \in [0; 1]$ tel que $f(u_n) = 0$.

L'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet donc une unique solution positive.

2. D'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n$ les solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0,$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$f(\alpha) = \alpha^n + \alpha^2 + \alpha - 1 = \alpha^n > 0$ or f strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $u_n \leq \alpha$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.

$$3. \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, (u_n)^n + (u_n - \alpha) \left(u_n + \frac{1}{\alpha} \right) \\ = (u_n)^n + u_n^2 + u_n \left(-\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - 1 \\ = (u_n)^n + u_n^2 + u_n - 1 = f(u_n) = 0$$

En effet $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ donc $-\alpha + \frac{1}{\alpha} = 1$

4. D'après les questions précédentes $0 \leq (u_n)^n \leq \alpha^n$.

$0 < \alpha < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$,

on en déduit alors que (u_n) converge vers α .

5. On a $(u_{n+1})^{n+1} + u_{n+1}^2 + u_{n+1} - 1 = 0$ donc $(u_{n+1})^{n+1} - (u_{n+1})^n + (u_{n+1})^n + u_{n+1}^2 + u_{n+1} - 1 = 0$ soit encore $(u_{n+1})^n (u_{n+1} - 1) + u_{n+1}^2 + u_{n+1} - 1 = 0$

$(u_{n+1})^n (u_{n+1} - 1) < 0$ car $0 < u_n < 1$

donc $f(u_{n+1}) = u_{n+1}^2 + u_{n+1} - 1 > 0$.

$f(u_n) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $u_n < u_{n+1}$

la suite (u_n) est donc croissante.

6.3 Fonctions**EXERCICE 401**

- $f(1) = -2$.
- $1 < f(-1) < 1,5 \quad 0 < f(0) < 0,5$
 $-3,5 < f(2) < -3 \quad -1,5 < f(3) < -1$.
- $f'(-1) = 0, f'(1) = -2, f'(2) = 0$ et $f'(3) = 4$.
- $f'(0) = f'(1) = -2$.

EXERCICE 402

- $f(-1) = 3, f(0) = 0, f(1) = 1$ et $f(2) = 0$.
- $f'(-1) = -7, f'(1) = 1, f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ et $f'(2) = -4$.
- T_2 d'équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $y = -4x + 8$.
- T_{-1} d'équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = -7x - 4$.

EXERCICE 403

- $f'(0) = 1$
- $f'(x) = 0$ si $x = 1$
- Equation de la droite (AC) : $y = -x + 2$

4. Calcul du coefficient directeur de la droite (AB) :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = e - 2$$

La droite passe par A(0;2) donc l'ordonnée à l'origine est $b = 2$

(AB) a pour équation $y = (e - 2)x + 2$

5. (T) d'équation $y = x + 2$.

EXERCICE 404

La première courbe n'est pas définie en 0, la fonction ne peut donc pas être dérivable en 0.

La seconde fonction est dérivable en 0.

La troisième fonction n'est pas dérivable en 0 (à l'origine, la courbe admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents).

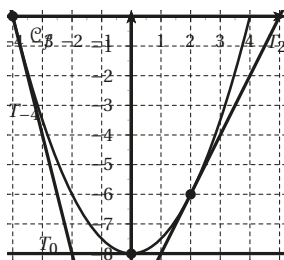
EXERCICE 405

1. $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -e$ et $f'(1) = -2$.
2. T_3 d'équation $y = -2x + 5$

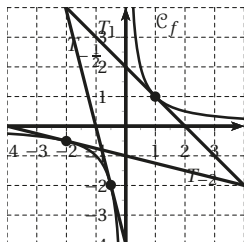
EXERCICE 406

Seule la courbe 2 vérifie la condition $f'(5) = 2$.

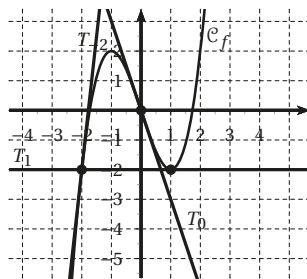
EXERCICE 407



EXERCICE 408



EXERCICE 409



EXERCICE 410

1. Coefficient directeur de la corde (AB) :

$$a = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-5 + 7}{1} = 2.$$
2. Coefficient directeur de la corde (AC) : $a = 5$.
3. Coefficient directeur de la corde (AD) : $a = 9$.
4. Coefficient directeur de la corde (BC) : $a = 6$.
5. Coefficient directeur de la corde (CD) : $a = 13$.

EXERCICE 411

Les points sont de coordonnées A(0; 1),

B(1; 11/2), C(3; 61/4) et D(7; 281/8).

1. Coefficient directeur de la corde (AB) :

$$a = \frac{\frac{11}{2} - 1}{1 - 0} = \frac{9}{2}$$
2. Coefficient directeur de la corde (AC) : $a = \frac{57}{12}$.
3. Coefficient directeur de la corde (AD) : $a = \frac{39}{8}$.
4. Coefficient directeur de la corde (BC) : $a = \frac{39}{8}$.
5. Coefficient directeur de la corde (CD) : $a = \frac{159}{32}$.

EXERCICE 412

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -\frac{3}{7}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 3.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$

EXERCICE 413

- $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0.$
- $f(x) = \frac{2x^2 - x - 15}{x - 3} = \frac{(x-3)(2x+5)}{x-3} = 2x+5$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 11.$
- $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{5}$
 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2\sqrt{5}.$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$
 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{6}.$

EXERCICE 414

- $y_A = f(1) = -2$ $y_B = -17.$
- $f'(1) = -1$ et $f'(-2) = 20.$
- T_A d'équation $y = -x + 1.$
- T_B d'équation $y = 20x + 23.$

EXERCICE 415

- $y_A = 2$ et $y_B = 0.$
- $f'(-1) = 5$ et $f'(0) = 1.$
- T_A d'équation $y = x + 2.$
- T_B d'équation $y = 5x + 5.$

EXERCICE 416

Equation de la tangente à la courbe représentative de f au point A : $y = 4(x-3) - 1.$

EXERCICE 417

- $f'(4) = -5.$
 $y = -5(x-4) - 18$ d'où $f(4) = -18.$

EXERCICE 418

- $f'(-2) = 6.$
 $y = 6(x+2) - 12$ d'où $f(-2) = -12.$

EXERCICE 419

- $f(1) = -3$ et $f(1+h) = 3h^2 + 4h - 3.$
- $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3h + 4.$
- $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4.$
- Equation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 : $y = 4x - 7.$

EXERCICE 420

- $(x-y)(x^2 + xy + y^2)$
 $= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$
 $= x^3 - y^3.$
- $(3+h)^3 - 27 = h(h^2 + 9h + 27).$
 - $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 27.$
 - Equation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 : $y = 27x - 54.$

EXERCICE 421

- $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0,5.$
- $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-4; -2] \cup [1; 6].$
- $f(x) \leq x \iff x \in [2; 6].$

EXERCICE 422

- $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1$ on en déduit alors $f'(a) = 1.$
- $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h.$
 On en déduit alors $f'(a) = 2a.$
- $a > 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ on en déduit
 alors $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$
- $a \neq 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$ on en déduit alors
 $f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$

EXERCICE 423

- Si $x \leq 0, f(x) = -x.$
 Pour tout $a < 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -1$ on en déduit alors $f'(a) = -1.$
 - Si $x \geq 0, f(x) = x.$
 Pour tout $a > 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 1$ on en déduit alors $f'(a) = 1.$
- Le nombre dérivé de f à droite de 0 est différent de celui à gauche de 0, $f(x) = |x|$ n'est donc pas dérivable en 0.
- ☞ La courbe représentative de f admet deux demi-tangentes, de coefficients directeurs différents, au point d'abscisse 0.

EXERCICE 424

- D'après l'exercice 422, pour tout $a > 0, f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$
 Plus a devient proche de 0, plus $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ devient grand, ce

qui s'écrit $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{a}} = +\infty$

La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

☞ La courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

EXERCICE 425

• Si $x \leq 1$, $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Pour tout $a < 1$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{1-a-h} + \sqrt{1-a}}$

on en déduit alors $f'(a) = -\frac{1}{2\sqrt{1-a}}$.

Plus a devient proche de 1 (par valeurs inférieures), plus $-\frac{1}{2\sqrt{1-a}}$ devient grand

ce qui s'écrit $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2\sqrt{1-a}} = -\infty$

• Si $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $a > 1$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}}$

on en déduit alors $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$

Plus a devient proche de 1 (par valeurs supérieures), plus $\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$ devient grand

ce qui s'écrit $\lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{a-1}} = +\infty$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ n'est pas dérivable en 1.

☞ La courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

EXERCICE 426

Les six fonctions premières fonctions sont des fonctions polynômes, donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3$

2. $f(x) = -6$

3. $f(x) = 2x + 1$

4. $f(x) = 6x - 2$

5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

6. $f(x) = 15x^2 + 2$

7. f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 2018x^{2017} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

8. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^2}$.

9. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 492x^{122} - \sqrt{3}.$$

10. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{9}{x^2}$.

11. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 27x^8 - 45x^4.$$

12. f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

EXERCICE 427

Les quatre fonctions sont des fonctions polynômes, donc définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = (6x^2 - 5)(x^4 + 3x^3 - 5x) + (2x^3 - 5x)(4x^3 + 9x^2 - 5)$
 $= x(14x^5 + 36x^4 - 25x^3 - 100x^2 + 50)$

2. $f'(x) = 5(3x^2 + 5)(x^3 + 5x)^4$

3. $f'(x) = (12x^3 + 4x)(6x^3 + 8x) + (3x^4 + 2x^2 + 1)(18x^2 + 8)$
 $= 126x^6 + 180x^4 + 66x^2 + 8$

4. $f'(x) = 2019(18x^5 + 12x^2)(3x^6 + 4x^3 + 3)^{2018}$

EXERCICE 428

1. f , quotient de deux fonctions polynômes, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ et dérivable sur $] -\infty; \frac{3}{5} [$ et sur $] \frac{3}{5}; +\infty [$

$$f'(x) = \frac{3(5x-3) - 5(3x+2)}{(5x-3)^2} = -\frac{19}{(5x-3)^2}$$

2. f , quotient de deux fonctions polynômes, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -2; 2 \right\}$ et dérivable sur $] -\infty; -2 [$, $] -2; 2 [$ et sur $] 2; +\infty [$

$$f'(x) = \frac{2x(4-x^2) + 2x(x^2+3)}{(4-x^2)^2} = \frac{14x}{(4-x^2)^2}$$

3. f , quotient de deux fonctions polynômes, est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{6x^5}{x^{12}} = -\frac{6}{x^7}$$

Autre méthode : $f'(x) = (x^{-6})' = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$

4. f , quotient de deux fonctions polynômes, de plus quel que soit x réel, $2x^2 + 6 \neq 0$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{4x^3(2x^2+6) - 4x(x^4+2)}{(2x^2+6)^2}$

$$f'(x) = \frac{4x^5 + 24x^3 - 8x}{(2x^2+6)^2}$$

EXERCICE 429

1. f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
2. f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$
3. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sqrt{3}.$$
4. f est définie sur $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}.$
5. f est définie sur $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]\frac{5}{8}; +\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{8}{2\sqrt{8x-5}} = \frac{4}{\sqrt{8x-5}}.$$
6. f est définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$,

$$f'(x) = 2x + \frac{-24}{6\sqrt{2-8x}} = 2x - \frac{4}{\sqrt{2-8x}}.$$

EXERCICE 430

Equation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a).$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

1. $f(3) = 3\sqrt{3}$ et $f'(3) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Equation de T_3 : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + 3\sqrt{3}$
Soit après simplification : $y = \frac{\sqrt{3}(x+3)}{2}$
2. $f(9) = 9$ et $f'(9) = \frac{1}{2}$
Equation de T_9 : $y = \frac{1}{2}(x-9) + 9$
Soit encore $y = \frac{x+9}{2}$

EXERCICE 431

$$f'(x) = 2x + 3 - \frac{5}{x^2}.$$

1. $f(1) = 9$ et $f'(1) = 0$
Equation de T_1 : $y = 9.$
2. $f(5) = 41$ et $f'(5) = \frac{64}{5}$
Equation de T_5 : $y = \frac{64}{5}(x-5) + 41$
Soit après simplification $y = \frac{64}{5}x - 23$

EXERCICE 432

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}.$$

1. $f(-2) = 2$ et $f'(-2) = \frac{1}{2}$
Equation de T_{-2} : $y = \frac{1}{2}x + 3$
2. $f(5) = 3\sqrt{2}$ et $f'(5) = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$
Equation de T_5 : $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x + \frac{13\sqrt{2}}{6}$

EXERCICE 433

$$f'(x) = 6x^2 + 4.$$

1. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 4$
Equation de T_0 : $y = 4x + 2$
2. $f(1) = 8$ et $f'(1) = 10$
Equation de T_1 : $y = 10x - 2$
3. On recherche a tel que $f'(a) = 10$
 $6a^2 + 4 = 10 \iff (a = 1 \text{ ou } a = -1)$
Le point recherché est donc le point d'abscisse $-1.$

EXERCICE 434

$$v(t) = 3t^2 - 4t \text{ et } a(t) = 6t - 4$$

1. $x(0) = 7$, $v(0) = 0$ et $a(0) = -4$
2. $x(10) = 807$, $v(10) = 260$ et $a(10) = 56$

EXERCICE 435

$$v(t) = 2t + 3 \text{ et } a(t) = 2$$

1. $x(0) = 5$, $v(0) = 3$ et $a(0) = 2$
2. $x(4) = 33$, $v(4) = 11$ et $a(4) = 2$

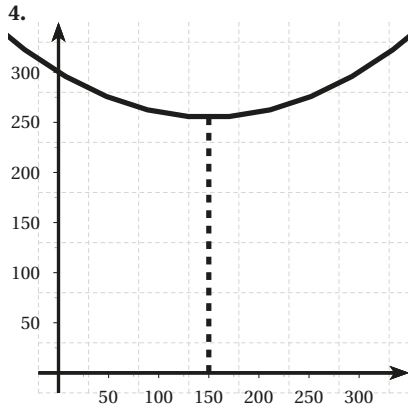
EXERCICE 436

1. $C_m(q) = 3q^2 - 297q + 201$
 $C_m(20) = -4539.$
2. $C'(q) = 3q^2 - 300q + 350$
 $C'(20) = -4450.$
3. $E(q) = C'(q) - C_m(q) = -3q + 149.$
4. $-1 \leq 149 - 3q \leq 1 \iff -150 \leq -3q \leq -148$
 $\iff 50 \geq q \geq \frac{148}{3}$

L'erreur commise sera inférieure à 1 pour 50 objets fabriqués.

EXERCICE 437

- $C'(q) = 0,006q^2 - 1,2q + 300$
 $C'(500) = 1200$
- $C_M(q) = 0,002q^2 - 0,6q + 300$
- $C_M(500) = 500$



- Le coût moyen d'un objet semble minimal pour $q = 150$.

EXERCICE 438

- Soit $u(x) = \lambda f(x)$, u est dérivable sur I .
Soit x un réel appartenant à l'intervalle I .

$$\begin{aligned} (\lambda f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lambda \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda f'(x). \end{aligned}$$

- Soit $v(x) = f(x) + g(x)$, v , somme de fonctions dérivables sur I , est dérivable sur I .

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

EXERCICE 439

f, g , produit de deux fonctions dérivables sur I , est dérivable sur I .

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$(f(x)g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x+h)$$

$$\text{d'où } (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

EXERCICE 440

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- D'après la question précédente :
 $\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2}x + \dots + ax^{n-2} + x^{n-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = (a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1})$
 $= na^{n-1}$
- On en déduit alors $(x^n)' = nx^{n-1}$.

EXERCICE 441

La courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ admet une tangente de coefficient directeur 9 au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a) = 9$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et $f'(x) = 3x^2$.

$$f'(a) = 9 \iff a^2 = 3 \iff (a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}).$$

La courbe admet donc une tangente de coefficient directeur 9 aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

$f'(a) = -3 \iff a^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$, la courbe n'admet donc pas de tangente de coefficient directeur -3 .

EXERCICE 442

La courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 + 2x$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point d'abscisse a si et seulement si $f'(1) = 9$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et $f'(x) = 3x^2 + 2$.

$f'(a) = 1 \iff 3a^2 + 2 = 1 \iff 3a^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$, la courbe n'admet donc pas de tangente de coefficient directeur 1.

$f'(a) = -1 \iff 3a^2 + 2 = -1 \iff 3a^2 = -3$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$, la courbe n'admet donc pas de tangente de coefficient directeur -1 .

EXERCICE 443

- Les fonctions f , g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonctions polynômes).

$$f'(x) = 2x, g'(x) = x + 1 \text{ et } h'(x) = -2x + 4.$$

2. a. $f(1) = 1 + 1 = 2$, $g(1) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$
 $h(1) = -1 + 4 - 1 = 2$

Le point $A(1;2)$ est donc commun à $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

b. $f'(1) = 2$, $g'(1) = 1 + 1 = 2$ et $h'(1) = -2 + 4 = 2$.

Les trois tangentes ont le même coefficient directeur et passe par le même point A , les trois courbes admettent donc en A la même tangente T .

3. Equation de T : $y = 2x$

Position de chacune des courbes par rapport à T :

• $f(x) - y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, $\mathcal{C}_1$ est donc au-dessus de T ,

• $g(x) - y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$, $\mathcal{C}_2$ est donc au-dessus de T ,

• $h(x) - y = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0$, $\mathcal{C}_3$ est donc au-dessous de T .

4. Dans chaque cas il faut rechercher une valeur de x telle que la dérivée en ce point soit égale à 1 :

• $f'(x) = 1 \iff x = \frac{1}{2}$, $\mathcal{C}_1$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$, tangente d'équation : $y = x + \frac{3}{4}$.

• $g'(x) = 1 \iff x = 0$, $\mathcal{C}_2$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0, tangente d'équation : $y = x + \frac{1}{2}$.

• $h'(x) = 1 \iff x = \frac{3}{2}$, $\mathcal{C}_3$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$, tangente d'équation : $y = x + \frac{11}{4}$.

EXERCICE 444

1. On utilise l'approximation $f(a+h) = f(a) + f'(a)h$ en prenant $h = 0,5$

On a donc $f(0,5) = f(0) + 0,5f'(0) = 0$

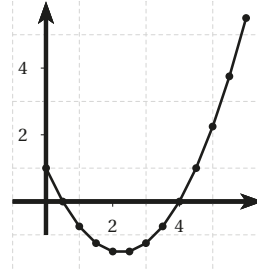
$f(1) = f(0,5) + 0,5f'(0,5) = -0,75$

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1	0	-0,75	-1,25	-1,5

x	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	-1,5	-1,25	-0,75	0

x	4,5	5	5,5	6
$f(x)$	1	2,25	3,75	5,5

2.



3. def points(a, b, h, f, fa):

$x = a$

$f = fa$

while $x < b$:

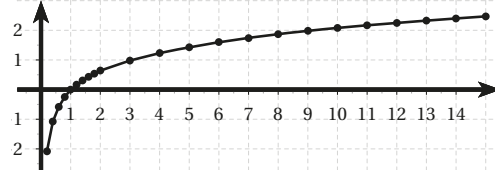
$f_{prime} = x - 2$

$x = x + h$

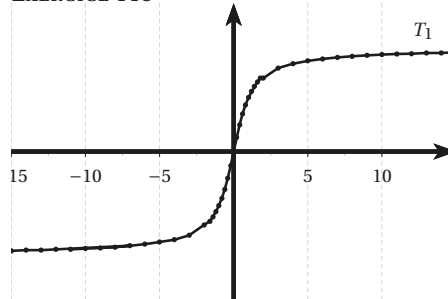
$f = f + h * f_{prime}$

print("x = ", x, "; ", "f = ", f)

EXERCICE 445



EXERCICE 446



EXERCICE 447

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme),

$f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$ et $f(1) = -1$

Equation de T : $y = x - 2$.

2. $(x-1)(x^2+x-2) = x^3+x^2-2x-x^2-x+2 = x^3-3x+2$

3. $f(x) - y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2)$
 $= (x-1)^2(x+2)$.

Si $x \in]-\infty; -2[$, $f(x) - y < 0$, T est au-dessus de $\mathcal{C}$.
 Si $x \in]-2; +\infty[$, $f(x) - y > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T .

EXERCICE 448

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme),
 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$, $f'(-1) = 3$ et $f(-1) = 0$
 Equation de T : $y = 3x + 3$
- $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x - 3)$
 $= (x+1)^2(x-3)$
- $f(x) - y = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)^2(x-3)$
 Si $x \in]-\infty; 3[$, $f(x) - y < 0$, T est au-dessus de $\mathcal{C}$.
 Si $x \in]3; +\infty[$, $f(x) - y > 0$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de T .

EXERCICE 449

Coefficient directeur de la droite (OC) : $a = 5$.

Coefficient directeur de la droite (BD) : $a' = 2$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$\mathcal{C}$ passe par $O(0;0)$, $B(3;-3)$ donc $f(0) = 0$ et $f(3) = -3$

La tangente en O est de coefficient directeur 5 donc $f'(0) = 5$.

La tangente en B est de coefficient directeur 2 donc $f'(3) = 2$.

$$\text{Nous obtenons le système } \begin{cases} d = 0 \\ 27a + 9b + 3c = -3 \\ c = 5 \\ 27a + 6b + c = 2 \end{cases}$$

La résolution permet d'obtenir $a = 1$, $b = -5$, $c = 5$ et $d = 0$.

$$\text{Ainsi } f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x.$$

EXERCICE 450

- $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \frac{1}{g(x)g(x+h)}$
 $= -g'(x) \times \frac{1}{g^2(x)}$
 $= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right)'$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 451

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = -\frac{2018}{x^{2019}}$.
- f est définie sur $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]-\frac{8}{3}; +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+8}}$.
- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{492}{x^{124}} - \sqrt{3}$.
- f est définie sur $\left]-\infty; \frac{4}{5}\right]$ et dérivable sur $\left]-\infty; \frac{4}{5}\right[$,
 $f'(x) = -\frac{5}{2\sqrt{4-5x}}$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = -\frac{12x^3 + 6x}{(x^4 + x^2 + \sqrt{2})^2}$.
- f est définie sur $\left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$,
 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-7}}$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = 6(2x+3)(x^2+3x)^5$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = 9(10x^4 - 9x^2 + 7)(2x^5 - 3x^3 + 7x)^8$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = 5(35x^6 + 12x^3 - 18x)(5x^7 + 3x^4 - 9x^2 - 2019)^4$.

EXERCICE 452

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = (2x + 12x^2 - 20x^3)(3x^6 - 4x^3 + 7)$
 $+ (x^2 + 4x^3 - 5x^4)(18x^5 - 12x^2)$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = \frac{(2x+3)(x^4+2x^2+6) - (x^2+3x-4)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+6)^2}$
 $= \frac{-2x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 6x^2 + 28x + 18}{(x^4+2x^2+6)^2}$.
- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'(x) = (2x+3)(x^5-2x^3+6) + (x^2+3x-4)(5x^4-6x^2)$
- f est définie et dérivable sur $] -\infty; -2[$, sur $] -2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$,
 $f'(x) = \frac{(6x-7)(x^2-4) - (3x^2-7x+2)(2x)}{(x^2-4)^2}$

$$f'(x) = \frac{7(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{7(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}.$$

5. f est définie et dérivable sur $] \infty; -\frac{5}{2}]$, sur $] -\frac{5}{2}; -2]$

et sur $] -2; +\infty[$,
 $\left(\frac{1}{2+x}\right)' = -\frac{1}{(2+x)^2}$ on en déduit alors

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{(2+x)^2}}{\left(2 + \frac{1}{2+x}\right)^2} = \frac{-1}{(2x+5)^2}.$$

6. f est définie et dérivable sur $] \infty; -2]$, sur $] -2; 1]$ et sur $] 1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}.$$

7. f est définie et dérivable sur $] 0; +\infty[$,

$$f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)(x^3 + 2\sqrt{x}) + \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

8. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2(x-1)(4-x^2) - 2x(x-1)^2$$

$$= (x-1)(-4x^2+2x+8).$$

EXERCICE 453

1. Affirmation fausse : la tangente à $\mathcal{C}_v$ au point G est de coefficient directeur 2 donc $v'(3) = 2$.
2. Affirmation vraie : la tangente à $\mathcal{C}_u$ au point O est de coefficient directeur 9 donc $u'(0) = 9$.
3. Affirmation vraie : $v'(1) = 0$ car $\mathcal{C}_v$ admet une tangente horizontale au point C .
D'autre part $\left(\frac{1}{v}\right)'(1) = -\frac{v'(1)}{(v(1))^2} = 0$.
4. Affirmation fausse :
 $(uv)'(3) = u'(3)v(3) + u(3)v'(3) = -1 \times 3 + 1 \times 2 = -1$.

EXERCICE 454

1. La fonction d est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, la vitesse du point A est $v(t) = d'(t) = 4 - 6t$, son accélération est $a(t) = v'(t) = -6$.
2. Le point A s'arrête lorsque $v(t) = 0$ c'est-à-dire pour $t = \frac{2}{3}$. Il a alors parcouru $d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.
3. Le point A repasse par le point O lorsque $d(t) = 0$. L'équation $4t - 3t^2 = 0$ a deux solutions $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{4}{3}$, la première solution correspond à l'instant initial, la valeur recherchée est donc $t = \frac{4}{3}$. A cet ins-

tant la vitesse sera $v\left(\frac{4}{3}\right) = -4$.

4. Variations de la distance :

t	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
$d'(t)$		+	-
d	0	$\frac{4}{3}$	0

Variations de la vitesse : $v'(t) = -6 < 0$ la vitesse est donc strictement décroissante.

EXERCICE 455

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 4$,

$$f'(1) = -1$$

On cherche α tel que $f'(\alpha) = -1$.

Soit encore $\alpha^4 - 6\alpha^2 + 5 = 0$, l'équation a quatre solutions 1, -1, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 4x$ au point d'abscisse 1 est parallèle aux tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

EXERCICE 456

1. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est de coefficient directeur $f'(a)$, $\vec{u}(1; f'(a))$ est donc un vecteur directeur de T_A .
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse b est de coefficient directeur $f'(b)$, $\vec{v}(1; f'(b))$ est donc un vecteur directeur de T_B .
 $T_A \perp T_B \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 1 + f'(a)f'(b) = 0$
 $\iff f'(a)f'(b) = -1$.
2. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$
Recherche des points d'intersection des courbes :
 $f(x) = g(x) \iff x^2 = 1$
Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 1
 $f'(x) = 2x$ d'où $f'(-1) = -2$ et $f'(1) = 2$.
 $g'(x) = -\frac{1}{2}x$ d'où $g'(-1) = \frac{1}{2}$ et $g'(1) = -\frac{1}{2}$.
 $f'(-1)g'(-1) = -1$ et $f'(1)g'(1) = -1$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont donc bien orthogonales.
3. f est définie et dérivable sur $] -\infty; 0]$ et sur $] 0; +\infty[$,
 g est définie et dérivable sur $] -\infty; 2]$ et sur $] 2; +\infty[$,
Recherche des points d'intersection des courbes :
 $f(x) = g(x) \iff x = 1$.

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ d'où } f'(1) = -1,$$

$$g'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \text{ d'où } g'(1) = 1,$$

$f'(1)g'(1) = -1$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont donc orthogonales.

EXERCICE 457

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 2x + 5$. Equation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a : $y = (2a + 5)(x - a) + a^2 + 5a - 2$

Soit encore $y = (2a + 5)x - a^2 - 2$.

2. La tangente passe par l'origine si et seulement si $-a^2 - 2 = 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Il n'existe aucune tangente à la courbe passant par l'origine.

3. La tangente passe par le point de coordonnées $(4; 1)$ si et seulement si $4(2a + 5) - a^2 - 2 = 1$

$$4(2a + 5) - a^2 - 2 = 1 \implies a^2 - 8a - 17 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions :

$$a_1 = 4 - \sqrt{33} \text{ et } a_2 = 4 + \sqrt{33}.$$

Les tangentes aux points d'abscisses $4 - \sqrt{33}$ et $4 + \sqrt{33}$ passent par le point de coordonnées $(4; 1)$.

4. La tangente passe par le point de coordonnées $(-2; 2)$ si et seulement si $-2(2a + 5) - a^2 - 2 = 2$

$$-2(2a + 5) - a^2 - 2 = 2 \implies a^2 + 4a + 14 = 0, \Delta < 0,$$

l'équation n'a pas de solution réelle.

Il n'existe aucune tangente à la courbe passant par le point de coordonnées $(-2; 2)$.

EXERCICE 458

1. Equation de la tangente à $\mathcal{P}_f : y = 2\alpha x - \alpha^2$

$$\text{Equation de la tangente à } \mathcal{P}_g : y = (2\beta - 4)x - \beta^2 - 2$$

$$\text{On en déduit alors que } \begin{cases} a = 2\alpha = 2\beta - 4 \\ b = -\alpha^2 = -\beta^2 - 2 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 2\alpha = 2\beta - 4 \\ -\alpha^2 = -\beta^2 - 2 \end{cases} \implies \alpha = -\frac{3}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$

3. D'après la question précédente, les courbes $\mathcal{P}_f$ et à $\mathcal{P}_g$ admettent une tangente commune d'équation $y = -3x - \frac{9}{4}$.

EXERCICE 459

1. a. On vérifie que $P(2) = 0$.

$$\text{b. } P(x) = (x - 2)(9x^3 + 10x^2 - 4x - 8)$$

c. En utilisant le tableau de la calculatrice et la technique du balayage, on obtient $x = 0,807$ à 10^{-3} près.

2. On utilise la méthode utilisée dans l'exercice précédent :

$$\bullet \text{ Equation de la tangente à } \mathcal{P}_f : y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$$

$$\bullet \text{ Equation de la tangente à } \mathcal{P}_g : y = (2\beta + 4)x - \beta^2$$

$$\bullet \text{ On en déduit alors que } \begin{cases} a = 3\alpha^2 = 2\beta + 4 \\ b = -2\alpha^3 = -\beta^2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 3\alpha^2 = 2\beta + 4 \\ 2\alpha^3 = \beta^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 4) \\ 9\alpha^4 - 8\alpha^3 - 24\alpha^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 0,807$ à 10^{-3} près.

On obtient alors $\beta_1 = 4$ et $\beta_2 = -1,023$ à 10^{-3} près.

Les courbes $\mathcal{P}_f$ et à $\mathcal{P}_g$ admettent deux tangentes communes.

EXERCICE 460

1. a. La fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$, puis strictement décroissante sur $[1; 10]$;

b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures est de 2 mg/l et elle est atteinte au bout d'une heure;

c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l est à peu près $[0,3; 3]$.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est

$$g'(t) = \frac{4(t^2 + 1) - 4t \times 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4t^2 + 4 - 8t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}.$$

b. Pour tout réel t , $(t^2 + 1)^2 > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $1 - t^2$. Le polynôme $1 - t^2$ admet deux racines -1 et 1 (-1 n'étant pas dans l'intervalle $[0; 10]$). Nous en déduisons le tableau de variations :

t	0	1	10
$g'(t)$		+	0 -
g			

La concentration maximale de 2 mg/l est donc atteinte 1 heure après l'injection.

3. Pour calculer le temps d'antibiotique utile, il faut résoudre l'inéquation $g(t) > 1,2$.

$$g(t) > 1,2 \iff \frac{4t}{t^2 + 1} > 1,2$$

$$\iff 4t > 1,2(t^2 + 1) \text{ car } t^2 + 1 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\iff 0 > 1,2t^2 - 4t + 1,2$$

Le polynôme $1,2t^2 - 4t + 1,2$ a pour discriminant

$$\Delta = 10,24 = 3,2^2 \text{ donc ce polynôme admet deux racines } t_1 = \frac{4-3,2}{2 \times 1,2} = \frac{1}{3} \text{ et } t_2 = \frac{4+3,2}{2,4} = 3.$$

Le polynôme est du signe du coefficient de t^2 donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

L'ensemble solution recherché est donc $\left] \frac{1}{3}; 3 \right[$.

La durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique est supérieure à 1,2 mg/l est 2 h 40 minutes car $3 - \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3}$.

EXERCICE 461

1. a. Pour tout réel x , $P'(x) = Q(x) + (x-a)Q'(x)$ d'où $P'(a) = Q(a)$.

b. Si P est factorisable par $(x-a)^2$ alors il existe une fonction polynôme R telle que $P(x) = (x-a)^2 R(x)$.

En dérivant, on obtient

$$P'(x) = 2(x-a)R(x) + (x-a)^2 R'(x).$$

On en déduit alors que $P(a) = P'(a) = 0$.

Réciproquement, si $P(a) = P'(a) = 0$ d'après la question précédente : $P(x) = (x-a)Q(x) = (x-a)^2 R(x)$.

c. Par un raisonnement analogue, on démontre que P est factorisable par $(x-a)^3$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$$

2. $P(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$ et $P(2) = 0$.

a. $P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 80x - 80$ et $P'(2) = 0$.

$$P''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 80 \text{ et } P''(2) = 0.$$

$$P'''(x) = 60x^2 - 120x \text{ et } P'''(2) = 0.$$

Nous avons $P(2) = P'(2) = P''(2) = P'''(2) = 0$, nous en déduisons alors que P est factorisable par $(x-2)^4$.

b. $P(x) = (x-2)^4(x+3)$.

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc 2 (racine quadruple) et -3 .

3. $P(x) = -x^7 + 3x^6 + 6x^5 - 22x^4 + 3x^3 + 39x^2 - 40x + 12$.

a. $P(1) = 0$ et $P(-2) = 0$.

$$P'(x) = -7x^6 + 18x^5 + 30x^4 - 88x^3 + 9x^2 + 78x - 40.$$

$$P'(1) = P'(-2) = 0.$$

$$P''(x) = -42x^5 + 90x^4 + 120x^3 - 264x^2 + 18x + 78.$$

$$P''(1) = 0.$$

$$P'''(x) = -210x^4 + 360x^3 - 528x^2 + 18 \text{ et } P'''(1) = 0.$$

Nous avons obtenu $P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 0$ et $P(-2) = P'(-2) = 0$, nous en déduisons que P est factorisable par $(x+2)^2$ et par $(x-1)^4$.

b. D'après la question précédente,

$$P(x) = (x-1)^4(x+2)^2(3-x).$$

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc 1 (solution quadruple), -2 (solution double) et 3 (solution simple).

EXERCICE 462

1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

2.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

EXERCICE 463

1.

x	-9	-2	2	9	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f					

2.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
f				

EXERCICE 464

1.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f				

$\swarrow \quad \searrow$
2

$\swarrow \quad \searrow$
 $+\infty \quad -\infty$

2.

x	-9	-2	2	9
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$+$
f				

$\swarrow \quad \searrow$
5

$\swarrow \quad \searrow$
 $-3 \quad 5$

EXERCICE 465

1. La fonction f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(x) = 6x - 7$.

3. $f'(x) > 0 \iff x > \frac{7}{6}$.

4.

x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f			

$\swarrow \quad \searrow$
 $+\infty \quad 3 \quad +\infty$

EXERCICE 466

1. $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$

• La fonction f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

• $f'(x) = -4x + 8$.

• $f'(x) > 0 \iff x < 2$.

Nous en déduisons le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f			

$\swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad 11 \quad -\infty$

2. $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$

• La fonction f est définie $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

• $f'(x) = 3 + \frac{1}{x^2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Nous en déduisons le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
f			

$\swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad +\infty \quad -\infty$

EXERCICE 467

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 21$,

 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0$ car $\Delta = -32 < 0$,

la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f		

$\swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad +\infty$

2. $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 6$,

 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 9x^2 + 10x - 4$

$f'(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{61}}{9}$ et

$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{9}$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
f				

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad f(x_1) \quad f(x_2) \quad +\infty$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 9$

 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
f			

$\swarrow \quad \searrow$
 $-\infty \quad 10 \quad +\infty$

4. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 6$

 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 27 = -3(x-3)^2$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
f			

$\swarrow \quad \searrow$
 $+\infty \quad -21 \quad -\infty$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, quel que soit x réel $x^2+1 \neq 0$
 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f			

6. $f(x) = \frac{x}{x+2}$
 f est définie sur $\mathbb{R}/\{-2\}$ et dérivable sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
f			

EXERCICE 468

f admet un minimum au point d'abscisse -1 et un maximum au point d'abscisse 1 .

EXERCICE 469

f admet deux maxima : aux points d'abscisses -3 (maximum absolu) et 1 (maximum local).

f admet deux minima : aux points d'abscisses -1 (minimum local) et 3 (minimum absolu).

EXERCICE 470

f admet trois maxima : aux points d'abscisses $-2, 2$ (maximum local), $1, 4$ (maximum local) et $2, 8$ (maximum absolu).

f admet trois minima : aux points d'abscisses $-2, 8$ (minimum absolu), $-1, 4$ (minimum local) et $2, 2$ (minimum local).

EXERCICE 471

1. a.

x	0	4	10	14
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
f				

- b. L'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur I .

c. $S = [1; 2] \cup [7; 12]$.

2. $f(7) = 2$ et $f'(7) = -\frac{3}{2}$, $\Delta : y = -\frac{3}{2}x - \frac{25}{2}$.

3.

x	1	4	10
$\frac{1}{f}$			

EXERCICE 472

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 9$$

$$\Delta = 28, f'(x) \text{ admet deux racines distinctes}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{7} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{7}.$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
f				

2. a. f admet un minimum local au point d'abscisse $2 + \sqrt{7}$ et un maximum local au point d'abscisse $2 - \sqrt{7}$.

- b. La fonction ne possède pas d'extremum global.

EXERCICE 473

1. f est dérivable sur $]2; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-2)^2}$$

x	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0
f			

2. a. f admet un minimum local au point d'abscisse 3 .

- b. La fonction possède un minimum global au point d'abscisse 3 , pas de maximum global.

EXERCICE 474

1. $f'(1) = \frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} = 6$

$$f'(2) = 0 \text{ (maximum de } f \text{ au point d'abscisse } 2).$$

2. $y = 6x - 4$.

3. f est dérivable et strictement décroissante sur $[-1; 0]$,
 $f(-1) = 6$ et $f(0) = -2$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_1 \in [-1; 0]$.

4.

x	-1	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

5.

x	-1	0	2	$+\infty$
f	6		6	
$f'(x)$	-	0	+	-

Il s'agit de la courbe $\mathcal{C}_1$ qui est la seule dont les ordonnées sont négatives sur $[-1; 0]$ et $[2; +\infty[$, positives sur $[0; 2]$.

EXERCICE 475

Lorsque $-1 \leq x \leq 2$, $1+x \geq 0$ et $2-x \geq 0$.

La fonction f est donc définie sur $[-1; 2]$ et dérivable sur $] -1; 2[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1; 2]$.

EXERCICE 476

1. f est dérivable sur $[-10; 10]$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$
 $f'(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 2$

x	-10	$\frac{2}{3}$	2	10
$f'(x)$	+	0	-	+
f	-1437	$\frac{113}{27}$	3	643

2. f est dérivable et $f(x) > 0$ sur $[\frac{2}{3}; 10]$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

f est dérivable et strictement positive sur $[-10; \frac{2}{3}]$,
 $f(-10) = -1437 < 0$ et $f(\frac{2}{3}) = \frac{113}{27} > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in [-10; \frac{2}{3}]$.

3. En utilisant la calculatrice, nous obtenons :

$$-0,49 < x_0 < -0,48.$$

EXERCICE 477

1. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$

b. $f(-20) = -9198$ et $f(30) = 24302$.

c. D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.

2. a. Lorsque $f(b) \times f(a) \leq 0$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

b. $\frac{a+b}{2}$ est la moyenne des abscisses a et b .

c. Cet algorithme détermine un encadrement à 10^{-5} près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

d. def f(x) :

return $x**3 - 3*x**2 + 2$

def dichot(a,b) :

if $a > b$:

c=b

b=a

a=c

if $f(a)*f(b) < 0$:

while $b-a > 0.00001$:

c=(a+b)/2

if $f(c)*f(a) < 0$:

b=c

else :

a=c

print(a)

print(b)

e.

- Lorsque $a = -20$ et $b = 30$, on obtient 2,73204 et 2,73205
 - Lorsque $a = -20$ et $b = 3$, on obtient -0,73205 et -0,73204.
 - Lorsque $a = 0$ et $b = 3$, on obtient 0 et 3.
- f. Il faut s'assurer qu'il y a une et une seule solution entre a et b .

EXERCICE 478

Soit x le réel recherché, on définit, pour $x \in]0; +\infty[$, la fonction

$$f \text{ par } f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

La somme est donc minimale pour $x = 1$.

EXERCICE 479

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B : $h^2 = 4 - l^2$.
2. On en déduit alors $lh^2 = l(4 - l^2) = -l^3 + 4l$.
3. a. f est dérivable sur $[0; 2]$.

$$f'(x) = 4 - 3x^2 = 3 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - x \right) \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + x \right)$$

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$f'(x)$	+	0	-
f		$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	

b. La résistance est maximale pour $l = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, on obtient alors

$$h = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

4. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ on en déduit alors $\alpha = 54,7^\circ$ à $0,1^\circ$ près.

EXERCICE 480

1. Soit V le volume de la boîte, $V = y \times x \times x$ d'autre part $V = 1$ d'où $y = \frac{1}{x^2}$.

2. $S(x) = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

3. $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{4(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$
(on utilise la formule de factorisation de $a^n - 1$).

4. a.

x	0	1	$+\infty$
$S'(x)$		- 0 +	
S	$+\infty$	6	$+\infty$

b. L'aire sera minimale pour une boîte cubique de côté de longueur 1 dm.

EXERCICE 481

1. $f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(x+4)\sqrt{1-x^2}$

2. f est dérivable sur $]0;1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{-x(x+4)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $-2x^2 - 4x + 1 = 0$ admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}.$$

x	0	x_2	1
$f'(x)$	+	0	-
f	2	$f(x_2)$	0

4. L'aire est maximale pour $x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$.

EXERCICE 482

1. En calculant le volume du parallélépipède, nous obtenons $y = \frac{6}{x^2}$.

2. a. $S(x) = 2(xy + 2xy + 2x^2) = 4x^2 + \frac{36}{x}$ sur $[1;2]$.

b. $S'(x) = 8x - \frac{36}{x^2} = \frac{8}{x^2} \left(x^3 - \frac{9}{2} \right)$.

3. a. $\frac{8}{x^2} > 0$ donc $S'(x)$ a même signe que $x^3 - \frac{9}{2}$.

x	1	2
$u'(x)$		+
u	-3,5	3,5

b. La fonction u est dérivable sur $[1;2]$,

$u(1) = -3,5 < 0$ et $u(2) = 3,5 > 0$, l'équation $u(x) = 0$ a donc une unique solution α dans $[1;2]$

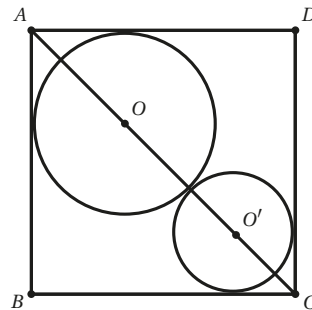
$\alpha = 1,7$ à $0,1$ près.

c. D'après ce qui précède, $u(x) < 0$ sur $[1;\alpha[$ et $u(x) > 0$ sur $] \alpha; 2]$.

4.

x	1	α	2
$S'(x)$	-	0	+
S	40	$\approx 32,7$	34

5. S est minimale pour 1,7 cm à 0,1 près. Cette aire est égale à 32,7 cm² à 0,1 près.

EXERCICE 483

• Les centres O et O' des cercles sont à égale distance des côtés AB et AD pour l'un, CB et CD pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale AC et les rayons r et r' des cercles vérifient $OA + r + r' + OC = a\sqrt{2}$

$$OA = r\sqrt{2} \text{ et } OC = r'\sqrt{2}.$$

On en déduit alors que $r + r' = a(2 - \sqrt{2})$.

• Les cercles sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur a , leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$.

On en déduit que chaque rayon appartient à l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right); \frac{a}{2} \right]$.

- La somme des aires des deux cercles est

$$S = \pi(r^2 - r'^2) = \frac{\pi}{2}[(r + r')^2 + (r - r')^2]$$

$$= \frac{\pi}{2}[(6 - 4\sqrt{2})a^2 + (r - r')^2].$$

L'aire sera minimale lorsque $r = r' = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et vaut alors

$$S_{\min} = \pi a^2 (3 - 2\sqrt{2}).$$

L'aire sera maximale lorsque r est maximale et r' minimale (ou inversement) c'est-à-dire lorsque $r = \frac{a}{2}$ et $r' = a\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$.

On obtient alors

$$S_{\max} = \frac{\pi}{2}[(6 - 4\sqrt{2})a^2 + (-1 + \sqrt{2})^2 a^2]$$

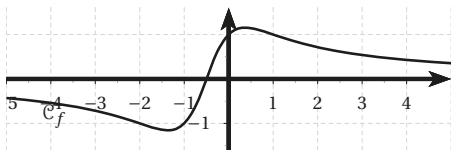
$$= \pi\left[\frac{9}{2} - 3\sqrt{2}\right]a^2.$$

EXERCICE 484

1. La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
f	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0



2. a. $(x-1)(2x+1) \geq 0$ sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et sur $]1; +\infty[$

$$(x-1)(2x+1) < 0 \text{ sur } \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

b. $g(x) = f(x)$ pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$

$$g(x) = -f(x) \text{ pour } x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$$

- c. Pour $x < -\frac{1}{2}$, soit g'_g la fonction dérivée de g à gauche de $-\frac{1}{2}$.

$$g'_g(x) = f'(x) \text{ donc } g'_g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

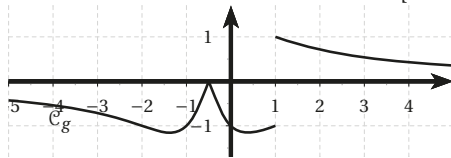
Pour $-\frac{1}{2} < x < 1$, soit g'_d la fonction dérivée de d à droite de $-\frac{1}{2}$.

$$g'_d(x) = -f'(x) \text{ donc } g'_d\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3}.$$

Les nombres dérivés à droite et à gauche de $-\frac{1}{2}$ étant

différents, la fonction g n'est pas dérivable en $-\frac{1}{2}$.

- d. La courbe représentative de g est égale $\mathcal{C}_f$ sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et sur $]1; +\infty[$. Elle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.



EXERCICE 485

Pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - \pi x^2 - \pi(1-x)^2)$

$$f(x) = \pi(-x^2 + x).$$

f dérivable sur $[0; 1]$, $f'(x) = \pi(1 - 2x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{\pi}{4}$	0

L'aire hachurée sera maximale pour $x = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 486

1. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AMN rectangle en A , nous obtenons

$$MN^2 = x^2 + y^2 \text{ d'où } MN = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Comme $CD = CT$, en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles CNT et CND rectangles respectivement en T et D , nous obtenons :

$$TN^2 = CN^2 - CT^2 = CN^2 - CD^2 = DN^2$$

$$\text{donc } TN = DN = 1 - AN = 1 - y.$$

Par un raisonnement analogue, nous obtenons

$$TM = 1 - x$$

$$\text{donc } \overline{MN} = TN + TM = 2 - x - y.$$

2. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y \Rightarrow x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2$
soit après développement et simplifications

$$2x - 2 = y(x - 2).$$

$$\text{Comme } x \in [0; 1], x - 2 \neq 0 \text{ et } y = \frac{2x - 2}{x - 2} = 2 + \frac{2}{x - 2}$$

3. $MN = f(x)$ avec $f(x) = 2 - x - y = -x - \frac{2}{x - 2}$.
 f est dérivable sur $[0; 1]$ et

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{(x - 2)^2} = \frac{2 - (x - 2)^2}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{2}-x+2)(\sqrt{2}+x-2)}{(x-2)^2}.$$

x	0	$2-\sqrt{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$-2+2\sqrt{2}$	1

La distance MN est minimale pour $x = 2 - \sqrt{2}$. Elle est alors égale à $2\sqrt{2} - 2$.

$$\begin{aligned} 4. \text{aire}(AMN) &= 1 - \text{aire}(CDNT) - \text{aire}(CBMT) \\ &= 1 - 2\text{aire}(CNT) - 2\text{aire}(CMT) \\ &= 1 - 2\text{aire}(CNM) \\ &= 1 - MN \times CT = 1 - MN. \end{aligned}$$

L'aire du triangle AMN est donc maximale lorsque MN est minimale, c'est-à-dire lorsque $x = 2 - \sqrt{2}$.
L'aire de AMN est alors égale à $3 - 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 487

1. En appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons $AH = \sqrt{\ell^2 - x^2}$.

$$2. S(x) = 4x^2 + x\sqrt{\ell^2 - x^2}.$$

3. La fonction S est dérivable sur $[0; \ell[$

$$\begin{aligned} S'(x) &= 8x + \sqrt{\ell^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \\ &= \frac{8x\sqrt{\ell^2 - x^2} + (\sqrt{\ell^2 - x^2})^2 + 16x^2 - 17x^2}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{\ell^2 - x^2} + 4x)^2 - (\sqrt{17}x)^2}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{\ell^2 - x^2} + (4 + \sqrt{17})x)(\sqrt{\ell^2 - x^2} + (4 - \sqrt{17})x)}{\sqrt{\ell^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

4.

x	0	$\frac{\ell}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}}$	ℓ
$f'(x)$	+	0	-
f	0	M	$4\ell^2$

$$5. \text{L'aire sera maximale pour } x = \frac{\ell}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}}.$$

EXERCICE 488**Partie A**

1. f est dérivable sur $[1; 7]$,

$$f'(x) = 4,5x^2 - 18x + 24 > 0 \text{ car } \Delta < 0.$$

2.

x	1	7
$f'(x)$	+	
f	64,5	289,5

Partie B

1. c est dérivable sur $[1; 7]$,

$$\begin{aligned} c'(x) &= 3x - 9 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2} \\ c'(x) &= \frac{3(x^3 - 4x^2 + x^2 - 16)}{x^2} \\ &= \frac{3(x^2(x-4) + (x+4)(x-4))}{x^2} \\ &= \frac{3(x-4)(x^2 + x + 4)}{x^2}. \end{aligned}$$

2. a.

x	1	4	7
$f'(x)$	-	0	+
f	64,5	24	$\frac{579}{14}$

b. D'après le tableau précédent, le coût moyen par article sera minimal pour 4000 articles fabriqués.

EXERCICE 489

1. • Si $x \leq 3$, $f(x) = x^2 - 4(-x+3) = x^2 + 4x - 12$,

f dérivable sur $]-\infty; 3[$ et $f'(x) = 2x + 4$,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 10.$$

• Si $x \geq 3$, $f(x) = x^2 - 4(x-3) = x^2 - 4x + 12$,

f dérivable sur $]3; +\infty[$ et $f'(x) = 2x - 4$,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 2.$$

Le nombre dérivé à droite de 3 étant différent de celui obtenu à gauche de 3, la fonction f n'est pas dérivable en 3.

2.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f	$+\infty$		-16	$+\infty$

EXERCICE 490

1. On choisit $R = 20$ cm.

a. D'après le théorème de Pythagore, on a $\ell^2 = R^2 - h^2 = 400 - h^2$.

L'aire de la base vaut $A = \pi \ell^2 = \pi(400 - h^2)$.

Le volume du cône est alors $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$.

b. La fonction V est définie et dérivable sur $[0; 20]$.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \times (400 - 3h^2).$$

x	0	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	20
$f'(x)$		$+$	$-$
f	0	M	0

Le volume maximum est atteint pour $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$,

$$V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{16000\pi\sqrt{3}}{27} \approx 3224 \text{ cm}^3.$$

c. On a vu précédemment que le rayon du cercle de base est $\ell = \sqrt{400 - h^2}$.

Le volume est maximum pour $h = \frac{20\sqrt{3}}{3}$;

$$\text{alors } \ell = \sqrt{400 - h^2} = \sqrt{400 - \frac{400}{3}} = \frac{20\sqrt{6}}{3}.$$

Le périmètre du cercle de base est alors

$$p = 2\pi\ell = 40\pi\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

La longueur du cercle de base est aussi la longueur de l'arc de cercle du carton restant après avoir enlevé le secteur circulaire d'angle au centre α :

$$p = R(2\pi - \alpha).$$

Soit $20(2\pi - \alpha) = 40\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$ d'où $2\pi - \alpha = 2\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$ qui donne

$$\alpha = 2\pi - 2\pi\frac{\sqrt{6}}{3} = 2\pi\frac{3 - \sqrt{6}}{3} \text{ radians}$$

soit encore

$$\alpha = 2\pi\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right) \times \frac{180}{\pi} = 120(3 - \sqrt{6}) \approx 66^\circ$$

2. On reprend les calculs précédents avec R quelconque.

On a :

$$\bullet V(h) = \frac{\pi}{3}(R^2h - h^3)$$

$$\bullet V'(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2)$$

$$\bullet h = \frac{R\sqrt{3}}{3} \text{ seule racine dans l'intervalle } [0; R]$$

$$\bullet \text{ Le maximum est atteint pour } h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

• Le rayon correspondant du cercle de base est

$$\ell = \sqrt{R^2 - h^2} = R\frac{\sqrt{6}}{3}$$

• Le périmètre du cercle de base vaut alors

$$p = 2\pi\ell = 2\pi R\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\bullet \text{ On a alors : } R(2\pi - \alpha) = 2\pi R\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{d'où } \alpha = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$$

La valeur de α ne dépend pas de R .

EXERCICE 491

$$1. \Delta = 4(a^2 - 3b)$$

• Si $b > \frac{a^2}{3}$ alors $\Delta < 0$ et le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

• Si $b = \frac{a^2}{3}$ alors $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $x_0 = -\frac{a}{3}$.

Le trinôme est strictement positif pour tout

$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et nul en x_0 .

• Si $b < \frac{a^2}{3}$ alors $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes x_1 et x_2 (on suppose $x_1 < x_2$).

Le trinôme est strictement positif sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$; il est nul en x_1 et x_2 ; strictement négatif sur $]x_1; x_2[$.

2. Montrons que $(P_1) \Rightarrow (P_2)$:

Si f n'admet pas d'extremum alors f est toujours croissante ou toujours décroissante, $f'(x)$ est donc toujours de même signe.

Réciproquement, montrons que $(P_2) \Rightarrow (P_1)$:

Si $f'(x)$ est toujours de même signe alors f est toujours croissante ou toujours décroissante donc f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

Nous avons ainsi montré que $(P_1) \Leftrightarrow (P_2)$.

3. D'après les questions précédentes f n'admet au-

cun extremum réel si et seulement si le trinôme ne change pas de signe, c'est-à-dire si le discriminant est négatif ou nul.

4. D'après ce qui précède, la fonction f n'admet aucun extremum réel si $b \geq \frac{a^2}{3}$.
On peut choisir par exemple $a = 1$ et $b = 2$.

EXERCICE 492**Partie A**

1. Le coût quotidien de l'entreprise est minimal pour 5 tonnes produites.
2. a. $C(6) = 4$ et $R(6) = 18$,
le résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus est d'environ 1400 €.
b. L'entreprise doit produire et vendre quotidiennement entre 2 et 12 tonnes pour dégager un bénéfice.

Partie B

1. a. g est dérivable sur $[1; 15]$
 $g'(x) = -0,024x^2 - \frac{1}{x^2} < 0$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$.
b. $g'(x) < 0$ sur $[1; 15]$ donc g est décroissante sur l'intervalle $[1; 15]$.
2. a.

x	1	15
$g'(x)$	-	
g	5	-23

- b. $\alpha = 8$ à 0,1 près.
c. Tableau de signe de $g(x)$

x	1	8	15
signe de $g(x)$	+	0	-

Partie C

1. $D(x) = R(x) - C(x) = -0,002x^4 + 4x - \frac{1}{x^2} - 7$.
2. $D'(x) = -4 \times 0,002x^3 + 4 + \frac{1}{x} = g(x)$.

3.

x	1	α	15
$D'(x)$	+	0	-
D	-4	$f(\alpha)$	-48,3

$$f(\alpha) \approx 16,79$$

4. a. L'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal pour 8 tonnes.
b. Le bénéfice sera alors de 1679 €.

EXERCICE 493

x (en mètres)	0	0,5	1	1,5	2,5	4,5
$f(x)$ (en mètres)	1,92	2,3	2,64	2,94	3,42	3,9

1.

5	5,5	6	6,5	8	9	10	11	12
3,92	3,9	3,84	3,74	3,2	2,64	1,92	1,04	0

2. La fonction f est dérivable sur $[0; 12]$
 $f'(x) = -0,16x + 0,8$.
3. $f'(x) > 0 \iff x \leq 5$.
La fonction f est donc croissante sur $[0; 5]$ et décroissante sur $[5; 12]$.
4. La hauteur maximale sera atteinte par le poids pour $x = 5$, elle sera de 3,92 mètres.
5. La valeur de x , solution de l'équation $f(x) = 0$ correspond à la distance des pieds du lanceur au point d'impact du poids avec le sol soit la longueur du lancer.
6. a. $f(x) = -0,08(x^2 - 10x - 24)$
On remarque que -2 est racine du trinôme, sachant que le produit des deux racines est -24 , on en déduit que 12 est la seconde racine.
D'où, $f(x) = -0,08(x+2)(x-12)$.

- b. D'après la question précédente, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes -2 et 12 , or $-2 \notin [0; 12]$
La longueur du lancer est donc de 12 mètres.

EXERCICE 494**Partie A**

1. a. h est dérivable sur $[1; 10]$,
 $h'(x) = 2x - \frac{26}{2\sqrt{26}x} = 2x - \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \left(x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{26}}{4} \right)$.

b.

x	1	$\frac{\sqrt[3]{13}}{2}$	10
$h'(x)$	-	0	+
h	-3,1	-3,15	84,9

c. D'après le tableau de variations précédent,

 $h(x) < 0$ sur $\left[1; \frac{\sqrt[3]{13}}{2}\right]$, h est dérivable et strictement

 croissante sur $\left[\frac{\sqrt[3]{13}}{2}; 10\right]$,

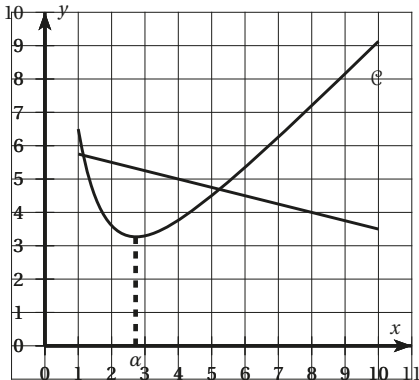
 $f\left(\frac{\sqrt[3]{13}}{2}\right) < 0$ et $f(10) > 0$, l'équation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution α appartenant à $[1; 10]$.
d. $\alpha = 2,72$ à 10^{-2} près.e. $h(x) \leq 0$ sur $[1; \alpha]$ et $h(x) \geq 0$ sur $[\alpha; 10]$.2. f est dérivable sur $[1; 10]$

$$f'(x) = -\frac{26x}{(x^2+1)^2} + 1 = \frac{(x^2+1)^2 - 26x}{(x^2+1)^2}.$$

$$3. \text{ a. } (x^2+1)^2 - 26x = (x^2+1)^2 - (\sqrt{26x})^2 \\ = (x^2 + \sqrt{26x} + 1)(x^2 - \sqrt{26x} + 1).$$

b. $x^2 + \sqrt{26x} + 1 > 0$ sur $[1; 10]$,d'après la question 1. $x^2 + \sqrt{26x} + 1 = 0$ admet une unique solution dans $[1; 10]$, notée α α est donc l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$.

c.



4. $f'(x) \geq 0 \iff x \geq \alpha$.

5.

x	1	2,72	10
$f'(x)$	-	0	+
f	6,5	3,27	9,13

Partie B1. $f(5) = 4,5$ soit un coût de production de 4 €50 pour une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.2. D'après le tableau de variations de la fonction f , le minimum est atteint pour $x = 2,72$. On en déduit donc que la fabrication de 272 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire de production.

Le coût minimal de production d'une coque sera alors de 3 €27.

Partie COn trace les courbes représentatives de f et de g sur la calculatrice (voir graphique précédent). Par lecture graphique, il faut produire entre 115 et 523 coques pour assurer un bénéfice à l'entreprise.**EXERCICE 495**

1. $a^3 \times a^7 \times b^5 \times b^6 = a^{10} b^{11}$

2. $(ab^2)^5 = a^5 b^{10}$

3. $\frac{a^3 b^7}{a^2 b^8} = a b^{-1}$

4. $(a^{-2} b^7)^3 (a^3 b^{-6})^2 = b^9$

5. $a^{39} b^{21} a^{-25} b^{20} a^5 b^8 = a^{19} b^{49}$

6. $\frac{a^3 b^{-2}}{a^7 b^{-3}} = a^{-4} b$

7. $(a^2 b^3)^4 (a^{-3} b^{-8})^7 = a^{-13} b^{-44}$

8. $a^2 b^{-9} b^3 a^6 a^7 b^{-8} = a^{15} b^{-14}$

9. $\left(\frac{a^6 b^5 a^{-6} a^0}{a^2 b^{-3} b^9}\right)^2 = a^{-4} b^{-2}$

EXERCICE 496

1. $\exp(2x) \times \exp(5x) = \exp(7x)$

2. $\exp(3x) \times \exp(-6x) = \exp(-3x)$

3. $(\exp(5x))^2 = \exp(10x)$

4. $\frac{\exp(9x)}{\exp(8x)} = \exp(x)$

5. $\exp(2x) \times \exp(4x) \times \exp(-6x) = \exp(0) = 1$

6. $\exp(5x) \times \exp(3y) \times \exp(z) = \exp(5x + 3y + z)$

7. $(\exp(x) \times \exp(2y) \times \exp(-x))^3 = \exp(6y)$

8. $\frac{\exp(3x) \times \exp(2y)}{\exp(2x) \times \exp(-y)} = \exp(x + 3y)$

EXERCICE 497

1. $(e^{2x+1})^3 \times (e^{-3x})^2 = e^3$

2. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

3. $\frac{e \times e^{2x}}{e^{x+1}} = e^x$

4. $\frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e} = e^{-1}$

5. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = 1 + e^{2x}$

6. $e^0 \times e^{3x} \times e^{2-3x} \times e = e^3$

EXERCICE 498

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$

2. $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}} = e^4$

3. $(e^x)^5 \times e^{-2x} = e^{3x}$

4. $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2 = 2$

5. $\sqrt[3]{e^4} \times (\sqrt[3]{e})^2 = e^2$

6. $\frac{e\sqrt{e}}{e^{1,2} \sqrt[3]{e}} = e^{\frac{29}{30}}$

EXERCICE 499

1. $e^x = -2$ impossible car pour tout réel x , $e^x > 0$
donc $\mathcal{S} = \emptyset$

2. $e^{2x} = e \iff 2x = 1, \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

3. $e^{x^2} = e^9 \iff x^2 = 9, \quad \mathcal{S} = \{-3; 3\}$

4. $e^x - 1 = 0 \iff e^x = e^0, \quad \mathcal{S} = \{0\}$

5. $e^x = e^{-x} \iff x = -x, \quad \mathcal{S} = \{0\}$

6. $e^{-x} = e^3 \iff -x = 3, \quad \mathcal{S} = \{-3\}$

EXERCICE 500

1. $e^{x^2+3x+1} = e^3 \iff x^2 + 3x + 1 = 3$
 $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$

2. $e^{5x} = e^{-3x} \iff 5x = -3x \quad \mathcal{S} = \{0\}.$

3. $e^{x^2+12x+35} = 1 \iff x^2 + 12x + 35 = 0$
 $\mathcal{S} = \{-7; -5\}.$

4. $(e^x - 1)(e^x - e^5) = 0 \iff (e^x = e^0 \text{ ou } e^x = e^5)$
 $\mathcal{S} = \{0; 5\}.$

5. $(e^x + 8)(e^{-x^2+4} - e^{3x}) = 0$
 $\iff (e^x = -8 \text{ ou } e^{-x^2+4} = e^{3x})$

La première équation n'admet pas de solution. La seconde équation admet deux solutions.

$\mathcal{S} = \{-4; 1\}.$

6. $2xe^x - 6e^x = 0 \iff (2x - 6 = 0 \text{ ou } e^x = 0)$

La première équation admet une solution. La seconde équation n'admet aucune solution.

$\mathcal{S} = \{3\}$

EXERCICE 501

1. $e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$

$\mathcal{S} = [0; +\infty[$

2. $e^{2x} < e \iff 2x < 1$

$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$

3. $(2x - 1)e^x > 0 \implies 2x - 1 > 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

4. $e^x - e^{-x} < 0 \iff e^x < e^{-x} \iff x < -x$

$\mathcal{S} =]-\infty; 0[$

5. $(e^x - 1)(e^{-x} - 1) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$e^{-x} - 1$	$+$	0	$-$
$(e^x - 1)(e^{-x} - 1)$	$-$	0	$-$

$\mathcal{S} = \emptyset$

6. $2xe^x - 6e^x \geq 0 \implies 2x - 6 \geq 0 \quad \mathcal{S} =]3; +\infty[$

EXERCICE 502

Les quatre fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = e^x - 2x$

2. $f'(x) = e^x(e^x + 1) + (e^x - 1)e^x = 2e^{2x}$

3. $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$

4. $f'(x) = (e^x - 1)(e^x + x^2) + (e^x - x)(e^x + 2x)$
 $= 2e^{2x} + (x^2 + x - 1)e^x - 3x^2$

EXERCICE 503

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3e^{3x} - 2e^{-2x}$

2. f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(x^2 + 1) - 2x(xe^{-x} + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(-x^3 - x^2 - x + 1)e^{-x} - 2x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 504

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$

Réponse : b.

