Exos résolus

1re ES

Conseillé par les enseignants

Maths

200 exercices minutés
avec trois niveaux de difficulté

8 interros écrites
sur tout le programme

+ des résumés de cours
les notions indispensables

Tous les corrigés détaillés
avec des conseils de méthode

+ EN CADEAU
Mémento détachable

HACHETTE

Exos résolus

1re ES

Maths

Obligatoire et Option

- Claudine RENARD
- Geneviève ROCHE
- Anne THOMAS

HACHETTE
Éducation

Conception graphique

Couverture : Audrey Izern
Intérieur : Jehanne-Marie Husson
Photo de couverture : ©stock.xchng®vi

Composition, mise en pages et schémas

Christine Bossard, Médiamax

I.S.B.N. 978.2.01.169743.1
www.hachette-education.com

Préface

Ce livre vous propose à vous, élève de 1re ES, plus de 200 exercices qui vont vous permettre d'acquérir, par l'entraînement, toutes les notions du programme. De plus, huit interrogations écrites vous permettront de vous mettre dans les conditions d'un devoir en classe.

Cet ouvrage est découpé en quatorze chapitres (les deux derniers sont consacrés à l'enseignement obligatoire au choix), chacun comprenant :

Un rappel de cours qui vous donne les définitions, les propriétés et les formules essentielles.

De nombreux énoncés d'exercices, répartis en « exercices de contrôle de connaissance » et « exercices d'entraînement ».
Les premiers sont des applications directes du cours ; les seconds, classés par thème, vous permettront d'acquérir les savoir-faire indispensables, ils sont minutés et leur difficulté est signalée par le barème suivant :

★	Exercice de base.
★★	Exercice nécessitant davantage de méthode et de réflexion.
★★★	Exercice plus difficile.

Les solutions détaillées des exercices, rédigées dans un langage simple et rigoureux. Les différentes étapes de raisonnement et de calcul sont exposées avec précision, de nombreuses représentations graphiques visualisent les situations traitées, des explications sur l'utilisation de la calculatrice ou d'un tableur sont fréquemment données.

Le coin des interros détaillées et commentées, indiquant clairement les étapes de leur résolution. Ainsi, lorsque les résultats du corrigé coïncideront avec votre propre solution, vous pourrez aborder sereinement de nouvelles acquisitions.

Nous sommes persuadées que cet ouvrage vous apportera une aide précieuse dans votre travail et vous préparera efficacement à la classe de terminale.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage !

Les auteurs

SOMMAIRE

Algèbre et analyse

Traitement des données et probabilités

Enseignement obligatoire au choix

Le coin des interros

Index des mots-clés

Les pages indiquées en gras sont des pages de rappels de cours.

CALCULATRICES, FONCTIONS ET SUITES

Précisions

I- Calculatrices et fonctions

Cette partie a été construite autour de la fonction $f : x \mapsto -5+3\sqrt{x^2+1}$ et des fonctions $|f-2|$ et $\dfrac{|f-2|}{f+4}$.

Expression

TI-82

Appuyer sur `MODE`

et sélectionner les modes **Func** et **Connected**.

Accéder à l'éditeur de fonctions graphiques :

`Y=`

(le curseur est alors placé à droite de **Y1=**).

Taper la formule :

CASIO GRAPH 65

Accéder au menu **GRAPH** :

`MENU` `GRAPH 5` `EXE`.

Appuyer sur la touche `▶`, le symbole = apparaît et le curseur est placé à droite de **Y1=**.

Taper la formule et valider par `EXE`.

`(-)` `5` `+` `3` `√` `(` `X,θ,T` `x²` `+` `1` `)`

Pour $|f-2|$, taper dans la ligne **Y2=** :

`Abs` `(` `Y` `1` `-` `2` `)`

où **Y1** est obtenu par :

TI-82 : `2nd` `Y-VARS` `1` (**Function**) `1` (**Y1**)

CASIO : `VARS` `F4` (GRPH) `F1` (**Y**)

et la fonction valeur absolue par :

TI-82 : `2nd` `x⁻¹`.

CASIO : `OPTN` `F5` (NUM) `F1` (**Abs**).

Pour $\dfrac{|f-2|}{f+4}$, taper dans la ligne **Y3=** :

Y **2** **÷** **(** **Y** **1** **+** **4** **)**

Copie d'écran CASIO GRAPH 65 :

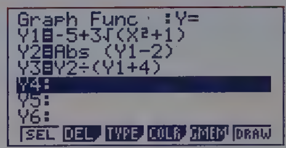


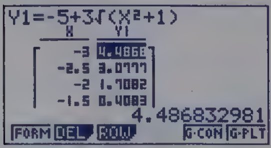
Tableau de valeurs

Pour obtenir le tableau de valeurs de la fonction *f* lorsque la variable varie de – 3 à 3, avec un pas de 0,5 :

TI sélectionner la seule zone de stockage **Y1** (la touche **ENTER** sert de bascule),
ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et le pas avec la commande **TBLSET** :
2nd **TBLSET**,
ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche **▼**,
puis afficher le tableau avec la commande **TABLE** :
2nd **TABLE**.

CASIO accéder à l'écran de tabulation :
MENU **TABLE** **EXE**
puis, après avoir sélectionné la seule zone de stockage **Y1** (**SEL** sert de bascule), ouvrir la fenêtre de réglage des valeurs extrémales de la variable et le pas avec **RANG**,
ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche **▼** (en validant les valeurs modifiées),
revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :
EXIT **TABL** .

Copies d'écran CASIO GRAPH 65 :



Se placer dans la colonne **Y1** *pour lire davantage de chiffres significatifs.*

Courbes

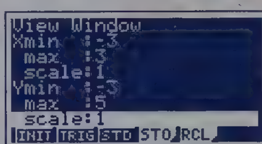
■ Pour obtenir les courbes représentatives de f et de $|f-2|$, avec le cadrage : $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-3 \leqslant y \leqslant 5$, graduations de toutes les unités : accéder à l'éditeur de fonctions graphiques, sélectionner les zones de stockage **Y1** et **Y2**,

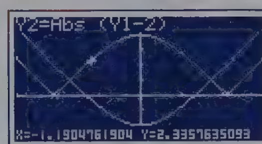
TI ouvrir la fenêtre de cadrage : **WINDOW**,
régler les valeurs des paramètres, afficher le graphique :
GRAPH.

CASIO ouvrir la fenêtre de cadrage : **Shift** **V-WINDOW**,
régler les valeurs des paramètres, revenir à l'éditeur de fonctions et afficher le graphique :
EXIT **DRAW** .

■ Pour lire les coordonnées de points d'une des deux courbes, utiliser la fonction **TRACE** : **TRACE**
(▶ ou ◀ pour se déplacer sur la courbe, ▲ ou ▼ pour changer de courbes).

Copies d'écran CASIO GRAPH 65 :





II- Calculatrices et suites

> Cette partie a été construite autour de la suite explicite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.

Expression

TI-82

Appuyer sur **MODE**,
sélectionner les modes **Seq** et **Dot**.
Appuyer sur **Y=**
(le curseur est alors placé à droite de **Un=**),
taper la formule
(n s'obtient par **2nd** **9**).

CASIO GRAPH 65

Accéder au menu consacré aux suites :
MENU **RECUR** **EXE**
Définir le type « explicite » en appuyant sur **F3** (**TYPE**), puis **F1** (**an**)
Appuyer sur la touche ▶, le symbole **=** apparaît et le curseur est placé à droite de **an=**
Taper la formule et valider par **EXE**
n s'obtient par **F4** (**n**).

Copie d'écran CASIO GRAPH 65 :

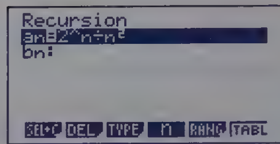


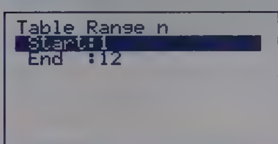
Tableau de valeurs

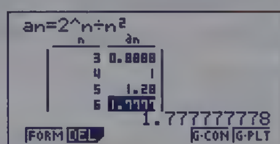
Pour obtenir le tableau des valeurs de u_n lorsque n varie de 1 à 12 :

TI ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et du pas avec la commande **TBLSET** :
2nd **TBLSET**,
ajuster les valeurs de **TblMin** et de **ΔTbl** à 1 en se déplaçant avec la touche ▼,
puis afficher le tableau avec la commande **TABLE** :
2nd **TABLE**.

CASIO ouvrir la fenêtre de réglage des valeurs initiale et finale de n :
F4 (**RANG**),
ajuster les valeurs en se déplaçant avec la touche ▼ (valider toute modification avec **EXE**),
revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :
EXIT (**TABL**).

Copies d'écran CASIO GRAPH 65 :





Se placer dans la colonne **an** *pour lire davantage de chiffres significatifs.*

Représentation graphique

Pour obtenir la représentation graphique des douze premiers termes de la suite (u_n), avec le cadrage $0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 30$ (en prenant une graduation de 5 en 5 sur l'axe vertical pour une meilleure lisibilité) :

TI ouvrir le menu de gestion de l'affichage : **WINDOW**
à la première ligne, **WINDOW** est alors en surbrillance ;
régler les valeurs des paramètres :

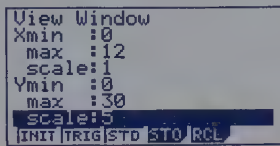
nStart=1	**Xmin=0**	**Ymin=0**
nMin=1	**Xmax=12**	**Ymax=30**
nMax=12	**Xscl=1**	**Yscl=5**

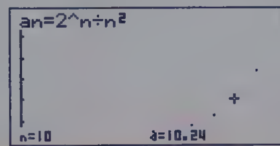
puis remonter à la première ligne avec la touche ▲, mettre **FORMAT** en surbrillance par un appui sur la touche ▶, sélectionner le format **Time** ;
afficher le graphique : **GRAPH**.

CASIO ouvrir la fenêtre de cadrage :
Shift **V-WINDOW**,
régler les valeurs des paramètres (*voir la copie d'écran*),
puis revenir au menu **RECUR** et afficher le graphique :
EXIT **TABL** **G-PLT**.

• Utiliser la fonction **TRACE** et les touches ▶ ou ◀ pour se déplacer sur les points de la représentation graphique et obtenir des valeurs approchées des ordonnées.

Copies d'écran CASIO GRAPH 65 :





Ce qui suit a été construit autour de la suite récurrente (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

Expression

TI Taper **Y=**
(le curseur est alors placé à droite de **Un=**),
entrer la formule
(**2nd** **7** pour **Un-1**).

CASIO Dans le menu **RECUR**, définir le type « explicite » en appuyant sur **F3** (**TYPE**), puis **F2** (**an+1**).
Appuyer sur la touche ▶, le symbole = apparaît ;
taper la formule et valider par **EXE**
(**an** s'obtient par **nan** **an**).

Copie d'écran CASIO GRAPH 65 :

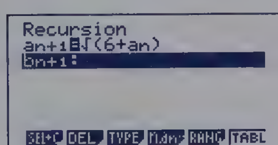


Tableau de valeurs et représentation graphique

Pour obtenir le tableau des valeurs de u_n lorsque n varie de 1 à 12, et la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n), avec le cadrage $-6 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant y \leqslant 5$:

TI ouvrir la fenêtre de réglage de la valeur minimale de la variable et du pas avec la commande **TBLSET**, ajuster les valeurs de **TblMin** à 0 et de **ΔTbl** à 1 en se déplaçant avec la touche ▼ ;

ouvrir le menu de gestion de l'affichage : **WINDOW** ;

CASIO ouvrir la fenêtre de réglage des paramètres de tabulation avec **RANG**, ajuster les valeurs suivantes :

```
Start:1     a0:-4
End:12      anStr:-4
```

en se déplaçant avec la touche ▼ et en validant les valeurs modifiées (l'appui sur la touche **F2** change **a0** en **a1**, utile lorsque le premier terme de la suite étudiée a pour indice 1) ;

TI à la première ligne, **WINDOW** est alors en surbrillance ;

régler les valeurs des paramètres :

UnStart=-4	**Xmin=-6**	**Ymin=0**
***n*Start=1**	**Xmax=5**	**Ymax=5**
	Xscl=1	**Yscl=1**

puis remonter à la première ligne avec la touche ▲, mettre **FORMAT** en surbrillance par un appui sur la touche ▶, sélectionner le format **Web** ;

afficher le tableau :

2nd **TABLE**,

afficher la représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{6+x}$ et de la droite d'équation $y = x$:

GRAPH.

Utiliser la fonction **TRACE** puis la touche ▶ pour obtenir une visualisation du comportement de la suite (u_n).

CASIO revenir à l'écran de tabulation puis afficher le tableau :

EXIT **TABL**

ouvrir la fenêtre de cadrage :

Shift **V-WINDOW**

régler les valeurs des paramètres :

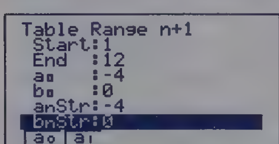
Xmin:-6	**Ymin:**
max:5	**max:5**
scale:1	**scale:1**

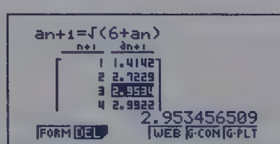
revenir au menu **RECUR** et afficher la représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{6+x}$ et de la droite d'équation $y = x$:

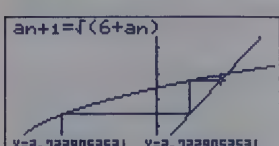
EXIT **TABL** **WEB** .

Utiliser la fonction **TRACE** puis la touche de validation pour obtenir une visualisation du comportement de la suite (u_n).

Copies d'écran CASIO GRAPH 65 :







Se placer dans la colonne **an+1** *pour lire davantage de chiffres significatifs.*

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Rappels de cours

I- Ensemble de définition

Définition

L'ensemble de définition d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels qui admettent une image par f ; on note usuellement $\mathcal{D}_f$ cet ensemble.

Exemples

- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$ (car tout nombre réel admet un cube).
- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}_+$ (car les seuls réels qui admettent une racine carrée sont les réels positifs ou zéro).

II- Courbe représentative

Définition

Le plan étant rapporté à un repère, la courbe représentative d'une fonction f est la courbe d'équation :

$$y = f(x)$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, x décrivant l'ensemble de définition de f.

Propriété

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction, alors toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe $\mathscr{C}$ en au plus un point.

III- Parité, imparité

Définitions

Soient f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- f est **paire** si et seulement si, pour tout x de $\mathscr{D}_f$:

$$-x \in \mathscr{D}_f \quad \textbf{et} \quad f(-x) = f(x).$$

- f est **impaire** si et seulement si, pour tout x de $\mathscr{D}_f$:

$$-x \in \mathscr{D}_f \quad \textbf{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Propriétés

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction **paire** admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
- La courbe représentative d'une fonction **impaire** admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

IV- Sens de variation

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\textbf{si} \quad x \leqslant x', \quad \textbf{alors} \quad f(x) \leqslant f(x')$$

(f conserve les inégalités larges).

- f est **décroissante** sur I si et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\textbf{si} \quad x \leqslant x', \quad \textbf{alors} \quad f(x) \geqslant f(x')$$

(f renverse les inégalités larges).

- f est **strictement croissante** sur I si et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\textbf{si} \quad x < x', \quad \textbf{alors} \quad f(x) < f(x')$$

(f conserve les inégalités strictes).

- f est **strictement décroissante** sur I si et seulement si, pour tous x et x' de I :

$$\textbf{si} \quad x < x', \quad \textbf{alors} \quad f(x) > f(x')$$

(f renverse les inégalités strictes).

V- Minorant, majorant d'une fonction

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Définitions

- Un réel m est un **minorant** de f sur I si et seulement si :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } I, \quad m \leqslant f(x).$$

- Un réel M est un **majorant** de f sur I si et seulement si :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } I, \quad f(x) \leqslant M.$$

- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } I, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } I, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Propriétés

- **Le minimum de** f sur I, s'il existe, est un minorant m de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = m.$$

- **Le maximum de** f sur I, s'il existe, est un majorant M de f sur I tel que l'on puisse trouver au moins un élément x_0 de I qui vérifie :

$$f(x_0) = M.$$

VI- Opérations sur les fonctions

Définitions

Soient u, v des fonctions et λ un nombre réel.

$u + \lambda$	**est la fonction**	$x \mapsto u(x) + \lambda$.
$u + v$	**est la fonction**	$x \mapsto u(x) + v(x)$.
$u \times v$	**est la fonction**	$x \mapsto u(x) \times v(x)$.

On note souvent pour uv pour $u \times v$.

Propriétés

Soient u, v des fonctions et λ un nombre réel.

- u et $u + \lambda$ ont le même sens de variation.
- Si u et v sont croissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est croissante sur I.

Si u et v sont décroissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est décroissante sur I.

Si u et v sont strictement croissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est strictement croissante sur I.

Si u et v sont strictement décroissantes sur un intervalle I, alors la fonction $u + v$ est strictement décroissante sur I.

- Si $\lambda > 0$, alors λu a le même sens de variation que u.

Si $\lambda < 0$, alors λu et u ont des sens de variation contraires.

EXERCICES de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 22)

Sachant que la fonction f admet 2 pour maximum sur $\mathbb{R}$, que peut-on en déduire concernant :

a. la fonction $3f - 5$?

b. la fonction $-f$?

2

(Corrigé p. 22)

Soit f une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donner le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

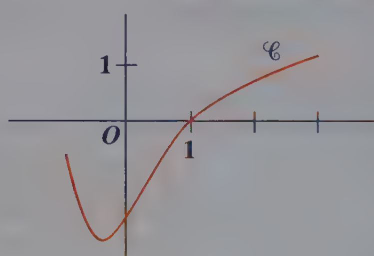
a. $-3f$; **b.** $f + 2$; **c.** $2f + 1$.

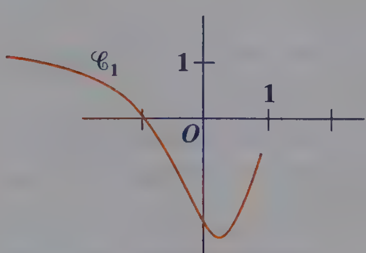
3

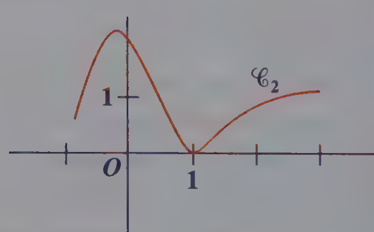
(Corrigé p. 22)

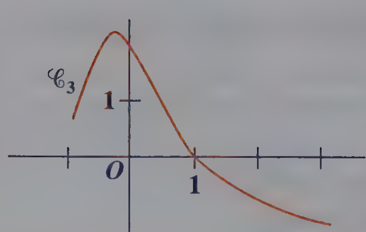
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;3]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-contre.

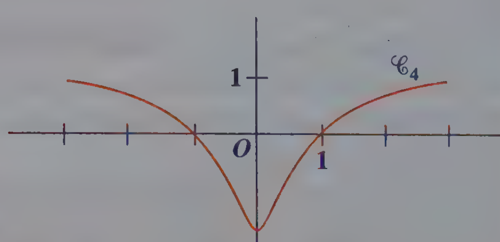
Associer chacune des fonctions $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto f(-x)$ et $x \mapsto f(|x|)$ à sa courbe représentative à choisir parmi $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.











Ensemble de définition

4 ★ 15 min (Corrigé p. 23)

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de chaque fonction f proposée.

1° $x \mapsto \dfrac{2x-5}{x^2+1}$.

2° $x \mapsto \dfrac{3x-7}{x^2-9}$.

3° $x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)(x+5)}$.

4° $x \mapsto \sqrt{x+\pi}$.

5° $x \mapsto \sqrt{(x+1)(3x-1)}$.

6° $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+1}$.

Parité, imparité

5 ★ 10 min (Corrigé p. 24)

Étudier la parité de chaque fonction f proposée.

1° $x \mapsto \dfrac{2x^2-5}{x^2+2}$.

2° $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$.

3° $x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

Sens de variation

6 ★★ 10 min (Corrigé p. 24)

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 3x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

7 ★★ 10 min (Corrigé p. 25)

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$.

CHAPITRE 1

Tableau de variation, maximum, minimum

8 ★ 5 min (Corrigé p. 25)

Soit f une fonction.

Dire pourquoi le tableau de variation de f proposé est faux dans chacun des deux cas suivants.

1°

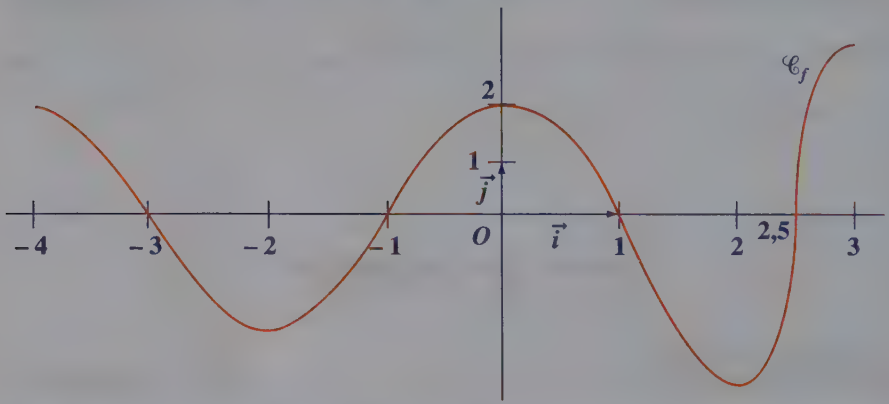
x	0		5
f	$\sqrt{3}$	↘	2

2° f est paire et :

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
f		↘		↗		↘		↗	

9 ★ 10 min (Corrigé p. 25)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$ ayant, dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique suivante :



1° **a.** Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$.

b. Résumer les résultats obtenus dans un tableau.

2° Dresser le tableau de variation de f.

10 ★ 5 min (Corrigé p. 26)

Déterminer le minimum de la fonction $f : x \mapsto 5 + \sqrt{x^2 + 1}$.

11 ★ 10 min (Corrigé p. 26)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^2 + 4x + 5$.

1° Pour tout réel x, factoriser $f(x) - 1$.

2° En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

12 ★★ 10 min (Corrigé p. 26)

Soit f la fonction : $x \mapsto 3 - 2x^2(x-1)^2$.

Justifier que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de ce maximum ainsi que les réels en lesquels il est atteint.

13 ★★ 15 min (Corrigé p. 27)

On considère une fonction f, définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		0		4
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

1° Préciser le maximum de f sur chacun des intervalles :

a. $[-3\,;0]$;

b. $[-3\,;4]$;

c. $[0\,;1]$;

d. $[-2\,;1]$.

2° Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions :

a. $f + 2$;

b. $-3f$.

3° Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10 - 3f(x)}}$ est définie sur $[-3\,;4]$.