2. Pour tout réel a , le nombre réel $e^{\frac{a}{2}} = e^{\frac{1}{2} \times a} = \sqrt{e^a}$

Réponse : a.

3. $f(x) = xe^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x} \quad \text{Réponse : c.}$$

4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est donc $y = x$

Réponse : c.

EXERCICE 505

• Montrons que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$

la dérivée de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la fonction

$$x \mapsto -f'(-x)$$

$$\text{alors } \Phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$$

puisque par hypothèse $f' = f$, on a, pour tout x réel,

$$\Phi(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$$

La fonction Φ est donc constante, or $f(0) = 1$ d'où

$$\Phi(x) = \Phi(0) = 1$$

La fonction f ne peut donc pas s'annuler sur $\mathbb{R}$.

• Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

La fonction $h = \frac{g}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$h' = \frac{g'f - fg'}{f^2} = \frac{fg - fg}{f^2} = 0$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, h(x) = h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$$

c'est-à-dire que $g = f$

il existe donc une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle

que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

EXERCICE 506

1. Par définition $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}f(x)$, f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit d'une fonction dérivable par une constante réelle.

$$g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2}f(x) = g(x) \text{ et}$$

$$g(0) = \frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

2. D'après le cours $g(x) = e^x$.

3. $f(x) = 2g(x) = 2e^x$.

4. En procédant de manière analogue, on obtient $h(x) = \frac{1}{3}e^x$.

EXERCICE 507

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = f(a + b - x) \times f(x) \text{ avec } f \text{ fonction exponentielle.}$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto f(a + b - x)$ est la fonction

$$x \mapsto -f'(a + b - x) \text{ soit } x \mapsto -f(a + b - x)$$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi'(x) = -f(a + b - x) \times f(x) + f(a + b - x) \times f(x) = 0$$

La fonction Φ est donc constante.

$$\text{De plus, } \Phi(0) = f(a + b) \times f(0) = f(a + b) \text{ et}$$

$$\Phi(b) = f(a + b - b) \times f(b) = f(a) \times f(b)$$

Or Φ constante donc $f(a + b) = f(a) \times f(b)$.

Ainsi pour tous réels a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

EXERCICE 508

1. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = e^x \times e^{-x}$.

La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= (e^x)' \times e^{-x} + e^x \times (e^{-x})' \\ &= e^x \times e^{-x} - e^x \times e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

la fonction Φ est donc constante,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) &= \Phi(0) = e^0 \times e^0 = 1 \\ \text{donc } e^x \times e^{-x} &= 1 \text{ d'où } e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \end{aligned}$$

2. Pour tous réels x et y , $\frac{e^x}{e^y} = e^x \times \frac{1}{e^y} = e^x \times e^{-y} = e^{x-y}$.

EXERCICE 509

• $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ donc $e^x = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

On en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

La fonction exponentielle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

• $(e^x)' = e^x > 0$, la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 510

1. *def* exp(*n*) :

$u = (1 + 1/n) ** n$

print(*u*)

2. $u_{10} = 2,5937424601000023$,

$u_{20} = 2,653297705144422$,

$u_{50} = 2,691588029073608$.

3. *def* exp() :

$u1 = 2.7182818$

$u2 = 10$

$n = 0$

while *abs*(*u2* - *u1*) > 0.0000001 :

$n = n + 1$

$u2 = (1 + 1/n) ** n$

print(*n*)

on obtient $n = 28823153$.

☞ L'approximation de e par cette méthode est très lente.

EXERCICE 511

1. $(e^{2x})' = (e^x \times e^x)' = e^x \times e^x + e^x \times e^x = 2e^{2x}$.

2. $(e^{(n+1)x})' = (e^{nx} \times e^x)' = ne^{nx} \times e^x + e^{nx} \times e^x$
 $= (n+1)e^{(n+1)x}$.

3. $(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1}{e^x} = -e^{-x}$.

4. $\left(\frac{1}{e^{nx}}\right)' = (e^{-nx})' = -ne^{-nx}$.

5. $f'(x) = (e^{ax+b})' = (e^{ax} \times e^b)' = ae^{ax} \times e^b = ae^{ax+b}$.

EXERCICE 512

1. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

2. P est un point appartenant à la tangente T et d'ordonnée 0, son abscisse vérifie donc

$f'(a)(x-a) + f(a) = 0$ soit $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ car $f'(a) \neq 0$.

3. $|PH| = |x_H - x_P| = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|$

or par hypothèse $|PH| = 1$, on en déduit alors que la fonction f vérifie la condition $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = 1$.

4. D'après la question précédente $\frac{f}{f'} = \pm 1$ on a donc $f' = f$ ou $f' = -f$.

EXERCICE 513

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$f'(x) = -e^{-x} < 0$.

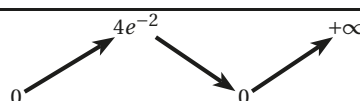
La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$ 	

EXERCICE 514

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,

$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

EXERCICE 515

1. La fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$	-	0	+
ch	$+\infty$ 		

2. La fonction sh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) > 0$.

La fonction sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$sh'(x)$	+	
sh	$-\infty$	$+\infty$

EXERCICE 516

1. $th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.
2. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $ch(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction th est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $$th'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2 (ch(x))^2} = \frac{1}{(ch(x))^2} > 0.$$
- La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$th'(x)$	+	
th	-1	$+1$

3. Voir tableau ci-dessus.

EXERCICE 517

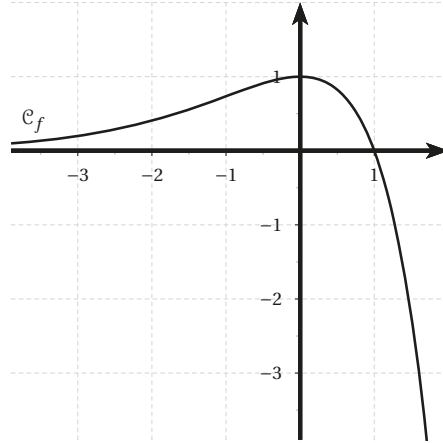
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
f	$0 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow e \rightarrow +\infty$	

EXERCICE 518

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$0 \rightarrow 1 \rightarrow -\infty$		

**EXERCICE 519**

1. Si $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$,
Si $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
2. f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $f'(x) = \frac{(2-x)e^x}{(1-x)^2} > 0$,
 f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.
3. et 4.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		- 0 +	
f	$0 \rightarrow +\infty$		$+\infty \rightarrow e^2 \rightarrow +\infty$	

EXERCICE 520

1. f est dérivable sur $[-2; 1]$
 $f'(x) = 2e^x(e^x - e^1)$.
2. a. $f(0) = 1 - 2e$ d'où $A(0; 1 - 2e)$.
b. $f(1) = e^2 - 2e^2 = -e^2$ d'où $B(1; -e^2)$.

x	-2	1
$f'(x)$	-	0
f	$e^{-4} - 2e^{-1}$	$-e^2$

3. a. $T_0: y = (2 - 2e)x + (1 - 2e)$.
b. $T_1: y = -e^2$.
Le point B est le minimum absolu de la fonction, $\mathcal{C}$ est donc au-dessus de T_1
c. L'abscisse de G vérifie :

$$(2-2e)x + (1-2e) = -e^2 \Rightarrow x = \frac{-(e-1)^2}{2(1-e)} = \frac{e-1}{2},$$

d'où $G\left(\frac{e-1}{2}; -e^2\right)$.

EXERCICE 521

1. Le nombre d'insectes au départ est $f(0) \times 1000 = 25000$, et le nombre d'insectes au bout d'un an est $f(1) \times 1000 \approx 15163$.

Le pourcentage d'évolution est
 $\frac{15163 - 25000}{25000} \times 100 \approx -39,35$.

Le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année est approximativement de 39%.

2. a. La fonction g est dérivable sur $[4; 10]$ et

$$g'(t) = 20 \times (-0,1 \times 2t) e^{-0,1t^2} + 1 = -4te^{-0,1t^2} + 1$$

- b. La fonction g' est strictement croissante sur l'intervalle $[4; 10]$.

$$g'(4) = 1 - 16e^{-1,6} \approx -2,23 < 0 \text{ et}$$

$$g'(10) = 1 - 40e^{-10} \approx 0,998 > 0.$$

On peut en déduire que l'équation $g'(t) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[4; 10]$.

$$\alpha \approx 5,6 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

- c. • $g'(t) < 0$ sur $[4; \alpha]$;

• $g'(t) = 0$ si $t = \alpha$;

• $g'(t) > 0$ sur $[\alpha; 10]$.

- d. On en déduit que :

- la fonction g est strictement décroissante sur $[4; \alpha]$;
- la fonction g est strictement croissante sur $[\alpha; 10]$.

- e. D'après les résultats des questions précédentes, le nombre d'insectes commence à remonter à partir de $t = \alpha$, c'est-à-dire à partir de la sixième année puisque $\alpha \approx 5,6$.

Le traitement semble donc efficace sur la population d'insectes à partir de la sixième année.

EXERCICE 522**Partie A**

1. f est dérivable sur $[0; 3]$ et
 $f'(x) = (x^2 - x)e^x$

x	0	1	3	
$f'(x)$	0	−	0	+
f	−1		$3e^3 - 4$	
		$e - 4$		

2. D'après le tableau de variation, f est dérivable et strictement croissante sur $[1; 2]$,

$f(1) = e - 4 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique x_0 appartenant à $]1; 2[$.

$$x_0 \approx 1,646 \text{ à } 10^{-3}.$$

3. $f(x) < 0$ sur $[0; x_0]$;

$$f(x) = 0 \text{ pour } x = x_0;$$

$$f(x) > 0 \text{ sur }]x_0; 3].$$

Partie B

1. $C_m = \left(1 - \frac{3}{x}\right)e^x + 3 + \frac{4}{x}$.

C_m est dérivable sur $]0; 3]$

$$\begin{aligned} C'_m(x) &= \frac{3}{x^2}e^x + \left(1 - \frac{3}{x}\right)e^x - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 3)e^x - 4}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

D'après la partie précédente, nous en déduisons le tableau de variation de C_m

x	0	x_0	3	
$C'_m(x)$		-	0	+
C_m			$f(x_0)$	

avec $x_0 \approx 1,646$ et $f(x_0) \approx 1,16$.

2. Le coût moyen sera minimum pour une production de 1,646 tonne.

Le coût moyen minimum d'une tonne de ce produit sera alors de 116 milliers d'euros.

Partie C

1. a. $B(x) = 3x - C_T(x) = (3 - x)e^x - 4$

b. $B'(x) = (2 - x)e^x$

x	0	2	3
$B'(x)$	+	0	-
B	-1	$e^2 - 4$	-4

- c. Le bénéfice est maximum pour une production de 2 tonnes.
2. Pour réaliser un gain, l'entreprise doit produire entre 0,5 et 2,7 tonnes.

EXERCICE 523

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

2. D'après la question précédente $f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ on en déduit donc que pour tout x réel, $1 + x \leq e^x$.
3. L'inégalité précédente est vraie pour tout réel x , on a donc aussi $1 - x \leq e^{-x}$
en passant aux inverses, on en déduit que pour $0 < x < 1$, $\frac{1}{1-x} > \frac{1}{e^{-x}}$ soit encore $e^x < \frac{1}{1-x}$.
4. En posant $x = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $0 < x < 1$
D'après l'inégalité de la question 2., on obtient :
 $1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$
D'après l'inégalité de la question 3., on obtient :
 $e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$
Or $\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ d'où par passage à la puissance $n+1$
 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

5. def exp() :

```

u1 = 0
u2 = 1
n = 0
while abs(u2 - u1) > 0.00001 :
    n = n + 1
    u2 = (1 + 1/n) ** (n + 1)
    u1 = (1 + 1/n) ** n
print(u1)
print(u2)
print(n)

```

EXERCICE 524**Partie A**

1. $e^{-\frac{1}{2}x+3} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 6$.
2. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x+3} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}x+3}\right)$.
3. D'après les questions précédentes
 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$

x	0	6	10
$f'(x)$	-	0	+
f	e^3	4	$5 + e^{-2}$

- 4.

Partie B

1. Le coût moyen de fabrication sera minimal pour 6 objets fabriqués.
2. On trace la courbe de f et la droite $y = 5x$, on en déduit que l'atelier doit fabriquer au moins 2 objets.

EXERCICE 525

1. On a $f'(x) = 10e^{u(x)} \times u'(x)$; or
 $u'(x) = -\left(-\frac{1}{10}e^{2-\frac{x}{10}}\right) = -\frac{1}{10}\left(-e^{2-\frac{x}{10}}\right) = -\frac{1}{10}u(x)$.
Donc $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$.
Quel que soit x réel, $e^{2-\frac{x}{10}} > 0$, donc $u(x) < 0$ et quel que soit u , $e^{u(x)} > 0$, on a donc $f'(x) > 0$ la fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. a. $f(20) = 10e^{-e^{2-\frac{20}{10}}} = 10e^{-e^{-2}} = 10e^{-1} = \frac{10}{e}$.

Comme $\frac{10}{e} \approx 3,678$, la taille de la queue du lézard après vingt jours de repousse sera d'environ 3,7 cm.

b. En utilisant la calculatrice, on vérifie que pour de grandes valeurs de x la fonction f tend vers 10, la repousse de la queue du lézard ne dépassera pas 10 cm : la taille de la repousse ne sera jamais égale à 11 cm.

3. a. Comme $\frac{1}{10} > 0$ et $e^{u(x)} > 0$, $f''(x)$ est du signe du produit $u(x)(1 + u(x))$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) < 0$.

D'autre part $1 + u(x) > 0 \Leftrightarrow u(x) > -1$

$$\Leftrightarrow -e^{2-\frac{x}{10}} > -1$$

$$\Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{10}} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{x}{10} < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 20.$$

Ainsi $f''(x) > 0$ sur $[0; 20]$ et $f''(x) < 0$ sur $[20; +\infty[$.
 f' est donc croissante sur $[0; 20]$ et décroissante sur $[20; +\infty[$.

b. D'après le résultat précédent la vitesse est maximale pour $x = 20$: la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

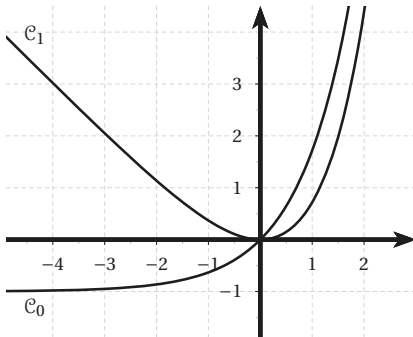
EXERCICE 526

1. $f_0(x) = e^x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'_0(x) = e^x > 0$
 La fonction f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	
f_0	-1	$+\infty$

$f_1(x) = e^x - 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $f'_1(x) = e^x - 1 = f_0(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	-	0	+
f_1	$+\infty$	0	$+\infty$



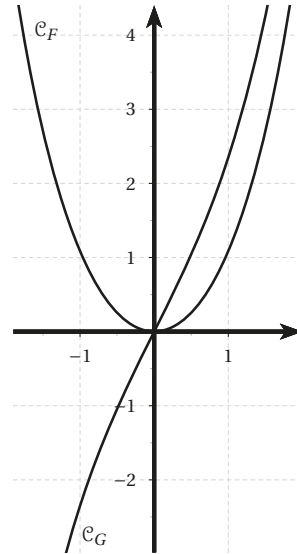
2. **a.** F_n est définie sur $\mathbb{R}$ et

$F_n(-x) = f_n(-x) + f_n(x) = F_n(x)$, la fonction F_n est paire.

- b.** G_n est définie sur $\mathbb{R}$ et

$G_n(-x) = f_n(-x) - f_n(x) = -G_n(x)$, la fonction G_n est impaire.

c. $F_0(x) = f_0(x) + f_0(-x) = e^x + e^{-x} - 2 = 2ch(x) - 2$
 et $G_0(x) = e^x - e^{-x} = 2sh(x)$. (voir études de ces deux fonctions dans l'exercice 516).



$$3. f'_{n+1}(x) = \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)'$$

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= e^x - 1 - \frac{2x}{2!} - \frac{3x^2}{3!} - \dots - \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} \\ &= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

$$f_n(0) = e^0 - P_n(0) = 1 - 1 = 0.$$

4. D'après le tableau de variations de la fonction, f_1 admet un minimum au point d'abscisse 0 et $f_1(0) = 0$ on en déduit donc que $f_1(x) > 0$ si $x \neq 0$

D'après la question 3, $f'_2(x) = f_1(x) \geq 0$ donc f_2 est strictement croissante.

De plus $f_2(0) = 0$ on en déduit alors que $f_2(x) > 0$ si $x > 0$ et $f_2(x) < 0$ si $x < 0$.

Plus généralement,

- si n pair, f_n strictement croissante et $f_n(0) = 0$ donc $f_n(x) > 0$ si $x > 0$ et $f_n(x) < 0$ si $x < 0$

- si n impair, f_n est décroissante sur $]-\infty; 0[$, croissante sur $]0; +\infty[$ et $f_n(0) = 0$ donc $f_n(x) > 0$ si $x \neq 0$.

5. D'après la question précédente pour tout $x < 0$, on a $f_2(x) < 0$ et $f_1(x) > 0$

On en déduit alors que $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$ et $e^x > 1 + x$

ainsi, pour tout $x < 0$: $1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

6. D'après la question précédente $0,9 < e^{-0,1} < 0,905$.

7. Pour tout $x < 0$, on a $f_4(x) < 0$ et $f_3(x) > 0$

d'où pour tout $x < 0$:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Nous obtenons alors $0,9048333 < e^{-0,1} < 0,9048375$.

EXERCICE 527

Partie A

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 30]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{0,2x-1} + x \times 0,2 \times e^{0,2x-1} \\ &= (0,2x+1)e^{0,2x-1} \end{aligned}$$

2. Pour tout réel x , $e^{0,2x-1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2x+1$.

$$0,2x+1 > 0 \iff 0,2x > -1 \iff x > \frac{-1}{0,2} \iff x > -5$$

Donc la fonction f est :

- strictement décroissante sur $[-10; -5]$
- strictement croissante sur $[-5; 30]$

3. $f(0) = 5$ et $f(20) \approx 406,7 > 80$

La fonction f est strictement croissante sur $[-5; 30]$ donc sur $[0; 20]$.

On établit le tableau de variations de f sur $[0; 20]$:

x	0	α	20
f	5		$f(20)$

Donc l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 20]$.

$$\left. \begin{aligned} f(13) &\approx 69,4 < 80 \\ f(14) &\approx 89,7 > 80 \end{aligned} \right\} \implies \alpha \in [13; 14];$$

$$\left. \begin{aligned} f(13,5) &\approx 78,9 < 80 \\ f(13,6) &\approx 80,9 > 80 \end{aligned} \right\} \implies \alpha \in [13,5; 13,6]$$

Partie B

1. $f(0) = 5$ correspond au nombre de magasins existant en 2010 + 0, c'est-à-dire en 2010.
2. La fonction f est strictement croissante sur $[0; 20]$ et $f(\alpha) = 80$; donc si $x > \alpha$, alors $f(x) > 80$.

Or $\alpha \approx 13,5$, donc à partir de $x = 14$, $f(x)$ est supérieur à 80.

La chaîne possèdera 80 boutiques à partir de l'année 2010 + 14 soit 2024.

EXERCICE 528

1. f est dérivable sur $[0; 3]$,

$$f'(t) = 15e^{0,2t} - 15 = 15(e^{0,2t} - 1).$$

2. $f'(t) \geq 0 \iff e^{0,2t} \geq e^0$ c'est-à-dire si $t \geq 0$.

3. $f'(t) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 3]$.

4. $f(1) = 1,6$ à 10^{-1} près. Le wagon aura parcouru 1 km 600 au bout d'une minute.

5. a. $f'(2) = 7,4$ à 10^{-1} près. A l'instant $t = 2$ minutes, le wagon à une vitesse de 7,4 kilomètres par minute.

b. En 2 minutes, la vitesse est de 7,4 km.min⁻¹ soit 444 km.h⁻¹, l'objectif des ingénieurs est donc atteint.

6. $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$

$$f'(2) = 15e^{0,4} - 15.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $y = 15(e^{0,4} - 1)x + 45e^{0,4} - 75$.

EXERCICE 529

Partie A

1. C est dérivable sur $[5; 60]$.

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{0,1e^{0,1x} \times x - 1 \times (e^{0,1x} + 20)}{x^2} \\ &= \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}. \end{aligned}$$

2. a. f est dérivable sur $[5; 60]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,1e^{0,1x} + (0,1)^2 xe^{0,1x} - 0,1e^{0,1x} \\ &= 0,01xe^{0,1x} > 0 \text{ sur } [5; 60] \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[5; 60]$.

- b. f est strictement croissante sur $[5; 60]$,

$$f(5) \approx -20,8 < 0 \text{ et } f(60) \approx 1997,1 > 0$$

L'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution α dans $[5; 60]$.

- c. $25 < \alpha < 26$.

- d.

x	5	α	60
Signe de $f(x)$	-	0	+

- 3.

x	5	α	60
$C'(x)$	-	0	+
C	$\approx 4,32$	$\approx 1,3$	$\approx 7,05$

4. D'après le tableau de variations précédent,
- L'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions, une dans l'intervalle $[5; \alpha]$ et une dans l'intervalle $[\alpha; 60]$
 - L'équation $C(x) = 5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\alpha; 60]$.

Partie B

La fonction C admet un minimum en α , le nombre de vélos à produire sera donc 25 ou 26.

$C(25) \approx 1,2873$ et $C(26) \approx 1,2871$, le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

EXERCICE 530**Partie A**

1. f est dérivable sur $[0; +\infty[$,
 $f'(x) = -8xe^{-x} - (-4x^2 + 5)e^{-x} = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc le signe de f' ne dépend que du signe du trinôme $T(x) = 4x^2 - 8x - 5$.
 Le trinôme admet deux racines $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5}{2}$.
 f' est négative sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.
3. En utilisant la calculatrice, on conjecture
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.
- 4.

x	0	2,5	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	8	$f(2,5)$	3

5. $f(x) = 3 \iff (-4x^2 + 5)e^{-x} = 0 \implies x^2 = 1,25$
 $f(x) = 3$ admet deux solutions
 $x = \sqrt{1,25} > 0$ ou $x = -\sqrt{1,25} < 0$.
 L'équation $f(x) = 3$ admet donc une unique solution
 $x_0 = \sqrt{1,25}$ dans l'intervalle $[0; 10]$.
 $x_0 = 1,12$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. $f(5) = 3 - 95e^{-5} \approx 2,36$.
 Le coût moyen unitaire de production en euros, pour une production de 500 litres de peinture est d'environ 236 €.
2. a. D'après la partie A, f atteint son minimum pour $x = 2,5$ et $f(2,5) \approx 1,36$.

L'entreprise doit produire 250 litres de peinture pour minimiser le coût moyen unitaire de production. Le coût est alors de 136 €.

b. L'entreprise ne peut pas réaliser de bénéfice puisque la production d'un hectolitre coûte au minimum 136 €, alors qu'il n'est vendu que 100 €. Dans tous les cas, l'entreprise vendra à perte.

3. On recherche la plus petite valeur de x telle que $f(x) = 3$. D'après la partie A, $x_0 = 1,12$.
 Le seuil de rentabilité est donc 112 litres.

EXERCICE 531

1. $f'(x) = e^{1-0,5x} + (x+2,5) \times (-0,5)e^{1-0,5x}$
 $= (-0,5x - 0,25)e^{1-0,5x}$.

x	0	10
$f'(x)$	-	
f	$2,5e$	$12,5e^{-4}$

2. $h'(x) = f'(x) - 0,3 < 0$ car $f'(x) < 0 \forall x \in [0; 10]$.

x	0	10
$h'(x)$	-	
h	$2,5e - 1$	$12,5e^{-4} - 4$

$4,17 < \alpha < 4,18$.

3. a. Le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande correspond à $h(x) = 0$ soit $x = \alpha$. Le prix d'équilibre est donc 417 €.
- b. $f(3,1) \approx 3,2309$
 Augmentation de 1% du prix : $3,1 \times 1,01 = 3,131$
 $f(3,131) \approx 3,1988$
 $\frac{f(3,131) - f(3,1)}{f(3,1)} \approx -0,0099$ soit une diminution d'environ 1% de la demande.

4. a. $E(x) = x \frac{-0,5x - 0,25}{x + 2,5} = \frac{-0,5x^2 - 0,25x}{x + 2,5}$.

b. $E(x) = -1 \iff 0,5x^2 + 0,25x = x + 2,5$
 $\iff 0,5x^2 - 0,75x - 2,5 = 0$.

L'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{89}}{4} \approx -1,608 \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{89}}{4} \approx 3,108$$

- c. Seule la solution x_2 appartient à l'intervalle $[0; 10]$,
 $x_2 = 3,11$ à 10^{-2} près.
 d. On retrouve le résultat de la question 3.b.

EXERCICE 532

- Equation de (BC) : $y = -0,75x + 4$.
- $f(0) = 4$, $f'(0) = -0,75$ et $f'(3) = 0$.
- $f'(x) = \frac{1}{4}(ax + a + b)e^x$.
- En utilisant les questions 2. et 3., on obtient le système :

$$\begin{cases} k + 0,25b = 4 \\ 0,25(a + b) = -0,75 \\ 0,25(4a + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ k = 5 \end{cases} \text{ ainsi pour}$$
 tout x réel : $f(x) = 5 + \frac{1}{4}(x - 4)e^x$.

EXERCICE 533

- $f(1) = 5$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
 - Coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 3$
 On en déduit alors $f'(1) = 3$.
- $f'(x) = ae^{x-1} + (ax + b)e^{x-1} = (ax + a + b)e^{x-1}$.
- $f(1) = 5 \Rightarrow a + b + c = 5$
 $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a + b = 0$
 $f'(1) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$
 a, b et c vérifient donc le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a + 2b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$
 La résolution du système permet d'obtenir
 $a = 2, b = -1$ et $c = 4$.
 Soit $f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$

EXERCICE 534

- $f(2) = 0$ et $f'(0) = 0$.
- $f'(x) = (ab - ax - 1)e^{ax}$.
- D'après les questions précédentes :
 $f(2) = 0 \Leftrightarrow (b - 2)e^{2a} = 0$
 $f'(0) = 0 \Leftrightarrow (ab - 1)e^0 = 0$ a et b sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$$
- $a = \frac{1}{2}$ et $b = 2$, on en déduit $f(x) = (2 - x)e^{\frac{x}{2}}$.

EXERCICE 535

- $f'(x) = -e^{-x}$ d'où $f'(0) = -1$ de plus $f(0) = 1$, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -x + 1$, il s'agit de la droite Δ .
- $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 1 - e^{-x}$.
 - et c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		-	0
h	$+\infty$	0	$+\infty$

- D'après les questions 1. et 2., $f(x) \geq g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 536

- $f'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)e^{-x} = (-2x + 3)e^{-x}$
 pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-2x + 3)$.

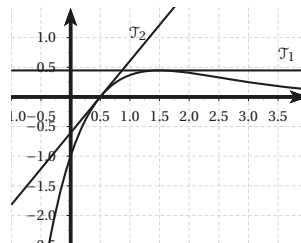
b.

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f		$2e^{-1,5}$	

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b. $\mathcal{T}_1$: $y = 2e^{-\frac{3}{2}}$ $\mathcal{T}_2$: $y = 2e^{-\frac{1}{2}}x - e^{-\frac{1}{2}}$

- $f(x) + f'(x) = (2x - 1 - 2x + 3)e^{-x} = 2e^{-x}$.
 On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$
 - $F'(x) = f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$
 d'où $F(x) = -f(x) - 2e^{-x} = (-2x - 1)e^{-x}$



EXERCICE 537

1. Conjectures : f est croissante sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}$ est sous l'axe des abscisses pour $x < 0$ et au-dessus de l'axe lorsque $x > 0$.
2. a. $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x((x+2)e^{x-1} - 1)$
 $= xg(x)$
 b. $g'(x) = (x+3)e^{x-1}$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	-1	$-e^{-4} - 1$	$+\infty$

c. D'après le tableau de variations,

- $g(x) < 0$ sur $]-\infty; 3]$ et g est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$.
- $g(-3) < 0$ et $g(1) = 2 > 0$, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique dans $\mathbb{R}$.
- d. $g(0,20) \approx -0,011 < 0$ et $g(0,21) \approx 0,003 > 0$ donc $0,20 < \alpha < 0,21$.
- e. $g(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.
- f.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$	

g. La première conjecture est donc fausse.

3. a. $g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$,
 d'où $f(\alpha) = \alpha^2 \times \frac{1}{\alpha+2} - \frac{2}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
- b. $h'(x) = \frac{-6x^2(x+2) + 2x^3}{4(x+2)^2} = \frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

x	0	1
$h'(x)$	$-$	
h	0	$-\frac{1}{6}$

On en déduit que $-\frac{1}{6} < f(\alpha) < 0$.

c. D'après les questions précédentes, $f(x) < 0$ sur

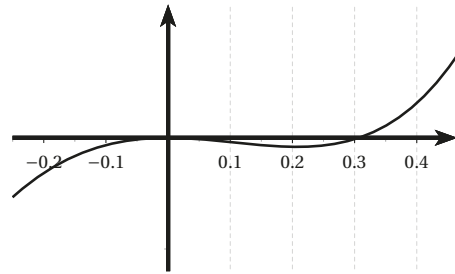
$]0; \alpha[$

$f(\alpha) < 0$ et $f(1) = 0,5 > 0$, $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique $\beta \in]\alpha; +\infty[$.

d. $\beta = 0,31$ à 10^{-2} près.

e. La seconde conjecture est fausse, en effet la courbe est sous l'axe pour $x \in]-\infty; \beta]$.

4.



EXERCICE 538

Partie A

- Il faut fabriquer et vendre entre 2500 et 3400 poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
- Le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est de 15000 €, atteint pour $N = 3000$ poulies fabriquées et vendues.

Partie B

- a. B est dérivable sur $I = [0; 3,6]$,
 $B'(x) = -e^x + (4-x)e^x = (3-x)e^x$.
 b. $B'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$.
 c.

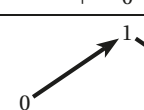
x	0	3	$3,6$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	-1	$e^3 - 5$	$0,4e^{3,6} - 5$

- a. D'après le tableau de variations, B est strictement croissante sur $[0; 3]$, $B(0) < 13$ et $B(3) > 13$, l'équation $B(x) = 13$ admet donc une solution x_1 dans l'intervalle $[0; 3]$
 B est strictement décroissante sur $[3; 3,6]$, $B(3) > 13$ et $B(3,6) < 13$, l'équation $B(x) = 13$ admet donc une solution x_2 dans l'intervalle $[3; 3,6]$.

b. À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $x_1 = 2,46$ et $x_2 = 3,4$ à 0,01 près.

EXERCICE 539

1. $f'_n(x) = -2nxe^{-nx^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
f			

2. a. $f''_n(x) = 2n(2nx^2 - 1)e^{-nx^2}$ s'annule pour $a_n = -\frac{\sqrt{2n}}{2n}$ et $b_n = \frac{\sqrt{2n}}{2n}$.

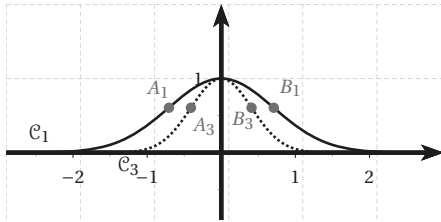
b. L'équation réduite de la droite $(A_n B_n)$ est $y = e^{-\frac{1}{2}}$, cette équation ne dépend pas de n . Les points A_n et B_n restent donc sur une même droite.

c. Equation de la tangente à la courbe au point A_n : $y = \sqrt{2n}xe^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$

Equation de la tangente à la courbe au point B_n : $y = -\sqrt{2n}xe^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$

On remarque que quelle que soit la valeur de n , les tangentes passent par le point de coordonnées $(0; 2e^{-\frac{1}{2}})$.

3.

**EXERCICE 540**

Les fonctions f_k sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ $f'_k(x) = 1 - ke^{-x}$. Les fonctions f_k admettent un minimum lorsque $e^{-x} = \frac{1}{k}$ donc lorsque $x = -\ln\left(\frac{1}{k}\right)$.

- Si $k = 1$ le minimum sera $S_1(0; 1)$.
- Si $k = \frac{1}{2}$ le minimum sera $A_{\frac{1}{2}}\left(-\ln 2; -\ln 2 + \frac{1}{4}\right)$.
- Si $k = \frac{1}{5}$ le minimum sera $A_{\frac{1}{5}}\left(-\ln 5; -\ln 5 + \frac{1}{25}\right)$.

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A_{\frac{1}{2}}A_1}$ et $\overrightarrow{A_{\frac{1}{5}}A_1}$

$$\overrightarrow{A_{\frac{1}{2}}A_1}\left(\ln 2; \frac{3}{4} + \ln 2\right) \text{ et } \overrightarrow{A_{\frac{1}{5}}A_1}\left(\ln 5; \frac{24}{25} + \ln 5\right)$$

Appliquons la condition de colinéarité :

$$\frac{24}{25}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 5 \approx -0,5$$

Les trois sommets ne sont donc pas alignés, on en déduit que les points A_k ne sont donc pas alignés.

EXERCICE 541

1. Equation de la tangente en M à $\mathcal{C}_f$:

$$y = e^a(x - a) + e^a$$

Equation de la tangente en N à $\mathcal{C}_g$:

$$y = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}.$$

$$f'(a) \times g'(a) = e^a \times (-e^{-a}) = -1.$$

Les deux tangentes sont donc perpendiculaires.

2. a. Conjecture : $PQ = 2$

b. On recherche les coordonnées de P en résolvant l'équation $e^a(x - a) + e^a = 0$

On obtient $x = a - 1$ d'où $P(a - 1; 0)$

On obtient de même $Q(a + 1; 0)$

Alors $PQ = \sqrt{(a + 1 - a + 1)^2} = 2$ la conjecture est démontrée.

EXERCICE 542**Partie A**

1. La fonction C est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$C'(t) = 12\left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right)e^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20}e^{-\frac{7}{80}t} > 0 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

la fonction C est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.

En utilisant la calculatrice, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 12.$$

Le plateau devrait être égal à 15. Il n'est que de 12, le traitement n'est donc pas adapté.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 105\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105}{x} \times \left(\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right) \\ &= \frac{105}{x^2}\left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right) \\ &= \frac{105g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation de la fonction g , $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3. D'après la question précédente la fonction f est dérivable et strictement décroissante sur $[1; 80]$

$$f(1) \approx 7,59 > 5,9 \text{ à } f(80) \approx 1,31 < 5,9.$$

il existe donc un réel unique $\alpha \in]1; 80[$, tel que $f(\alpha) = 5,9$.

$$f(8,10) \approx 5,902 \text{ et } f(8,11) \approx 5,899,$$

donc $8,10 < \alpha < 8,11$.

On a donc $a \approx 8,1$ au dixième près.

Partie C

1. a. Puisque $C(t) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$, on a :

$$C(6) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80} \times 6}\right) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}a}\right) = f(a),$$

d'après la question précédente.

b. D'après la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5,9$ admet une solution unique $a \approx 8,1$.

On prendra donc 8,1 comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. On veut que $\frac{d}{a} = 15 \iff \frac{d}{8,1} = 15 \iff d = 121,5$.

Le débit sera donc de 121,5 micromoles par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.

EXERCICE 543

Partie A

1. $f'(x) = 2 \times e^{-x} + 2x \times (-1)e^{-x} = 2(1-x)e^{-x}$.

2.

x	0	1	12
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$2e^{-1}$	$24e^{-12}$

3. $f(0) = 0 < 0,5$, $f(1) \approx 0,74 > 0,5$
et $f(12) \approx 1,5 \times 10^{-4} < 0,5$ d'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 12]$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve pour valeurs approchées au centième des solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ les nombres 0,36 et 2,15.

Partie B

1. a. D'après la partie A, le taux d'alcoolémie va croître la première heure, puis décroître les 11 heures suivantes.
- b. Comme vu dans la partie A, le taux d'alcoolémie de cette personne est maximal au bout d'une heure; il vaut alors $f(1)$ soit environ 0,74 g/L.
2. Une fois l'alcool consommé, on cherche au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend une valeur conforme à la législation. Il faut que $f(x)$ redevienne inférieur à 0,5 donc que le temps soit supérieur à 2,15 heures soit 2 h 9 min.

EXERCICE 544

1. Etude de la fonction ch

a. $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = chx$, la fonction ch est paire, l'axe des ordonnées est donc axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

b. $ch'x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$.

c. $\forall x \geq 0$, $e^x \geq e^{-x}$ donc $ch'x \geq 0$, la fonction ch est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction sh

a. $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -shx$, la fonction sh est impaire, l'origine est donc centre de symétrie de $\mathcal{S}$.

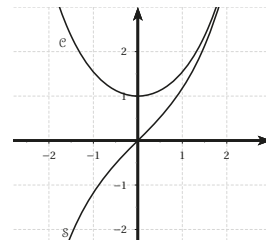
b. $sh'x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$.

c. $\forall x \geq 0$, $sh'x \geq 0$, la fonction sh est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Représentations graphiques

a. $chx - shx = e^{-x} > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est donc au-dessus de la courbe $\mathcal{S}$.

b.



4. Des formules

a. $cha \ chb + sha \ shb$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^a + e^{-a}}{e^b + e^{-b}} + \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}} \\
 &= \frac{2}{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b}} + \frac{2}{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}} \\
 &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{4} \\
 &= \frac{2}{ch(a+b)} \\
 &= ch(a+b)
 \end{aligned}$$

 $sha \ chb + shb \ cha$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}} + \frac{e^a + e^{-a}}{e^b - e^{-b}} \\
 &= \frac{2}{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}} + \frac{2}{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} - e^{-a-b}} \\
 &= \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{4} \\
 &= \frac{2}{sh(a+b)} \\
 &= sh(a+b)
 \end{aligned}$$

b. En posant $a = b = x$ dans les formules précédentes, nous obtenons :

$$ch(2x) = ch^2 x + sh^2 x$$

$$sh(2x) = 2shx \ chx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } ch^2 x - sh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{4}{4} = 1.
 \end{aligned}$$

EXERCICE 545

1. $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \cos(-2x) + (-x)^2 = \cos 2x + x^2 = f(x)$$

 f est donc paire sur I .2. $I = \mathbb{R}/\{-1; 1\}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \sin(-x)^2 + \frac{2}{(-x)^2 - 1} = \sin x^2 + \frac{2}{x^2 - 1} = f(x),$$

 f est donc paire sur I .3. $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = -x \cos(-x) = -x \cos x = -f(x)$$

 f n'est pas paire sur I (elle est impaire).4. I n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet $\frac{\pi}{3} \in I$

$$\text{mais } -\frac{\pi}{3} \notin I$$

 f n'est donc pas paire sur I .

EXERCICE 546

1. $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \sin(-2x) - 2(-x)^5 = -\sin 2x + 2x^5 = -f(x)$$

 f est impaire sur I 2. $I = \mathbb{R}/\{-2; 2\}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \sin(-x^3) + \frac{-2x}{(-x)^2 - 4}$$

$$f(-x) = -\sin x^3 - \frac{2x}{x^2 - 4} = -f(x) \quad f \text{ est impaire sur } I$$

3. $I = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x).$$

 f n'est pas impaire sur I (elle est paire).4. I n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet $\frac{\pi}{3} \in I$

$$\text{mais } -\frac{\pi}{3} \notin I$$

 f n'est donc pas impaire sur I .

EXERCICE 547

1. f est définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 + \cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} = -f(x).$$

 f est donc impaire sur $\mathbb{R}$.2. f est définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = x^2 \cos x - 3x^3 \sin 2x = f(x).$$

 f est paire sur $\mathbb{R}$.3. f est définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{\cos^2 x + x^2 \sin 3x}{x^2 + 1}.$$

 f n'est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.4. f est définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(-x) = (e^{-x} - e^x) \sin(-2x) = f(x).$$

 f est donc paire sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 548

$$1. \quad f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 3x = f(x)$$

 f est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x + 4\pi) &= \sin\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) \\
 &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)
 \end{aligned}$$

 f est périodique, de période $T = 4\pi$.

$$\begin{aligned}
 3. \quad f(x + 2\pi) &= 3 \cos(x + 3 + 2\pi) - 2 \sin(4 - 3x - 6\pi) \\
 &= 3 \cos(x + 3) - 2 \sin(4 - 3x) = f(x)
 \end{aligned}$$

 f est périodique, de période $T = 2\pi$.

$$\begin{aligned}
 4. \quad f(x + 12) &= \cos\left(\frac{(x + 12)\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{(x + 12)\pi}{3}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{x\pi}{2} + 6\pi\right) - 3 \sin\left(\frac{x\pi}{3} + 4\pi\right) \\
 &= \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right) = f(x)
 \end{aligned}$$

 f est périodique, de période $T = 12$.

EXERCICE 549

1. $f(x+T) = f(x) \iff \left(\frac{3T}{253} = 2k\pi \text{ et } \frac{T}{4} = k'2\pi \right)$ avec k et k' entiers relatifs.

T est le plus petit multiple commun à $\frac{2 \times 253\pi}{3}$ et $2 \times 4\pi$

On en déduit que $T = 2 \times 4 \times 253 \times 3\pi = 6072\pi$

2. $f(x+T) = f(x) \iff \frac{5T}{97} = k2\pi$ et $\frac{3T}{37} = k'2\pi$ avec k et k' entiers relatifs.

T est le plus petit multiple commun à $\frac{74\pi}{3}$ et $\frac{194\pi}{5}$

On en déduit que $T = \frac{2 \times 37 \times 97\pi}{3 \times 5} = \frac{7178}{15}\pi$.

EXERCICE 550

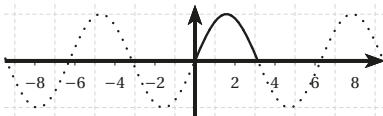
- $f'(x) = -3\sin 3x$.
- $f'(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
- $f'(x) = -3\sin(x+3) + 6\cos(4-3x)$.
- $f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - \pi \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right)$.
- $f'(x) = 2\cos 2x - (4x+6)\sin 2x$.
- $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f'(x) = \cos x - x\sin x - 2\sin x - 2x\cos x$
 $= (1-2x)\cos x - (x+2)\sin x$
- $f'(x) = -\frac{-\sin x + \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$.

EXERCICE 551

1. $f'(x) = \cos x$,
 $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

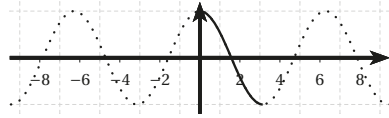
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f			

2. Tracé en trait plein et 3. tracé en pointillés

**EXERCICE 552**

1. $f'(x) = -\sin x \leq 0$ sur $[0; \pi]$.
 La fonction $\cos$ est donc décroissante sur $[0; \pi]$.

2. Tracé en trait plein et 3. tracé en pointillés

**EXERCICE 553**

$f(0) = 2$ et $g(0) = 1$ donc $\mathcal{C}$ représente g et $\mathcal{C}'$ représente f .

EXERCICE 554

$\mathcal{C} : y = \frac{1}{2} \sin x$ et $\mathcal{C}' : y = 2 \sin \frac{1}{4}x$.

EXERCICE 555

$\mathcal{C} : y = \frac{1}{2} \cos(3x)$ et $\mathcal{C}' : y = -3 \cos \frac{1}{2}x$.

EXERCICE 556

1. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

La fonction f est de période 2π , on peut réduire l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

2. $f(-x) = \cos 2x - 2\sin x$, la fonction f n'est donc ni paire, ni impaire.

3. f est dérivable sur $[-\pi; \pi]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x + 2\cos x = -4\sin x \cos x + 2\cos x \\ &= 4\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right). \end{aligned}$$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	-	0	+	+
$\frac{1}{2} - \sin x$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	0

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	0	-	-
$\frac{1}{2} - \sin x$	-	0	+
$f'(x)$	0	+	0

La fonction f est donc

décroissante sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$

croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

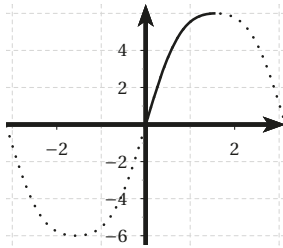
4. $\mathcal{T} : y = 2x + 1$.

EXERCICE 557

1. $f(-x) = -f(x)$, f est impaire.
2. $f(\pi - x) = f(x)$, symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.
3. $f'(x) = \cos x (7 + \cos 2x) - 2 \sin x \sin 2x$
 $= \cos x (7 + 2 \cos^2 x - 1) - 4 \sin^2 x \cos x$
 $= \cos x (6 + 2 \cos^2 x) - 4 \cos x (1 - \cos^2 x)$
 $= 2 \cos x + 6 \cos^3 x \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est donc croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Tracé en trait plein et 5. tracé en pointillés

**EXERCICE 558**

1. $f'(x) = -2 \sin(2x) - 1 < 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-
f	1	$-1 - \frac{\pi}{2}$

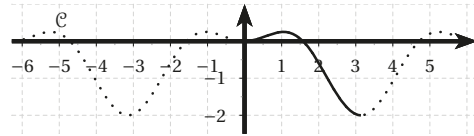
3. La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
 $f(0) = 1 > 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \frac{\pi}{2} < 0$, la fonction f s'annule donc une seule fois sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
L'équation (E) : $\cos(2x) = x$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\alpha = 0,73$ valeur approchée au centième par défaut.

EXERCICE 559

1. $f(-x) = f(x)$, f est donc paire sur $\mathbb{R}$.
 $f(x + 2\pi) = f(x)$, f est donc 2π -périodique.
2. $f'(x) = 2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	-2

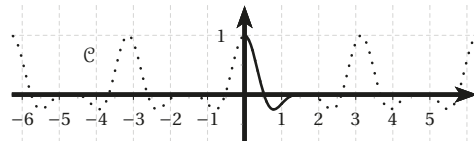
3. Tracé en trait plein et 4. tracé en pointillés

**EXERCICE 560**

1. $f(-x) = f(x)$, f est donc paire sur $\mathbb{R}$.
 $f(x + 2\pi) = f(x)$, f est donc 2π -périodique.
2. $f(\pi - x) = f(x)$
☞ La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
3. $f'(x) = -3 \sin 3x \times \cos^3 x - 3 \cos 3x \times \sin x \times \cos^2 x$
 $= -3 \cos^2 x (\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x)$
 $= -3 \cos^2 x \sin 4x$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$f'(x)$	0	−	0	+	0
f	1		$-\frac{1}{4}$		0

4. Tracé en trait plein et 5. tracé en pointillés

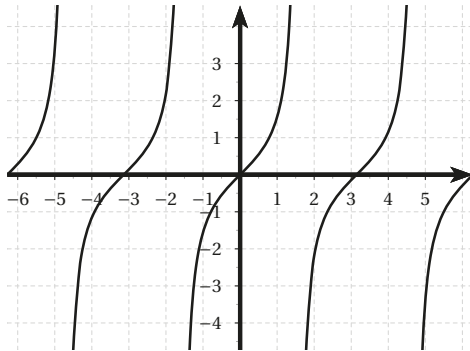
**EXERCICE 561**

1. $f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(2x)$
2. $f'(x) = \frac{2 \cos x}{(\sin x + 2)^2}$
3. $f'(x) = 3 \cos x (\sin x)^2$
4. $f'(x) = -2 \sin(2x + 1)$
5. $f'(x) = 4 + \sin x$
6. $f'(x) = -\frac{3 \sin x + 1}{(\sin x + 3)^2}$

7. $f'(x) = -35 \cos(2-7x) \sin^4(2-7x)$
 8. $f'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x)$
 9. $f'(x) = \frac{2 + 4 \sin(2x) + 4 \cos(2x)}{(\cos(2x) + 2)^2}$

EXERCICE 562

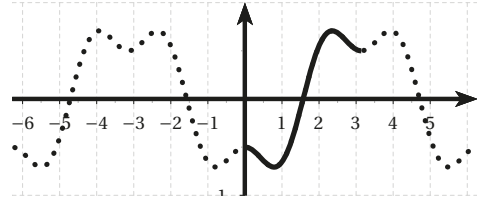
1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 2. $f(-x) = -f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$.
 f est impaire et 2π -périodique.
 3. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$
 4. $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
 ou encore
 $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = 1 + \tan^2 x$.
 5. $f'(x) > 0$ sur I , f est donc strictement croissante sur I .
 6.

**EXERCICE 563**

1. $f(-x) = f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$
 f est paire et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.
 2. $f'(x) = 3 \sin x \left(\frac{1}{2} - \cos^2 x \right)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π		
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-
f	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$		

3. Tracé en trait plein et 4. tracé en pointillés

**EXERCICE 564**

1. Dans les deux cas, on utilise la définition du nombre dérivé : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos 0 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = -\sin 0 = 0$.
 2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(2x) - 1}{x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(2x) - 1}{2x} \right)$
 $= 2 \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(X) - 1}{X} \right) = 0$
 b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin x - 5x}{4x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$
 c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x}{x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 3$
 d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X)}{X} = 3$

EXERCICE 565

1. $f'(x) = 6 \cos x \sin^5 x - 6 \sin x \cos^5 x + 4\lambda \sin(4x)$
 $= 6 \sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x) + 4\lambda \sin(4x)$
 $= 6 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x) + 4\lambda \sin(4x)$
 $= 6 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) + 4\lambda \sin(4x)$
 $= 3 \sin(2x) \times (-\cos(2x)) + 4\lambda \sin(4x)$
 $= -3 \sin(2x) \cos(2x) + 8\lambda \sin(2x) \cos(2x)$
 $= (8\lambda - 3) \sin(2x) \cos(2x)$
 2. D'après la question précédente pour $\lambda = \frac{3}{8}$, $f'(x) = 0$
 La fonction f est donc constante.

EXERCICE 566

1. a. $\sin(a+h) - \sin a = \sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a$
 $= \sin a (\cos h - 1) + \sin h \cos a$
 $= -2 \sin a \sin^2 \frac{h}{2} + 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} \cos a$
 $= 2 \sin \frac{h}{2} \left(\cos a \cos \frac{h}{2} - \sin a \sin \frac{h}{2} \right)$
 $= 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(a + \frac{h}{2} \right)$

$$\text{ainsi } \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos\left(a + \frac{h}{2}\right).$$

b. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\sin a)' &= \lim_{h \rightarrow a} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow a} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) \right) = \cos a \end{aligned}$$

On en déduit alors que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

2. a. Conjecture $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$.

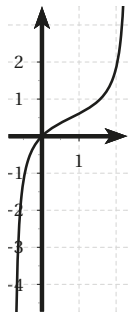
$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \sin \pi}{x - \pi} = \cos \pi = -1.$$

EXERCICE 567

- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$.
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$
- $\cos' x = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

EXERCICE 568

- f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- $f(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x - \sin x} = f(x)$
 f est donc π -périodique.
- $f'(x) = \frac{\cos x (\cos x + \sin x) - \sin x (-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$
 $= \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} > 0$
 f est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
-



EXERCICE 569

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-3)f(x+3) \Rightarrow f(x+3) = f(x)f(x+6) \\ &\Rightarrow f(x+3) = f(x-3)f(x+3)f(x+6) \\ &\Rightarrow f(x-3)f(x+6) = 1 \\ &\Rightarrow f(x)f(x+9) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x+9)f(x+18) = 1$$

$$\Rightarrow f(x+9)(f(x) - f(x+18)) = 0$$

par hypothèse $f(x+9) \neq 0$ donc $f(x+18) = f(x)$

f est donc 18-périodique.

EXERCICE 570

$$f(x) = f(x-1)f(x+1) \Rightarrow f(x+1) = f(x)f(x+2)$$

$$\Rightarrow f(x+1) = f(x-1)f(x+1)f(x+2)$$

$$\Rightarrow f(x-1)f(x+2) = 1$$

$$\Rightarrow f(x)f(x+3) = 1$$

$$\Rightarrow f(x+3)f(x+6) = 1$$

$$\Rightarrow f(x+3)(f(x) - f(x+6)) = 0$$

Par hypothèse $f(x+3) \neq 0$ donc $f(x+6) = f(x)$

f est donc 6-périodique.

EXERCICE 571

$$1. f(-x) = f(x) \text{ et } f(x+2\pi) = f(x)$$

f est paire et 2π -périodique. On peut donc réduire l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

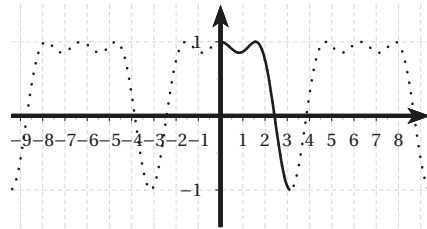
$$\begin{aligned} 2. f'(x) &= 2 \sin x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x \\ &= 3 \sin x \cos x \left(\frac{2}{3} - \cos x \right) \end{aligned}$$

$\frac{2}{3} - \cos x$ s'annule pour $\alpha \approx 0,84$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	-	+	0
f	1	$f(\alpha)$	1	-1

$$f(\alpha) = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{23}{27}$$

3. Tracé en trait plein et 4. tracé en pointillés



EXERCICE 572

$$1. f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. $f(x+2\pi) = f(x)$, f est 2π -périodique

$$f(x+\pi) = -f(x),$$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie.

On peut réduire l'étude à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

$$\begin{aligned} 3. f'(x) &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)} \\ &= \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

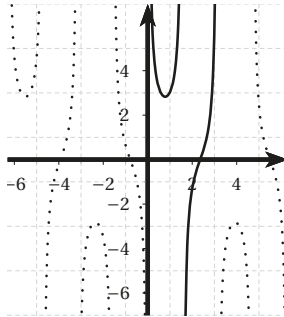
$$\bullet 1 + \sin x \cos x > 0$$

$$\bullet \sin^2 x \cos^2 x > 0$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $\sin x - \cos x$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		-	0	+
f				

4. Tracé en trait plein et 5. tracé en pointillés



EXERCICE 573

1. $\cos(2x) = -1 \iff 2x = \pi + 2k\pi$

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $f(-x) = f(x)$ et $f(x+2\pi) = f(x)$

f est paire et 2π -périodique.

3. $f(\pi - x) = -f(x)$, le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est centre de symétrie.

La parité, la périodicité et le centre de symétrie permettent de réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$4. f'(x) = \frac{-3 \sin(3x)(1 + \cos(2x)) + 2 \sin(2x) \cos(3x)}{(1 + \cos(2x))^2}$$

Formules utiles pour la suite :

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin(3x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x$$

$$\cos(3x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x$$

Soit N le numérateur de $f'(x)$

$$N = -6 \sin 3x \cos^2 x + 2 \sin(2x) \cos(3x)$$

$$= -6 \sin(2x) \cos^3 x - 6 \cos^2 x \cos(2x) \sin x +$$

$$2 \sin(2x) \cos(2x) \cos x - 2 \sin^2(2x) \sin x$$

$$= -12 \sin x \cos^4 x - 2 \cos^2 x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) -$$

$$8 \sin^2 x \cos^2 x \sin x$$

$$= -14 \sin x \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^3 x$$

$$= -2 \sin x \cos^2 x (7 \cos^2 x + 3 \sin^2 x)$$

$$N = -2 \sin x \cos^2 x (4 \cos^2 x + 3)$$

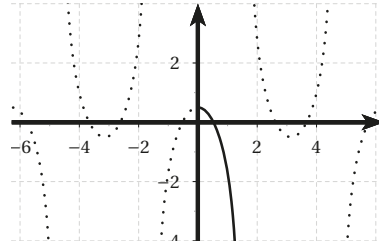
Nous en déduisons alors :

$$f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos^2 x (4 \cos^2 x + 3)}{4 \cos^4 x}$$

$$= \frac{-\sin x (4 \cos^2 x + 3)}{2 \cos^2 x}$$

$$f'(x) < 0 \text{ donc décroissante sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

5. Tracé en trait plein et 6. tracé en pointillés



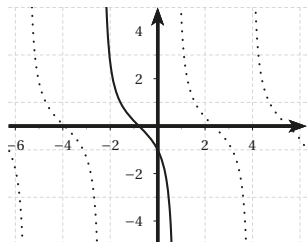
EXERCICE 574

1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $f(x+\pi) = f(x)$, on peut donc réduire l'étude à un intervalle d'amplitude π , en tenant compte des valeurs interdites, nous pouvons étudier f sur l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.

3. $f'(x) = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2} < 0$, f est donc strictement décroissante sur $\left]-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.

4. Tracé en trait plein et 5. tracé en pointillés



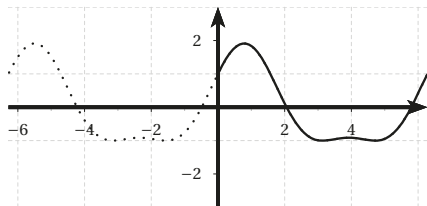
EXERCICE 575

- $f(x+2\pi) = f(x)$.
- $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$
 $= \sin x + \cos x$.
- $f'(x) = \cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1)$
 $= (\cos x - \sin x) \left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)$
 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\iff x = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } x = \pi$.
 $\cos x - \sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$	+	0	-	0
f	1	$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$	-1	$\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

x	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	0	-	+
f	$\frac{1}{2} - \sqrt{2}$	-1	1

4. Tracé en trait plein et 5. tracé en pointillés



EXERCICE 576

$$f'(x) = \frac{(\sin x + 1)(3 \sin x - 1) \cos x}{\sin^2 x (\sin x - 1)^2}$$

- $\cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2} \text{ et positif sur } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$

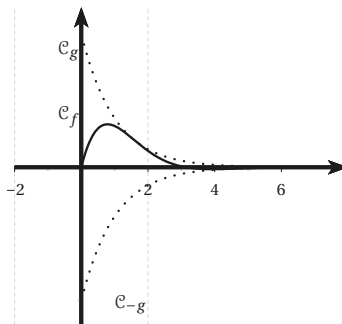
- $1 + \sin x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2} \text{ et positif sur } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$
- $\sin x = \frac{1}{3} \iff x \approx 0,34$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-	0	+
f	0		8	

EXERCICE 577

- $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)$
 $= \cos x - \sin x$.
- $f'(x) = (\cos x - \sin x) e^{-x} = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) e^{-x}$
 $f'(x) \leq 0$ sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$
avec $k \in \mathbb{N}$
 f est croissante sur $\left[2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right]$ et f décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Pour tout x réel, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$ d'où
 $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- $f(x) = g(x) \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $f(x) = -g(x) \iff \sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{N}$.

5.



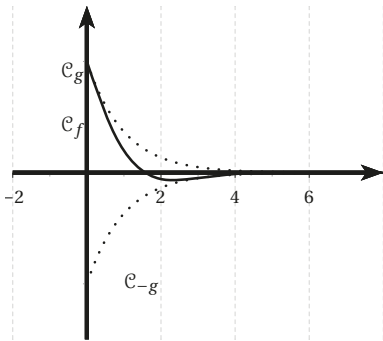
EXERCICE 578

- $$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) \\ &= \cos x + \sin x.\end{aligned}$$
- $$f'(x) = (-\cos x - \sin x)e^{-x} = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ sur les intervalles } \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

avec $k \in \mathbb{N}$
 f est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$
et f décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$ d'où $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
- $$f(x) = g(x) \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$$

$$f(x) = -g(x) \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{N}.$$
-

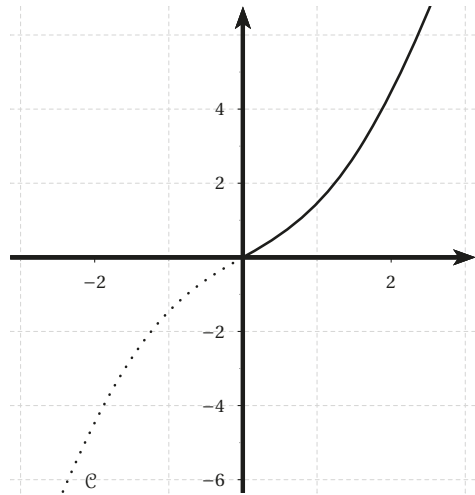


EXERCICE 579

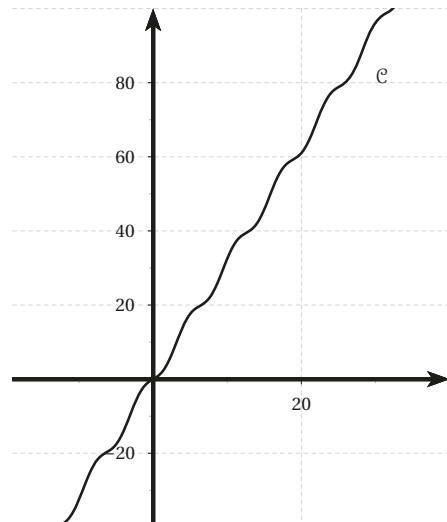
- $f(-x) = -f(x)$, la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.
- $$f'(x) = \pi - 2\cos x$$

$$f''(x) = 2\sin x \geq 0 \text{ sur } [0; \pi].$$
 f' est donc croissante sur $[0; \pi]$.
- $f'(0) = \pi - 2$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$ f est donc croissante sur $[0; \pi]$.

4.



- $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi^2$. On déduit le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $\vec{u}(2\pi; 2\pi^2)$.

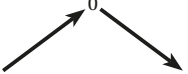


EXERCICE 580

- $f'_1(x) = 1 - \cos x \geq 0$, f_1 est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
- $$f'_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$f''_2(x) = -x + \sin x.$$

$$f'_2(0) = 0 \text{ on en déduit alors :}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2''(x)$	$+$	0	$-$
f_2'			

$f_2'(x) \leq 0$ donc f_2 décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. D'après les questions précédentes : f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f_1(0) = 0$

donc pour tout $x \geq 0$, $f_1(x) \geq 0$ d'où $\sin x \leq x$

f_2 décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f_2(0) = 0$

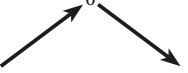
donc $\forall x \geq 0$, $f_2(x) \leq 0$ d'où $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$

ainsi pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

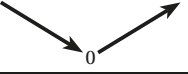
4. D'après l'encadrement obtenu à la question précédente : $0,01 - \frac{0,01^3}{6} \leq \sin 0,01 \leq 0,01$
soit $0,0099998 \leq \sin 0,01 \leq 0,01$
soit $\sin 0,01 = 0,01 \pm 10^{-2}$ près.

EXERCICE 581

1. $f_1'(x) = -x + \sin x$, d'après l'exercice précédente :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$
f_1			

2. $f_2'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$, d'après l'exercice précédent :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$
f_2			

3. D'après les questions précédentes : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) \leq 0$ et $f_2(x) \geq 0$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

4. D'après l'encadrement obtenu à la question précédente, on a $1 - \frac{0,01^2}{2} \leq \cos 0,01 \leq 1 - \frac{0,01^2}{2} + \frac{0,01^4}{24}$.
ainsi $0,99995 \leq \cos 0,01 \leq 0,99995004$
soit $\cos 0,01 = 0,99995 \pm 10^{-5}$ près.

EXERCICE 582

1. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
2. En calculant l'aire du triangle OCD de deux manières, on obtient :

$$OM \times CD = OD \times OC,$$

par hypothèse $OM = 1$, d'où $CD = OC \times OD$.

Dans le triangle OMC rectangle en M : $\cos x = \frac{OM}{OC}$

$$\text{d'où } OC = \frac{1}{\cos x}.$$

Dans le triangle OMD rectangle en M :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{OM}{OD} \text{ de plus } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

$$\text{d'où } OD = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\text{D'autre part } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{d'où } \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\text{On en déduit alors } CD = \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin(2x)}.$$

3. $f'(x) = \frac{-4 \cos(2x)}{\sin^2(2x)}.$

4.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

f admet un minimum pour $x = \frac{\pi}{4}$, ce minimum est égal à 2.

EXERCICE 583

1. $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$.

x est paire, y est impaire.

2. x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

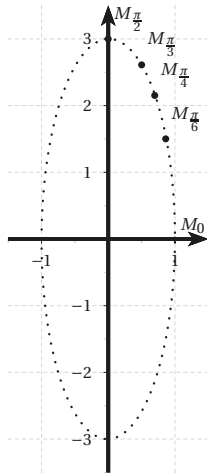
3. y est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$y(t)$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3

5. $M(-t)(x(t); -y(t))$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

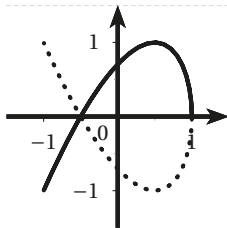
$M(\pi - t)(x(\pi - t); y(\pi - t)) = (-x(t); y(t))$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

6.