CHAPITRE 1

CORRIGÉS des exercices

1 La fonction f admet 2 pour maximum sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) \leqslant 2 \quad (1),$$

et il existe un réel x_0 tel que : $\quad f(x_0) = 2 \quad (2)$.

a. D'après (1) : pour tout réel x, $3f(x) - 5 \leqslant 3 \times 2 - 5$,

autrement dit : pour tout réel x, $(3f - 5)(x) \leqslant 1$,

donc 1 est un majorant de la fonction $3f - 5$ sur $\mathbb{R}$;

de plus, d'après (2) : $(3f - 5)(x_0) = 3f(x_0) - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$,

donc **la fonction $3f - 5$ admet 1 pour maximum sur $\mathbb{R}$.**

b. D'après (1) : pour tout réel x, $-f(x) \geqslant -2$,

donc -2 est un minorant de la fonction $-f$;

de plus, d'après (2) : $-f(x_0) = -2$,

donc **la fonction $-f$ admet -2 pour minimum sur $\mathbb{R}$.**

2 La fonction f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient en application directe du cours :

a. **$-3f$ est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ ($-3 < 0$, donc $-3f$ et f ont des sens de variation contraires) ;

b. **$f + 2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,** car f et $f + 2$ ont le même sens de variation ;

c. **$2f + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,** car $2f + 1$ a le même sens de variation que $2f$, qui a le même sens de variation que f (on aurait également pu remarquer que $2f + 1$ est la composée de f, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto 2x + 1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

3 • Les courbes représentatives de f et $x \mapsto -f(x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc :

$$\mathscr{C}_3 \textbf{ est la courbe représentative de } x \mapsto -f(x).$$

• La courbe représentative de $x \mapsto |f(x)|$ est la partie de la réunion des courbes représentatives de f et $-f$ dont les points ont une ordonnée positive ou nulle, donc :

$$\mathscr{C}_2 \textbf{ est la courbe représentative de } x \mapsto |f(x)|.$$

• Les courbes représentatives de f et $x \mapsto f(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc : **$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de $x \mapsto f(-x)$.**

• La fonction $x \mapsto f(|x|)$ est paire, et les points de sa courbe représentative qui ont une abscisse positive sont ceux de $\mathscr{C}$, donc :

$$\mathscr{C}_4 \textbf{ est la courbe représentative de } x \mapsto f(|x|).$$

4 1° $f : x \mapsto \dfrac{2x-5}{x^2+1}$. Pour tout réel x : $x^2 + 1 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$, autrement dit : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2° $f : x \mapsto \dfrac{3x-7}{x^2-9}$. $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x^2 - 9 \neq 0$,

or :

$$x^2 - 9 = 0 \iff (x+3)(x-3) = 0$$
$$\iff x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3,$$

donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;\ 3\}$.

Pour tous réels a et b :
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)(x+5)}$. $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$(x^2-1)(x+5) \neq 0,$$

or : $(x^2-1)(x+5) = 0 \iff (x^2-1) = 0$ ou $(x+5) = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -5$,

donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\ ;\ -1\ ;\ 1\}$.

4° $f : x \mapsto \sqrt{x+\pi}$. $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x + \pi \geqslant 0$,

donc : $\mathcal{D}_f = [-\pi\ ;\ +\infty[$.

5° $f : x \mapsto \sqrt{(x+1)(3x-1)}$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $(x+1)(3x-1) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau de signes : $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

6° $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+1}$. $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 + 2x + 1 \geqslant 0,$$

or : pour tout réel x, $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$,

donc : pour tout réel x, $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$,

ce qui implique que f est définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

EXERCICES

CORRIGÉS

5 **1°** $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-5}{x^2+2}$. Pour tout réel x : $x^2+2 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est bien évidemment symétrique par rapport à 0, et, pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2-5}{(-x)^2+2} = \frac{2x^2-5}{x^2+2} = f(x),$$

ce qui prouve que **f est paire.**

2° $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$. $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des réels x tels que : $x^2-4 \neq 0$,

or : $x^2-4=0 \iff (x+2)(x-2)=0$

$\iff x=-2$ ou $x=2$,

donc : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$ et :

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x)\,;$$

par conséquent, **f est impaire.**

3° $f : x \mapsto x^2-4x+5$. f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(1)=2$, $f(-1)=10$, ce qui implique :

- $f(-1) \neq f(1)$, donc f n'est pas paire,
- $f(-1) \neq -f(1)$, donc f n'est pas impaire.

Finalement, **f n'est ni paire, ni impaire.**

Pour prouver qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit de trouver un réel x_0 tel que : $f(-x_0) \neq f(x_0)$.

6 $f : x \mapsto 2x^2+3x$. Soient x et x' des réels tels que $0 \leqslant x < x'$, on a :

$$\begin{aligned} f(x')-f(x) &= (2x'^2+3x')-(2x^2+3x) \\ &= 2(x'^2-x^2)+3(x'-x) \\ &= 2(x'-x)(x'+x)+3(x'-x) \\ &= (x'-x)(2(x'+x)+3) \\ &= (x'-x)(2x+2x'+3), \end{aligned}$$

or : $2x+2x'+3>0$ (car x et x' sont positifs)

et $x'-x>0$ (car $x<x'$),

donc : $f(x')-f(x)>0$, c'est-à-dire : $f(x)<f(x')$.

On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

si $x<x'$, alors $f(x)<f(x')$,

autrement dit : **la fonction $f : x \mapsto 2x^2+3x$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.**

Pour comparer deux nombres, penser à étudier le signe de leur différence.

$f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$. Soient x et x' des réels tels que $x < x' < 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{2x'+1}{x'-1} - \frac{2x+1}{x-1} \\ &= \frac{(2x'+1)(x-1)-(2x+1)(x'-1)}{(x'-1)(x-1)} \\ &= \frac{(2x'x+x-2x'-1)-(2xx'+x'-2x-1)}{(x'-1)(x-1)} \\ &= \frac{3(x-x')}{(x'-1)(x-1)}, \end{aligned}$$

or : $(x'-1)(x-1) > 0$ (car $x'-1 < 0$ et $x-1 < 0$) et $x - x' < 0$ (car $x < x'$), donc : $f(x') - f(x) < 0$, c'est-à-dire : $f(x) > f(x')$.
On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;1[$: si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$,

autrement dit : **la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.**

1° $\sqrt{3} < 2$, donc la fonction ne peut décroître de $\sqrt{3}$ à 2, ce qui prouve que le tableau de variation de f proposé est faux.
2° Si la fonction f est paire et si de plus, elle est décroissante sur $[0\,;3]$, alors f doit être croissante sur $[-3\,;0]$, ce qui est en contradiction avec le tableau de variation de f proposé.

1° a. D'après le graphique, on a : $f(-3) = f(-1) = f(1) = f(2{,}5) = 0$;
si $x \in [-4\,;-3[$, alors $f(x) > 0$; si $x \in]-3\,;-1[$, alors $f(x) < 0$;
si $x \in]-1\,;1[$, alors $f(x) > 0$; si $x \in]1\,;2{,}5[$, alors $f(x) < 0$
et si $x \in]2{,}5\,;3]$, alors $f(x) > 0$.
b. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant.

x	-4		-3		-1		1		$2{,}5$		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2° Le tableau de variation de f est :

x	-4		-2		0		2		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

10 La fonction $f : x \mapsto 5+\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$x^2 \geqslant 0,$$

donc : $$x^2+1 \geqslant 1,$$

donc : $$\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{1},$$

donc : $$\sqrt{x^2+1} \geqslant 1,$$

donc : $$5+\sqrt{x^2+1} \geqslant 5+1,$$

autrement dit, 6 est un minorant de f :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) \geqslant 6.$$

Deux réels positifs ou nuls sont rangés comme leurs racines carrées.

De plus, 6 est clairement une valeur prise par f :

$$f(0)=5+\sqrt{0^2+1}=5+1=6.$$

En résumé : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f(x) \geqslant 6, \\ f(0)=6, \end{cases}$

ce qui prouve que **6 est le minimum de la fonction** $\boldsymbol{f : x \mapsto 5+\sqrt{x^2+1}}$.

11 $f : x \mapsto x^2+4x+5$.

1° Pour tout réel x,

$\boldsymbol{f(x)-1} = x^2+4x+4 = x^2+2\times 2\times x+2^2 = \boldsymbol{(x+2)^2}$.

2° D'après **1°** : pour tout réel x, $f(x) = (x+2)^2+1$,

or : $(x+2)^2 \geqslant 0$,

donc : pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$,

autrement dit, 1 est un minorant de f (sur $\mathbb{R}$).

Pour tous réels a et b : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

De plus, clairement : $f(-2) = 1$, donc 1 est une valeur prise par f.

Des relations : $\begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f(x) \geqslant 1, \\ f(-2)=1, \end{cases}$

on déduit que **1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.**

12 $f : x \mapsto 3-2x^2(x-1)^2$.

Pour tout réel x : $$-2x^2(x-1)^2 \leqslant 0,$$

donc : $$3-2x^2(x-1)^2 \leqslant 3,$$

donc : $$f(x) \leqslant 3,$$

autrement dit, 3 est un majorant de f.

De plus, pour tout réel x : $f(x)=3 \Leftrightarrow 3-2x^2(x-1)^2=3$

$$\Leftrightarrow -2x^2(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=0 \quad \text{ou} \quad (x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=1.$$

Ce qui prouve que 3 est non seulement un majorant de f mais aussi le maximum de f, et que les seuls réels en lesquels f prend la valeur 3 sont 0 et 1.
f admet 3 pour maximum sur $\mathbb{R}$, et les réels en lesquels f atteint son maximum sont 0 et 3.

13 1° D'après le tableau de variation de f :
a. le maximum de f sur $[-3 ; 0]$ est **2** ;
b. le maximum de f sur $[-3 ; 4]$ est **3** ;
c. le maximum de f sur $[0 ; 1]$ est **$f(1)$** ;
d. le maximum de f sur $[-2 ; 1]$ est **le plus grand des deux nombres $f(-2)$ ou $f(1)$.**
2° a. D'après le cours, les fonctions $f + 2$ et f ont le même sens de variation.
Le tableau de variation de la fonction $f + 2$:

x	-3		0		4
$f+2$	4	↘	1	↗	5

b. D'après le cours, les fonctions $-3f$ et f ont des sens de variation contraires.
Le tableau de variation de la fonction $-3f$:

x	-3		0		4
$-3f$	-6	↗	3	↘	-9

3° D'après le tableau de variation de la fonction $-3f$, le minimum de $-3f$ est -9, donc, pour tout x de $[-3 ; 4]$:

$$-3f(x) \geqslant -9,$$

donc :
$$10 - 3f(x) \geqslant 1,$$

et *a fortiori* :
$$10 - 3f(x) > 0,$$

ce qui permet d'affirmer que **la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-3f(x)}}$ est définie sur $[-3 ; 4]$.**

CHAPITRE 2

FONCTIONS USUELLES

Rappels de cours

Remarque préalable

Pour les tracés de courbes, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

I- Fonctions affines

Définition

Une fonction affine est une fonction qui peut s'écrire $x \mapsto ax + b$, a et b étant des nombres réels ; elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation

- Si $a > 0$, alors $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative

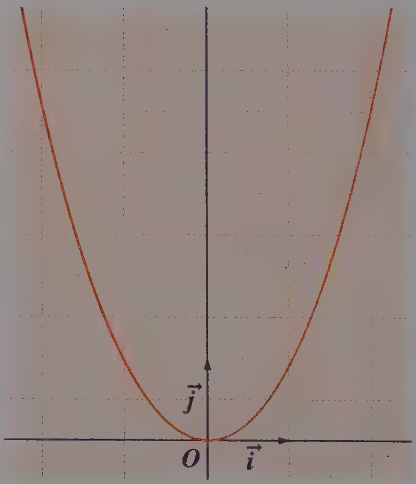
La courbe représentative de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

II- Fonction carré

- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est paire, strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

- Sa courbe représentative est une parabole de sommet O, d'axe de symétrie la droite des ordonnées ; elle admet une tangente horizontale en O.

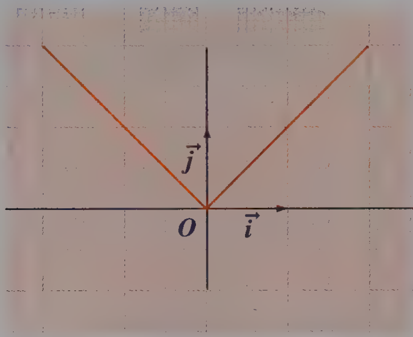


III- Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} |x| = -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ |x| = x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Elle est paire et pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$.

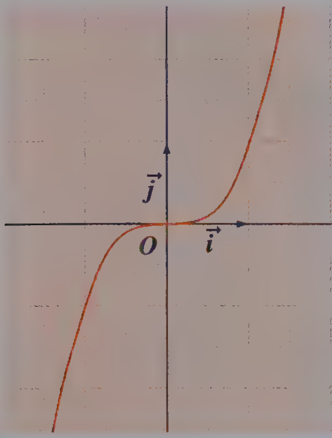


IV- Fonction cube

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Sa courbe représentative admet O pour centre de symétrie et admet une tangente horizontale en ce point.



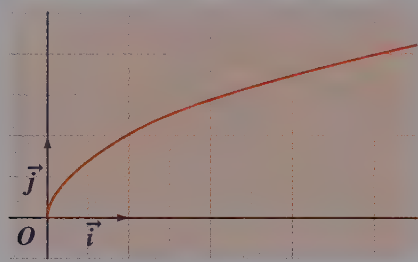
V- Fonction racine carrée

■ La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition $[0\,;+\infty[$.

Elle est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	$+\infty$

■ Sa courbe représentative est une demi-parabole ; la droite des ordonnées est tangente à la courbe au point O.



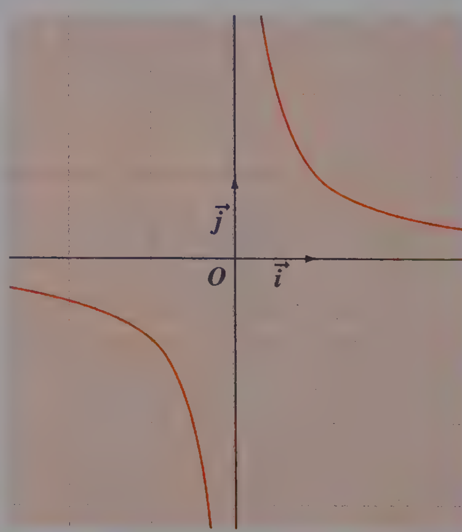
VI- Fonction inverse

■ La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

Elle est impaire et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

■ Sa courbe représentative est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites des abscisses et des ordonnées.



EXERCICES

de contrôle des connaissances

EXERCICES

1 (Corrigé p. 34)

Préciser le sens de variation de chaque fonction f proposée.

1° $x \mapsto \dfrac{3-x}{2}$.

2° $x \mapsto -x^3$.

3° $x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

4° $x \mapsto 2x^2 - 7$.

2 (Corrigé p. 34)

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction $x \mapsto x^2$ sur chacun des intervalles suivants :

a. $[2 ; 3]$;

b. $[-3 ; -2]$;

c. $[-3 ; 2]$.

3 (Corrigé p. 35)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = -8$.

4 (Corrigé p. 35)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer (rapidement !) la courbe représentative de chacune des fonctions proposées.

1° $f_1 : x \mapsto |x| - 1$.

2° $f_2 : x \mapsto |x - 1|$.

3° $f_3 : x \mapsto 1 - |x|$.

EXERCICES d'entraînement

Sauf mention du contraire :
- le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal ;
- on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans ce repère.

Sens de variation des fonctions usuelles

5 ★ 5 min (Corrigé p. 36)

Résoudre l'équation (E) : $x + x^3 + x^5 = 3$.

6 ★ 15 min (Corrigé p. 36)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1° Démontrer que f est paire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

2° Démontrer, en revenant à la définition, que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3° Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty ; 0]$?

7 ★★ 20 min (Corrigé p. 36)

On considère une fonction f, définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		3
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	2

1° Justifier que f ne prend que des valeurs strictement positives.

2° Justifier que :

a. la fonction $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur $[1 ; 3]$;

b. la fonction $\sqrt{f}$ est décroissante sur $[1 ; 3]$;

c. la fonction f^2 est croissante sur $[-2 ; 1]$.

3° Dresser le tableau de variation sur $[-2 ; 3]$ de chacune des fonctions :

a. $\dfrac{1}{f}$; **b.** $\sqrt{f}$; **c.** f^2.

Fonctions associées aux fonctions usuelles

8 ★ 10 min (Corrigé p. 37)

Dresser le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a. $f_1 : x \mapsto x^3 - 2$;

b. $f_2 : x \mapsto (x-2)^3$;

c. $f_3 : x \mapsto -x^3$.

On notera $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes représentatives respectives des fonctions f_1, f_2 et f_3.

9 ★ ★ ★ 20 min (Corrigé p. 38)

Préciser le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto |x+2| + |x-1|$ et tracer $\mathscr{C}_f$.

Résolutions graphiques

10 ★ 10 min (Corrigé p. 39)

Résoudre graphiquement le système Σ d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x} \\ y = x - 2. \end{cases}$$

11 ★ ★ 15 min (Corrigé p. 40)

Résoudre graphiquement l'inéquation (I) :

$$x^2 - 4x - 2 \geqslant \frac{-6}{x-1}.$$

EXERCICES

CORRIGÉS des exercices

1 1° $f :\ x \mapsto \dfrac{3-x}{2}$ est la fonction affine $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$, et $-\dfrac{1}{2} < 0$,

donc : **f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

2° La fonction $f : x \mapsto -x^3$ est l'opposée de la fonction cube, celle-ci étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$; il vient que **f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

3° $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

En notant u la fonction inverse, on peut écrire : $f = 2u$; $2 > 0$, donc f et u ont le même sens de variation, c'est-à-dire que :

f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

4° $f : x \mapsto 2x^2 - 7$ a le même sens de variation que $x \mapsto 2x^2$ qui a le même sens de variation que $x \mapsto x^2$ (car $2 > 0$), donc :
f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Comme composée de la fonction carré par la fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$x \mapsto 2x - 7$,
la fonction f a le même sens de variation que la fonction carré.

2 **a.** La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sur $[2\ ;\ 3]$; sur ce segment, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint son minimum en 2 et son maximum en 3, ce qui implique que **le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[2\ ;\ 3]$ sont respectivement 4 et 9.**

b. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ donc sur $[-3\ ;\ -2]$; sur ce segment, la fonction $x \mapsto x^2$ atteint son minimum en -2 et son maximum en -3, ce qui implique que **le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3\ ;\ -2]$ sont respectivement 4 et 9.**

c. • Pour tout x de $[-3\ ;\ 0]$:

$$0^2 \leqslant x^2 \leqslant (-3)^2$$

(car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-3\ ;\ 0]$),
c'est-à-dire : $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

• Pour tout x de $[0\ ;\ 2]$:

$$0 \leqslant x^2 \leqslant (2)^2$$

(car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\ ;\ 2]$),
c'est-à-dire : $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

Attention !
La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3\ ;\ 2]$.

On en déduit que : pour tout x de $[-3\,;2]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$,
les valeurs 0 et 9 étant prises respectivement en 0 et -3 par la fonction carré.
Le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3\,;2]$ sont respectivement 0 et 9.

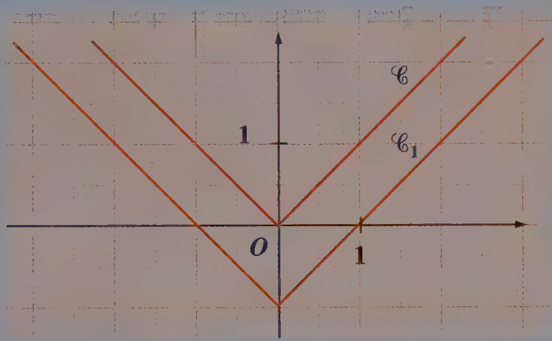
3 $(-2)^3 = -8$, et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :
-2 est la seule solution de l'équation $x^3 = -8$.

Si une fonction est strictement monotone, elle ne peut prendre une certaine valeur m qu'au plus une fois.

4 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto |x|$.

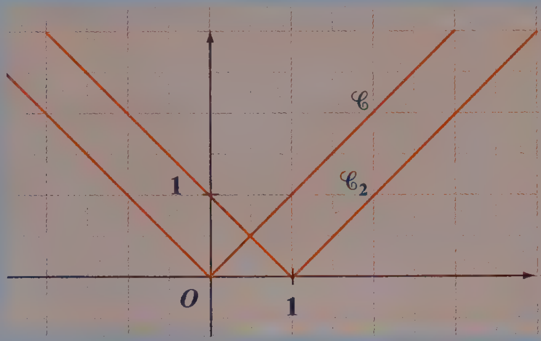
1°

La courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de $f_1 : x \mapsto |x| - 1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{j}$.



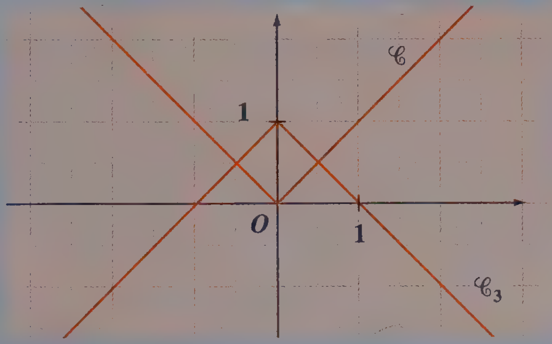
2°

La courbe représentative $\mathscr{C}_2$ de $f_2 : x \mapsto |x - 1|$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.



3°

La courbe représentative $\mathscr{C}_3$ de $f_3 : x \mapsto 1 - |x|$ est l'image par la translation de vecteur $\vec{j}$ de la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.



EXERCICES
CORRIGÉS
INTERROS p. 224

5 $(E) : x + x^3 + x^5 = 3$. 1 est une solution évidente de l'équation (E).
De plus, comme somme des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^5$, toutes strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x + x^3 + x^5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f ne prend la valeur 3 qu'en 1 ; en effet, $f(1) = 3$ et, pour tout réel x : si $x < 1$, alors $f(x) < f(1)$,
si $x > 1$, alors $f(x) > f(1)$,
donc : si $x \neq 1$, alors $f(x) \neq 3$.
On peut donc conclure que **1 est la seule solution de (E).**

6 **1°** $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x),$$

ce qui prouve que f est paire.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite des ordonnées pour axe de symétrie.

> $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, donc, évidemment, si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $-x \in \mathscr{D}_f$.

2° Soient a et b des réels tels que : $0 \leqslant a < b$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a $a^2 < b^2$,
d'où : $a^2 + 1 < b^2 + 1$,
la fonction racine carrée étant aussi strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (et les réels $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ étant positifs) : $\sqrt{a^2+1} < \sqrt{b^2+1}$,
c'est-à-dire : $f(a) < f(b)$.

> f est la composée de $x \mapsto x^2 + 1$, strictement croissante et à valeurs positives sur $[0 ; +\infty[$, par $x \mapsto \sqrt{x}$, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On a ainsi démontré que **f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**
3° f est paire et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc :

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

7

x	-2	1	3
f	1 ↗	5	↘ 2

1° D'après le tableau de variation de f, le minimum de f est 1, donc :
pour tout x de $[-2 ; 3]$, $f(x) \geqslant 1$,
ce qui implique : pour tout x de $[-2 ; 3]$, $f(x) > 0$,
autrement dit, **f ne prend que des valeurs strictement positives.**

2° a. La fonction $\dfrac{1}{f}$ est la composée :

• de la fonction f, décroissante et à valeurs strictement positives sur $[1 ; 3]$,

> La composée de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.

• par la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, décroissante sur $]0\ ;+\infty[$,

donc : $\dfrac{1}{f}$ **est croissante sur [1 ; 3].**

b. La fonction $\sqrt{f}$ est la composée :

• de la fonction f, décroissante et à valeurs positives sur [1 ; 3],

• par la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, croissante sur $]0\ ;+\infty[$,

donc : $\sqrt{f}$ **est décroissante sur [1 ; 3].**

> La composée de deux fonctions monotones de sens de variation contraires est décroissante.

c. La fonction f^2 est la composée :

• de la fonction f, croissante et à valeurs positives sur [– 2 ; 1],

• par la fonction carré $x \mapsto x^2$, croissante sur $[0\ ;+\infty[$,

donc : f^2 **est croissante sur [– 2 ; 1].**

3° a. On sait déjà que $\dfrac{1}{f}$ est croissante sur [1 ; 3] ; on démontre de manière analogue qu'elle est décroissante sur [– 2 ; 1]. Pour achever de compléter son tableau de variation sur [– 2 ; 3], il suffit de calculer l'image par $\dfrac{1}{f}$ de chacun des nombres – 2, 1 et 3, c'est-à-dire l'inverse de chacun des nombres 1, 5 et 2.

x	-2		1		3
$\dfrac{1}{f}$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{5}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$

b. et c. De même, on obtient :

x	-2		1		3
$\sqrt{f}$	1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

x	-2		1		3
f^2	1	$\nearrow$	25	$\searrow$	4

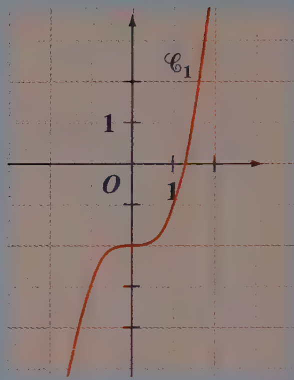
8 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3 se déduit de celui de la fonction cube :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a. $f_1 : x \mapsto x^3 - 2$.

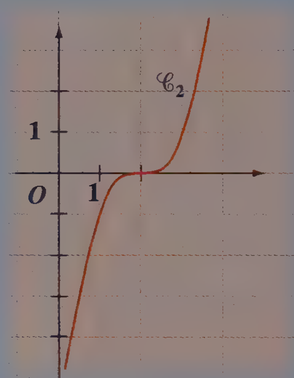
x	$-\infty$		$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

b. $f_2 : x \mapsto (x-2)^3$.

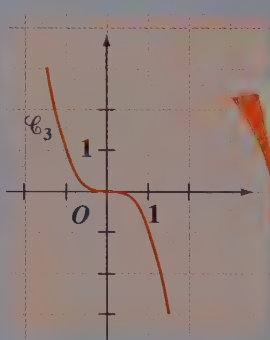
x	$-\infty$		$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.

c. $f_3 : x \mapsto -x^3$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_3(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$



$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_3$ sont symétriques par rapport à la droite des abscisses.

Une fonction f et son opposée $-f$ ont des sens de variation contraires.

11 La fonction $f : x \mapsto |x+2| + |x-1|$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Transformons l'écriture de $f(x)$ en utilisant la définition de la valeur absolue d'un nombre réel : pour tout réel X, $\begin{cases} |X| = -X & \text{si } X \leqslant 0\,; \\ |X| = X & \text{si } X \geqslant 0. \end{cases}$

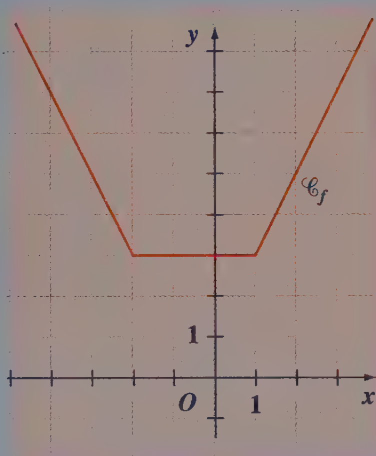
L'écriture de $f(x)$ « sans barres de valeur absolue » dépend donc du signe de $x+2$ et de $x-1$, c'est-à-dire de la position de x par rapport à -2 et 1.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ 1	$+\infty$
signe de $x+2$	$-$ $\quad$ 0	$+$	$+$
signe de $x-1$	$-$	$-$ $\quad$ 0	$+$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$f(x)$	$-2x-1$	3	$2x+1$

Du tableau précédent, on déduit que, pour tout réel x :

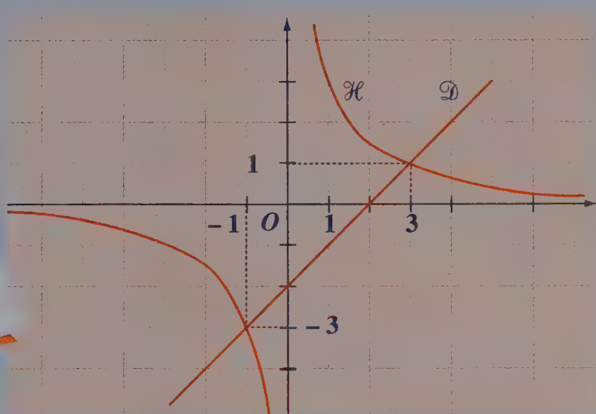
$$\begin{cases} f(x) = -2x-1 & \text{si } x \leqslant -2\,; \\ f(x) = 3 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1\,; \\ f(x) = 2x+1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

***f* est donc une fonction affine par morceaux, qui est :**
- **strictement décroissante sur]– ∞ ; – 2] ;**
- **constante sur [– 2 ; 1] ;**
- **strictement croissante sur [1 ; + ∞[.**



10 $\Sigma : \begin{cases} y = \dfrac{3}{x} \\ y = x-2. \end{cases}$

On vérifie facilement par le calcul que (3 ; 1) et (– 1 ; – 3) sont bien solutions de Σ.



Les solutions de Σ sont les couples de coordonnées des points d'intersection de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = \dfrac{3}{x}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = x - 2$.

On lit sur la figure que **les solutions de Σ sont (3 ; 1) et (– 1 ; – 3).**

11 $(I) : x^2 - 4x - 2 \geqslant \dfrac{-6}{x-1}$.

La droite des abscisses et celle d'équation $x = 1$ sont asymptotes à $\mathscr{C}_g$.

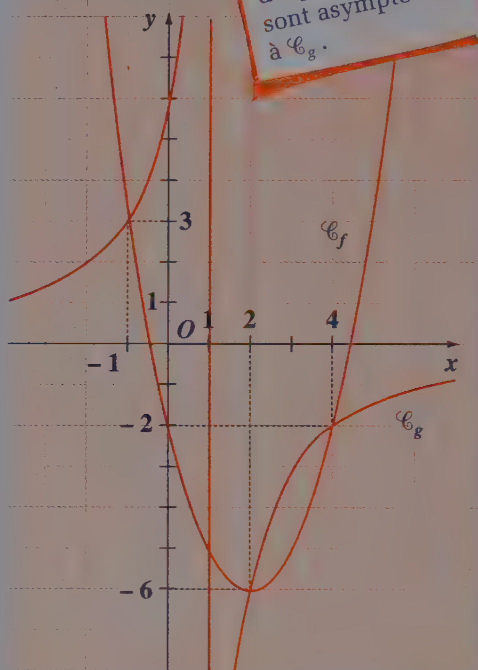
Soient :

- f le polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 - 4x - 2$;
- g la fonction : $x \mapsto \dfrac{-6}{x-1}$.

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de la parabole $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus (au sens large) de l'hyperbole $\mathscr{C}_g$.

La forme canonique de f étant : $x \mapsto (x-2)^2 - 6$, $\mathscr{C}_f$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i} - 6\vec{j}$.

Quant à $\mathscr{C}_g$, c'est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-6}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.



On lit sur le graphique :

l'ensemble des solutions de (I) est $]-\infty ; -1] \cup]1 ; 2] \cup [4 ; +\infty[$.

CHAPITRE 3

POLYNÔMES ET POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Rappels de cours

I- Polynômes

Définitions

Un polynôme est une fonction qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

où n est un entier naturel et a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0 sont des réels.
Si a_n est non nul, alors :

- n est le degré du polynôme ;
- a_n , a_{n-1} , ..., a_1 , a_0 sont ses coefficients.

Le polynôme nul $x \mapsto 0$ n'a pas de degré.

Égalité de deux polynômes

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et si les coefficients des « termes de même degré » sont égaux.

II- Polynômes du second degré

Soit f le polynôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$).

Le discriminant de f, que l'on notera **Δ, est le réel $b^2 - 4ac$.**

Forme canonique

Pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$,

donc, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Minimum, maximum

- Si a > 0, alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, qui est atteint en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si a < 0, alors f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, qui est atteint en $-\dfrac{b}{2a}$.

Racines et factorisation

On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

- **Si $\Delta > 0$,** alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et : pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- **Si $\Delta = 0$,** alors f admet une seule racine x_0 : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

et : pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- **Si $\Delta < 0$,** alors f n'admet **pas de racine.**

Signe de $f(x)$

- **Si $\Delta > 0$,** alors, en notant x' et x'' les deux racines de f de sorte que $x' < x''$:

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a	

- **Si $\Delta = 0$,** alors, x_0 étant la seule racine de f :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- **Si $\Delta < 0$,** alors f garde un signe constant, celui de a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Somme et produit des racines

Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines :

- leur somme est égale à $-\dfrac{b}{a}$;
- leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 46)

1° P étant un polynôme de degré 3, quel est le degré de $2P$?

2° Donner un exemple de polynômes P et Q tous deux de degré 3 dont la somme $P + Q$ est de degré 2.

3° Soit P le polynôme : $x \mapsto x^{17} - 3x$. Que peut-on dire du polynôme Q si le degré de $Q - P$ vaut 0 ?

2 (Corrigé p. 46)

Que peut-on dire des réels a et b si, pour tout réel x :

$$ax^2 + 4x - 3 = bx - 3 \text{ ?}$$

3 (Corrigé p. 46)

Résoudre chacune des équations proposées.

1° (E_1) : $x^2 - 4x + 7 = 0$.

2° (E_2) : $2x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2} = 0$.

3° (E_3) : $x^2 - 3x + 2{,}25 = 0$.

4 (Corrigé p. 47)

Soit f la fonction : $x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.
Après avoir vérifié que, pour tout réel x,

$$f(x) = (2x-1)(x+3) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8},$$

choisir la meilleure expression de $f(x)$ pour :

a. déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$;

b. étudier le signe de $f(x)$;

c. résoudre l'inéquation $f(x) < -3$.

5 (Corrigé p. 47)

Quel est le minimum de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ sur $\mathbb{R}$?

EXERCICES d'entraînement

Polynômes

6 ★ 5 min (Corrigé p. 47)

Trouver le degré et le coefficient de plus haut degré de chaque polynôme proposé.

1° $P_1(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$.

2° $P_2(x) = (x + 2)^4 - 7x^2 + 13\,x$.

3° $P_3(x) = (x + 1)(x^3 - 5) + x\,(7x^2 - x^3)$.

7 ★ 5 min (Corrigé p. 48)

Dans chacun des cas suivants, déterminer un polynôme P de degré 4 tel que :

a. P ne prend que des valeurs strictement négatives ;

b. P s'annule exactement une fois ;

c. P s'annule exactement trois fois.

Équations du second degré

8 ★ 1 min (Corrigé p. 48)

Quel est le discriminant de $x \mapsto (1\,234\,x - 4\,321)^2$?

9 ★★ 5 min (Corrigé p. 48)

Sans calculer le discriminant, déterminer une solution des équations proposées puis en déduire l'autre.

1° $(E_1) : x^2 + x - 6 = 0$.

2° $(E_2) : 3\,x^2 + x - 2 = 0$.

10 ★★ 15 min (Corrigé p. 49)

Un magasin a l'habitude d'offrir une remise de x % à ses fidèles clients. Pendant les soldes, il offre une réduction supplémentaire de y %. On sait que x est inférieur à y.

Sachant que la somme des réductions est de 10 % et qu'un fidèle client a payé 901,60 euros un article étiqueté 1 000 euros, calculer x et y.

11 ★★ 15 min (Corrigé p. 49)

Un jardin rectangulaire a une aire de 12 ares et un périmètre de 140 mètres. Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

12 ★★★ 15 min (Corrigé p. 50)

Deux automobilistes effectuent le même parcours de 400 km mais le second le fait à 20 km/h de plus que le premier et en une heure de moins.
Donner la vitesse de chacun d'eux et le temps nécessaire pour parcourir le trajet.

Signe d'un polynôme du second degré

13 ★ 5 min (Corrigé p. 51)

Déterminer (de tête !) le signe de chacune des expressions suivantes en fonction du réel x.

1° $(x+2)(x-3)$. **2°** $(x+2)(2-3x)$. **3°** x^2+x+1.

14 ★ 10 min (Corrigé p. 51)

Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x pour chaque polynôme du second degré proposé.

1° $f : x \mapsto -3x^2+5x+7$. **2°** $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2+x+9$. **3°** $f : x \mapsto -x^2+2\sqrt{3}x-3$.

Résolution d'équations

15 ★ 15 min (Corrigé p. 52)

Résoudre les équations proposées.

1° $x^3+4x^2+5x=0$. **2°** $x+2+\frac{1}{x}=0$.

16 ★★ 15 min (Corrigé p. 53)

Soit f le polynôme : $x \mapsto x^4-2x^3-17x^2+4x+30$.
1° Démontrer qu'il existe des réels a et b, à déterminer, tels que :
pour tout réel x, $f(x)=(x^2-2)(x^2+ax+b)$.
2° En déduire les racines de f.

CORRIGÉS des exercices

1 1° Si P est un polynôme de degré 3, alors **$2P$ est également un polynôme de degré 3.**

Si P est un polynôme non nul, alors tout multiple non nul de P a le même degré que P.

2° En posant $\boldsymbol{P : x \mapsto x^3 + x^2}$ et $\boldsymbol{Q : x \mapsto -x^3 + x^2}$, P et Q sont des polynômes de degré 3 ; leur somme $P + Q$ est le polynôme : $x \mapsto 2x^2$, qui a pour degré 2.

3° Avec $P : x \mapsto x^{17} - 3x$, le degré du polynôme $Q - P$ vaut 0 si et seulement si $Q - P$ est un polynôme constant non nul, c'est-à-dire si et seulement **si Q peut s'écrire : $x \mapsto x^{17} - 3x + C$, où C est un nombre réel non nul.**

2 Si pour tout réel x, $ax^2 + 4x - 3 = bx - 3$, alors les polynômes $x \mapsto ax^2 + 4x - 3$ et $x \mapsto bx - 3$ sont égaux, donc ils ont le même degré et les mêmes coefficients, c'est-à-dire : $\boldsymbol{a = 0}$ **et** $\boldsymbol{b = 4}$.

Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 4$, alors, pour tout réel x : $ax^2 + 4x - 3 = bx - 3$.

3 1° Le discriminant Δ de l'équation du second degré $(E_1) : x^2 - 4x + 7 = 0$ vérifie :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12.$$

$\Delta < 0$, donc **(E_1) n'admet pas de solution.**

2° Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré

$(E_2) : 2x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2} = 0$:

$$\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5 - 4 = 1.$$

$\Delta > 0$, donc **(E_2) admet deux solutions x_1 et x_2 :**

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}.$$

3° Le discriminant Δ de l'équation du second degré $(E_3) : x^2 - 3x + 2{,}25 = 0$ vérifie : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2{,}25 = 9 - 9 = 0$.

$\Delta = 0$, donc **(E_3) admet une seule solution x_0 :**

$$\boldsymbol{x_0} = \frac{-(-3)}{2 \times 1} = \frac{3}{2} = \boldsymbol{1{,}5}.$$

On aurait aussi pu remarquer que, pour tout réel x : $x^2 - 3x + 2{,}25 = (x - 1{,}5)^2$.

4 On a $f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$.
Pour tout réel x :
- $(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$,
- $$2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} = 2\left(x^2 + 2\times\frac{5}{4}\times x + \frac{25}{16}\right) - \frac{49}{8}$$
$$= 2x^2 + 5x + \frac{25-49}{8}$$
$$= 2x^2 + 5x - 3,$$

ce qui permet d'affirmer que :

$$\textbf{pour tout réel } x, \quad f(x) = (2x-1)(x+3) = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}.$$

a. « $f(x) = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ » met en évidence que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{49}{8}$ (et qu'il est atteint en $-\frac{5}{4}$).

b. « $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ » permet d'étudier le signe de $f(x)$ (en dressant un tableau de signes ou en utilisant les résultats concernant le signe d'un trinôme du second degré).

c. « $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ » met en évidence que l'inéquation $f(x) < -3$ est équivalente à $2x^2 + 5x < 0$ (que l'on sait résoudre, puisque cela revient à étudier le signe de $x(2x + 5)$).

5 La fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ est un polynôme du second degré. D'après le cours, f admet un minimum (le coefficient de x^2 est positif), atteint en $\frac{3}{2}$;

de plus : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\times\frac{3}{2} + 5 = \frac{11}{4}$, donc **le minimum de f est $\frac{11}{4}$.**

6 1° $P_1(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$ est le produit d'un polynôme de degré 2 par un polynôme de degré 4, donc P_1 est un polynôme de **degré 6.**
De plus : $x^2 \times (-x^4) = -x^6$,
donc le coefficient du terme de plus haut degré de P_1 est -1.

2° Le polynôme $P_2(x) = (x + 2)^4 - 7x^2 + 13x$ est de **degré 4** et **le coefficient** de son terme de plus haut degré est celui de $(x + 2)^4$, c'est-à-dire **1.**

Le terme de plus haut degré d'un produit de polynômes s'obtient en calculant le produit des termes de plus haut degré de chacun des polynômes.

3° $P_3(x) = (x+1)(x^3-5) + x(7x^2 - x^3)$.

On a, pour tout réel x :

$P_3(x) = x^4 + x^3 - 5x - 5 + 7x^3 - x^4$

$= 8x^3 - 5x - 5$,

donc le polynôme P_3 est de **degré 3** et **le coefficient** de son terme de plus haut degré est **8.**

P n'est pas de degré 4 car les termes en x^4 s'annulent.

7 **a.** Pour tout réel x, $-x^4 - 1 < 0$; le polynôme $P : x \mapsto -x^4 - 1$ est de degré 4 et ne prend que des valeurs strictement négatives.

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^4 - 2$,
$x \mapsto -x^4 - x^2 - 1$, etc.

b. Le polynôme $P : x \mapsto (x-2)^4$ est de degré 4 et s'annule exactement une fois (en 2).

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^4$,
$x \mapsto 5(x-0{,}1)^4$, etc.

c. Le polynôme $P : x \mapsto x(x-1)(x-2)^2$ est de degré 4 et s'annule exactement trois fois (en 0, 1 et 2).

Autres exemples :
$x \mapsto -3x^2(x+2)(x-1)$,
$x \mapsto 5(x+3)^2(x-\pi)(x-1)$, etc.

8 Le polynôme du second degré : $x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$ admet une seule racine (qui est $\dfrac{4\,321}{1\,234}$), donc **le discriminant de $x \mapsto (1\,234x - 4\,321)^2$ est égal à 0.**

Il était inutile (et pénible !) de calculer le discriminant…

9 **1°** 2 est solution de $(E_1) : x^2 + x - 6 = 0$ car : $2^2 + 2 - 6 = 0$.

Le produit des solutions de (E_1) est $\dfrac{-6}{1}$, c'est-à-dire -6, donc l'autre solution de (E_1) est $\dfrac{-6}{2}$, soit -3. **Les solutions de (E_1) sont donc 2 et -3.**

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 2 solutions :
- leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$;
- leur produit vaut $\dfrac{c}{a}$.

2° -1 est solution de $(E_2) : 3x^2 + x - 2 = 0$ car : $3 \times (-1)^2 + (-1) - 2 = 0$.

Le produit des solutions de (E_2) est $\dfrac{-2}{3}$, donc l'autre solution de (E_2) est $-\left(\dfrac{-2}{3}\right)$, soit $\dfrac{2}{3}$. **(E_2) admet deux solutions : -1 et $\dfrac{2}{3}$.**

10 On sait, par hypothèse, que :

$$x+y=10 \quad \text{et} \quad 1\,000\left(\frac{100-x}{100}\right)\left(\frac{100-y}{100}\right)=901{,}60\ ;$$

cela équivaut à : $\begin{cases} x+y=10 \\ (100-x)(100-y)=9\,016, \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x+y=10 \\ 10\,000-100x-100y+xy=9\,016, \end{cases}$

soit : $\begin{cases} x+y=10 \\ 100x+100y-xy=984, \end{cases}$

ou encore à : $\begin{cases} y=10-x \\ 100x+100(10-x)-x(10-x)=984, \end{cases}$

soit : $\begin{cases} y=10-x \\ 100x+1\,000-100x-10x+x^2=984, \end{cases}$

et finalement : $\begin{cases} y=10-x \\ x^2-10x+16=0. \end{cases}$

2 est solution évidente de l'équation du second degré $x^2 - 10x + 16 = 0$;
le produit des solutions étant égal à 16, l'autre est 8.
Pour $x = 2$: $10 - x = 8$; et pour $x = 8$: $10 - x = 2$.
De plus, comme on sait que x est inférieur à y, il vient : $x = 2$ et $y = 8$.
La remise usuelle aux fidèles clients est de 2 % et la remise exceptionnelle durant les soldes est de 8 %.

11 En premier lieu, rappelons que 1 are vaut 100 m^2, et donc que 12 ares valent 1 200 m^2. Appelons x et y les dimensions, en mètres, du jardin ; les réels positifs x et y satisfont au système d'équation (S) :

$$\begin{cases} xy=1\,200 \\ 2(x+y)=140, \end{cases}$$

et :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1\,200 \\ y=70-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(70-x)=1\,200 \\ y=70-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-70x+1\,200=0 \\ y=70-x. \end{cases}$$

Soit (E) l'équation du second degré : $x^2 - 70x + 1\,200 = 0$.
Son discriminant Δ vérifie :
$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 1 \times 1\,200 = 4\,900 - 4\,800 = 100$.

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-70)-\sqrt{100}}{2\times 1} = \frac{70-10}{2} = 30,$$

$$x_2 = \frac{-(-70)+\sqrt{100}}{2\times 1} = \frac{70+10}{2} = 40.$$

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$: le problème posé a bien une solution.

Il vient : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \quad \text{ou} \quad x = 40 \\ y = 70 - x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 70 - x \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 40 \\ y = 70 - x, \end{cases}$

c'est-à-dire : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 40 \\ y = 30. \end{cases}$

La longueur du jardin est de 40 m et sa largeur de 30 m.

12 Appelons v la vitesse en km/h du premier automobiliste et t le temps en heures qu'il met pour parcourir le trajet.

On a : $$v \times t = 400 \qquad (1).$$

Par ailleurs, le second automobiliste effectue le même trajet avec une vitesse de $(v + 20)$ km/h et un temps de parcours de $(t - 1)$ heures.

On a donc : $$(v + 20) \times (t - 1) = 400 \qquad (2).$$

(1) donne : $t = \dfrac{400}{v}$, car v est non nul.

En remplaçant dans (2), on obtient : $(v+20)\times\left(\dfrac{400}{v}-1\right) = 400$ (3),

et :

$$(3) \Leftrightarrow 400 - v + \frac{8\,000}{v} - 20 - 400 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v - \frac{8\,000}{v} + 20 = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{v^2 - 8\,000 + 20v}{v} = 0$$

$$(3) \Leftrightarrow v^2 + 20v - 8\,000 = 0.$$

Soit (E) l'équation du second degré : $v^2 + 20v - 8\,000 = 0$;
son discriminant Δ vérifie :

$$\Delta = 20^2 - 4 \times 1 \times (-8\,000) = 400 + 32\,000 = 32\,400.$$

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes v_1 et v_2 :

$$v_1 = \frac{-20+\sqrt{32\,400}}{2\times 1} = \frac{-20+180}{2} = 80 \text{ et } v_2 = \frac{-20-\sqrt{32\,400}}{2\times 1} = \frac{-20-180}{2} = -100.$$

v étant un réel positif, la seule valeur possible pour v est 80.