**EXERCICE 584**

1. $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$
 x est paire, y est impaire.
 x et y sont 2π -périodiques.
2. x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
3. $y'(t) = 3\cos 3t$.
 y croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$.
- 4.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$x(t)$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y(t)$	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0



5. $M(-t)(x(t); -y(t))$, Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
6. Voir graphique ci-dessus.

EXERCICE 585

1. Pour tout réel x on a $-1 \leq \cos x \leq 1$
donc $-1 \leq -\cos x \leq 1$.

On a également $-1 \leq \sin x \leq 1$, par conséquent :

$$-1 - 1 + 1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 1 + 1 + 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$$

En multipliant membre à membre le dernier encadrement par e^{-x} (qui est strictement positif) on obtient alors : $e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.

2. En utilisant la calculatrice, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
Comme $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$, on peut penser que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. $f'(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x - 1)$
 $= e^{-x}(2\cos x - 1)$.

4. a. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2\cos x - 1$.

Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, et en s'aidant d'un cercle trigonométrique :

$$2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

- $f'(x) < 0$ sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$
- $f'(x) > 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$
- $f'(x) = 0$ en $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

b. On déduit de la question précédente que :

f est décroissante sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

f est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$

5. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - (-e^{-x})\cos x \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1 + \cos x) \\ &= e^{-x}(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x :

$$e^{-x} > 0 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{donc } \sin x + 1 \geq 0.$$

On a donc, pour tout réel x , $f(x) - g(x) \geq 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

EXERCICE 586**Partie A**

1. a. $f'(x) = b\frac{\pi}{4}\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

b. En B et C les tangentes sont horizontales donc

$$f'(0) = f'(4) = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$b\frac{\pi}{4}\cos c = 0 \quad \text{et} \quad b\frac{\pi}{4}\cos(c + \pi) = 0.$$

Comme $b\frac{\pi}{4} \neq 0$, on a donc $\cos c = 0$ c'est-à-dire $c = \frac{\pi}{2}$ puisque $c \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

2. On a $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$ donc :

$$\bullet a + b \sin \frac{\pi}{2} = 1 \iff a + b = 1$$

$$\bullet a + b \sin \frac{3\pi}{2} = 3 \iff a - b = 3.$$

La résolution du système permet d'obtenir $a = 2$ et $b = -1$.

$$\text{Conclusion : } f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Partie B

1. Le cylindre de section ABFG a pour hauteur $h = 1$ et pour rayon $r = 1$.

$$\text{Donc son volume est : } V_{\text{Cyl}} = \pi \times 1^2 \times 1 = \pi.$$

2. La demi-boule a pour rayon $r' = 3$ donc son volume sera : $V_{\text{Sph}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi$.

3. a. La hauteur du cylindre sera $h = \frac{4}{5}$ puisque le segment $[0; 4]$ a été partagé en 5 segments de même longueur.

Le rayon du cylindre est donnée par $f(x_2)$ où x_2 est la borne inférieure du troisième segment : $x_2 = \frac{8}{5}$.

$$\text{Donc } r = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Finalement le volume du troisième cylindre sera :

$$V_3 = \frac{4\pi}{5} \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 \approx 7,19$$

b. Dans le cas général, chaque cylindre aura comme hauteur $h = \frac{4}{n}$.

Le k^{e} cylindre pour $1 \leq k \leq n$ est délimité par les points d'abscisses $\frac{4}{n}(k-1)$ et $\frac{4}{n}k$.

Donc le rayon du k^{e} cylindre sera :

$$f\left(\frac{4(k-1)}{n}\right) = 2 - \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right),$$

$$\text{et le volume sera alors : } V_k = \frac{4\pi}{n} \left(2 - \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)^2.$$

On a donc l'algorithme :

1	$V \leftarrow 0$
2	Pour k allant de 1 à n :
3	$V \leftarrow V + \frac{4\pi}{n} \left(2 - \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)^2$
4	Fin Pour

EXERCICE 587

1. Dans le triangle rectangle ABD ,

$$AD \cos \theta = AB = 4 \iff AD = \frac{4}{\cos \theta}$$

(puisque $\theta < \frac{\pi}{2}$).

$$\text{De même } \tan \theta = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{4} \iff BD = 4 \tan \theta.$$

$$t_1 = \frac{\frac{0,004}{\cos \theta}}{30} \text{ et } t_2 = \frac{0,007 + 0,004 \tan \theta}{60}.$$

2. Le lapin aura pu traverser sans encombre si

$$\begin{aligned} t_1 < t_2 &\iff \frac{\frac{0,004}{\cos \theta}}{30} < \frac{0,007 + 0,004 \tan \theta}{60} \\ &\iff \frac{0,008}{\cos \theta} < 0,007 + 0,004 \tan \theta \\ &\iff \frac{8}{7} < 7 \cos \theta + 4 \sin \theta \\ &\iff \frac{7}{2} \cos \theta + 2 \sin \theta - 4 > 0 \\ &\iff \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta} > 0 \\ &\iff f(\theta) > 0. \end{aligned}$$

3. Etude des variations de la fonction f :

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

f' est du signe de $2 - 4 \sin \theta$.

$$\text{Or } 2 - 4 \sin \theta = 0 \iff \sin \theta = \frac{1}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{6}.$$

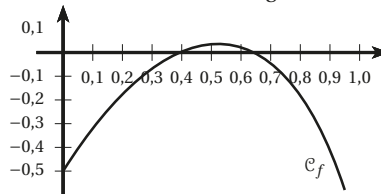
La fonction f est donc croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Or } f(0) = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2} < 0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{3} \approx 0,03359 > 0.$$

En écrivant $f(\theta)$ sous la forme $f(\theta) = \frac{7}{2} + \frac{2 \sin \theta - 4}{\cos \theta}$, on voit que $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$.

Comme le suggère la courbe ci-dessous, la fonction est positive si $0,4 \leq \theta \leq 0,64$ (environ) soit si l'angle mesure entre 23 et 37 degrés environ.



EXERCICE 588

$$1. \tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \quad \tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et dérivables sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Et la fonction cosinus ne s'annule pas sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit, par quotient, que

la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

La fonction tangente est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. On a $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$, soit $\gamma = \beta - \alpha$. Par suite :

$$\begin{aligned} \tan \gamma = \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}} \\ &= \frac{5,6x}{x^2 + 765}. \end{aligned}$$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ est maximale. Puisque γ appartient à l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ on en déduit, la fonction tangente étant strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, que γ est maximal si et seulement si $\tan \gamma$ est maximal.

S'il existe, le maximum de $\tan \gamma$ est ainsi le maximum, sur $]0, 50]$, de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}.$$

La fonction g est dérivable sur $]0, 50]$ et, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; 50]$:

$$g'(x) = \frac{5,6(765 - x^2)}{(x^2 + 765)^2} = \frac{5,6(x + \sqrt{765})(x - \sqrt{765})}{(x^2 + 765)^2}$$

Le dénominateur est toujours strictement positif et puisque $x \in]0; 50]$, alors $x + \sqrt{765} > 0$: le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $x - \sqrt{765}$.

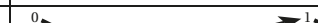
On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765}; 50]$: g admet donc, sur $]0; 50]$, un minimum atteint pour $x = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal pour une unique valeur de x , égale à $\sqrt{765}$ m soit 28 m, au mètre près.

$\widehat{ATB} \approx 0,1$ radian soit environ $5,78^\circ$.

EXERCICE 589

- $x(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2}$, il s'agit bien d'un mouvement vibratoire simple.
- Mouvement de centre $x_0 = \frac{1}{2}$ et de période $T = \pi$.
- $x(0) = 1$.
- Vitesse : $x'(t) = -\sin 2t$
Accélération : $x''(t) = -2 \cos(2t)$
 $x^{(3)}(t) = 4 \sin(2t)$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	
$x^{(3)}(t)$	0	+	+	0	-	0
x''						
signe $x''(t)$	-	0	+	+	0	-
x'						

EXERCICE 590

$$\begin{aligned} 1. \quad x(t) &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \pi t + \frac{1}{2} \sin \pi t \right) - 1 \\ &= 2 \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un mouvement vibratoire simple.

2. Mouvement de centre $x_0 = -1$ et de période $T = 2$.

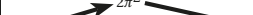
$$3. \quad x(0) = \sqrt{3} - 1.$$

$$4. \quad \text{Vitesse : } x'(t) = -2\pi \sin \left(\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{Accélération : } x''(t) = -2\pi^2 \cos \left(\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x^{(3)}(t) = 2\pi^3 \sin \left(\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$$

t	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$
$x^{(3)}(t)$	0	-	0	+
x''	$-\sqrt{3}\pi^2$		$-2\pi^2$	$2\pi^2$
signe $x''(t)$	-	-	0	+
x'	π		-2π	0

t	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{10}{6}$	2	
$x^{(3)}(t)$	+	0	-	-	
x''					
signe $x''(t)$	0	+	+	0	-
x'					

EXERCICE 591

1.b - 2.a - 3.c

EXERCICE 592

- $f(3) = 525$, lorsque l'entreprise fabrique 3 kilomètres de tissu, le coût moyen de production d'un kilomètre est de 525 €.
- $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$
avec $u(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$ et $v(x) = x$
donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{(45x^2 - 240x + 500) \times x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \times 1}{x^2}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}.$$

$$3. (x-5)(x^2+x+5) = x^3 + x^2 + 5x - 5x^2 - 5x - 25 \\ = x^3 - 4x^2 - 25.$$

4. D'après les deux questions précédentes,

$$f'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

Résolution de l'équation $x^2 + x + 5 = 0$: $\Delta = -19 < 0$

l'équation n'admet pas de solution réelle, le trinôme est toujours du signe de a , donc positif.

D'autre part, quelque soit $x \in [1; 10]$, $x^2 > 0$.

Le signe de f' ne dépend donc que du signe de $x-5$.

x	1	5	10		
$g'(x)$		-	0	+	
g	1145		425		875

5. D'après le tableau précédent, le coût moyen de production sera minimal pour 5 kilomètres produits, il sera alors de 425 € par kilomètre.

EXERCICE 593

Partie A

- La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses soit $\mathcal{S} =]-1; 7[$.
- On recherche l'abscisse des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ soit $\mathcal{S} = \{-1; 5\}$.
- Le coefficient directeur de la tangente T vaut 2.

Partie B

Affirmation 1 : $h'(x) \geq 0$ sur $[4; 20]$ donc h est croissante sur cet intervalle. L'affirmation est vraie.

Affirmation 2 : L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de h s'écrit $y = h'(-7)(x+7) + h(7)$. $h'(x) > 0$ sur $[-15; -5[$ donc $h'(-7) > 0$ par conséquent $h'(-7) \neq -3$. L'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : $h'(x) < 0$ sur $]-5; 4[$ donc $h'(3) < 0$. L'affirmation est donc vraie.

Partie C

- La fonction B est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-5; 5]$, $B'(x) = 3x^2 + 8x - 3$.

2. $\Delta = 100 > 0$, l'équation admet donc deux solutions réelles, $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.

3.

x	-5	-3	$\frac{1}{3}$	5	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g			18		210
	-10			$-\frac{14}{27}$	

EXERCICE 594

- La courbe $\mathcal{C}$ coupe deux fois l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-9; 3]$, l'équation $f(x) =$ admet donc deux solutions distinctes sur cet intervalle. L'affirmation est fausse.
- La courbe $\mathcal{C}$ n'admet une tangente horizontale qu'en deux points sur l'intervalle $[-9; 3]$ (au maximum et au minimum de la fonction), la dérivée de f s'annule donc deux fois sur cet intervalle. L'affirmation est donc vraie.
- Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est égal au coefficient directeur de la droite (AB) : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{3}{5} = -0,6$. L'affirmation est vraie.
- La droite $\mathcal{T}$ coupe l'axe des ordonnées en 0,4, donc d'après la question précédente, son équation réduite est : $y = -0,6x + 0,4$. L'affirmation est fausse.
- La fonction f est croissante sur $[1; 2]$, sa dérivée est donc positive sur cet intervalle. L'affirmation est vraie.

EXERCICE 595

Partie A

1.	Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
	Tableau de signes	b	d	c	a
2.	Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
	Tableau de variations	c	b	a	d
3.	Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
	Tableau des signes des dérivées	c	b	d	a

Partie B

- En développant l'expression de $g(x)$, on obtient $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.
- $g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = (x+1)(1-3x)$ car -1 est une racine évidente.
- $g'(x)$ s'annule pour $x = -1$ et pour $x = \frac{1}{3}$. On peut donc dresser un tableau de signes pour obtenir le signe de la dérivée et donc les variations de la fonction g .

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	1
$g'(x)$	-	0	+	-
g	3	↘ ↗		0

- La seule fonction décroissante, puis croissante et enfin décroissante est la fonction f_1 .

EXERCICE 596**Partie A**

- $f(3) \approx 14,3$
- Le point d'intersection des deux courbes est approximativement de coordonnées (7 ; 9).

Partie B

- $f(x) = g(x) \iff 0,05x^2 - 2x + 20,35 = 0,7x + 3,9$
Soit en simplifiant $0,05x^2 - 2,7x + 16,45 = 0$.
 - $\Delta = 4$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = 7$ et $x_2 = 47$.
 - Seule la solution $x_1 = 7$ appartient à l'intervalle $[0 ; 22]$ et $g(7) = 8,8$.

Les deux courbes se coupent au point de coordonnées (7 ; 8,8).

- La fonction f est dérivable sur $[0 ; 22]$,
 $f'(x) = 2 \times 0,05x + 2,7 \times 1 + 0 = 0,1x + 2,7$
 - $f'(x) > 0 \iff 0,1x + 2,7 > 0 \iff x > -27$
On en déduit que f' est négative sur $[0 ; 20]$ et positive sur $[20 ; 22]$.

c.

x	0	20	22
$f'(x)$	-	0	+
f	20,35	↘ ↗	

EXERCICE 597

- Le chiffre d'affaires réalisé pour la vente de 4 hectolitres est 6 000 €. Le point A appartenant à la droite a pour coordonnées (4 ; 600).
 - Le coût de fabrication de 4 hectolitres est d'environ 2 000. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4. Avec la précision du graphique, nous trouvons 200, ce qui correspond à 2 000 €.
 - Le bénéfice réalisé pour la vente de 4 hectolitres est d'environ 4 000 €.
 - Lors de la production et la vente de 4 hectolitres, l'entreprise ne réalise pas le bénéfice maximal. La distance entre un point de la courbe et le point de la droite de même abscisse semble supérieure lorsque $x = 7$.
- Par lecture graphique, le nombre d'hectolitres que doit produire l'entreprise pour réaliser des profits, c'est-à-dire un bénéfice strictement positif devrait appartenir à l'intervalle $[0,6 ; 11]$. Il y a un bénéfice strictement positif lorsque la droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts. Nous lisons les abscisses des points d'intersection des deux courbes et prenons l'intervalle entre ces valeurs.
- La représentation graphique de la fonction R est une droite qui passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées (4 ; 600). Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{600}{4}$ soit 150. Passant par l'origine, son équation est de la forme $y = mx$.
D'où $R(x) = 150x$.
- On note B' la fonction dérivée de la fonction B .
 $B'(x) = -2(3x^2) + 15(2x) + 84 = -6x^2 + 30x + 84$.
 - Pour simplifier, commençons par mettre -6 en facteur, l'équation devient alors $x^2 - 5x - 14 = 0$.
 $\Delta = 81 > 0$.
L'équation a deux racines réelles distinctes
 $x_1 = \frac{-(-5) - 9}{2} = -2$ $x_2 = \frac{5+9}{2} = 7$.
Il en résulte $-6x^2 + 30x + 84 = -6(x+2)(x-7)$
Étudions le signe de $B'(x)$ sur $[0 ; 12]$:
 x étant positif le signe de $B'(x)$ est celui de $7 - x$.
Si $x \in [0 ; 7[$ $7 - x > 0$ par conséquent $B'(x) > 0$ et si $x \in]7 ; 12]$ $7 - x < 0$, par conséquent $B'(x) < 0$.
 - Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement

croissante sur I .

Sur $[0; 7]$, $B'(x) > 0$ donc B est strictement croissante sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Sur $]7; 12]$, $B'(x) < 0$ donc B est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	0	7	12
$B'(x)$	+	0	-
B	50	587	-338

d. Pour sept hectolitres de désinfectant produits et vendus le bénéfice est maximal. Le bénéfice est alors de 5870 €.

EXERCICE 598

PARTIE A

1. $\Delta = 122\,500 > 0$. L'équation a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-450 - \sqrt{122\,500}}{-2} = 400 \quad x_2 = \frac{450 - 350}{2} = 50$$

Seule la solution $x_2 = 50$ est dans l'intervalle $[0; 300]$.

2. a. Pour tout $x \in [0; 300]$, $f'(x) = -2x + 450$.

b. Etudions d'abord le signe de $f'(x)$ sur $[0; 300]$.

Sur $\mathbb{R}$, $-2x + 450 > 0 \iff x < 225$.

Ainsi si $x \in [0; 225[$, $f'(x) > 0$ donc f croissante

si $x \in]225; 300]$, $f'(x) < 0$ donc f décroissante.

x	0	225	300
$f'(x)$	+	0	-
f	-20000	30625	25000

c. La fonction f étant croissante sur $[0; 225[$ et décroissante sur $]225; 300]$, elle admet un maximum valant 30 625 en 225.

PARTIE B

1. A partir de 50 tablettes tactiles produites et vendues par semaine l'entreprise réalise un bénéfice. Nous avons montré à la question A.1 que $f(50) = 0$ et que f est positive sur l'intervalle $[50; 300]$.

2. Le nombre de tablettes tactiles fabriquées et vendues permettant de réaliser le bénéfice hebdomadaire maximal est 225, valeur en laquelle f atteint son maximum. La valeur de ce bénéfice est 30 625 €.

EXERCICE 599

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et
- $$f'(x) = 2 \times e^{-x+4} + (2x-5) \times (-1)e^{-x+4} + 0$$
- $$= (-2x+7)e^{-x+4}$$
2. Pour tout x réel, $e^{-x+4} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+7$.

$$-2x+7 > 0 \iff 7 > 2x \iff \frac{7}{2} > x \iff x < 3,5$$

On calcule :

$$f(0) = -5e^4 + 20 \approx -252,991;$$

$$f(3,5) = 2e^{0,5} + 20 \approx 23,297$$

$$f(10) = 15e^{-6} + 20 \approx 20,037$$

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1,6	3,5	10
$f'(x)$		+	0	-
f	-252,001	8	23,297	20,037

Partie B

1. D'après les résultats de la première partie, le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.

$f(3,5) \approx 23,297$ donc le bénéfice maximal réalisé est de 23 297 €.

2. L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) > 0$.

D'après le tableau de variation de la fonction f , il faut pour cela que $x > 1,60$. Il faut donc vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.

EXERCICE 600

Partie A

1. a. D'après le graphique, le maximum de la fonction f est $f(40) = 10$.

Le nombre 40 correspond au 10 août, et 10 correspond à 10 000 habitants.

Le nombre maximum d'habitants est donc de 10 000 et est atteint le 10 août.

b. Chaque habitant consomme entre 45 et 55 litres d'eau, 10 000 habitants consommeront donc entre 450 000 et 550 000 litres au maximum.

Comme la commune peut fournir 600 000 litres d'eau par jour, c'est suffisant pour la journée la plus chargée, donc pour toutes les autres.

- 2.** Le maximum d'habitants prévus est 10 000 donc 80 % du maximum est égal à 8 000 habitants.

Chercher le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants est supérieur à 80 % du nombre maximal prévu, revient à résoudre sur l'intervalle $[0; 70]$ l'inéquation $f(x) \geq 8$.

$f(x) \geq 8$ sur l'intervalle $[17; 70]$, soit pendant 53 jours.

Partie B

- 1.** $f(9) = 2 + 0,2 \times 9 \times e^{-0,025 \times 9 + 1} \approx 5,90706$
 $x = 9$ correspond au 10 juillet. Il y a une estimation de $5,907 \times 1000 = 5907$ habitants à cette date.
 Chaque habitant consomme au maximum 55 litres, donc la consommation d'eau maximale le 10 juillet sera de $5907 \times 55 \approx 324885$ litres que l'on peut majorer par 324890 litres.

- 2. a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 70]$,
 $f'(x) = 0,2 \times 1 \times e^{-0,025x+1} + 0,2x \times (-0,025)e^{-0,025x+1}$
 $= (0,2 - 0,005x)e^{-0,025x+1}$.

b. Pour tout x réel, $e^{-0,025x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2 - 0,005x$.

$$0,2 - 0,005x > 0 \iff \frac{0,2}{0,005} > x \iff 40 > x$$

x	0	40	70
$f'(x)$		+	0 -
f			

c. D'après le tableau de variation précédent, la fonction f est croissante sur $[0; 40]$, puis décroissante sur $[40; 70]$. Elle atteint donc un maximum pour $x = 40$. Cette valeur de x correspond au 10 août et à un maximum de population dans la station, donc à un maximum de consommation d'eau.

EXERCICE 601

- 1.** • En posant $m = n = 0$, on obtient
 $f(0+0) = f(0) + f(f(0))$
 d'où $f(0) = f(0) + f(f(0))$
 on en déduit alors $f(f(0)) = f(0) - f(0) = 0$.
 • En posant $m = 0$ et $n = f(0)$, on obtient :
 $f(0 + f(0)) = f(0) + f(f(f(0)))$
 d'où $f(f(f(0))) = f(0) + f(0)$
 on en déduit alors $2f(0) = 0$ et donc $f(0) = 0$.
2. En posant $m = 0$, on obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $f(0 + n) = f(0) + f(f(n))$ d'où $f(f(n)) = f(n)$.
3. En posant $n = 1$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $f(m+1) = f(m) + f(f(1)) = f(m) + f(1)$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = f(n)$
 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + u_1$
 La suite (u_n) est arithmétique de raison u_1 .
 Ainsi : $u_n = u_0 + nu_1$
 on a alors $f(n) = f(0) + nf(1) = 0 + nf(1) = nf(1)$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = f(n)$
 $f(f(n)) = f(nf(1)) = nf(1)f(1)$.
 D'autre part $f(n) = nf(1)$ d'où $nf(1)f(1) = nf(1)$
 En posant $n = 1$, on obtient : $f(1)(f(1) - 1) = 0$
 On en déduit alors que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$
 • Si $f(1) = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) = nf(1) = 0$
 • Si $f(1) = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) = nf(1) = n$.

EXERCICE 602

- 1. a.** $f(1) = f(1+0) = f(1) \times f(0) + f(1) + f(0) = 2f(0) + 1$
 on en déduit alors que $f(0) = 0$.
b. $f(2) = f(1+1) = f^2(1) + 2f(1) = 3$
 $f(3) = f(1+2) = f(1) \times f(2) + f(1) + f(2) = 7$
 $f(6) = f(3+3) = f(3) \times f(3) + 2f(3) = 63$.
2. $f(n+1) = f(n) \times f(1) + f(n) + f(1) = 2f(n) + 1$
3. $g(n+m) = f(n+m) + 1 = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m) + 1$
 $g(n) \times g(m) = (f(n) + 1)(f(m) + 1)$
 $g(n) \times g(m) = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m) + 1$.
 d'où $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.
4. Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, la fonction $g : n \mapsto a^n$ vérifie la relation $g(n+m) = g(n) \times g(m)$
 Une fonction f est donc de la forme $f(n) = a^n - 1$
 la condition $f(1) = 1$ impose $a = 2$
 ainsi $f(n) = 2^n - 1$.

EXERCICE 603

1. D'après la calculatrice, il semble que $f(x) = 1$ quel que soit $x \in [5; 10]$.

2. On pose $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$ donc $\sqrt{u^2} = u$

$$f(x) = \sqrt{u^2 + 1 - 4\sqrt{u^2} + 3} + \sqrt{u^2 + 1 - 6\sqrt{u^2} + 8}$$

$$= \sqrt{u^2 - 4u + 4} + \sqrt{u^2 - 6u + 9}$$

$$= \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}.$$

$$x = u^2 + 1 \text{ donc } u = \sqrt{x-1}$$

pour $5 \leq x \leq 10$ on a $2 \leq u \leq 3$

donc $u-2 \geq 0$ et $3-u \geq 0$

$$\text{alors } f(x) = (u-2) - (3-u) = 1.$$

3. Le changement de variable est valable pour tout $x \geq 1$

$$\text{Si } x \in [1; 5], f(x) = (2-u) + (3-u) = 5 - 2\sqrt{x-1}$$

$$\text{Si } x \in [10; +\infty[, f(x) = (u-2) + (u-3) = 2\sqrt{x-1} - 5.$$

4. f est dérivable sur $]1; 5[$, sur $]5; 10[$ et sur $]10; +\infty[$.

• Dérivabilité en 5 :

à droite de 5 : $f'_d(5) = 0$ car la fonction est constante sur $]5; 10[$

$$\text{Pour } x < 5, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ donc}$$

$$\text{à gauche de 5 : } f'_g(5) = -\frac{1}{2}$$

f n'est pas dérivable en 5 car $f'_d(5) \neq f'_g(5)$.

• Dérivabilité en 10 :

à gauche de 10 : $f'_g(10) = 0$ car la fonction est constante sur $]5; 10[$

$$\text{Pour } x > 10, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ donc}$$

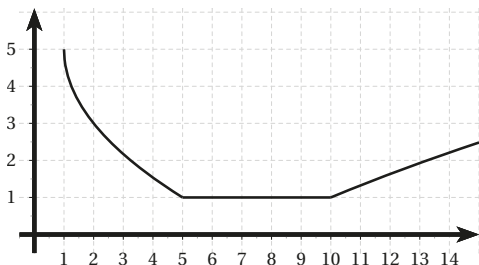
$$\text{à droite de 10 : } f'_g(10) = \frac{1}{3}$$

f n'est pas dérivable en 10 car $f'_d(10) \neq f'_g(10)$.

5. f est décroissante sur $]1; 5[$

constante sur $]5; 10[$ et croissante sur $]10; +\infty[$.

6.



EXERCICE 604

Partie A : Etude mathématique

1. $f(4) = f(2 \times 2) = 2f(2) = 2 \times 3,0103 = 6,0206$

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	3,0103	4,7712	6,0206	6,9897	7,7815

x	7	8	9	10	100
$f(x)$	8,4510	9,0309	9,5424	10,000	20,000

x	1000	10000	1000000	10^9
$f(x)$	30,000	40,000	60,000	90,000

2. $f(245) = f(5 \times 49) = f(5) + f(7 \times 7)$
 $= f(5) + 2f(7) = 23,8917.$

3. $f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

$$\text{d'autre part } f(1 \times 1) = f(1)$$

on en déduit alors que $f(1) = 0$.

4. Pour tout réel y strictement positif,

$$f\left(y \times \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) = 0$$

$$\text{d'où } f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y).$$

Partie B

1. D'après la partie précédente,

$$\forall x > 0, f(10x) = f(10) + f(x) = 10 + f(x).$$

2. D'après la partie précédente, $f(1000000) = 60$.

3. $f(10^{11}) = 110$.

4. Soit a et b les indices respectifs des intensités des machines A et B .

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) = 3.$$

On a alors $\frac{a}{b} \approx 2$. La machine A est deux fois plus bruyante que la machine B .

EXERCICE 605

1. $f'(x) = 2e^{2x} \sin(2x) + 2e^{2x} \cos(2x)$
 $= 2e^{2x} (\sin(2x) + \cos(2x)).$

2. $2e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(\sin(2x) + \cos(2x))$.

$$\sin(2x) + \cos(2x) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

x	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$	0

EXERCICE 606

- $f(x) = 2x$ ou $f(x) = 2x + 1$ ou $f(x) = 2x - 9$
- $f(x) = x^2 + 3x$ ou $f(x) = x^2 + 3x + 4$
- $f(x) = x^5 + x^3 + 2x$ ou $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 1$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \sqrt{5}$

Il y a une infinité de fonctions f . On les obtient toutes en ajoutant, dans chaque cas, une constante c à la première obtenue.

EXERCICE 607

- Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

On a alors :

$$g'(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d + 3ax^2 + 2bx + c) e^x \\ = (ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+2b)x + (c+d)) e^x$$

d'autre part $g'(x) = e^x (x^2 - 3x + 2)$.

L'égalité entre les deux expressions étant vraie pour tout réel x , par identification des coefficients des facteurs de même puissance, nous obtenons :

$$a = 0; b = 1; c = -5 \text{ et } d = 7$$

$$\text{Ainsi } g(x) = (x^2 - 5x + 7) e^x.$$

- Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $(x-1)(x-2)$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	0 $3e$ e^2 $+\infty$				

EXERCICE 608

- $f(x) = x$, $f(x) = -x$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- a. Pour tout $x \in [-1; 1]$, $-1 \leq f(x) \leq 1$

donc $-1 \leq f(0) \leq 1$ soit encore $-1 \leq d \leq 1$, d étant entier, on en déduit que d ne peut prendre que les valeurs -1 ; 0 et 1 .

b. Premier cas $d = 0$ alors $f(x) = bx^2 + cx$

i. $f(-1) + f(1) = 2b$ et $-2 \leq 2b \leq 2$

f étant une fonction du second degré, on en déduit que b ne peut prendre que les valeurs -1 et 1 .

ii. Si $b = -1$ alors $f(x) = -x^2 + cx$ admet un maximum en $\frac{c}{2}$ et $f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4}$.

Les conditions $\frac{c^2}{4} \leq 1$, $f(1) = c - 1 \geq -1$ et

$$f(-1) = -c - 1 \geq -1 \text{ entraînent que } c = 0$$

ainsi $f(x) = -x^2$

Si $b = 1$ alors $f(x) = x^2 + cx$ admet un maximum en

$$-\frac{c}{2} \text{ et } f\left(-\frac{c}{2}\right) = -\frac{c^2}{4}.$$

Les conditions $-1 \leq -\frac{c^2}{4}$, $f(1) = c + 1 \leq 1$ et

$$f(-1) = -c + 1 \leq 1 \text{ entraînent que } c = 0$$

ainsi $f(x) = x^2$

c. Deuxième cas $d = -1$ ou $d = 1$.

i. Supposons $d = 1$ et $b > 0$

Il faut que $f(-1) = b + c + 1 \leq 1$ et $f(1) = b - c + 1 \leq 1$ donc $c = 0$.

Par un raisonnement analogue avec $b < 0$ et $d = \pm 1$, on en déduit que f est d'extremum $S(0; d)$.

Si $d = 1$ $S(0; 1)$ sera un maximum donc $b < 0$

alors $f(-1) = b + 1 \geq -1$ donc $-2 \leq b < 0$.

Si $d = -1$, $S(0; -1)$ sera un minimum donc $b > 0$

alors $f(-1) = b - 1 \leq 1$ donc $0 < b \leq 2$

ii. On en déduit $f(x) = -2x^2 + 1$, $f(x) = -x^2 + 1$,

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f(x) = 2x^2 - 1$$

- Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{E}$.

$$-2 \leq f(x) + f(-x) \leq 2 \text{ d'où } -1 \leq g(x) \leq 1$$

on vérifie de même que $-1 \leq h(x) \leq 1$

ainsi g et h appartiennent à $\mathcal{E}$.

- a. D'après la question précédente, $f \in \mathcal{E} \implies h \in \mathcal{E}$

ce qui implique $-1 \leq h(1) \leq 1$ et $-1 \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$ soit

$$-1 \leq a + c \leq 1 \text{ et } -1 \leq \frac{a}{8} + \frac{c}{2} \leq 1$$

On en déduit alors $-4 \leq a \leq 4$ soit $|a| \leq 4$.

b. En étudiant les variations de p , on vérifie que pour $x \in [-1; 1]$, $-1 \leq p(x) \leq 1$.

c. D'après la question 4.a, $M \leq 4$ et d'après 4.b, l'égalité est atteinte, donc $M = 4$.

EXERCICE 609

1. • si $x \in [0; 2]$, $f(x) = -4x^2 + 8x$
 • si $x \in [2; 4]$, $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
 • si $x \in [4; 6]$, $2 < x - 2 \leq 4$ et $0 < x - 4 \leq 2$

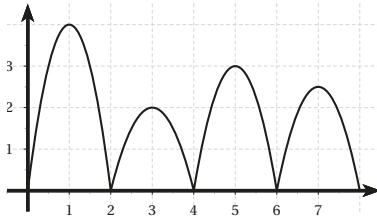
$$f(x) = \frac{1}{2} \left(-2(x-2)^2 + 12(x-2) - 16 - 4(x-4)^2 + 8(x-4) \right)$$

$$= -3x^2 + 30x - 72.$$

 • si $x \in [6; 8]$, $4 < x - 2 \leq 6$ et $2 < x - 4 \leq 4$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(-3(x-2)^2 + 30(x-2) - 72 - 2(x-4)^2 + 12(x-4) - 16 \right)$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 + 35x - 120.$$



2. On a $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = 0$
 on montre alors que pour tout n entier naturel pair,

$$f(n) = \frac{1}{2} (f(n-2) + f(n-4)) = 0$$

 Si $n = 2p + 1$ avec p entier naturel, n est un entier naturel impair :
 $f(1) = 4, f(3) = 2, f(5) = 3, f(7) = \frac{5}{2}$
 On remarque que $f(3) = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$$f(5) = 4 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

 On peut montrer que :

$$f(2p+1) = 4 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^p \right)$$

 En utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on obtient :

$$f(2p+1) = 4 \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1} \right)$$

 La limite des images par f des entiers impairs est $\frac{8}{3}$.

EXERCICE 610

- Pour tout réel x ,
 $f(x+20) = f((x+10)+10) = f(10-(x+10)) = f(-x).$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(x+20) &= -f(20-x) = -f(10-(x-10)) \\ &= -f(10+x-10) = -f(x). \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$, la fonction f est impaire

- Pour tout réel x ,
 $f(40+x) = f((x+20)+20) = -f(20-(x+20))$

$$= -f(-x) = f(x),$$

la fonction f est périodique, de période 40.

EXERCICE 611**Partie A**

1. 13 est premier par définition de f , on a $f(13) = 1$
 $f(6) = f(2 \times 3) = 2f(3) + 3f(2) = 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5.$
 2. $f(0) = f(0 \times 0) = 0f(0) + 0f(0) = 0$
 $f(1) = f(1 \times 1) = 2f(1)$ on en déduit alors que $f(1) = 0$.

3.

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	0	0	1	1	4	1

n	6	7	8	9	10
$f(n)$	5	1	12	6	7

n	11	12	13	14	15
$f(n)$	1	16	1	9	8

n	16	17	18	19	20
$f(n)$	20	1	21	1	24

4. a. Si p et q sont deux nombres premiers alors par définition de f , $f(p) = f(q) = 1$
 d'où $f(p \times q) = pf(q) + qf(p) = p + q.$
 b. $f(209) = f(11 \times 19) = 11 + 19 = 30.$
 c. Les sommes de nombres premiers possibles sont :
 $1 + 29; 7 + 23; 11 + 19$ et $13 + 17$
 On en déduit alors que N peut prendre quatre valeurs : 29; 161; 209 et 221.
 5. a. $f(p^1) = 1 \times p^0 = 1 \times 1 = 1$
 $f(p^2) = f(p \times p) = p + p = 2p$
 $f(p^3) = f(p \times p^2) = pf(p^2) + p^2f(p)$

$$= p \times 2p + p^2 \times 1 = 3p^2.$$

 b. $f(49) = f(7^2) = 2 \times 7 = 14,$
 $f(392)f(7^2 \times 2^3) = 49f(7^2) + 8f(2^3)$

$$= 49 \times 3 \times 2^2 + 8 \times 2 \times 7 = 700$$

 $f(f(392)) = f(700) = f(25 \times 28) = 25f(28) + 28f(25).$

$$f(25) = f(5^2) = 2 \times 5 = 10$$

$$f(28) = f(4 \times 7) = 4f(7) + 7f(4) = 32$$

On en déduit alors $f(f(392)) = 1080$.

$$6. \text{ Par exemple } 4 = 2^2, 27 = 3^3, 3125 = 5^5 \text{ et } 823543 = 7^7.$$

Partie B

- $f(1) = f(-1 \times (-1)) = -1f(-1) - 1f(-1) = -2f(-1)$
d'autre part $f(1) = 0$ on en déduit alors que $f(-1) = 0$.
- $f(-n) = f(-1 \times n) = -1f(n) + nf(-1) = -f(n)$.

Partie C

- $f(1) = f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2)$
d'autre part $f(1) = 0$
d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}f(2) = -\frac{1}{4}$.
- Pour tout a est un entier relatif et b un entier naturel non nul,
 $f(a) = f\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \frac{a}{b}f(b) + bf\left(\frac{a}{b}\right)$
d'où $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{bf(a) - af(b)}{b^2}$.
- $f\left(\frac{17}{49}\right) = \frac{49f(17) - 17f(49)}{49^2} = \frac{49 \times 1 - 17 \times 2 \times 7}{49^2}$
 $= -\frac{27}{343}$.

Partie D

Pour tout a entier naturel,

$$f(a) = f((\sqrt{a})^2) = 2\sqrt{a}f(\sqrt{a})$$

$$\text{d'où } f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2\sqrt{a}}f(a)$$

On en déduit alors

$$f(6\sqrt{3}) = \sqrt{3}f(6) + 6f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times 5 + \frac{6}{2\sqrt{3}}f(3) = 8\sqrt{3}.$$

EXERCICE 612

Partie A

- a.** $f_1(0) = 0, f_1(1) = 1$
 $f_1'(x) = 3(2x - 1)^2 \geq 0$ f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$.
Les trois propriétés sont vérifiées, f_1 est une fonction de retouche.
- b.** En traçant la droite d'équation $y = x$, la courbe est sous la droite pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
d'où les x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ seront éclaircies par la fonction f_1 .
- c.** $f_1(x) \leq x \iff x(x-1)(2x-1) \leq 0$ donc sachant que $0 < x < 1$ on en déduit que $x \geq \frac{1}{2}$.

$$2. \text{ a. } f_2(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{b. } f_3(x) = x^3$$

Partie B

- g_1 est une fonction polynôme du second degré donc
 $g_1(x) = ax^2 + bx + c$
 $g_1(0) = 0$ donc $c = 0$
 $g_1(1) = 1$ donc $a + b = 1$
 $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ donc $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{2}{3}$
En résolvant le système, on obtient $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$
- a.** $g_2(0) = 0, g_2(1) = 1$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$
b. Il faut résoudre l'équation : $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$
Cette équation admet deux solutions
 $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$
seule x_2 appartient à l'intervalle $[0; 1]$
on en déduit alors $g_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.
- c.** L'équation $g_1(x) = y$ admet deux solutions
 $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 24y}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24y}}{4}$
seule x_2 appartient à l'intervalle $[0; 1]$
- d.** D'après la question précédente :
 $g_2(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24x}}{4}$.

EXERCICE 613

$$f(1; 0) = f(0; 1) = 2$$

$$f(2; 0) = f(1; 1) = f(0; f(1; 0)) = f(0; 2) = 3$$

$$f(1; 2) = f(0; f(1; 1)) = f(0; 3) = 4$$

$$f(2; 1) = f(1; f(2; 0)) = f(1; 3) = f(0; f(1; 2)) = f(0; 4) = 5$$

$$f(1; 4) = f(0; f(1; 3)) = f(0; 5) = 6$$

$$f(2; 2) = f(1; f(2; 1)) = f(1; 5) = f(0; f(1; 4)) = f(0; 6) = 7.$$

EXERCICE 614

$$1. \text{ a. } \bullet f(x) = x$$

$$(a-b)f(a+b) - (a+b)f(a-b)$$

$$= (a-b)(a+b) - (a+b)(a-b) = 0$$

$$\neq 4ab(a^2 - b^2) \text{ si } a \text{ et } b \text{ non nuls et } a^2 \neq b^2.$$

$$\bullet f(x) = x^2$$

$$(a-b)f(a+b) - (a+b)f(a-b)$$

$$= (a-b)(a+b)^2 - (a+b)(a-b)^2$$

$$= 2b(a-b)(a+b)$$

$$\neq 4ab(a^2 - b^2) \text{ si } a \neq \frac{1}{2}, b \neq 0 \text{ et } a^2 \neq b^2.$$

• $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}(a-b)f(a+b) - (a+b)f(a-b) \\ = (a-b)(a+b)^3 - (a+b)(a-b)^3 \\ = 4ab(a^2 - b^2).\end{aligned}$$

Seul Chang a raison.

b. On prend $a = \pi$ et $b = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\text{et } 4ab(a^2 - b^2) = \frac{3\pi^4}{2}.$$

- 2. a.** Si on choisit $a = 0$, on a $\forall b \in \mathbb{R}, -bf(b) - bf(-b) = 0$ d'où pour tout $b \neq 0, f(-b) = -f(b)$

Ali a raison, f est impaire.

b. $(a-b)(a+b)^4 - (a+b)(a-b)^4$
 $= (a^b - b^2)((a+b)^3 - (a+b)^3)$
 $= 2b(a^2 - b^2)(3a^2 + b^2)$
 $\neq 4ab(a^2 - b^2)$ si a^2 et b^2 non nuls et distincts et $2a \neq 3a^2 + b^2$.

La fonction $x \mapsto x^4$ ne vérifie pas la propriété (P).

c. D'après **1.b** la fonction sinus ne vérifie par (P) bien qu'elle soit impaire.

- 3. a.** En choisissant $a+b=2$ et $a-b=1$ soit $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$

Si f vérifie (P) alors $f(2) - 2f(1) = 3\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = 6$.

Ben a raison.

b. Si $a+b = \frac{3}{2}$ et $a-b=1$ alors $a = \frac{7}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$

Si f vérifie (P) alors $2f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}f(2) = -\frac{21}{4}$.

- 4.** Si $a+b=x$ et $a-b=1$ alors $a = \frac{x+1}{2}$ et $b = \frac{x-1}{2}$

Si f vérifie (P) alors $f(x) - xf(1) = x(x^2 - 1)$.

On a donc $f(x) = x^3 + x(f(1) - 1)$.

- 5.** Réciproquement, soit k un réel quelconque, la fonction $f(x) = x^3 + x(k-1)$ satisfait (P) en effet

$$\begin{aligned}(a-b)f(a+b) - (a+b)f(a-b) \\ = (a-b)(a+b)\left((k+(a+b)^2-1) - (k+(a-b)^2-1)\right) \\ = 4ab(a^2 - b^2).\end{aligned}$$

EXERCICE 615

Partie A

1. $\sqrt{56} = 14\sqrt{1 - \frac{5}{7}}$

2. $\sqrt{139} = a\sqrt{1-b}$ avec $a^2 > 139$ soit $a > 12$
 $\sqrt{139} = 12\sqrt{1 - \frac{5}{144}} = 18\sqrt{1 - \frac{185}{324}} = 24\sqrt{1 - \frac{437}{576}}$.

- 3.** Pour tout entier naturel $n, \sqrt{n} = n\sqrt{1 - \frac{n-1}{n}}$
 ou encore pour tout a entier tel que $a^2 > n$, on peut écrire $\sqrt{n} = a\sqrt{1-b}$ avec $b = 1 - \frac{n}{a^2}$.

Partie B

1. $f(1) = 0, f(0) = 1, f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{5}{9}\right) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

- 2.** Pour tout couple $(p; q)$ d'entiers naturels, avec $p \leq q$,

$$f\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) = \frac{p}{q}.$$

- 3.** $r = f(0) = 1, r+s = f(1) = 0, r + \frac{3}{4}s - \frac{3}{16}t = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

On en déduit : $r = 1, s = -1$ et $t = -\frac{4}{3}$.

- 4.** $g(x) = 1 - x - \frac{4}{3}x(x-1) = (1-x)\left(1 + \frac{4}{3}x\right)$

On a $\sqrt{139} = 18\sqrt{1 - \frac{185}{324}}$

$$g\left(\frac{185}{324}\right) = \frac{139}{324}\left(1 + \frac{185}{243}\right) = \frac{139}{324} \times \frac{428}{243}$$

d'où $\sqrt{139} \approx 13,6$

En utilisant $\sqrt{139} = 24\sqrt{1 - \frac{437}{576}}$ on obtient

$$\sqrt{139} \approx 11,65$$

Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{139} \approx 11,8$. La seconde approximation est donc meilleure.

☞ **Remarque :** l'algorithme de Héron donne une meilleure approximation :

En effet $121 < 139 < 144$ donc $11 < \sqrt{139} < 12$

d'où $\frac{1}{2}\left(12 + \frac{139}{12}\right) < \sqrt{139} < \frac{1}{2}\left(11 + \frac{139}{11}\right)$

soit $11,79 < \sqrt{139} < 11,82$.

EXERCICE 616

- 1.** En regroupant les termes consécutifs deux par deux :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{p=1}^{1010} ((2p-1)(x+2p-1) - 2p(x+2p)) \\ &= \sum_{p=1}^{1010} (1-x-4p) = -1010(x+2021).\end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution :

$$x = -2021.$$

- 2.** Pour tout entier relatif impair k , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2n+1$ alors d'après la question précédente

$$f(k) = -1010(k + 2021) = -1010(2n + 2022) \\ = -2020(n + 1011).$$

3. D'après la question précédente $f(k) = 2020$ si et seulement si $n = -1012$ c'est-à-dire $k = -1023$.

EXERCICE 617

On pose $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$

f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 8x - 7$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x - 8$$

$\Delta = 1284 > 0$, $f''(x)$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{30 - \sqrt{1284}}{24} \approx -0,24 \text{ et } x_2 = \frac{30 + \sqrt{1284}}{24} \approx 2,74$$

On en déduit le tableau de variations de f'

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
f'	$-\infty$	$\nearrow f'(x_1)$	$\searrow f'(x_2)$	$\nearrow +\infty$	

$f'(x_1) \approx -6$, on en déduit que la fonction f' ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$, pour un réel x_3 appartenant à $]x_2; +\infty[$.

A la calculatrice, on obtient $x_3 \approx 4,31$.

On en déduit alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow f(x_3)$	$\nearrow +\infty$

A la calculatrice, on obtient $f(x_3) \approx -156$.

La fonction f s'annule en α appartenant à $] -\infty; x_3[$ et en β appartenant à $]x_3; +\infty[$.

$x_3 \approx 4,31$ et $f(0) = 4$ on en déduit que $\alpha \in]0; x_3[$

L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc aucune solution réelle négative.

EXERCICE 618

1. $\mathcal{R} = x \times QR$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC :

$$\frac{RS}{AC} = \frac{BR}{BA}$$

Dans le triangle AHB : $\frac{RQ}{BH} = \frac{AR}{AB} = 1 - \frac{BR}{AB}$

On en déduit alors $\frac{RS}{AC} = 1 - \frac{RQ}{BH}$ soit $RQ = \frac{h(b-x)}{b}$

Ainsi $\mathcal{R} = \frac{xh(b-x)}{b}$.

2. a. $\mathcal{R}'(x) = \frac{h(b-2x)}{b}$

L'aire $\mathcal{R}$ est maximale pour $x = \frac{b}{2}$, elle est alors égale à $\frac{bh}{4}$.

b. $\mathcal{A} = \frac{bh}{2}$ d'où $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}} = 2$.

3. a. $PQRS$ est un carré si $PQ = PS$ soit si $x = \frac{bh}{b+h}$.

b. Le carré est d'aire maximale si $x = \frac{b}{2}$ donc si $b = h$.

EXERCICE 619**Partie A**

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
φ	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

2. D'après le tableau de variations précédent l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α .

En utilisant la calculatrice, nous obtenons

$$\varphi(-1,28) < 0 \text{ et } \varphi(-1,27) > 0 \text{ donc}$$

$$-1,28 < \alpha < -1,27.$$

3. $\varphi(x) < 0$ sur $] -\infty; \alpha[$ et $\varphi(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B

1. $f'(x) = \frac{(xe^x + e^x)(e^x + 1) - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x \varphi x}{(e^x + 1)^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.

On en déduit que f est décroissante sur $] -\infty; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

2. Par définition de α : $e^\alpha = -\alpha - 1$ d'où

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

on en déduit alors que $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$.

3. $\mathcal{T}$ d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.

Etude de la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$:

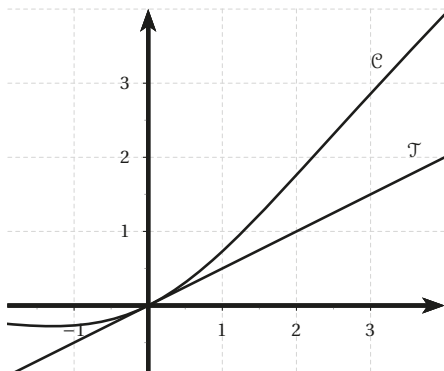
$$f(x) - y = \frac{\frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x + 1} \geq 0$$

La courbe $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de $\mathcal{T}$.

4.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f			

5.



EXERCICE 620

1. a. f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$, f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. M et M' sont symétriques par rapport à Ω si et seulement si $\overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'}$

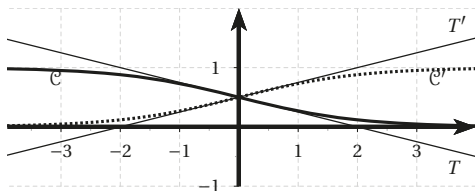
On a alors $x' + x = 2x_\Omega$ et $f(x') + f(x) = 2y_\Omega$.

$$\begin{aligned} \text{c. } f(x') + f(x) &= \frac{1}{e^{x'} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{e^x + 1} = 1 \end{aligned}$$

Le point Ω de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

d. T de coefficient directeur $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

e.



2. a. Pour tout nombre réel x , on a $g(x) = f(-x)$, Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie d'axe (Oy) .

b. On vérifie que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) + g(x) = 1$.

Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie de centre Ω .

c. T' est de coefficient directeur $g'(0) = -f'(0) = \frac{1}{4}$

d. Cf graphique précédent.

EXERCICE 621

1. $E(\sqrt{2057}) = 45$,

$2057 - 46 \times 45 + 13 = 0$ donc $\sqrt{2057}$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

2. a. $f(1) = 1 - 46 \times E(1) + 13 = -32 \neq 0$

1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Si $x < 1$ alors $-46 \times E(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 13 > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution.

3. a. Puisque $E(x) \leq x$ alors $-46E(x) \geq -46x$ on en déduit alors que pour tout réel x , $f(x) \geq p(x)$.

b. D'après la question précédente $0 < p(x) \leq f(x)$ et $f(x) \neq 0$, l'équation n'a donc pas de solution.

4. $p(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 23 - \sqrt{516}$ et $x_2 = 23 + \sqrt{516}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+

D'après la question précédente, pour que x soit solution, il faut que $x_1 < x < x_2$

$45 < x_2 < 46$ on en déduit donc que $x < 46$.

5. a. On a $x - 1 < E(x)$, $-46E(x) < -46x + 46$ et $f(x) < p(x) + 46$.

$$\text{b. } p(x) + 46 = (x - (23 - \sqrt{470}))(x - (23 + \sqrt{470}))$$

On a $x_1 < 23 - \sqrt{470} < 23 + \sqrt{470} < x_2$.

• Si $23 - \sqrt{470} < x < 23 + \sqrt{470}$ alors $p(x) + 46 < 0$ et $f(x) < 0$, x ne peut pas être solution.

• $x_1 < x \leq 23 - \sqrt{470}$, d'après 2.a et 2.b, l'intervalle se réduit à $1 < x \leq 23 - \sqrt{470} < 2$.

On a alors $E(x) = 1$ et $f(x) = x^2 - 33$ soit

$$f(x) < 2^2 - 33 < 0, x \text{ n'est donc pas solution.}$$

• $44 < 23 + \sqrt{470} \leq x < x_2$, on en déduit que si x est solution alors $44 < x < 46$.

6. a. D'après la question précédente, $E(x) = 44$ ou

$$E(x) = 45$$

b. Si $E(x) = 44$ alors $x^2 = 46 \times 44 - 13 = 2011$ donc $\alpha = \sqrt{2011}$

Si $E(x) = 45$ alors $x^2 = 46 \times 45 - 13 = 2057$ donc $x = \sqrt{2057}$.

EXERCICE 622

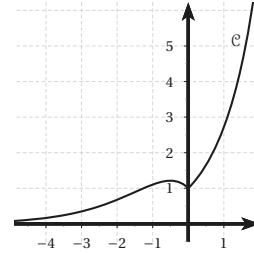
$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} &= \frac{af(a) + hf(a) - af(a+h)}{x-a} \\ \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} &= f(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ \text{or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= f'(a) \\ \text{d'où } \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} &= f(a) - af'(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{a. Soit } f(x) &= -x^3 \text{ alors } f'(x) = -3x^2 \\ \frac{x^3a - a^3x}{x-a} &= \frac{x^3a - a^3x}{x-a} \\ \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3a - a^3x}{x-a} &= 2a^3 \\ \text{b. Soit } f(x) &= \cos x \text{ alors } f'(x) = -\sin x \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

EXERCICE 623

- Si $x \geq 0$ alors $f(x) = e^x$
• Si $x < 0$ alors $f(x) = (1-2x)e^x$.
- Pour tout $x < 0$, $f'(x) = -(2x+1)e^x$.
- Si $x \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = e^0 = 1$
• Si $x < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-2xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x-1}{x} - 2e^x \right) = e^0 - 2e^0 = -1$
- D'après la question précédente, les deux limites ne sont pas égales, f n'est donc pas dérivable en 0.
-

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f			$2e^{-\frac{1}{2}}$	
		0		1

**EXERCICE 624**

- Soit x et y deux nombres réels strictement inférieurs à 1.
 $xy+1 = x+y+(x-1)(y-1) > x+y$ car $(x-1)(y-1) > 0$
d'où $S < P+1$.
- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$, f est donc strictement croissante.

- Si $a \geq 1$ alors $b \geq c \geq 1$, ils sont alors supérieurs ou égaux à leur inverses ce qui contredit la condition imposée.

- Le sens de variation de f et l'inégalité $c > \frac{1}{ab}$

$$\text{conduisent à } c - \frac{1}{c} < \frac{1}{ab} - ab$$

$$\text{la condition } a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ conduit à}$$

$$c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b > \frac{1}{ab} - ab.$$

Mais si $a \leq b < 1$, en appliquant le premier résultat préliminaire, on obtient

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b = (a+b) \left(\frac{1}{ab} - 1 \right) < (ab+1) \left(\frac{1}{ab} - 1 \right)$$

$$\text{et } (ab+1) \left(\frac{1}{ab} - 1 \right) = \frac{1}{ab} - ab$$

Soit $\frac{1}{ab} - ab < \frac{1}{ab} - ab$, il y a contradiction donc $b \geq 1$.

- Si $b = 1$
l'inégalité de définition s'écrit $c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a$, ce qui contredit f strictement croissante.

- On souhaite trouver c vérifiant simultanément $a \leq b \leq c$, $c > \frac{1}{ab}$ et $c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$

La fonction f étant strictement croissante, il revient au même de prouver qu'il existe un réel $c \geq b$ tel que

$$\frac{1}{ab} - ab < c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b,$$

$$\text{ou encore } \frac{1}{ab} - ab < b - \frac{1}{b} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$$

$$\frac{1}{ab} - ab < b - \frac{1}{b} \text{ se réduit à } (1+a)(1-ab^2) < 0$$

L'inégalité $b - \frac{1}{b} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$ s'écrit

$$2\left(b - \frac{1}{b}\right) < \frac{1}{a} - a.$$

$$\text{Or } 2\left(b - \frac{1}{b}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{1}{a} - a\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} - 2\right)$$

ce qui est strictement positif sur $]0; 1]$.

7. Un triplet tel que $a = 0,84$ $b = c = 1,0911$ vérifie $abc > 1$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c$ et $\frac{1}{\sqrt{a}} = 1,09089$ la condition $\frac{1}{\sqrt{a}} \geq b$ n'est pas vérifiée.

EXERCICE 625

Soit n le nombre de baisses successives de 0,06 €, qui est aussi le nombre de billets supplémentaires.

Pour n billets supplémentaires :

- le prix du billet, en euro, est $P(n) = 50 - 0,06n$
- le nombre de billets vendus est $300 + n$
- la recette est $R(n) = (300 + n)P(n)$

$$= -0,06n^2 + 32n + 15000.$$

On étudie la fonction R sur $[0; 800]$

$$R'(x) = -0,12x + 32$$

x	0	$\frac{800}{3}$	800
$R'(x)$		+	-
R	15000	$\nearrow M$	$\searrow$ 16000

n est un entier et $266 < \frac{800}{3} < 267$

$$R(266) \approx 19266,64 \text{ et } R(267) \approx 19266,66.$$

La recette maximale est $R(267)$, le prix du billet pour cette recette est $P(267) = 33,98$ soit 34 €.

EXERCICE 626

1. On exécute $TAYLOR(1, 0, 0, 0, 0)$: $f(x) = x^3$

$$f_1(x) = 3x^2, f_2(x) = 6x, t = 0,$$

$$p(x) = 0$$

On exécute $TAYLOR(1, 0, 1, 0, 1)$: $f(x) = x^3 + x$

$$f_1(x) = 3x^2 + 1, f_2(x) = 6x, t = 1$$

$$p(x) = 2 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 = 3x^2 - 2x + 1.$$

2. On exécute $TAYLOR(1, 1, 1, 1, 0)$.

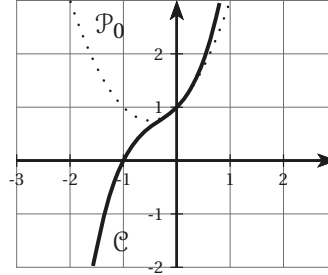
a. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$$f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ et } f_2(x) = 6x + 2$$

$$f(0) = 1, f_1(0) = 1, f_2(0) = 2$$

$$\text{alors } p(x) = 1 + x + x^2.$$

b.



Il semble que $\mathcal{P}_0$ soit au-dessus de $\mathcal{C}$ lorsque $x < 0$ et au-dessous lorsque $x \geq 0$.

c. $f(x) - p(x) = x^3$

$f(x) - p(x) < 0 \iff x < 0$ la conjecture est démontrée.

3. a. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$p(x) = at^2 + bt^2 + ct + d + (3at^2 + 2bt + c)(x-t) + (3at + b)(x-t)^2$$

$$f(x) - p(x) = a(x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3) = a(x-t)^3.$$

b. Pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1, 0, 1)$:

$$f(x) = x^3 + x, p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) - p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

c. • Pour $a > 0$ $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{P}_t$ pour $x \leq t$, au-dessus de $\mathcal{P}_t$ pour $x \geq t$.

• Pour $a < 0$ $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{P}_t$ pour $x \leq t$, au-dessous de $\mathcal{P}_t$ pour $x \geq t$.

EXERCICE 627

1. a. $\mathcal{T}_0$ d'équation $y = -2x + 5$.

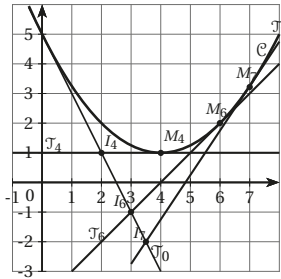
b. $\mathcal{T}_a$ d'équation $y = \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x - \frac{1}{4}a^2 + 5$

$$M(x, y) \in \mathcal{T}_a \cap \mathcal{T}_0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x - \frac{1}{4}a^2 + 5 \end{cases}$$

La résolution du système donne $x = \frac{1}{2}a$ et $y = 5 - a$

c. $\mathcal{T}_a$ est la droite qui passe par le point de contact, d'abscisse a et le point I , d'abscisse $-\frac{1}{2}a$ appartenant à $\mathcal{T}_0$.

d.



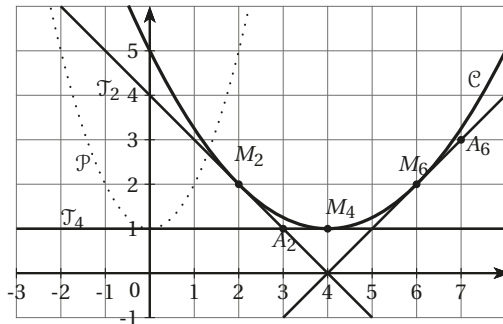
2. a. $f'(x) = \frac{1}{2}x - 2 \iff 2f'(x) = x - 4$

$$\iff x = 2f'(x) + 4$$

b. $f(x) = \frac{1}{4}(2f'(x) + 4)^2 - 2(2f'(x) + 4) + 5$
 $= (f'(x))^2 + 1$

$\mathcal{P}$ a pour équation $y = x^2 + 1$.

c.

**EXERCICE 628****Préliminaire**

Si $x = y = 0$ alors $f(0) = f^2(0)$ ce qui implique que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

Si $f(0) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x)f(0) - 0 = 0$
 f est alors la fonction nulle.

On a alors $f(1+1) = f(1)f(1) - 1 \times 1$ donc $0 = -1$ ce qui est impossible
 donc $f(0) = 1$.

Partie A : On suppose ici que $f(1) = 3$.

1. $f(2) = f(1)f(1) - 1 \times 1 = 8$

$$f(3) = f(2)f(1) - 2 \times 1 = 22.$$

2. $f(4) = f(2)f(2) - 2 \times 2 = 64 - 4 = 60$

$$\text{d'autre part } f(4) = f(3)f(1) - 3 \times 1 = 66 - 3 = 63.$$

Il y a contradiction donc si f existe alors $f(1) \neq 3$

Partie B : On suppose ici que $f(1) = 0$.

1. $f(2) = f(1)f(1) - 1 \times 1 = -1,$

$$f(3) = f(2)f(1) - 2 \times 1 = -2$$

$$f(4) = f(3)f(1) - 3 \times 1 = -3.$$

2. Il semble que $f(n) = 1 - n$.

3. Si $n \geq 1$, $f(n) = f(n-1)f(1) - (n-1) \times 1 = 1 - n$.

Si $n = 0$, $f(0) = 1 = 1 - 0$, la formule est encore vraie
 d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1 - n$

4. $f(x+y) = 1 - (x+y) = 1 - x - y$

$$f(x)f(y) - xy = (1-x)(1-y) - xy = 1 - x - y$$

La propriété (E) est donc vérifiée.

Partie C : Cas général

1. a. $f(2) = a^2 - 1$

$$f(3) = (a^2 - 1)a - 2 = a^3 - a - 2.$$

b. $f(4) = f(2)f(2) - 2 \times 2 = a^4 - 2a^2 - 3$

$$\text{d'autre part } f(4) = f(3)f(1) - 3 \times 1 = a^4 - a^2 - 2a - 3$$

c. On a donc $a^4 - 2a^3 - 3 = a^4 - a^2 - 2a - 3$ soit
 $a(2-a) = 0$ d'où $a = 0$ ou $a = 2$.

2. On suppose ici que $f(1) = 2$.

D'après la question précédente :

$$f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$$

Il semble que $f(n) = n + 1$

$$f(n+1) = f(1)f(n) - 1 \times n = 2f(n) - n$$

$$f(n+2) = f(1)f(n+1) - 1 \times (n+1)$$

$$= 2(2f(n) - n) - n - 1$$

$$= 4f(n) - 3n - 1$$

$$\text{D'autre part } f(n+2) = f(2)f(n) - 2n = 3f(n) - n$$

$$\text{on a donc } 4f(n) - 3n - 1 = 3f(n) - n \text{ d'où } f(n) = n + 1$$

On montre alors que f vérifie la propriété (E).

EXERCICE 629

En prenant $m = 0$, on obtient $f(n) = f(f(n)) + f(f(0))$

En prenant $m = 1$, on obtient $f(n+1) = f(f(n)) + f(f(1))$

$$\text{donc } f(n+1) - f(n) = f(f(1)) - f(f(0)) = \text{constante}$$

f est une fonction affine, il existe donc a et b entiers tels
 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an + b$

L'équation devient alors :

$$a(m+n) + b = a(am+b) + b + a(an+b) + b$$

$$\text{Pour } m = 0 \text{ et } n = 1 \text{ on obtient } a = a^2 + 2ab + b$$

$$\text{Pour } m = n = 0 \text{ on obtient } 2ab + b = 0$$

$$\text{On obtient alors } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ et } b = 0$$

Les fonction solutions sont donc la fonction nulle et la fonction identité.

EXERCICE 630

1. a. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{144} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$
 et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$ donc $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \in \mathcal{F}$

b. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{144} = \left(\frac{\sqrt{13}}{12}\right)^2$
 et $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{12} \neq 1$ donc $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right) \notin \mathcal{F}$

c. $\left(\frac{13}{30}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
 et $\frac{13}{30} + \frac{1}{6} + \frac{2}{5} = 1$ donc $\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right) \in \mathcal{F}$

2. a. b et a étant les mesures de deux côtés d'un triangle rectangle de périmètre 1, si (a, b) appartient à $\mathcal{F}$ alors (b, a) appartient aussi à $\mathcal{F}$.

b. Si ABC est un triangle rectangle en C , de périmètre 1, alors $AC + BC > AB$ donc $1 > 2BC$ d'où $AB < \frac{1}{2}$. L'hypothénuse étant le plus grand côté, les mesures des trois côtés sont donc inférieures à $\frac{1}{2}$.

3. a. $c = 1 - a - b$ et $c^2 = a^2 + b^2$ donc $(1 - a - b)^2 = a^2 + b^2$ d'où $1 - 2a - 2b - 2ab = 0$

Ainsi puisque $a \neq 1$ on obtient $b = \frac{1 - 2a}{2(1 - a)}$.

b. $c = 1 - a - b = 1 - a - \frac{1 - 2a}{2(1 - a)} = \frac{1}{2(1 - a)} - a$.