Il vient : • $t = \dfrac{400}{80} = 5$; **le premier automobiliste roule à 80 km/h, la durée de son trajet est de 5 heures ;**

• $v + 20 = 80 + 20 = 100$, $t - 1 = 5 - 1 = 4$; **le second roule à 100 km/h, la durée de son trajet est de 4 heures.**

13 **1°** $x \mapsto (x+2)(x-3)$ est un polynôme du second degré, dont le coefficient de x^2 est positif, et qui a pour racines -2 et 3, donc :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2° $x \mapsto (x+2)(2-3x)$ est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif (il vaut -3) ; de plus, ses racines sont -2 et $\dfrac{2}{3}$, donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$(x+2)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3° $x \mapsto x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant Δ est strictement négatif ($\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$) ; de plus, le coefficient de x^2 est positif, donc : **pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.**

14 **1°** Soit Δ le discriminant de $f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 7$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 7 = 25 + 84 = 109.$$

$\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{2\times(-3)} = \frac{5+\sqrt{109}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{2\times(-3)} = \frac{5-\sqrt{109}}{6}.$$

On remarque que le coefficient de x^2 est négatif, et $x_2 < x_1$; on obtient :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :
- **si $x \in]-\infty\,;x_2[\cup]x_1\,;+\infty[$, alors $f(x) < 0$;**
- **si $x \in]x_2\,;x_1[$, alors $f(x) > 0$;**
- **si $x = x_2$ ou $x = x_1$, alors $f(x) = 0$.**

CHAPITRE 3

2° Soit Δ le discriminant de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x + 9$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 9 = 1 - 18 = -17.$$

$\Delta < 0$, donc f garde un signe constant et, puisque $\frac{1}{2} > 0$:

pour tout réel x, $f(x) > 0$.

3° Soit Δ le discriminant de $f : x \mapsto -x^2 + 2\sqrt{3}x - 3$:

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 12 - 12 = 0.$

$\Delta = 0$, donc f admet une seule racine x_0 :

$$x_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{2 \times (-1)} = \sqrt{3}.$$

On pouvait également remarquer que, pour tout réel x :
$f(x) = -(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)$
$= -(x - \sqrt{3})^2$.

Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Donc : **$f(\sqrt{3}) = 0$ et, pour tout réel x distinct de $\sqrt{3}$, $f(x) < 0$.**

15 **1°** Pour tout réel x : $x^3 + 4x^2 + 5x = 0 \iff x(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x^2 + 4x + 5 = 0.$

Soit alors (E') l'équation du second degré $x^2 + 4x + 5 = 0$;
on note Δ son discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$;
$\Delta < 0$, donc (E') n'admet pas de solution.
En conclusion, **la seule solution de l'équation (E) est 0.**

2° Si un réel x est solution de (E) : $x + 2 + \frac{1}{x} = 0$, il est nécessairement non nul.

Pour tout réel x non nul :

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 0 \iff \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$$
$$\iff x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\iff (x+1)^2 = 0$$
$$\iff x + 1 = 0$$
$$\iff x = -1.$$

Pour tous réels a et b :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

On a ainsi démontré que **-1 est la seule solution de (E).**

16 $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30.$

1° Pour tout réel x,

$$(x^2-2)(x^2+ax+b) = x^4+ax^3+bx^2-2x^2-2ax-2b$$
$$= x^4+ax^3+(b-2)x^2-2ax-2b.$$

Donc, dire que pour tout réel x, $f(x) = (x^2-2)(x^2+ax+b)$ signifie que le polynôme : $x \mapsto x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$ et le polynôme : $x \mapsto x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - 2ax - 2b$ sont égaux.

Ce qui se traduit par : $\begin{cases} a = -2 \\ b-2 = -17 \\ -2a = 4 \\ -2b = 30, \end{cases}$

c'est-à-dire : $\boldsymbol{a = -2}$ **et** $\boldsymbol{b = -15.}$

2° D'après la première question :

pour tout réel x, $f(x) = (x^2-2)(x^2-2x-15)$,

donc : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$ ou $x^2 - 2x - 15 = 0$.

- Les solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
- Soient (E) l'équation du second degré : $x^2 - 2x - 15 = 0$,

et Δ son discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64$;

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2\times 1} = \frac{2-8}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\times 1} = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Donc, **les racines de f sont $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -3 et 5.**

CHAPITRE 4

DÉRIVATION

Rappels de cours

f est une fonction dont l'ensemble de définition est un intervalle I et a un réel de I.

I- Nombre dérivé

■ Dire que f **est dérivable en a** signifie que :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (taux de variation de f entre a et $a + h$).

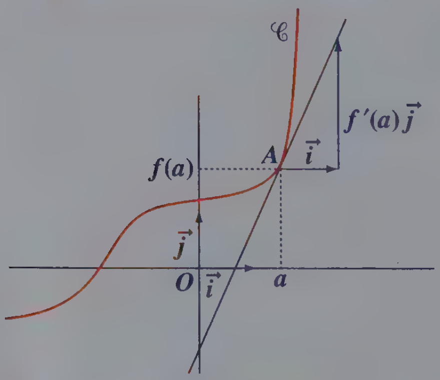
λ admet une limite finie ℓ quand λ tend vers 0.

■ Le nombre ℓ est alors appelé nombre dérivé de f en a, et noté $f'(a)$.

II- Interprétation graphique : tangente

■ Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a, une tangente non verticale de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

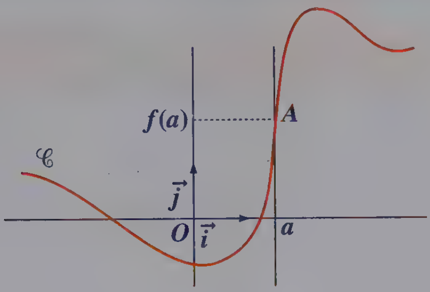


■ La fonction : $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est l'approximation affine associée à f en a.

■ Si l'on a :

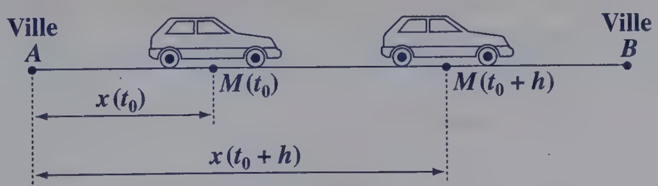
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty \text{ ou } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty,$$

alors f n'est pas dérivable en a et la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet, au point A d'abscisse a, une tangente verticale d'équation : $x = a$.



III- Interprétation cinématique : vitesse

Un véhicule se rend sur une route rectiligne, d'une ville A à une ville B.
À chaque instant t, on peut associer la distance AM qui sépare le véhicule de son point de départ ; on note $x(t)$ cette distance.



On définit ainsi une fonction $x : t \mapsto x(t)$ avec $x(t)$ la distance de A à $M(t)$ (x est ici une fonction de la variable t).

Par définition,

$\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ **est la vitesse moyenne du véhicule entre les instants t_0 et $t_0 + h$.**

Si la fonction x est dérivable en t_0, alors :

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ **est la vitesse instantanée du véhicule à l'instant t_0 ;**

c'est le nombre dérivé de la fonction x en t_0.

IV- Dérivation sur un intervalle. Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout réel de I, et la fonction dérivée de f sur I est la fonction f' qui, à tout réel x de I, associe $f'(x)$ (c'est-à-dire le nombre dérivé de f en x).

Dérivées des fonctions usuelles

f	f'	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$

Dérivées et opérations

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I ; λ est un réel.

Formule	Conditions
$(u+v)' = u' + v'$	
$(\lambda u)' = \lambda u'$	
$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Fonction dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction u

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

a et b sont des réels, a est non nul, et J est l'ensemble des réels x tels que $ax + b$ appartient à I ; alors la fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et :

pour tout x de J, $f'(x) = a\,u'(ax+b)$.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 60)

Tracer les droites d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5 passant par le point $A(3\,;4)$, et de coefficients directeurs respectifs $m_1 = 2$, $m_2 = -1$, $m_3 = \frac{4}{3}$, $m_4 = 0$ et $m_5 = -\frac{1}{5}$.

2 (Corrigé p. 60)

En utilisant sa définition, déterminer le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ en -1.

3 (Corrigé p. 61)

On appelle f la fonction : $x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2$.
1° Pour tout réel h, calculer $f(2 + h) - f(2)$.
2° Montrer que f est dérivable en 2. Que vaut $f'(2)$?

4 (Corrigé p. 61)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

EXERCICES d'entraînement

Nombre dérivé et tangente

5 ★ ★ 20 min (Corrigé p. 61)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^2 + 4x - 7$.
Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1° Montrer, en utilisant la définition, que f est dérivable en 1, puis donner $f'(1)$.
2° Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f : donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3° Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

6 ★ ★ 20 min (Corrigé p. 62)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}$.

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1° Montrer, en utilisant la définition du nombre dérivé, que f est dérivable en -1, et déterminer $f'(-1)$.
2° Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au point A d'abscisse -1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.
3° Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

Vitesse

7 ★ ★ 15 min (Corrigé p. 63)

On lance une balle verticalement, vers le haut, à partir du sol, à un instant pris comme origine.
On admet que la hauteur $h(t)$ mètres de la balle, à l'instant t secondes est donnée par :

$$h(t) = -5t^2 + 60t.$$

1° Montrer que la hauteur maximale atteinte par la balle est 180 mètres. À quel instant la balle est-elle au point le plus haut ?

2° Quelle est la vitesse de la balle à son point le plus haut ?

8 ★★ 15 min (Corrigé p. 64)

À l'instant $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale une bille à une hauteur de 122,50 mètres. La distance $x(t)$ parcourue à l'instant t, entre le lâcher et l'arrivée au sol, est $4{,}9\,t^2$ (unité de longueur : le mètre ; unité de temps : la seconde).

1° À quel instant la bille arrive-t-elle au sol ?

2° Avec quelle vitesse la bille arrive-t-elle au sol ?

Dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, etc.

9 ★★ 10 min (Corrigé p. 64)

Préciser le plus grand ensemble de réels sur lequel est dérivable la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1° $f:\ x \mapsto -x^3 + 5x^2 + 6x - 9$.

2° $f:\ x \mapsto 0{,}7x^9 - 5x^6 + 3x^4 - \sqrt{2}x + \pi$.

3° $f:\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$.

10 ★★ 10 min (Corrigé p. 64)

Préciser le plus grand ensemble de réels sur lequel est dérivable la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1° $f:\ x \mapsto (2x+5)(4x-\sqrt{3})$.

2° $f:\ x \mapsto \dfrac{7x-8}{6x+5}$.

3° $f:\ x \mapsto \dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}$.

11 ★★ 20 min (Corrigé p. 65)

Préciser le plus grand ensemble de réels sur lequel est dérivable la fonction f proposée et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet ensemble.

1° $f:\ x \mapsto (2x+3)^3$.

2° $f:\ x \mapsto (-6x+5)^7$.

3° $f:\ x \mapsto \left(\dfrac{x+7}{x-7}\right)^2$.

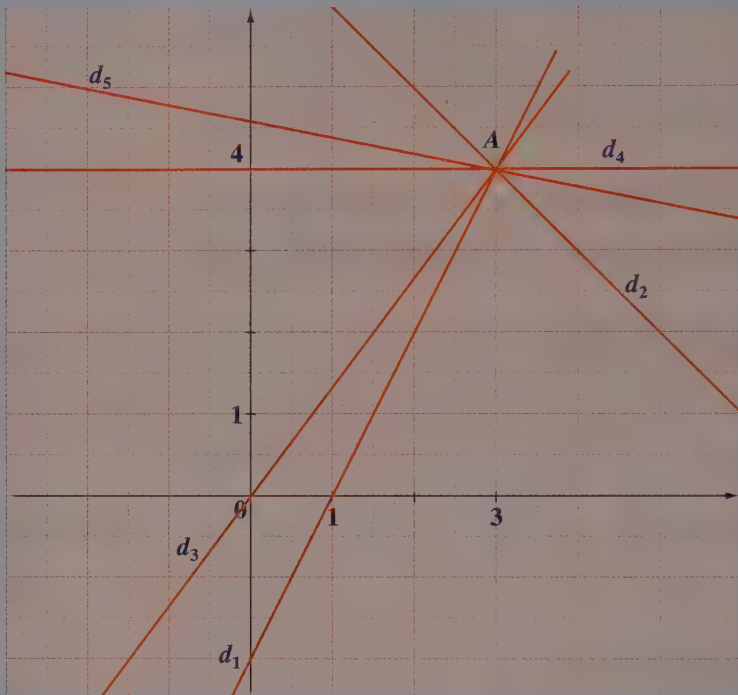
4° $f:\ x \mapsto \sqrt{x-1}$.

5° $f:\ x \mapsto \sqrt{4x+5}$.

6° $f:\ x \mapsto \sqrt{5-2x}$.

CORRIGÉS des exercices

1



2 La fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel h non nul, on a :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^2-3(-1+h)+5-9}{h}$$

$$= \frac{1-2h+h^2+3-3h-4}{h}$$

$$= \frac{h^2-5h}{h}$$

$$= h-5,$$

et : $\lim_{h \to 0}(h-5) = -5$

donc : $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -5.$

Ceci prouve que f **est dérivable en – 1 et que $f'(-1) = -5$.**

3 La fonction $f : x \mapsto x^3 - 7x^2 + 3x - 2$ étant une fonction polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

1° Pour tout réel h, on a :

$$f(2+h) - f(2) = (2+h)^3 - 7(2+h)^2 + 3(2+h) - 2 - (-16)$$
$$= 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 28 - 28h - 7h^2 + 6 + 3h + 14$$

donc : $\boldsymbol{f(2+h) - f(2) = -13h - h^2 + h^3}$.

2° Pour tout réel h non nul, on a : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -13 - h + h^2$,

or : $\lim\limits_{h \to 0}(-h + h^2) = 0$,

donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -13$.

Cela prouve que **f est dérivable en 2 et que $f'(2)$ est égal à – 13.**

On peut trouver une équation de la tangente $\mathcal{T}$ sans la « formule ». Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(-1)$, c'est-à-dire -5 : une équation de $\mathcal{T}$ est du type : $y = -5x + b$; de plus, le point de coordonnées $(-1 ; 9)$ appartient à $\mathcal{T}$, donc : $9 = -5 \times (-1) + b$, d'où : $b = 4$. On en déduit une équation de $\mathcal{T}$: $y = -5x + 4$.

4 $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :

$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$,

or : $f'(-1) = -5$ et $f(-1) = 9$,

donc **une équation de $\mathcal{T}$ est :**

$y = -5(x+1) + 9$,

c'est-à-dire : $\boldsymbol{y = -5x + 4}$.

5 1° La fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x - 7$ étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel h, on a :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 7 - 1^2 - 4 + 7}{h}$$
$$= \frac{1 + 2h + h^2 + 4 + 4h - 1 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 6h}{h}$$
$$= h + 6$$

et : $\lim\limits_{h \to 0}(h+6) = 6$

donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6$.

Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1, c'est-à-dire $f'(1)$, est 6.

On peut aussi déterminer $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Pour tout réel x différent de 1 :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2 + 4x - 7 + 2}{x-1} = \frac{x^2 + 4x - 5}{x-1}$$
$$= \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = x + 5,$$

donc : $\lim\limits_{x \mapsto 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + 5 = 6$.

CHAPITRE 4

2° Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est $f'(1)$, c'est-à-dire 6.

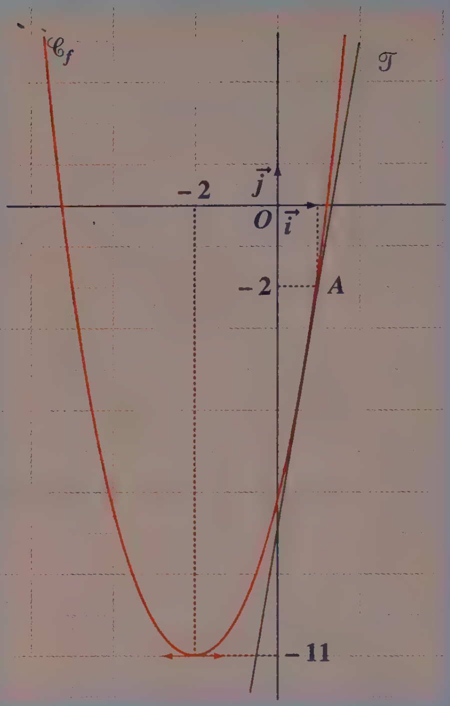
A est un point de $\mathcal{C}_f$;
il a pour abscisse 1 et donc pour ordonnée $f(1)$, soit -2.

Une équation de $\mathcal{T}$ est donc :
$y = 6x + q$.

Déterminons le réel q :
A est un point de $\mathcal{T}$,

donc $\quad y_A = 6x_A + q$,
soit $\quad -2 = 6 \times 1 + q$,
d'où $\quad q = -8$.

Donc **une équation de $\mathcal{T}$ est :**
$\boldsymbol{y = 6x - 8}$.



3° Pour tout réel x, $f(x) = (x+2)^2 - 11$.
Donc $\mathcal{C}_f$ est la parabole déduite de celle d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 11\vec{j}$.

1° L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est $[-2 ; +\infty[$.
Pour tout réel h non nul, tel que $-1 + h \geqslant -2$
(c'est-à-dire $h \in [-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$), calculons le taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1 + h$:

$$t(h) = \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h},$$

$$t(h) = \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)},$$

$$t(h) = \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}.$$

La limite de t en 0 est $\frac{1}{2}$, car $\sqrt{1+h}$ tend vers 1 quand h tend vers 0.

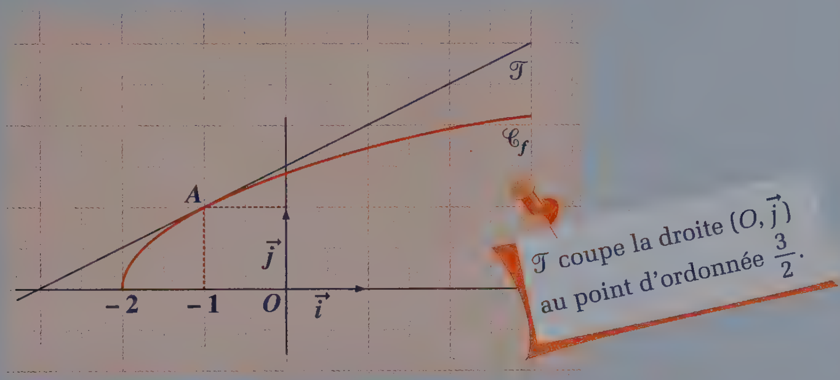
La limite, quand h tend vers 0, du taux de variation $t(h)$ de f entre -1 et $-1 + h$ est $\frac{1}{2}$, ce qui signifie que **f est dérivable en -1 et $f'(-1) = \frac{1}{2}$.**

2° $\mathcal{T}$ est la droite :

- de coefficient directeur $f'(-1)$, soit $\frac{1}{2}$;
- qui passe par le point $A(-1\ ; f(-1))$, avec $f(-1) = 1$.

Une équation de $\mathcal{T}$ est : $y-1=\frac{1}{2}[x-(-1)]$, soit $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$.

3°



$\mathscr{C}_f$ se déduit de la demi-parabole d'équation $y=\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

$\mathcal{T}$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{3}{2}$.

7 1° On a :

$x(t) = -5t^2 + 60t = -5(t^2 - 12t) = -5[(t-6)^2 - 36] = -5(t-6)^2 + 180$,

or : $-5[(t-6)^2] \leqslant 0$,

donc : $x(t) \leqslant 180$.

De plus, $x(t) = 180 \iff -5(t-6)^2 + 180 = 180$

$\iff -5(t-6)^2 = 0$

$\iff (t-6)^2 = 0$

$\iff t = 6$.

On peut donc affirmer que **la hauteur maximale atteinte par la balle est 180 mètres et que la balle est au point le plus haut au bout de 6 secondes.**

2° On a : $\dfrac{x(6+h)-x(6)}{h}=\dfrac{-5(6+h-6)^2+180-180}{h}=\dfrac{-5h^2}{h}=-5h$,

de plus : $\lim\limits_{h\to 0}(-5h)=0$,

par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(6+h)-x(6)}{h}=0$.

Donc, **la vitesse de la balle à son point le plus haut est nulle.**

[illegible] 1° La bille sera au sol quand elle aura parcouru une distance de 122,50 mètres.
L'équation $122{,}5 = 4{,}9\,t^2$ a une seule solution positive qui est 5.
Donc la bille arrive au sol au bout de 5 secondes.

> L'ensemble de définition de la fonction $t \mapsto x(t)$ est $[0\ ;\ 5]$.

2° Pour tout réel h non nul tel que $5 + h \in [0\ ;\ 5]$, c'est-à-dire pour tout réel h de $[-5\ ;\ 0[$:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{h}=\frac{4{,}9\times(5+h)^2-122{,}5}{h}=\frac{4{,}9\times(25+10h+h^2)-122{,}5}{h}$$

donc : $\dfrac{x(5+h)-x(5)}{h}=\dfrac{49h+4{,}9h^2}{h}=49+4{,}9h$,

de plus : $\lim\limits_{h\to 0}(49+4{,}9h)=49$,

par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(5+h)-x(5)}{h}=49$.

On a prouvé que la fonction x est dérivable en 5 et que l'on a : $x'(5) = 49$.
La bille arrive au sol avec une vitesse de 49 m/s, c'est-à-dire de 176,4 km/h.

> Bien se rappeler :
> 1 km/h = 3,6 m/s
> car 1 km = 1 000 m
> et 1 h = 3 600 s.

[illegible] 1° La fonction $f : x \mapsto -x^3 + 5x^2 + 6x - 9$ étant un polynôme, elle est (définie et) dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f'(x) = -3x^2 + 10x + 6$.

2° La fonction $f :\ x \mapsto 0{,}7x^9 - 5x^6 + 3x^4 - \sqrt{2}x + \pi$ étant un polynôme, elle est (définie et) dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f'(x) = 6{,}3x^8 - 30x^5 + 12x^3 - \sqrt{2}$.

3° $f :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition, qui est $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

10 1° $f :\ x \mapsto (2x+5)(4x-\sqrt{3})$ étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :
$f'(x) = 2\times(4x-\sqrt{3})+(2x+5)\times 4$,
$f'(x) = 8x-2\sqrt{3}+8x+20$.
Pour tout réel x : $f'(x)=16x-2\sqrt{3}+20$.

2° L'ensemble de définition de f : $x \mapsto \dfrac{7x-8}{6x+5}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{6}\right\}$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $\left]-\infty\,;-\dfrac{5}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{6}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x différent de $-\dfrac{5}{6}$:

$$f'(x) = \frac{7(6x+5)-6(7x-8)}{(6x+5)^2},$$

$$f'(x) = \frac{42x+35-42x+48}{(6x+5)^2}.$$

Pour tout x de $\left]-\infty\,;-\dfrac{5}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{5}{6}\,;+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{83}{(6x+5)^2}$.

3° L'ensemble de définition de f : $x \mapsto \dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}$ est $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
Pour tout réel x différent de -1 et de 1 :

$$f'(x) = \frac{(6x-1)(x^2-1)-(3x^2-x+2)\times 2x}{(x^2-1)^2},$$

$$f'(x) = \frac{6x^3-x^2-6x+1-6x^3+2x^2-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Pour tout x de $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x^2-10x+1}{(x^2-1)^2}$.