4. • $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ donc $f(x) > 0$

• $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x - 1)} = \frac{x^2 + (x - 1)^2}{2(x - 1)} > 0$

• $x + f(x) + g(x) = 1$

• $(g(x))^2 = x^2 - \frac{x}{1 - x} + \frac{1}{4(1 - x)^2} = x^2 + \frac{x^2 - 4x + 1}{4(1 - x)^2}$
 $= x^2 + (f(x))^2$

x , $f(x)$ et $g(x)$ sont les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle de périmètre 1, ainsi $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

5. Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à $\mathcal{F}$ si et seulement si $m < y < \frac{1}{2}$ avec m minimum de la fonction g , représentée par l'arc reliant les points $(0; 0,5)$ et $(0,5; 0,5)$. $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$,

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{2(1-x)^2}$$

$g'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 4x - 1$

x	0	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$\searrow$ $\sqrt{2} - 1$	$\nearrow$ $+\infty$

Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à $\mathcal{F}$ si et seulement si $\sqrt{2} - 1 < y < \frac{1}{2}$.

EXERCICE 631

1. a.

v en km.h^{-1}	v en m.s^{-1}	d_A en m	$\frac{d_A}{v^2}$
50	13,9	12,1	0,0627
90	24,93	39,1	0,0629
100	27,7	48,3	0,0629
130	36,01	81	0,0625
150	41,55	108,4	0,0628
170	47,09	139,9	0,0631

b. $C = 0,06$ à 10^{-2} près.

2. Si la vitesse est exprimée en m.s^{-1} , en une seconde le conducteur parcourt une distance de v mètres d'où $d_R = v$

Si la vitesse est exprimée en km.h^{-1} , en une heure, soit 3600 secondes, le conducteur parcourt v kilomètres, soit $1000v$ mètres.

En une seconde, il parcourt donc

$$d_R = \frac{1000v}{3600} = \frac{10v}{36} \approx 0,277v.$$

3. $L = 0,8 \times 4,5 + 0,2 \times 12 = 6$ m

4. a. Le débit, exprimé en nombre de véhicules par seconde, est lié à la vitesse et à la distance totale (longueur du véhicule + distance de réaction + distance d'arrêt)

$$D \times (L + d_R + d_A) = 3600v$$

$$\text{soit } D(v) = \frac{3600v}{0,06v^2 + v + 6}.$$

b. $D'(x) = \frac{216(100 - v^2)}{(0,06v^2 + v + 6)^2}$

v	0	10	$+\infty$
$D'(v)$	+	0	-
D	0	1636,6	0

c. La vitesse maximale pour laquelle le débit est maximale est 10 m.s^{-1} soit 36 km.h^{-1} , le débit sera alors de 1636 véhicules par heure.

5. Le débit maximal est de 3900 véhicules par heure, sur 3 voies, soit 1300 véhicules par voie.

On résout l'équation :

$$D(v) = 1300 \text{ soit } 78v^2 - 2300v + 7800 = 0$$

cette équation admet deux solutions $v_1 = 25,577$ et $v_2 = 3,910$, exprimées en m.s^{-1} , soit 92,077 et 14,072 en km.h^{-1} .

On peut donc conseiller une vitesse de 90 km.h^{-1} .

EXERCICE 632

1. $f(x) = (x - 2014)^2 + 2015$.

2. Par lecture du tableau de variations :

$$a > 0, c = f(0) > f(2014) = 2015 \text{ donc } c > 0$$

$$-\frac{b}{2a} = 2014 \text{ donc } b = -4028a < 0.$$

3. $f(x) = u^2x^4 + 2uvx^3 + (v^2 + 2uw)x^2 + 2vwx + w^2$

On en déduit que $a = u^2$; $b = 2uv$; $c = v^2 + 2uw$;

$$d = 2vw \text{ et } e = w^2.$$

$$u \neq 0 \text{ donc } a > 0$$

$$e = f(0) > 2015 \text{ donc } e > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2015 > 0$, le trinôme $p(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$

$$\text{Soit } p(x) \geq \sqrt{2015} \text{ pour tout réel } x$$

$$\text{Soit } p(x) \leq -\sqrt{2015} \text{ pour tout réel } x$$

Dans les deux cas, l'extremum de p est atteint pour

$x = 2014$. On en déduit alors que $-\frac{v}{2u} = 2014$, u et v sont non nuls et de signe contraires. Ainsi $uv < 0$ donc $b = 2uv < 0$.

p est de signe constant donc son discriminant est

strictement négatif, soit $v^2 - 4uw < 0$. Ceci s'écrit encore $uw > \frac{v^2}{4} > 0$, u et w sont donc de même signe

or u et w sont de signes contraires donc v et w sont également de signes contraires.

$$\text{On a donc } d = 2vw < 0 \text{ et } e = v^2 + 2uw > 0.$$

EXERCICE 633

Partie A

- $I_1 = I_0 \times 1,02 + 500 = 5000 \times 1,02 + 500 = 5600$;
 $I_2 = I_1 \times 1,02 + 500 = 5600 \times 1,02 + 500 = 6212$;
 $I_3 = I_2 \times 1,02 + 500 = 6212 \times 1,02 + 500 = 6836,24$.
- Ajouter chaque année 2 % d'intérêts c'est multiplier le capital par 1,02 et comme on rajoute chaque début d'année 500 €, on a bien $I_{n+1} = 1,02I_n + 500$.
- $K_n = I_n + 25000$, donc
 $K_{n+1} = I_{n+1} + 25000 = 1,02I_n + 500 + 25000$
 $= 1,02I_n + 25500$.
Or $25500 = 25000 \times 1,02$, donc
 $K_{n+1} = 1,02I_n + 0,02 \times 25000 = 1,02(I_n + 25000)$
 $= 1,02K_n$.
Cette égalité montre que la suite (K_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme
 $K_0 = I_0 + 25000 = 30000$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = K_0 \times 1,02^n = 30000 \times 1,02^n$.
Or $K_n = I_n + 25000$ donc
 $I_n = K_n - 25000 = 30000 \times 1,02^n - 25000$.
- Comme $1,02 > 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,02^n = +\infty$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

```

n ← 0
i ← 5000
Tant que i < 20000
  n ← n + 1
  i ← 1,02 × i + 500
Fin du Tant que
Afficher 2016 + n

```

Le solde 20 470 € sera supérieur à 20 000 euros au bout de 21 années, soit en 2037.

Partie B

1. $f(1) = \frac{30-16}{15-2} = \frac{14}{13}$.

$$\text{On peut écrire puisque } x \neq 0, f(x) = \frac{30 - \frac{16}{x}}{15 - \frac{2}{x}}.$$

$$\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{30}{15} = 2.$$

Ceci montre que la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de plus l'infini une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

2. Comme $x \geq 1$, $15x - 2 \geq 13 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{30(15x-2) - 15(30x-16)}{(15x-2)^2} = \frac{-60+240}{(15x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{180}{(15x-2)^2}$$

3. La dérivée est positive quel que soit le réel x , la fonction f est donc croissante de $f(1) = \frac{14}{13}$ à 2.

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_n \leq 2$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$. Or on a vu dans la partie B que pour $x \geq 1$, alors $1 \leq f(x) \leq 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

2. a. Comme $1 \leq u_n \leq 2$,

$15 \leq 15u_n \leq 30$ et $3 \leq 15u_n - 12 \leq 18$, le dénominateur est donc non nul, v_n existe quel que soit le naturel n .

b. On a $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = \frac{14}{13}$ et

$$u_2 = f(u_1) = \frac{30 \times \frac{14}{13} - 16}{15 \times \frac{14}{13} - 12} = \frac{\frac{212}{13}}{\frac{184}{13}} = \frac{212}{184} = \frac{53}{46}.$$

$$v_0 = \frac{15u_0 - 20}{15u_0 - 12} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3};$$

$$v_1 = \frac{15u_1 - 20}{15u_1 - 12} = \frac{15 \times \frac{14}{13} - 20}{15 \times \frac{14}{13} - 12} = \frac{-\frac{50}{13}}{\frac{54}{13}} = -\frac{50}{57};$$

$$v_2 = \frac{15u_2 - 20}{15u_2 - 12} = \frac{15 \times \frac{53}{46} - 20}{15 \times \frac{53}{46} - 12} = \frac{-\frac{125}{46}}{\frac{243}{46}} = -\frac{125}{243}.$$

$$\text{On a } v_{n+1} = \frac{15u_{n+1} - 20}{15u_{n+1} - 12} = \frac{15 \frac{30u_n - 16}{15u_n - 2} - 20}{15 \frac{30u_n - 16}{15u_n - 2} - 12}$$

$$= \frac{15(30u_n - 16) - 20(15u_n - 2)}{15(30u_n - 16) - 12(15u_n - 2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{450u_n - 240 - 300u_n + 40}{450u_n - 240 - 180u_n + 24}$$

$$= \frac{75u_n - 100}{5(15u_n - 2)}$$

$$= \frac{135u_n - 108}{9(15u_n - 2)}$$

L'égalité $v_{n+1} = \frac{5}{9}v_n$ montre que la suite (v_n) est

géométrique de premier terme $-\frac{5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{5}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n$.

d. $v_n = \frac{15u_n - 20}{15u_n - 12}$

$$\Leftrightarrow v_n(15u_n - 12) = 15u_n - 20$$

$$\Leftrightarrow 15u_n v_n - 12v_n = 15u_n - 20$$

$$\Leftrightarrow u_n(15 - 15v_n) = 20 - 12v_n$$

et enfin pour $v_n \neq 1$,

$$u_n = \frac{20 - 12v_n}{15 - 15v_n} = \frac{20 - 12 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{5}{9}\right)^n}{15 - 15 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{5}{9}\right)^n}$$

$$= \frac{20 + 20 \left(\frac{5}{9}\right)^n}{15 + 25 \left(\frac{5}{9}\right)^n} = \frac{4 + 4 \left(\frac{5}{9}\right)^n}{3 + 5 \left(\frac{5}{9}\right)^n} = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}.$$

EXERCICE 634

1. f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
2.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0
f	1	0

3. $A = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{e^{-\frac{1}{n}} - 1}$

$$= \frac{1}{n} e^{-1} + \frac{-\frac{1}{n}}{e^{-\frac{1}{n}} - 1}$$

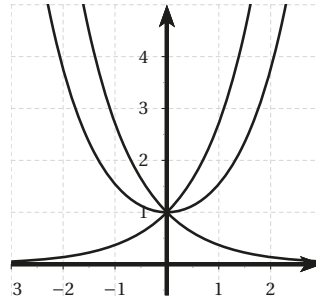
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} e^{-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = e^0 = 1$$

On en déduit alors $A = 1$.

EXERCICE 635

- 1.



2. $\mathcal{T}_1$ d'équation $y = e^m(x - m) + e^m$
 $\mathcal{T}_2$ d'équation $y = -e^{-m}(x - m) + e^{-m}$
3. $f'_1(m) \times f'_2(m) = -1$ donc $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont perpendiculaires.

4. Les coordonnées de P vérifient les équations de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

L'abscisse de P vérifie :

$$e^m(x-m) + e^m = -e^{-m}(x-m) + e^{-m} \text{ soit}$$

$$x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

$$\text{alors } y = -e^m \left(\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} \right) + e^m = \frac{2}{e^m + e^{-m}}.$$

5. a. $I \left(m; \frac{e^m + e^{-m}}{2} \right)$.

b. Voir graphique précédent.

6. a. $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; \frac{2}{e^m + e^{-m}} \right)$
 $\overrightarrow{IP} = \left(-\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; -\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})} \right)$.

b. $AP^2 = \left(\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} \right)^2 + \left(\frac{2}{e^m + e^{-m}} \right)^2 = 1$.

La longueur AP est donc constante.

c. Le coefficient de la droite (IP) est égal à

$$\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})} \times \frac{e^m + e^{-m}}{e^m - e^{-m}} = \frac{e^m - e^{-m}}{2}$$

d'autre part la tangente en I à Γ est de coefficient di-

$$\text{recteur } \frac{f'_1(m) + f'_2(m)}{2} = \frac{e^m + e^{-m}}{2}.$$

La droite (IP) est donc tangente en I à Γ .

EXERCICE 636

1. a. $f^{(1)} = (x^2 + 3x + 2)e^x$
 $f^{(2)} = (x^2 + 5x + 5)e^x$.
 b. $f^{(1)}(x) = (x^2 + a_1x + b_1)e^x$ avec $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$
 $f^{(2)}(x) = (x^2 + a_2x + b_2)e^x$, avec $a_2 = 5$ et $b_2 = 5$.
2. $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n))e^x$
 $= (x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})e^x$
 avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
3. $a_{n+1} = a_n + 2$, la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 3$
 on en déduit alors
 $a_n = a_1 + (n-1)r = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$.
4. $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$
 $b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2}$
 $b_{n-2} = a_{n-3} + b_{n-3}$
 $\vdots$
 $b_3 = a_2 + b_2$
 $b_2 = a_1 + b_1$
 $b_1 = a_0 + b_0$
 Par sommation de toutes les lignes, on obtient :

$$\forall n > 0, b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0 + b_0.$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1+2k) + 1 = n + 2 \frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2 + 1.$$

5. $f^{(n)}(x) = (x^2 + (1+2n)x + n^2 + 1)e^x$.

EXERCICE 637

1. • Si $x \in [-1; 0[$, $f(x) = -\sin \pi x$,

$$f'(x) = -\pi \cos \pi x$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	0

- Si $x \in [0; 1]$, $f(x) = 0$

Les dérivées à droite et à gauche de 0 ne sont pas égales, f n'est donc pas dérivable en 0.

- Si $x \in [1; 2]$, $f(x) = \sin \pi x$

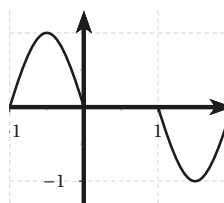
$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

x	1	$\frac{3}{2}$	2
$f'(x)$	$-\pi$	-	0
f	0	-1	0

Les dérivées à droite et à gauche de 1 ne sont pas égales, f n'est donc pas dérivable en 1.

- Si $x = 2$, $f(2) = 2 \sin 2\pi = 0$

2.



EXERCICE 638

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc

$$e^x + me^{-x} = 1 \iff e^{2x} - e^x + m = 0 \quad (E)$$

On pose $X = e^x$, l'équation s'écrit $X^2 - X + m = 0 \quad (E_X)$

$$\Delta = 1 - 4m$$

- si $m > \frac{1}{4}$, $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution réelle;
- si $m = \frac{1}{4}$, $\Delta = 0$, l'équation (E_X) admet une unique so-

lution $X = \frac{1}{2} > 0$, l'équation (E) admet une unique solution $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

• si $m < \frac{1}{4}$, $\Delta > 0$, l'équation (E_X) admet deux solutions

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}$$

$$X_2 > 0$$

$$X_1 > 0 \iff 0 < 1 - 4m < 1 \iff 0 < m < \frac{1}{4}$$

Si $0 < m < \frac{1}{4}$, l'équation (E) admet deux solutions

$$x_1 = \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}\right) \text{ et } x_2 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}\right)$$

Si $m \leq 0$, l'équation (E) admet une unique solution

$$x_2 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}\right).$$

EXERCICE 639

1. a. $B(7; 5) = -0,05 \times 7^2 - 0,05 \times 5^2 + 0,6 \times 7 + 0,7 \times 5$
 $= 4,2 + 3,5 - 2,45 - 1,25 = 4$

soit 4 milliers d'euros.

b. $B(10; 0) = -0,05 \times 10^2 + 0,6 \times 10 = 6 - 5 = 1$
 soit 1 millier d'euro.

2. a. On voit que pour dépasser $z = 3$, il faut que $2 \leq y \leq 4$.

b. Il faut produire 3 ou 4 moteurs F.

3. a. Si $y = x$, alors

$$B(x; y) = B(x; x) = -0,05x^2 - 0,08x^2 + 0,6x + 0,7x$$

$$= 1,3x - 0,13x^2.$$

b. Cette production est un trinôme du second degré dont le maximum est obtenu pour

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,3}{2 \times (-0,13)} = \frac{10}{2} = 5.$$

Ce bénéfice maximal est donc égal à

$$B(5; 5) = 1,3 \times 5 - 0,13 \times 5^2 = 6,5 - 3,25 = 3,25,$$

soit 3 250 €.

EXERCICE 640

Partie A : Recette et élasticité

1. Si la fonction f est définie sur $[30; 119]$ par

$$f(x) = 2400 - 20x, \text{ alors } f'(x) = -20 \text{ donc}$$

$$E(p) = p \times \frac{f'(p)}{f(p)} = p \times \frac{-20}{2400 - 20p}$$

$$= \frac{-20p}{-20(-120 + p)} = \frac{p}{p - 120}.$$

2. On résout l'inéquation $E(p) < -1$, pour p entier compris entre 30 et 119 :

$$E(p) < -1 \iff \frac{p}{p - 120} < -1$$

$$\iff \frac{p}{p - 120} + \frac{p - 120}{p - 120} < 0$$

$$\iff \frac{p + p - 120}{p - 120} < 0$$

$$\iff \frac{2p - 120}{p - 120} < 0$$

x	30	60	119
$2p - 120$	-	0	+
$p - 120$	-	-	-
$\frac{2p - 120}{p - 120}$	+	0	-

La demande est donc élastique pour p entier entre 61 et 119.

3. On a vu que $E(p) = -1$ pour $p = 60$; on peut alors calculer la recette mensuelle maximale :

$$R(60) = 60 \times f(60) = 60(2400 - 20 \times 60) = 60 \times 1200$$

$$= 72000.$$

4. $R(p) = p \times f(p)$ donc $R(p) = p(2400 - 20p)$

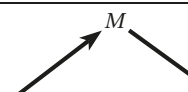
Soit r la fonction définie sur $[30; 119]$ par

$$r(x) = x(2400 - 20x).$$

Les variations de la fonction r vont donner celles de la suite $(R(p))$.

$$r(x) = 2400x - 20x^2 \text{ donc } r'(x) = 2400 - 40x$$

$$= 40(60 - x)$$

x	30	60	119
$r'(x)$	+	0	-
r			

On peut donc en déduire que la suite $(R(p))$ admet un maximum pour $p = 60$.

Partie B : Etude d'un cas particulier

1. a. La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$

$$f'(x) = 2 \times e^{-0,5x} + (2x + 10) \times (-0,5)e^{-0,5x}$$

$$= (-x - 3)e^{-0,5x}$$

Pour tout x , $e^{-0,5x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-x - 3$.

La fonction f est strictement décroissante sur

$[1; +\infty[$.

b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Ce résultat est cohérent car si le prix de vente x augmente indéfiniment, le nombre de produits achetés va diminuer jusqu'à tendre vers 0.

$$\begin{aligned} \text{c. } R(x) &= x \times f(x) = x \times (2x + 10)e^{-0,5x} \\ &= (2x^2 + 10x)e^{-0,5x} \text{ donc} \end{aligned}$$

$$R'(x) = (-x^2 - x + 10)e^{-0,5x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$ donc $R'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 10$.

Le polynôme $p(x) = -x^2 - x + 10$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{41}}{-2} \approx -3,70 < 0 \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{41}}{-2} \approx 2,70.$$

On en déduit le signe de $R'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$	
$p(x)$		-	0	+	0	-
$R'(x)$				+	0	-

On déduit que la fonction R admet un maximum pour $x = x_2$ donc pour un prix de vente de x_2 centaines d'euros soit environ 270 euros.

2. a. Pour $x \geq 1$, on a

$$E(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)} = x \times \frac{(-x-3)e^{-0,5x}}{(2x+10)e^{-0,5x}} = \frac{-x^2-3x}{2x+10}.$$

b. Lorsque le prix passe de 1000 € à 1010 €, il augmente de 1%.

Une valeur approchée du taux de variation de la demande lorsque le prix passe de 1000 € à 1010 € est

$$\text{donc } E(10) = \frac{-100-30}{20+10} = \frac{-130}{30} \approx -4,33.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } E(x) &= -3,15 \iff \frac{-x^2-3x}{2x+10} = -3,15 \\ &\iff -x^2-3x = -6,3x-31,5 \\ &\iff -x^2+3,3x+31,5 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 3,3^2 - 4 \times (-1) \times 31,5 = 136,89 = 11,7^2$; donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-3,3+11,7}{2(-1)} = -4,2 \text{ et } x_2 = \frac{-3,3-11,7}{2(-1)} = 7,5.$$

Pour un prix de vente du produit de 750 €, l'élasticité est de -3,15.

d. On résout les inéquations $-1 < E(x) < 0$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \bullet -1 < E(x) &\iff -1 < \frac{-x^2-3x}{2x+10} \\ &\iff 0 < \frac{2x+10}{2x+10} + \frac{-x^2-3x}{2x+10} \\ &\iff 0 < \frac{-x^2-x+10}{2x+10} \end{aligned}$$

Sur $[1; +\infty[$, $2x+10 > 0$ donc

$$-1 < E(x) \iff -x^2-x+10 > 0 \text{ donc}$$

$$x \in \left[1; \frac{\sqrt{41}-1}{3}\right] \text{ d'après la question B 1.c.}$$

$$\bullet 2x+10 > 0 \text{ donc } E(x) < 0 \iff -x^2-3x < 0$$

$\bullet 2x+10 > 0 \text{ donc } E(x) < 0 \iff -x(x+3) < 0$ ce qui est toujours vrai si $x \geq 1$.

$\frac{\sqrt{41}-1}{3} \approx 2,70$ donc la demande est peu élastique pour x compris entre 1 et 2,7 donc pour un prix de vente compris entre 100 € et 270 €.

Partie C : Etude théorique

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ donc } E_f(x) = x \times \frac{nf'(x)}{f(x)} = n \text{ donc l'élasticité est constante.}$$

2. Règles opératoires

$$\begin{aligned} \text{a. } E_{\lambda \times f}(x) &= x \times \frac{(\lambda f)'(x)}{(\lambda f)(x)} = x \times \frac{\lambda f'(x)}{\lambda f(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)}{f(x)} = E_f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E_{f \times g}(x) &= x \times \frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = x \times \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} + x \times \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)}{f(x)} + x \times \frac{g'(x)}{g(x)} \\ E_{f \times g}(x) &= E_f(x) + E_g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } E_{\frac{f}{g}}(x) &= x \times \frac{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = x \times \frac{\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f(x)}{g(x)}} \\ &= x \times \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \times \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} - x \times \frac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\ &= x \times \frac{f'(x)}{f(x)} - x \times \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &= E_f(x) - E_g(x) \end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x$, et

g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2$; donc
 $h(x) = \frac{2017f(x)}{g(x)}$. On a alors
 $E_h(x) = E_{2017f}(x) = E_{2017f}(x) - E_g(x)$ d'après **2.c.**
 $= E_f(x) - E_g(x)$ d'après **2.a.**
 $= x - 2$ d'après **1.a.** et **1.b.**

6.4 Géométrie

EXERCICE 641

On projette $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 = 2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-2) = -4$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 = 6$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 3 = 9$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) = -1$

EXERCICE 642

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AB = 4$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \times 0 = 0$
- $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \times AB = -4$
- $\vec{DA} \cdot \vec{OD} = -DA \times \frac{1}{2}DA = -2$
- $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$
- $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = -OB \times OB = -2$

EXERCICE 643

- $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB \times AB = -25$
- $\vec{AC} \cdot \vec{DC} = DC \times DC = 25$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$
- $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -OA \times OA = -\frac{17}{2}$
- $\vec{OB} \cdot \vec{BD} = -OB \times 2OB = -17$
- $\vec{AD} \cdot \vec{AO} = AD \times \frac{1}{2}AD = \frac{9}{2}$

EXERCICE 644

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 3 \times 7 = 23$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -0,5 + 6 = 5,5$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 1 = -1$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 10 = 13$

EXERCICE 645

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -a + 10 = 0 \Rightarrow a = 10$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = a + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + a^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -1$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -a + 5 = 0 \Rightarrow a = 5$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = a - 15 = 0 \Rightarrow a = 15$

EXERCICE 646

- $\vec{v} (3; 1)$ et $\vec{w} (-6; -2)$
- $\vec{v} (2; 1)$ et $\vec{w} (-6; -3)$
- $\vec{v} (0; 1)$ et $\vec{w} (0; -2)$
- $\vec{v} (0; 2)$ et $\vec{w} (0; 1)$
- $\vec{v} (\sqrt{2}; \sqrt{3})$ et $\vec{w} (4; \sqrt{6})$
- $\vec{v} (5; \sqrt{5})$ et $\vec{w} (\sqrt{5}; 1)$

EXERCICE 647

$\vec{AB} (2; -6)$ et $\vec{CB} (-3; -1)$ ainsi $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = -6 + 6 = 0$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est donc rectangle en B .

EXERCICE 648

$\vec{AB} (4; 1)$, $\vec{BC} (-5; 4)$ et $\vec{AC} (-1; 5)$

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -16$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$ et $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 25$

Aucun produit scalaire n'est nul, le triangle ABC n'est donc pas rectangle.

EXERCICE 649

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = -1$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9}{2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{6}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

EXERCICE 650

1. $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha = \pm \frac{\pi}{3}$.
2. $\cos \alpha = 1$ d'où $\alpha = 0$.
3. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ d'où $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3}$.
4. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 651

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos \alpha = 0)$$

$$\Rightarrow (\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \alpha = \pm \frac{\pi}{2})$$

Réciproquement :

- tout vecteur est orthogonal au vecteur nul donc si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (non nuls) alors $\cos \alpha = 0$ ce qui implique $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

EXERCICE 652

1. $AB^2 = (\vec{AC} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AC} + \vec{BC})$
 $= AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \hat{C}$.
2. Si ABC est rectangle en C alors $\cos \hat{C} = 0$, nous retrouvons le théorème de Pythagore.
3. $AB^2 = 13 - 6\sqrt{3}$ d'où $AB = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$.
4. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \hat{B} = 21$
d'où $AC = \sqrt{21}$.
5. $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC \times AB} = \frac{51}{96}$ d'où $\hat{A} \approx 57,91^\circ$.

EXERCICE 653

1. $MA^2 + MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2$
 $= 2MI^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + IA^2 + IB^2$
 $= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB})$
 $= MI^2 + \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IA} \cdot \vec{IB}$
 $= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
3. D'après 1. $MA^2 + MB^2 = 10 \iff MI^2 = 1$, Γ_1 est le cercle de centre I et de rayon 1.
4. D'après 2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 8 \iff MI^2 = 12$, Γ_2 est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{3}$.
5. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = a \iff MI^2 = a + 4$
 $M \in \Gamma_1$ si $a + 4 = 1$ donc $a = -3$.

EXERCICE 654

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= u^2 + v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

EXERCICE 655

1. Soit I le milieu du segment $[AB]$ on a alors $\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.
 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB})$
 $= MI^2 + \vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IA} \cdot \vec{IB}$
 $= MI^2 - AI^2$.
Ainsi $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \iff MI = AI$.
 M appartient donc au cercle de diamètre $[AB]$.
2. $\vec{MA} (2-x; 5-y)$ et $\vec{MB} (-3-x; 3-y)$
 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (2-x)(-3-x) + (5-y)(3-y)$
 $= x^2 + x + y^2 - 8y + 9$
d'où l'équation du cercle $x^2 + x + y^2 - 8y = -9$

EXERCICE 656

1. $\vec{BA} (2; 2)$, $\vec{BC} (4; -3)$
 $BC = \sqrt{16+9} = 5$ et $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2$.
2. a. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .
b. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} > 0$ donc H appartient-il au segment $[BC]$
c. $BH = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BC} = \frac{2}{5} = 0,4$
 $CH = BC - BH = 4,6$.

EXERCICE 657

1. $(\vec{AB} + \vec{AD})^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AD^2$
 $= AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD \times \cos \widehat{BAD}$
 $= 61$
 $(\vec{AB} - \vec{AD})^2 = AB^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AD^2$
 $= AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \widehat{BAD}$
 $= 21$.
2. D'après la propriété du parallélogramme
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
d'où $AC = \sqrt{61}$
d'après la relation de Chasles
 $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -(\vec{AB} - \vec{AD})$.

d'où $BD = \sqrt{21}$.

3. En utilisant la relation d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\text{d'où } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{13}{2\sqrt{61}}$$

$$\widehat{BAC} \approx 33,67^\circ.$$

EXERCICE 658

- $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} + 3\vec{v}) = -6u^2 + 6v^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= -6a + 6b + 5c$
- $(\vec{u} + 5\vec{v})^2 = u^2 + 10\vec{u} \cdot \vec{v} + 25v^2 = a + 25b + 10c$
- $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = -2u^2 + 7\vec{u} \cdot \vec{v} - 5v^2$
 $= -2a - 5b + 7c$
- $(2\vec{u} + \vec{v})^2 + (2\vec{u} - \vec{v})^2 = 8u^2 + 2v^2 = 8a + 2b$

EXERCICE 659

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = u^2 + v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = u^2 + v^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

On en déduit alors que :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(u^2 + v^2).$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}.$

EXERCICE 660

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$

- Supposons que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors $ABCD$ est un losange, ces diagonales sont perpendiculaires or $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$

Réciproquement :

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $ABCD$ est un rectangle donc ses diagonales ont même longueur soit $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$

Réciproquement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ alors

$AC = BD$, le parallélogramme $ABCD$ est donc un rectangle, on en déduit que ses côtés sont perpendiculaires donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

- $\vec{w} \cdot \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u}$
 $= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u}$ car $\vec{u}$ est unitaire
 $= 0$ donc $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

EXERCICE 661

- $\bullet \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IC})$
 $= AI^2 + \vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) + \vec{IB} \cdot \vec{IC}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 + \vec{AI} \cdot \vec{0} + \frac{1}{2} \vec{CB} \cdot \frac{1}{2} \vec{BC}$
 $= AI^2 - \frac{1}{4} BC^2$
 $AB^2 = (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IB})$
 $AB^2 = AI^2 + 2\vec{IA} \cdot \vec{IB} + IB^2$
 $= AI^2 + 2\vec{IA} \cdot \vec{IB} + \frac{1}{4} BC^2$

De même $AC^2 = AI^2 + 2\vec{IA} \cdot \vec{IC} + \frac{1}{4} BC^2$

de plus $\vec{IB} = -\vec{IC}$ d'où

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$
- $AB^2 - AC^2 = 2\vec{IA} \cdot \vec{BC}$

- D'après la question précédente

$$AI^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 - \frac{1}{4} BC^2 = \frac{79}{4}$$

$$\text{d'où } AI = \frac{\sqrt{79}}{2}.$$

Soit J le milieu de $[AC]$

$$BJ^2 = \frac{1}{2} BA^2 + \frac{1}{2} BC^2 - \frac{1}{4} AC^2 = \frac{46}{4}$$

$$\text{d'où } BJ = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

Soit K le milieu de $[AB]$

$$CK^2 = \frac{1}{2} CA^2 + \frac{1}{2} CB^2 - \frac{1}{4} AB^2 = \frac{106}{4}$$

$$\text{d'où } CK = \sqrt{26}$$

EXERCICE 662

- $(\vec{OB}; \vec{OA}) = (\vec{i}; \vec{OA}) - (\vec{i}; \vec{OB}) = a - b$
 $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos b - a$ car $OA = OB = 1$.

- $A(\cos a; \sin a)$ et $B(\cos b; \sin b)$
d'où $\vec{OB} \cdot \vec{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- D'après les deux expressions obtenues :
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- $\cos(a + b) = \cos(a - (-b))$
 $= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$
 $= \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ d'où en posant $x = a - b$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+b\right)-a\right).$$

$$\begin{aligned} 6. \sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right)\sin a \\ &= -\sin b \cos a + \cos b \sin a \\ &= \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \sin(a+b) &= \sin(a-(-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a \\ &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

EXERCICE 663

$$\begin{aligned} 1. \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} &= (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= HA^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} &= HA^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \text{car } (AH) \perp (AB) \text{ et } (AH) \perp (AC) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ D'après le théorème de Pythagore } \\ HB &= \sqrt{2000} = 20\sqrt{5} \text{ et } HC = \sqrt{2329}. \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} &= HB \times HC \times \cos \widehat{BHC} = 20\sqrt{11645} \cos \widehat{BHC}. \\ \text{D'autre part } \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} &= 2140 \\ \text{on en déduit alors } \cos \widehat{BHC} &= \frac{2140}{20\sqrt{11645}} \\ \text{ainsi } \widehat{BHC} &\approx 7,45^\circ \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

EXERCICE 664

Si I le milieu de $[AB]$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \lambda \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = \lambda \\ &\iff MI^2 = \lambda + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

- $\lambda = -9 : MI^2 = -\frac{11}{4}, \Gamma_{-9}$ est vide.
 - $\lambda = -4 : MI^2 = \frac{9}{4}, \Gamma_{-4}$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{3}{2}$.
 - $\lambda = 0 : MI^2 = \frac{25}{4}, \Gamma_0$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5}{2}$.
 - $\lambda = 8 : MI^2 = \frac{89}{4}, \Gamma_8$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{2}$.

$$\begin{aligned} 2. ABC \text{ étant un triangle équilatéral, on a } IC^2 &= \frac{75}{4} \\ \text{d'autre part } C \text{ appartient à } \Gamma_\lambda \text{ d'où } \lambda &= \frac{50}{4} = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 665

$$1. \overrightarrow{U} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$$

$$\begin{aligned} \text{vect } U &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IA} \\ &= \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA} \\ &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{MA'} \end{aligned}$$

$$2. \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = 0 \iff \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$$

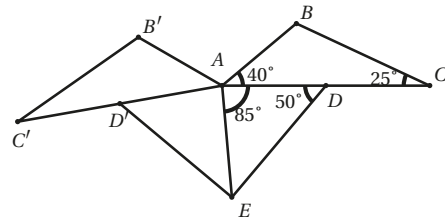
M appartient à la droite perpendiculaire à (AA') passant par A' .

$$3. \|\overrightarrow{U}\| = \|\overrightarrow{V}\| \iff MA' = AA'.$$

M appartient au cercle de centre A' et de rayon AA' .

EXERCICE 666

1.



$$2. \text{ On remarque que } \widehat{AED} = 45^\circ \text{ et } \widehat{ABC} = 115^\circ.$$

On applique la relation des sinus dans le triangle ADE

$$\frac{AD}{\sin 45} = \frac{AE}{\sin 50} \text{ d'où } AE = \frac{AD \sin 50}{\sin 45} = 0,542$$

On applique la relation des sinus dans le triangle

$$\frac{AB}{\sin 25} = \frac{AC}{\sin 115} \text{ d'où } AB = \frac{AC \sin 25}{\sin 115} = 0,466$$

$$3. \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 40 = 0,1498 \text{ m}^2$$

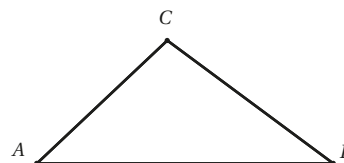
$$\mathcal{A}_{ADE} = \frac{1}{2} AD \times AE \sin 85 = 0,1350 \text{ m}^2.$$

4. Voir graphique

$$5. S = 2 \times (\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADE}) = 0,5696 \text{ soit } 0,57 \text{ m}^2.$$

EXERCICE 667

1.



2. En utilisant la relation d'Al-Kashi :

$$\cos \widehat{C} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \times AC}$$

$$\text{d'où } \widehat{ACB} = 100,29^\circ \text{ à } 10^{-2}.$$

3. $S = \frac{1}{2} \sin \widehat{C} \times AC \times BC = 330,6 \text{ cm}^2 \text{ à } 10^{-1}.$

4. $S = \frac{1}{2} CH \times AB$ d'où $CH = \frac{2S}{AB} = 16,5 \text{ cm à } 10^{-2} \text{ près.}$

5. $\sin \widehat{BAC} = \frac{CH}{CA}$, d'où $\widehat{BAC} = 43,5^\circ \text{ à } 10^{-1}.$

6. $\widehat{CBA} = 180 - 100,3 - 43,5 = 36,2.$

EXERCICE 668

D'après l'exercice 654 :

$$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2$$

$$\text{d'où } \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 2 \times 500 \times 300 \times \cos(40) + 500^2 + 300^2$$

$$\approx 569813,33$$

$$\text{soit } \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| \approx 754,86 \text{ N.}$$

EXERCICE 669

$$\text{Soit } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$$\|\vec{F}\|^2 = 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2$$

$$= 2 \times 800 \times 900 \times \cos(80) + 800^2 + 900^2$$

$$\approx 1700053,38$$

$$\text{Déterminons l'angle } \alpha = \widehat{(\vec{F}; \vec{F}_2)} :$$

$$\text{En appliquant la règle des sinus : } \sin \alpha = \frac{800 \sin(100)}{\sqrt{1700053,38}}$$

$$\alpha \approx 37,17^\circ$$

$$\|\vec{F} + \vec{F}_3\|^2 = 2\vec{F} \cdot \vec{F}_3 + \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{F}_3\|^2$$

$$\approx 2 \times 500 \times \sqrt{1700053,38} \times \cos(197,17) + 1700053,38 + 500^2$$

$$\approx 704301,52$$

$$\text{d'où } \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\| \approx 839,23 \text{ N.}$$

EXERCICE 670

1. $W = 1500 \times 1000 \times \cos(30) = 750000\sqrt{3} \approx 1299038 \text{ N.m}^{-1}.$

2. $\|\vec{F}\| = \frac{750000\sqrt{3}}{1500} = 500\sqrt{3} \approx 866 \text{ N.}$

EXERCICE 671

1. Si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$ alors M appartient aux cercles de diamètre $[AB]$ et de diamètre $[AC]$ (voir démonstration dans l'exercice 655).

Ces deux cercles ont deux points communs, dont le

point A . Par hypothèse $M \neq A$, le point M est donc le second point d'intersection.

2. Par construction, le triangle AMB est rectangle en M , le point M est donc le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

EXERCICE 672

1. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AB]$ (voir démonstration dans l'exercice 655).
2. Γ_2 , est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C .
3. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC

Γ_1 et Γ_2 ont deux points communs si, et seulement si $H \in [AB]$.

c'est-à-dire $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$.

EXERCICE 673

1. $\vec{AM} \cdot \vec{BC} + \vec{BM} \cdot \vec{CA} + \vec{CM} \cdot \vec{AB}$
- $$= \vec{AM} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BA} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$$
- $$= \vec{AM} \cdot \vec{0} - \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0$$
2. Les hauteurs issues de A et de B se coupent en un point M alors $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$ et $\vec{BM} \cdot \vec{CA} = 0$ donc d'après la question précédente $\vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$
- c'est-à-dire $(CM) \perp (AB)$, le point M appartient donc à la hauteur issue de C dans le triangle ABC .

EXERCICE 674

ABC un triangle, A' , B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$AB^2 + CA^2 + BC^2$$

$$= (\vec{AA'} + \vec{A'B})^2 + (\vec{CC'} + \vec{C'A})^2 + (\vec{BB'} + \vec{B'C})^2$$

$$= AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$$

$$+ 2(\vec{AA'} \cdot \vec{A'B} + \vec{BB'} \cdot \vec{B'C} + \vec{CC'} \cdot \vec{C'A})$$

$$\text{D'autre part } 2\vec{AA'} \cdot \vec{A'B} = \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AC} \cdot \vec{CB}$$

$$2\vec{BB'} \cdot \vec{B'C} = \vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC}$$

$$2\vec{CC'} \cdot \vec{C'A} = \vec{CA} \cdot \vec{BA} + \vec{CB} \cdot \vec{BA}$$

$$\text{de plus } A'B^2 + B'C^2 + C'A^2 = \frac{1}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$

On en déduit alors que

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

EXERCICE 675

Soit I le milieu du segment $[AD]$

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} \\
 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} \\
 &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}
 \end{aligned}$$

car $(CD) \perp (AB)$

$$2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = -OA \times OB + OD \times OC$$

$$= 0 \text{ car } OA = OC \text{ et } OB = OD$$

donc $(OI) \perp (BC)$

c'est-à-dire OI hauteur issue de O dans le triangle OBC .

EXERCICE 676

$$\begin{aligned}
 1. \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI} \\
 &= 0 - 2a^2 + 2a^2 - 0 = 0
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $(AJ) \perp (DI)$.

On démontre de même que $(AJ) \perp (BK)$, $(LC) \perp (ID)$

et $(LC) \perp (BK)$

$PQRS$ est donc un rectangle.

$$\begin{aligned}
 2. \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LS}) \cdot \overrightarrow{ID} \\
 &= \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{ID} \text{ (les deux autres produits sont}
 \end{aligned}$$

nuls)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{AL} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD} \text{ car } \overrightarrow{AL} \perp \overrightarrow{IA}.
 \end{aligned}$$

$$3. \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a^2 \text{ et } ID = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{d'où } PS = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$4. \text{ On montre de manière analogue que } RS = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$PQRS$ est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un carré.

$$5. \mathcal{A} = \frac{a^2}{5}.$$

EXERCICE 677

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} \text{ (les deux autres produits}
 \end{aligned}$$

sont nuls car $ABDE$ et $ACFG$ sont des carrés)

$2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ car les points A, B, G d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés et $AB = AE$ et $AC = AG$.

EXERCICE 678

$$1. \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} = h^2 - 2a^2.$$

$$2. [AC] \text{ et } [BD] \text{ sont orthogonales si et seulement si } h^2 = 2a^2$$

a et h étant deux réels positifs, on en déduit que

$$h = a\sqrt{2}.$$

EXERCICE 679

$$\begin{aligned}
 1. MA^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 \\
 &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{De même } MB^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2.$$

$$\text{et } MC^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + GC^2.$$

$$\text{de plus } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } f(M) = f(G) + 3MG^2.$$

$$2. f(M) = k \iff MG^2 = \frac{1}{3}(k - f(G)).$$

Si $k > f(G)$ alors Γ_k est le cercle de centre G et de

$$\text{rayon } \sqrt{\frac{1}{3}(k - f(G))}.$$

Si $k = f(G)$ alors Γ_k est réduit au point G .

Si $k < f(G)$ alors Γ_k est l'ensemble vide.

$$3. \text{ Soit } I \text{ le milieu de } [AB]$$

$$GA^2 + GB^2 = 2GI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}GC^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

$$4. \text{ On obtient de manière analogue :}$$

$$GB^2 + GC^2 = \frac{1}{2}GA^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

$$GC^2 + GA^2 = \frac{1}{2}GB^2 + \frac{1}{2}CA^2.$$

En additionnant les trois relations nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 2(GA^2 + GB^2 + GC^2) \\
 = \frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{soit } GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

$$5. f(M) = AB^2 + BC^2 + CA^2 \iff f(M) = 3f(G)$$

$$\iff MG^2 = \frac{2}{3}f(G)$$

M est sur le cercle de centre G et de rayon

$$\sqrt{\frac{2}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)}.$$

EXERCICE 680

$$1. \Delta_0 \text{ est la droite perpendiculaire à la droite } (AB) \text{ passant par } A.$$

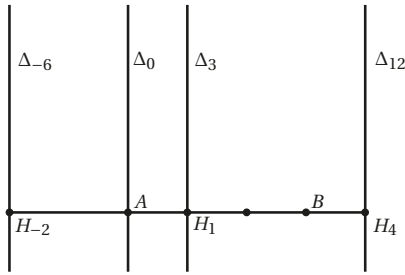
$$2. f(H) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 3k.$$

$$3. \text{ Soit } H \text{ le projeté orthogonal de } M \text{ sur } (AB) \text{ alors}$$

$$f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 3k.$$

Δ_k est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H de (AB) tel que $AH = k$.

4.



5. L'ensemble des points M tels que $-6 \leq f(M) \leq 3$ est la partie du plan comprise entre les droites Δ_{-6} et Δ_3 , droites incluses.
6. L'ensemble des points M tels que $0 < f(M) \leq 12$ est la partie du plan comprise entre les droites Δ_0 et Δ_{12} , droites exclues.

EXERCICE 681

1. $f(M) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
 $= 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. $f(M) = 0 \iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB}$, Δ_0 est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point I .
 Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB)
 $f(M) = 8 \iff IH = 2$, Δ_8 est la perpendiculaire à (AB) passant par B .
 $f(M) = -8 \iff IH = -2$, Δ_{-8} est la perpendiculaire à (AB) passant par A .
3. L'ensemble des points M tels que $-8 < f(M) < 8$ est la partie du plan comprise entre les droites Δ_8 et Δ_{-8} , droite Δ_0 exclue.

EXERCICE 682

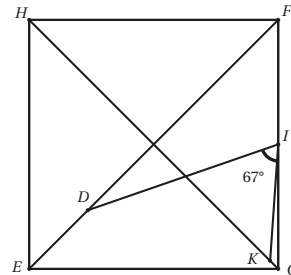
1. $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$
 $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$
 d'où $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \implies \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.
 M appartient à la droite perpendiculaire à (IB) passant par A .
2. G centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
 D'où $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \implies \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.
 M appartient au cercle de diamètre $[MG]$.

EXERCICE 683

1. a. Le triangle ABH est rectangle en H ,
 d'où $BH = AB \times \sin \alpha$.
 b. $A = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.
 c. Soit H' et H'' les pieds des hauteurs issues respectivement de A dans le triangle ABC
 $AH' = AC \times \sin \gamma$ d'où $A = \frac{1}{2} AH' \times BC = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.
 $CH'' = BC \times \sin \beta$ d'où $A = \frac{1}{2} CH'' \times BC = \frac{1}{2} ac \sin \beta$.
 d. D'après les questions précédentes
 $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma$
 Les réelles a , b et c étant non nuls, nous pouvons diviser les égalités par abc d'où
 $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$.
2. a. $\widehat{ACB} = 180 - 25 - 120 = 35^\circ$.
 $\frac{\widehat{AB}}{AB} = \frac{\widehat{BC}}{BC} = \frac{\widehat{AC}}{AC}$
 $\frac{\sin \widehat{C}}{4} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin 120} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin 25}$
 soit $\frac{4}{\sin 35} = \frac{BC}{\sin 120} = \frac{AC}{\sin 25}$
 d'où $AC = \frac{4 \sin 25}{\sin 35} = 2,95$ à 10^{-2} près.
 $BC = \frac{4 \sin 120}{\sin 35} = 6,04$ à 10^{-2} près.
 b. $\frac{6}{\sin 55} = \frac{7}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}}$
 $\sin \widehat{A} = \frac{7 \sin 55}{6}$ d'où $\widehat{BAC} = 72,88^\circ$ à 10^{-2} près
 $\widehat{ABC} = 180 - 55 - 72,88 = 52,12^\circ$
 $AC = \frac{6 \sin 52,12}{\sin 55} = 5,78$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 684

1.



2. a. Dans le repère orthonormé $(E; \frac{1}{6}\overrightarrow{EG}; \frac{1}{6}\overrightarrow{EF})$
 On a $D(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ et $I(6; 3)$ d'où $DI = \sqrt{49 - 18\sqrt{2}}$.

b. D'après la relation d'Al-Kashi

$$\cos \widehat{DIF} = \frac{DI^2 + IF^2 - ED^2}{2DI \times IF}$$

d'où $\widehat{DIF} = 109^\circ$ au degré près.

$$\text{c. } \widehat{KIG} = 180 - 109 - 67 = 4^\circ.$$

3. a. On applique la règle des sinus dans le triangle KIG
- $$\frac{KI}{\sin(45)} = \frac{IG}{\sin(131)} \text{ d'où } KI = \frac{3 \sin(45)}{\sin(131)} = 2,81 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b. $S = \frac{1}{2} DI \times KI \times \sin(67) = 6,28 \text{ cm}^2 \text{ au mm}^2 \text{ près.}$

4. a. En appliquant la relation d'Al-Kashi dans le triangle DIK :

$$KD^2 = ID^2 + IK^2 - 2ID \times IK \times \cos(67) \text{ d'où } KD = 4,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b. En appliquant la relation des sinus dans le triangle KDI

$$\sin \widehat{KDI} = \frac{KI \sin(67)}{KD} \text{ on obtient } \widehat{KDI} = 35^\circ \text{ au degré près.}$$

EXERCICE 685

1. $\overrightarrow{2AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} \\ 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \text{d'où } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} &= 0 \end{aligned}$$

2. $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$ donc $(AA') \perp (IJ)$.

EXERCICE 686

On calcule $\widehat{ABC}$ en utilisant la formule d'Al-Kashi :

$$\cos \widehat{B} = \frac{116 + 370 - 74}{2 \times \sqrt{116} \times \sqrt{370}}$$

$$\widehat{B} = 6,1^\circ \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{370} \times \sqrt{116} \times \sin \widehat{B} = 11 \text{ cm}^2 \text{ (en prenant la valeur exacte de } \widehat{B} \text{).}$$

EXERCICE 687

1. Soit $M(x; y)$ un point de la droite (BC) ,

$$\overrightarrow{BC}(-2; -4) \text{ et } \overrightarrow{BM}(x+1; y-6)$$

En utilisant la condition de colinéarité, nous obtenons une équation de la droite (BC) : $2x - y + 8 = 0$.

2. $\overrightarrow{BA}(3; -3)$ et $\overrightarrow{BC}(-2; -4)$ d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6$
d'autre part, en posant $H_A(x; y)$ on obtient

$$\overrightarrow{BH_A}(x+1; y-6) \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH_A} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x - 4y + 22$$

de plus H_A appartient à la droite (BC) d'équation $2x - y + 8 = 0$.

Les coordonnées de H_A vérifient donc le système

$$\begin{cases} 2x - y = -8 \\ -2x - 4y = -16 \end{cases} \text{ d'où } H_A(-1,6; 4,8).$$

3. En procédant de manière analogue, on obtient

$$H_B\left(-\frac{5}{13}; \frac{33}{13}\right) \text{ et } H_C(0; 5).$$

EXERCICE 688

- Equation de (BC) : $x + 7y - 21 = 0$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\text{d'autre part } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH_A} \cdot \overrightarrow{BC} = 7x - y + 3$$

Les coordonnées de H_A vérifient donc le système

$$\begin{cases} 7x - y = -14 \\ x + 7y = 21 \end{cases} \text{ d'où } H_A\left(-\frac{77}{50}; \frac{161}{50}\right).$$

- Equation de (AC) : $-2x + 9y - 4 = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$$

$$\text{d'autre part } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH_B} \cdot \overrightarrow{AC} = 9x + 2y + 18$$

Les coordonnées de H_B vérifient donc le système

$$\begin{cases} 9x + 2y = 6 \\ -2x + 9y = 4 \end{cases} \text{ d'où } H_B\left(\frac{46}{85}; \frac{48}{85}\right).$$

- Equation de (AB) : $3x - 2y + 6 = 0$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -11$$

$$\text{d'autre part } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH_C} = -2x - 3y + 9$$

Les coordonnées de H_C vérifient donc le système

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \text{ d'où } H_C\left(\frac{22}{13}; \frac{72}{13}\right).$$

EXERCICE 689

On remarque que $\widehat{ACB} = 63^\circ$ et $\widehat{ADB} = 62^\circ$

On applique la relation des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{AC}{\sin 69} = \frac{200}{\sin 63} \text{ d'où } AC = \frac{200 \sin 69}{\sin 63} \approx 209,56$$

$$\frac{BC}{\sin 48} = \frac{200}{\sin 63} \text{ d'où } BC = \frac{200 \sin 48}{\sin 63} \approx 166,81$$

On applique la relation des sinus dans le triangle ABD :

$$\frac{BD}{\sin 74} = \frac{200}{\sin 62} \text{ d'où } BD = \frac{200 \sin 74}{\sin 62} \approx 217,74$$

On applique la relation d'Al-Kashi dans le triangle BCD

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \times \cos 25$$

$$\text{d'où } CD \approx 96,95.$$

EXERCICE 690

1. On applique la trigonométrie dans le triangle ABD :

$$AD = 10 \tan 30 = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ et } BD = \frac{10}{\cos 30} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

2. On applique la relation des sinus dans le triangle ABC en remarquant que $\widehat{ACB} = 70^\circ$

$$\frac{AC}{\sin 80} = \frac{10}{\sin 70} \text{ d'où } AC = \frac{10 \sin 80}{\sin 70} \approx 10,48$$

$$\frac{BC}{\sin 30} = \frac{10}{\sin 70} \text{ d'où } BC = \frac{10 \sin 30}{\sin 70} \approx 5,32$$

3. On applique la relation d'Al-Kashi dans le triangle BCD

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \times \cos 50$$

$$\text{d'où } CD \approx 9,09.$$

EXERCICE 691

Soit A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.

$$a = BC, b = AC \text{ et } c = AB$$

$$\text{Rappel : } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{GC} \\ &= 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} \text{ car } \overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B} \\ &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

2. On utilise la relation de Chasles en introduisant le point G dans les trois expressions et le produit scalaire, on développe et on factorise judicieusement :

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 2(GA^2 + GB^2 + GC^2) + \overrightarrow{AG} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{BG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \\ &= 2(GA^2 + GB^2 + GC^2) + AG^2 + BG^2 + CG^2 \\ &= 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad f(M) &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\ &= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GB} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GC} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})) \\ &= 3MG^2 - \frac{1}{2} (GA^2 + GB^2 + GC^2) \\ &= 3MG^2 - \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f(M) = 0 &\iff MG^2 = \frac{1}{18} (a^2 + b^2 + c^2) \\ \Gamma &\text{ est le cercle de centre } G \text{ et de rayon} \\ R &= \frac{1}{6} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

EXERCICE 692

Soit A' le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[AA']$.

ABC étant un triangle équilatéral de côté a , on a

$$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ et } IA = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

En utilisant la relation de Chasles, le développement du produit scalaire et la définition de A' et I , on obtient

$$\begin{aligned} MB^2 + MC^2 &= 2MA'^2 + \frac{a^2}{2} \\ MA^2 + MA'^2 &= 2MI^2 + \frac{3a^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MI^2 + \frac{5a^2}{4}.$$

$$M \in \Gamma \iff MI^2 = \frac{1}{4} \left(k^2 - \frac{5a^2}{4} \right)$$

Si $-\frac{a\sqrt{5}}{2} < k < \frac{a\sqrt{5}}{2}$, il n'existe pas de points M , Γ est vide.

Si $k = \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$, Γ est réduit au point I .

Si $k < -\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $k > \frac{a\sqrt{5}}{2}$, Γ est le cercle de centre I est de rayon $\sqrt{k^2 - \frac{5a^2}{4}}$.

EXERCICE 693

$$1. \quad \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}.$$

$ABCD$ est un parallélogramme (aplatis si les A, B, C sont alignés).

$$2. \quad MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2$$

$$\text{d'autre part } DB^2 = DA^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + DC^2$$

$$\text{d'où } MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = k \iff MD^2 = k + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$$

Si $k + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} > 0$, M est sur le cercle de centre D

et de rayon $\sqrt{k + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}$.

Si $k + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, $M = D$.

Si $k + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} < 0$, l'ensemble des points M est vide.

EXERCICE 694

Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI},$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC}.$$

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$$

Γ_1 est le centre de diamètre $[IJ]$.

$$2. \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$$

Γ_2 est la perpendiculaire à (DC) passant par I .

EXERCICE 695

Soit C' le milieu de $[AB]$. On peut remarquer que le triangle ABC est rectangle en A .

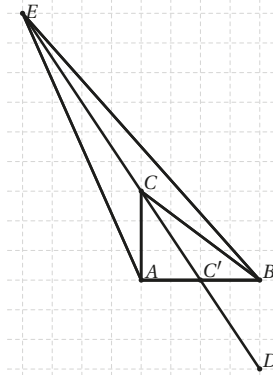
$$1. \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$$

donc $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ avec D le point tel que $ACBD$ soit un parallélogramme.

$$2. \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}, M \text{ est le symétrique de } D \text{ par rapport à } C.$$

Appelons E ce point.

Par construction (EC') est une médiane du triangle AEB et $\overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC'}$ donc C est le centre de gravité du triangle EAB .



$$3. MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = -ME^2 + EA^2 + EB^2 - 3EC^2.$$

C étant le centre de gravité du triangle EAB , on a

$$CA^2 + CB^2 + CE^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AE^2 + BE^2)$$

$$\text{soit } AE^2 + EB^2 = 3(CA^2 + CB^2 + CE^2) - AB^2$$

$$\text{d'où } MA^2 + MB^2 - 3MC^2$$

$$= -ME^2 + 3CA^2 + 3CB^2 - AB^2$$

$$= -ME^2 + 86a^2$$

$$MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 5a^2 \iff ME^2 = 81a^2.$$

M est sur le cercle de centre E et de rayon $9a$.

EXERCICE 696

$$1. \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ = 0.$$

2. D'après la question précédente

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ implique que les trois produits sont nuls.}$$

M appartient aux trois hauteurs, M est donc l'orthocentre.

EXERCICE 697

1. Voir exercice 679.

$$2. (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = (3\overrightarrow{MG})^2 = 9MG^2$$

En développant l'expression, on obtient :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA})$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 +$$

$$2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC})$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 4\overrightarrow{MA} \cdot$$

$$\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$= 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) +$$

$$2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC})$$

d'où en utilisant les deux formes de l'expression :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2).$$

3. Un point M appartient au cercle de diamètre $[AA']$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$

Un point M appartient au cercle de diamètre $[BC]$ si et seulement si $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Si M appartient aux deux cercles alors

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

ou d'après la question précédente

$$MG^2 = \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Les points communs à ces deux cercles, lorsqu'ils existent, sont sur le cercle de centre G et de rayon

$$\sqrt{\frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

EXERCICE 698

radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
degrés	0	30	45	60	90

<i>radians</i>	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
<i>degrés</i>	135	150	180	300	270

EXERCICE 699

<i>degrés</i>	$\frac{\pi}{180}$	10	15	22,5	80
<i>radians</i>	1	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{9}$

<i>degrés</i>	140	160	225	320	315
<i>radians</i>	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{16\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{4}$

EXERCICE 700

<i>point</i>	A	B	C	D
<i>mesure en radians</i>	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
<i>point</i>	E	F	G	
<i>mesure en radians</i>	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	

EXERCICE 701

$$A: \frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$$

$$B: \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$$

$$C: \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$$

$$D: \pi; -\pi; 3\pi$$

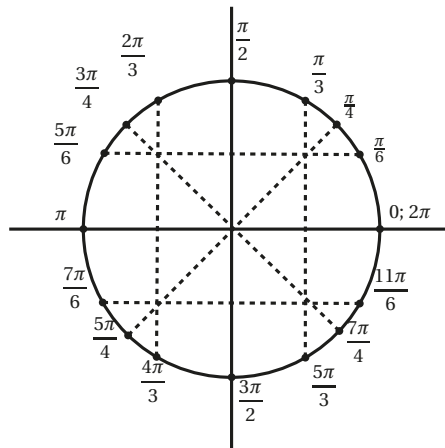
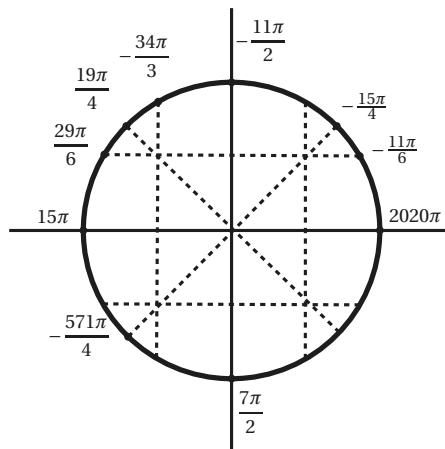
$$E: -\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}$$

$$F: -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$$

$$G: -\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$$

$$H: -\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$$

$$I: -\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$$

EXERCICE 702**EXERCICE 703****EXERCICE 704**

$29\pi = \pi + 14 \times 2\pi$ de mesure principale π

Notation : $29\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}$

$302\pi = 151 \times 2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$,

$$\frac{23\pi}{2} = \frac{24\pi - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 6 \times 2\pi \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

$$\frac{181\pi}{4} = \frac{184\pi - 3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 23 \times 2\pi \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$\frac{2021\pi}{6} = \frac{168 \times 12\pi + 5\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi},$$

$$-\frac{37\pi}{3} = \frac{-36\pi - \pi}{6} = -3 \times 2\pi - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

EXERCICE 705

$$\frac{234\pi}{5} = \frac{230\pi + 4\pi}{5} = 23 \times 2\pi + \frac{4\pi}{5} \equiv \frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi},$$

$$\frac{241\pi}{7} = \frac{17 \times 14\pi + 3\pi}{7} = 17 \times 2\pi + \frac{3\pi}{7} \equiv \frac{3\pi}{7} \pmod{2\pi},$$

$$\frac{8764\pi}{13} = \frac{337 \times 26\pi + 2\pi}{13} = 337 \times 2\pi + \frac{2\pi}{13} \equiv \frac{2\pi}{13} \pmod{2\pi},$$

$$\frac{273\pi}{7} = \frac{19 \times 14\pi + 7\pi}{7} = 19 \times 2\pi + \pi \equiv \pi \pmod{2\pi},$$

$$-\frac{9876\pi}{5} = \frac{-9880\pi + 4\pi}{5} \equiv \frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi}.$$

EXERCICE 706

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
$\cos \theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

θ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos \theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin \theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

EXERCICE 707

θ	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{6}$	-3π	$\frac{17\pi}{6}$
$\cos \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

θ	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{2}$	$-\frac{8\pi}{3}$
$\cos \theta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 708

1. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{5\pi}{3}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{\pi}{3}$
2. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{3\pi}{4}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = \frac{3\pi}{4}$
3. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{7\pi}{6}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{5\pi}{6}$
4. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{3\pi}{2}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 709

1. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{4\pi}{3}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{2\pi}{3}$
2. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{11\pi}{6}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{\pi}{6}$
3. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \frac{5\pi}{4}$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = -\frac{3\pi}{4}$
4. Dans $[0; 2\pi[: \theta = \pi$, dans $]-\pi; \pi] : \theta = \pi$

EXERCICE 710

1. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 2\pi - 1,23 \approx 5,05$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx -1,23$
2. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 3,79$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx -2,50$
3. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 2,89$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx 2,89$
4. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 5,35$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx -0,93$

EXERCICE 711

1. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 1,47$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx 1,47$
2. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 3,59$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx -2,69$
3. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 1,87$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx 1,87$
4. Dans $[0; 2\pi[: \theta \approx 5,16$, dans $]-\pi; \pi] : \theta \approx -1,12$

EXERCICE 712

1. $\sin^2 x = 1 - 0,15^2 = 0,9775$
 $x \in [0; \pi]$ donc $\sin x = \sqrt{0,9775}$
2. $\sin^2 x = 1 - (-0,2)^2 = 0,96$
 $x \in [0; \pi]$ donc $\sin x = \sqrt{0,96}$
3. $\sin^2 x = 1 - 0,15^2 = 0,9775$
 $x \in [-\pi; 0]$ donc $\sin x = -\sqrt{0,9775}$

4. $\sin^2 x = 0,9775$
 $x \in [\pi; 2\pi]$ donc $\sin x = -\sqrt{0,9775}$
5. $\sin^2 x = 0,96$
 $x \in [\pi; 2\pi]$ donc $\sin x = -\sqrt{0,96}$
6. $\sin^2 x = 0,99$
 $x \in [0; \pi]$ donc $\sin x = \sqrt{0,99}$

EXERCICE 713

1. $\cos^2 x = 1 - 0,15^2 = 0,9775$
 $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = \sqrt{0,9775}$
2. $\cos^2 x = 0,96$
 $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = -\sqrt{0,96}$
3. $\cos^2 x = 0,9775$
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = \sqrt{0,9775}$
4. $\cos^2 x = 0,9775$
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = \sqrt{0,9775}$
5. $\cos^2 x = 0,96$
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = \sqrt{0,96}$
6. $\cos^2 x = 0,99$
 $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos x = -\sqrt{0,99}$

EXERCICE 714

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	
$\cos x$	$-$	0	$+$	$+$	0
$\sin x$	0	$-$	$-$	0	$+$

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\cos x$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\sin x$	$+$	0	$-$	$-$	0

EXERCICE 715

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où $1 \leq \cos x + 2 \leq 3$
2. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ d'où $-4 \leq 3 \sin x - 1 \leq 2$

3. $-3 \leq 2 - 5 \cos 2x \leq 7$

4. $-1 \leq 1 - 2 \sin 5x \leq 3$

EXERCICE 716

Dans le triangle ABD rectangle en A , $\widehat{ABD} = \frac{\theta}{2}$ et d'après le théorème de Pythagore $BD = x\sqrt{5}$
On en déduit $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
Ainsi $\sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

EXERCICE 717

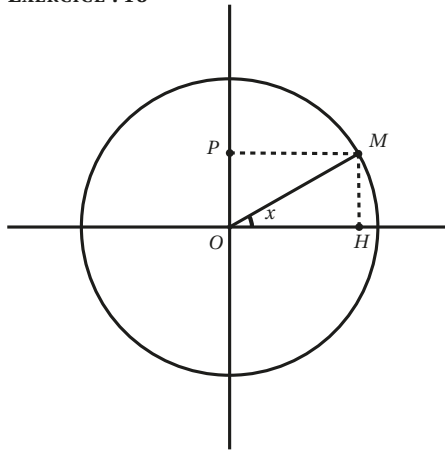
Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 37^\circ$ et $BC = 10$ donc $\widehat{ABC} = 71,5^\circ$

Soit H le pied de la hauteur issue de A , le triangle étant isocèle en A , on en déduit que H est le milieu de $[BC]$.