11 **1°** $f : x \mapsto (2x+3)^3$ étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction $x \mapsto x^3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $g' : x \mapsto 3x^2$.
Pour tout réel x : $f(x) = g(2x+3)$,
donc : $f'(x) = 2 \times 3(2x+3)^2$.
Pour tout réel x : $f'(x) = 6(2x+3)^2$.
2° $f : x \mapsto (-6x+5)^7$ étant un polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction $x \mapsto x^7$, dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $g' : x \mapsto 7x^6$.
Pour tout réel x : $f(x) = g(-6x+5)$,
donc : $f'(x) = -6 \times 7(-6x+5)^6$.
Pour tout réel x : $f'(x) = -42(-6x+5)^6$.

3° L'ensemble de définition de f : $x \mapsto \left(\dfrac{x+7}{x-7}\right)^2$ est $\mathbb{R}\backslash\{7\}$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;7[\,\cup\,]7\,;+\infty[$.
Pour tout réel x différent de 7 :

$$f(x)=\frac{x^2+14x+49}{x^2-14x+49},$$

donc : $$f'(x)=\frac{(2x+14)(x^2-14x+49)-(x^2+14x+49)(2x-14)}{(x-7)^4},$$

$$f'(x)=\frac{-28x^2+1\,372}{(x-7)^4}=\frac{-28(x^2-49)}{(x-7)^4}.$$

Pour tout x de $]-\infty\,;7[\,\cup\,]7\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-28(x+7)}{(x-7)^3}$.

• Pour tout réel x différent de 7 :

$$f(x)=\left(1+\frac{14}{x-7}\right)^2=\left(1+\frac{14}{x-7}\right)\times\left(1+\frac{14}{x-7}\right),$$

donc $$\boldsymbol{f'(x)}=2\times\frac{-14}{(x-7)^2}\times\frac{x+7}{x-7}=\boldsymbol{\frac{-28(x+7)}{(x-7)^3}}.$$

Deux autres façons de procéder.

• En remarquant que les fonctions dérivées de $x \mapsto (x+7)^2$ et $x \mapsto (x-7)^2$ sont respectivement $x \mapsto 2(x+7)$ et $x \mapsto 2(x-7)$, on obtient :

pour tout réel x différent de 7 : $f(x)=\dfrac{(x+7)^2}{(x-7)^2}$,

d'où $$f'(x)=\frac{2(x+7)(x-7)^2-(x+7)^2\times 2(x-7)}{(x-7)^4},$$

soit $$f'(x)=\frac{2(x+7)(x-7-x-7)}{(x-7)^3},$$

donc $$\boldsymbol{f'(x)=\frac{-28(x+7)}{(x-7)^3}}.$$

4° f : $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto x-1$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

• l'ensemble de définition de f est $[1\,;+\infty[$ (ensemble des réels x tels que $x-1 \geqslant 0$) ;

• f est dérivable seulement sur $]1\,;+\infty[$ (ensemble des réels x tels que $x-1>0$),

et, **pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.**

5° $f : x \mapsto \sqrt{4x+5}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto 4x + 5$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

• l'ensemble de définition de f est $\left[-\dfrac{5}{4} ; +\infty\right[$ (ensemble des réels x tels que $4x + 5 \geqslant 0$) ;

• f est dérivable seulement sur $\left]-\dfrac{5}{4} ; +\infty\right[$ (ensemble des réels x tels que $4x + 5 > 0$),

et, **pour tout réel x de** $\left]-\dfrac{5}{4} ; +\infty\right[$: $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+5}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

6° $f : x \mapsto \sqrt{5-2x}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto 5 - 2x$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

• l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right]$ (ensemble des réels x tels que $5 - 2x \geqslant 0$),

• f est dérivable seulement sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$ (ensemble des réels x tels que $5 - 2x > 0$),

et, **pour tout réel x de** $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$: $f'(x) = -2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{5-2x}}$,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-2x}}.$$

CHAPITRE 5

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

Rappels de cours

Les théorèmes suivants précisent le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle.

I- Théorèmes de monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est positive sur I, c'est-à-dire si :

  pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.

- Si f' est négative sur I, c'est-à-dire si :

  pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

- Si f' est nulle sur I, c'est-à-dire si :

  pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

II- Théorèmes de stricte monotonie

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout x de I :

  $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

- Si, pour tout x de I :

  $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Plus généralement :

- Si f' est positive sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I et si f' ne s'annule éventuellement qu'en un nombre fini de réels de I, alors f est strictement décroissante sur I.

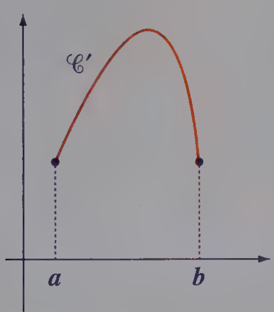
EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

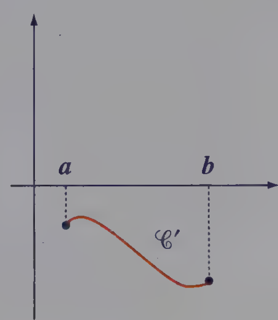
(Corrigé p. 73)

Dans chacun des deux cas suivants, comparer les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sachant que $\mathscr{C}'$ est la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f, dérivable sur le segment $[a\,;\,b]$.

1°



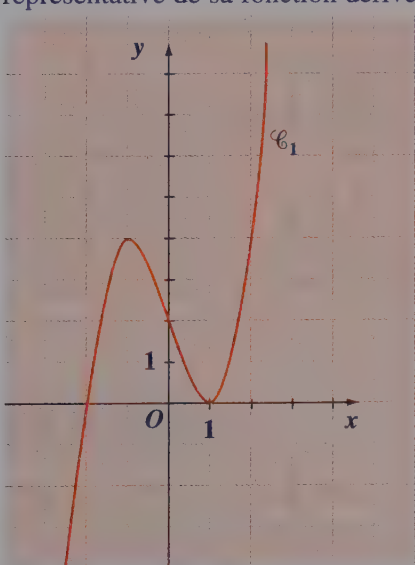
2°

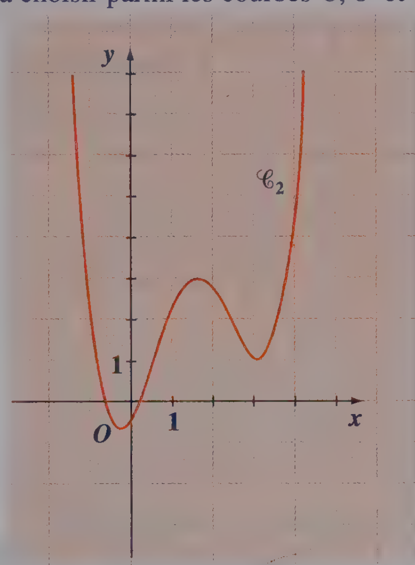


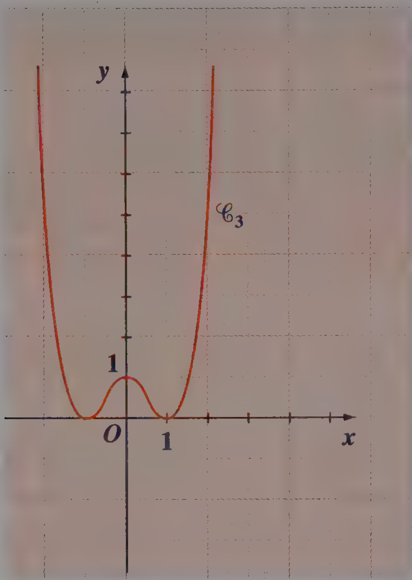
2

(Corrigé p. 73)

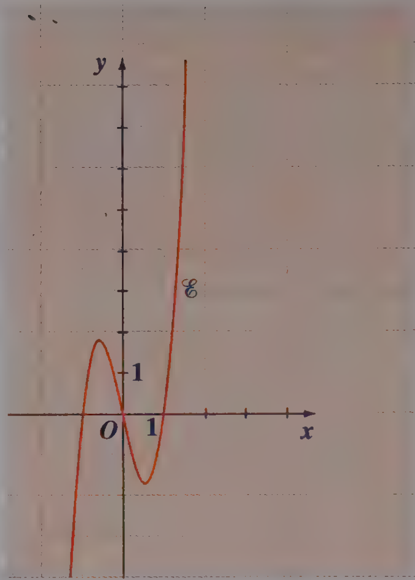
Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentatives respectives de trois fonctions f_1, f_2 et f_3. Pour chacune de ces fonctions, déterminer la courbe représentative de sa fonction dérivée, à choisir parmi les courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.



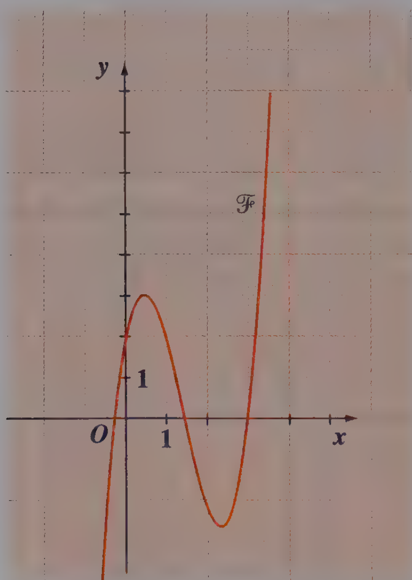




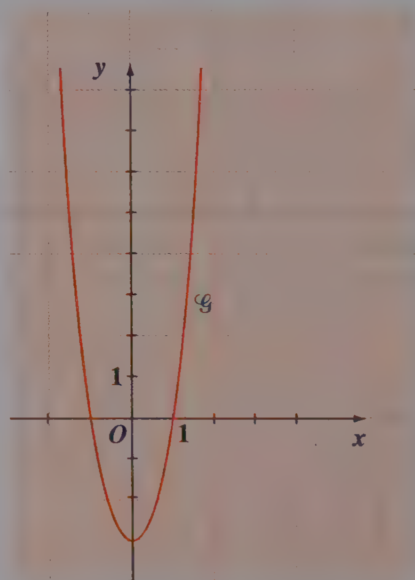
y
$\mathscr{C}_3$
1
O
1
x



y
$\mathscr{E}$
1
O
1
x



y
$\mathscr{F}$
1
O
1
x



y
$\mathscr{G}$
1
O
1
x

Sens de variation d'une fonction polynôme

3 ★ 15 min (Corrigé p. 73)

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée, puis étudier le sens de variation de f.

1° $x \mapsto -3x^2 + 4x + 5.$ **2°** $x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1.$

3° $x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20.$

Sens de variation d'une fonction rationnelle

4 ★ 10 min (Corrigé p. 74)

Après avoir précisé l'ensemble sur lequel la fonction f proposée est dérivable, déterminer la dérivée de f et étudier son sens de variation.

1° $x \mapsto 5 - \dfrac{3}{2x-1}.$ **2°** $x \mapsto \dfrac{2x+0,7}{3x+1}.$

Sens de variation d'une fonction irrationnelle

5 ★ 10 min (Corrigé p. 75)

Après avoir précisé l'ensemble sur lequel la fonction f proposée est dérivable, déterminer la dérivée de f et étudier son sens de variation.

1° $x \mapsto \sqrt{4-5x}.$ **2°** $x \mapsto \dfrac{4}{x} + \sqrt{x}.$

6 ★★ 15 min (Corrigé p. 76)

Comparer les réels A et B définis par :

$$A = \frac{(5{,}012013014015016)^2 + 3}{3{,}012013014015016} \text{ et } B = \frac{(5{,}012013014015017)^2 + 3}{3{,}012013014015017}.$$

Minimum, maximum, extremum

7 ★ 10 min (Corrigé p. 77)

Soit f la fonction : $x \mapsto x^4 - 4x + 2$.

Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et en préciser la valeur.

8 ★★ 20 min (Corrigé p. 77)

Un livre doit contenir, par page, 500 cm^2 de texte imprimé. Chaque page est rectangulaire et possède des marges gauche et droite de 4 cm, des marges inférieure et supérieure de 5 cm.

Quelles sont les dimensions d'une page du livre si l'on veut que la consommation de papier soit minimale ?

9 ★★ 20 min (Corrigé p. 78)

En économie, on constate souvent que le nombre n d'objets vendus diminue quand le prix de vente p de cet objet augmente. Une des lois formulées est : $n = a - ep$, où a et e sont des constantes réelles ($e > 0$).

Un magasin met en vente des bouteilles de champagne au prix de 18 € l'unité, achetée 12 € au grossiste ; au bout d'une semaine, 200 bouteilles sont vendues. Le directeur décide alors de baisser le prix de la bouteille de 0,5 € ; il constate qu'à la fin de la deuxième semaine, la vente hebdomadaire a augmenté de 50 bouteilles.

1° En supposant que la loi $n = a - ep$ s'applique dans cet exemple, quelles sont les valeurs des coefficients a et e (les prix étant exprimés en euros) ?

2° Exprimer alors le bénéfice b en fonction de p, puis calculer le prix de vente d'une bouteille de champagne assurant un bénéfice maximal (on néglige les frais de tous ordres).

CORRIGÉS des exercices

1 1° La fonction dérivée f' de f est strictement positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.
Comme de plus : $a < b$, il vient : $\boldsymbol{f(a) < f(b)}$.
2° La fonction f' étant strictement négative sur $[a\ ;\ b]$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Comme de plus : $a < b$, on peut conclure : $\boldsymbol{f(a) > f(b)}$.

2 • La fonction f_1 est décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$, sa dérivée est donc négative sur $[-1\ ;\ 1]$.
La seule courbe pouvant être celle de la dérivée de f_1 est $\mathscr{G}$.
• La fonction f_2 n'est pas monotone sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$, donc sa dérivée n'est pas de signe constant sur cet intervalle. Or, seule $\mathscr{F}$ possède des points dont l'abscisse est comprise entre 1 et 5 et dont l'ordonnée n'est pas de signe constant.
On en déduit que **la courbe de la dérivée de f_2 est $\mathscr{F}$.**
• D'après ce qui précède, **la courbe de la dérivée de f_3 ne peut être que $\mathscr{E}$,** ce qui est confirmé par la cohérence du tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

3 1° La fonction $f : x \mapsto -3x^2 + 4x + 5$ étant un polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $\boldsymbol{f'(x) = -6x + 4 = 2(-3x + 2)}$.
Donc :
- $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$;
- si $x < \dfrac{2}{3}$, alors $f'(x) > 0$;
- si $x > \dfrac{2}{3}$, alors $f'(x) < 0$.

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :
$$f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}.$$

On en déduit que f **est strictement croissante sur** $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{2}{3}\right]$ **et strictement décroissante sur** $\left[\dfrac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

2° La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + x - 1$ étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{4}(x+4)}$,

donc : • $f'(-4) = 0$;

• si $x < -4$, alors $f'(x) < 0$;

• si $x > -4$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f **est strictement décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et strictement croissante sur $[-4 ; +\infty[$.**

On retrouve le sens de variation de f en écrivant que, pour tout réel x :
$f(x) = \frac{1}{8}(x+4)^2 - 3$.

3° La fonction $f : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 10x^2 + 25x - 20$ étant un polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 4x^2 - 20x + 25 = \boldsymbol{(2x-5)^2}$,

donc : $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, et si $x \neq \frac{5}{2}$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f **est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

4 1° La fonction $f : x \mapsto 5 - \frac{3}{2x-1}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, c'est-à-dire $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout réel x différent de $\frac{1}{2}$: $\boldsymbol{f'(x) = \frac{6}{(2x-1)^2}}$, donc : $f'(x) > 0$.

Il en résulte que f **est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.**

f n'est pas croissante sur la réunion de ces deux intervalles :
$f(-1) = 6$, $f(1) = 2$.

2° $f : x \mapsto \frac{2x + 0,7}{3x+1}$ est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.

Pour tout réel x différent de $-\dfrac{1}{3}$:

$$f'(x)=\frac{2(3x+1)-3(2x+0,7)}{(3x+1)^2}=\frac{\mathbf{-\,0,1}}{\mathbf{(3x+1)^2}},\ \text{donc } f'(x)<0.$$

Il en résulte que **f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.**

5 **1°** $f : x \mapsto \sqrt{4-5x}$ est la composée de la fonction affine $x \mapsto 4-5x$ par la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, donc :

- l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right]$ (ensemble des réels x tels que $4-5x \geqslant 0$),
- f est dérivable sur $\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right[$ (ensemble des réels x tels que $4-5x>0$).

Pour tout réel x tel que $x<\dfrac{4}{5}$: $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{-\,5}{2\sqrt{4-5x}}}$, d'où : $f'(x)<0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right[$; plus précisément, **f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{4}{5}\right]$**, car le minimum de f sur cet intervalle est $f\left(\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire 0.

2° Un réel x appartient à l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f : x \mapsto \dfrac{4}{x}+\sqrt{x}$ si et seulement si : $x \neq 0$ et $x \geqslant 0$,

donc : $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$.

f est la somme des fonctions $x \mapsto \dfrac{4}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif : $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-8\sqrt{x}+x^2}{2x^2\sqrt{x}}$,

et, en utilisant : $x^2=x\times x=x\sqrt{x}\times\sqrt{x}$, on obtient :

$$\boldsymbol{f'(x)}=\frac{(-8+x\sqrt{x})\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-8+x\sqrt{x}}{2x^2}=\boldsymbol{\frac{x\sqrt{x}-8}{2x^2}},$$

ce qui met en évidence que le signe de $f'(x)$ est celui de $x\sqrt{x}-8$.

Il vient, pour tout x de $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\Leftrightarrow x\sqrt{x}-8>0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3>2^3. \end{aligned}$$

La fonction cube $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}>2,$$

c'est-à-dire, des réels positifs étant rangés comme leurs carrés :

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>4\,;$$

on obtient de manière analogue : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$.

Finalement : $\begin{cases} f'(4)=0, \\ f'(x)<0 & \text{si} \quad 0<x<4, \\ f'(x)>0 & \text{si} \quad x>4, \end{cases}$

ce qui prouve que f **est strictement décroissante sur $]0\,;4]$ et strictement croissante sur $[4\,;+\infty[$.**

8 La plupart des calculatrices utilisées en classe de Première n'ont pas une précision suffisante pour comparer A et B.

• Posons : $a = 5{,}012013014015016$ et $b = 5{,}012013014015017$;
alors A et B sont les images respectives de a et b par la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2+3}{x-2}.$$

• Étudions le sens de variation de la fonction f.

f est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ et, pour tout réel x différent de 2 :

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+3)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2},$$

donc $f'(x)$ est du signe x^2-4x-3.

• Résolvons l'équation (E) du second degré : $x^2-4x-3=0$.

Son discriminant Δ vérifie : $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-3) = 28$;

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{4-\sqrt{28}}{2\times 1}=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7},$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{28}}{2\times 1}=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7}.$$

$2-\sqrt{7}\approx -0{,}65,$
$2+\sqrt{7}\approx 4{,}65.$

• Dressons le tableau de signes de f' :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		2		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $[2+\sqrt{7}\ ;+\infty[$, sur lequel f est strictement croissante, d'après le tableau.
Comme, de plus : $a < b$,
on peut affirmer : $f(a) < f(b)$,
c'est-à-dire : **$A < B$.**

On peut comparer $f(a)$ et $f(b)$ par cette méthode, car a et b appartiennent à un même intervalle de stricte monotonie de f.

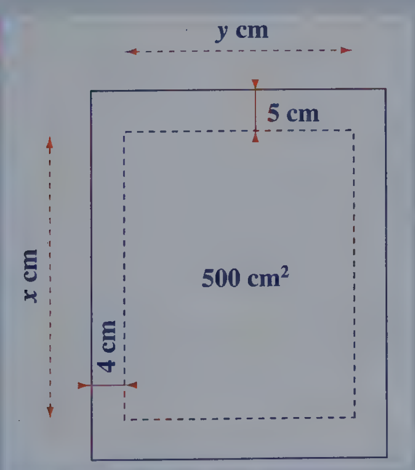
7 $f : x \mapsto x^4 - 4x + 2$ est une fonction polynôme, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x : $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$,
donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 1$; or la fonction $x \mapsto x^3 - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $x^3 - 1$ et $x - 1$ ont le même signe ; on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 1]$ et strictement croissante sur $[1\ ; +\infty[$, ce qui implique que f admet $f(1)$ pour minimum sur $\mathbb{R}$ (et que 1 est le seul réel en lequel f atteint ce minimum).
$f(1) = -1$, donc, **f admet -1 pour minimum sur $\mathbb{R}$.**

-1 est le minimum (absolu) de f sur $\mathbb{R}$; on peut remarquer que -1 est également le seul minimum relatif de f sur $\mathbb{R}$.

8



Soit y la dimension, en cm, des bords inférieur et supérieur de la partie imprimée d'une page ; soit x celle, en cm, des bords gauche et droit. L'aire, en cm², de cette partie de page vaut 500, d'où :

$$xy = 500, \quad \text{soit} \quad y = \frac{500}{x}.$$

Les dimensions de la page entière, en cm, sont :

$$x + (2 \times 5) \quad \text{et} \quad y + (2 \times 4), \quad \text{soit} \quad x + 10 \quad \text{et} \quad \frac{500}{x} + 8.$$

• Appelons f la fonction (définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) qui, au réel x, associe l'aire, en cm^2, de la page entière :

$$f(x) = (x+10)\left(\frac{500}{x}+8\right),$$

$$f(x) = 500 + \frac{5\,000}{x} + 8x + 80,$$

$$f(x) = 8x + \frac{5\,000}{x} + 580.$$

• Étudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 8 - \frac{5\,000}{x^2} = \frac{8(x^2-625)}{x^2} = \frac{8(x+25)(x-25)}{x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 25$.
Le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donné par le tableau suivant :

x	0		25		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	980	$\nearrow$	

Le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint en 25 ;
les dimensions cherchées sont obtenues pour $x = 25$;
on a alors : $x + 10 = 35$,

$$y + 8 = \frac{500}{25} + 8 = 20 + 8 = 28.$$

Si $x > 0$, alors : $x + 25 > 0$ et $x^2 > 0$.

On en déduit que pour que la consommation de papier soit minimale, **les bords inférieur et supérieur d'une page du livre doivent mesurer 28 cm et les bords gauche et droit 35 cm**.

1° Le nombre n de bouteilles vendues en une semaine et le prix à l'unité de ces bouteilles sont supposés liés par la loi : $n = a - e\,p$.
La première semaine, 200 bouteilles sont vendues au prix de 18 € l'unité, donc : $200 = a - 18\,e$;
la deuxième semaine, 250 bouteilles sont vendues au prix de 17,5 € l'unité, donc : $250 = a - 17{,}5\,e$.

Les constantes a et e satisfont donc au système : $\begin{cases} a - 18e = 200 \\ a - 17{,}5e = 250. \end{cases}$

En soustrayant membre à membre la première égalité à la seconde, on obtient : $0{,}5\,e = 50$, d'où : $\boldsymbol{e = 100}$ **;**
puis, en substituant la valeur de e dans la première égalité, il vient :
$a = 200 + 1\,800$, soit : $\boldsymbol{a = 2\,000}$.

2° Si n bouteilles sont vendues, au prix d'achat de 12 € et de vente de p € chacune, alors le bénéfice de b € vérifie $\boldsymbol{b = np - n \times 12 = n\,(p - 12)}$,

or : $n = a - ep$, et : $a = 2\,000$, $e = 100$,

donc : $b = (2\,000 - 100p)\,(p - 12) = 100\,(20 - p)\,(p - 12)$.

Soit f la fonction : $x \mapsto 100\,(20 - x)\,(x - 12)$.

f est un polynôme (du second degré), donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f(x) = 100\,(-x^2 + 32x - 240)$,

$$f'(x) = 100\,(-2x + 32) = -200\,(x - 16),$$

donc le sens de variation de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		16		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	**1 600**	↘	

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est donc atteint en 16.