Dans le triangle ABH , rectangle en H , $\cos 71,5 = \frac{5}{AB}$
d'où $AB = \frac{5}{\cos 71,5} \approx 15,76$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 718

1. Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{AB}$
 $\ell = \frac{\pi \theta R}{180}$.
2. Distance parcourue : $d = \frac{5 \times 36}{60} = 3$ soit 3000 mètres.
 $\theta = \frac{180 \ell}{\pi R} \approx 159 \times 360 + 55,78$ soit $55,78^\circ$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 719

Le triangle OMH est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = OH^2 + HM^2$
d'autre part $OH = \cos x$, $MH = OP = \sin x$ et OM est un rayon du cercle trigonométrique donc $OM = 1$

d'où $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

EXERCICE 720

1. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC : $AC = \sqrt{2}$

AC bissectrice de l'angle $\widehat{DCA}$ d'où $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$.

2. Dans le triangle ABC , $\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{1B}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

EXERCICE 721

1. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BCH , $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

le triangle ABC est équilatéral donc $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$

CH est bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ d'où $\widehat{BCH} = \frac{\pi}{6}$.

2. Dans le triangle BCH ,

$$\cos \widehat{HBC} = \frac{HB}{BC} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \widehat{HBC} = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{HCB} = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \widehat{HCB} = \frac{HB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 722

def principale(a, b) :

if a/b > 1 :

while a/b > 1 :

a = a - 2 * b

if a/b <= -1 :

while a/b <= -1 :

a = a + 2 * b

print(a, "pi", b)

EXERCICE 723

$$1. \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$3. \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$4. \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$5. \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$6. \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$7. \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$8. \cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$9. \cos 5x = -1 \Leftrightarrow 5x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$10. \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$11. \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$12. \sin 7x = -1 \Leftrightarrow 7x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}$$

EXERCICE 724

$$\begin{aligned} 1. \cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) \\ &= \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned}$$

car $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$

$$\begin{aligned} 2. \sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

3. On pose $b = a$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

4. On pose $a = b$, on obtient alors

$$\sin 2a = \cos a \sin a + \sin a \cos a = 2\cos a \sin a$$

EXERCICE 725

$$\begin{aligned} 1. \cos(x+y) \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y \\ &= \cos^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x) \sin^2 y \\ &= \cos^2 x - \sin^2 y = 1 - \sin^2 x - (1 - \cos^2 y) \end{aligned}$$

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} 2. \sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \sin y \cos x)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x \\ &= \sin^2 x(1 - \sin^2 y) - \sin^2 y(1 - \sin^2 x) \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \cos(x+y)\sin(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y)(\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\ &= (\cos^2 y + \sin^2 y) \cos x \sin x \\ &\quad - (\cos^2 x + \sin^2 x) \cos y \sin y \\ &= \cos x \sin x - \cos y \sin y. \end{aligned}$$

4. En remplaçant y par $-y$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\cos(x-y)\sin(x+y) = \cos x \sin x + \cos y \sin y.$$

EXERCICE 726

$$1. \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

$$2. \cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$3. \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 727

$$1. \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}.$$

$$2. \cos \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$3. \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

EXERCICE 728

$$\begin{aligned} 1. \text{ D'après l'exercice 724, pour tout } x \text{ réel,} \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \text{d'où } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ et } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

$$2. \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{d'où } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

EXERCICE 729

$$\begin{aligned} \sin(2a+b) &= \sin 2a \cos b + \cos 2a \sin b \\ &= 2\sin a \cos a \cos b + (2\cos^2 a - 1) \sin b \\ &= 2\sqrt{1 - \cos^2 a} \cos a \cos b + (2\cos^2 a - 1) \sqrt{1 - \cos^2 b} \\ &= 2 \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{15} - 7\sqrt{7}}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a-2b) &= \sin a \cos 2b - \cos a \sin 2b \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 a} (2\cos^2 b - 1) - 2\cos a \cos b \sqrt{1 - \cos^2 b} \\ \sin(a-2b) &= \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{15} - 3\sqrt{7}}{32} \end{aligned}$$

EXERCICE 730

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x(1 - 2\sin^2 x) \end{aligned}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 3 - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x + 3 = 6 - 4 = 2.$$

EXERCICE 731

1. Pour tout réel $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned} 8\cos x \cos 2x \cos 4x &= 4\sin 2x \cos 2x \cos 4x \\ &= 2\sin 4x \cos 4x = \sin 8x \\ \text{d'où } \cos x \cos 2x \cos 4x &= \frac{\sin 8x}{8\sin x}. \end{aligned}$$

$$2. \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{8\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

$$3. \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}.$$

EXERCICE 732

1. Méthode 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) \\ &= 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos(x - b) = 2(\cos x \cos b + \sin x \sin b) \\ &= 2 \cos b \cos x + 2 \sin b \sin x \end{aligned}$$

$$\text{or } f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

En utilisant les deux expressions de f , on obtient :

$$f(0) = 2 \cos b = 1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin b = \sqrt{3}$$

$$\text{d'où } b = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x) = \sqrt{2} &\iff 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \\ &\iff \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \iff x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\iff x = \frac{7\pi}{12} \text{ ou } x = \frac{\pi}{12}$$

EXERCICE 733

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\ &= \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$:
 $-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$.

EXERCICE 734

$$1. \quad 1 - 2 \sin x > 0 \iff \sin x < \frac{1}{2}$$

$$x \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi \right[$$

$$2. \quad 1 + 2 \cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left] -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right[$$

3. En utilisant le tableau de signes de $\cos x$, $\sin x$ et du produit, on obtient $x \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$

$$\begin{aligned} 4. \quad 2 \cos x + \sqrt{3} &< 0 \iff \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff -\pi < x < -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x \leq \pi. \end{aligned}$$

$$x \in \left] -\pi; -\frac{5\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi \right[$$

EXERCICE 735

$$1. \quad 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

On pose $X = \cos x$, l'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$ Cette équation admet deux solutions : $X_1 = 1$ et

$$X_2 = \frac{1}{2}.$$

$$X_1 = 1 \iff \cos x_1 = 1 \iff x_1 = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$X_2 = \frac{1}{2} \iff \cos x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \quad \sin^2 x - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin x + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0.$$

On pose $X = \sin x$, l'équation devient

$$X^2 - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) X + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Delta = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

Cette équation admet deux solutions :

$$X_1 = 3 \text{ et } X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

 $X_1 = 3 > 1$ donc ne convient pas.

$$X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

EXERCICE 736

$$1. \quad 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \text{ on pose } X = x^2,$$

l'équation devient $8X^2 - 8X + 1 = 0$

Cette équation a deux solutions :

$$X_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Ces deux solutions étant positives, on en déduit les solutions de (E) :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, x'_1 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, x'_2 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$2. \quad \cos 4z = 0 \iff 4z = 2k\pi \iff x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \cos 4z &= 2 \cos^2 2z - 1 = 2(2 \cos^2 z - 1)^2 - 1 \\ &= 8 \cos^4 z - 8 \sin^2 z - 1. \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente :

$$8 \cos^4 \frac{\pi}{8} - 8 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0, \cos \frac{3\pi}{8} > 0 \text{ et } \cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{3\pi}{8}$$

On en déduit d'après la question 1

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

EXERCICE 737

- $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- D'après le théorème de Thalès dans le triangle OIT ,
 $\frac{OI}{OH} = \frac{IT}{MH}$ de plus $OI = 1$ d'où $IT = \frac{MH}{OH}$.
- $IT = \tan \alpha$, $OH = \cos \alpha$ et $MH = \sin \alpha$ d'où
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- $\tan \alpha = 1 \iff \cos \alpha = \sin \alpha \iff \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

EXERCICE 738

$$\begin{aligned} 1. \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ \tan(a+b) &= \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan(a-b)} \\ 2. \tan(a-b) &= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

- En posant $b = a$ dans la première égalité, nous obtenons :

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

- On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ et } \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

on en déduit alors :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$$

EXERCICE 739

- ABC isocèle en A
donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$
Par définition de la bissectrice, on en déduit que
 $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{\pi}{5}$
 $\widehat{DAB} = \widehat{ABD}$ donc ABD est un triangle isocèle en D
d'autre part dans le triangle BCD ,

$$\widehat{BDC} = \pi - \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

BCD est donc isocèle en B .

On en déduit alors que $AD = BD = BC = 1$

- Soit H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD

$$\cos \widehat{HAD} = \frac{AH}{AD} \text{ d'où } AH = \cos \frac{\pi}{5}$$

Le triangle ADB étant isocèle en D , on en déduit que HD est aussi médiatrice de $[AB]$ d'où

$$AB = 2AH = 2 \cos \frac{\pi}{5}.$$

- D'après les questions précédentes,

$$DC = AC - AD = 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1.$$

- Soit H' la hauteur issue de B dans le triangle BCD

$$\cos \widehat{BDH'} = \frac{DH'}{BD} \text{ d'où } DH' = \cos \frac{2\pi}{5} \text{ d'où}$$

$$DC = 2 \cos \frac{2\pi}{5} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \text{ car } \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1.$$

- En utilisant les deux expressions de DC , nous obtenons $4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$.

- L'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

- $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ d'où $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

- $\sin \frac{\pi}{5} > 0$ d'où $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

EXERCICE 740

$$1. \cos(2\alpha) = 2 \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- $\alpha \in [0; \pi]$ et $\cos \alpha > 0$ donc $2\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 741

- $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\cos(4\alpha) = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1$$

$$= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$= 8 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^4 - 8 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 + 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \alpha.$$

- $\cos 4\alpha = \cos \alpha \implies 4\alpha = \alpha + 2k\pi$ ou $4\alpha = -\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\implies \alpha = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \alpha = \frac{2k\pi}{5} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha \in [0; \pi] \text{ et } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{on en déduit alors } \alpha = \frac{2\pi}{5}.$$

EXERCICE 742

1. a.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- (1)

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
 (2)

En additionnant les deux égalités, nous obtenons :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\text{Posons } a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2}$$

$$\text{alors } a+b = p \text{ et } a-b = q$$

$$\text{d'où } \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- b. En soustrayant les égalités (1) et (2) et en posant

$$a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2},$$

$$\text{on obtient } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- c.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- (3)

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
 (4)

En additionnant les deux égalités, nous obtenons :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\text{posons } a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2}$$

$$\text{alors } a+b = p \text{ et } a-b = q$$

$$\text{d'où } \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- d. En soustrayant les égalités (3) et (4) et en posant

$$a = \frac{p+q}{2} \text{ et } b = \frac{p-q}{2},$$

$$\text{on obtient } \sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

- 2.
- $\cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 2x + \cos 3x$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \right)$$

$$= 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(4x) \cos x.$$

- 3.
- $\sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$

$$= 2 \cos(3x) (\sin(5x) + \sin(4x))$$

$$= 4 \cos(3x) \sin\left(\frac{9x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

EXERCICE 743

- 1.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= \cos 2x$$

- 2.
- $\cos^2 2x - \sin^2 x = \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \sin^2 x + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) = \cos x \cos 3x$$

- 3.
- $\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x$

$$= (\sin 3x \sin x) \sin^2 x + (\cos 3x \cos x) \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{4} \left((\cos 2x - \cos 4x)(1 - \cos 2x) \right.$$

$$\left. + (\cos 2x + \cos 4x)(1 + \cos 2x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x (\cos 4x + 1))$$

$$\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 2x$$

- 4.
- $4 \cos 3x \sin^3 x + 4 \sin 3x \cos^3 x$

$$= 4 \cos 3x \sin x \sin^2 x + 4 \sin 3x \cos x \cos^2 x$$

$$= (\sin 4x - \sin 2x)(1 - \cos 2x)$$

$$+ (\sin 4x + \sin 2x)(1 + \cos 2x)$$

$$= 2 \sin 4x + 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$= 3 \sin 4x$$

- 5.
- $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x$

$$= 1 + \sin 2x$$

EXERCICE 744

1. Pour tout réel
- $x \neq k\pi$
- avec
- $k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ et } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

2. Pour tout réel
- x
- :

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$$

3. Pour tout réel
- $x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \tan x - \frac{1}{\tan x} &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -\frac{2}{\tan 2x}. \end{aligned}$$

EXERCICE 745

1. Pour tout réel
- $x \neq \frac{k\pi}{2}$
- (
- $k \in \mathbb{Z}$
-)

$$\tan 2x - \tan x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x}{\sin 2x \cos x \cos 2x}$$

$$= \frac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = \frac{\tan x}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

2. Pour tout réel
- $x \neq \frac{k\pi}{2}$
- (
- $k \in \mathbb{Z}$
-)

$$\tan 2x - \tan x = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin x}{\frac{1}{2} (\cos x + \cos 3x)}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos 3x}$$

3. Pour tout réel
- $x \neq \frac{k\pi}{2}$
- (
- $k \in \mathbb{Z}$
-)

$$\tan^2 2x = \frac{4 \tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2} \text{ donc}$$

$$\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{2 \tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2 + 2 \tan^2 x}$$

$$\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{4 \tan^2 x}{2(1 - \tan^2 x)^2 + 4 \tan^2 x} = \frac{\tan^2 2x}{2 + \tan^2 2x}$$

EXERCICE 746

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3x) + \frac{1}{2} \sin(3x) = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos(3x) + \cos \frac{\pi}{3} \sin(3x) = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ & \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

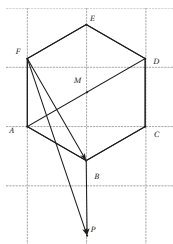
$$\begin{aligned} 2. \quad & \sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = m \\ & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3x) + \frac{1}{2} \sin(3x) = \frac{m}{2} \\ & \Leftrightarrow \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Cette équation n'admet des solutions que si $-1 \leq \frac{m}{2} \leq 1$ donc si $-2 \leq m \leq 2$.

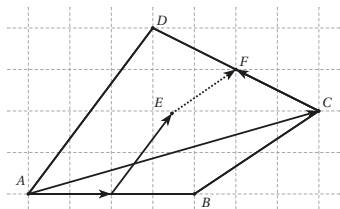
EXERCICE 747

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

donc $N = E$
 $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}$

**EXERCICE 748**

1.



$$\begin{aligned} 2. \quad \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

EXERCICE 749

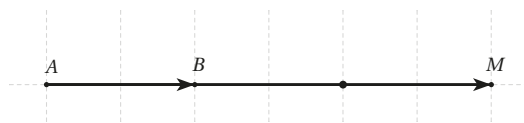
$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 I symétrique de B par rapport à A donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$
 J symétrique de D par rapport à C donc $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{DC}$
On en déduit alors que $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CJ}$
 $IAJC$ est donc un parallélogramme.

EXERCICE 750

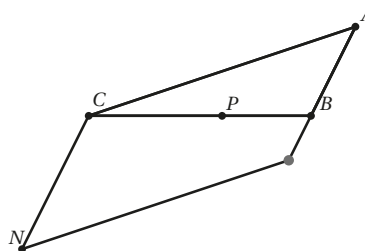
$$1. \quad 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc M appartient à la droite (AB) .

2.

**EXERCICE 751**

1.



2. Les points A, B et C ne sont pas alignés, $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est donc un repère du plan.

$$3. \quad A(0;0), B(1;0), C(0;1) \text{ et } N\left(\frac{3}{2}; 1\right).$$

$$4. \quad \overrightarrow{BP}(x-1; y) \text{ et } \overrightarrow{BC}(-1; 1)$$

Les coordonnées de P vérifient donc $x-1 = -\frac{2}{5}$ et $y = \frac{2}{5}$. On en déduit $P\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

$$5. \quad \overrightarrow{AP}\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right), \overrightarrow{AN}\left(\frac{3}{2}; 1\right) \text{ et } \det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}) = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires, les points A, N et P sont donc alignés.

EXERCICE 752

Les points A , B et C ne sont pas alignés, on peut donc choisir le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \text{ d'où } D(3;0),$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ d'où } E\left(0; \frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ (en introduisant } A \text{ par la relation de Chasles dans les deux vecteurs) d'où } F(-1;2)$$

$$\overrightarrow{DE} \left(-3; \frac{3}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{DF} (-4;2)$$

$$\det(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}) = -6 + 6 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, les points D , E et F sont alignés.

EXERCICE 753

1. Les points A , B et D ne sont pas alignés, $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est donc un repère du plan.

2. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$ et $C(1;1)$.

3. $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

4. $\overrightarrow{KJ}\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
 $\overrightarrow{CI}\left(-\frac{1}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{IK}\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ d'où $\vec{u} = \left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$.

EXERCICE 754

1. Les points A , B et D ne sont pas alignés, $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est donc un repère du plan.

2. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$,
 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ d'où $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{CB} \iff (x-1; y) = (0; -2) \text{ d'où } F(1; -2).$$

3. $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AF}(1; -2)$.

4. $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AE}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, les points A , E et F sont donc alignés.

EXERCICE 755

1. a. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
 $= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{b. } \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

c. $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, on en déduit que $EFGH$ est un parallélogramme.

2. a. Les points A , B et D ne sont pas alignés, $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est donc un repère du plan.

b. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $E\left(\frac{1}{4};0\right)$, $F\left(1;\frac{1}{3}\right)$,
 $G\left(\frac{3}{4};1\right)$ et $H\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

c. $\overrightarrow{EF}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{HG}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right)$.

d. $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, on en déduit que $EFGH$ est un parallélogramme.

EXERCICE 756

1. Dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$:

$$O(0;0), I(1;0), J(0;1), K(-1;0), L(0;-1), A(1;-1),$$

$$B(1;1), C(-1;1), D(-1;-1)$$

$$\overrightarrow{IJ}(-1;1), \overrightarrow{AB}(0;2) \text{ et } \overrightarrow{BK}(-2;-1).$$

2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$:

$$O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), I\left(\frac{1}{2};0\right), J\left(1;\frac{1}{2}\right), K\left(\frac{1}{2};1\right), L\left(0;\frac{1}{2}\right), A(0;0),$$

$$B(0;1), C(1;1), D(1;0)$$

$$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AB}(1;0) \text{ et } \overrightarrow{BK}\left(-\frac{1}{2};1\right).$$

EXERCICE 757

Dans le repère orthonormé $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
et $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$:

$$C(3;3), E(1;0), F(0;2) \text{ et } B(3;0)$$

on en déduit $\overrightarrow{CE}(-2;-3)$ et $\overrightarrow{BF}(-3;2)$

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BF} = 6 - 6 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux, les droites (CE) et (BF) sont donc perpendiculaires.

EXERCICE 758

Dans le repère orthonormé $(E; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$

et $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$: $E(0;0)$, $C(3;3)$, et $F\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

on en déduit $\overrightarrow{CE}(3;3)$ et $\overrightarrow{EF}\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$, les vecteurs sont orthogonaux, les droites (EF) et (CE) sont perpendiculaires.

EXERCICE 759

1. Soit $P(x; y)$ et $Q(x'; y')$

$$2\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ d'où } P(5;-1).$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } 3\overrightarrow{QB}\begin{pmatrix} 6-3x' \\ -3y' \end{pmatrix} \text{ d'où } Q\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

$$2. \overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ 1 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PG} \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PG} = 3\overrightarrow{PQ}$, les vecteurs $\overrightarrow{PG}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, les points P , Q et G sont donc alignés.

EXERCICE 760

$$1. B(1;0), M(x;x), P(0;x) \text{ et } Q(x;1).$$

$$2. \overrightarrow{BQ} (x-1;1) \text{ et } \overrightarrow{PC} (1;1-x)$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{PC} = x-1+1-x=0.$$

3. Quel que soit le point M , les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 761

On note $\vec{n}$ un vecteur normal, $\vec{u}$ un vecteur directeur et A un point de la droite.

$$1. \vec{n} (2;3), \vec{u} (-3;2) \text{ et } A(1; -1).$$

$$2. \vec{n} (8;-1), \vec{u} (1;8) \text{ et } A(-1; -2).$$

$$3. \vec{n} (-1;\sqrt{2}), \vec{u} (\sqrt{2};1) \text{ et } A(1; \sqrt{2}).$$

$$4. \vec{n} (3;-1), \vec{u} (1;3) \text{ et } A(2; 1).$$

$$5. \vec{n} (0;1), \vec{u} (1;0) \text{ et } A(2; \sqrt{3}).$$

$$6. \vec{n} \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right), \vec{u} (-4;3) \text{ et } A(-2; -6).$$

EXERCICE 762

1. Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x-1+3y-3$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: x+3y-4=0.$$

$$2. \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x+y+2$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: -2x+y+2=0.$$

$$3. \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}y$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: -4x+9y+4=0.$$

$$4. \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 2x-4-5y-15$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: 2x-5y-19=0.$$

$$5. \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 5x-10-y+2$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: 5x-y-8=0.$$

$$6. \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{7}y - \frac{2}{7}$$

$$\text{d'où } \mathcal{D}: -7x+10y-10=0.$$

EXERCICE 763

Soit $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ les vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{D}$ et Δ

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

$$1. \vec{n} (1;-3), \vec{n}' (6;2) \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 6-6=0$$

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires.

$$2. \vec{n} (4;1), \vec{n}' (1;-2) \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 4-2=2$$

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas perpendiculaires.

$$3. \vec{n} (1;1+\sqrt{2}), \vec{n}' (1;1-\sqrt{2}) \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 1+1-2=0$$

On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires.

EXERCICE 764

$$1. \vec{n} (2;-3)$$

2. $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ , M appartient à Δ si et seulement si $\det(\vec{n}; \overrightarrow{AM}) = 0$.

$$\det(\vec{n}; \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} 2 & x-2 \\ -3 & y-3 \end{vmatrix} = 2y-6+3x-6$$

$$\text{d'où une équation de } \Delta: 3x+2y-12=0.$$

EXERCICE 765

1. $O(0;0)$, $A(3;0)$, $D(4;0)$, $C(0;3)$, $B(3;3)$, $E(4;1)$ et $F(3;1)$.

$$2. (OF): x-3y=0,$$

$$\det(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CM}) = \begin{vmatrix} 4 & x \\ -2 & y-3 \end{vmatrix} = 4y-12+2x$$

$$\text{d'où } (CE): x+2y-6=0.$$

$$\det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} 1 & x-3 \\ -3 & y-3 \end{vmatrix} = y-3+3x-9$$

$$\text{d'où } (BD): 3x+y-12=0.$$

3. Les coordonnées de P vérifient le système

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=6 \end{cases}$$

On obtient $P\left(\frac{18}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

4. $3 \times \frac{18}{5} + \frac{6}{5} - 12 = 0$, $P \in (BD)$, on en déduit que les droites (OF) , (CE) et (BD) sont concourantes en P .

EXERCICE 766

1. $O(0;0)$, $A(3;0)$, $D(2;0)$, $C(0;3)$, $B(3;3)$, $E(2;1)$ et $F(3;1)$.

2. (OF) : $x-3y=0$,

$$\det(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CM}) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ -2 & y-3 \end{vmatrix} = 2y-6+2x$$

d'où (CE) : $x+y-3=0$

$$\det(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -1 & x-3 \\ -3 & y-3 \end{vmatrix} = -y+3+3x-9$$

d'où (BD) : $3x-y-6=0$.

3. Les coordonnées de P vérifient le système

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$$

On obtient $P\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

4. $3 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{4} - 6 = 0$, $P \in (BD)$, on en déduit que les droites (OF) , (CE) et (BD) sont concourantes en P .

EXERCICE 767

1. $A(0;1)$, $I\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $J\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$\det(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) = 0$, les vecteurs sont colinéaires, les points A , I et J sont donc alignés.

EXERCICE 768

1. $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ passant par le point $A(x_A; y_A)$.

$M(x;y)$ un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} = ax-ax_A+by-by_A$$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc de la forme

$$ax+by+c=0 \text{ avec } c=-ax_A-by_A.$$

2. $\vec{u}(x;y)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = ax+by=0 \iff y=-\frac{a}{b}x$ les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ sont donc de la forme $\left(x; -\frac{a}{b}x\right)$

soit en choisissant $x=-b$: $\vec{u}(-b;a)$.

Réciproquement : on vérifie que $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ba+ab=0$.

EXERCICE 769

1. $\Omega M = R$.

2. $\Omega M = \sqrt{(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2}$ d'où par passage au carré, une équation de $\mathcal{C}$: $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$.

3. $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2 \implies \Omega M^2 = R^2$
 $\implies \Omega M = R$
 $\implies M \in \mathcal{C}$.

EXERCICE 770

- $x^2 + y^2 = 4$
- $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 81$
- $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$
- $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
- $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 5$
- $(x+5)^2 + (y+2)^2 = 2$
- $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 49$
- $x^2 + (x+\sqrt{2})^2 = 3$

EXERCICE 771

1. $(x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 6 = 0$ soit $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-1; -3)$ et de rayon $R=2$.

2. $(x-2)^2 - 4 + (y+4)^2 - 16 - 7 = 0$ soit encore
 $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 27$
 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2; -4)$ et de rayon $R=\sqrt{27}$.

3. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 6$
 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$.

4. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ $\mathcal{C}$ est le cercle de centre
 $\Omega\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-1; 1)$ et de rayon $R=1$.

6. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = -\frac{39}{4}$
Il n'existe pas de points M vérifiant cette équation.
7. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon $R = \sqrt{13}$.
8. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 772

1. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$ $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(4; -2)$ et de rayon 3.
2. • Si $x = 0$ alors $(y+2)^2 = -7$ cette équation n'a pas de solution réelle.
• Si $y = 0$ alors $(x-4)^2 = 5$ cette équation admet deux solutions réelles $x_1 = 4 + \sqrt{5}$ et $x_2 = 4 - \sqrt{5}$.
 $\mathcal{C}$ coupe l'axe aux points $A(4 + \sqrt{5}; 0)$ et $B(4 - \sqrt{5}; 0)$.
3. Une tangente en M au cercle est perpendiculaire au rayon, soit $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4-\sqrt{5} \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5}x + 2y - 5 - 4\sqrt{5}$$
d'où $T_A: \sqrt{5}x + 2y - 5 - 4\sqrt{5} = 0$.

$$\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4+\sqrt{5} \\ y \end{pmatrix} = -\sqrt{5}x + 2y - 5 + 4\sqrt{5}$$
d'où $T_B: -\sqrt{5}x + 2y - 5 + 4\sqrt{5} = 0$.

EXERCICE 773

1. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = -5x + 5 + 4y - 8$$
Equation de la hauteur issue de A : $-5x + 4y - 3 = 0$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} = -3x + 9 + 2y$$
Equation de la hauteur issue de B : $-3x + 2y + 9 = 0$.
3. Les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient le système $\begin{cases} -5x + 4y = 3 \\ -3x + 2y = -9 \end{cases}$

La résolution du système permet d'obtenir $H(21; 27)$.

EXERCICE 774

1. M appartient au $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-x \\ 4-y \end{pmatrix} = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5$$
soit l'équation de $\mathcal{C}$: $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{P_k M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-k \\ y \end{pmatrix} = 4x + 2y - 4k$
d'où $\mathcal{D}$ d'équation: $2x + y - 2k = 0$.
3. Les coordonnées des points M_k intersections de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ vérifient $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ y = -2x + 2k \end{cases}$
 x vérifie donc l'équation du second degré (E) :
 $5x^2 + (10 - 8k)x + 4k^2 - 12k + 5 = 0$
 $\Delta = 16k(5 - k)$
• Si $k < 0$ ou $k > 5$, $\Delta < 0$, l'équation (E) n'a pas de solution réelle, $\mathcal{D}$ ne coupe pas $\mathcal{C}$.
• Si $k = 0$ ou $k = 5$, $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution par chaque k ,
 $x_0 = -1$ et $x_5 = 3$ alors $y_0 = 2$ et $y_5 = 4$.
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en A et B .
• Si $0 < k < 5$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes $x_k = \frac{-5 + 4k + 2\sqrt{k(5-k)}}{5}$ et $x'_k = \frac{-5 + 4k - 2\sqrt{k(5-k)}}{5}$
alors $y_k = \frac{10 + 2k + 2\sqrt{k(5-k)}}{5}$ et $y'_k = \frac{10 + 2k - 2\sqrt{k(5-k)}}{5}$

La droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points de coordonnées $(x_k; y_k)$ et $(x'_k; y'_k)$.

EXERCICE 775

1. $A'\left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$
Déterminons les coordonnées de H : pour cela il faut les équations de (BC) et (AH)
 $(BC): cx + by - bc = 0$
 $(AH): -bx + cy = 0$
La résolution du système composé par les deux

équations permet d'obtenir $H\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)$

d'où $I\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; 0\right)$ et $J\left(0; \frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)$.

$$2. \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = \left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right) \cdot \left(-\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{b^2c}{b^2+c^2}\right) = 0.$$

3. Le produit scalaire précédent est nul, on en déduit alors que des droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

EXERCICE 776

En utilisant un résultat de l'exercice précédent, on obtient $H\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

Déterminons les coordonnées de J :

J appartient à $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et à (BJ) d'équation $x + y - 2 = 0$ d'où $J(1; 1)$

Déterminons les coordonnées de I :

I appartient à $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et à (AI) d'équation $x + y - 1 = 0$ d'où $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = \left(-\frac{3}{10}; \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right) = 0$. On en déduit donc que H appartient au cercle de diamètre $[IJ]$.

EXERCICE 777

$$1. \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(x - c; y - \frac{a}{c}\right) \cdot \left(b - a; \frac{a}{b} - \frac{a}{a}\right) = (x - c)(b - a) + \frac{a}{ab}\left(y - \frac{a}{c}\right)(a - b)$$

soit après simplification, on obtient :

$$(x - c) - \frac{a}{ab}\left(y - \frac{a}{c}\right) = 0.$$

$$2. x_H = -\frac{a^2}{abc} \text{ et } y_H = \frac{a}{x_H} = -\frac{abc}{a}.$$

3. Pour obtenir l'équation de la hauteur issue de B , il suffit de permuter b et c dans les calculs précédents ce qui ne change rien dans les expressions des coordonnées de H donc H est aussi sur la hauteur issue de B . On en déduit alors que H est l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE 778

1. $\widehat{BAG} = \widehat{BAC} + \widehat{CAG} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, on en déduit que les points A , D et G sont alignés.

$\widehat{EAC} = \widehat{EAB} + \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, on en déduit que les points A , E et C sont alignés.

2. On se place dans le repère orthonormé

$\left(A; \frac{\overrightarrow{AB}}{b}, \frac{\overrightarrow{AC}}{c}\right)$ avec $b = AB$ et $c = AC$.

On a alors $B(b; 0)$, $C(0; c)$, $D(b; -b)$, $E(0; -b)$, $F(-c; c)$ et $G(-c; 0)$

• Equation de (BC) :

$$\det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -b & x-b \\ c & y \end{vmatrix} = -by - cx + bc = 0$$

d'où (BC) d'équation $cx + by = bc$

• Equation de (FD) :

$$\det(\overrightarrow{FD}; \overrightarrow{FM}) = \begin{vmatrix} -b-c & x+c \\ b+c & y-c \end{vmatrix} = -(b+c)(y-c) - (b+c)(x+c) = 0$$

d'où (FD) d'équation $x + y = 0$

• Equation de (GE) :

$$\det(\overrightarrow{GE}; \overrightarrow{GM}) = \begin{vmatrix} c & x+c \\ -b & y \end{vmatrix} = cy + bx + bc = 0$$

d'où (BC) d'équation $bx + cy = -bc$

• Recherche des coordonnées du point H intersection de (BC) et (FD)

$$\text{Il faut résoudre le système } \begin{cases} x + y = 0 \\ cx + by = bc \end{cases}$$

par hypothèse ABC n'est pas isocèle donc $b \neq c$

on obtient $H\left(\frac{bc}{c-b}; -\frac{bc}{c-b}\right)$.

$$\bullet b \times \frac{bc}{c-b} - c \times \frac{bc}{c-b} = \frac{bc(b-c)}{c-b} = -bc \text{ donc } H \in (GE)$$

Les droites (BC) , (FD) et (GE) sont donc concourantes.

EXERCICE 779

Dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$, on a

$C(5; 3)$, $B(5; 0)$ et $E\left(\frac{16}{5}; 3\right)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Les droites (AC) et (BE) sont donc perpendiculaires.

EXERCICE 780

1. $A'(0, 5; 0, 5)$, $B'(0; 0, 5)$ et $C'(0, 5; 0)$.

$$2. \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'C} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

3. $\det(\overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC}) = \frac{1}{3} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{GC}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{R}'$ est bien un repère du plan.

4. Dans le repère $\mathcal{R}'$: $A(-1; -1)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $A'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B'\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et $C'\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

5. Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ dans les deux repères, alors :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{GM} = x\overrightarrow{GB} + y\overrightarrow{GC}$$

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{GM}$$

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + x\overrightarrow{GB} + y\overrightarrow{GC} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + x\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &\quad + y\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \end{aligned}$$

$$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2x-y+1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{2y-x+1}{3}\right)\overrightarrow{AC}$$

Par unicité des coordonnées, on a

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 3x \\ 2y - x + 1 = 3y \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Tous les points de la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ (droite (BC)) ont les mêmes coordonnées dans les deux repères.

EXERCICE 781

1. $A'\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $B'\left(\frac{5}{2}; 5\right)$ et $C'(-2; 2)$.

2. a. $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AA'}) = -5x - \frac{1}{2}y + 3$
d'où l'équation de la médiane du triangle ABC issue de A : $10x + y - 6 = 0$.

b. $\det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BB'}) = 7x - \frac{13}{2}y + 15$

d'où l'équation de la médiane du triangle ABC issue de B : $14x - 13y + 30 = 0$.

c. $\det(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CC'}) = -2x + 7y - 18$

d'où l'équation de la médiane du triangle ABC issue de C : $-2x + 7y - 18 = 0$.

d. Les coordonnées de G vérifient le système

$$\begin{cases} 10x + y = 6 \\ 14x - 13y = -30 \end{cases}$$

La résolution du système donne $G\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

e. $-2 \times \frac{1}{3} + 7 \times \frac{8}{3} - 18 = 0$ donc G appartient à (CC') .

G est le centre de gravité du triangle ABC .

3. a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'M} = -4x - 8y + 8$

Δ_C d'équation $x + 2y - 2 = 0$.

b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'M} = 9x + 6y - \frac{21}{2}$

Δ_A d'équation $6x + 4y - 7 = 0$.

c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'M} = 5x - 2y - \frac{5}{2}$

Δ_B d'équation $10x - 4y - 5 = 0$.

d. Les coordonnées de O vérifient le système

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 10x - 4y = 5 \end{cases}$$

La résolution du système donne $O\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$.

e. $6 \times \frac{3}{4} + 4 \times \frac{5}{8} - 7 = 0$ donc O appartient à Δ_A . O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

4. a. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 9x + 6y - 36$

$\mathcal{D}_A$ d'équation $3x + 2y - 12 = 0$.

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 5x - 2y + 16$

$\mathcal{D}_B$ d'équation $5x - 2y + 16 = 0$.

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = -4x - 8y + 52$

$\mathcal{D}_C$ d'équation $x + 2y - 13 = 0$.

d. Les coordonnées de H vérifient le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

La résolution du système donne $H\left(-\frac{1}{2}; \frac{27}{4}\right)$.

e. $-5 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{27}{4} + 16 = 0$ donc H appartient à $\mathcal{D}_B$. H est l'orthocentre du triangle ABC .

5. $\overrightarrow{OG}\left(-\frac{5}{12}; \frac{49}{24}\right)$ et $\overrightarrow{HG}\left(\frac{5}{6}; -\frac{49}{12}\right)$

$\overrightarrow{HG} = -2\overrightarrow{OG}$, les points G , O et H sont donc alignés.

EXERCICE 782

1. Soit K un point tel que $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Soit A' le milieu de $[BC]$, (OA') est médiatrice de $[BC]$ et $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$

On en déduit alors que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{OA'}$, or (OA') et (BC) sont parallèles, le point K est donc sur la hauteur issue de A .

On montre de même que K appartient à la hauteur issue de B et à la hauteur issue de C , K est donc l'orthocentre.

Ainsi $K = H$ et donc $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$
 $= 3\overrightarrow{OG}$ car $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3. D'après les questions précédentes $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, les points O , G et H sont donc alignés.

EXERCICE 783

1. $\mathcal{C}$ d'équation : $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$
- Intersection avec l'axe des abscisses :
 $y = 0$ et $(x-3)^2 = 16$
On obtient deux points $M_1(-1; 0)$ et $M_2(7; 0)$
 - Intersection avec l'axe des ordonnées :
Pour des raisons de symétrie nous obtenons $M_3(0; -1)$ et $M_4(0; 7)$.
2. $\mathcal{C}$ d'équation : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$
- Intersection avec l'axe des abscisses :
 $y = 0$ et $(x+1)^2 = 32$
On obtient deux points $M_1(-1-4\sqrt{2}; 0)$ et $M_2(-1+4\sqrt{2}; 0)$
 - Intersection avec l'axe des ordonnées :
 $x = 0$ et $(y-2)^2 = 35$
On obtient deux points $M_3(0; 2-\sqrt{35})$ et $M_4(0; 2+\sqrt{35})$.
3. $\mathcal{C}$ d'équation : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$
- Intersection avec l'axe des abscisses :
 $y = 0$ et $(x-1)^2 = 4$
On obtient deux points $M_1(1; 0)$ et $M_2(3; 0)$
 - Intersection avec l'axe des ordonnées :
Pour des raisons de symétrie nous obtenons $M_3(0; 1)$ et $M_4(0; 3)$.
4. $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + (y+2)^2 = 2$
- Intersection avec l'axe des abscisses :
 $y = 0$ et $x^2 = -2$
le cercle ne coupe donc pas l'axe des abscisses.
 - Intersection avec l'axe des ordonnées :
 $x = 0$ et $(y+2)^2 = 2$
nous obtenons $M_3(0; -2-\sqrt{2})$ et $M_4(0; -2+\sqrt{2})$.

EXERCICE 784

1. Les cercles $\mathcal{C}_k$ sont d'équation $x^2 + (y-k)^2 = k^2$.
On remarque que si $x = y = 0$ l'équation est vérifiée quel que soit le réel k . On en déduit donc que les cercles $\mathcal{C}_k$ passent tous par O .

2. A_k et B_k appartiennent au cercle et leur abscisse est égale à k , on en déduit alors que leur ordonnée vérifie $x^2 = k^2$ donc $x = \pm k$

En supposant que les points A_k sont d'abscisse positive, on obtient :

L'ensemble des points A_k est la demi-droite d'équation $y = x$ avec $x \geq 0$.

L'ensemble des points B_k est la demi-droite d'équation $y = -x$ avec $x \leq 0$.

EXERCICE 785

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 9$ et $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x + 3y + 2$
d'où $-2x + 3y = 7$.
 $\det(\overrightarrow{BA'}; \overrightarrow{BC}) = 3x + 2y - 16 = 0$ car $A' \in (BC)$
Les coordonnées de A' vérifient donc le système

$$\begin{cases} -2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

La résolution du système donne $A'(\frac{34}{13}; \frac{53}{13})$.
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -4$ et $\overrightarrow{B'C} \cdot \overrightarrow{CA} = 4x + 4y - 28$ d'où $x + y = 6$.
 $\det(\overrightarrow{CB'}; \overrightarrow{CA}) = 4x - 4y + 12 = 0$ car $B' \in (AC)$
Les coordonnées de B' vérifient donc le système

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

La résolution du système donne $B'(\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$.
 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 9$ et $\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{BA} = -6x - y + 26$
d'où $-6x - y = -17$.
 $\det(\overrightarrow{BC'}; \overrightarrow{BA}) = -x + 6y - 8 = 0$ car $C' \in (AB)$
Les coordonnées de C' vérifient donc le système

$$\begin{cases} -6x - y = -17 \\ -x + 6y = 8 \end{cases}$$

La résolution du système donne $C'(\frac{94}{37}; \frac{65}{37})$.

EXERCICE 786

Dans le repère $(D; \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}; \frac{1}{4}\overrightarrow{DA})$, on a $A(0; 4)$, $I(4; 2)$ et

$$J(3; 0) \text{ d'où } \overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

la droite (IA) est perpendiculaire en I au diamètre du cercle, la droite (AI) est tangente au cercle en I .

EXERCICE 787

- $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = -c \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -c$
 $\iff ax + by + c = 0$
- Le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$, il est donc colinéaire à $\overrightarrow{M_0H}$.
- $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n}$
 $= -c - \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n}$
d'autre part $\overrightarrow{M_0H} \cdot \vec{n} = \lambda \|\vec{n}\|^2$
d'où $\lambda = -\frac{\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n} + c}{\|\vec{n}\|^2}$.
- $M_0H = \frac{\|\overrightarrow{M_0H}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\lambda| \times \|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

EXERCICE 788

- $d(M; \mathcal{D}) = \frac{|3+6+1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$.
- $d(M; \mathcal{D}) = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $d(M; \mathcal{D}) = \frac{|-4-7\sqrt{5}+3|}{\sqrt{2^2+7^2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{53}}$.
- $d(M; \mathcal{D}) = \frac{\left|3+\frac{1}{3}+1\right|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{13\sqrt{37}}{111}$.

EXERCICE 789

- $R = d(\Omega; \mathcal{D}) = \frac{|3+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$.
On en déduit l'équation du cercle :
 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 18$.
- $R = d(\Omega; \mathcal{D}) = \frac{|-4-15-1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4$.
On en déduit l'équation du cercle :
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 16$.

EXERCICE 790

$$R = d(O; \mathcal{D}) = \frac{|0+0+\sqrt{4k^2+4}|}{\sqrt{k^2+1}} = 2.$$

Le rayon est indépendant du réel k , les droites $\mathcal{D}_k$ d'équations $y = mx + \sqrt{4k^2+4}$ sont donc tangentes au cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

EXERCICE 791

- $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est orthonormé car le triangle ABC étant équilatéral alors $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$, de plus par leur définition $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme 1.
- $A\left(-\frac{a}{2}; 0\right), B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ et $C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.
- $\overrightarrow{BG}\left(a\cos 30; a\sin 30\right)$, d'où $G\left(a\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$
 $\overrightarrow{AI}\left(-a\cos 30; a\sin 30\right)$, d'où $I\left(-a\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$
 $J\left(0; \frac{a}{2}\right)$
 K est le milieu de $[CG]$ d'où $K\left(a\frac{1+\sqrt{3}}{4}; a\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$
 L est le milieu de $[CI]$ d'où $L\left(-a\frac{1+\sqrt{3}}{4}; a\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$
- $LK^2 = \frac{a^2}{2}(2+\sqrt{3})$
 $JK^2 = JL^2 = \frac{a^2}{16}(16+8\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(2+\sqrt{3})$
Les trois distances sont égales, le triangle JKL est donc équilatéral.

EXERCICE 792

$$\mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

$$\text{ou encore } x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

$$\mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$\text{ou encore } x^2 + y^2 - 2x - 8y = -8$$

Les points d'intersections des cercles vérifient les deux équations, ils appartiennent donc à la droite d'équation $x+y=2$.

EXERCICE 793

- Soit C' le milieu du segment $[AB]$
 $\overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -6x+2y-14$
d'où l'équation une équation de la médiatrice du segment $[AB]$: $3x - y - 7 = 0$.
Soit B' le milieu du segment $[AC]$
 $\overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix} = 4x-10y-36$
d'où l'équation une équation de la médiatrice du segment $[AC]$: $2x - 5y - 18 = 0$.
- Les coordonnées de Ω vérifient les deux équations précédentes. La résolution du système permet d'ob-

- tenir $\Omega\left(\frac{17}{13}; -\frac{40}{13}\right)$.
3. $R = A\Omega = \frac{\sqrt{2825}}{13}$
4. $\left(x - \frac{17}{13}\right)^2 + \left(y + \frac{40}{13}\right)^2 = \frac{2825}{169}$.

EXERCICE 794

1. Soit C' le milieu du segment $[AB]$

$$\overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = x + 2y - \frac{11}{2}$$

d'où l'équation une équation de la médiatrice du segment $[AB] : x + 2y - \frac{11}{2} = 0$

Soit B' le milieu du segment $[AC]$

$$\overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(x - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{0}\right) = 3x - \frac{15}{2}$$

d'où l'équation une équation de la médiatrice du segment $[AC] : x - \frac{5}{2} = 0$

• Les coordonnées de Ω vérifient les deux équations précédentes. La résolution du système permet d'obtenir $\Omega\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

• $R = A\Omega = \frac{5}{2} \quad \bullet \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

2. Le triangle ABC est équilatéral, le centre du cercle circonscrit est donc aussi le centre de gravité du triangle, soit G ce point et C' le milieu du segment $[AB]$. Le repère $(G; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{2}{a\sqrt{3}}\overrightarrow{C'C}$.

Dans ce repère, on $G(0;0)$ et $C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$

Le rayon du cercle est $R = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Dans le repère de centre G , on obtient l'équation du cercle : $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{3}$.

EXERCICE 795

1. **c** car les côtés AB et AD sont perpendiculaires.
2. **d** application directe du cours
3. **a** car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = -35 - 1 = -36$
4. **a** car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 3 \times 8 \times \frac{1}{2} = 12$
5. **b** car $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
- Il s'agit de l'équation du cercle de centre $\Omega(-2; 3)$ et de rayon 4.

EXERCICE 796

1. **a** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 6 \times (-3) = -12$

2. **c** On utilise la relation d'Al-Kashi :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{ABC} = 19.$$

3. **c** l'équation du cercle est de la forme $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2$ soit après développement $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$.

4. **a** Soit $M(x; y)$ un point de la droite, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3x - 3 + 6y + 18 = 0$.

5. **b** La droite $\mathcal{D}$ est de vecteur normal $\vec{n}(3; 5)$ et $\overrightarrow{AB}(5; -3)$

donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 15 - 15 = 0$.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}$ parallèle à (AB) .

EXERCICE 797

Affirmation 1 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 20 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas orthogonaux, les droites (AB) et (AD) ne sont pas perpendiculaires. L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 : $2 \times 3 + 3 \times 4 - 6 = 12 \neq 0$, Le point B n'appartient pas à la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$. L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 : $AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$.

Une équation du cercle de centre A et de rayon AB est de la forme :

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$ soit en développant et en simplifiant :

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 15 = 0. \text{ L'affirmation 3 est vraie.}$$

Affirmation 4 : Les droites d'équations $2x - 5y + 1 = 0$ et $-4x + 10y - 4 = 0$ ont le même vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, elles sont donc parallèles.

$-4 \times 4 + 10 \times 2 - 4 = 0$, le point D appartient à la droite d'équation $-4x + 10y - 4 = 0$. L'affirmation 4 est vraie.

Affirmation 5 : On applique la formule d'Al-Kashi

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

$$\text{On a alors } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}.$$

$$\text{D'autre part } AB = \sqrt{20}, AC = \sqrt{13} \text{ et } BC = \sqrt{29}$$

$$\text{On en déduit alors que } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

D'où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 82,87^\circ$. L'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 798

Affirmation 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$$= 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}.$$

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -0,5.$

L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 : $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) = 3u^2 - 2v^2 - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
 $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$,

on en déduit alors que :

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) = 3 \times 2^2 - 2 \times 3^3 = -6.$$

L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4 : Δ est d'équation :

$$3x - 2y + 3 = 0, \text{ après simplification, une équation de la droite } (D) \text{ est } 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0.$$

Les droites sont donc parallèles.

L'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite, une équation de cette droite est de la forme : $2x - 3y + c = 0$.

Le point $A(5; -2)$ appartient à la droite donc $c = -16$.

L'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 799

1. $\overrightarrow{BA}(-190; 110)$ et $\overrightarrow{BC}(-274; -68)$.

2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 44580$.

3. $\|\overrightarrow{BA}\| = 10\sqrt{482}$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 10\sqrt{797}$.

4. $\cos \widehat{ABC} = \frac{44580}{100\sqrt{482 \times 797}}$ d'où $\widehat{ABC} \approx 44^\circ$,
la contrainte est donc respectée.

EXERCICE 800

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle PEL

$$\text{On obtient } LE = 4\sqrt{2}.$$

2. On applique la relation d'Al-Kashi dans le triangle LET

$$LT^2 = LE^2 + TE^2 - 2LE \times TE \times \cos 30 = 57 - 20\sqrt{6}$$

$$\text{d'où } LT \approx 2,8.$$

3. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle isocèle rectangle LAT :

$$2TA^2 = LT^2 \text{ d'où } TA = \frac{\sqrt{2}}{2}LT \approx 2.$$

EXERCICE 801

1. Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$.

$$\text{On a } \Omega M = 5 \text{ donc } (x+3)^2 + (y-4)^2 = 5^5$$

En développant, on en déduit une équation de $\mathcal{C}$:

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0.$$

2. $1^2 + 6 \times 1 + 7^2 - 8 \times 7 = 7 + 49 - 56 = 0.$

Les coordonnées de A vérifient l'équation, le point A appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.

3. La tangente à $\mathcal{C}$ au point A et de la droite (ΩA) sont perpendiculaires en A .

4. Soit $M(x; y)$ un point de la tangente. D'après la remarque précédente, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$.

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-7 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

D'où $-4(x-1) - 3(y-7) = 0$ soit en développant et en simplifiant : $4x + 3y - 25 = 0$.

5. Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses vérifient le système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne deux couples solutions $x = 0, y = 0$ et $x = -6, y = 0$.

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées vérifient le système :

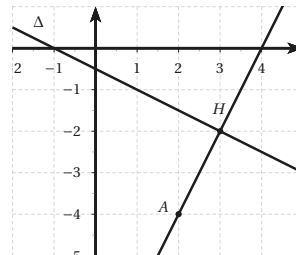
$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne deux couples solutions $x = 0, y = 0$ et $x = 0, y = 8$.

Le cercle $\mathcal{C}$ coupe les axes aux points O (origine du repère), $I(0; 8)$ et $J(-6; 0)$.

EXERCICE 802

1.



2. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à Δ , on a $\vec{n}(1; 2)$.

3. $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite perpendiculaire à Δ et passant par A .

Une équation de cette droite est donc de la forme $2x - y + c = 0$.

Le point A appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient donc l'équation : $2 \times 2 - 1 \times (-4) + c = 0$, on en déduit alors que $c = -8$.

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc $2x - y - 8 = 0$.

4. H est le point d'intersection des droites (d) et Δ , ses coordonnées vérifient donc le système
- $$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

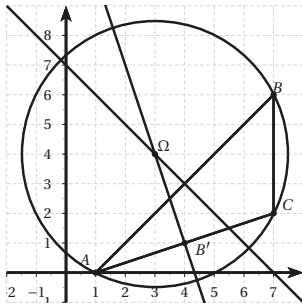
La résolution de ce système donne la solution $x = 3$, $y = -2$.

Ainsi $H(3; -2)$.

5. La distance entre le point A et la droite Δ est égale
- $$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{5}.$$

EXERCICE 803

1. Le centre du cercle $\mathcal{C}$ est le point d'intersection des médiatrices.



2. Soit C' le milieu de $[AB]$ et $M(x; y)$ un point de (D) .

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C'(4; 3)$ et $\vec{C'M} \begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix}$

Par définition de la médiatrice,

on a $\vec{AB} \cdot \vec{C'M} = 6(x-4) + 4(y-3) = 0$

Donc après simplification $x + y - 7 = 0$.

3. $B'(4; 1)$.

4. On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{B'M} \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

$M \in (D') \iff \vec{AC} \cdot \vec{B'M} = 0$

$\iff 3x + y - 13 = 0$.

5. Ω appartient aux médiatrices (D) et (D') , ses coordonnées vérifient donc le système (S) :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par substitution :

$$(S) \implies \begin{cases} y = 7 - x \\ 2x + 7 = 13 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 7 - x \\ 2x = 6 \end{cases}$$

On en déduit alors que les coordonnées de Ω sont $(3; 4)$.

6. $A\Omega = \sqrt{(3-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Le rayon de $\mathcal{C}$ est $R = 2\sqrt{5}$.

7. Une équation de $\mathcal{C}$ est obtenues par la formule :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

$$\text{soit } (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 20.$$

EXERCICE 804

1. a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

d'où $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-1) + (-2) \times 3 = -10$.

b. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

c. En utilisant la formule d'Al-Kashi, on obtient :

$$\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}.$$

On a $BC^2 = 50$ d'où :

$$\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = -\frac{20}{20\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit alors que $(\vec{AB}; \vec{AC}) = 135^\circ$.

2. a. Le vecteur $\vec{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

Soit $M(x; y)$, on a $\vec{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Le point $M \in (AC)$ si les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires, donc si $(-1) \times (y-1) - 3 \times (x+2) = 0$

Ainsi $3x + y + 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AC) .

b. Déterminons une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue de B , c'est-à-dire de la droite perpendiculaire à (AC) passant par B .

Le vecteur $\vec{AC}$ est normal à cette droite donc son équation est de la forme $-x + 3y + c = 0$.

Le point B appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation $-2 + 3 \times (-1) + c = 0$ donc $c = 5$.

L'équation recherchée est donc $-x + 3y + 5 = 0$.

Les coordonnées du point H vérifient le système

$$\begin{cases} 3x + y = -5 \\ -x + 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3y + 5) + y = -5 \\ x = 3y + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y = -20 \\ x = 3y + 5 \end{cases}$$

On en déduit alors que $y = -2$ et $x = -1$, soit $H(-1; -2)$.

EXERCICE 805

$$\begin{aligned} 1. \overrightarrow{f(M)} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| &= \|\overrightarrow{f(M)}\| \\ &\iff \|\overrightarrow{OM}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{u}\|. \end{aligned}$$

M est sur le cercle de centre O et de rayon $\left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right\|$

EXERCICE 806

$$1. \mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times BH = \frac{1}{2}AC \times AB \sin \hat{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}.$$

2. D'après la formule d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos \hat{A}$$

$$\text{d'où } \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\begin{aligned} 3. (\sin \hat{A})^2 &= 1 - (\cos \hat{A})^2 \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2)}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. (\sin \hat{A})^2 &= \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{2p(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2c^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. 0 \leq \sin \hat{A} \leq 1 \text{ donc } \sin \hat{A} &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \\ \text{d'où } \mathcal{A} &= \frac{1}{2}bc \times \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

$$6. p = 9$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}.$$

EXERCICE 807

$$\begin{aligned} 1. \text{ a. } (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 &= x^2 x'^2 + 2xx'yy' + y^2 y'^2 \\ (\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^2 &= x^2 y'^2 - 2xx'yy' + y^2 x'^2 \\ \text{d'où } (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + (\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^2 &= x^2(x'^2 + y'^2) + y^2(x'^2 + y'^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \cos^2(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 (1 - \cos^2(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \\ \text{d'où } |\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

$$2. \mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|.$$

$$3. \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = 65 \text{ d'où } \mathcal{A} = \frac{65}{2}.$$

EXERCICE 808

1. $ABCD$ est un parallélogramme, son aire est donc égale à $\mathcal{A} = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Soit $\overrightarrow{AB}(a; b)$ et $\overrightarrow{CD}(c; d)$ avec a, b, c et d entiers relatifs.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = ad - bc \neq 0$ car $ABCD$ est non aplati. La différence de deux produits d'entiers relatifs est un entier relatif, on en déduit alors que $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$ est un entier naturel non nul donc $\mathcal{A} \geq 1$.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de C , ABC étant équilatéral, on a $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$$\text{d'où } \mathcal{A} = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$$

$$\text{d'autre part } \mathcal{A} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

$$\text{on en déduit alors que } \frac{2|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{AB^2} = \sqrt{3}.$$

3. Supposons que ABC est triangle équilatéral à sommets entiers alors AB^2 et $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ sont deux entiers naturels non nuls

$$\text{donc } \frac{2|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{AB^2} = \sqrt{3} \text{ est un nombre rationnel}$$

nel ce qui est faux.

Il n'existe donc pas de triangle équilatéral à sommets entiers.

EXERCICE 809

1. $ABCD$ étant convexe et inscrit dans un cercle, on a $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC}$, d'où $\cos \widehat{ADC} = -\cos \widehat{ABC}$

En utilisant la formule d'Al-Kashi dans les triangles ABC et ACD , on obtient :

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \widehat{ABC} \\ = c^2 + d^2 - 2cd \cos \widehat{ADC} = c^2 + d^2 + 2cd \cos \widehat{ABC}$$

$$\text{d'où } 2(ab + cd) \cos \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

2. On pose $\beta = \widehat{ABC}$

$$\cos^2 \beta = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} \text{ d'où}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} \\ = \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} \\ = \frac{\left((a+b)^2 - (c-d)^2 \right) \left((c+d)^2 - (a-b)^2 \right)}{4(ab + cd)^2}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{(2p-2c)(2p-2d)(2p-2a)(2p-2b)}{4(ab + cd)^2}$$

$$S = \frac{1}{2} DA \times DC \sin \widehat{ADC} + \frac{1}{2} BA \times BC \sin \widehat{ABC}$$

$$0 < \beta < \pi \text{ donc } \sin \beta > 0 \text{ d'où}$$

$$\sin \beta = 2 \frac{\sqrt{(p-c)(p-d)(p-a)(p-b)}}{ab + cd}$$

$$\text{or } \widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC}, \text{ donc } \sin \widehat{ADC} = \sin \widehat{ABC}$$

$$\text{d'où } S = \frac{1}{2} (ab + cd) \times 2 \frac{\sqrt{(p-c)(p-d)(p-a)(p-b)}}{ab + cd} \\ = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

3. a. $\Omega A^2 = 1 + 2^2 = 5$ $\Omega B^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$$\Omega C^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \text{ et } \Omega D = 1^2 + 2^2 = 5$$

Les quatre points appartiennent donc au cercle de centre $\Omega(2;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

$$\text{b. } AB = \sqrt{10}, BC = 2, CD = \sqrt{10}, DA = 4$$

$$\text{et } p = 3 + \sqrt{10}$$

$$\text{d'où } S = \sqrt{3 \times (\sqrt{10} + 1) \times 3 \times (\sqrt{10} - 1)} = 9.$$

EXERCICE 810

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on définit la droite $\mathcal{D}$ par les points $R(r;0)$ et $Q(0;q)$.

On a $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.

$$\text{Equation de } (BC) : x + y - 1 = 0$$

$$\text{Equation de } \mathcal{D} : qx + ry - qr = 0$$

Le point P est à l'intersection de (BC) et $\mathcal{D}$, ses coordon-

$$\text{nées vérifient donc le système } \begin{cases} x + y = 1 \\ qx + ry = qr \end{cases}$$

On suppose $q \neq r$, on obtient alors

$$x = \frac{r(q-1)}{q-r} \text{ et } y = \frac{q(1-r)}{q-r}.$$

$$\text{soit } P \left(\frac{r(q-1)}{q-r}; \frac{q(1-r)}{q-r} \right)$$

On obtient alors $I(r; q)$

$$J \left(\frac{2rq - q - r^2}{q-r}; \frac{q(1-r)}{q-r} \right) K \left(\frac{r(q-1)}{q-r}; \frac{-2rq + q^2 + r}{q-r} \right)$$

$$\overrightarrow{IJ} \left(\frac{q(r-1)}{q-r}; \frac{q(1-q)}{q-r} \right) \overrightarrow{IK} \left(\frac{r(r-1)}{q-r}; \frac{r(1-q)}{q-r} \right)$$

ainsi $r\overrightarrow{IJ} = q\overrightarrow{IK}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, les point I, J et K sont donc alignés.

EXERCICE 811

Si $\mathcal{T}_M$ est une tangente à $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par A et si M est le point de contact alors $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ ainsi M est sur le cercle de diamètre $[A\Omega]$.

1. $\mathcal{C} : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ donc $\Omega(1;0)$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

Les coordonnées des points de contact des tangentes issues de A sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = -3y + \frac{6}{5} \\ 10y^2 - \frac{6}{5}y - \frac{4}{25} = 0 \end{cases}$$

$$\text{On obtient } M_1 \left(\frac{36}{25}; -\frac{2}{25} \right) \text{ et } M_2 \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5} \right).$$

$$\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM_1}) = -\frac{77}{25}x + \frac{14}{25}y + \frac{112}{25}$$

$$\text{ainsi } \mathcal{T}_{M_1} : 11x - 2y - 16 = 0$$

$$\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM_2}) = -\frac{14}{5}x + \frac{7}{5}y + \frac{7}{5}$$

$$\text{ainsi } \mathcal{T}_{M_2} : 2x - y - 1 = 0.$$

2. $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ donc $\Omega(1;1)$

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff x^2 + y^2 - x - y = 0$$

Les coordonnées des points de contact des tangentes issues de A sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

L'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Il n'y a aucune tangente à $\mathbb{C}$ qui passe par le point A.

EXERCICE 812

1. Supposons qu'il existe deux points G_1 et G_2 vérifiant la relation (1)

$$\text{alors } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G_1 A_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G_2 A_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G_1 G_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{G_1 G_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow m \overrightarrow{G_1 G_2} = \vec{0}$$

$$m \neq 0 \text{ donc } \overrightarrow{G_1 G_2} = \vec{0}$$

On en conclut que $G_1 = G_2$ d'où l'unicité de G .

$$\begin{aligned} 2. \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G A_i} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{G M} + \overrightarrow{M A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G M} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} \\ &= m \overrightarrow{G M} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i} \end{aligned}$$

$$\text{d'après (1)} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G A_i} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{M G} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M A_i}.$$

3. La relation (2) est vraie pour tout M donc pour $M = O$ d'où

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{A_i} \text{ et } y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{A_i}$$

4. Supposons $1 < p < n$

$$G_1 = \text{bar}\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_p; \alpha_p)\}$$

$$G_2 = \text{bar}\{(A_{p+1}; \alpha_{p+1}), \dots, (A_n; \alpha_n)\}$$

$$m_1 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \text{ et } m_2 = \sum_{i=p+1}^n \alpha_i$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G A_i} &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{G A_i} + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \overrightarrow{G A_i} \\ &= m_1 \overrightarrow{G G_1} + m_2 \overrightarrow{G G_2} \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{G A_i} = \vec{0}$$

$$\text{donc } m_1 \overrightarrow{G G_1} + m_2 \overrightarrow{G G_2} = \vec{0},$$

$$\text{c'est-à-dire } G = \text{bar}\{(G_1; m_1), (G_2; m_2)\}$$

5. Soit $E = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1)\}$

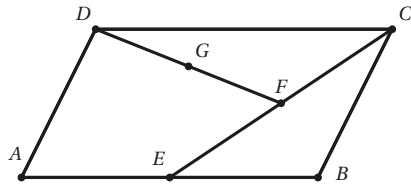
E est le milieu du segment $[AB]$

$$\text{Soit } F = \text{bar}\{(E; 2), (C; 2)\}$$

F est le milieu du segment $[EC]$

$$G = \text{bar}\{(E; 4), (D; 4)\}$$

G est le milieu du segment $[ED]$



EXERCICE 813

1. Par définition de I : $3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{soit encore } \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}.$$

2. En utilisant la formule (2) de l'exercice précédent, nous pouvons écrire $\overrightarrow{GI} = 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}$ d'où $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

☞ G est le milieu du segment $[AI]$.

EXERCICE 814

$$1. x_G = \frac{2-1+4}{3} = \frac{5}{3} \text{ et } y_G = \frac{3+4-7}{3} = 0.$$

2. Soit P le barycentre des points $(A; 2)$, $(B; 3)$ et $(C; 1)$.

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{2 \times 2 + 3 \times (-1) + 1 \times 4}{6} = \frac{5}{6} \\ y_P &= \frac{2 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times (-7)}{6} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

EXERCICE 815

$$1. 3\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \vec{0}$$

L est le barycentre des points A et B de masses respectives 3 et 1.

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \text{ ou encore } \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

M est le barycentre des points B et C de masses respectives 1 et -3.

$$2. \overrightarrow{B'M} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{B'B} - 3\overrightarrow{B'C})$$

$$\overrightarrow{B'L} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B})$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{B'M} + 2\overrightarrow{B'L} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{B'B} + 3\overrightarrow{B'C} + 3\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} (\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'A}) \\
&= \vec{0} \text{ car } B' \text{ milieu de } [AC]
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente $\overrightarrow{B'M}$ et $\overrightarrow{B'L}$ sont colinéaires, les points B' , L et M sont donc alignés.

EXERCICE 816

1. G isobarycentre du triangle ABC
donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
2. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MI}$.
3. $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\|$
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MI}\|$.
 M décrit la médiatrice du segment $[IG]$.
4. Soit J le barycentre de $(B; 4)$ et $(C; -1)$
alors $4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MJ}$.
 $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$.
 M décrit la médiatrice du segment $[GJ]$.

EXERCICE 817

1. $\overrightarrow{f(M)} = 8\overrightarrow{MI}$.
2. $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{A'A}$ avec A' milieu du segment $[BC]$.
3. $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \frac{1}{4} \|\overrightarrow{A'A}\|$.
 M décrit le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{4} \|\overrightarrow{A'A}\|$.
4. Soit J le barycentre de $(A; 1)$, $(B; 1)$ et $(C; 2)$ alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ}$.
D'autre part $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ on en déduit donc que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
 $\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MJ}\| = \frac{1}{4} \|\overrightarrow{CB}\|$
 M décrit le cercle de centre J et de rayon $\frac{BC}{4}$.

EXERCICE 818

1. **a.** $G = \text{bar}\{(A; 2), (B; 1)\}$ donc $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $\|2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\| = 0$
b. Si $M \neq G$ alors $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\| = \|3\overrightarrow{MG}\| \neq 0$
c. $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| \geq 0$ et $\|2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\| = 0$ le minimum est donc atteint pour $M = G$.

2. $H = \text{bar}\{(A; 2), (B; 1), (C; 4)\}$
donc $2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

En procédant comme dans la question précédente, on en déduit que le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\|$ est donc atteint pour $M = H$.

3. $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} = \frac{1}{3} (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IC}$
 $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} = \frac{1}{3} (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) = \vec{0}$
car $I = \text{bar}\{(A; 2), (B; 1), (C; 3)\}$
 I réalise donc le minimum de $\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 819

1. **a.** D le barycentre de (B, b) et (C, c)
donc $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$
ce qui implique $b\|\overrightarrow{DB}\| = c\|\overrightarrow{DC}\|$
d'où $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}$.
b. $\overrightarrow{C_0D} = \overrightarrow{C_0A} + \overrightarrow{AD}$
 $= -\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$
 $= \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_0}$
De plus $\|\overrightarrow{AB_0}\| = \|\overrightarrow{AC_0}\| = \frac{bc}{b+c}$
 AB_0DC_0 est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, c'est un losange.
c. AB_0C_0 est un triangle isocèle, (AD) diagonale du losange passe par le milieu de $[B_0C_0]$, (AD) est donc bissectrice du triangle AB_0C_0 .
De plus $B \in (AB_0)$ et $C \in (AC_0)$, (AD) est donc la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC .
2. Soit I le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) .
alors I barycentre de (A, a) et $(D, b+c)$
 I est donc sur la bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC .

On montre de même que I est sur les bissectrices intérieures issues de B et de C dans le triangle ABC
 I est donc le point d'intersection des trois bissectrices intérieures, I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC .

EXERCICE 820

1. On a $MA = MB$ donc Γ_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.

$$2. M \in \Gamma_k \iff MA^2 - k^2 MB^2 = 0 \\ \iff (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

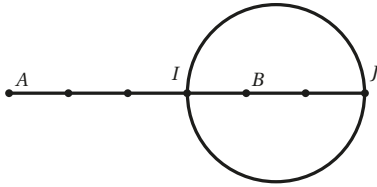
3. $k \neq 1$ et $k \neq -1$, on peut donc introduire les barycentres $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; k)\}$ et

$$J = \text{bar}\{(A; 1), (B; -k)\} \\ \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MI} \text{ et } \\ \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MJ} \\ (1+k)(1-k) \neq 0 \text{ donc } \\ (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$$

Ainsi Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$, avec

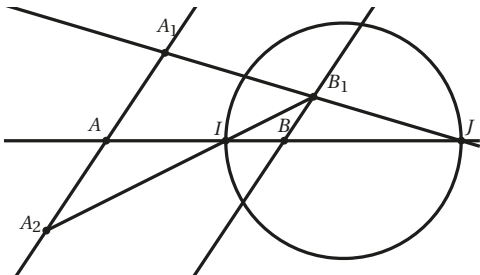
$$I = \text{bar}\{(A; 1), (B; k)\} \text{ et } J = \text{bar}\{(A; 1), (B; -k)\}.$$

4. On a $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



5. Sur deux droites parallèles passant par A et B, on place les points A_1, A_2 et B_1 tels que $AA_1 = AA_2 = a$ et $BB_1 = b$

On construit les points I et J



D'après le théorème de Thalès, $\frac{IA}{IB} = \frac{AA_2}{BB_1} = \frac{a}{b}$ et

$$\frac{JA}{JB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{a}{b}.$$

On a donc $\frac{IA}{IB} = \frac{JA}{JB} = \frac{a}{b}$ ce qui prouve que Γ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

EXERCICE 821

1. On se place dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ avec I un point de $\mathcal{D}_1$, J un point de $\mathcal{D}_2$ tels que $OI = OJ = 1$. Dans ce repère, le point M est de coordonnées $(x; y)$. alors $M_1 M_2 = a \iff x^2 + y^2 = a^2$
M décrit le cercle de centre O et de rayon a.

2. Soit $\vec{w}(a; b)$ un vecteur directeur de la droite Δ
 $(M_1 M_2)$ est parallèle à Δ si et seulement si
 $\det(\vec{w}; \overrightarrow{M_1 M_2}) = 0$
 $\det(\vec{w}; \overrightarrow{M_1 M_2}) = ay + bx = 0$
M décrit la droite passant par les points O et $A(-a; b)$.

EXERCICE 822

1. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AA'}$ avec A' milieu de $[BC]$.

G est le symétrique de A par rapport à A' .

2. $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2 \iff 2MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + 4GA^2 - GB^2 - GC^2 = -2a^2$
 $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$GA^2 = AA'^2 = \frac{a^2}{2} \text{ d'où } GA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, GA' = a\sqrt{2}$$

$$GB^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2}$$

$$\text{par symétrie } GC^2 = \frac{5a^2}{2}.$$

$$\text{D'où } 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2 \iff MG^2 = 5a^2$$

Γ_1 est le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{5}$.

3. $f(M) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'G}$.

4. $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$
 $\iff -2\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - AB^2 - AC^2 = -2a^2$
 $\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$

Γ_2 est la droite perpendiculaire à (AA') passant par A.

EXERCICE 823

1. $m(x; 0), H\left(x; -\frac{1}{4}\right)$

Une tangente à la courbe au point d'abscisse a est d'équation $y = 2ax - a^2$, elle coupe l'axe des abscisses en $x = \frac{a}{2}$

d'où $T\left(\frac{x}{2}; 0\right)$, T est le milieu de $[FH]$ et de $[Om]$.

$$2. \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{FH} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$\mathcal{T}$ est perpendiculaire à $[FH]$ et passe par son milieu, $\mathcal{T}$ est donc la médiatrice de $[FH]$.

Pour chaque point H on construit $\mathcal{T}$, médiatrice du segment $[FH]$.

M est le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par H .

$$3. \text{ Soit } M(x; y) \text{ alors } H\left(x; -\frac{1}{4}\right)$$

$$FM^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$MH^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$MH = MF \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = y$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

Réciproquement : Si $M \in \mathcal{P}$ alors $M(x; x^2)$

$$MF = \sqrt{x^2 + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = MH$$

$$\text{ainsi } M \in \mathcal{P} \Rightarrow MF = MH$$

EXERCICE 824

1. a. Lorsque I est en D , N et M sont en D

Lorsque I est en J , N est en E et M est en B .

b. M symétrique de N par rapport à I donc I milieu de $[MN]$

Dans le triangle AKE , D milieu de $[AE]$ et (DI) parallèle (EK) donc d'après le théorème de Thalès I milieu de $[AK]$.

De plus MN perpendiculaire à AK , on en déduit que $AMKN$ est un losange.

c. D'après la question précédente, $[MA]$ et $[MK]$ étant deux côtés du losange $AMKN$ on en déduit que $MA = MK$

(AN) parallèle à (MK) et (AN) perpendiculaire à (EF) donc (MK) perpendiculaire à (EF) , on en déduit alors que K est le projeté orthogonal de M sur la droite (EF) .

d. En utilisant les résultats de l'exercice 823 on déduit que M appartient à la parabole de foyer A et de

directrice (EF) .

2. a. $M(x; y)$, $K(x; 2)$ et $A(0; 0)$

$$MA^2 = x^2 + y^2 \text{ et } MK^2 = (y - 2)^2$$

$$\text{donc } MA = MK \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - 1.$$

b. I varie entre D et C donc x varie entre 0 et 4.

$\mathcal{P}$ est la partie de la parabole $\mathcal{P}$ tel que $0 \leq x \leq 4$.

EXERCICE 825

$$1. \text{ Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } \frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{b}}{1 + \frac{d}{b}} = \frac{\frac{c}{d} + \frac{c}{b}}{\frac{d}{d} + \frac{d}{b}} = \frac{c}{d}$$

$$2. \text{ D'après la loi des sinus : } \frac{ST}{\sin r} = \frac{TR}{\sin s} = \frac{RS}{\sin t}$$

d'après la question précédente, on a donc

$$\frac{ST+TR}{\sin r + \sin s} = \frac{RS}{\sin t}$$

$$\text{de plus } \sin t = \sin(\pi - r - s) = \sin(r + s)$$

$$\text{d'où } \frac{ST+TR}{\sin r + \sin s} = \frac{RS}{\sin(r+s)}.$$

$$\text{ainsi } \frac{ST+TR}{RS} = \frac{\sin r + \sin s}{\sin(r+s)} = \frac{2 \sin \frac{r+s}{2} \cos \frac{r-s}{2}}{2 \sin \frac{r+s}{2} \cos \frac{r+s}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{r-s}{2}}{\cos \frac{r+s}{2}}$$

3. Supposons que :

$$\cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{c+d}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (1)$$

Appliquons aux deux membres de (1) la formule

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\cos \frac{a-b+c+d}{2} + \cos \frac{a-b-c-d}{2} = \cos \frac{a+b+c-d}{2} + \cos \frac{a+b-c+d}{2}$$

ce qui donne encore :

$$\cos \frac{a-b+c+d}{2} - \cos \frac{a+b+c-d}{2} = \cos \frac{a+b-c+d}{2} - \cos \frac{a-b-c-d}{2}$$

En appliquant la formule :

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Nous obtenons :

$$\sin \frac{a-d}{2} \sin \frac{c+b}{2} = \sin \frac{a+d}{2} \sin \frac{c-b}{2}.$$

4. Posons $\delta = (\widehat{BAF})$, $\theta = (\widehat{FAD})$, $\lambda = (\widehat{AFD})$

$$\mu = (\widehat{BFA}).$$

En appliquant le résultat de la question 2. aux triangles ABF et ADF , nous obtenons :

$$\frac{AB+BF}{AF} = \frac{\cos \frac{\mu-\delta}{2}}{\cos \frac{\mu+\delta}{2}} \text{ et } \frac{AD+DF}{AF} = \frac{\cos \frac{\lambda-\theta}{2}}{\cos \frac{\lambda+\theta}{2}}$$

et comme $AB + BF = AD + DF$, nous obtenons

$$\frac{\cos \frac{\mu-\delta}{2}}{\cos \frac{\mu+\delta}{2}} = \frac{\cos \frac{\lambda-\theta}{2}}{\cos \frac{\lambda+\theta}{2}}$$

$$\text{d'après la question 3.} \quad \frac{\sin \frac{\lambda+\delta}{2}}{\sin \frac{\lambda-\delta}{2}} = \frac{\sin \frac{\mu+\theta}{2}}{\sin \frac{\mu-\theta}{2}} \quad (2)$$

En appliquant le résultat de la question 2. aux triangles ACF et AEF , nous obtenons :

$$\frac{AC + CF}{AF} = \frac{\cos \frac{\pi-\lambda-\delta}{2}}{\cos \frac{\pi-\lambda+\delta}{2}} = \frac{\sin \frac{\lambda+\delta}{2}}{\sin \frac{\lambda-\delta}{2}}$$

$$\frac{AE + EF}{AF} = \frac{\cos \frac{\pi-\mu-\theta}{2}}{\cos \frac{\pi-\mu+\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\mu+\theta}{2}}{\sin \frac{\mu-\theta}{2}}$$

D'après la relation (2), on peut écrire

$$\frac{AC + CF}{AF} = \frac{AE + EF}{AF}$$

c'est-à-dire $AC + CF = AE + EF$.

EXERCICE 826

1. Le triangle OAC est isocèle en O

$$\text{donc } AC = 2R \sin \frac{\gamma + \delta}{2}$$

$$\text{de même } BD = 2R \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\text{d'où } AC \times BD = 4R^2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

$$2. \quad AB \times CD + AD \times BC = 4R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \right).$$

$$3. \quad \cos(x - y) - \cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$= 2 \sin x \sin y.$$

$$4. \quad 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} = \cos \frac{\beta - \delta}{2} - \cos \frac{\beta + \delta + 2\gamma}{2}$$

$$= \cos \frac{\beta - \delta}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\alpha - \gamma}{2} \right)$$

$$2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2} = \cos \frac{\beta - \delta}{2} + \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

d'autre part

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\delta}{2}$$

$$= \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \delta}{2} - \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \delta}{2}$$

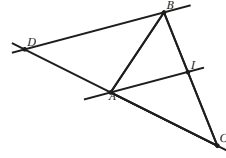
$$= \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \delta}{2} - \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \delta}{2}$$

d'où $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

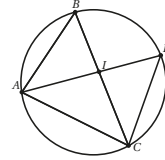
EXERCICE 827

1.



La parallèle à (AI) en B coupe (AC) en D , alors $\widehat{ABD} = \widehat{BAI}$ et $\widehat{BDA} = \widehat{IAC}$ donc $\widehat{ABD} = \widehat{BDA}$, le triangle ABD est donc isocèle en A d'où $AD = AB = c$.
D'autre part d'après le théorème de Thalès $\frac{BI}{IC} = \frac{DA}{AC}$
d'où $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

2.



Soit E le point d'intersection de (AI) avec le cercle circonscrit au triangle ABC .

Les triangles AIB et ACE ont deux angles égaux, ils sont donc semblables, leurs côtés sont donc proportionnels, nous avons donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AC}$

soit $AB \times AC = AI \times AD$

$$AB \times AC = AI \times (AI + ID)$$

$$= AI^2 + AI \times ID \quad (1)$$

D'autre part les triangles AIB et CID sont semblables d'où $\frac{AI}{CI} = \frac{BI}{DI}$

$$\text{d'où } AI \times DI = BI \times IC$$

En remplaçant dans la relation (1), nous obtenons :

$$AB \times AC = IB \times IC + AI^2.$$

$$3. \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

D'autre part $S = \text{aire}(ABI) + \text{aire}(AIC)$

$$S = \frac{1}{2} c \times AI \times \sin \frac{\hat{A}}{2} + \frac{1}{2} b \times AI \times \sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\text{On en déduit } AI(b + c) \sin \frac{\hat{A}}{2} = bc \sin \hat{A}$$

$$\text{sachant que } \sin \hat{A} = 2 \sin \frac{\hat{A}}{2} \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\text{d'où } AI = \frac{2bc \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b + c}.$$

EXERCICE 828

1. Soit
- O
- le centre du cercle inscrit, nous avons :

$$\text{aire}(OAB) = \frac{1}{2} R \times AB$$

$$\text{aire}(OAC) = \frac{1}{2} R \times AC$$

$$\text{aire}(OBC) = \frac{1}{2} R \times BC$$

d'où après addition des aires : $S = pR$.

- 2.
- $S = \frac{1}{2} bc \sin A$
- d'où

$$R = \frac{bc}{2p} \sin A = \frac{bc}{a+b+c} \sin A.$$

EXERCICE 829

Partie A

- 1.
- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
- .

2. a. D'après l'énoncé :
- $f(0) = 3$
- ,
- $f'(0) = 0$
- ,
- $f(4) = 0$
- et
- $f'(4) = 0$
- .

$$\text{On en déduit le système } \begin{cases} d = 3 \\ c = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases}$$

- b. La résolution du système donne
- $c = 0$
- ,
- $d = 3$
- ,

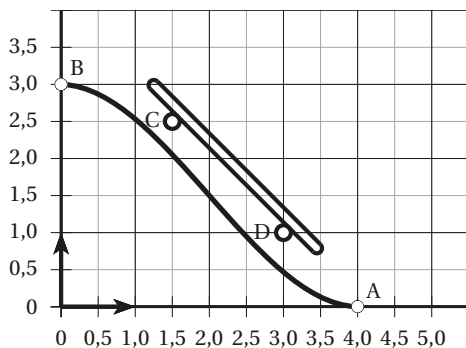
$$a = \frac{3}{32} \text{ et } b = -\frac{9}{16}$$

$$\text{soit } f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3.$$

3. a.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	3	2,87	2,53	2,05	1,5	0,95	0,47	0,13	0

- b.



Partie B

1. a.
- $(x-1,5)^2 + (y-2,5)^2 = 0,01$

b. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 0,01$.

2. a.
- $y_E = f(2) = 1,5$
- .

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{9}{32}x^2 - \frac{36}{32}x \text{ d'où } f'(2) = -\frac{9}{8}$$

D'autre part, la pente de la planche est

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -1$$

La tangente à la rampe au point E n'est donc pas parallèle à la planche du skateboard.

EXERCICE 830

Partie A

1. a. Sur l'intervalle
- f
- dérivable sur
- $[-4; 2]$
- ,

$$f'(x) = -\frac{1}{16}(3x^2 + 2 \times 6x) = -\frac{1}{16}(3x^2 + 12x).$$

b. $3x^2 + 12x = 3x(x+4)$.

Ce trinôme s'annule pour $x = -4$ et pour $x = 0$:

— sur $] -4; 0[$, $3x^2 + 12x < 0$;

— $3x^2 + 12x = 0$ en 0 et en -4 ;

— sur $]0; 2]$, $3x^2 + 12x > 0$.

- c. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-4	0	2	
$f'(x)$	0	+	0	-
f				

- d. D'après le tableau de variations précédent,
- f
- admet un maximum en 0 et
- $f(0) = 2,5$
- .

2. •
- $f(-4) = 0,5$
- , donc
- $A \in \mathcal{C}$
- ;

• $f(2) = 0,5$, donc $C \in \mathcal{C}$.

3. Le coefficient directeur de la tangente
- T
- au point
- C
- d'abscisse 2 est égal au nombre dérivé
- $f'(2) = -2,25$
- .

4. Voir fin d'exercice.

Partie B

1. On sait que l'équation est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$; on a donc par identification :

$$x_\Omega = 2, y_\Omega = 1 \text{ et } r^2 = \frac{1}{2}, \text{ d'où } r = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Les points communs au cercle Γ et à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ ont des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il y a donc deux solutions :

$$x-2 = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2} \text{ et } x-2 = -\frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2}.$$

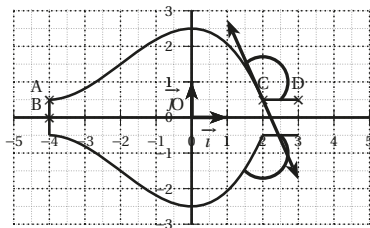
Les points communs ont donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Le point E seul point dont l'abscisse est entre 2 et 3 est donc $E\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3. 4.

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$f(x)$	0,5	0,6	0,8	1,1	1,5	1,9	2,2

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	2,2	2,4	2,5	2,4	2,1	1,4	0,5



EXERCICE 831

Partie A

1. La droite (AS) est tangente au cercle au point A : elle est donc perpendiculaire au rayon $[OA]$, donc le triangle OAS est rectangle en A .

2. I milieu de $[OS]$ est le centre du demi-cercle de diamètre $[OS]$ circonscrit au triangle rectangle OAS , donc $IO = IS = IA = 3$.

3. D'après la question précédente $IA = IO = 3$ et comme $OA = 3$, on a donc $IA = AO = OI$: le triangle OAI est donc équilatéral.

4. Le résultat précédent montre que $\widehat{AOS} = 60^\circ$, donc son complémentaire $\widehat{OSA} = 30^\circ$ et par conséquent l'angle au sommet du cône mesure $2 \times 30 = 60^\circ$ soit moins de 65° .

5. On a $\widehat{AOx} = 30^\circ$. $x_A = OA \times \cos \widehat{AOx} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $y_A = OA \times \sin \widehat{AOx} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Partie B

1. a. Hauteur du cône : $HS = 6 - y_A = \frac{9}{2}$.

Rayon de la base : $HA = x_A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. Le volume du cône est donc :

$$V_c = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{9}{2} = \frac{81\pi}{8} \text{ cm}^3.$$

c. La masse volumique du plastique est 900 000 g par m^3 ou $(100)^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$, soit 0,9 g par cm^3 .

La masse de la partie conique du minuteur, réalisée en plastique est donc : $\frac{81\pi}{8} \times 0,9 = \frac{72,9\pi}{8} \approx 29 \text{ g}$.

2. a. On a $BH = 3 + y_A = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

b. Le volume de la boule tronquée est :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2}{3} \left(3 \times 3 - \frac{9}{2} \right) = \frac{243\pi}{8}.$$

- c. Le volume de la boule évidée est $\frac{243\pi}{8} - 30 \text{ cm}^3$.

La masse volumique de l'aluminium est 2 700 000 g par m^3 soit pour $1\,000\,000 \text{ cm}^3$, soit 2,7 g par cm^3 .

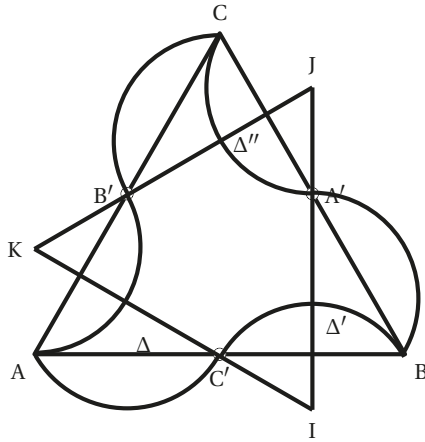
La masse de la partie en aluminium est donc égale à : $\frac{243\pi}{8} \times 2,7 \approx 258 \text{ g}$.

d. La masse totale du minuteur est donc :

$$29 + 258 + 100 = 387 \text{ soit plus de } 300 \text{ g}.$$

EXERCICE 832

Partie A



Partie B

1. **a.** Le centre de l'arc de cercle reliant les points B' et C est le symétrique de K par rapport à B' , donc appartient au segment $[KJ]$.
b. La tangente à l'arc de cercle reliant les points A et B' est perpendiculaire en B' au rayon $[KB']$; sa symétrique par rapport à B' est donc elle-même et c'est aussi la tangente en B' à l'arc de cercle reliant B' et C .
2. a. Dans le triangle ABC , la droite des milieux $(A'B')$ est parallèle à la droite (AB) .
 Or la droite (IJ) est la médiatrice de $[BC']$, elle est donc perpendiculaire à la droite (BC') .
 La droite $(A'B')$ est donc perpendiculaire à la droite (IJ) .
b. Par symétrie par rapport à la droite $(B'J)$, on a $\widehat{B'CJ} = \widehat{B'A'J} = 90^\circ$.
c. Toujours par symétrie par rapport à la droite Δ'' la droite $(B'C)$ perpendiculaire au rayon $[JC]$ et donc tangente à l'arc de cercle reliant A' et C a pour symétrique la droite $(B'A')$ qui perpendiculaire au rayon $[JA']$ est donc la tangente à l'arc de cercle reliant les points C et A' .

EXERCICE 833

Partie A

1. **a.** $\ell = AM + MB$.
b. Si M est en G : $\ell = AG + GB \iff GB = \ell - AG$.

Si M est en E : $\ell = AE + EB \iff AE = \ell - EB$.

Comme $AE = GB$ on en déduit

$$\ell - AG = \ell - EB \iff AG = EB.$$

On a donc $\ell = AG + GB = EB + GB = GE = 15$ m.

2. **a.** Si M est en F : $AF + FB = \ell = 15$.

Comme AFB est un triangle isocèle en F (FO est la médiatrice de $[GF]$), on a $AF = FB$, donc $AF = 7,5$ m.

$$\mathbf{b.} \quad OF = \frac{FH}{2} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Dans le triangle AOF rectangle en O , d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AF^2 &= AO^2 + OF^2 \iff 7,5^2 = AO^2 + 4,5^2 \\ &\iff AO^2 = 36. \end{aligned}$$

d'où $OA = 6$ m.

c. L'écartement entre les deux piquets A et B est égal à $OA + OB = 6 + 6 = 12$ (m).

3. **a.** On lit $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$, $E(7,5; 0)$, $F(0; 4,5)$.

b. $\frac{6^2}{7,5^2} + \frac{2,7^2}{4,5^2} = 0,64 + 0,36 = 1$, on en déduit que M est un point de l'ellipse.

Partie B

1. On a $ON^2 = (7,5 \cos t)^2 + (7,5 \sin t)^2 = 7,5^2 \cos^2 t + 7,5^2 \sin^2 t = 7,5^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = 7,5^2$.

Le point N appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 7,5.

2. **a.** On a $K(7,5 \cos t; 0)$, on en déduit que $\overrightarrow{KN} \begin{pmatrix} 7,5 \cos t - 7,5 \cos t \\ 7,5 \sin t - 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KN} \begin{pmatrix} 0 \\ 7,5 \sin t \end{pmatrix}$

$$\text{et donc } \overrightarrow{KP} = 0,6 \overrightarrow{KN} \begin{pmatrix} 0 \\ 4,5 \sin t \end{pmatrix}$$

b. L'abscisse de P est celle de N soit $7,5 \cos t$ et son ordonnée est $4,5 \sin t$.

$$\mathbf{c.} \quad \frac{(7,5 \cos t)^2}{7,5^2} + \frac{(4,5 \sin t)^2}{4,5^2} = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

donc P appartient à l'ellipse.

EXERCICE 834

Dans le triangle ABC , on pose $\widehat{C} = x$ alors $\widehat{B} = 2x$

on en déduit que $\widehat{A} = \pi - 3x$ et $\sin \widehat{A} = \sin(\pi - 3x) = \sin 3x$

D'après la loi des sinus : $\frac{\sin 3x}{BC} = \frac{\sin 2x}{AC} = \frac{\sin x}{AB}$

$$\text{On a donc } \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{AC}{AB} \text{ soit } 2 \cos x = \frac{AC}{AB}$$

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{\sin(2x + x)}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x}{\sin 2x} \\ &= \cos x + \frac{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{BC}{AC} &= 2 \cos x - \frac{1}{2 \cos x} \\ &= \frac{AC}{AB} - \frac{AB}{AC} = \frac{AC^2 - AB^2}{AB \times AC}\end{aligned}$$

d'où $BC \times AB = AC^2 - AB^2$

soit $AC^2 = AB(AB + AC)$.

AB , BC et AC sont des entiers, AC étant le plus petit possible ($AC \leq 2$).

- Si $AC = 2$ alors $AB(AB + BC) = 4$ ce qui implique $AB = 1$ et $BC = 3$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 3$ alors $AB(AB + BC) = 9$ ce qui implique $AB = 1$ et $BC = 8$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 4$ alors $AB(AB + BC) = 16$ ce qui implique $AB = 1$ et $BC = 15$ ou $AB = 2$ et $BC = 6$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 5$ alors $AB(AB + BC) = 25$ ce qui implique $AB = 1$ et $AC = 24$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
- Si $AC = 6$ alors $AB(AB + BC) = 36$ ce qui implique :
 - ★ $AB = 1$ et $AC = 35$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
 - ★ Ou $AB = 2$ et $AC = 16$, ce qui est impossible car l'inégalité triangulaire n'est pas respectée.
 - ★ Ou $AB = 4$ et $AC = 5$, l'inégalité triangulaire est respectée.

On obtient $AB = 4$, $BC = 5$ et $AC = 6$.

EXERCICE 835

- Pour $x = 3$,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AM} \neq \vec{0} \text{ si } M \neq A.$$
 L'affirmation est fausse, M n'est pas le barycentre du système pondéré $\left\{\left(B, \frac{1}{2}\right), (C, -2)\right\}$.

- Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

L'affirmation est vraie, M est le barycentre du système pondéré $\{(B, 1), (C, 1)\}$.

- Si $x = 1$ alors $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, les points A , N et C sont alignés.

Par hypothèse A , B et C ne sont pas alignés, l'affirmation est fausse, le point N n'appartient pas à la droite (BC) pour tout x .

- $BCNM$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

L'affirmation est vraie, si $x = \frac{3}{2}$ alors $BCNM$ est un parallélogramme.

EXERCICE 836

- $\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} - 2\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HA} = \vec{0}$.

L'affirmation est vraie.

- $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = HA \times HI = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3}\right) = 3$.

L'affirmation est vraie.

- $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{HC} = (\sqrt{3})^2 + 0 = 3$
car $M \in \mathcal{P}$ et $(HC) \perp \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{HC}$

L'affirmation est donc vraie.

- $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MH}$ d'après la question 1.
 $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HC} = 9$
 d'après la question 3. L'affirmation est donc fausse.

EXERCICE 837

- $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
car O milieu de $[BC]$ et I milieu de $[AO]$. I est donc barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et 1.

- $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MP}$

$$= \overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

$$= \overrightarrow{IM} + 4\overrightarrow{MI}$$

$$= -3\overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{IA}.$$

- $\overrightarrow{IP} = -3\overrightarrow{IM}$ donc P est l'image de M par h , l'homothétie de centre I et de rapport -3 .

$\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{IA}$ donc Q est l'image de M par t , la translation de vecteur $4\overrightarrow{IA}$.

- a. On remarque que $h(O) = t(O) = O'$, ce point étant

le symétrique de O par rapport à A .

L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle, Γ_1 est donc un cercle de centre O' et de rayon 6.

L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon, Γ_2 est donc un cercle de centre O' et de rayon 2.

$$\begin{aligned} \text{b. } \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \\ &= -4\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

d'où $PQ = 8$

c. D'après la question précédente $\overrightarrow{PQ} - 4\overrightarrow{OM} = \vec{0}$
D'après la question 2, $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{IA}$, on en déduit donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PO'} + \overrightarrow{O'Q} - 4\overrightarrow{OQ} - 16\overrightarrow{AI} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PO'} + \overrightarrow{O'Q} - 4\overrightarrow{OQ} - 4\overrightarrow{O'O} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{PO'} - 3\overrightarrow{O'Q} &= \vec{0} \end{aligned}$$

soit encore $\overrightarrow{PO'} = 3\overrightarrow{O'Q}$ le point O' appartient donc au segment $[PQ]$.

EXERCICE 838

1. a. $d_1 = -2x - y + 2$, $d_2 = 2x$ et $d_3 = y$
On obtient alors $d_1 + d_2 + d_3 = 2 \neq 0$.

$$\text{b. } d_2\overrightarrow{OA} + d_3\overrightarrow{OB} = 2x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OM}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(d_2\overrightarrow{OA} + d_3\overrightarrow{OB}) \quad (1).$$

2. a. $\alpha\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \alpha\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow (\alpha+3)\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OI} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{3}{\alpha+3}\overrightarrow{OI}$
 $\alpha > 0$ donc $0 < \frac{3}{3+\alpha} < 1$ donc M appartient au segment $[OI]$.

$$\begin{aligned} \text{b. } (\alpha+3)\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} &= \vec{0} \\ \text{d'où } \overrightarrow{OM} &= -\frac{1}{\alpha+3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{\alpha+3}\overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

$$\text{c. D'après la relation (1) } d_2 = \frac{2}{\alpha+3}$$

$$\text{et } d_3 = \frac{4}{\alpha+3} = 2d_2$$

$$d_1 = 2 - d_2 - d_3 = \frac{2\alpha+6-2-4}{\alpha+3} = \alpha d_2$$

d. On utilise la formule démontrée dans l'exercice 807.

$$\text{Aire}(MAB) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \right| = \frac{1}{2} d_1$$

$$\text{Aire}(MAB) = \alpha \frac{1}{2} d_2 = \alpha \text{Aire}(MOB)$$

$$\text{Aire}(MOA) = \frac{1}{2} d_3 = \frac{1}{2} \times 2d_2 = 2 \times \text{Aire}(MOB).$$

EXERCICE 839

1. $CD^2 - CB^2 = 2 - 1 = 1$ donc C appartient à $\mathcal{E}$.

$$ID^2 = AD^2 + AI^2 = \frac{3}{2} \text{ et } IB^2 = \frac{1}{2}$$

d'où $ID^2 - IB^2 = 1$, I appartient donc à $\mathcal{E}$.

2. On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$

$$\begin{aligned} MD^2 - MB^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 - (\sqrt{2}-x)^2 - y^2 = 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2}x - y = 1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de droite donc d'après la question précédente $\mathcal{E} = (IC)$.

3. D'après la question précédente, (IC) est d'équation $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$ donc de vecteur normal $\vec{n}_1(\sqrt{2}; -1)$
 (BD) est d'équation $x + \sqrt{2}y - \sqrt{2} = 0$ donc de vecteur normal $\vec{n}_2(1; \sqrt{2})$.
 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, les deux vecteurs normaux sont orthogonaux, on en déduit donc que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

EXERCICE 840

1. H milieu de $[BC]$ donc G , barycentre du système de points pondérés $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$ est aussi barycentre du système $\{(A; 2); (H; 2)\}$

G est donc le milieu du segment $[AH]$.

2. a. $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AH}$
d'où $\|\vec{V}\| = 2 \times 4 = 8$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| &= \|\vec{V}\| \\ \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = 8 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 2 \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

3. a. $2 + 2n \neq 0$ donc le barycentre G_n existe.

$G_0 = A$, $G_1 = G$ et G_2 est le centre de gravité du triangle ABC .

$$\text{b. } 2\overrightarrow{G_nA} + n\overrightarrow{G_nB} + n\overrightarrow{G_nC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG_n} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{AH}$$

donc G_n appartient au segment $[AH]$.
c. D'après la question précédente $AG_n = \frac{4n}{n+1}$ cette fraction tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

G_n tend vers H quand n tend vers $+\infty$.

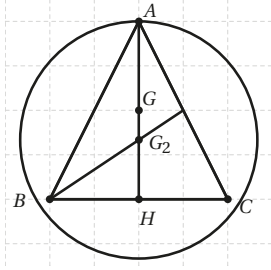
$$\text{d. } \|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|.$$

$$\Rightarrow \|(2+2n)\overrightarrow{MG_n}\| = 8n$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG_n}\| = \frac{4n}{n+1} = AG_n$$

donc $\mathcal{E}_n$ est un cercle qui passe par le point A , cercle de centre G_n et de rayon $R_n = \frac{4n}{n+1}$.

e.



EXERCICE 841

- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.
 - $AG^2 = \frac{4}{9}AI^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
 - On obtient de même
 $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$
 $CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2a^2 - c^2)$
 - En additionnant les trois expressions précédentes, on obtient :
 $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
- $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\Leftrightarrow MG^3 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$
- ABC est un triangle rectangle en A , $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{100}{9}$.

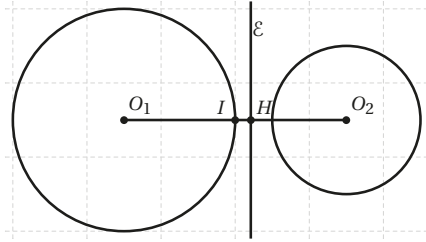
EXERCICE 842

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA'} + \vec{MA} \cdot \vec{A'B} = \vec{MA} \cdot \vec{MA'}$
car ABA' triangle rectangle en B .
 - $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OA'})$
 $= MO^2 - R^2$.
- D'après la question précédente $\vec{IE} \cdot \vec{IG} = IO^2 - R^2$ et $\vec{IF} \cdot \vec{IH} = IO^2 - R^2$ d'où $\vec{IE} \cdot \vec{IG} = \vec{IF} \cdot \vec{IH}$.
- Posons $d = O_1O_2$, I le milieu de $[O_1O_2]$.
 $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$
 $\Leftrightarrow (\vec{MO}_1 + \vec{MO}_2) \cdot (\vec{MO}_1 - \vec{MO}_2) = R_1^2 - R_2^2$
 $\Leftrightarrow 2\vec{MI} \cdot \vec{O_2O_1} = R_1^2 - R_2^2$
 $\Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{O_1O_2} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (O_1O_2) alors
 $\vec{IH} \cdot \vec{O_1O_2} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2}$

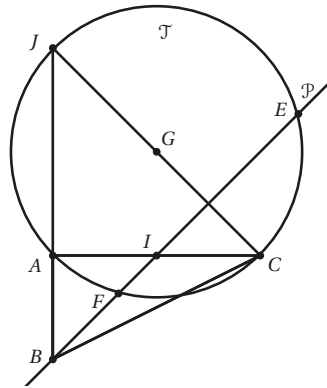
$\mathcal{E}$ est la droite perpendiculaire à (O_1O_2) passant par H .

b.



EXERCICE 843

- Soit J le barycentre du système $\{(A, 3); (B, -2)\}$ alors
 $\vec{AJ} = -2\vec{AB}$
 G est barycentre du système $\{(J, 1); (C, 1)\}$. En appliquant la propriété des milieux dans le triangle ACJ , on obtient $\vec{IG} = \frac{1}{2}\vec{JA} = \vec{AB}$
donc $ABIG$ est un parallélogramme.
- On se place dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{a}\vec{AB}; \frac{1}{a}\vec{AI})$.
 $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; 2a)$, $J(-2a; 0)$ et $G(-a; a)$.
On en déduit $GA = GC = a\sqrt{2}$ et $GB = a\sqrt{5}$.
- $f(M) = 2MG^2 + 3GA^2 - 2GB^2 + GC^2 = 2MG^2 - 2a^2$.
 - $f(M) = 2a^2 \Leftrightarrow MG^2 = 2a^2 = GA^2$.
 $\mathcal{T}$ est le cercle de centre G passant par A .



- $h(M) = 3(\vec{MB} + \vec{BA})^2 - 2MB^2 - (\vec{MB} + \vec{BC})^2$
 $= \vec{MB} \cdot (-6\vec{AB} - 2\vec{BC}) + 3AB^2 - BC^2$

$$h(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} - 2a^2 \text{ avec } \vec{u} = -6\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}.$$

b. $h(I) = 3IA^2 - 2IB^2 - IC^2 = 3a^2 - 4a^2 - a^2 = -2a^2$
donc $I \in \mathcal{P}$

$$h(B) = 2BA^2 + BC^2 = 2a^2 - 4a^2 = -2a^2 \text{ donc } B \in \mathcal{P}$$

$$h(M) = -2a^2 \iff \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} = 0.$$

$\mathcal{P}$ est la droite passant par B et de vecteur normal $\vec{u}$, sachant que B et I appartiennent à $\mathcal{P}$, on en déduit que $\mathcal{P}$ est la droite (IB) .

5. E, F et C appartiennent à $\mathcal{C}$ donc $GC = GE = GF$

$$\text{D'autre part } IC = IG = a\sqrt{2} \text{ et } BG = BC = a\sqrt{5},$$

$\mathcal{T}$ est la médiatrice du segment $[CG]$.

E et F appartiennent à $\mathcal{T}$ donc $EG = EC$ et $FG = FC$
ainsi $GE = CE = CG$ et $FG = FC = CG$, les triangles GEC et GFC sont donc équilatéraux.

EXERCICE 844

$$1. 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0} \implies \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB}$$

donc A est le milieu du segment $[GB]$.

$$2. \frac{NB}{NA} = \sqrt{2} \iff NB^2 - 2NA^2 = 0$$

$$\frac{NA}{NB} = \sqrt{2} \iff -NG^2 + GB^2 - 2GA^2 = 0$$

$$\iff NG^2 = 2AB^2$$

car $GB = 2AB$ et $GA = AB$

Γ est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{2}AB$.

3. a. $C \in \Gamma$ donc $CB = \sqrt{2}CA$

On en déduit alors que $2CA^2 - CB^2 - CC^2 = 0$, ce qui prouve que C appartient $\mathcal{L}$.

b. En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$
alors $M \in \mathcal{L} \implies \overrightarrow{MC} \cdot (2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = 0$

$$\implies \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

c. $\mathcal{L}$ est la droite passant par C et perpendiculaire à (CG) .

EXERCICE 845

1. La somme des coefficients est égale à 4, donc non nulle, ce qui assure l'existence de G .

$$\text{Par définition de } G : \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0} \quad (1)$$

I milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$

J milieu de $[BD]$ donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$

$$\text{La relation (1) s'écrit alors } \overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$$

ce qui prouve que $G \in (IJ)$

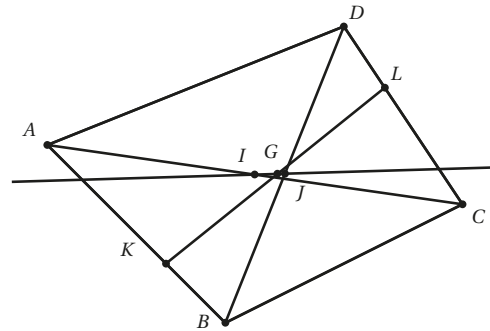
$$\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \text{ donc } \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GK}$$

$$\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD} \text{ donc } \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GL}$$

La relation (1) s'écrit alors $\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ ce qui prouve que $G \in (KL)$.

2. D'après la question précédente $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{GK}$ donc G est le milieu de $[KL]$ donc G est en M
de plus G appartient à (IJ) donc M appartient (IJ) , les points M, I et J sont alignés
 $\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \iff \overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}.$

3.



EXERCICE 846

$$1. \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AO} \text{ d'où } 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

O est barycentre du système $\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$.

$$\begin{aligned} 2. 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} &= 4a^2 \\ \implies 2MO^2 + \overrightarrow{MO} \cdot (2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OD} \cdot (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) &= 4a^2 \\ \implies 2MO^2 + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} &= 4a^2 \\ \implies 2MO^2 + 2a^2 &= 4a^2 \\ \implies MO^2 &= a^2 \end{aligned}$$

M décrit le cercle de centre O et de rayon a (ce cercle passe par les points A et D).

EXERCICE 847

$$1. 2\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin^2 x = 0$$

$$\implies \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$$

$$\implies \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\implies \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} + \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\implies \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\implies 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

2. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$2 \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin^2 x = 0, 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = 0, 51$$

$$\Rightarrow \cos 2x \sin 60^\circ + \sin 2x \cos 60^\circ = 0, 51$$

$$\Rightarrow \cos(2x - 60^\circ) = \arccos(0, 51)$$

$$\Rightarrow 2x - 60^\circ = \arccos(0, 51) + 360^\circ k$$

$$\text{ou } 2x - 60^\circ = -\arccos(0, 51) + 360^\circ k$$

$$\Rightarrow x = 59, 67^\circ + k \times 180^\circ \text{ ou } x = 0, 33^\circ + k \times 180^\circ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

EXERCICE 848

1. a. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

b. (E) s'écrit alors $\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2bt}{1+t^2} - c = 0$

soit après simplifications $(a+c)t^2 - 2bt + (c-a) = 0$.

c. $\Delta = 4(a^2 + b^2 - c^2)$.

• Si $a^2 + b^2 > c^2$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :

• Si $a^2 + b^2 > c^2$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$t_1 = \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a+c} \text{ et } t_2 = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a+c}$$

• Si $a^2 + b^2 = c^2$, l'équation admet une unique solution : $t_0 = \frac{b}{a+c}$

• Si $a^2 + b^2 < c^2$ l'équation n'admet pas de solution réelle.

d. $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \arctan t$.

$$x_1 = 2 \arctan \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a+c} \right)$$

$$x_2 = 2 \arctan \left(\frac{b - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a+c} \right)$$

• Si $a^2 + b^2 = c^2$, l'équation (E) admet une unique solution : $x_0 = 2 \arctan \left(\frac{b}{a+c} \right)$

• Si $a^2 + b^2 < c^2$ l'équation (E) n'admet pas de solution réelle.

2. Application : $2(m-1) \cos x + 2(m-1) \sin x = 3m+1$.

$$\Delta = 4(-m^2 - 22m + 7) \quad (2)$$

Le discriminant du polynôme (2) est $\delta = 512$.

Le polynôme admet deux racines distinctes.

$$m_1 = -11 - 8\sqrt{2} \text{ et } m_2 = -11 + 8\sqrt{2}$$

$$\text{Si } m \in]-\infty; -11 - 8\sqrt{2}[\cup]-11 + 8\sqrt{2}; +\infty[\quad \Delta < 0$$

l'équation (E) n'admet pas de solutions réelles.

$$\text{Si } m = -11 - 8\sqrt{2}, \Delta = 0$$

l'équation (E) admet une unique solution $t = -1 + \sqrt{2}$
d'où $x = \arctan(1 - \sqrt{2}) + k\pi = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Si } m = -11 + 8\sqrt{2}, \Delta = 0$$

l'équation (E) admet une unique solution $t = -1 - \sqrt{2}$
d'où $x = \arctan(-1 - \sqrt{2}) + k\pi = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Si $m \in]-11 - 8\sqrt{2}; -11 + 8\sqrt{2}[$, $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions :

$$x_1 = \arctan \left(\frac{2m - 2 - 2\sqrt{-m^2 - 22m + 7}}{5m - 1} \right) + k\pi$$

$$x_2 = \arctan \left(\frac{2m - 2 + 2\sqrt{-m^2 - 22m + 7}}{5m - 1} \right) + k\pi$$

EXERCICE 849

Si $\pi \leq x \leq 2\pi$, $\sin x \leq 0$ l'inéquation est toujours vérifiée.

$$\text{Si } 0 < x < \pi, \sqrt{3+2\cos x} > 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\cos x > 4\sin^2 x \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 > 0$$

Posons $X = \cos x$, l'inéquation s'écrit $4X^2 + 2X - 1 > 0$

$\Delta = 20$ l'équation admet deux solutions distinctes

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\bullet X_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ alors } x_1 = \frac{2\pi}{5} \text{ (car } \sin x > 0)$$

$$\bullet X_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ alors } x_2 = \frac{4\pi}{5} \text{ (car } \sin x > 0)$$

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 \geq 0 \text{ si } x \in \left[\frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5} \right]$$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S = \left[0; \frac{2\pi}{5} \left[\cup \right] \frac{4\pi}{5}; 2\pi \right).$$

EXERCICE 850

$$0 \leq \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Comme } 0 \leq \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{on a donc } \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{7}{9}$$

$$\text{On a de même } 0 \leq \arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$\tan \left(\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} \right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} = 1$$

$$\text{et donc } \arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi } \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

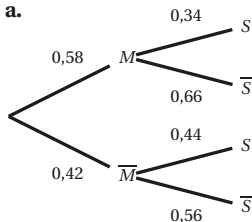
6.5 Probabilités**EXERCICE 851**

$$\text{Q1 } P_A(\overline{B}) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

$$\begin{aligned} \text{Q2 } P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,15 \times 0,2 + 0,85 \times 0,6 = 0,54 \end{aligned}$$

EXERCICE 852

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times 0,3 = 0,24 \end{aligned}$$

EXERCICE 853**1. a.**

$$\text{b. } P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,58 \times 0,34 = 0,1972.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } P(S) &= P(M \cap S) + P(\overline{M} \cap S) \\ &= 0,1972 + 0,42 \times 0,44 = 0,382. \end{aligned}$$

$$\text{2. } P_S(\overline{M}) = \frac{P(S \cap \overline{M})}{P(S)} = \frac{0,1848}{0,382} = 0,484 \text{ à } 0,001 \text{ près.}$$

EXERCICE 854

$$\begin{aligned} \text{1. } P(D) &= P(F \cap D) + P(\overline{F} \cap D) \\ &= P(F) \times P_F(D) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(D) \end{aligned}$$

$$P(D) = 0,49 \times 0,75 + 0,51 \times 0,2 = 0,4695 \text{ soit la réponse a.}$$

$$\text{2. } P(F \cap D) = P(F) \times P_F(D) = 0,49 \times 0,75 = 0,3675 \text{ soit la réponse c.}$$

EXERCICE 855

1. Soit $P(A)$ la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an, c'est-à-dire la probabilité que les deux composants soient défaillants.

$$P(A) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) \text{ car les deux événements } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont indépendants.}$$

$$\text{Ainsi } P(A) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521.$$

2. Soit $P(B)$ la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an, c'est-à-dire la probabilité que au moins un des deux composants soient défaillants.

$$P(B) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2).$$

$$\text{Ainsi } P(B) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279.$$

EXERCICE 856

• Montrons que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants :

Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles donc d'après la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \text{ d'où}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\overline{A}). \text{ Ce qui}$$

prouve l'indépendance des événements $\overline{A}$ et B .

• Montrons que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants :

Les événements B et $\overline{B}$ sont incompatibles donc d'après la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) \text{ d'où}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}) \times P(B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}).$$

Ceci prouve l'indépendance des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

EXERCICE 857

1. A et B sont indépendants donc

- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,18$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,92$.
2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,0875$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5125$.
3. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,25$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,75$.
4. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,24$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,76$.

EXERCICE 858

1. A et B sont indépendants
 donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
 De plus $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
 d'où $\frac{2}{3} \times p = \frac{2}{3} + p - \frac{4}{5}$
 soit $p = \frac{2}{5}$
2. A et B sont incompatibles donc $p(A \cap B) = 0$.
 d'où $\frac{2}{3} + p - \frac{4}{5} = 0$ soit $p = \frac{2}{15}$.
3. A est une partie de B donc $p(A \cup B) = p(B)$
 d'où $p = \frac{4}{5}$.

EXERCICE 859

L'objet fonctionne correctement si les trois éléments ne sont pas défaillants.

Soit $p(F)$ la probabilité que l'objet fonctionne correctement :

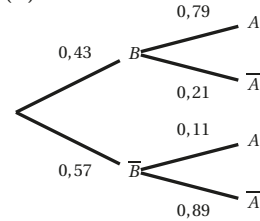
$$p(F) = 0,95 \times 0,97 \times 0,98 = 0,90307.$$

EXERCICE 860

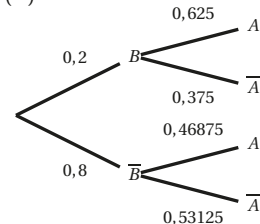
1. $p(A \cap B) = 0,14 = p(A) \times p(B)$, les événements A et B sont donc indépendants ;
2. $p(\bar{A}) \times p(B) = 0,1625$ et $p(A \cap B) = 0,163$, les événements A et B ne sont pas indépendants ;
3. $p(A) \times p(B) = 0,85 \times 0,85 = 0,7225$
 $p(A \cap B) = 0,85 + 0,85 - 0,9775 = 0,7225$
 $= p(A) \times p(B)$, les événements A et B sont donc indépendants ;
4. $p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$
 $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$,
 les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants, les événements A et B sont donc également indépendants.

EXERCICE 861

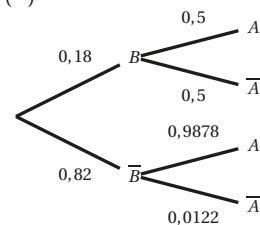
1. $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,85 + 0,6 \times 0,15$
 $p(B) = 0,43$
 $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0,57$
 $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,4 \times 0,85}{0,43} = 0,79$ arrondi à 10^{-2}
 $p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,6 \times 0,15}{0,57} = 0,11$ arrondi à 10^{-2}



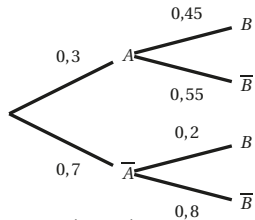
2. $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,15$
 $p(B) = 0,2$
 $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0,8$
 $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,5 \times 0,25}{0,2} = 0,625$
 $p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,5 \times 0,75}{0,8} = 0,46875$

**EXERCICE 862**

1. $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,9 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9$
 $p(B) = 0,18$
 $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0,82$
 $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,9 \times 0,1}{0,18} = 0,5$
 $p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,82} \approx 0,9878$ à 10^{-4} près.



2.

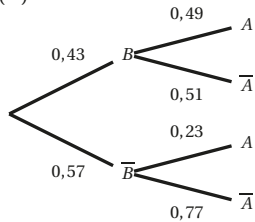


$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,3 \times 0,45 + 0,7 \times 0,2 = 0,275$$

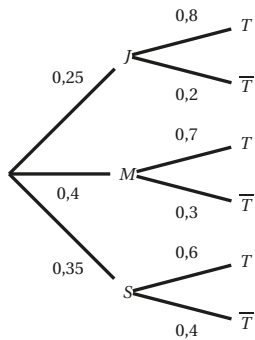
$$p(\bar{B}) = 1 - p(A) = 0,725$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,3 \times 0,45}{0,275} \approx 0,49 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0,3 \times 0,55}{0,725} \approx 0,23 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

**EXERCICE 863**

1.



2. a. $S \cap T$ est l'événement : « la personne interrogée a plus de 50 ans et trie le papier ».

b. $P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$.

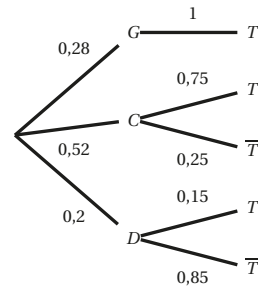
3. $P(J \cap T) = P(J) \times P_J(T) = 0,25 \times 0,8 = 0,2$.

4. $p = P(T) = P(J \cap T) + P(M \cap T) + P(S \cap T)$
 $= 0,2 + 0,4 \times 0,7 + 0,21 = 0,69$.

5. $P_T(J) = \frac{P(J \cap T)}{P(T)} = \frac{0,2}{0,69} \approx 0,29$.

EXERCICE 864

1.



2. $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,52 \times 0,75 = 0,39$.

3. a. $P(T) = P(G \cap T) + P(C \cap T) + P(D \cap T)$ d'où

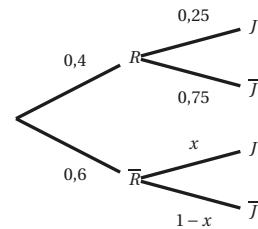
$$P(D \cap T) = P(T) - P(G \cap T) + P(C \cap T)$$

$$P(D \cap T) = 0,7 - 0,39 - 0,28 = 0,03$$

b. $P_D(T) = \frac{P(D \cap T)}{P(D)} = \frac{0,03}{0,2} = 0,15$.

EXERCICE 865

1.



2. D'après l'énoncé, $P(J) = 0,2$,

$$\text{d'autre part } P(J) = P(R \cap J) + P(\bar{R} \cap J) = 0,1 + 0,6x,$$

$$\text{d'où } x = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

3. $P_J(R) = \frac{P(R \cap J)}{P(J)} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$.

EXERCICE 866

Proposition 1 : Vraie, en effet

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$$

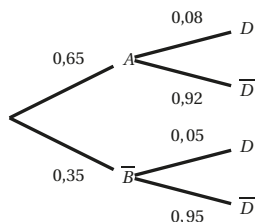
$$= 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$$

Proposition 2 : Fausse, en effet

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561$$

EXERCICE 867

1. a.



$$\text{b. } P(\overline{D}) = P_A(\overline{D}) \times P(A) + P_{B\text{-bar}}(\overline{D}) \times P(B) \\ = 0,92 \times 0,65 + 0,95 \times 0,35$$

$$P(\overline{D}) = 0,598 + 0,3325 = 0,9305.$$

$$\text{c. } P_{\overline{D}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,598}{0,9305} \approx 0,6427.$$

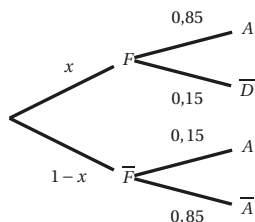
2. Notons X le nombre d'ampoules sans défaut. On a une répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues

$$P(X = 10) = 0,9305^{10} \approx 0,4866.$$

EXERCICE 868

1. $P_F(A) = 0,85$ et $P_{\overline{F}}(A) = 0,15$.

2. a.



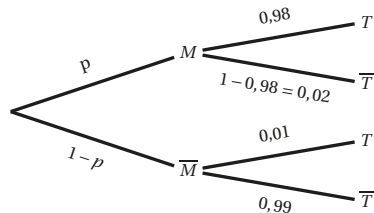
$$\text{b. D'après l'énoncé } P(A) = 0,29 \text{ et d'après l'arbre} \\ P(A) = P(F \cap A) + P(\overline{F} \cap A) = 0,85x + 0,15(1-x) \\ = 0,7x + 0,15$$

d'où l'équation $0,7x + 0,15 = 0,29$.

3. La résolution de l'équation précédente conduit à $x = 0,2$, ainsi parmi les personnes ayant répondu, 20% sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 869

1. a.



$$\text{b. } P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = p \times 0,98 = 0,98p$$

$$P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ = (1-p) \times 0,01 = 0,01 - 0,01p$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$

$$P(T) = 0,97p + 0,01.$$

$$\text{2. a. } P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,98p}{0,97p + 0,01} \\ = \frac{98p}{97p + 1} = f(p) \text{ où } f \text{ est définie sur } [0; 1].$$

b. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0; 1]$ donc dérivable sur $]0; 1[$ et :

$$f'(p) = \frac{98 \times (97p + 1) - 98p \times 97}{(97p + 1)^2} = \frac{98}{(97p + 1)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$.

3. La probabilité $f(p)$ qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95 quand la proportion p est solution de l'inéquation $f(p) \geq 0,95$:

$$f(p) \geq 0,95 \iff \frac{98p}{97p + 1} \geq 0,95 \\ \iff 9800p \geq 95 \times (97p + 1) \\ \iff 585p \geq 95 \iff p \geq \frac{19}{117}.$$

A partir d'une proportion $p = \frac{19}{117} \approx 0,162$ soit 16,2% de malades dans la population on considère que le test sera fiable.

EXERCICE 870

1. Restitution organisée des connaissances :

a. On suppose que $A \neq \emptyset$, A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω .

On a alors pour tout événement B de Ω ,

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$\text{donc } P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)).$$

Les événements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles, alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

b. Voir exercice 856.

2. Application :

a. Les événements R et S sont indépendants donc $P(R \cap S) = P(R) \times P(S) = 0,005$

b. Stéphane est à l'heure au lycée si aucun des événements R ou S ne se produit, il faut donc calculer $P(\overline{R} \cap \overline{S})$.

Les événements R et S sont indépendants, les événements $\overline{R}$ et $\overline{S}$ le sont donc aussi, ainsi :

$$P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) = (1 - 0,1)(1 - 0,05) = 0,855.$$

c. Notons X le nombre de jours où Stéphane entend sont réveil. On a répétition d'épreuves identiques indépendantes ; $P(X = 5) = 0,855^5 \approx 0,4569$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 871

1. Il y a 12 internes dans une classe de 30 élèves d'où $P(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Il y a 14 filles donc 16 garçons d'où $P(B) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

2. a. Il y a 4 internes parmi les 12 internes d'où

$$P_A(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b. } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{2}{15}.$$

$$3. P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}.$$

$$4. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{5}.$$

EXERCICE 872

On regroupe les données du texte dans un tableau :

	F	G	Total
R	8	12	20
A	9	11	20
Total	17	23	40

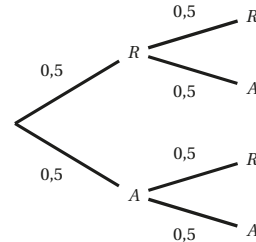
$$1. P(G) = \frac{23}{40} = 0,575, P(R \cap G) = \frac{12}{40} = 0,3$$

$$P(R) = \frac{20}{40} = 0,5.$$

$$2. P(F \cap A) = \frac{9}{40} = 0,225.$$

$$3. P_R(G) = \frac{12}{20} = 0,6$$

4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève, le même élève pouvant être choisi deux fois. On peut représenter les langues étudiées par les couples $(R; R)$, $(R; A)$, $(A; R)$ et $(A; A)$.



L'événement « les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue » correspond à $(R; A) \cup (A; R)$.

$$P((R; A)) = P(R) \times P(A) = 0,5 \times 0,5 = 0,25;$$

$$P((A; R)) = P(A) \times P(R) = 0,5 \times 0,5 = 0,25;$$

Les deux événements $(R; A)$ et $(A; R)$ sont incompatibles donc la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.

La probabilité cherchée est $0,25 + 0,25 = 0,5$.

EXERCICE 873

$$1. P(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}.$$

2. Soit G l'événement « la graine choisie germe correctement ».

$$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{1}{8}.$$

$$3. P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) = \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \times \frac{90}{200} + \frac{6}{10} \times \frac{60}{200} = \frac{133}{200}.$$

$$4. P(C \cap \overline{G}) = (1 - 0,6) \times \frac{60}{200} = \frac{3}{25}.$$

EXERCICE 874

Origine \ Fruit	Italie	Espagne	Maroc	Total
Clémentines	100	250	200	550
Oranges	350	450	650	1450
Total	450	700	850	2000

1. a. Soit C l'événement : « le paquet acheté est un paquet de clémentines ».

$$P(C) = \frac{550}{2000} = \frac{11}{40}.$$

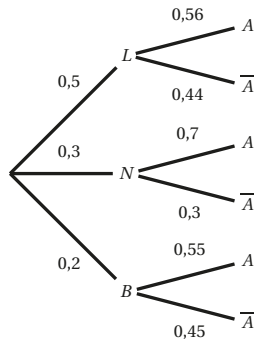
- b.** Soit I l'événement : « le paquet acheté provient d'Italie ».
- $$P(I) = \frac{450}{2000} = \frac{9}{40}$$
- 2. a.** Il y a 350 paquets de clémentines parmi les 1150 paquets de produits « européens » ;
- $$\text{d'où } p_1 = \frac{350}{1150} = \frac{7}{23}.$$
- b.** Il y a 350 paquets de clémentines « européens » parmi les 550 paquets de clémentines,
- $$\text{d'où } p_2 = \frac{350}{550} = \frac{7}{11}$$

EXERCICE 875

- 1. a.** $\bar{A}$: « un des dés tirés est spécial ».
- b.** $P(A) = \frac{1}{3}$
- $$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$
- 2. a.** L'événement « obtenir 6 sur la face supérieure du premier dé » est indépendant de l'événement « obtenir 6 sur la face supérieure du deuxième dé » d'où
- $$P_A(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$
- $$P(B \cap A) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{108}.$$
- b.** $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$
- $$= \frac{1}{108} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{108}.$$
- 3.** $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{7}.$

EXERCICE 876

1.



- 2.** D'après l'énoncé : $p_L(A) = 0,56$.
- 3.** $p(L \cap A) = p(L) \times p_L(A) = 0,5 \times 0,56 = 0,28$.
- 4.** On a donc $p(N \cap A) = 0,21$.

$$p_N(A) = \frac{p(N \cap A)}{p(N)} = \frac{0,21}{0,3} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

- 5.** Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné donc $p(A) = 0,6$.

a. D'après la loi des probabilités totales :

$$p(A) = p(L \cap A) + p(N \cap A) + p(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow 0,6 = 0,28 + 0,21 + p(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow p(B \cap A) = 0,6 - 0,49 = 0,11.$$

b. $p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0,11}{0,2} = \frac{11}{20} = 0,55.$

- 6.** Soit P la probabilité : « l'un des chocolats choisi est garni de praliné et l'autre est garni de caramel ».

$$P = 2 \times 0,6 \times (1 - 0,6) = 2 \times 0,6 \times 0,4 = 0,48.$$

EXERCICE 877

- 1. a.** Pour obtenir deux boules noires, il faut tirer une boule noire dans l'urne U **et** une boule noire dans l'urne V. Il y a 5 boules noires parmi les 8 boules de l'urne U et 4 boules noires parmi les 10 boules de l'urne V. Les deux tirages étant indépendants, nous obtenons
- $$p = \frac{5}{8} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{4}.$$

b. Pour obtenir deux boules de couleurs différentes, il faut tirer (une boule blanche dans l'urne U **et** une boule noire de l'urne V) **ou** (une boule noire dans l'urne U **et** une boule blanche de l'urne V). Les tirages étant indépendants, nous obtenons

$$p' = \frac{3}{8} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{40}.$$

- 2. a.** Si la carte tirée est une figure, on prend une boule dans l'urne U dans laquelle il y a 8 boules dont 3 blanches d'où $p_F(B) = \frac{3}{8}.$

$$p(B \cap F) = p_F(B) \times p(F) = \frac{3}{8} \times \frac{12}{32} = \frac{9}{64}.$$

b. Par un raisonnement analogue, nous obtenons

$$p_G(B) = \frac{6}{10}$$

$$\text{d'où } p(B \cap G) = p_G(B) \times p(G) = \frac{6}{10} \times \frac{20}{32} = \frac{3}{8}.$$

c. $p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap G) = \frac{33}{64}.$

EXERCICE 878

- 1. a.** $P(I) = 1 - \frac{5}{100} = 0,95.$

b. $P(E) = P(\bar{I} \cap \bar{C}) = P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(\bar{C})$

$$= 0,05 \times 0,3 = 0,015$$

$$P(F) = P(I \cap \bar{C}) = P(I) \times P_I(\bar{C}) = 0,95 \times 0,9 = 0,855.$$

$$P(\overline{C}) = P(E) + P(F) = 0,87$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0,13.$$

2. Un lot peut être considéré comme cinq événements indépendants d'où $p = 0,87^5 \approx 0,4984$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 879

- D'après l'énoncé $p(C) = 0,65$, $p_C(E) = 0,7$
 $p_{\overline{C}}(E) = 0,2$.
- $p(C \cap E) = p(C) \times p_C(E) = 0,455$.
- $p(\overline{C} \cap E) = p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(E) = 0,35 \times 0,2 = 0,07$.
- $p(E) = p(C \cap E) + p(\overline{C} \cap E) = 0,525$.
- $p(F) = p(C \cap \overline{E}) = p(C) \times p_C(\overline{E}) = 0,65 \times 0,3 = 0,195$.
- a. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque choix de 5 personnes le nombre de personnes contre la construction et n'étant pas écologiste.
Les cinq personnes sont indépendantes les unes des autres d'où :
 $P(X = 0) = (1 - 0,195)^5 = 0,338$ à 10^{-3} près.
b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,662$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 880

- $p(\overline{B} \cap \overline{T}) = p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(\overline{T}) = 0,01 \times 0,99 = 0,0099$
 $p(B \cap \overline{T}) = p(B) \times p_B(\overline{T}) = 0,99 \times 0,005 = 0,0049$ à 10^{-4} près par défaut.
- $p(\overline{T}) = p(B \cap \overline{T}) + p(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0,0148$.
 $p(T) = 1 - p(\overline{T}) = 0,9852$.
- a. $p_{\overline{T}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = 0,3333$
b. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de 20 pièces le nombre de bonnes pièces.
 $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,3333)^{20} = 0,9999$ à 10^{-4} près par défaut.