Donc **le bénéfice maximal est assuré lorsque la bouteille de champagne est vendue 16 €** (le nombre de bouteilles vendues est alors 400, et le bénéfice s'élève à 1 600 €).

Si $p = 16$, alors
$n = 2\,000 - 100 \times 16 = 400$,
$b = 400 \times (16 - 12) = 1\,600$.

CHAPITRE 6

LIMITES D'UNE FONCTION

Rappels de cours

I- Opérations algébriques sur les limites

ℓ et ℓ' désignent des réels, a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme

On suppose $f + g$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit

On suppose $f \times g$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f\times g$ a pour limite en a	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un quotient

On suppose $\dfrac{f}{g}$ définie au voisinage de a.

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
et si g a pour limite en a	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0	$\pm\infty$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Si f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$
si g a pour limite en a	0	0	0	0
et si au voisinage de a	$g \geqslant 0$	$g \leqslant 0$	$g \geqslant 0$	$g \leqslant 0$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

II- Limite à gauche, limite à droite

Soient f une fonction et a un réel ; λ désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

- On dit que f admet λ comme limite à gauche en a si et seulement si la restriction de f à $]-\infty\,;a[$ admet λ comme limite en a. On note alors :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{a^-} f = \lambda.$$

- On dit que f admet λ comme limite à droite en a si et seulement si la restriction de f à $]a\,;+\infty[$ admet λ comme limite en a. On note alors :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lambda \text{ ou } \lim_{a^+} f = \lambda.$$

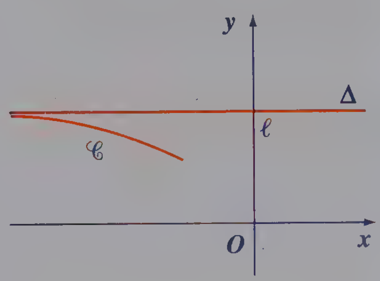
III- Asymptotes

Soient f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Asymptote horizontale

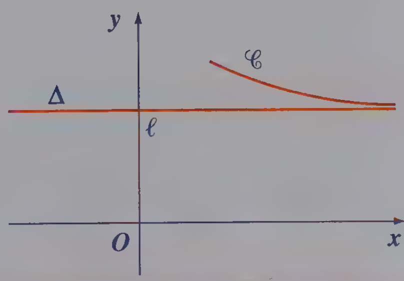
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$,

alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

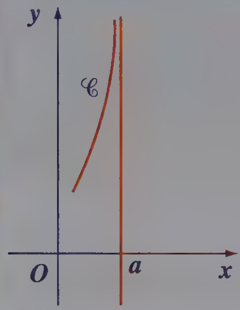


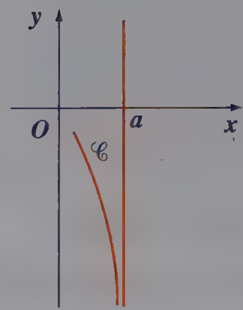
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$,

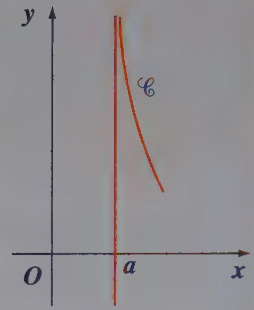
alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.



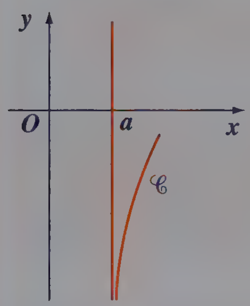
Asymptote verticale







Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$,



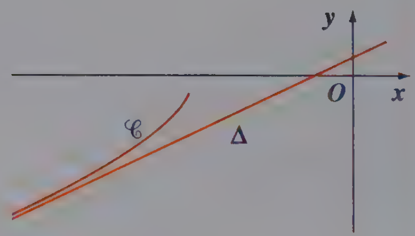
ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$,

alors la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

Asymptote oblique

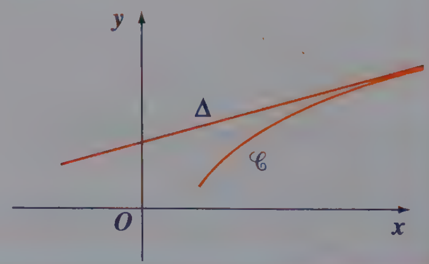
■ Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$,

alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.



■ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$,

alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.



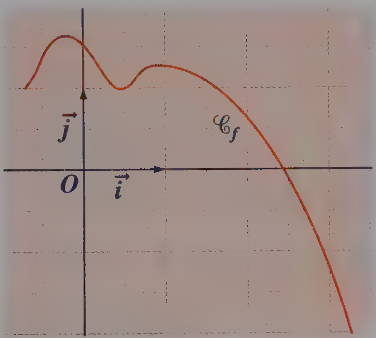
EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 86)

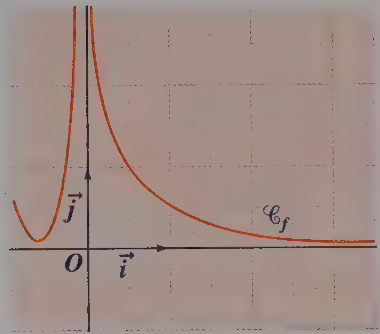
Chacune des figures **1°**, **2°**, **3°**, **4°**, **5°** et **6°** est la représentation graphique d'une fonction f. Lui associer le comportement de f en $+\infty$ qui convient :
$\lim\limits_{+\infty} f = -1$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$; $\lim\limits_{+\infty} f = 2$; $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$;

f n'admet pas de limite en $+\infty$.

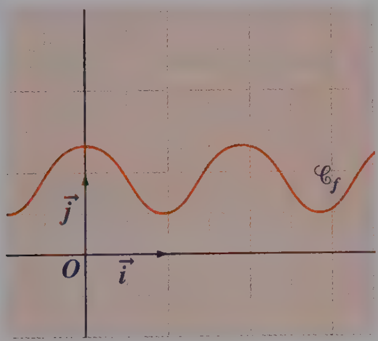
1°



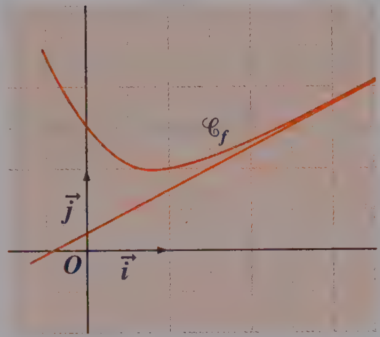
2°



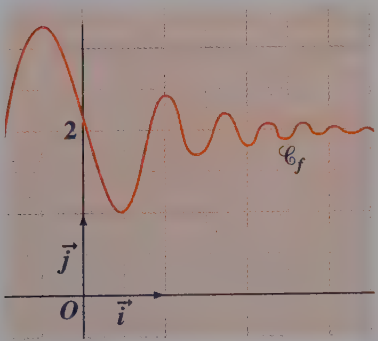
3°



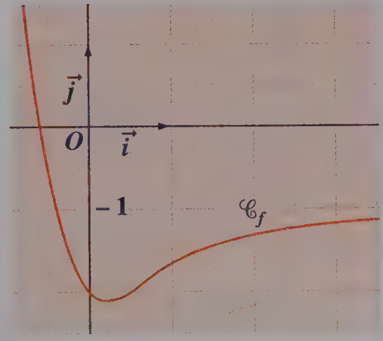
4°



5°



6°



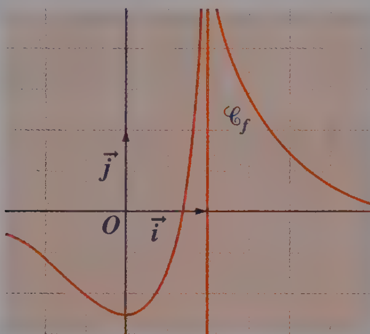
2 (Corrigé p. 86)

Chacune des figures **1°**, **2°**, **3°**, **4°**, **5°** et **6°** est la représentation graphique d'une fonction f. Lui associer le comportement de f en 1 qui convient :

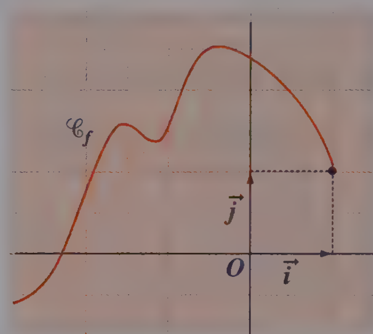
$\lim\limits_{1} f = -1$; $\lim\limits_{1} f = 1$; $\lim\limits_{1} f = 2$; $\lim\limits_{1} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{1} f = +\infty$;

f n'admet pas de limite en 1.

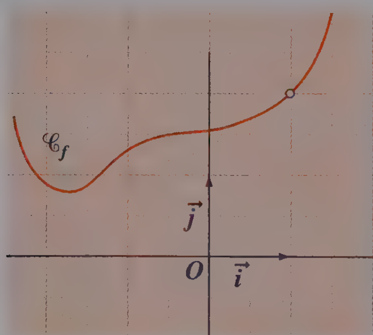
1°



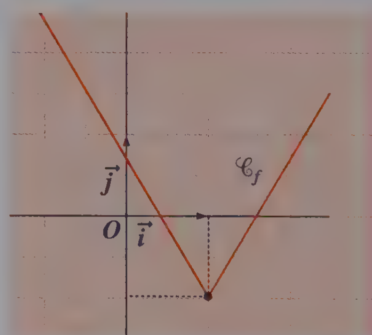
2°



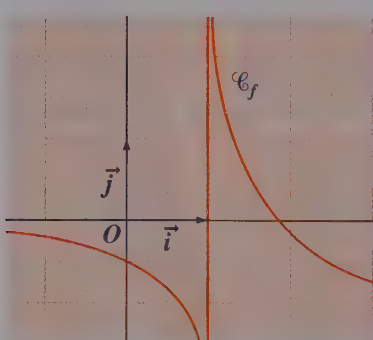
3°



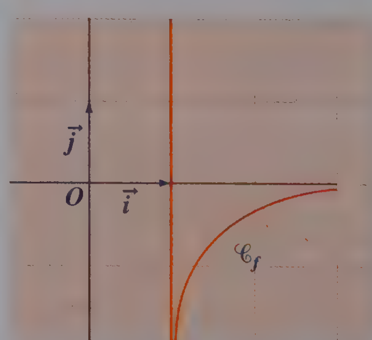
4°



5°



6°



Asymptotes

3 ★ 5 min (Corrigé p. 86)

f est la fonction : $x \mapsto 7 + \dfrac{5}{x - \sqrt{2}}$.

1° Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $x = \sqrt{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f.

2° Montrer que la droite $\mathscr{D}'$ d'équation : $y = 7$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4 ★ 5 min (Corrigé p. 87)

f est la fonction : $x \mapsto 9x + \dfrac{1}{x}$. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = 9x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5 ★ 5 min (Corrigé p. 87)

« Si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-6x + 7)$, alors la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = -6x + 7$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$. » Cette affirmation est-elle vraie ?

Limites

6 ★ 10 min (Corrigé p. 87)

À l'aide des opérations sur les limites, déterminer la limite de la fonction f proposée dans chacun des cas suivants.

1° $x \mapsto 3x^3 + 2x^2$ en $+\infty$.

2° $x \mapsto 3x^3 - 2x^2$ en $-\infty$.

3° $x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

4° $x \mapsto 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

5° $x \mapsto -3x\sqrt{x}$ en $+\infty$.

6° $x \mapsto \dfrac{3}{x^2 + 2}$ en $+\infty$.

7 ★★ 5 min (Corrigé p. 88)

Étudier le comportement en 1 des trois fonctions suivantes.

1° $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2° $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

3° $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

CORRIGÉS des exercices

1 **1°** $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

2° $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

3° ***f* n'admet pas de limite en + ∞.**

4° $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique de coefficient directeur positif.

5° $\lim\limits_{+\infty} f = 2$. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

6° $\lim\limits_{+\infty} f = -1$. La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2 **1°** $\lim\limits_{1} f = +\infty$. f n'est pas définie en 1 (elle est définie « autour » de 1) ; la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

2° $\lim\limits_{1} f = 1 = f(1)$. $A(1\,;\,1)$ est un point d'arrêt de $\mathscr{C}_f$. f n'est pas définie « à droite » de 1.

3° $\lim\limits_{1} f = 2$. f est définie en 1 et « autour » de 1.

4° $\lim\limits_{1} f = -1 = f(1)$. $A(1\,;\,-1)$ est un point anguleux de $\mathscr{C}_f$ (f est définie et n'est pas dérivable en 1).

5° ***f* n'admet pas de limite en 1.** En effet, en 1, f admet $-\infty$ pour limite à gauche et $+\infty$ pour limite à droite ; ces deux limites étant distinctes, on peut affirmer que f n'admet pas de limite en 1. On peut noter que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

6° $\lim\limits_{1} f = -\infty$. f n'est pas définie « à gauche » de 1. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

3 L'ensemble de définition de $f : x \mapsto 7 + \dfrac{5}{x - \sqrt{2}}$ est $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

1° On a $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} \left(x - \sqrt{2}\right) = 0^+$, donc : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = +\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$;

de même : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \left(x - \sqrt{2}\right) = 0^-$, donc : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} \dfrac{5}{x - \sqrt{2}} = -\infty$,

d'où : $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$.

Ceci prouve que **la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $x = \sqrt{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ de f.**

2° On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x-\sqrt{2}} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 7$;

de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x-\sqrt{2}} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 7$.

Ceci prouve que **la droite $\mathcal{D}'$ d'équation : $y = 7$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

4 $f : x \mapsto 9x + \dfrac{1}{x}$. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f(x) - 9x = 9x + \dfrac{1}{x} - 9x = \dfrac{1}{x}$,

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,

donc **la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 9x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

5 Voici un contre-exemple qui prouve que l'affirmation proposée est fausse.
Soit la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 6x + 7$.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-6x + 7) = -\infty$,
et bien sûr la courbe représentative de f (qui est une parabole) n'admet pas de droite asymptote.
On peut donc avoir : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-6x+7)$, sans que la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = -6x + 7$ soit asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$.

6 1° La fonction $f : x \mapsto 3x^3 + 2x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, est la somme des fonctions $x \mapsto 3x^3$ et $x \mapsto 2x^2$, chacune ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

2° La fonction $f : x \mapsto 3x^3 - 2x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$; elle est la somme des monômes $x \mapsto 3x^3$ et $x \mapsto -2x^2$.
Comme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2) = -\infty$, il vient : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

3° L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$ est $\mathbb{R}_+^*$.

On sait : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

4° L'ensemble de définition de $f : x \mapsto 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ est $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$, donc : $\lim\limits_{+\infty} f = 3$.

CHAPITRE 6

5° $f: x \mapsto -3x\sqrt{x}$ est définie seulement sur $\mathbb{R}_+$.

f est le produit : • de $x \mapsto -3x$, de limite $-\infty$ en $+\infty$;

• et de $x \mapsto \sqrt{x}$, de limite $+\infty$ en $+\infty$;

par conséquent : $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

6° $f: x \mapsto \dfrac{3}{x^2+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+2) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2+2}\right) = 0$.

Il en résulte : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

7 1° L'ensemble de définition de $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est $]1 \,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation x = 1 est asymptote à la courbe représentative de f.

2° L'ensemble de définition de $f: x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est $]-\infty \,; 1[\cup]1 \,; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation x = 1 est asymptote à la courbe représentative de f.

De même : $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0^-$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

3° L'ensemble de définition de $f: x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ est $]-\infty \,; 1[\cup]1 \,; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$,

donc : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

CHAPITRE 7

ÉTUDE DE FONCTIONS

Rappels de cours

I- Étudier une fonction

En général, étudier une fonction f consiste à adopter la démarche suivante.

- **Déterminer l'ensemble de définition** de f, s'il n'est pas explicitement donné dans l'énoncé.
- **Étudier si f est paire, impaire ou périodique,** ce qui permet, le cas échéant, de réduire l'ensemble d'étude.
- **Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable** et **calculer $f'(x)$** pour tout x de cet ensemble.
- **Déduire du signe de $f'(x)$ le sens de variation de f.**
- **Déterminer les limites** éventuelles de f là où le problème se pose, c'est-à-dire dans la plupart des cas, aux bornes ouvertes de son ensemble de définition.
- Enfin, **dresser le tableau de variation de f** (et vérifier sa cohérence).

II- Tracer sa courbe représentative

Lorsque cette demande est formulée, il est implicitement exigé de **mettre en évidence sur le graphique les éléments géométriques remarquables de la courbe :**

• asymptotes ;

• tangentes parallèles aux axes ;

• centre ou axe de symétrie.

Il est d'ailleurs préférable de commencer par placer ces éléments géométriques : le tracé de la courbe en est facilité.

CHAPITRE 7

EXERCICES
de contrôle des connaissances

Dans tous les exercices de ce chapitre :

- le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ orthogonal ;
- on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans ce repère.

1 (Corrigé p. 93)

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Sur quel ensemble suffit-il d'étudier f ?

2 (Corrigé p. 93)

Une fonction f est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;-1[\cup[0\,;+\infty[$. Lors de l'étude de f, où convient-il de chercher les limites ?

3 (Corrigé p. 93)

Soit f la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2.$

1° Déterminer le sens de variation de f.

2° Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.

4 (Corrigé p. 93)

f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ ?

5 (Corrigé p. 93)

f est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
Ces données suffisent-elles pour connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ (dans le demi-plan d'inéquation $x > 0$) ?

Fonctions rationnelles

6 ★ 15 min (Corrigé p. 95)

Soit f la fonction définie sur $[1\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{2}{x}.$$

1° a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2° Démontrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{2}-1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

3° Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ (le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ est supposé orthonormal).

7 ★★ 30 min (Corrigé p. 96)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2+\frac{16}{x}$.

1° Étudier la fonction f (ensemble de définition, limites aux bornes de l'ensemble de définition, sens de variation).

2° Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

CHAPITRE 7

Tangente, centre de symétrie, axe de symétrie, résolution graphique d'équations

8 ★★ 30 min (Corrigé p. 97)

Soit f la fonction : $[-3 ; 4] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3(2x-1)}{2x^2-2x+5}.$$

1° Vérifier que f est définie sur $[-3 ; 4]$ et justifier que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f(x)$ est du signe de $2x-1$.

2° Déterminer le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.

3° Démontrer que le point $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

4° Tracer $\mathscr{C}_f$ en prenant pour unités graphiques $\frac{1}{2}$ cm sur (Ox) et 2 cm sur (Oy).

9 ★★ 30 min (Corrigé p. 99)

Soit f la fonction : $x \mapsto 3x^3 - 4x - 1$.

1° a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra mettre x^3 en facteur dans l'expression de $f(x)$).

b. Étudier le sens de variation de f.

2° a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en son point I d'abscisse 0.

b. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}$.

c. Démontrer que I est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

3° a. Pour tout réel x, développer le produit $(x+1)(3x^2-3x-1)$.

b. En déduire les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses.

4° Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_f$.

5° Déterminer graphiquement le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs du réel m (présenter les résultats dans un tableau).

CORRIGÉS des exercices

1 Il suffit d'étudier f **sur [0 ; + ∞[:**

• le sens de variation de f sur]– ∞ ; 0] est contraire au sens de variation de f sur [0 ; + ∞[;

• si f admet une limite en + ∞, alors : $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f$; si f n'admet pas de limite en + ∞, alors f n'admet pas de limite en – ∞ ;

• si le repère est orthogonal, alors la courbe représentative de f admet la droite des ordonnées pour axe de symétrie.

2 f étant dérivable sur son ensemble de définition]– ∞ ; – 1[∪ [0 ; + ∞[, il convient de chercher ses limites aux bornes ouvertes de son ensemble de définition, c'est-à-dire **en – ∞, – 1 et + ∞.**

3 **1°** Pour tout réel x :

$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$,

donc : $\begin{cases} f'(1) = 0, \\ f'(x) > 0 \quad \text{si } x \neq 1, \end{cases}$

ce qui prouve que **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

f' est positive sur l'intervalle]– ∞ ; + ∞[et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de cet intervalle.

2° $f'(1) = 0$ et $f(1) = \dfrac{7}{3}$,

donc une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1 est : $\boldsymbol{y = \dfrac{7}{3}}$.

La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1 est parallèle à la droite des abscisses car $f'(1)$ est nul.

4 La droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de + ∞, donc :

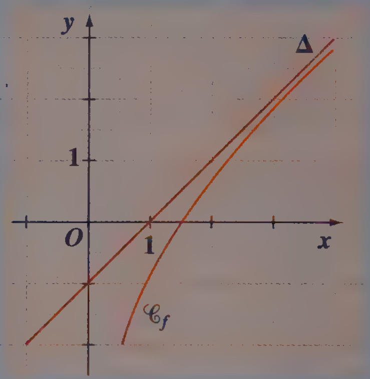
$\lim\limits_{+\infty} f = 2$;

de plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc : pour tout réel x, $f(x) < 2$. On en déduit que **$\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de Δ.**

5 Connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, c'est connaître le signe de $f(x) - (x-1)$ lorsque x appartient à]0 ; + ∞[.

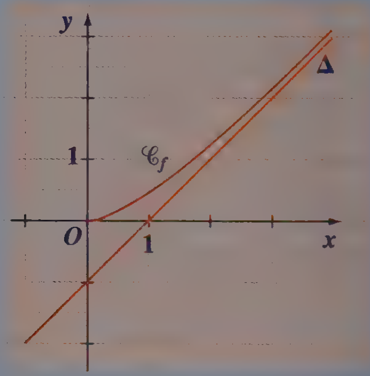
Dire que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de + ∞ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-1)\big) = 0$.

Pour nous convaincre qu'il ne suffit pas de savoir que f est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$ ni que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ pour connaître la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ, considérons les trois exemples suivants.



• $f : x \mapsto x - 1 - \dfrac{1}{x}$;

$\mathscr{C}_f$ est située sous Δ.

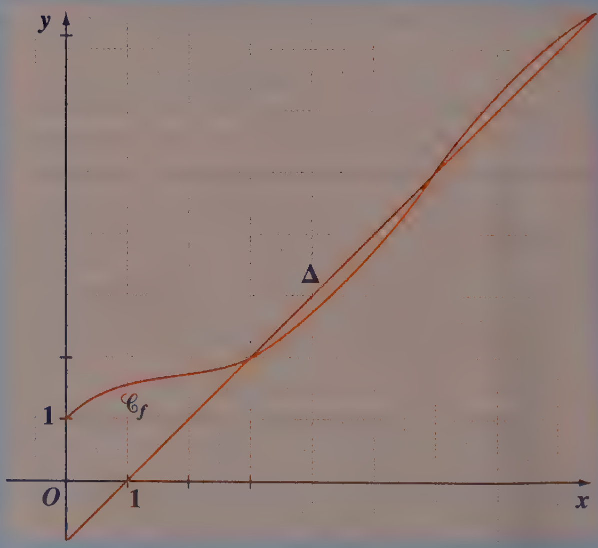


• $f : x \mapsto x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$;

$\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de Δ.

• $f : x \mapsto x - 1 + 2\dfrac{\sin x}{x}$;

$\mathscr{C}_f$ n'est située ni au-dessus, ni en dessous de Δ. Sur tout intervalle dont une extrémité est $+\infty$, $f(x) - (x - 1)$ prend des valeurs strictement négatives et des valeurs strictement positives.



L'ensemble de définition de f est $[1\,;+\infty[$.

1° a. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$,

donc : $\mathbf{\lim\limits_{+\infty} f=+\infty}$.

b. La fonction affine $x\mapsto\dfrac{x}{2}-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x\mapsto\dfrac{2}{x}$ est dérivable en tout réel non nul ; par conséquent, f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.