EXERCICE 881

- La cible a une superficie de 2826 m^2 d'où
 $P(A) = \frac{2826}{10000} = 0,2826$
 $P(B) = \frac{800}{10000} = 0,08$
Le champ de luzerne a une superficie de 4000 m^2 d'où $P(C) = 0,4$
 $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 0,2374$.

- Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque saut de quatre parachutistes le nombre de parachutistes arrivant sur la cible :

E : « Aucun d'entre eux n'arrive sur la cible » d'où
 $P(E) = P(X = 0) = (1 - 0,28)^4 \approx 0,2687$.

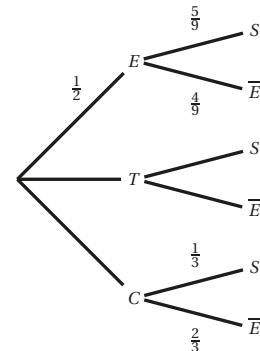
F : « L'un d'entre eux au moins arrive sur la cible »,
 $P(F) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,7313$.

EXERCICE 882

- A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut », ou encore les huit stylos ne présentent pas de défaut :
 $P(A) = P(X = 0) = (1 - 0,1)^8 = 0,43$ à 10^{-2} près.
 B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
 $P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,57$.
- a. $P(E) = P(D \cap E) + P(\overline{D} \cap E)$
 $= 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92$.
b. $P_E(D) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} \approx 0,022$ à 10^{-3} près.
- a. En reprenant la notation de la première question, nous obtenons $P(X = 0) = (1 - 0,022)^8 \approx 0,84$.
b. La mise en place de ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

EXERCICE 883

-

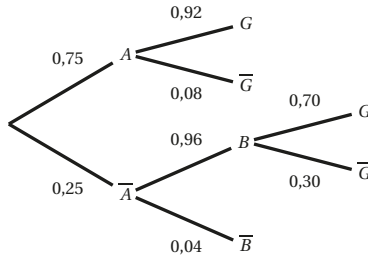


- On a $p(E \cap S) = p(E) \times p_E(S) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$.
- D'après la formule des probabilités totales, les événements E , C et T formant une partition de l'univers, on a :
 $p(S) = p(E \cap S) + p(T \cap S) + p(C \cap S)$
 $\Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} + p(C \cap S)$
 $\Leftrightarrow p(C \cap S) = \frac{10 - 5 - 4}{18} = \frac{1}{18}$.

4. $p(C \cap S) = \frac{1}{18} \iff p(C) \times p_C(S) = \frac{1}{18}$
 $p(C \cap S) = \frac{1}{18} \iff p(C) = \frac{\frac{1}{18}}{p_C(S)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$
5. $p_S(T) = \frac{p(S \cap T)}{p(S)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}.$

EXERCICE 884

1.

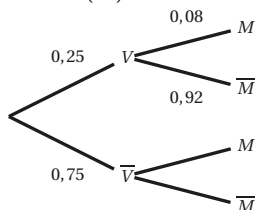


2. On a $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,25 \times 0,04 = 0,01.$
3. $p(\bar{A} \cap B \cap G) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) \times p_B(G)$
 $= 0,25 \times 0,96 \times 0,70 = 0,24 \times 0,7 = 0,168.$
4. D'après la loi des probabilités totales :
 $p(G) = p(A \cap G) + p(\bar{A} \cap B \cap G).$
Or $p(A \cap G) = p(A) \times p_A(G) = 0,75 \times 0,92 = 0,69.$
Donc $p(G) = 0,69 + 0,168 = 0,858.$
5. On a $p_G(A) = \frac{p(G \cap A)}{p(G)} = \frac{0,69}{0,858} \approx 0,804.$
6. La probabilité est celle de perdre au moins un point.
Soit X la variable égale au nombre de points gagnés.
La probabilité de gagner les quatre points est :
 $P(X = 4) = 0,858^4$, donc celle de perdre au moins un point est
 $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - 0,858^4 \approx 0,458063$
soit 0,458 arrondi au millième près.

EXERCICE 885

1. Soit M l'événement « l'individu tombe malade » et V « l'individu est vacciné ».

On a $p(V) = 0,25$; $p_V(\bar{M}) = 0,92$ et $p(M) = 0,1$



On cherche $p(M \cap \bar{V})$

$$p(M \cap V) = p(V) \times p_V(M) = 0,25 \times 0,08 = 0,02$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(M \cap \bar{V}) = p(M) - p(M \cap V) = 0,1 - 0,02 = 0,08$$

$$2. p_{\bar{V}}(M) = \frac{p(M \cap \bar{V})}{p(\bar{V})} = \frac{0,08}{0,75} = \frac{8}{75}.$$

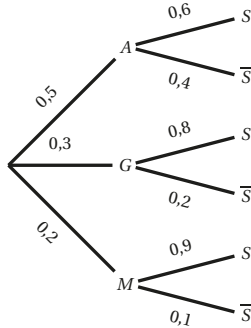
EXERCICE 886

1. a. $P(E) = P(E \cap U) + P(E \cap V)$
 $= P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E)$
 $= 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05 = 0,044.$
- b. $P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0,009}{0,044} = \frac{9}{44} \approx 0,205.$
2. Soit $P(U) = p$ alors $P(V) = 1 - p.$
 $P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{0,03p}{0,03p + 0,05(1 - p)}$
 $P_E(U) = \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p}$
 $P_E(U) = 0,3 \iff \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p} = 0,3$
 $\iff p = \frac{0,015}{0,036} = \frac{5}{12} \approx 0,417.$

Pour atteindre son objectif, l'entreprise doit acheter environ 41,7% de son sucre à l'exploitation U et 58,3% à V .

EXERCICE 887

1. L'arbre est en fin d'exercice.
2. a. $G \cap S$: « le client a choisi la destination G et a été satisfait »;
 $M \cap S$: « le client a choisi la destination M et a été satisfait »;
 $p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$;
 $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18.$
- b. On a $p(S) = 0,72$. D'après la loi des probabilités totales on a :
 $p(S) = p(A \cap S) + p(G \cap S) + p(M \cap S)$
donc $p(A \cap S) = p(S) - p(G \cap S) - p(M \cap S)$
 $p(A \cap S) = 0,72 - 0,24 - 0,18 = 0,3.$
- c. $p_A(S) = \frac{p(A \cap S)}{p_A} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$
3. $p_S(G) = \frac{p(S \cap G)}{p(S)} = \frac{0,24}{0,72} = \frac{1}{3}.$
4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de trois questionnaires, le nombre de clients insatisfaits. $P(X = 3) = (1 - 0,72)^3 \approx 0,022.$

**EXERCICE 888**

Notons F l'événement « le candidat est une fille » et S l'événement « le candidat a choisi la spécialité mathématiques ».

- $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$, l'affirmation est fausse.
- $P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(\bar{F} \cap S)}{P(\bar{F})} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$, l'affirmation est fausse.
- $P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S) = 0,38$, l'affirmation est vraie.
- $P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,38} = \frac{9}{19}$, l'affirmation est vraie.

EXERCICE 889

D'après l'énoncé : $p(U) = p(V) = \frac{1}{2}$
 $p_U(B) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1}$ et $p_V(B) = \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1}$

- $p(B \cap U) = p(U) \times p_U(B) = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$, l'affirmation est fausse.
- $p(B) = p(B \cap U) + p(B \cap V)$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2(n+2)(n+1)}$$

$$p(B) = \frac{n^2 - n + 2}{2(n+2)(n+1)}$$
, l'affirmation est fausse.
- $p_B(U) = \frac{p(B \cap U)}{p(B)} = \frac{2}{n^2 - n + 2}$, l'affirmation est vraie.
- $p_B(U) \leq 0,1 \iff n^2 - n - 18 \geq 0$,
 l'équation $n^2 - n - 18 = 0$ admet deux solutions
 $n_1 = \frac{1 - \sqrt{73}}{2}$ et $n_2 = \frac{1 + \sqrt{73}}{2}$, sachant que $n > 0$

$n^2 - n - 18 \geq 0$ si $n \geq n_2$, or $n_2 \approx 4,8$

Il faut donc $n \geq 5$, l'affirmation est fausse.

EXERCICE 890

- D'après l'énoncé : $P(R) = \frac{4}{5}$, $P_A(R) = \frac{1}{3}$ et $P_{\bar{A}}(R) = 1$.
- a. $P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R)$

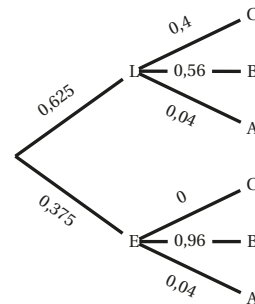
$$= P(A) \times P_A(R) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R)$$
 or $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 d'où $P(R) = (P_A(R) - P_{\bar{A}}(R)) \times P(A) + P_{\bar{A}}(R)$.
 b. $P(R) = \frac{4}{5}$ d'où $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$
 Nous en déduisons alors $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$
- $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{8} = 0,125$

EXERCICE 891**Partie A**

- Il y a $1400 \times 0,625 = 875$ élèves de lycée.
 Parmi ceux-ci 56 % vient par chèque bancaire soit
 $875 \times 0,56 = 490$ élèves qui paient chacun 50 €, soit
 en tout : $50 \times 490 = 24500$ €.
 Les étudiants sont $1400 - 875 = 525$; ils paient cha-
 cun 60 € soit en tout $525 \times 60 = 31500$ €.
 96 % des étudiants paient par chèque bancaire ce qui
 représente $31500 \times 0,96 = 30240$ €.
 Le montant des versements effectués par chèque
 bancaire est donc égal à 54740 €.
- Le montant total des locations s'élève à :
 $875 \times 50 + 525 \times 60 = 43750 + 31500 = 75250$ €.
 Le pourcentage des paiements par chèque bancaire
 est donc : $\frac{24500 + 30240}{75250} \times 100 = \frac{54740}{75250} \approx 72,7$ %.

Partie B

1.



- a. $p(L \cap C) = p(L) \times p_L(C) = 0,625 \times 0,4 = 0,25$.
 b. $p(E \cap B) = p(E) \times p_E(B) = 0,375 \times 0,96 = 0,36$.

$$c. p(B) = p(L \cap B) + p(E \cap B).$$

$$\text{Or } p(L \cap B) = p(L) \times p_L(B) = 0,625 \times 0,56 = 0,35,$$

$$\text{donc } p(B) = 0,35 + 0,36 = 0,71.$$

$$3. p_B(L) = \frac{p(L \cap B)}{p(B)} = \frac{0,35}{0,71} \approx 0,49.$$

EXERCICE 892**Partie A**

$$1. p(\bar{A}) = 1 - x.$$

$$2. p(A) \times p(\bar{A}) = 0,24.$$

$$\text{On a donc } x(1-x) = 0,24 \iff x - x^2 = 0,24$$

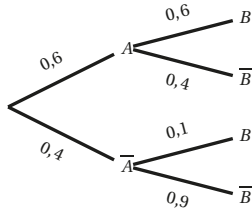
$$\iff x^2 - x + 0,24 = 0.$$

$\Delta = 0,04$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = 0,6 \text{ et } x_2 = 0,4.$$

Partie B

1.



2. a. $A \cap B$ est l'événement : « le lecteur a choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'économie" et au "Guide des Placements en Bourse" ».

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

b. $\bar{A} \cap \bar{B}$ est l'événement : « le lecteur n'a pas choisi l'abonnement à la "Revue Spéciale d'économie" et n'a pas choisi l'abonnement au "Guide des Placements en Bourse" ».

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

$$3. p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

$$\text{Or } p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04.$$

$$\text{Donc } p(B) = 0,36 + 0,04 = 0,40.$$

$$p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0,36}{0,40} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque choix de trois lecteurs le nombre d'abonnements au « Guide des Placements en Bourse ».

$$a. P(X = 0) = (1 - 0,4)^3 = 0,216.$$

$$b. \text{On en déduit } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,784.$$

EXERCICE 893

1. a. D'après l'énoncé $P(F \cap T) = 0,8$, $P(F) = 0,9$ et $P_{\bar{F}}(T) = 0,87$.

$$b. P_F(T) = \frac{P(F \cap T)}{P(F)} = \frac{0,8}{0,9} = \frac{8}{9} \approx 0,889.$$

$$2. P(T) = P(F \cap T) + P(\bar{F} \cap T).$$

$$P(\bar{F} \cap T) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(T) = (1 - 0,9) \times 0,87 = 0,087,$$

d'où :

$$P(T) = 0,8 + 0,087 = 0,887.$$

$$3. \text{On cherche } P_{\bar{T}}(F) = \frac{P(\bar{T} \cap F)}{P(\bar{T})}.$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(F \cap \bar{T}) = P(F) - P(F \cap T) = 0,9 - 0,8 = 0,1.$$

$$\text{De plus } P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,887 = 0,113 \text{ d'où}$$

$$P_{\bar{T}}(F) = \frac{0,1}{0,113} \approx 0,885.$$

4. La probabilité que les trois aient un téléphone portable est $0,887^3$, donc la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un téléphone portable est :

$$p = 1 - 0,887^3 \approx 0,302.$$

EXERCICE 894

Les trois événements sont indépendants.

La probabilité que Maths sorte en pyjama est égale à $\frac{1}{3}$

La probabilité que Maths mette un chapeau est égale à $\frac{2}{5}$

La probabilité qu'il achète un pain non complet est égale à $\frac{2}{5}$

$$P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{75}$$

On en déduit que la probabilité que Maths soit revenu de la boulangerie en pyjama, un chapeau sur la tête et un pain non complet à la main est égale à $\frac{4}{75}$.

EXERCICE 895

$$1. p(E) = 1 - p.$$

2. Notons $P(S = n)$ la probabilité cherchée :

$$P(S = n) = p^n.$$

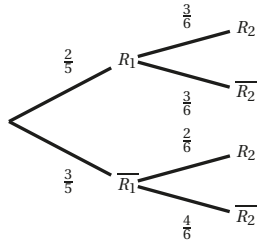
3. Notons $P(E = n)$ la probabilité cherchée :

$$P(E = n) = (1 - p)^n.$$

$$4. P(S \geq 1) = 1 - P(S = 0) = 1 - P(E = n) = 1 - (1 - p)^n.$$

EXERCICE 896

On peut résumer la situation sur un arbre :



- $p(R_1) = \frac{2}{5}, p(\overline{R_1}) = \frac{3}{5},$
 $p_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$
- $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \frac{1}{5},$
 $p(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{1}{5}.$
- $p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{2}{5}$
 ainsi $p(R_1) = p(R_2).$

EXERCICE 897

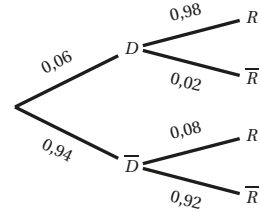
- $p(B) = \frac{180}{365} = \frac{36}{73}, p(N) = \frac{120}{365} = \frac{24}{73},$
 $p(P) = \frac{65}{365} = \frac{13}{73}.$
- $p(A_1 \cap B) = p(B) \times p_B(A_1) = \frac{36}{73} \times \frac{1}{8} = \frac{9}{146}$
 $p(A_1 \cap N) = p(N) \times p_N(A_1) = \frac{24}{73} \times \frac{2}{8} = \frac{6}{73}$
 $p(A_1 \cap P) = p(P) \times p_P(A_1) = \frac{13}{73} \times \frac{5}{8} = \frac{65}{584}$

En appliquant la loi des probabilités totales :

$$p(A_1) = p(A_1 \cap B) + p(A_1 \cap N) + p(A_1 \cap P) = \frac{149}{584}.$$

- a.** Le bilan est positif pour les événements A_2 et A_3 ,
 ces deux événements sont disjoints
 d'où $p(A_2 \cup A_3) = p(A_2) + p(A_3) = \frac{435}{584}.$

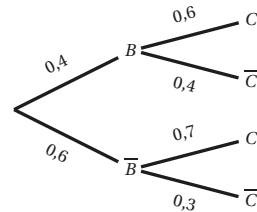
- b.** On cherche $p_{A_2 \cup A_3}(N) = \frac{p((A_2 \cup A_3) \cap N)}{p(A_2 \cup A_3)}$
 $(A_2 \cup A_3) \cap N = (A_2 \cap N) \cup (A_3 \cap N)$
 d'où $P((A_2 \cup A_3) \cap N) = p(N) - p(A_1 \cap N) = \frac{18}{73}$
 $p_{A_2 \cup A_3}(N) = \frac{18}{73} \times \frac{584}{435} = \frac{48}{145}.$

EXERCICE 898

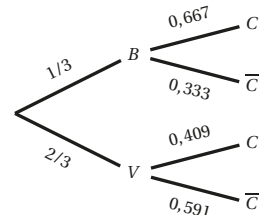
- D'après la formule es probabilités totales :
 $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R)$
 $= P(D) \times P_D(R) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,134.$
- $P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0,06 \times 0,98}{0,134} \approx 0,44.$
 L'affirmation du responsable est donc fausse.

EXERCICE 899

1.



- $P(C) = P(B \cap C) + P(\overline{B} \cap C) = 0,66.$
- $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,66} = \frac{4}{11} \approx 0,37.$

EXERCICE 900

- $P(C) = P(B \cap C) + P(V \cap C) \approx 0,495.$
- $P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \approx \frac{\frac{2}{9}}{0,495} \approx 0,45.$

EXERCICE 901

- a.** On tire simultanément deux boules de même couleur, soit deux noires, soit deux vertes. Il y a 6 boules noires parmi les 8 boules, si on en prend une, il restera 5 boules noires parmi 7 boules. Il y a 2 boules vertes parmi les 8 boules, si on prend une boule

vertes, il en restera 1 parmi les 7 boules, soit :

$$P_P(E_1) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{8}{14}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

$$P_P(E_2) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{14}$$

$$P_P(E_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{14}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P_P(A) &= P_P(E_1) + P_P(E_2) - P_P(E_3) \\ &= \frac{8+6-3}{14} = \frac{11}{14}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ a. } P_F(E_1) = \frac{6}{8} \times \frac{6}{8} + \frac{2}{8} \times \frac{2}{8} = \frac{20}{32}$$

$$P_F(E_2) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{16}{32}$$

$$P_F(E_3) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 2 = \frac{10}{32}.$$

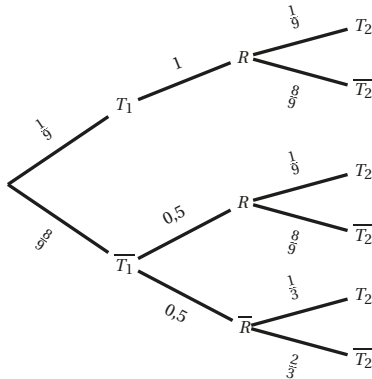
$$\text{b. } P_F(A) = P_F(E_1) + P_F(E_2) - P_F(E_3) = \frac{13}{16}.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad P(A) &= P(F) \times P_F(A) + P(P) \times P_P(A) \\ &= \frac{8}{15} \times \frac{13}{16} + \frac{7}{15} \times \frac{11}{14} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

EXERCICE 902

Soit R l'événement « l'acteur a relu son texte »

T_i l'événement « l'acteur a un trou de mémoire le jour i ».



$$1. \quad P(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}, \text{ l'affirmation est fausse.}$$

$$2. \quad P(T_2) = \frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{17}{81}, \text{ l'affirmation est fausse.}$$

$$3. \quad P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{9}, \text{ l'affirmation est vraie.}$$

$$4. \quad p_{n+1} = \frac{1}{9}p_n + (1-p_n) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{2-p_n}{9}, \text{ l'affirmation est vraie.}$$

EXERCICE 903

$$1. \quad E(X) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,25 + 5 \times 0,3 = 3,5.$$

$$V(X) = 0,1(1-3,5)^2 + 0,15(2-3,5)^2 + 0,2(3-3,5)^2 + 0,25(4-3,5)^2 + 0,3(5-3,5)^2 = 1,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,75} \approx 1,32.$$

$$2. \quad E(X) = -5 \times 0,1 - 2 \times 0,25 + 3 \times 0,2 - 1 \times 0,3 + 5 \times 0,1$$

$$E(X) = -0,05.$$

$$V(X) = 8,5475 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{8,5475} \approx 2,92.$$

EXERCICE 904

1. Si le joueur obtient un nombre impair, il perd sa mise soit 2 €.

S'il obtient un nombre n pair, il gagne $n-2$ € donc X prend les valeurs $-2, 0, 2$ et 4 .

2.

x_i	-2	0	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$3. \quad E(X) = -2 \times \frac{3}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = 0,$$

en jouant un grand nombre de parties, le gain sera nul.

$$4. \quad V(X) = \frac{16}{3} \text{ et } \sigma(X) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$

EXERCICE 905

1. On peut présenter les résultats d'un lancer sous forme d'un tableau :

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4
1	2	1	1	1
2	1	4	2	2
3	1	2	6	3
4	1	2	3	8

X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 6 et 8.

2.

x_i	1	2	3	4	6	8
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. $E(X) = 2,5$, en jouant un grand nombre de parties, le gain sera de $2\text{€} 50$.

4. $V(X) = \frac{15}{4} = 3,75$

$$\sigma(X) \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 1,94.$$

EXERCICE 906

1. $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,6$

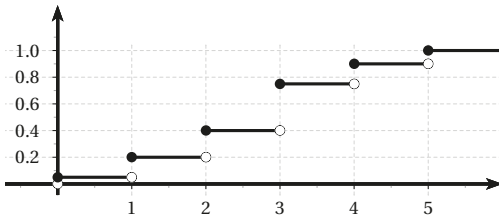
Il y a 60% de chances d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3.

2.

x	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$
$F(x)$	0	0,05	0,2	0,4

x	$3 \leq x < 4$	$4 \leq x < 5$	$x \geq 5$
$F(x)$	0,75	0,9	1

3.

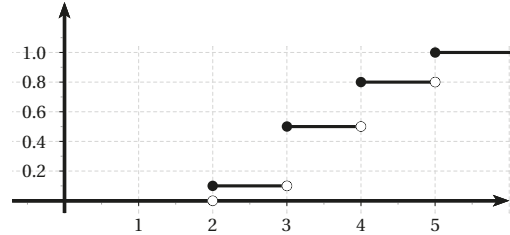
**EXERCICE 907**

1. On peut utiliser un arbre pour répondre à la question.

x_i	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

2. $P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.
Il y a 80% de chances d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 4.

3.



4. $E(X) = 3,6$, $V(X) = 0,84$, $\sigma(X) = \sqrt{0,84} \approx 0,916$

EXERCICE 908

1. $E(P_1) \approx 9,23$ et $\sigma(P_1) \approx 3,82$

$E(P_2) \approx 9,44$ et $\sigma(P_2) \approx 5,79$

$E(P_3) \approx 10,16$ et $\sigma(P_3) \approx 5,49$

2. P_1 est la classe la plus homogène (plus petit écart type).3. P_2 est la classe la plus hétérogène (plus grand écart type).4. La classe P_3 a la meilleure moyenne.**EXERCICE 909**

1. $E(X) = 3,54$, $V(X) = 2,0484$

$\sigma(X) = \sqrt{2,0483} \approx 1,43$.

2. On pose $Y = X + 2$, $Z = X - 3$ et $T = 2 - X$.

a.

y_i	3	4	5	6	7	8
$p(Y = y_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

z_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z = z_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

t_i	1	0	-1	-2	-3	-4
$p(T = t_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

b. $E(Y) = 5,54$, $V(Y) = 2,0484$ et $\sigma(Y) \approx 1,43$

$E(Z) = 0,54$, $V(Z) = 2,0484$ et $\sigma(Z) \approx 1,43$

$$E(T) = -1,54, V(Y) = 2,0484 \text{ et } \sigma(Y) \approx 1,43$$

c. Conjecture : $E(X+b) = E(X) + b$, $V(X+b) = V(X)$
et $\sigma(X+b) = \sigma(X)$

EXERCICE 910

1. $E(X) = 3,54$, $V(X) = 2,0484$

$$\sigma(X) = \sqrt{2,0484} \approx 1,43.$$

2. On pose $Y = 2X$, $Z = -3X$ et $T = 2X + 3$.

a.

y_i	2	4	6	8	10	12
$p(Y=y_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

z_i	-3	-6	-9	-12	-15	-18
$p(Z=z_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

t_i	5	7	9	11	13	15
$p(T=t_i)$	0,09	0,16	0,23	0,27	0,14	0,11

b. $E(Y) = 7,08$, $V(Y) = 8,1936$ et $\sigma(Y) \approx 2,86$

$$E(Z) = -10,62, V(Y) = 18,4356 \text{ et } \sigma(Y) \approx 4,29$$

$$E(T) = 10,08, V(Y) = 8,1936 \text{ et } \sigma(Y) \approx 2,86$$

c. Conjecture : $E(aX) = a \times E(X)$, $V(aX) = a^2 \times V(X)$
et $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$

EXERCICE 911

1. $E(X+b) = \sum_{i=1}^n (x_i+b)p_i$

$$= (x_1+b)p_1 + (x_2+b)p_2 + \cdots + (x_n+b)p_n$$

$$E(X+b) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

$$= E(X) + b \text{ car } p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

$$E(aX) = \sum_{i=1}^n ax_i p_i = a \sum_{i=1}^n x_i p_i = aE(X).$$

2. $V(X+b) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i + b - E(X+b))^2$

$$= \sum_{i=1}^n p_i (x_i + b - E(X) - b)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = V(X)$$

$$V(aX) = \sum_{i=1}^n p_i (ax_i - E(aX))^2$$

$$V(aX) = \sum_{i=1}^n p_i (ax_i - aE(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^n a^2 p_i (x_i - E(X))^2$$

$$= a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = a^2 V(X).$$

3. $\sigma(X+b) = \sqrt{V(X+b)} = \sqrt{V(X)} = \sigma(X)$

$$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2 V(X)}$$

$$= |a| \sqrt{V(X)} = |a| \sigma(X).$$

EXERCICE 912

Démontrer que :

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2.$$

En effet $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ et $\sum_{i=1}^n 1 = n$

2. $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$

$$= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

3. $V(aX+b) = V(aX) = a^2 V(X)$ (voir exercice précédent).

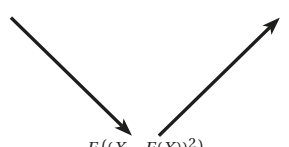
EXERCICE 913

1. $g'_i(x) = -2(x_i - x).$

2. $f'(x) = \sum_{i=1}^n p_i g'_i(x) = -2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - x)$

$$f'(x) = -2 \sum_{i=1}^n p_i x_i + 2 \sum_{i=1}^n p_i x = 2x - 2E(X).$$

3.

x	$-\infty$	$E(X)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

4. f atteint son minimum pour $x = E(X)$,
 $f(E(X)) = E((X - E(X))^2) = V(X)$.

EXERCICE 914

- $p(F) = 0,5$.
- from random import*
def simul(n):
 F = 0
 for i in range(n):
 a = randint(0,1)
 if a == 0:
 F = F + 1
 print(F)
- from random import*
def simul(n):
 F = 0
 for i in range(n):
 a = randint(0,1)
 if a == 0:
 F = F + 1
 ecart = abs(0.5 - F/n)
 print(ecart)

EXERCICE 915

- from random import*
def des(n):
 resultats = [0,0,0,0,0,0]
 for i in range(n):
 a = randint(0,5)
 resultats[a] = resultats[a] + 1
 print(resultats)
- from random import*
def des(n):
 resultats = [0,0,0,0,0,0]
 ecart = [0,0,0,0,0,0]
 for i in range(n):
 a = randint(0,5)
 resultats[a] = resultats[a] + 1
 print(resultats)
 for k in range(5):
 ecart[k] = abs(1/6 - resultats[k]/n)
 print(ecart)

EXERCICE 916**Partie A**

- a. X peut prendre les valeurs : 7; 1; -2; -3.
b.

x_i	7	1	-2	-3
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	3/6

- $E(X) = -0,50$.
- D'après la question précédente, les organisateurs gagnent en moyenne de 50 centimes par partie. Donc pour 150 joueurs, le gain espéré sera de $150 \times 0,50$ soit 75 €.
- Il faut qu'à la fin de la première partie le joueur ait au moins 3 €, ce qui est le cas si le 6 ou le 5 sont sortis au premier tour, ce qui correspond à une probabilité de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Partie B

D'après le cours $E(X + b) = E(X) + b$

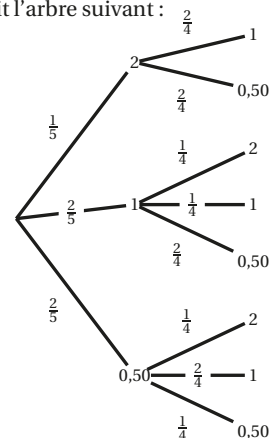
Le jeu est équitable si $E(X + b) = 0$ et d'après la question

A.1.c. $E(X) = -0,5$

Il faut donc diminuer la mise de 0,5€, soit une mise de 2,5€.

EXERCICE 917**Partie A**

- On construit l'arbre suivant :



On peut donc obtenir : 1; 1,50; 2; 2,50; 3

2. a. $p(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$.
 b. $p(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$.
 3. On a $P(S \geq 2) = 1 - [p(A) + p(B)] = 1 - 0,5 = 0,5$.

Partie B

1. C'est la probabilité de tirer 1,50 €, soit $p(A) = 0,4$.
 2.

x_i	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

3. On a $E(X) = 4$.
 Sur un grand nombre de tirages, le temps moyen de stationnement sera de 4 heures.

EXERCICE 918

1. $P(I \cap A) = P(I) \times P_I(A) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$
 $P(I \cap B) = 0,08$ et $P(I \cap C) = 0,02$.
 2. Soit p la probabilité pour qu'un foyer pris au hasard n'achète pas d'adoucisseur.
 $p = P(\bar{I}) + P(I \cap C) = 0,8 + 0,02 = 0,82$.
 3. a. $P(X = 0) = 0,82$, $P(X = 4000) = 0,08$
 $P(X = 8000) = 0,1$ et $E(X) = 1120$.
 b. Soit x le prix du modèle *simple*. On a alors :
 $E(X) = 0,08x + 0,1 \times 2x = 0,28x = 1300$.
 d'où $x \approx 4642,86$.
 Le vendeur doit vendre le modèle *simple* 4643 € et le modèle *haut de gamme* 9286 €.

EXERCICE 919

1. Soit A l'événement « la pièce présente le défaut A »
 B l'événement « la pièce présente le défaut B »

	A	$\bar{A}$	Total
B	200	1 300	1 500
$\bar{B}$	800	7 700	8 500
Total	1 000	9 000	10 000

2. a. $p_1 = \frac{7700}{10000} = \frac{77}{100} = 0,77$ soit 77%.
 b. $p_2 = \frac{800 + 1300}{10000} = \frac{21}{100} = 0,21$ soit 21 %
 3. a. 2 100 pièces présentent un seul défaut, 80 % d'entre elles sont vendues 12 €,
 soit $0,80 \times 2100 = 1680$.
 Sur 10 000 pièces, 1 680 sont vendues 12 €.
 b. Les 7 700 pièces ne présentant aucun défaut sont vendues 20 €;
 les 620 restantes ne sont pas vendues.
 Pour 10 000 pièces produites l'entreprise peut espérer un bénéfice de :
 $7700 \times 20 + 1680 \times 12 - 10000 \times 10 = 74160$ €.

EXERCICE 920

1.

	M_1	M_2	Total
pièces défectueuses	40	8	48
pièces non défectueuses	760	192	952
Total	800	200	1 000

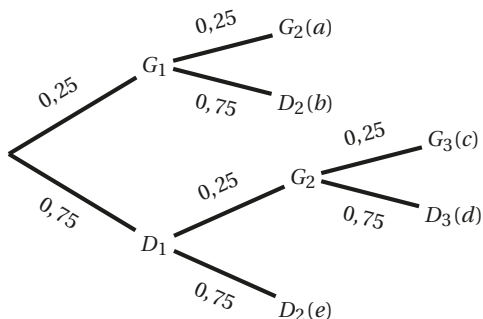
2. a. $p(A) = \frac{4}{5} = 0,8$.
 b. $p(B) = \frac{48}{1000} = 0,048$.
 c. $p_{M_1}(\bar{B}) = \frac{p(M_1 \cap \bar{B})}{p(M_1)} = \frac{760}{800} = \frac{19}{20} = 0,95$.
 3. a. X peut prendre les valeurs : 38; 42,30; 42,50.
 b.

x_i	38	42,30	42,50
$p(X = x_i)$	0,952	0,04	0,008

- c. $E(X) = 38,208$.
 d. D'après la question précédente, le prix moyen de revient pour un grand nombre de pièces produites est de 38,21 €. Pour ne pas vendre à perte il faut fixer le prix de vente à au moins 38,21 €.

EXERCICE 921

1.



$$2. \text{ a. } P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}, P(D) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(E) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{b. } P(A) = \frac{4}{64}, P(B) = \frac{12}{64}, P(C) = \frac{3}{64}, P(D) = \frac{9}{64} \text{ et } P(E) = \frac{36}{64}.$$

L'événement le moins probable est donc l'événement C.

L'événement le plus probable est donc l'événement E.

3. a.

x_i	48	16	64	0	-32
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{36}{64}$

b. $E(X) = -9$. L'espérance est négative, en jouant un grand nombre de parties, le joueur perdra en moyenne 9 points par partie, il n'a donc aucun intérêt à jouer.

c. Soit n le nombre de points perdus si la bille arrive en e

$E(X) = 0 \iff 576 + 36n = 0 \iff n = -16$. Le jeu sera équitable si le joueur perd 16 points lorsque la bille arrive dans la case e .

EXERCICE 922

1. a.

Roue n° 1	10	0	5	0
Roue n° 2				
10	20	10	15	10
0	10	0	5	0
5	15	5	10	5
0	10	0	5	0

b. Sur les 16 issues, 8 donnent un gain supérieur ou égal à 10 €. La probabilité est donc égale à $\frac{8}{16} = 0,5$.

c.

g_i	0	5	10	15	20
$p(G = g_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{d. } p(G > 10) = p(G = 15) + p(G = 20) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

e. $E(G) = 7,5$. Sur un grand nombre de parties, le gain moyen par partie est de 7,50 €.

Les joueurs perdront en moyenne 2,50 € par partie.

$$2. \text{ a. On a } E(B) = \frac{16m - 120}{16}.$$

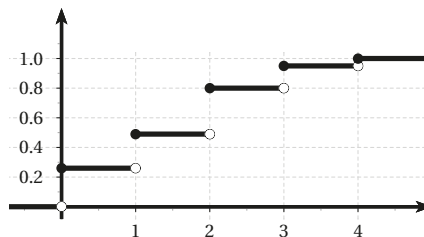
b. Il faut résoudre l'inéquation : $\frac{16m - 120}{16} \geq 5$
nous obtenons $m \geq 12,50$.

EXERCICE 923

$$1. p(X = 2) = 1 - (0,26 + 0,23 + 0,15 + 0,05) = 0,31$$

$$2. p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = 0,51.$$

3.



4. $E(X) = 1,5$,
 $1,5 \times 52 = 78$. Il vendra en moyenne 78 voitures en une année.
5. $78 \times 13500 \times \frac{4}{100} = 42\,120$.
 Le montant moyen de la commission perçue en un an est de 42 120 €.

EXERCICE 924

1. Les résultats possibles sont : (P, P, P) (P, P, F) (P, F, P) (P, F, F) (F, P, P) (F, P, F) (F, F, P) (F, F, F)
2. a. D'après la question précédente, X peut prendre les valeurs : 4; 3; 2; 1; -5.

b.

x_i	4	3	2	1	-5
$p(X = x_i)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

$$\begin{aligned} \text{c. } p(X \leq 2) &= p(X = 2) + p(X = 1) + p(X = -5) \\ &= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

3. a. $E(X) = \frac{11}{8}$.

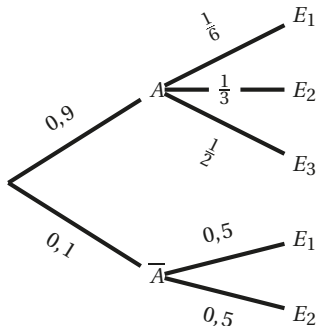
L'espérance n'est pas nulle, le jeu n'est pas équitable.

b. On reprend le calcul de l'espérance avec une perte de x euros si les trois pièces présentent leur côté face :

$$E(X) = \frac{16+x}{8}, \text{ donc l'espérance est nulle si } x = -16.$$

EXERCICE 925

Soit A l'événement « le visiteur utilise l'ascenseur » et E_i l'événement « le visiteur va au $i^{\text{ème}}$ étage ».



1. a. $P(A \cap E_2) = P(A) \times P_A(E_2) = 0,3$

b. $P(E_2) = P(A \cap E_2) + P(\bar{A} \cap E_2) = \frac{7}{20} = 0,35$

c. $P_{E_2}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{7}$.

2. a.

x_i	7	17	34	51
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,3	0,45

b. $E(X) = 36,4$. Un visiteur payera en moyenne 36 € et 40 centimes pour une visite.

$$V(X) = 0,1 \times 7^2 + 0,15 \times 17^2 + 0,3 \times 34^2 + 0,45 \times 51^2 - 36,4^2$$

$$V(X) = 240,54$$

$$\sigma(X) = \sqrt{240,54} \approx 15,51.$$

EXERCICE 926

1. — $AR_1R_2R_3R_6R_7B$

— $AR_1R_2R_4R_6R_7B$

— $AR_1R_2R_5R_4R_6R_7B$

— $AR_1R_8R_9R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$

— $AR_1R_8R_{10}R_{12}R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$

— $AR_1R_8R_{11}R_{13}R_{15}R_{17}R_{18}B$

2. a. Chaque parcours a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Il y a 3 parcours passant par R_7 , la probabilité cherchée est donc égale à $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

b. Il y a 2 parcours passant par R_{14} , la probabilité cherchées est donc égale à $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

3. a. Il y a deux parcours à 6 bonds qui correspondent à $X = 12$;

trois parcours à 7 bonds qui correspondent à $X = 14$;un parcours à 8 bonds qui correspondent à $X = 16$.

b.

x_i	12	14	16
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c. $E(X) = \frac{41}{6} \approx 13,66$.

4. En reprenant les calculs avec un temps t en secondes, on obtient : $E(X) = \frac{41t}{6}$.

$$\text{Donc } E(X) = 10 \iff \frac{41t}{6} = 10 \iff t = \frac{60}{41} \text{ d'où } t \approx 1,46 \text{ s.}$$

EXERCICE 927

1. Les trajets possibles sont :

ABC AFE BCD BAF CAB CDE.

2. a. Il y a deux trajets finissant en E, donc $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. Il y a 4 chemins finissant par le sas 2, donc $p_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3. a. X peut prendre les valeurs : 56; 58; 66; 68; 74.
b.

x_i	56	58	66	68	74
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

c. $E(X) = 66$, le robot mettra en moyenne 66 mn pour nettoyer trois salles.

d. On a un temps inférieur à 60 minutes dans 2 cas sur 6, soit $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4. a. On a $V(X) = \frac{296}{6} = \frac{148}{3}$. Donc $\sigma(X) \approx 7,02$.

b. En faisant travailler le robot 365 jours on a $365 \times E(X) + 1,5 \times \sigma(X) \times \sqrt{365} = 24291,2$ (min) soit environ 405 h. Il est donc acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an.

EXERCICE 928

1. a. $P(G \cap D) = 0,002$

b. $P(D) = P(D \cap G) + P(D \cap \overline{G}) = 0,082$.

2. $P_D(G) = \frac{P(D \cap G)}{P(D)} = \frac{0,002}{0,082} = \frac{1}{41}$.

3. $P(X = 0) = P(G) = 0,2$

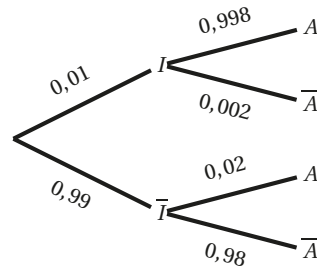
$$P(X = 80) = P(\overline{G} \cap \overline{D}) = 0,72$$

$$P(X = 280) = P(\overline{G} \cap D) = 0,08$$

$E(X) = 80$, le coût moyen d'un contrôle est de 80 €.

4. D'après la question 2., parmi les chaudières défectueuses la probabilité qu'une soit sous garantie est égale à $\frac{1}{41}$ donc la probabilité qu'elle ne soit pas sous

garantie est égale à $\frac{40}{41}$. On en déduit la probabilité demandée : $p = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^5 \approx 0,116$.

EXERCICE 929**Partie A**

1. $P(I \cap A) = 0,00998$

$$P(A) = P(I \cap A) + P(\overline{I} \cap A) = 0,02978.$$

2. Le système d'alarme est mis en défaut si l'alarme ne se déclenche pas alors qu'un incident survient ou si l'alarme se déclenche alors qu'aucun incident ne survient :

$$p = P(I \cap \overline{A}) + P(\overline{I} \cap \overline{A}) = 0,01982.$$

3. $P_A(I) = \frac{0,00998}{0,02978} \approx 0,3351$.

Partie B

1. $P(X = 5000) = P(I \cap A) = 0,00998$

$$P(X = 15000) = P(I \cap \overline{A}) = 0,00002$$

$$P(X = 1000) = P(\overline{I} \cap A) = 0,0198$$

$$P(X = 0) = P(\overline{I} \cap \overline{A}) = 0,9702.$$

2. $E(X) = 70$, le coût journalier moyen est de 70 €.

EXERCICE 930

1. a. X_6 peut prendre les valeurs -0,70; 0,30; 3,30.

b.

x_i	3,30	0,30	-0,70
$p(X_6 = x_i)$	0,1	0,3	0,6

c. $E(X_6) = 0$, le jeu est équitable.

2. a.

x_i	3,30	0,30	-0,70
$p(X_n = x_i)$	$\frac{1}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{n}{n+4}$

$$\text{b. } E(X_n) = \frac{4,2 - 0,7n}{n+4}$$

$$\text{c. } E(X) < 0 \iff 4,2 - 0,7n < 0 \iff n > 6.$$

Le sac doit contenir au moins 7 boules noires.

EXERCICE 931

1. X_1 et X_2 prennent toutes les valeurs de 1 à N , pour tout n compris entre 0 et N ,

$$P(X_1 = x_i) = P(X_2 = x_i) = \frac{1}{N}$$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{\sum_{i=1}^N i}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2}.$$

2. a. $Y = X_1 + X_2$ prend toutes les valeurs entre 2 et $2N$.

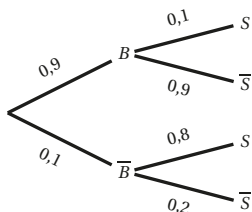
Boule 2 \ Boule 1	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

$$\text{b. } E(Y) = 6, V(X) = 4.$$

$$\text{c. } P(2 < Y < 10) = 1 - \frac{1}{25} - \frac{1}{25} = \frac{23}{25}.$$

EXERCICE 932**Partie A**

1.



$$\text{2. a. } p_B(\bar{S}) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

$$\text{b. } p(S) = p(B \cap S) + p(\bar{B} \cap S).$$

$$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,9 \times 0,1 = 0,09;$$

$$p(\bar{B} \cap S) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08.$$

$$\text{Donc } p(S) = 0,09 + 0,08 = 0,17.$$

$$\text{c. } p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)} = \frac{0,09}{0,17} = \frac{9}{17} \approx 0,53.$$

Partie B

$$\text{1. On a } p(\bar{B} \cap \bar{S}) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(\bar{S}) = 0,1 \times 0,2 = 0,02.$$

Situation de la personne entrant	$B \cap S$	$B \cap \bar{S}$	$\bar{B} \cap S$	$\bar{B} \cap \bar{S}$
Bénéfice	485	-15	500	0
Probabilité	0,09	0,81	0,08	0,02

2. Le bénéfice moyen est égal à l'espérance de la loi de probabilité bénéfice réalisé.

$$E(X) = 485 \times 0,09 + (-15) \times 0,81 + 500 \times 0,08 + 0 \times 0,02 = 43,65 - 12,15 + 40 = 71,5.$$

Le bénéfice moyen par personne entrant est égal à 71,50 €.

3. Les bénéfices deviennent respectivement :

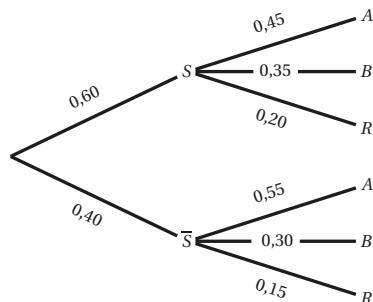
$500 - x, -x, 500, 0$. D'où la nouvelle espérance :

$$E(X) = 0,09(500 - x) - x \times 0,81 + 500 \times 0,08 + 0 \times 0,02 = 45 - 0,09x - 0,81x + 40 = 85 - 0,9x.$$

4. On doit avoir $85 - 0,9x = 76$ soit $x = 10$.

EXERCICE 933

1.



2. a. Les résidents qui ne louent pas un studio louent un deux-pièces, donc $p(\bar{S}) = 1 - 0,60 = 0,40$.

- b. $p_S(A) + p_S(B) + p_S(R) = 1$
d'où $p_S(B) = 1 - 0,45 - 0,20 = 0,35$.
3. a. • On a $P(R \cap S) = p_S \times p_S(R) = 0,60 \times 0,20 = 0,12$.
• On sait que $p(R) = 0,18$,
or $p(R) = p(S \cap R) + p(\overline{S} \cap R)$
soit $0,18 = 0,12 + p(\overline{S} \cap R)$,
d'où $p(\overline{S} \cap R) = 0,18 - 0,12 = 0,06$.
b. $p(\overline{S} \cap R) = p(\overline{S}) \times p_{\overline{S}}(R)$
d'où $p(\overline{R}) = \frac{p(\overline{S} \cap R)}{p(\overline{S})} = \frac{0,06}{0,40} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15$.
4. $p(A) = p(S \cap A) + p(\overline{S} \cap A) = 0,6 \times 0,45 + 0,4 \times 0,55$
 $= 0,27 + 0,22 = 0,49$ soit 49 % : un peu moins de
la moitié des résidents choisit la formule simple.
5. a. On a $p(S \cap B) = p(S) \times p_S(B)$
 $= 0,6 \times (1 - 0,45 + 0,20) = 0,21$.

ℓ_i	350	370	390	480	500	520
$p(L = \ell_i)$	0,12	0,27	0,21	0,06	0,22	0,12

b. On a $E(L) = 425$, sur un grand nombre de locations
chacune rapportera en moyenne 425 €.

EXERCICE 934

1. a. Soit p la probabilité d'atteindre la cible,
 $p = 1 - 0,2 = 0,8$.
b. $P(B) = p - P(N) = 0,3$.
2. a.

x_i	5	2	-8
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

- b. $E(X) = 0,9 \neq 0$, le jeu n'est donc pas équitable.
c. $\sigma(X) = \sqrt{21,49} = 4,64$ à 10^{-2} .

EXERCICE 935

1. Liste des différents parcours possibles : (D, D, D) ,
 (D, D, G) , (D, G, D) , événement (D, G, G) , (G, D, D) ,
 (G, D, G) , (G, G, D) , (G, G, G) .
2. (D, D, D) , abscisse d'arrivée +6
 (D, D, G) , (D, G, D) et (G, D, D) , abscisse d'arrivée +3

(D, G, G) , (G, D, G) et (G, G, D) , abscisse d'arrivée -1
 (G, G, G) abscisse d'arrivée -3.

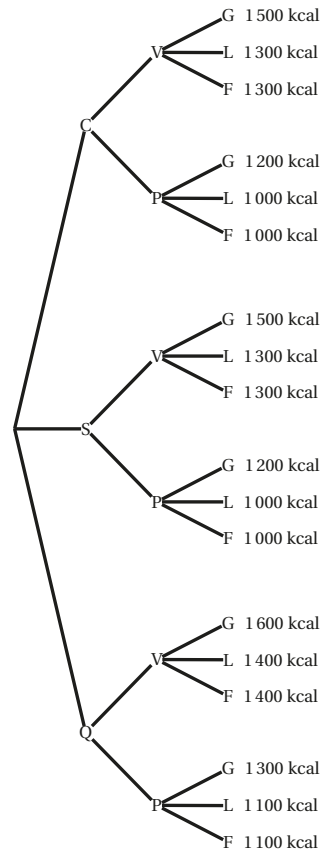
3.

x_i	6	3	-1	-3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \frac{9}{8} = 1,125.$$

EXERCICE 936

1.



2. Il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ branches donc 18 repas différents.
3. Il y a une chance sur deux de choisir poisson ou viande, donc $P(A) = \frac{1}{2}$.
De même on peut choisir de façon équiprobable chacun des trois déserts, donc $P(B) = \frac{1}{3}$.

Les événements A et B sont indépendants donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}.$$

4. Voir question 1.

5. a. $R \in \{1000, 1100, 1200, 1300, 1400, 1500, 1600\}$.

b.

$X = R_i$	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500	1 600
$p(X = R_i)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

c. $E(R) = 1250$, sur un grand nombre de repas pris dans ce restaurant, le bilan calorique moyen d'un repas est 1250 kcal.

EXERCICE 937

Partie A

1. $p(M \cap E) = p(M) \times p_M(E) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$

2. De même $p(C \cap E) = p(C) \times p_C(E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$
D'après la loi des probabilités totales :

$$p(E) = p(M \cap E) + p(C \cap E) = \frac{2}{3}.$$

3. On sait que $p(\bar{E}) = 1 - p(E) = \frac{1}{3}.$

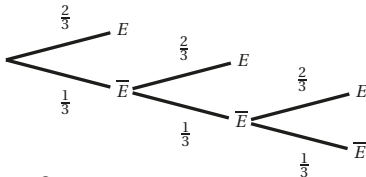
On cherche $p_{\bar{E}}(C) = \frac{p(C \cap \bar{E})}{p(\bar{E})}.$

Or $p(C \cap \bar{E}) = p(C) \times p_C(\bar{E}) = \frac{1}{6}.$

Donc $p_{\bar{E}}(C) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$

Partie B

1.



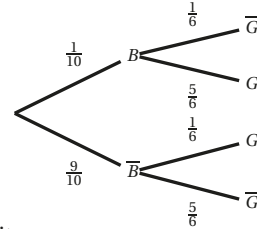
2. $p(X = 5) = \frac{2}{3};$
 $p(X = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9};$
 $p(X = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$
 $p(X = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$

3. $E(X) = \frac{104}{27} \approx 3,85$ points.

EXERCICE 938

Partie A

1. On peut représenter une partie par un arbre :



On en déduit :

$$p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{30}.$$

2. On a $p(\bar{G}) = 1 - p(G) = \frac{23}{30}.$

On cherche $p_{\bar{G}}(B) = \frac{p(\bar{G} \cap B)}{p(\bar{G})} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{46}.$

3. La probabilité de ne gagner aucune partie sur 4 jouées est $P(G = 0) = \left(\frac{23}{30}\right)^4$

d'où $P(G \geq 1) = 1 - P(G = 0) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^4 = 0,655$ à 10^{-3} près.

4. On joue n parties : $P(G \geq 1) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n.$

On cherche n tel que $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99$

soit $0,01 \geq \left(\frac{23}{30}\right)^n$

En utilisant la calculatrice $n \geq 18.$

Il faut donc jouer au minimum 18 fois.

Partie B

1. a.

x_i	+4	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$

$$E(X) = \frac{1}{6}.$$

b. L'espérance de gain étant positive, le jeu est défavorable à l'organisateur.

2. On reprend l'arbre initial avec

$$p(B) = \frac{1}{n+1} \text{ et } p(\bar{B}) = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{On a alors } p(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$$

$$\text{et donc } p(\overline{G}) = \frac{5n+1}{6(n+1)}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{n+5}{6(n+1)} + (-1) \times \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{19-n}{6(n+1)}.$$

$$E(X) > 0 \iff \frac{19-n}{6(n+1)} > 0 \iff n < 19.$$

EXERCICE 939

1. $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$

$$\iff x_0 + x_0 + r + x_0 + 2r + x_0 + 3r + x_0 + 4r = 100$$

$$\iff 5x_0 + 10r = 100$$

$$\iff 50 + 10r = 100 \iff 10r = 50 \iff r = 5.$$

$$x_1 = 15, x_2 = 20, x_3 = 25 \text{ et } x_4 = 30.$$

2. $P_0 = 0,1, P_1 = 0,15, P_2 = 0,2, P_3 = 0,25, P_4 = 0,3.$

3. a. $X \in \{0; -1; 2; -3; 4\}.$

b. $P(X=2) = \frac{20}{100} = 0,2.$

c.

x_i	0	-1	2	-3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$

$$E(X) = \frac{70}{100} = 0,70$$

d. Le tableau de la nouvelle loi est le suivant :

y_i	0	1	-2	3	-4
$p(Y=y_i)$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$

$$E(Y) = \frac{-70}{100} = -0,70$$

EXERCICE 940

1. a.

x_i	50	60	75
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$

b. $E(X) = 59,375.$

2. a. En utilisant un arbre on obtient

$$p = 3 \times \frac{7}{16} \times \frac{5}{16} \times \frac{4}{16} = \frac{105}{1024}.$$

b. Au moins un des voyageurs a pris un billet pour la gare B : « tous les cas » moins « les trois voyageurs n'ont pas pris un billet pour la gare B »

$$p(B \geq 1) = 1 - p(B=0) = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^3 = \frac{3367}{4096}$$

c. Probabilité que les trois voyageurs aient un billet pour la destination B : $p(B=3) = \left(\frac{7}{16}\right)^3$

Probabilité que les trois voyageurs aient un billet pour la même destination :

$$p = p(B=3) + p(C=3) + p(D=3)$$

$$= \left(\frac{7}{16}\right)^3 + \left(\frac{5}{16}\right)^3 + \left(\frac{4}{16}\right)^3$$

La probabilité recherchée est donc :

$$P = \frac{p(B=3)}{p} = \frac{49}{76}$$

EXERCICE 941

1. La probabilité recherchée est $P(\overline{Q} \cap D).$

$$P(\overline{Q} \cap D) = P(\overline{Q}) \times P(D)$$

$$= (1 - P(Q)) \times (1 - P_{\overline{Q}}(D)) = 0,3 \times 0,4$$

$$P(\overline{Q} \cap D) = 0,12. \text{ L'affirmation est vraie.}$$

2. $P(D) = P(Q \cap D) + P(\overline{Q} \cap D)$

$$= 0,7 \times 0,3 + 0,12 = 0,33. \text{ L'affirmation est fausse.}$$

3. La probabilité recherchée est $P_D(\overline{Q}).$

$$P_D(\overline{Q}) = \frac{P(\overline{Q} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,12}{0,33} = \frac{4}{11}. \text{ L'affirmation est vraie.}$$

4. On a $P(Q \cap D) = 0,21$ et

$$P(Q) \times P(D) = 0,7 \times 0,33 = 0,231.$$

$P(Q \cap D) \neq P(Q) \times P(D)$, les événements Q et D ne sont pas indépendants. L'affirmation est fausse.

5. Soit X la variable aléatoire égale au gain du traiteur.

Les valeurs de X possibles sont :

5, le client n'achète qu'une quiche,

6, le client n'achète qu'une pizza,

8, le client achète une quiche et un dessert,

9, le client achète une pizza et un dessert.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	5	6	8	9
$P(X = x_i)$	0,49	0,18	0,21	0,12

Ainsi $E(X) = 6,29$.

Le traiteur gagne en moyenne 6,29 € par client.

$$6,29 \times 6 \times 200 = 7548.$$

Le traiteur gagne donc en moyenne 7548 € par semaine. L'affirmation est vraie.

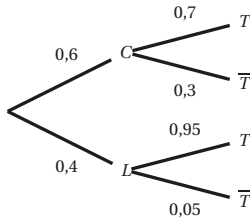
EXERCICE 942

1. c - 2. c - 3. d - 4. b - 5. d

EXERCICE 943

1. $p(C) = 0,6$ $p(L) = 0,4$ $p(T) = 0,8$
 $p_C(T) = 0,7$.

2.



3. $p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

4. $p_T(C) = \frac{p(T \cap C)}{p(T)} = \frac{0,42}{0,8} = 0,525$.

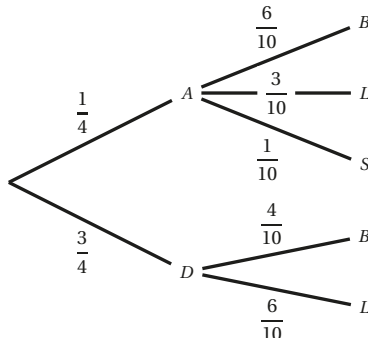
5. a. $p(T \cap L) = p(T) - p(T \cap C) = 0,8 - 0,42 = 0,38$

$$p_L(T) = \frac{p(T \cap L)}{p(L)} = \frac{0,38}{0,4} = 0,95.$$

b. Voir l'arbre.

EXERCICE 944

1. On peut représenter les données de l'exercice sous forme d'un arbre pondéré :



a. $P(A \cap L) = P(A) \times P_A(L) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$.

b. $P(L) = P(A \cap L) + P(D \cap L)$
 $= P(A) \times P_A(L) + P(D) \times P_D(L)$
 $= \frac{3}{40} + \frac{3}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{40} + \frac{18}{40} = \frac{21}{40}$.

c. $P_L(D) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{6}{10}}{\frac{21}{40}} = \frac{6}{7}$.

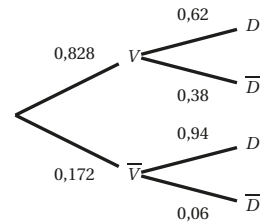
2. Il n'y a pas de médaille dorée représentant le château de Saumur donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est égale à 1.

EXERCICE 945

1. Sur un total de 38,204 millions de véhicules, 31,622 sont des véhicules particuliers,

$$\text{d'où } P(V) = \frac{31,622}{38,204} = 0,828 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2.



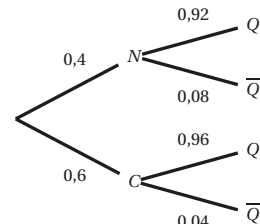
3. a. $P(V \cap D) = P(V) \times P_V(D)$
 $= 0,828 \times 0,62 = 0,513 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

b. $P(D) = P(V \cap D) + P(\bar{V} \cap D)$
 $= P(V) \times P_V(D) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(D)$
 $= 0,51336 + 0,172 \times 0,94 = 0,675$.

c. $P_D(\bar{V}) = \frac{P(D \cap \bar{V})}{P(D)} = \frac{0,172 \times 0,94}{0,675} = 0,240 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

EXERCICE 946

1.



2. $P(N \cap Q) = P(N) \times P_N(Q) = 0,4 \times 0,92 = 0,368$.

La probabilité que le pneu choisi soit un pneu neige et qu'il ait réussi le test est égale à 0,368.

3. $P(Q) = P(N \cap Q) + P(C \cap Q)$
 $= 0,368 + 0,6 \times 0,96 = 0,944.$
4. $P_Q(N) = \frac{P(N \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0,368}{0,944} \approx 0,3898$ à 10^{-4} près.

EXERCICE 947

1. $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119.$
2. D'après la formule des probabilités totales :
- $$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149$$
3. $P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,119}{0,149} \approx 0,799.$

EXERCICE 948

1. On cherche à calculer $P_C(F_1)$, pour cela nous devons calculer $P(C \cap F_1)$ et $P(C)$.
- $P(C \cap F_1) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) = 0,5 \times 0,98 = 0,49$
 - $P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C)$
 $+ P(F_3) \times P_{F_3}(C) = 0,92.$
- On obtient $P_C(F_1) = \frac{0,49}{0,92} \approx 0,53$ à 10^{-2} près.
2. $P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C)$
 $= 0,98p + 0,90(1-p) = 0,90 + 0,08p$
- On cherche p tel que $P(C) = 0,92$, soit $0,08p = 0,02$
ce qui implique $p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$. L'entreprise doit donc acheter 25% de ses fèves au premier fournisseur.

EXERCICE 949

1. $P(I \cap S) = 0,3;$
 $P(I \cap A) = 0,18;$
 $P(I \cap R) = 0,12.$
2. Soit p la probabilité que le jardinier ne plante pas la pelouse dans ce foyer.
 $p = P(\bar{I}) + P(I \cap R) = 0,4 + 0,12 = 0,52.$
3. a. $P(X = 0) = 0,52$, $P(X = 2000) = 0,3$
et $P(s) = 0,18.$
- b. $E(X) = 600 + 0,18s.$
- c. $E(X) = 1200$ si $x = \frac{10000}{3}$
Il doit vendre le gazon anglais 3334 €.

EXERCICE 950

1. a. • Si le joueur tire une boule bleue il gagne 8 €, il a misé 2 € donc $X = 8 - 2 = 6.$
Il y a 25 boules bleues parmi les boules donc
 $P(X = 6) = \frac{25}{250} = 0,1.$

- Si le joueur tire une boule rouge il gagne 4 €, il a misé 2 € donc $X = 4 - 2 = 2.$

Il y a 75 boules rouges parmi les boules donc

$$P(X = 2) = \frac{75}{250} = 0,3.$$

- Si le joueur tire une boule blanche il ne gagne rien, il a misé 2 € donc $X = -2.$

Il y a 150 boules blanches parmi les boules donc

$$P(X = -2) = \frac{150}{250} = 0,6.$$

- b. $E(X) = -2 \times 0,6 + 2 \times 0,3 + 6 \times 0,1 = 0$, le jeu est donc équitable.

$$c. V(X) = 2^2 \times 0,6 + 2^2 \times 0,3 + 6^2 \times 0,1 - 0^2 = 7,2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{7,2} = 2,68 \text{ au centième.}$$

2. Soit x le nombre de boules blanches ajouter dans l'urne.

Les probabilités deviennent alors :

$$P(X = -2) = \frac{150 + x}{x + 250} \quad P(X = 2) = \frac{75}{x + 250}$$

$$P(X = 6) = \frac{25}{x + 250}$$

$$E(X) = -1,5 \text{ donc}$$

$$-2(150 + x) + 2 \times 75 + 6 \times 25 = -1,5(x + 250)$$

La résolution de cette équation donne $x = 750$.

Bob doit donc ajouter 750 boules blanches.

EXERCICE 951

1. a. $X \in \{0; 100; 1000; 10000\}.$
- b.

x_i	0	100	1000	10000
$P(X = x_i)$	$\frac{450}{500}$	$\frac{45}{500}$	$\frac{4}{500}$	$\frac{1}{500}$

- c. $E(X) = 37.$

2. a. Il y a 50 numéros gagnants parmi les 500 billets d'où $p(A) = 0,1.$

Il y a 50 numéros dont le deuxième chiffre est 9 d'où

$$p(B) = \frac{50}{500} = 0,1.$$

- b. Il y a 5 numéros gagnants donc le deuxième chiffre est 9 d'où $p(A \cap B) = \frac{5}{500} = 0,01 = p(A) \times p(B)$. Les événements A et B sont donc indépendants.

3. a. $p(C) = \left(\frac{450}{500}\right)^2 = 0,9^2 = 0,81.$

- b. La probabilité cherchée est donc

$$p = 1 - p(C) = 0,19$$

$p < 2 \times p(A)$, cette annonce publicitaire n'est pas correcte.

EXERCICE 952

1. La somme de toutes les probabilités des événements élémentaires est égale à 1, on en déduit alors que $36a + 8b = 1$

$$p((1, 1, 1)) = 3a + b \text{ et } p((2, 2, 2)) = 6a + b$$

p est une probabilité si $0 \leq 3a + b \leq 1$ et $0 \leq 6a + b \leq 1$

$$\text{D'après l'égalité précédente } b = \frac{1}{8} - \frac{9}{2}a$$

on en déduit alors que

$$-\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{7}{12} \text{ et } \frac{1}{12} \geq a \geq -\frac{7}{12}$$

$$\text{d'où } -\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{1}{12}.$$

2. $p(A) = p(B) \iff a(1 + y + z) + b = a(4 + z) + b$
 $\implies a = 0.$

D'après la question précédente on en déduit $a = 0$ et $b = \frac{1}{8}.$

3. a.

x_i	3	4	-3	-4
$P(X = x_i)$	$3a + b$	$3(4a + b)$	$3(5a + b)$	$6a + b$

b. $E(X) = -12a + 2b = 0$

$$a \text{ et } b \text{ vérifient le système } \begin{cases} -12a + 2b = 0 \\ 36a + 8b = 1 \end{cases}$$

La résolution du système donne $a = \frac{1}{84}$ et $b = \frac{1}{14}.$

Dans ce cas, la loi de probabilité de X s'écrit :

x_i	3	4	-3	-4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{4}{28}$

Dans ce cas $V(X) = 12,5.$

EXERCICE 953

1. Dans un premier temps on fixe l'ordre des deux boules. Il y a p façons de choisir la première boule et $p - 1$ façons de choisir la deuxième soit $p(p - 1)$ façons de choisir la première et la deuxième. Or le choix (a, b) et le même que le choix (b, a) , en d'autres termes nous avons compter tous les choix en double.