Pour tout x de $[1\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{2x^2},$$

Pour $x \geqslant 1$, $x+2>0$ et $2x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.

donc
- $f'(2)=0$;
- si $x\in[1\,;2[$, alors $f'(x)<0$;
- si $x\in\,]2\,;+\infty[$, alors $f'(x)>0$.

Ceci prouve que f **est strictement décroissante sur $[1\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.**

c. $f(1)=\dfrac{1}{2}-1+2=1{,}5$; $f(2)=1-1+1=1$; $f'(1)=-1{,}5$.

Le tableau de variation de f est :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-1{,}5$	$-$	0	$+$	
f	1,5	↘	1	↗	$+\infty$

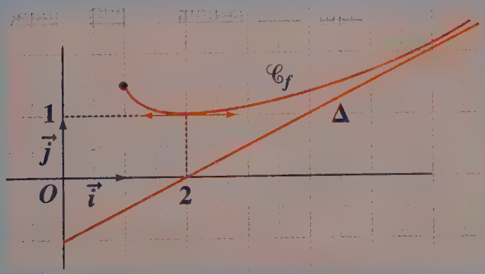
2° Pour tout x de $[1\,;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{2}{x}$, et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$,

donc la droite Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Soient x un réel de $[1\,;+\infty[$, M et P les points d'abscisses x respectivement de $\mathscr{C}_f$ et Δ : $\overline{PM}=y_M-y_P=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{x}{2}-1\right)=\dfrac{2}{x}$, donc : $\overline{PM}>0$.

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ **est située au-dessus de Δ dans le demi-plan d'inéquation $x\geqslant 1$.**

3°



7 1° L'ensemble de définition de $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{16}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.

On sait : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x} = 0$, donc : $\mathbf{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

De même : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x} = 0$, donc : $\mathbf{\lim\limits_{-\infty} f = +\infty}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{16}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{16}{x} = +\infty$,

donc : $\lim\limits_{0^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$,

et **la droite d'équation $x = 0$** (l'axe des ordonnées) **est asymptote à $\mathscr{C}_f$.**

• f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;0[\, \cup\,]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x non nul : $f'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 8)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^3 - 8$,

donc : • $f'(2) = 0$;

• si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$;

• si $x < 2$, alors $f'(x) < 0$.

> La fonction $x \mapsto x^3 - 8$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 2.

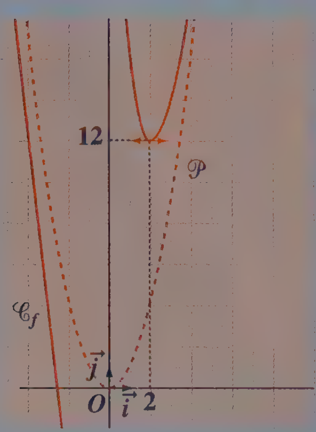
On en déduit que f **est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.**

$f(2)$, c'est-à-dire 12, est le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	12	↗	$+\infty$

2°



> Au voisinage de $+\infty$, au voisinage de $-\infty$: $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$,
> $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x} = 0$;
> on dit que $\mathscr{C}_f$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

1° L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x de $[-3 ; 4]$ tels que : $2x^2 - 2x + 5 \neq 0$.

Soit (E) l'équation du second degré : $2x^2 - 2x + 5 = 0$;
son discriminant Δ vérifie : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36$.
$\Delta < 0$, donc (E) n'admet pas de solution et,
pour tout réel x, $2x^2 - 2x + 5 > 0$.

$2x^2 - 2x + 5$ est du signe du coefficient de x^2.

On en déduit que **l'ensemble de définition de f est $[-3 ; 4]$** et que, **pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f(x)$ est du signe de $2x - 1$.**

2° f est la restriction à $[-3 ; 4]$ d'une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $[-3 ; 4]$.

Pour tout x de $[-3 ; 4]$: $f'(x) = 3 \times \dfrac{2(2x^2 - 2x + 5) - (2x - 1)(4x - 2)}{(2x^2 - 2x + 5)^2}$

$$= 3 \times \frac{4x^2 - 4x + 10 - 8x^2 + 4x + 4x - 2}{(2x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$= \frac{12(-x^2 + x + 2)}{(2x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + x + 2$.

Soit g le polynôme du second degré : $x \mapsto -x^2 + x + 2$; -1 étant une racine de g, son autre racine, notée α, vérifie : $\alpha \times (-1) = \dfrac{2}{-1}$, donc : $\alpha = 2$.

On en déduit le tableau de signes de g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut aussi calculer le discriminant pour calculer les racines de g.

puis : • $f'(-1) = f'(2) = 0$,
• pour tout x de $[-3 ; -1[\cup]2 ; 4]$, $f'(x) < 0$,
• pour tout x de $]-1 ; 2[$, $f'(x) > 0$,

ce qui implique que f **est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$ et strictement décroissante sur chacun des intervalles $[-3 ; -1]$ et $[2 ; 4]$.**

x	-3		-1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{-21}{29}$	↘		↗	1	↘	

$f(-3) = \dfrac{-21}{29} \approx -0{,}72$,
$f'(-3) = \dfrac{-120}{841} \approx -0{,}14$,
$f(4) = -f(-3)$,
$f'(4) = f'(-3)$.

3° Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, donc $x\vec{i} + y\vec{j} = \left(\frac{1}{2}+X\right)\vec{i} + Y\vec{j}$; on en déduit les formules de changement de repère : $\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y. \end{cases}$

Une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est $y = f(x)$,

donc une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ est $Y = f\left(X+\frac{1}{2}\right)$.

Or, pour tout réel X tel que $X+\frac{1}{2}$ appartienne à $[-3 ; 4]$, c'est-à-dire tel que X appartienne à $\left[-\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right]$:

$$f\left(X+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left[2\left(X+\frac{1}{2}\right)-1\right]}{2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(X+\frac{1}{2}\right)+5}$$

$$= \frac{3(2X+1-1)}{2X^2+2X+\frac{1}{2}-2X-1+5}$$

$$= \frac{6X}{2X^2+\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{12X}{4X^2+9}.$$

La fonction F définie sur $\left[-\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right]$ par $F(X) = \frac{12X}{4X^2+9}$ est impaire ;

en effet, pour tout x de $\left[-\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right]$:

$-X$ appartient à $\left[-\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right]$,

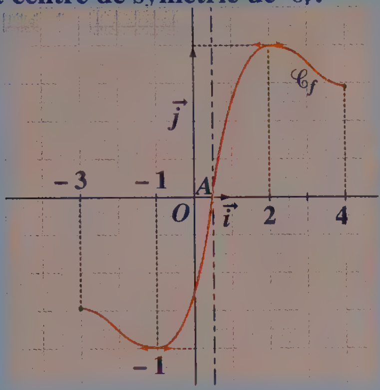
et : $F(-X) = \frac{12(-X)}{4(-X)^2+9} = \frac{-12X}{4X^2+9} = -F(X)$.

On a ainsi prouvé que **le point** $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

Démontrer que le point $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$, c'est démontrer que la fonction : $x \mapsto f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est impaire.

est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

4°



Pour tracer $\mathscr{C}_f$ en prenant pour unités graphiques $\frac{1}{2}$ cm sur (Ox), 2 cm sur (Oy), il est avantageux de programmer $4f$ plutôt que f.

La fonction $f : x \mapsto 3x^3 - 4x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

1° a. Pour tout réel x non nul, $f(x) = x^3\left(3 - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$,

et : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 3 \quad \left(\text{car } \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3} = 0\right),$$

donc : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

• De manière analogue, on obtient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (f est un polynôme), et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2).$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{9}$	↘	$-\frac{25}{9}$	↗	$+\infty$

2° a. Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point I d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0),$$

or : $f(0) = -1$, $f'(0) = -4$,

donc I a pour ordonnée -1 et **une équation de $\mathscr{T}$ est : $y = -4x - 1$.**

b. Soient x un réel, M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et P celui de $\mathscr{T}$ de même abscisse :

$$\overline{PM} = y_M - y_P = f(x) - (-4x - 1) = 3x^3 - 4x - 1 + 4x + 1 = 3x^3,$$

donc $\overline{PM}$ est du signe de x, ce qui prouve que **la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}$ dans le demi-plan d'inéquation $x \geqslant 0$, et en dessous dans le demi-plan d'inéquation $x \leqslant 0$;** de plus, **I est leur seul point d'intersection.**

x et x^3 sont de même signe.

c. $I(0\,;-1)$.

Déterminons une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(I\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(I\,;\vec{i},\vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, donc $x\vec{i} + y\vec{j} = -\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} = X\vec{i} + (Y-1)\vec{j}$; on en déduit les formules de changement de repère : $\begin{cases} x = X \\ y = Y - 1. \end{cases}$

Une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est $y = 3x^3 - 4x - 1$, donc une équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(I\,;\vec{i},\vec{j})$ est : $Y - 1 = 3X^3 - 4X - 1$, ou encore : $Y = 3X^3 - 4X$.

La fonction $F : X \mapsto 3X^3 - 4X$ étant impaire,

pour tout réel X, $\quad F(-X) = 3(-X)^3 - 4(-X) = -3X^3 + 4X = -F(X)$,

on peut conclure que **$I(0\,;-1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.**

3° a. Pour tout réel x :

$$(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{3x^2-3x-1}) = 3x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 3x - x - 1 = \boldsymbol{3x^3 - 4x - 1}.$$

b. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, et :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 4x - 1 = 0,$$

donc, d'après la réponse à la question **3° a.** :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(3x^2 - 3x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } 3x^2 - 3x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Résolvons l'équation (E) du second degré : $3x^2 - 3x - 1 = 0$.

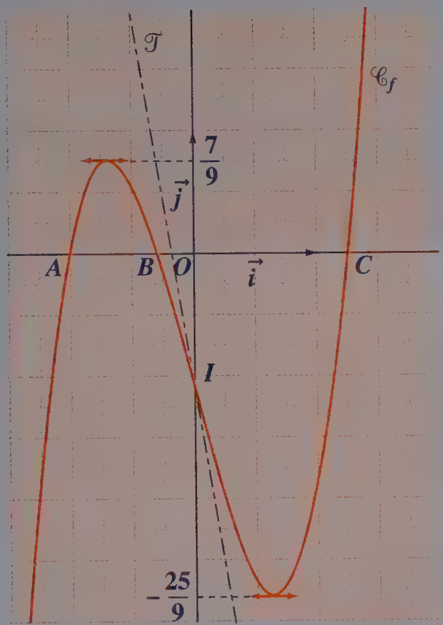
Son discriminant Δ vérifie : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 9 + 12 = 21$;

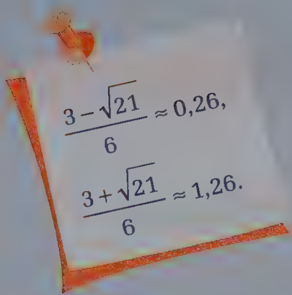
$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}.$$

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite des abscisses sont les trois points A, B et C d'abscisses respectives -1, $\dfrac{3-\sqrt{21}}{6}$ et $\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}$.

4°





5° Le nombre $N(m)$ de solutions de l'équation $f(x) = m$ est **le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = m$** (qui est parallèle à la droite des abscisses). Par conséquent :

m	$-\infty$		$-\frac{25}{9}$		$\frac{7}{9}$		$+\infty$
$N(m)$		1	2	3	2	1	

CHAPITRE 8

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Rappels de cours

I- Vocabulaire

Définition

Une **suite** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations

- Une suite peut se noter comme une fonction.

Par exemple, on dit : la suite $u : n \mapsto -\sqrt{n}+2$ est définie sur $\mathbb{N}$.

- L'image d'un naturel n par la suite u, appelée aussi **terme d'indice** $\boldsymbol{n}$, est notée u_n.
- La suite u est parfois notée (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II- Propriétés

u est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Suite majorée, minorée, bornée

- Dire que u est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $u_n \leqslant M$.
- Dire que u est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout naturel n, $m \leqslant u_n$.
- Dire que u est **bornée** signifie que u est à la fois majorée et minorée.

Sens de variation

- Dire que u est **croissante** signifie que : pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n \leqslant u_{n+1}}$.
- Dire que u est **décroissante** signifie que : pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n \geqslant u_{n+1}}$.
- Dire que u est **constante** signifie que : pour tout naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_{n+1}}$.
- Dire que u est **monotone** signifie que u est croissante ou que u est décroissante.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 106)

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n + 2$.
Calculer u_2.

2

(Corrigé p. 106)

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n + 2$.
Calculer v_2.

3

(Corrigé p. 106)

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite u est majorée et/ou si elle est minorée.

1° $u : n \mapsto n^2$.

2° $u : n \mapsto -n^4$.

3° $u : n \mapsto \dfrac{1}{2^n}$.

4

(Corrigé p. 106)

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = u_n - 3$.

5

(Corrigé p. 107)

Déterminer le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 et par $v_{n+1} = v_n + (v_n)^4$.

EXERCICES

EXERCICES d'entraînement

Calculs de termes

6 ★ 5 min (Corrigé p. 107)

Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5 dans chacun des cas suivants.

1° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

2° (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

3° u_n est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

7 ★ 5 min (Corrigé p. 107)

Calculer u_5 lorsque la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}}.$$

8 ★ 5 min (Corrigé p. 108)

1° Soit la suite $u : n \mapsto 3n - 7$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

2° Soit la suite $v : n \mapsto 5^n$.
Exprimer v_{n+1} puis v_{2n} en fonction de v_n .

9 ★ 5 min (Corrigé p. 108)

Trouver le plus petit indice à partir duquel la suite (u_n) est définie.

1° $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

2° $u_n = \dfrac{1}{n-\sqrt{2}}$.

3° $u_n = \sqrt{2n-15}$.

4° $u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$.

5° $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$.

Sens de variation, majorant, minorant

10 ★ 15 min (Corrigé p. 108)

Étudier le sens de variation de chaque suite u proposée :

1° $u : n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$.

2° $u : n \mapsto (-5)^n$.

3° $u : n \mapsto \dfrac{3^n}{n+1}$.

4° $u : u_0 = 4$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n - 0{,}71$.

5° $u : n \mapsto n^2 + n - 5$.

11 ★ 5 min (Corrigé p. 109)

Minorer et majorer au mieux la suite $u : n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

12 ★ 5 min (Corrigé p. 110)

Soit u la suite $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$.

Quel est le plus petit naturel n tel que : $u_n \leqslant 10^{-3}$?

13 ★★ 10 min (Corrigé p. 110)

Les suites proposées sont-elles bornées ?

1° $u : n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}} + 2$.

2° $v : n \mapsto (-1)^n$.

3° $w : n \mapsto \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

14 ★★ 10 min (Corrigé p. 110)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

Trouver un entier n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant 2$.

CORRIGÉS des exercices

1 Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 3n + 2$, donc : $\boldsymbol{u_2} = (3 \times 2) + 2 = \mathbf{8}$.

2 $v_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n + 2$,
donc : $v_1 = 3 \times v_0 + 2 = (3 \times 2) + 2 = 8$, $\boldsymbol{v_2} = 3 \times v_1 + 2 = (3 \times 8) + 2 = \mathbf{26}$.

La suite (u_n) est définie de façon explicite, on peut calculer chacun de ses termes directement. La suite (v_n) est définie de façon récurrente ; pour calculer un terme, il faut déjà connaître le terme d'indice précédent.

3 1° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = n^2$, donc : $u_n \geqslant 0$.
En revanche, u_n peut être plus grand que n'importe quel réel A (si $A \geqslant 0$, il suffit de choisir n supérieur à $\sqrt{A}$).
La suite u est minorée par 0, mais n'est pas majorée.

La suite u est la restriction de la fonction carré à $\mathbb{N}$.

2° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = -n^4$, donc : $u_n \leqslant 0$.
En revanche, u_n peut être plus petit que n'importe quel réel A.
La suite u est majorée par 0, mais n'est pas minorée.

3° Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, donc : $u_n > 0$ et $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^0}$,

d'où $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
La suite u est minorée par 0 et majorée par 1.

4 Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n - 3$,
donc : $u_{n+1} - u_n = -3$,
d'où : $u_{n+1} - u_n < 0$.
On en déduit que **la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.**

Dans ce cas, le sens de variation ne dépend pas du 1[er] terme.

5 Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = v_n + (v_n)^4,$$

donc : $v_{n+1} - v_n = (v_n)^4$,

d'où : $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.

Cela prouve que **la suite (v_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**

Dans ce cas, le sens de variation ne dépend pas du 1[er] terme.

6 1° On a : $u_1 = (5 \times 10^1) + 2 = 50 + 2 = \mathbf{52}$,

puis : $\mathbf{u_2 = 502}$, $\mathbf{u_3 = 5\,002}$, $\mathbf{u_4 = 50\,002}$ et $\mathbf{u_5 = 500\,002}$.

2° On obtient successivement :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}},\ u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{2}{3}},\ u_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{3}{5}},$$

$$u_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \mathbf{\frac{5}{8}} \text{ et } u_5 = \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \mathbf{\frac{8}{13}}.$$

3° On a : $u_1 = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$,

$$u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}},$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{11}{6}},$$

$$u_4 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{25}{12}},$$

$$u_5 = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{137}{60}}.$$

On peut noter que, pour tout naturel n non nul :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}.$$

7 On obtient de proche en proche :

$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et de la même manière :

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},\ u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ u_5 = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{6}}}.$$

Plus généralement, on peut établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

EXERCICES

CORRIGÉS

8 1° Pour tout naturel n, on a :
$u_{n+1} = 3(n+1) - 7 = 3n + 3 - 7 = 3n - 7 + 3$,
donc : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 3}$.

$u_{n+1} = u_n + 3$ est une relation de récurrence.

2° Pour tout naturel n, on a :
$v_{n+1} = 5^{n+1} = 5 \times 5^n$,
donc : $\boldsymbol{v_{n+1} = 5v_n}$;
de même : $v_{2n} = 5^{2n} = (5^n)^2$,
d'où : $\boldsymbol{v_{2n} = (v_n)^2}$.

9 1° $\boldsymbol{u_n = \dfrac{1}{n^2}}$ **n'est définie que si $\boldsymbol{n \geqslant 1}$.**

On dit que la suite (u_n) est définie à partir de l'indice 1.

2° Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n - \sqrt{2} \neq 0$;
par conséquent $\boldsymbol{u_n = \dfrac{1}{n - \sqrt{2}}}$ est définie à partir de l'indice 0.

3° Le naturel n vérifie $2n - 15 \geqslant 0$ si et seulement si : $n \geqslant 7{,}5$; on en déduit que $\boldsymbol{u_n = \sqrt{2n - 15}}$ **est définie seulement pour $\boldsymbol{n \geqslant 8}$.**

4° Pour tout n de $\mathbb{N}$, $3^n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 0$;
donc la suite $\boldsymbol{u_n = \dfrac{1}{3^n - 1}}$ est définie (seulement) pour $\boldsymbol{n \geqslant 1}$.

5° Pour tout naturel n, $n^2 + n + 1 \neq 0$;
donc la suite $\boldsymbol{u_n = \dfrac{1}{n^2 + n + 1}}$ est définie pour tout naturel $\boldsymbol{n}$.

10 1° Pour tout naturel n,
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 5(n+1) - 1 - n^3 + 4n^2 + 5n + 1$
or : $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$,
donc : $u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 5n - 8$.
-1 est une racine du polynôme du second degré $x \mapsto 3x^2 - 5x - 8$;
son autre racine est $\dfrac{8}{3}$, d'où : $u_{n+1} - u_n = 3(n+1)\left(n - \dfrac{8}{3}\right) = (n+1)(3n-8)$;
$u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $3n - 8$, il vient :
- si $n \leqslant 2$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$;
- si $n \geqslant 3$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite $\boldsymbol{u}$ est strictement croissante à partir du rang 3.

Autre façon de résoudre $3x^2 - 5x - 8 = 0$. $\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2$; les solutions de l'équation : $3x^2 - 5x - 8 = 0$ sont : $\dfrac{5+11}{6}$ et $\dfrac{5-11}{6}$, c'est-à-dire : $\dfrac{8}{3}$ et -1.

2° La suite $u : n \mapsto (-5)^n$ est définie sur $\mathbb{N}$, et, pour tout naturel n,
- si n est pair, alors $u_n > 0$;
- si n est impair, alors $u_n < 0$.

u n'est donc pas monotone, même à partir d'un certain rang.

3° La suite $u : n \mapsto \dfrac{3^n}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

Pour tout naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2},$$

or : $\dfrac{3n+3}{n+2} > 1$,

donc, pour tout naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,

soit $u_{n+1} > u_n$ (car $u_n > 0$).

Ceci prouve que **u est strictement croissante.**

Il peut être avantageux de calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer à 1 lorsque la suite u est à termes strictement positifs. Cette méthode est exclue si la suite n'est pas à termes de signe constant.

4° La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}71$, donc : $u_{n+1} - u_n < 0$.

Par conséquent, **u est strictement décroissante.**

5° La suite $u : n \mapsto n^2 + n - 5$ est définie sur $\mathbb{N}$.

D'autre part, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc il en est de même de leur somme $x \mapsto x^2 + x - 5$.

Il en résulte que **u est strictement croissante.**

11 $u : n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant 1,$$

c'est-à-dire :

$$0 < u_n \leqslant 1.$$

Donc la suite u est minorée par 0 et majorée par 1.

La suite u, décroissante, est majorée par son premier terme : $u_1 = 1$.
Cet encadrement est le meilleur possible :
- on ne peut pas améliorer la majoration, car $u_1 = 1$;
- on ne peut pas améliorer la minoration, car u_n est aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand.

CORRIGÉS

CHAPITRE 8

12 $u : n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$ est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout naturel n non nul : $u_n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow n^2 \geqslant 10^3$;

or : $31^2 = 961$ et $32^2 = 1\,024$,

donc le plus petit naturel n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$ est 32.

13 **1°** $u : n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}} + 2$ est définie sur $\mathbb{N}^*$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$,

c'est-à-dire : $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Donc la suite u est bornée par 2 et 3.

La valeur 3 est atteinte pour $n = 1$, et u_n est aussi proche de 2 que l'on veut (sans jamais l'atteindre), pourvu que n soit suffisamment grand.

2° $v : n \mapsto (-1)^n$ est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} \text{si } n \text{ est impair, alors } v_n = -1, \\ \text{si } n \text{ est pair, alors } v_n = 1. \end{cases}$

Donc la suite v est bornée par – 1 et 1.

3° $w : n \mapsto \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \geqslant 0$, c'est-à-dire : $w_n \geqslant 0$;

de plus : $\sqrt{n} \leqslant n+1$, donc : $w_n \leqslant 1$.

Donc la suite w est bornée par 0 et 1.

14 Au cours de la résolution de l'exercice 6, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n), et on a observé que, pour tout naturel n non nul :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1},$$

donc : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,

ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

De plus, on avait obtenu : $u_4 = \dfrac{25}{12}$

et on a : $\dfrac{25}{12} \geqslant 2$.

On peut donc affirmer : **si $n \geqslant 4$, alors $u_n \geqslant 2$.**

On a : $u_3 = \dfrac{11}{6}$, donc : $u_3 < 2$; par conséquent, 4 est le plus petit naturel n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant 2$.

CHAPITRE 9

SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Rappels de cours

I- Suites arithmétiques

Définition et expression explicite de u_n

- Dire qu'une suite u est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel r tel que, pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. (r est la **raison** de la suite u.)

- Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout naturel n,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Somme de termes consécutifs

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique u, alors :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

II- Suites géométriques

Définition et expression explicite de u_n

- Dire qu'une suite u est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que, pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$. (q est la **raison** de la suite u.)