Il y a donc $\frac{p(p - 1)}{2}$ façons de choisir deux boules parmi p .

2. Calcul de p_n : on tire deux boules vertes parmi les trois ou deux rouges parmi les cinq ou 2 bleues parmi les n

Il y a donc $\frac{3 \times 2}{2} + \frac{5 \times 4}{2} + \frac{n(n - 1)}{2}$ façons de tirer deux boules de même couleur.

Il y a $\frac{(n + 8)(n + 7)}{2}$ façons de choisir deux boules parmi $n + 8$.

$$\text{On en déduit : } p_n = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}.$$

La probabilité de gain puis la probabilité q_n de perte.

$$q_n = 1 - p_n = 1 - \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}.$$

$$p_n = \frac{n^2 - n + 26}{n^2 + 15n + 56} \text{ tend vers 1 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Ce résultat était prévisible, en effet s'il y a un très grand nombre de boules bleues, les huit boules non bleues deviennent très minoritaires, il est très probable que les deux boules tirées soient bleues.

3. On tire neuf fois deux boules de la même couleur et une fois deux boules de couleur différente. De plus il y a dix façons de tirer deux boules de couleurs différentes lors des dix tirages (en premier, en deuxième, etc) d'où

$$P(X = 9) = 10 \times \left(\frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)} \right)^9 \times \left(1 - \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)} \right)$$

$P(X = 9)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 954

1. Il y a deux dés sur trois qui sont normaux donc $P(U) = \frac{2}{3}$. L'affirmation est FAUSSE.

2. La probabilité d'obtenir 6 sur un dé normal est égale à $\frac{1}{6}$;

la probabilité d'obtenir 6 sur le dé truqué est égal à $\frac{2}{3}$

d'où $P(S_n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n$. L'affirmation est VRAIE.

$$3. p_n = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \right)^n + 1}$$

$$p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}. \text{ L'affirmation est VRAIE.}$$

4. $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 donc p_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 955

- Si un individu est malade un jour, il est guéri le jour suivant. Mathix ne peut donc pas être malade tous les jours de la semaine. La probabilité que Mathix soit malade tous les jours de la semaine est donc nulle.
- On peut utiliser un arbre. On note M_i l'événement « Mathix est malade le $i^{\text{ème}}$ jour de la semaine ». D'où $P(A_3) = 0,6 \times 1 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = 0,456$. La probabilité que Mathix soit malade le mercredi est donc égale à 0,456.
- Si un individu est en bonne santé un jour, il l'est encore le jour suivant avec une probabilité de 40%, donc la probabilité que Mathix ne tombe pas malade au cours de la semaine est égale à $(0,4)^7 \approx 0,00164$.
- Mathix sera malade trois jours de la semaine si et seulement si il est malade les trois jours suivants :
 - lundi-mercredi-vendredi :
 $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 = (0,6)^3 \times 0,4$
 - lundi-mercredi-samedi :
 $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times 0,4$
 - lundi-mercredi-dimanche :
 $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 - lundi-jeudi-samedi :
 $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times 0,4$
 - lundi-jeudi-dimanche :
 $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 - lundi-vendredi-dimanche :
 $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 - mardi-jeudi-samedi :
 $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times 0,4$
 - mardi-jeudi-dimanche :
 $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 - mardi-vendredi-dimanche :
 $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 - mercredi-vendredi-dimanche :
 $0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
 La probabilité que Mathix soit malade trois jours de

la semaine est donc égale à :

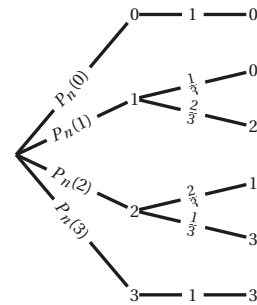
$$4 \times (0,6)^3 \times 0,4 + 6 \times (0,6)^3 \times (0,4)^2 = 0,55296.$$

EXERCICE 956**Partie A**

- A l'instant $n = 5$: $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{F})$
A l'instant $n = 6$: $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.
- D'après la question précédente, on retrouve l'état initial au bout de 6 retournements
 $n = 2020 = 336 \times 6 + 4$ à l'instant $n = 2020$ on retrouvera l'état de l'instant $n = 4$ soit $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.
- On retourne la pièce 2 aux instants 2, 5, 8
 On retournera donc la pièce 2 pour la 2020^{e} fois à l'instant $n = 2 + (2020 - 1) \times 3 = 6059$.

Partie B

1.



- Pour arriver à 0 à l'instant $n + 1$, on peut :
 - partir de 0 pile à l'instant n est suivre la branche de probabilité 1
 - partir de 1 pile à l'instant n et suivre la branche de probabilité $\frac{1}{3}$
 d'où $P_{n+1}(0) = P_n(0) + \frac{1}{3}P_n(1)$
 Pour arriver à 1 à l'instant $n + 1$, on doit partir de 2 piles à l'instant n puis suivre la branche de probabilité $\frac{2}{3}$
 d'où $P_{n+1}(1) = \frac{2}{3}P_n(2)$.
 - En raisonnement de même sur les façons d'arriver en 2 à l'instant $n + 1$, on obtient la relation
 $P_{n+1}(2) = \frac{2}{3}P_n(1)$.
 - En raisonnement de même sur les façons d'arriver en 2 à l'instant $n + 1$, on obtient la relation
 $P_{n+1}(3) = \frac{1}{3}P_n(2) + P_n(3)$.

3. a.

n	0	1	2	3	4	5
$P_n(1)$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$
$P_n(2)$	1	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0

b. $P_{20}(1) = 0$ et $P_{20}(2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \approx 0,0003$,

$P_{21}(1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{21} \approx 0,0002$ et $P_{21}(2) = 0$.

c. $P_n(1)$ prend les valeurs 0 ou $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui tend vers 0 lorsque n devient très grand, on peut donc conjecturer que $P_n(1)$ tend vers 0 lorsque n devient très grand.

d. On conjecture de même que $P_n(2)$ tend vers 0 lorsque n devient très grand.

4. a. $T_0 = 2P_0(1) + 3P_0(2) + 5P_0(3) = 0 + 3 + 0 = 3$.

b. $T_{n+1} = 2P_{n+1}(1) + 3P_{n+1}(2) + 5P_{n+1}(3)$
 $= 2\left(\frac{2}{3}P_n(2)\right) + 3\left(\frac{2}{3}P_n(1)\right) + 5\left(P_n(3) + \frac{1}{3}P_n(2)\right)$
 $= 2P_n(1) + 3P_n(2) + 5P_n(3) = T_n$

$T_{2020} = T_{2019} = T_{2018} = \dots = T_0 = 3$

c. D'après les questions précédentes

$2P_n(1) + 3P_n(2) + 5P_n(3) = 3$ et $P_n(1), P_n(2)$ tendent vers 0 lorsque n devient très grand.

On en déduit alors que $P_n(3)$ tend vers $\frac{3}{5}$ lorsque n devient très grand.

La probabilité d'arrêter les retournements dans l'état $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$ est égale à $\frac{3}{5}$.

d. Les retournements s'arrêtent dans l'état $(\mathbb{P}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$ ou dans l'état $(\mathbb{F}, \mathbb{F}, \mathbb{F})$.

La probabilité d'arrêter dans l'état $(\mathbb{F}, \mathbb{F}, \mathbb{F})$ est égale à $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

EXERCICE 957

1. Probabilité d'obtenir une boule blanche en tirant une boule parmi les $3n+3$: $\left(\frac{n}{3n+3}\right)$, les trois tirages étant indépendants on en déduit que la probabilité de tirer trois boules blanches est égale à $\left(\frac{n}{3n+3}\right)^3$.

De même la probabilité de tirer trois boules rouges est égale à $\left(\frac{n+1}{3n+3}\right)^3$,

la probabilité de tirer trois boules noires est égale à $\left(\frac{n+2}{3n+3}\right)^3$ d'où

$$P(A) = \left(\frac{n}{3n+3}\right)^3 + \left(\frac{n+1}{3n+3}\right)^3 + \left(\frac{n+2}{3n+3}\right)^3$$

$$= \frac{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}{27(n+1)^3}.$$

L'affirmation est VRAIE.

2. L'événement contraire de A est : « les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur ».

L'affirmation est FAUSSE.

3. La probabilité que les trois boules tirées soient rouges est égale à $\left(\frac{n+1}{3n+3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

L'affirmation est VRAIE.

4. On remarque que si $n = 3$ alors

$$\frac{2}{n} + \frac{3}{n+1} + \frac{4}{n+2} = \frac{133}{60} > 1 \text{ ce qui est impossible.}$$

L'affirmation est donc FAUSSE.

EXERCICE 958

1. On peut utiliser un arbre,

$$a_2 = \frac{2}{b} \times \left(1 - \frac{2}{b}\right) + \left(1 - \frac{2}{b}\right) \times \frac{2}{b} = \frac{4}{b} \times \left(1 - \frac{2}{b}\right).$$

L'affirmation est FAUSSE.

2. $a_3 = \left(\frac{2}{b}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{b}\right) + \left(\frac{2}{b}\right) \times \left(1 - \frac{2}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{b}\right) \times \left(1 - \frac{2}{b}\right)$.

L'affirmation est VRAIE.

3. On tire une boule blanche puis une boule noire soit

$$p_2 = \frac{2}{b} \times \frac{b-2}{b} \neq 1 - \frac{2}{b^2}. \text{ L'affirmation est FAUSSE.}$$

4. La probabilité de choisir une boule blanche puis $n-2$ boules noires est égale à $\frac{2}{b} \times \left(\frac{b-2}{b}\right)^{n-2}$.

Il y a $n-1$ façons de placer la boule blanche parmi les $n-1$ premières boules.

La probabilité de choisir une boule blanche parmi les $n-1$ premiers tirages est donc égale à

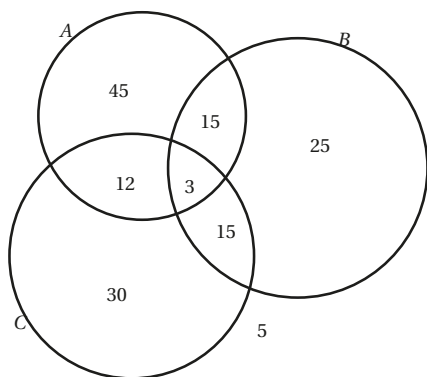
$$(n-1) \times \frac{2}{b} \times \left(\frac{b-2}{b}\right)^{n-2}$$

La $n^{\text{ème}}$ boule doit être choisie parmi les $(b-2)$ noires, d'où

$$p_n = \frac{2(n-1)}{b} \left(1 - \frac{2}{b}\right)^{n-1}. \text{ L'affirmation est VRAIE.}$$

EXERCICE 959

On peut représenter la première partie des informations par un diagramme :



On peut représenter la deuxième partie des informations par un tableau, en notant R_s l'événement « la personne ne lit que la revue R » :

	Hommes	Femmes	Total
A_s	25	20	45
B_s	15	10	25
C_s	15	15	30
Total	55	45	100

- La somme de toutes les valeurs du diagramme est égale à 150 personnes. L'affirmation est VRAIE.
- $45 + 25 + 30 = 100$. L'affirmation est VRAIE.
- On cherche $P_H(A_s) = \frac{25}{55}$. L'affirmation est FAUSSE.
- On cherche $P(H \cap A_s) = \frac{25}{100}$. L'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 960

- L'urne contient $1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n$.
L'affirmation est FAUSSE.

- $P(X = k) = \frac{2^{k-1}}{2^n} = 2^{k-1-n}$. L'affirmation est FAUSSE.

- On démontre par récurrence que l'affirmation est VRAIE.

• INITIALISATION : Pour $n = 2$,

$$\sum_{k=1}^2 k 2^{k-1} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 = 5 \text{ et } (2-1) \times 2^2 + 1 = 5$$

La propriété est vraie au rang 2.

• Supposons la propriété vérifiée au rang n , montrons qu'alors elle est vérifiée au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} + (n+1) 2^n \\ &= (n-1) 2^n + 1 + (n+1) 2^n = n \times 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.

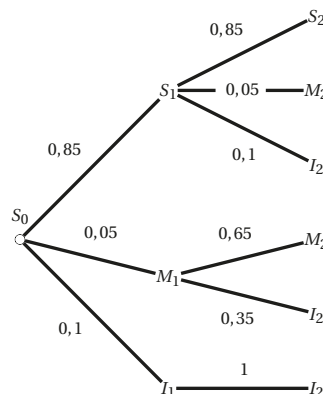
• La propriété est vraie au rang 2 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

- $E(X) = 0 \times P(X=0) + \sum_{k=1}^n k P(X=k)$
 $= 2^{-n} \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) + 2^{-n}$.

L'affirmation est FAUSSE.

EXERCICE 961**Partie A**

1.



- On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(I_2) &= P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) \\ &\quad + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1) \\ &= 0,085 + 0,0175 + 0,1 = 0,2025 \end{aligned}$$

- $P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{0,0175}{0,2025} \approx 0,086$.

Partie B

1. L'univers Ω est la réunion des événements disjoints S_n, M_n et I_n

donc $u_n + v_n + w_n = P(\Omega) = 1$.

2. a. On entre en C3 la formule $= 0,65 * C2 + 0,05 * B2$.

b. On voit que la valeur maximale de v_n est obtenue pour $n = 4$ et vaut environ 0,0859.

3. a. D'après l'énoncé, $P(S_{n+1}) = 0,85P(S_n)$

donc $u_{n+1} = 0,85u_n$.

b. • *Initialisation* : $0,85^0 - 0,65^0 = 1 - 1 = 0 = v_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un entier n , donc $v_n = 0,85^n - 0,65^n$.

Alors $0,05u_n + 0,65v_n$

$$\begin{aligned} &= 0,05 \times 0,85^n + 0,65 \times \frac{1}{4} (0,85^n - 0,65^n) \\ &= \left(0,05 + \frac{0,65}{4}\right) \times 0,85^n - \frac{1}{4} \times 0,65^{n+1} \\ &= \frac{0,85}{4} \times 0,85^{n+1} - \frac{0,65^{n+1}}{4} \\ &= \frac{1}{4} (0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) = v_{n+1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

• *Conclusion* La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,65^n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Comme $u_n + v_n + w_n = 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$.

Sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés.

EXERCICE 962

1. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire (le repère est orthonormé) est nul.

$$\text{D'où } \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \iff a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} \iff a + b = 5.$$

Les tirages $(a; b)$ favorables sont : $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, et $(4; 1)$ sur 4 $\times$ 4 tirages possibles.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{1}{4}$.

2. a. D'après la question 1. A et B ont chacun 1 chance sur 4 d'obtenir des vecteurs orthogonaux et donc 3 chances sur 4 de ne pas obtenir des vecteurs ortho-

gonaux.

Au premier jeu on a donc si A obtient une somme égale à 5 et B non (ou le contraire),

$$p(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = p(B_1).$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) = 1 \iff p(C_1) = 1 - \frac{6}{16} = \frac{5}{8}.$$

b. A chaque nouveau jeu les probabilités de gagner pour A, gagner pour B et rejouer sont respectivement $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$ et $\frac{10}{16}$.

$$\text{On a donc } p(C_{n+1}) = p(C_n) \times \frac{5}{8}.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $p(C_1) = \frac{5}{8}$.

$$\text{On a donc } p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

$$\text{De même } p(A_{n+1}) = p(C_n) \times \frac{3}{16} = \left(\frac{5}{8}\right)^n \times \frac{3}{16},$$

$$\text{soit en décalant l'indice de 1 : } p(A_n) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}.$$

3. a. On a $-1 < \frac{5}{8} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = 0$.

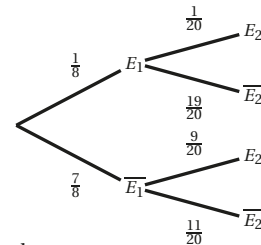
$$\text{b. } p(A_n) < 0,01 \iff \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < 10^{-2}.$$

La suite de terme général $\frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$ est décroissante, en utilisant la calculatrice, on obtient :

$$p(A_7) = 0,011 \text{ et } p(A_8) = 0,00698, \text{ d'où } n = 8.$$

EXERCICE 963

1. a.



- b. D'après l'arbre :

$$p(X=0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{160};$$

$$p(X=1) = \frac{1}{8} \times \frac{19}{20} + \frac{7}{8} \times \frac{9}{20} = \frac{82}{160};$$

$$p(X=2) = \frac{7}{8} \times \frac{11}{20} = \frac{77}{160}.$$

On a bien $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 1$.

c. $E(X) = \frac{59}{40} \approx 1,5$. Sur 20 feux rencontrés, il y aura en moyenne 15 feux verts.

2. a. D'après l'énoncé

$$p_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20} \text{ et } p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{9}{20}.$$

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E_{n+1}) &= p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) \\ &= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{20} + (1 - p_n) \times \frac{9}{20} = \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} q_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } p_{n+1} &= \frac{1}{20} p_n + \frac{9}{20} (1 - p_n) \\ &= p_n \left(\frac{1}{20} - \frac{9}{20} \right) + \frac{9}{20} = \frac{9}{20} - \frac{2}{5} p_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a. On a } u_{n+1} &= 28p_{n+1} - 9 = 28 \left(\frac{9}{20} - \frac{2}{5} p_n \right) - 9 \\ &= \frac{63}{5} - 9 - \frac{2}{5} \times 28p_n \\ u_{n+1} &= \frac{18}{5} - \frac{2}{5} \times 28p_n = -\frac{2}{5} (28p_n - 9) = -\frac{2}{5} u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{5}$, de premier terme $u_1 = 28p_1 - 9 = -\frac{11}{2}$.

$$\text{b. } u_n = -\frac{11}{2} \times \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \text{ d'où}$$

$$p_n = \frac{u_n + 9}{28} = \frac{u_n}{28} + \frac{9}{28} = \frac{1}{28} \left[-\frac{11}{2} \times \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right] + \frac{9}{28}$$

$$\text{c. Comme } -1 < -\frac{2}{5} < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{9}{28} \approx 0,32.$$

Sur un grand nombre de feux rencontrés la probabilité qu'Amélie rencontre un feu orange ou rouge est donc d'environ de 1 sur 3.

EXERCICE 964

1. Notons C l'événement « le ballon est crevé ». Alors $p(C) = 0,2$.

a. Comme les tirs sont indépendants la probabilité que la ballon soit intact au bout de deux tirs est $(1 - p(C))^2 = 0,8^2 = 0,64$.

b. Calculons la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon. L'événement contraire est : « deux tirs ne suffisent pas », autrement dit, le ballon n'est pas crevé au bout de deux tirs. C'est l'événement contraire de celui étudié à la question précédente. La probabilité cherchée est donc égale à $1 - 0,64 = 0,36$.

c. Calculons la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon.

L'événement contraire est « le ballon n'est pas crevé au bout de n tirs », de probabilité $p(\overline{C})^n = 0,8^n$ (car les tirs sont indépendants).

Par conséquent : $p_n = 1 - 0,8^n$.

$$\text{d. } p_n > 0,99 \iff 1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01.$$

La suite de terme général $0,8^n$ est strictement décroissante, $0,8^{20} \approx 0,012$ et $0,8^{21} \approx 0,009$.

Il faut que $n \geq 21$ pour que $p_n > 0,99$.

2. Pour chaque valeur de k compris entre 1 et 4, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k , calculée à la question 1.c : $p_k = 1 - 0,8^k$.

Le dé n'est pas pipé donc chaque face a la même probabilité de sortie égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité de crever le ballon est :

$$\frac{1}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,4096.$$

3. a. $f_1 = 0,29$; $f_2 = 0,245$; $f_3 = 0,26$ et $f_4 = 0,205$.

$$\text{b. Alors } d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4} \right)^2 = 0,00375.$$

c. On constate que $d^2 < D_9$. On peut considérer, au risque de 10%, que le dé n'est pas pipé.

EXERCICE 965

1. a. La probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche est égale à $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$.

b. La probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages est égale à $4 \times \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$.

2. a. La probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche est égale à $\left(\frac{4}{6} \right)^3 \times \frac{2}{6} = \frac{8}{81}$.

b. La probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages est égale à $4 \times \frac{8}{81} = \frac{32}{81}$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ a. } P_1 &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, & P_2 &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \\ P_3 &= \left(\frac{2}{3} \right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}, & P_n &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \times \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{b. } S_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

EXERCICE 966

1. a. D'après l'énoncé $p(G_1) = 0,5$
 $p_{G_1}(G_2) = 0,6$ et $p_{P_1}(G_2) = 0,3$
 $p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(G_2 \cap P_1) = 0,45$.
 b. $p(P_2) = 1 - p(G_2) = 0,55$.
2. a. $p_{G_n}(P_{n+1}) = 0,4$ et $p_{P_n}(G_{n+1}) = 0,3$
 b. $p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + p(G_{n+1} \cap P_n)$
 $= p_{G_n}(G_{n+1}) \times p(G_n) + p_{P_n}(G_{n+1}) \times p(P_n)$
 d'où $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n$.
 $p(P_{n+1}) = p(P_{n+1} \cap G_n) + p(P_{n+1} \cap P_n)$
 $= p_{P_n}(P_{n+1}) \times p(P_n) + p_{G_n}(P_{n+1}) \times p(G_n)$
 d'où $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$.
3. a. $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = v_n$
 La suite (v_n) est constante de terme général égal à $v_1 = x_1 + y_1 = 1$.
 b. $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 1,2x_n - 0,9y_n$
 $= 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$
 La suite (w_n) est géométrique de raison $0,3$ et de premier terme $w_1 = 0,5$
 On en déduit alors que $w_n = 0,5(0,3)^{n-1}$.
4. a. D'après la question 3. $y_n = 1 - x_n$ et
 $4x_n - 3y_n = 0,5(0,3)^{n-1}$
 On en déduit alors que $x_n = \frac{3}{7} + \frac{0,5}{7} \times (0,3)^{n-1}$
 b. $0 < 0,3 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^{n-1} = 0$
 d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7}$.

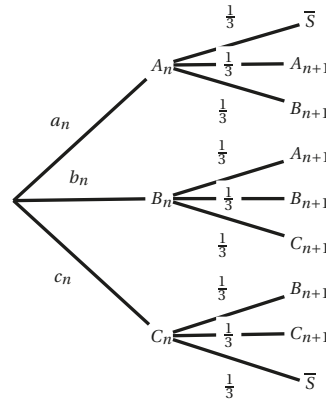
EXERCICE 967

Partie A

1. $(-1; 1)$: non car $x < 0$ ce qui n'est pas possible;
 $(10; 0)$: oui par exemple en choisissant 10 fois la valeur 0 pour y ;
 $(2; 4)$: non car $y > 2$;
 $(10; 2)$: oui par exemple en choisissant dans cet ordre 8 fois la valeur 0 puis deux fois la valeur 1 pour y .
2. On remplace dans l'algorithme la ligne :
 Afficher « la position de Tom est » $(x; y)$
 par :
 Si $y < -1$ ou $y > 1$
 alors Afficher « Tom est tombé »
 sinon Afficher « Tom a réussi la traversée »
 Fin du si

Partie B

1. Au départ, Tom se trouve à l'origine O donc son ordonnée est 0; donc l'événement B_0 est réalisé :
 $a_0 = 0, b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
2. On représente sur un arbre pondéré le passage de l'état n à l'état $n+1$; une branche vers le haut signifie que le nombre choisi au hasard est -1 , une branche du milieu signifie que le nombre est 0 et une branche vers le bas signifie que ce nombre vaut 1.



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\
 a_{n+1} &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n}{3}
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
 &= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{et } c_{n+1} = P(C_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{b_n + c_n}{3}$$

3. $P(A_1) = a_1 = \frac{a_0 + b_0}{3} = \frac{1}{3}$;
 $P(B_1) = b_1 = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$;
 $P(C_1) = c_1 = \frac{b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$.
4. Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements si l'ordonnée y de sa position vaut $-1, 0$ ou 1 , autrement dit dans le cas de l'événement $A_2 \cup B_2 \cup C_2$. Les trois événements A_2, B_2 et C_2 sont incompatibles donc $P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2)$.
 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9}$;

$$b_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3};$$

$$c_2 = \frac{b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$P(A_2 \cup B_2 \cup C_2) = P(A_2) + P(B_2) + P(C_2) \\ = a_2 + b_2 + c_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est égale à $\frac{7}{9}$.

5. Pour la même raison que dans la question précédente, la probabilité que Tom traverse le pont est

$$P(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}) = P(A_{10}) + P(B_{10}) + P(C_{10}) \\ = a_{10} + b_{10} + c_{10} \\ \approx 0,137497 \text{ d'après le tableau.}$$

La probabilité que Tom traverse le pont est égale à 0,137 à 0,001 près.

EXERCICE 968

$$1. P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} \quad P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{15}{28}.$$

$$2. P(X = 10) = P(A) = \frac{3}{28} \quad P(X = 2) = P(B) = \frac{10}{28}$$

$$P(X = -5) = P(C) = \frac{15}{28} \quad E(X) = -\frac{25}{28} \approx -0,89.$$

En jouant un grand nombre de partie, un joueur perdra en moyenne 0,89 € par partie.

3. La probabilité cherchée est

$$p = 5 \times \left(\frac{3}{28}\right)^4 \times \left(1 - \frac{3}{28}\right) \approx 0,00059.$$

EXERCICE 969

1. a. Une suite u arithmétique si la boule A est sortie de l'urne U_1 , la probabilité est donc égale à $\frac{1}{2}$.

b. Dans le cas présent, une suite sera convergente si elle est géométrique et de raison $\frac{1}{2}$, la probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.

c. u_4 sera pair si la suite u est géométrique de raison 2, la probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.

2. La probabilité cherchée est égale à $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. a. Il y a quatre suites arithmétiques :

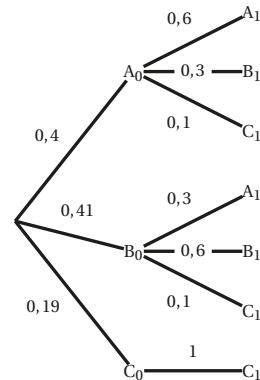
- $u_n = 3 + \frac{n}{2}$ alors $u_4 = 5$
- $u_n = 5 + \frac{n}{2}$ alors $u_4 = 7$
- $u_n = 3 + 2n$ alors $u_4 = 11$
- $u_n = 5 + 2n$ alors $u_4 = 13$

x_i	5	-4	-6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b. $E(X) = 0.$

EXERCICE 970

1.



2. a. On a $p_1 = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1)$
 $= 0,4 \times 0,6 + 0,41 \times 0,6 = 0,363.$

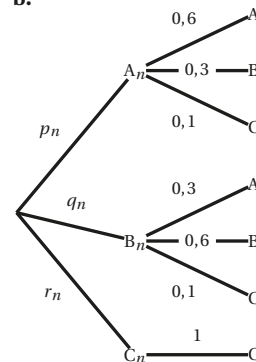
De même on calcule :

$$q_1 = p(A_0 \cap B_1) + p(B_0 \cap B_1) \\ = 0,4 \times 0,3 + 0,41 \times 0,6 = 0,12 + 0,3246 = 0,366.$$

$$\text{Et } r_1 = p(A_0 \cap C_1) + p(B_0 \cap C_1) + p(C_0 \cap C_1) \\ = 0,4 \times 0,1 + 0,41 \times 0,1 + 0,19 \times 1 = 0,271.$$

On vérifie que $0,363 + 0,366 + 0,271 = 1.$

b.



En reprenant les deux premières branches en remplaçant A par A_n (avec une probabilité p_n d'y arriver) et B par B_n (avec une probabilité q_n d'y arriver), on obtient :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n$$

$$q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n$$

3. a. $S_n = q_n + p_n$ donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= q_{n+1} + p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n + 0,6p_n + 0,3q_n \\ &= 0,9q_n + 0,9p_n = 0,9(q_n + p_n) = 0,9S_n. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $q_0 + p_0 = 0,81$.

De même $D_n = q_n - p_n$, donc

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= q_{n+1} - p_{n+1} \\ &= 0,3p_n + 0,6q_n - (0,6p_n + 0,3q_n) \\ &= 0,3(q_n - p_n) = 0,3D_n. \end{aligned}$$

Donc (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 de premier terme $q_0 - p_0 = 0,01$.

b. On sait que $S_n = (0,9)^n \cdot S_0 = (0,9)^n \times 0,81$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$
(car $-1 < 0,9 < 1$).

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0$.

c.

$$\text{On a : } \begin{cases} S_n = q_n + p_n = 0,81 \cdot (0,9)^n \\ D_n = q_n - p_n = 0,01 \cdot (0,3)^n \end{cases}$$

On en déduit par différence et par somme :

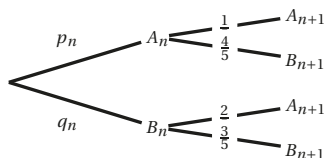
$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{2}(S_n - D_n) \\ q_n = \frac{1}{2}(S_n + D_n) \end{cases}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$.

D'après la loi des probabilités totales on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$.

Cela signifie qu'à longue échéance il n'y aura plus que des plantes du type C (ce qui semble normal puisque seules celles-ci se remplacent, alors que celles du type A et B se raréfient.)

EXERCICE 971



1. a. D'après l'énoncé

$$p_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5} \text{ et } p_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{5}.$$

$$\text{b. } p(A_{n+1} \cap A_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) = \frac{1}{5}p_n$$

$$p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) = \frac{2}{5}q_n.$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n)$$

d'autre part B_n étant l'événement contraire de A_n ,

on en déduit que $q_n = 1 - p_n$

On en déduit alors que :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}p_n = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{1}{15} \\ &= -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison

$$q = -\frac{1}{5} \text{ et de premier terme } u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$3. \quad u_n = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$-1 < q < 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$$

On en déduit alors que (p_n) tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers l'infini.

A long terme, la probabilité que Julie dépasse son forfait se stabilisera à $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 972

$$1. \quad p(X=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

L'affirmation est VRAIE.

$$\begin{aligned} 2. \quad \sum_{k=0}^n P(X=k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

L'affirmation est donc FAUSSE.

$$3. \quad P(X=n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2} \times P(X=n). \text{ L'affirmation est donc FAUSSE.}$$

$$4. \quad \text{D'après la question 2. } P(X \leq n-1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{d'autre part } P(X \geq n) = 1 - P(X \leq n-1)$$

$$\text{d'où } P(X \geq n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

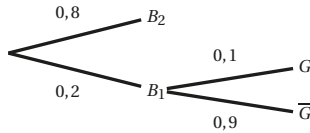
$$\text{comme } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

L'affirmation est donc FAUSSE.

EXERCICE 973

Soit B_i l'événement « le timbre à i bandes de phos-

phore » et G l'événement « le timbre à une bande à gauche ».



- $p_1 = P(B_2) + P(B_1 \cap \overline{G}) = 0,8 + 0,2 \times 0,9 = 0,98$. L'affirmation est VRAIE.
- $p_2 = \frac{P(B)}{p_1} = \frac{0,8}{0,98} = \frac{40}{49}$. L'affirmation est FAUSSE.
- Pour avoir 5 bandes, il faut deux timbres à 2 bandes et un timbre à 1 bande.
Il y a trois façons de choisir le timbre à une bande (le premier, le deuxième ou le troisième)
d'où $p_3 = 3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$.
L'affirmation est donc FAUSSE.
- La probabilité d'avoir au moins 5 bandes est égale à $p_4 = 0,384 + 0,8^3 = 0,896$.
« Avoir au plus 4 bandes » est l'événement contraire de « au moins 5 bandes ».
La probabilité d'avoir au plus 4 bandes est donc égale à $1 - 0,896 = 0,104$. L'affirmation est donc FAUSSE.

EXERCICE 974

- $p_1 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$.
 - $p_2 = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$.
 - $p_3 = p_1 + p_2 = \frac{8}{15}$.
 - $p_4 = 1 - p_3 = \frac{7}{15}$.
 - Les tirages dans les deux urnes sont indépendants donc $p(R) = p_1 \times \frac{4}{10} = \frac{2}{75}$.
 - Les trois boules sont de même couleur si elles sont toutes noires ou toutes rouges, la probabilité cherchée est donc égale à $p(\overline{D}) = \frac{2}{75} + p_2 \times \frac{6}{10} = \frac{23}{75}$.
 - $p(D) = 1 - \frac{23}{75} = \frac{52}{75}$
- $$p(B \cap D) = \left(1 - \frac{1}{15}\right) \times \frac{4}{10} = \frac{28}{75}$$
- d'où $p_D(B) = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

EXERCICE 975

Partie A

- On peut établir un arbre de probabilités, en notant B_i la boule du $i^{\text{ème}}$ tirage est blanche et R_i la boule du $i^{\text{ème}}$ tirage est rouge
alors $p(E_1) = p(B_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{36}$.
- $p(E_2) = p(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{10}{81}$
 $p(E_3) = p(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$
la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages est égale à
 $p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1085}{2916}$.
- $p = \frac{p(E_3)}{p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)} = \frac{80}{729} \times \frac{2916}{1085} = \frac{64}{217}$.

Partie B

- $p_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
- $p_n > 0,99 \iff \left(\frac{4}{9}\right)^n < 0,01$

La suite de terme générale $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ est décroissante,
 $\left(\frac{4}{9}\right)^5 \approx 0,017$ et $\left(\frac{4}{9}\right)^6 \approx 0,0077$
On en déduit qu'il faut prendre $n \geq 6$.

EXERCICE 976

- $p(A_2) = \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$
 $p(A_2) = \frac{1}{15} \iff n^2 + 3n - 28 = 0$
l'équation admet deux solutions :
 $n_1 = 4 > 0$ et $n_2 = -7 < 0$
On en déduit que $n = 4$.
- $p(A_0) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
 $p(A_1) = 1 - p(A_0) - p(A_2) = \frac{8}{15}$.
 -

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$

- Il n'y a plus de boules blanches dans l'urne d'où $p_{A_2}(B_0) = 1$
On en déduit alors que $p(B_0 \cap A_2) = p(A_2) = \frac{1}{15}$.

$$p_{A_1}(B_0) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$\text{d'où } p(B_0 \cap A_1) = \frac{8}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{75}$$

$$p_{A_0}(B_0) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{d'où } p(B_0 \cap A_0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(B_0) = p(B_0 \cap A_0) + p(B_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_2) = \frac{41}{75}.$$

$$\text{b. } p(B_2) = p(A_0 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{75}.$$

$$\text{c. } p(B_1) = 1 - p(B_0) - p(B_2) = \frac{32}{75}.$$

EXERCICE 977

$$1. \text{ a. } p(R) = \frac{3}{n+7}; \text{ b. } p(B) = \frac{4}{n+7}; \text{ c. } p(V) = \frac{n}{n+7}.$$

$$2. \text{ a. } X \text{ prend les valeurs } 28; 0; 20; 10; 12.$$

b.

x_i	28	0	20	10	12
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{n+7}$	$\frac{4}{n+7}$	$\frac{3n}{(n+7)^2}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\frac{n^2}{(n+7)^2}$

$$\begin{aligned} \text{c. } E(X) &= \frac{84}{n+7} + \frac{12n^2 + 100n}{(n+7)^2} \\ &= \frac{12(n^2 + 14n + 49) + 16n}{(n+7)^2} \\ &= 12 + 16 \frac{n}{(n+7)^2}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ La fonction } f \text{ est dérivable sur } [0; 10],$$

$$f'(x) = \frac{7-x}{(x+7)^3}.$$

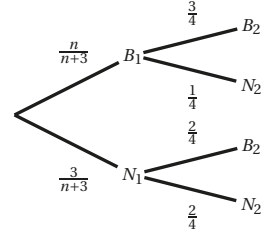
x	0	7	10
$f'(x)$	+	0	-
f			

$$4. \text{ D'après la question précédente, } E(X) \text{ est maximale pour } n = 7.$$

$$\text{On a alors } E(X) = 12 + \frac{16}{28} = \frac{88}{7}.$$

EXERCICE 978

1.



a. Les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ, si les boules tirées dans les deux urnes sont de la même couleur d'où

$$p(A) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right).$$

b. $p(A)$ tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. L'urne U_2 contient une seule boule blanche si on tire une boule noire de U_1 et une blanche de U_2

$$\text{d'où } p(B) = p(N_1 \cap B_2) = \frac{6}{4(n+3)}.$$

3. a. Un joueur mise 20 € et gagne au maximum $2n$ €, donc si $n < 10$ il perdra de l'argent et si $n = 10$ il ne perdra rien mais ne gagnera rien non plus. Il n'a donc aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

b.

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

$$\text{c. } E(X) = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)}.$$

$$\text{d. } E(X) > 0 \iff 3n^2 - 62n - 240 > 0$$

Ce polynôme admet deux racines distinctes $-\frac{10}{3}$ et 24.

Sachant que $n > 10$, d'après la règle du signe d'un trinôme du second degré, on en déduit que

$$E(X) > 0 \iff n > 24$$

Ainsi le jeu est favorable au joueur dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 979

1. a. Pour tout réel $x \neq 1$,

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

b. Pour tout x réel $P'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

d'autre part, pour tout réel $x \neq 1$,

$$\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

On en déduit que pour tout réel $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

- 2. a.** Un élément de Ω est un nombre à vingt chiffres (0 ou 1). Chaque chiffre ayant deux possibilités on en déduit qu'il y a 2^{20} éléments dans Ω .

b. $P(X = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$

On en déduit alors

$$E(X) = \sum_{n=0}^{20} nP(X = n)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \\ &= \frac{20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{21} - 21 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \\ &= 4 \left(1 - \frac{11}{2^{20}}\right) \approx 3,9999. \end{aligned}$$

EXERCICE 980

- 1.** En utilisant un arbre de probabilité, on obtient :

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 100) &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30} \\ \bullet P(X = 15) &= 3 \times \frac{4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{9}{30} \\ \bullet P(X = 4) &= 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{15}{30} \\ \bullet P(X = 0) &= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{30} \end{aligned}$$

On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

- 2.** $E(X) = \frac{59}{6} < 10$. Le jeu n'est donc pas favorable au joueur.
- 3.** • Si l'organisateur augmente la mise de 1 €, il gagnera en moyenne 1,17 € par partie.
- Si l'organisateur diminue chaque gain de 1 €, l'espérance devient égale à 9, il gagnera donc en moyenne 1 € par partie.

La solution première solution est donc la plus rentable pour l'organisateur.

EXERCICE 981

- 1.** En utilisant un arbre de probabilités, on obtient :

$$\begin{aligned} \bullet P(X = -10) &= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{15} \\ \bullet P(X = 5) &= 3 \times \frac{8 \times 7 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{15}{15} \\ \bullet P(X = 20) &= 3 \times \frac{2 \times 1 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

$$E(X) = -1.$$

- 2. a.** Les valeurs possibles pour Y sont données par le tableau suivant :

Partie 2 \ Partie 1	-10	5	20
-10	-20	-5	10
5	-5	10	25
20	10	25	40

$$Y \in \{-20; -5; 10; 25; 40\}.$$

- b.** Les deux tirages étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y = 10) &= 2 \times P(X = 20) \times P(X = -10) \\ &\quad + P(X = 5) \times P(X = 5) = \frac{63}{225}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{c.} \quad P(Y = -20) = P(X = -10) \times P(X = -10) = \frac{49}{225}$$

$$P(Y = -5) = 2 \times P(X = -10) \times P(X = 5) = \frac{98}{225}$$

$$P(Y = 25) = 2 \times P(X = 20) \times P(X = 5) = \frac{14}{225}$$

$$P(Y = 40) = P(X = 20) \times P(X = 20) = \frac{1}{225}$$

On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1.

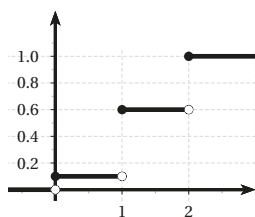
d. $E(Y) = -2$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 168.$$

EXERCICE 982

- 1. a.**

x	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$x \geq 2$
$F(x)$	0	0,1	0,6	1



b. $E(X) = 1,3$.

2. a. Les deux événements sont indépendants d'où

$$P(C_1 \cap E) = 0,1 \times 0,7 = 0,07.$$

b. $P_{C_2}(E) = 1 - (0,7)^2 - (0,3)^2 = 0,42$

$$P(C_2 \cap E) = P(C_2) \times P_{C_2}(E) = 0,21.$$

c. $P(E) = P(C_1 \cap E) + P(C_2 \cap E) = 0,28$

3. a.

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,384	0,42	0,196

b. $E(Y) = 0,812$.

EXERCICE 983

1. On a $1 \leq X \leq 9$.

2. a. Soit $1 \leq i \leq 8$

Si $(X = i)$ cela veut dire que la boule est dans le $i^{\text{ème}}$ tiroir ce qui correspond à l'événement B_i .

b. Si $(X = 9)$:

soit la boule dans le 9^e tiroir (événements B_9)

soit elle n'y est pas alors elle est dans le 10^e tiroir (événements B_{10}).

Donc $(X = 9)$ est la réunion des événements B_9 et B_{10} .

c. Pour $1 \leq i \leq 8$ la probabilité $p_i = \frac{1}{10}$.

D'après la question précédente $p(X = 9) = \frac{2}{10}$.

d. $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+18}{10} = \frac{54}{10} = 5,4$.

EXERCICE 984

1. On peut établir un tableau à double entrée (voir en fin d'exercice), ce qui nous permet de dénombrer toutes les possibilités. Il y a 36 couples possibles.

2. a. Les sommes multiples de 5 sont les sommes égales à 5 ou à 10.

D'après le tableau précédent, il y a 4 façons d'obtenir une somme égale à 5 et 3 façons d'obtenir une somme égale à 10

d'où $p_1 = \frac{7}{36}$.

b. $p_2 = \frac{15}{36}$.

3. $P(X = 3) = p_1 = \frac{7}{36}$

$$P(X = 2) = p_2 = \frac{15}{36}$$

$$P(X = -4) = 1 - p_1 - p_2 = \frac{14}{36}$$

$E(X) = -\frac{5}{36} < 0$. Le jeu n'est donc pas avantageux pour le joueur.

Dé vert	1	2	3	4	5	6
Dé rouge						
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

EXERCICE 985

1. Chaque boule a deux cases possibles soit pour les trois boules : $2 \times 2 \times 2$ possibilités.

Il y a donc 2^3 rangements possibles.

2. Il n'y a qu'une façon d'avoir toutes les boules dans la case A d'où $p(E) = \frac{1}{8}$.

Il n'y a qu'une façon de ne pas avoir de boule dans la case A, c'est de les avoir toutes dans la case B d'où

$$p(B) = \frac{1}{8}.$$

$$p(G) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

3. a.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b. $E(X) = 1,5$.**EXERCICE 986****Partie A**

1. Le joueur peut effectuer au maximum 3 lancers pour avoir la garantie de ne pas être ruiné.

2. a. Il y a 8 issues possibles :

PPP de somme 1

PPF, PFP et FPP de somme 3

PFF, FPF et FFP de somme 5

FFF de somme 7.

b.

Somme s_i	1	3	5	7
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Il y a un seul tirage qui le mène à la ruine : PPPP. Le joueur s'arrête alors au 4^e lancer et il y a $2^4 = 16$ tirages de 4 lancers possibles, la probabilité que le joueur soit ruiné est donc égale à $\frac{1}{16}$.**Partie B**1. Le joueur disposera au maximum de $6+8=14$ € à la fin du jeu. Il obtient le maximum avec le tirage FFFFFFFF.

2. Dans ce cas, le joueur s'arrête au bout de 6 lancers, avec le tirage PPPPPP.

Ce qui correspond à 1 tirage parmi les 2^6 possibles.donc la probabilité que le joueur ne gagne aucun lancer est égale à $\frac{1}{64}$.

3. a. tirages menant à la ruine :

• PPPPPP

• FPPPPPPP, PFPPPPPP, PPFPPPPP, PPPFPPPP, PPPFPPPP, PPPPFPPP

b. Il suffit de calculer la probabilité d'obtenir un des tirages de la question précédente.

La probabilité d'obtenir PPPPPP est égale à $\frac{1}{64}$ Pour les six autres tirages, comme il y a 2^8 tirages différents de huit lancers et que chacun ne peut arriver qu'une fois, on en déduit que

$$P(S=0) = \frac{1}{64} + \frac{6}{256} = \frac{5}{128}.$$

4. a. Pour une somme finale égale à 10 €, il suffit de gagner 6 fois et de perdre 2 fois.

Un tirage possible serait donc PPFPPPPF.

Pour dénombrer les tirages menant à une telle somme, il faut dénombrer les tirages comportant exactement deux P.

Pour le premier P, il y a 8 choix possibles, pour le deuxième P, il n'y a plus que 7 choix possibles soit $8 \times 7 = 56$ positions.

Mais l'ordre n'ayant aucune importance, chaque position a été comptée deux fois.

Finalement, 28 tirages mènent à la somme de 10 €.

b. On ne peut pas obtenir 13 €, car on part d'une somme paire et on effectue un nombre pair de lancers.

En partant de 6 €, il faudrait gagner 7 €, ce qui est impossible avec un nombre pair de lancers puisque cela reviendrait à gagner pour 7 lancers et perdre pour les lancers restants, lancers en nombre impair.

Donc $P(S=13) = 0$.

c. En raisonnant comme à la question précédente, on peut démontrer que la somme obtenue sera toujours paire.

La probabilité d'obtenir une somme paire est donc égale à 1.

Partie CIl y a un tirage de N lancers qui mènent à la ruine, de probabilité $\frac{1}{2^N}$.Les autres tirages menant à la ruine comportent $N+2$ lancers, avec 1 Face et $N+1$ Pile.Il y a donc N tirages car le Face ne peut apparaître au rang $N+1$ ou $N+2$ (le joueur serait déjà ruiné)

La probabilité d'être ruiné est donc égale à

$$\frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^{N+2}} = \frac{4+N}{2^{N+2}}.$$

EXERCICE 987

On peut établir un arbre de probabilité illustrant la si-

tuation. On en déduit alors :

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

$$P(X=1) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{183}{500}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{47}{100}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

$$E(X) = \frac{803}{500} = 1,606, \sigma(X) \approx 0,7528 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

EXERCICE 988

1. $p(A_1) = \frac{20 \times 1}{20 \times 19} = \frac{1}{19}.$

2. a. A_1 est réalisé, il ne reste donc que 18 enveloppes

$$\text{d'où } p_{A_1}(A_2) = \frac{18 \times 1}{18 \times 17} = \frac{1}{17}$$

$$\text{b. } p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) = \frac{1}{323}.$$

3. a. $\overline{A_1}$ est réalisé, le premier a obtenu deux sujets d'examineurs différents, il ne reste donc plus que 16 premiers choix permettant d'obtenir un second sujet du même examinateur, d'où

$$p_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{16 \times 1}{18 \times 17} = \frac{8}{153}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } p(A_2) &= p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap \overline{A_1}) \\ &= \frac{1}{323} + \frac{8}{153} \times \frac{18}{19} = \frac{1}{19}, \end{aligned}$$

$$p(A_2 \cup A_1) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_2 \cap A_1) = \frac{33}{323}.$$

4. a. $P(X=2) = p(A_2 \cap A_1) = \frac{1}{323}$

$$P(X=0) = 1 - p(A_2 \cup A_1) = \frac{290}{323}$$

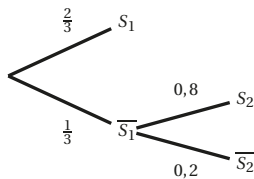
$$P(X=1) = p(A_1) + p(A_2) - 2 \times p(A_2 \cap A_1) = \frac{32}{323}.$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

$$\text{b. } E(X) = \frac{2}{19} \approx 0,105.$$

EXERCICE 989

Soit S_1 l'événement « le premier service est réussi » et S_2 l'événement « le second service est réussi ».



1. a. $P_{S_1}(\overline{S_2}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$

b. $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$

c. Soit $P(R)$ la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie :

$$P(R) = 1 - P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = \frac{14}{15}.$$

2. a. $p_{10} = \left(\frac{14}{15}\right)^{10} = 0,502 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

b. Il y a dix façons de rater une mise en jeu sur les 10 effectuées,

$$\text{d'où } p_9 = 10 \times \frac{1}{15} \times \left(\frac{14}{15}\right)^9 = 0,358 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

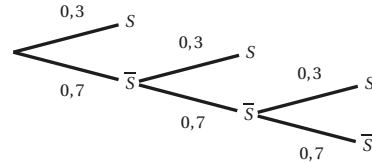
c.

x_i	100	90	-50
$p(X = x_i)$	0,502	0,358	0,14

$E(X) = 75,42$, le joueur gagnera en moyenne 75,42 euros.

EXERCICE 990

1. Soit S l'événement « Math obtient le service sans attente ».



2. X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

3.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,3	0,21	0,147

4. $E(X) = 1,161$, Math obtiendra le service en moyenne 1,161 tentative.

5. $p(X=0) = 0,7^6$ $p(X=1) = 0,3$

$$p(X=2) = 0,7 \times 0,3 \quad p(X=3) = 0,7^2 \times 0,3$$

$$p(X=4) = 0,7^3 \times 0,3 \quad p(X=5) = 0,7^4 \times 0,3$$

$$p(X=6) = 0,7^5 \times 0,3$$

EXERCICE 991

1. Les événements sont indépendants, le 6 n'apparaît pas aux $k-1$ premiers lancers et apparaît au lancer k d'où $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \times p.$

2. $P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k (1-p)^{i-1} p = p \left(\sum_{k=0}^{i-1} (1-p)^i \right)$
 D'autre part $\sum_{k=0}^{i-1} (1-p)^i = \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^k}{p}$
 d'où $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$
3. D'après la question précédente $P(X > k) = (1-p)^k$
 $P_{X>k}(X > n+k) = \frac{P(X > k \text{ et } X > n+k)}{P(X > k)}$
 $= \frac{P(X > n+k)}{P(X > k)}$
 $= \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^k} = (1-p)^n = P(X > n).$
4. $\sum_{k=1}^N k(1-p)^{k-1} p = -p \left(\sum_{k=1}^N (1-p)^k \right)'$
 et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N (1-p)^k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1-(1-p)^{N+1}}{p} = \frac{1}{p}$
 car $0 < 1-p < 1$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} (1-p)^{N+1} = 0$
 On en déduit : $E(X) = -p \times \left(\frac{1}{p} \right)' = -p \times \left(-\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p}.$
5. a. $P(X=3) = 0,8^2 \times 0,2 = 0,128.$
 b. $P(X \leq 4) = 1 - 0,8^4 = 0,5904.$ Il y a 59% de chance d'obtenir le 6 avant le 5^e lancer.
 c. $E(X) = \frac{1}{0,2} = 5.$ En moyenne, on obtiendra le 6 au 5^e lancer.

EXERCICE 992

1. a. Les trois boules de la même couleur, elles sont donc vertes, la probabilité est égale à $\frac{1}{20}$
 b. Il y a 6 façons de ranger trois boules différentes, la probabilité cherchée est égale à $6 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{6}{20}.$
 c. Deux boules et deux seulement de la même couleur est de probabilité égale à $1 - \frac{1}{20} - \frac{6}{20} = \frac{13}{20}.$
2. a. $X = 0$ si les trois boules sont vertes donc $P(X=0) = \frac{1}{20}$
 $X = 5$ si une boule est rouge et les deux autres vertes, il y a 3 façons de combiner les trois boules, d'où $P(X=5) = 3 \times \frac{2 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{6}{20}$
 $X = 10$ si deux boules est rouge et une verte, il y a 3 façons de combiner les trois boules, d'où $P(X=10) = 3 \times \frac{2 \times 1 \times 3}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{20}$
 $X = a$ si une boule est noire et les deux autres vertes, il y a 3 façons de combiner les trois boules, d'où

$$P(X=a) = 3 \times \frac{1 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{20}$$

$X = 5 + a$ si une boule est rouge, une noire et une verte, il y a 6 façons de combiner les trois boules, d'où $P(X=5+a) = \frac{6}{20}$
 $X = 10 + a$ si une boule est noire et les deux autres rouges, il y a 3 façons de combiner les trois boules, d'où $P(X=10+a) = 3 \times \frac{1 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{20}$
 On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

b. $E(X) = \frac{a+10}{2}$
 c. $E(X) = 20 \iff a+10 = 40$ soit $a = 30.$

EXERCICE 993**Partie A**

E est l'événement « la flèche tombe dans la zone blanche ». $P(E) = 1 - P(S) = \frac{3}{4}.$

Partie B

1. a. Un peu long mais très simple.
 b. $P(SESE) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{256}$
 $P(EESS) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{256}$
 c. Il y a 6 branches de l'arbre qui permettent d'obtenir deux succès. La probabilité d'obtenir deux succès est donc égale à $6 \times \frac{9}{256} = \frac{27}{128}.$
2. $P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$
 $P(X=1) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256}$
 $P(X=2) = \frac{108}{256}$
 $P(X=3) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{12}{256}$
 $P(X=4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

Partie C

1. $P(Y=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$
 $P(Y=20) = \left(\frac{1}{4}\right)^{20}.$
2. a. La probabilité recherchée est égale à $\left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$
 b. En modifiant l'ordre des S et E, sans en changer le nombre, on ne modifiera pas le résultat.
 c. Pour connaître la probabilité $P(Y=7)$, il nous

manque le nombre de façons d'obtenir 7 succès en jouant 20 fois.

$$\text{d. } P(Y = 7) = \binom{20}{7} \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{13}.$$

$$\text{e. } \binom{20}{7} = 77\,520$$

$$\text{f. } P(Y = 7) = 77\,520 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{13} = 0,1124 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

EXERCICE 994

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de papiers marqués par Julien.

$$\text{a. } P(X = 0) = 0,4^8 = 0,0007 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$\text{b. } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,9993 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$\text{c. } P(X = 6) = \binom{8}{6} \times 0,6^6 \times 0,4^2 = 0,2090 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

2. Si Julien lance n fois le ballon, $P(X \geq 1) = 1 - 0,4^n$

$$P(X \geq 1) \geq 0,999 \iff 0,4^n \leq 0,001$$

La suite de terme générale $0,4^n$ est décroissante, $0,4^7 \approx 0,0016$ et $0,4^8 \approx 0,0007$

On en déduit que Julien doit effectuer au moins 8 lancers.

EXERCICE 995

Partie A : Listes

1. Soit N le nombre de mots de trois lettres choisies parmi les lettres a, b, c et d : $n = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.
2. Pour chaque élément de la liste, il y a n possibilités, il y a alors pour p éléments n^p p-uplets différents.
3. a. Il y a sept jours, soit 7 possibilités pour chaque boulangeries. D'après la question précédente, il y a 7^5 nombre de manières d'attribuer un jour de fermeture.
- b. Il y a 26^2 initiales différentes soit 666. S'il y a plus de 666 personnes, au moins deux auront les mêmes initiales.

Partie B

1. Il y a $N = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$ classements possibles.
2. Il y a n choix pour premier élément, $n - 1$ pour le second, $n - 2$ pour le troisième, $\dots$, $n - p + 1$ pour

le $p^{\text{ième}}$ élément. Il y a donc au total $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)$ p-uplets.

$$\text{3. } \frac{n!}{(n - p)!} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1)(n - p)!}{(n - p)!} = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - p + 1).$$

$$\text{4. } A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!.$$

5. a. Il y a $A_7^7 - 1$ anagrammes du mot *TIRAGES*.

b. Soit P la probabilité qu'un anagramme du mot commence par A et finisse par E .

Le A et le E étant fixés, il reste donc à choisir 5 lettres parmi 5 soit :

$$P = \frac{5!}{7! - 1} = \frac{120}{5039}.$$

Partie C

1. En supposant les trois boules tirées successivement, il y a $6 \times 5 \times 4$ possibilités. Dans notre cas, les boules sont tirées simultanément, il n'y a donc plus de notion d'ordre, soit 6 fois moins de choix possibles, nous obtenons alors $\frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$ tirages possibles.

2. Nous avons vu dans la partie B qu'un arrangement de p éléments pris parmi n , noté A_p^n correspondaient au nombre de p-uplets à éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Dans le cas d'une combinaison de p éléments pris parmi n , il n'y a plus d'ordre entre les p éléments choisis. Or il y a $n!$ arrangements possible de p éléments pris parmi p . On en déduit alors que $\binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$.

3. a. Déterminons le nombre de tirages possibles : il s'agit d'une combinaison de 6 éléments pris parmi 49, soit $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ grilles différentes.

Une seule grille est gagnante soit

$$p = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7,2 \cdot 10^{-8}.$$

- b. Dans la nouvelle formule, il s'agit de choisir 5 éléments parmi 49 ET 1 élément parmi 10 soit $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19\,068\,840$ grilles différentes. Comme précédemment il n'y a qu'une grille gagnante soit

$$p = \frac{1}{19\,068\,840} \approx 5,2 \cdot 10^{-8}.$$

- c. D'après les résultats obtenus aux deux questions précédentes, il y a encore moins de chance de gagner

au rang 1 dans la nouvelle version.

EXERCICE 996

1. a. Nombre de répartitions possibles des places inoccupées : $N = \binom{32}{4} = 35960$.

b. Les places inoccupées sont réparties dans les 24 autres places,

d'où $p(A) = \frac{\binom{24}{4}}{35960} = \frac{5313}{17980} = 0,295$ à 10^{-3} près
 B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale », il y a donc deux places libres de chaque côté.

$$p(B) = \frac{\binom{16}{2} \times \binom{16}{2}}{35960} = \frac{360}{899} = 0,400 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

2. a. $P(X=0) = \frac{5313}{17980}$

Une place inoccupée au rang R4 : on choisit une place parmi les 8 du rang R4 et 3 parmi les 24 restantes :

$$P(X=1) = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{24}{3}}{35960} = \frac{2024}{4495}$$

Deux places inoccupées au rang R4 : on choisit deux places parmi les 8 du rang R4 et 2 parmi les 24 restantes :

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2} \times \binom{24}{2}}{35960} = \frac{966}{4495}$$

Trois places inoccupées au rang R4 : on choisit trois places parmi les 8 du rang R4 et 1 parmi les 24 restantes :

$$P(X=3) = \frac{\binom{8}{3} \times \binom{24}{1}}{35960} = \frac{168}{4495}$$

Quatre places inoccupées au rang R4 : on choisit les quatre places parmi les 8 du rang R4 :

$$P(X=4) = \frac{\binom{8}{4}}{35960} = \frac{7}{3596}$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

b. $E(X) = 1$.

Il y a en moyenne une place inoccupée au rang R4.

EXERCICE 997**Partie A**

- $p(E \cap S) = p(E) \times p_E(S) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.
- $p(\overline{E} \cap S) = p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(S) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
- $p(S) = p(E \cap S) + p(\overline{E} \cap S) = \frac{7}{12}$.
- $p_S(\overline{E}) = \frac{p(\overline{E} \cap S)}{p(S)} = \frac{1}{7}$.

Partie B

$$1. P(X=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{12}{256}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{108}{256}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

2. Soit p la probabilité recherchée

$$p = P(X=0) \times P(Y \geq 1) + P(X \leq 1) \times P(Y \geq 2) + P(X \leq 2) \times P(Y \geq 3) + P(X \leq 3) \times P(Y=4)$$

$$p = \frac{1}{256} \times \frac{175}{256} + \frac{13}{256} \times \frac{67}{256} + \frac{67}{256} \times \frac{13}{256} + \frac{175}{256} \times \frac{1}{256}$$

$$p = \frac{523}{16384} \approx 0,032 \text{ soit } 3,2\% \text{ de chances que le joueur } B \text{ gagne davantage de parties que le joueur } A.$$

EXERCICE 998

$$1. p(A) = p(+,+) + p(+,-) = \frac{1}{32} + \frac{7}{32} = \frac{1}{4}.$$

$$2. p(B) = p(+,+) + p(-,+) = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} = \frac{1}{8}.$$

$$3. p(A \cap B) = p(+,+) = \frac{1}{32} = p(A) \times p(B)$$

Les deux événements « A atteint la cible » et « B atteint la cible » sont donc indépendants.

4. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tirs ayant atteint la cible.

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) \\ = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{13}{256} \approx 0,05$$

EXERCICE 999

$$1. P(X=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15}{1024}$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{90}{1024}$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024}$$

$$P(X=4) = \binom{5}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{405}{1024}$$

$$P(X=5) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$$

2. a. L'élève met 12 min pour parcourir les 3 km, chaque feu rouge ajoute 1,5 min

$$\text{d'où } T = 12 + 1,5 \times (5 - X) = 19,5 - 1,5X$$

b. $E(X) = 3,75$

$$E(T) = 19,5 - 1,5 \times E(X) = 13,875, \text{ l'élève mettra en moyenne 14 minutes pour se rendre au lycée.}$$

3. a. $E(T) + 6 < 20$, il peut donc espérer être à l'heure à son premier cours.

- b. Il sera en retard s'il rencontre au moins deux feux rouges, c'est-à-dire $X \leq 3$

$$P(X \leq 3) = \frac{376}{1024} \approx 0,367.$$

- c. L'élève se rendra en salle de permanence s'il ne rencontre aucun feu vert. La probabilité qu'il passe sa première heure de cours en salle de permanence est donc égale à $\frac{1}{1024}$.

EXERCICE 1000

$$1. (a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

2. En posant $a = b = 1$, la formule du binôme s'écrit

$$S_0 = \sum_{p=0}^n 1^{n-p} 1^p = 2^n.$$

En posant $a = -1$ et $b = 1$, la formule du binôme s'écrit $0 = (-1+1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p = S_1 - S_2$, d'autre

$$\text{part } S_1 + S_2 = S_0 \text{ donc } S_1 = S_2 = \frac{1}{2} S_0 = 2^{n-1}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (1+x)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p.$

$$((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1} = \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} x^{p-1},$$

en particulier si $x = 1$, on obtient $S = n2^{n-1}$.

EXERCICE 1001

$$1. \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

2. D'après la question précédente

$$\binom{k}{q} = \binom{k-1}{q} + \binom{k-1}{q-1}$$

En remplaçant k par $n+1$, $n, \dots, p+2$ et q par $p+1$,

on obtient les égalités :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

$$\binom{n}{p+1} = \binom{n-1}{p+1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\vdots \\ \binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p}$$

En additionnant membre à membre et simplifiant,

$$\text{on obtient } \binom{n+1}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \sum_{k=p+1}^n \binom{k}{p}$$

$$\text{or } \binom{p+1}{p+1} = 1 = \binom{p}{p} \text{ d'où } \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}.$$

3. D'après la formule du binôme, nous avons :

$$(1+2x)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (2x)^p.$$

D'autre part

$$(1+2x)^n = ((1+x) + x)^n = \binom{n}{p} x^p (1+x)^{n-p} \\ = \sum_{p=0}^n \left(\binom{n}{p} x^p \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} x^k \right).$$

En détaillant cette somme, nous obtenons :

$$\sum_{p=0}^n \left[\binom{n}{p} x^p \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} x^k \right] = \binom{n}{0} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n \right] + \dots + \binom{n}{p} \left[\binom{n-p}{0} + \binom{n-p}{1} x + \binom{n-p}{2} x^2 + \dots + \binom{n-p}{n-p} x^{n-p} \right] + \dots + \binom{n}{n} x^n \left[\binom{0}{0} \right].$$

Dans le premier développement, le coefficient de x^p est égal à $2^p \binom{n}{p}$.

Dans le deuxième développement, le coefficient de x^p

$$\left. \begin{aligned} \text{est égal à } & \left[\binom{n-p}{0} + \binom{1}{n-p}x + \binom{2}{n-p}x^2 + \cdots + \right. \\ & \left. \binom{n-p}{n-p}x^{n-p} \right] = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}. \end{aligned} \right| \quad \text{On en déduit alors : } \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

NOUVEAUX
PROGRAMMES

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES POUR RÉUSSIR SA SPÉCIALITÉ

2^e édition

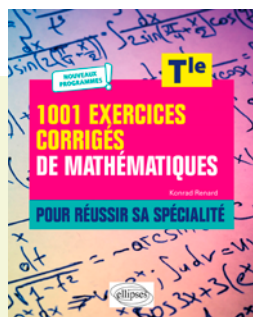
Tout en préparant les élèves à la spécialité Mathématiques de l'épreuve du baccalauréat, cet ouvrage sera utile à tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances dans l'optique d'une poursuite d'études supérieures ayant une composante importante en mathématiques.

Cet ouvrage est un recueil d'exercices allant de la simple application du cours à des exercices difficiles. Il s'articule autour de 5 chapitres.

1. Équations
2. Suites numériques
3. Fonctions
4. Géométrie
5. Probabilités

Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- des sous-chapitres composés d'un bref résumé du cours, d'exercices d'application puis d'exercices d'approfondissement ;
- des exercices pour préparer l'examen de fin d'année (EC), en cas d'abandon de la spécialité ;
- des exercices pour se préparer à la Terminale. Plus difficiles, ils mêlent plusieurs notions ou abordent des thèmes qui ne sont plus au programme de Première mais dont la maîtrise sera un atout pour la poursuite d'études ;
- les corrigés détaillés de tous les exercices.



www.editions-ellipses.fr