- Si u est une suite géométrique de raison non nulle q, alors pour tout naturel n,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Somme de termes consécutifs

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1, alors :

$$S = \frac{1^{\text{er}} \text{ terme } (1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1 - q}.$$

EXERCICES de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 116)

Dans chacun des cas suivants, quel est le nombre de termes de la somme S ?

1° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

2° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{17}$.

3° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, avec n entier naturel.

4° $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, avec n entier naturel non nul.

5° $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n+1}$, avec n entier naturel.

6° $S = u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1}$, avec n entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

2

(Corrigé p. 116)

Une suite arithmétique u est de raison 1,5 et de premier terme u_0 avec : $u_0 = -4$.
Quels sont ses six premiers termes ?

3

(Corrigé p. 116)

n est un entier naturel non nul.
On pose : $S = 1 + 2 + \ldots + n$.
Que vaut la somme S ?

4

(Corrigé p. 116)

Une suite géométrique u est de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme u_0 avec : $u_0 = 16$.

Quels sont ses huit premiers termes ?

5

(Corrigé p. 116)

n est un entier naturel.
On pose : $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$.
Que vaut la somme S ?

Suites arithmétiques

Dans les quatre exercices suivants, u désigne une suite arithmétique de raison r.

6 ★ 5 min (Corrigé p. 116)

Sachant que $u_7 = 3\,000$ et $r = -50$, calculer le terme u_1.

7 ★ 5 min (Corrigé p. 117)

Sachant que $u_0 = 100$ et $u_{100} = 50$, calculer la raison r.

8 ★ 5 min (Corrigé p. 117)

Sachant que $u_0 = 1\,000$ et $r = 600$, calculer le terme u_5 et la somme S telle que : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$.

9 ★ 10 min (Corrigé p. 117)

Soit u la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que :
$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8$ et $u_1 + u_{11} = -3$.
Déterminer sa raison r et son premier terme u_0.

Suites géométriques

Dans les cinq exercices suivants, u désigne une suite géométrique de raison q.

10 ★ 5 min (Corrigé p. 117)

Sachant que $u_5 = 729$ et $q = -3$, calculer les termes u_{10} et u_0.

11 ★ 5 min (Corrigé p. 117)

Sachant que $u_0 = 1$ et $u_7 = 128$, calculer la raison q.

12 ★ 5 min (Corrigé p. 118)

Soit u la suite géométrique de raison $-\dfrac{2}{3}$ et de premier terme u_0 tel que : $u_0 = 9$. Calculer S, avec $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}$.

13 ★ 5 min (Corrigé p. 118)

Sachant que $u_0 = -2$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer le terme u_5 et la somme S telle que :

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$.

14 ★ 5 min (Corrigé p. 119)

u est une suite géométrique, de raison positive, telle que :
$u_4 = 44$ et $u_{10} = 352$.
Calculer u_{13}.

Quelques problèmes concrets

15 ★★ 15 min (Corrigé p. 119)

1° On organise un tournoi individuel de tennis avec 128 participants.

a. Sachant que chaque joueur ayant perdu une partie est éliminé, quel est le nombre de parties au 1er tour, au 2e tour, au 3e tour ?

b. Quel est le nombre total de parties à prévoir ?

2° Reprendre l'énoncé du **1°** en remplaçant les 128 participants par 2^n participants, où n est un naturel non nul.

16 ★★ 15 min (Corrigé p. 119)

Un jeu télévisé est organisé de la façon suivante : si le candidat donne une bonne réponse à la première question, il gagne 25 euros. Ensuite, chaque bonne réponse rapporte 15 euros de plus que la précédente. Le jeu s'arrête à la première réponse fausse.
Quel est le nombre minimal de bonnes réponses que doit donner un candidat pour que le total de ses gains s'élève au moins à 1 000 euros ?

17 ★★ 15 min (Corrigé p. 120)

On place un capital de 100 000 euros à 7 % par an.

1° De combien dispose-t-on au bout de quatre ans ? Au bout de dix ans ?

2° **a.** Combien d'années sont nécessaires pour voir le capital doubler ?

b. Pour voir le capital tripler ?

Suites ni arithmétiques ni géométriques et pourtant...

18 ★★ 15 min (Corrigé p. 121)

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout naturel n :

$u_{n+1} = 2u_n + 1$,

et soit la suite v telle que, pour tout naturel n :

$v_n = u_n + 1$.

1° Prouver que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique.

2° a. Démontrer que la suite v est géométrique.

b. En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction du naturel n.

3° Déterminer, en fonction du naturel n, les sommes S et S' telles que :

$S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $S' = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

CORRIGÉS des exercices

1 1° $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$. **S est la somme de 11 termes.**

2° $S = u_1 + u_2 + ... + u_{17}$. **S est la somme de 17 termes.**

3° $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$. **S est la somme de $(n + 1)$ termes.**

4° $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$. **S est la somme de n termes.**

5° $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n+1}$. **S est la somme de $(n + 2)$ termes.**

6° $S = u_2 + u_3 + ... + u_{n+1}$. **S est la somme de n termes.**

2 Les six premiers termes de la suite u sont : u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 avec :
$\boldsymbol{u_0 = -4 ; u_1 = -2{,}5 ; u_2 = -1 ; u_3 = 0{,}5 ; u_4 = 2}$ **et** $\boldsymbol{u_5 = 3{,}5}$.

3 $S = 1 + 2 + ... + n$ est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

On a donc : $\boldsymbol{S = n \times \frac{(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Le premier terme de S est 1, le dernier terme est n.

4 Les huit premiers termes de la suite u sont : u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6 , u_7 ,
avec : $\boldsymbol{u_0 = 16 ; u_1 = -8 ; u_2 = 4 ; u_3 = -2 ; u_4 = 1 ; u_5 = -\frac{1}{2} ; u_6 = \frac{1}{4}}$ **et**

$\boldsymbol{u_7 = -\frac{1}{8}}$.

5 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Le premier terme 1 s'écrit aussi 2^0.

Par conséquent : $S = 1 \times \frac{(1+2^{n+1})}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1}$,

donc : $\boldsymbol{S = 2^{n+1} - 1}$.

6 On a : $u_7 = u_1 + 6r$,

d'où : $u_1 = u_7 - 6r = 3\,000 - 6 \times (-50)$,

donc : $\boldsymbol{u_1 = 3\,300}$.

7 On a : $u_{100} = u_0 + 100r$,

donc : $r = \dfrac{u_{100} - u_0}{100} = \dfrac{50 - 100}{100}$,

d'où : $\boldsymbol{r = -0{,}5}$.

8 On trouve $u_5 = u_0 + 5r = 1\,000 + (5 \times 600)$,

donc : $\boldsymbol{u_5 = 4\,000}$.

S est la somme des six premiers termes de la suite arithmétique u ;

donc, on a : $S = \dfrac{6(u_0 + u_5)}{2} = \dfrac{6 \times (1\,000 + 4\,000)}{2} = 3 \times 5\,000$,

d'où : $\boldsymbol{S = 15\,000}$.

9 u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, donc, pour tout naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

On en déduit :

$$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = 4u_0 + (4 + 6 + 8 + 10)r = 4u_0 + 28r,$$

$$u_1 + u_{11} = 2u_0 + (1 + 11)r = 2u_0 + 12r.$$

Or : $u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8$ et $u_1 + u_{11} = -3$,

donc : $\begin{cases} 4u_0 + 28r = -8 \ ; \\ 2u_0 + 12r = -3. \end{cases}$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} u_0 + 7r = -2 \ ; \\ -u_0 - 6r = 1{,}5. \end{cases}$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on a alors : $r = -0{,}5$.

On obtient : $\boldsymbol{u_0 = \dfrac{3}{2}}$ **et** $\boldsymbol{r = -\dfrac{1}{2}}$.

10 On a : $u_{10} = u_5 \times q^5 = 729 \times (-3)^5$,

donc : $\boldsymbol{u_{10} = -177\,147}$.

D'autre part : $u_5 = u_0 \times q^5 = u_0 \times (-3)^5$,

donc : $u_0 = \dfrac{u_5}{(-3)^5} = \dfrac{729}{-243}$,

d'où : $\boldsymbol{u_0 = -3}$.

11 On a : $u_7 = u_0 \times q^7$,

donc : $q^7 = \dfrac{u_7}{u_0} = 128$;

or : $2^7 = 128$,

donc : $\boldsymbol{q = 2}$.

12 S est la somme des huit termes consécutifs de la suite géométrique u, de u_3 à u_{10} ; la raison de u est $-\dfrac{2}{3}$,

donc : $$S = u_3 \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}.$$

Or : $u_0 = 9$,

donc : $u_3 = 9 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$,

d'où :

$$S = 9 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^8}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\,9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1-\frac{2^8}{3^8}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$S = -\,9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{3^7} \times \frac{3^8-2^8}{3+2} = -\frac{2^3}{3^8} \times \frac{3^8-2^8}{5}$$

$$\boldsymbol{S = -\frac{10\,088}{6\,561}}.$$

13 On a : $u_5 = u_0 \times q^5 = (-2) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{1}{2^4}$,

donc : $$u_5 = -\frac{1}{16}.$$

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$; donc S est la somme des six premiers termes de la suite u.
On en déduit :

$$S = u_0 \times \frac{1-q^6}{1-q} = (-2) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}},$$

donc : $$S = -\,4 \times \left[1 - \frac{1}{64}\right] = -\,4 \times \frac{63}{64},$$

d'où : $$\boldsymbol{S = -\frac{63}{16}}.$$

14 Soit q la raison de la suite géométrique u ;

$u_{10} = u_4 q^6$, donc : $\quad q^6 = \dfrac{u_{10}}{u_4}$;

or : $\quad u_4 = 44 \quad$ et $\quad u_{10} = 352$,

donc : $\quad q^6 = \dfrac{352}{44} = 8.$

D'autre part : $\quad u_{13} = u_{10} q^3 = 352\, q^3.$

On a : $\quad q^6 = 8$, soit $(q^3)^2 = 8$ et $q \geqslant 0$, donc $q^3 \geqslant 0$.

On en déduit : $\quad q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Finalement : $\quad u_{13} = 352 \times 2\sqrt{2},$

soit : $\quad \boldsymbol{u_{13} = 704\sqrt{2}}.$

15 1° **a.** Il y aura : • **64 parties au 1^er^ tour,**
• **32 parties au 2^e^ tour** (il ne restera que 64 joueurs),
• **16 parties au 3^e^ tour** (il ne restera que 32 joueurs),
et ainsi de suite.

b. Or : $\quad 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127,$
donc, **le nombre total de parties à prévoir est 127**.

2° Il y aura $\dfrac{2^n}{2}$ parties, c'est-à-dire 2^{n-1} parties au 1er tour.

D'un tour au tour suivant, le nombre de parties est divisé par 2.
Le nombre total de parties est :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^1 + 2^0.$$

Il s'agit de calculer la somme S_n des n termes consécutifs de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

$$S_n = 1 \times \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 2^n - 1.$$

Il faudra donc prévoir $2^n - 1$ parties.

> Qui a été suffisamment astucieux pour s'apercevoir qu'il y a autant de parties à prévoir que de joueurs à éliminer, c'est-à-dire $2^n - 1$?

16 Pour tout naturel n non nul, appelons u_n le gain, en euros, touché pour la $n^{\text{ième}}$ réponse juste.
La suite $u : n \mapsto u_n$ (définie sur $\mathbb{N}^*$) est la suite arithmétique de raison 15 et de premier terme u_1 tel que $u_1 = 25$.

Pour tout naturel n non nul, le gain S_n en euros, touché pour les n réponses justes est la somme des n premiers termes consécutifs de la suite u, donc :

$$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2},$$

avec
$$u_n = u_1 + (n-1) \times 15.$$

Il vient :
$$S_n = n \times \frac{25 + 25 + (n-1) \times 15}{2} = \frac{n}{2}(15n + 35).$$

Déterminons le plus petit naturel n tel que :

$$\frac{n}{2}(15n + 35) \geqslant 1\,000,$$

c'est-à-dire tel que : $3n^2 + 7n - 400 \geqslant 0$.
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré :

$$3x^2 + 7x - 400 = 0 \ (E).$$

Soit Δ son discriminant :
$\Delta = 4\,849$, les solutions de (E) sont donc les réels x' et x'' tels que :

$$x' = \frac{-7 - \sqrt{4\,849}}{6} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-7 + \sqrt{4\,849}}{6}.$$

On a :
$$x' < 0 \quad \text{et} \quad 10 < x'' < 11.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $3x^2 + 7x - 400 \geqslant 0$ est $]-\infty\,; x'] \cup [x''\,; +\infty[$, donc 11 est le plus petit naturel n tel que :

$$\frac{n}{2}(15n + 35) \geqslant 1\,000.$$

x		x'		x''	
signe de $3x^2 + 7x - 400$	+	0	−	0	+

Pour gagner au moins 1 000 euros, le candidat doit donner au moins 11 réponses consécutives exactes.

1° Notons u_n le capital en euros au bout de n années.

On a donc :
$$u_0 = 100\,000,$$
$$u_1 = u_0 + \frac{7}{100}u_0 = 1{,}07u_0,$$
$$u_2 = u_1 + \frac{7}{100}u_1 = 1{,}07u_1,$$

et, pour tout naturel n : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{7}{100}u_n$,

soit :
$$u_{n+1} = 1{,}07\,u_n.$$

Cela prouve que la suite $n \mapsto u_n$, définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique ; sa raison est 1,07 et son premier terme est 100 000.

On a donc, pour tout naturel n :

$$u_n = (1{,}07)^n \times u_0,$$

soit : $u_n = (1{,}07)^n \times 100\,000.$

On en déduit :

$$u_4 = (1{,}07)^4 \times 100\,000 = 131\,079{,}601$$

et $u_{10} = (1{,}07)^{10} \times 100\,000,$

d'où $u_{10} \approx 196\,715{,}1357$ à 10^{-4} près.

Finalement le capital, au centième près, est de 131 079,60 euros au bout de quatre ans et de 196 715,14 euros au bout de dix ans.

2° a. Le capital aura doublé au bout de la $n^{\text{ième}}$ année dès que l'on aura :

$\dfrac{u_n}{u_0} \geqslant 2$, c'est-à-dire : $(1{,}07)^n \geqslant 2$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$(1{,}07)^{10} \approx 1{,}97$ à 10^{-2} près,

$(1{,}07)^{11} \approx 2{,}10$ à 10^{-2} près.

La suite géométrique $n \mapsto (1{,}07)^n$ est croissante car : $1{,}07 > 1$.

Le capital doublera au cours de la 11e année.

b. Suivons la même démarche.

Cherchons le plus petit naturel n tel que : $(1{,}07)^n \geqslant 3$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$(1{,}07)^{16} \approx 2{,}95$ à 10^{-2} près,

$(1{,}07)^{17} \approx 3{,}16$ à 10^{-2} près.

Le capital triplera au cours de la 17e année.

18 Les suites u et v sont définies sur $\mathbb{N}$.

1° $u_0 = 1,$

$u_1 = 2u_0 + 1 = 3,$

$u_2 = 2u_1 + 1 = 7,$

$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc u **n'est pas une suite arithmétique**.

$\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$, donc u **n'est pas une suite géométrique**.

L'égalité $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est arithmétique. De même, l'égalité $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_1}{u_0}$ ne permettrait pas d'affirmer que la suite u est géométrique.

2° a. Pour tout naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1),$$

soit $v_{n+1} = 2v_n$;

donc v **est une suite géométrique** ;

sa raison est 2, son premier terme v_0 est tel que $v_0 = u_0 + 1 = 2$.

EXERCICES

CORRIGÉS

CHAPITRE 9

b. Pour tout naturel n :

$$v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n,$$

soit $\boldsymbol{v_n = 2^{n+1}}$,

$$u_n = v_n - 1,$$

soit $\boldsymbol{u_n = 2^{n+1} - 1}$.

3° S est la somme de $n + 1$ termes consécutifs de la suite géométrique v de raison 2 et dont le premier terme est v_0,

donc $S = \dfrac{v_0(1-2^{n+1})}{1-2} = \dfrac{2(1-2^{n+1})}{-1}$,

d'où $\boldsymbol{S = 2(2^{n+1} - 1)}$.

$$S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

$$S' = v_0 - 1 + v_1 - 1 + \ldots + v_n - 1,$$

$$S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (n + 1) \times (-1),$$

$$S' = 2(2^{n+1} - 1) - n - 1,$$

donc $\boldsymbol{S' = 2^{n+2} - n - 3}$.

CHAPITRE 10

POURCENTAGES

Rappels de cours

I- Proportionnalité et pourcentage

Considérons un ensemble E, pris comme ensemble de référence, ayant un nombre fini non nul b d'éléments, et une partie A de E, ayant a éléments.

Définitions

- La proportion représentée par la partie A dans E (ou la part de A dans E) est :

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

- La part de A dans E, en pourcentage, est le nombre t tel que : $\dfrac{t}{100} = \dfrac{a}{b}$,

soit : $t = \dfrac{a}{b} \times 100.$

- Dire que le nombre a vaut t % du nombre b signifie : $a = \dfrac{t}{100} \times b$,

ou encore : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{t}{100}$.

- Prendre t % d'une quantité, c'est calculer : $\text{quantité} \times \dfrac{t}{100}$.

II- Pourcentage d'évolution

- Augmenter une quantité de t %, c'est la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.
- Diminuer une quantité de t %, c'est la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.
- Les nombres $1 + \dfrac{t}{100}$ et $1 - \dfrac{t}{100}$ sont les coefficients multiplicateurs associés à ces évolutions.

III- Taux d'évolution

■ En sciences humaines ou en sciences expérimentales, on est amené à évaluer un taux d'évolution. On dit qu'une quantité varie de t % lorsque :

$$\frac{\textbf{(valeur finale)} - \textbf{(valeur initiale)}}{\textbf{(valeur initiale)}} = \frac{t}{100}.$$

■ Si t est **positif,** on a une **augmentation** (ou hausse) de t % ;
si t est **négatif,** on a une **diminution** (ou baisse) de t %.

IV- Indice

En économie, certaines séries chronologiques sont données en indices (exemple : indice CAC 40).
C'est une valeur fictive de la variable étudiée qui a été fixée à 100 à une date déterminée.
À partir de cette valeur, les variations sont données en points.

V- Évolutions successives

■ Prendre t % de t' % d'une quantité, c'est calculer :

$$\textbf{quantité} \times \frac{t}{100} \times \frac{t'}{100}.$$

■ Si une quantité subit une variation de t % suivie d'une variation de t' % (t et t' étant comptés positivement dans le cas d'une augmentation et négativement dans le cas d'une diminution), alors la quantité est multipliée par :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t'}{100}\right).$$

Remarques

Les réels t et t' sont supposés non nuls.

- Une augmentation (ou hausse) de t % et une diminution (ou baisse) de t % ne se compensent pas.
- Une diminution (ou baisse) de t % et une augmentation (ou hausse) de t % ne se compensent pas.
- Deux augmentations (ou hausses) successives de t % et t' % ne sont pas équivalentes à une augmentation de $(t + t')$ %.
- Deux diminutions (ou baisses) successives de t % et t' % ne sont pas équivalentes à une diminution de $(t + t')$ %.

Approximations

Pour un taux t faible,

- n hausses successives de t % équivalent pratiquement à une hausse de nt % ;
- n baisses successives de t % équivalent pratiquement à une baisse de nt %.

Pour deux taux t et t' faibles,

- une augmentation de t % suivie d'une diminution de t' % équivaut pratiquement à une variation de $(t - t')$ % ;
- une diminution de t % suivie d'une augmentation de t' % équivaut pratiquement à une variation de $(-t + t')$ %.

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 131)

Un lycée accueille 1 600 élèves. ~~Deux élèves sur cinq sont en 1^re^~~, 25 % des filles du lycée sont en 1^re^ et ~~40 % des élèves de 1^re^ sont des filles~~.

1° Compléter le tableau suivant :

classe \ sexe	Filles	Garçons	Total
1^re^	256	384	640
Autres classes	768	192	960
Total	1024	576	1 600

2° Quel est le pourcentage de garçons dans l'établissement ?

3° **a.** Quel est le pourcentage de garçons dans les classes de 1^re^ ?

b. Dans les autres classes ?

4° Quel est le pourcentage de garçons en 1^re^ parmi les garçons de l'établissement ?

2

(Corrigé p. 132)

Associer le coefficient multiplicateur correspondant à chacune de ces variations.

1° Une augmentation de 5 %. 2° Une diminution de 0,3 %.

3° Une augmentation de 100 %. 4° Aucune variation.

5° Une augmentation de 4 % suivie d'une augmentation de 3 %.

3

(Corrigé p. 132)

À quelle variation, en pourcentage, correspondent les coefficients multiplicateurs suivants : **a.** 1,21 ; **b.** 2,3 ; **c.** 0,68 ; **d.** 0,996 ?

4

(Corrigé p. 132)

Un indice varie de 300 points à 315 points.

Quelle est la variation de cet indice en points ? En pourcentage ?

5

(Corrigé p. 132)

Votre carte de fidélité est remplie : vous avez droit à 3 rabais successifs de 5 % sur un article. Vous achetez une veste à 35 €. Les prix sont arrondis à l'euro près. Cette réduction vaut-elle, dans la pratique, un rabais de 15 % ?

Pourcentages

6 ★ 5 min (Corrigé p. 133)

Le prix de vente d'un article s'obtient en augmentant le prix d'achat du tiers de sa valeur.

1° Comment obtient-on le prix d'achat à partir du prix de vente ?

2° À quel pourcentage du prix de vente est égal le prix d'achat ?

7 ★ 15 min Les sommes ont été converties en euros (Corrigé p. 133)

Le projet de loi de finances pour 2001 prévoit 304 294 millions d'euros de recettes fiscales brutes répartis comme suit (les valeurs étant données en millions d'euros) :

- Taxe sur la valeur ajoutée 137 427
- Impôt sur le revenu 51 913 17%
- Impôts sur les sociétés 49 594 16%
- Autres impôts indirects 39 816 13%
- Taxe intérieure sur les produits pétroliers 25 544 8%

1° Calculer à quel pourcentage du total des recettes fiscales brutes se monte la recette de chacune de ces cinq catégories (on donnera les résultats à 10^{-2} près).

2° Représenter cette répartition par un diagramme circulaire (si possible en utilisant un tableur).

8 ★ 10 min (Corrigé p. 135)

Une facture est libellée ainsi :

Prix total des réparations	**700,00 €**
Dont TVA à 19,6 %	**137,20 €**

En supposant exact le prix total des réparations, cette facturation est-elle correcte ? Sinon, la rectifier.

Pourcentage de pourcentage

9 ★ 10 min (Corrigé p. 135)

M. Dupont a un revenu annuel de 16 800 €.
Le montant imposable des revenus s'obtient en appliquant deux déductions forfaitaires successives de 10 % puis 20 %.

1° Calculer le montant imposable de M. Dupont.

2° M. Durand déclare qu'il serait plus avantageux d'appliquer d'abord la déduction fiscale de 20 % puis celle de 10 %.
M. Michel prétend que c'est faux puisque dans les deux cas la déduction globale est de 30 %.
Qu'en pensez-vous ?

Pourcentage d'évolution

10 ★★ 15 min (Corrigé p. 135)

L'année de sa création, en 1996, une entreprise fabriquant des CD en a produit 120 000.
En 1997, la production augmente de 75 000 CD.
L'année suivante, l'un de ses fournisseurs fait faillite et la production baisse de 20 %.
En 1999, l'entreprise décide d'investir dans du matériel plus performant qui lui permet d'augmenter sa production de 15 % par an pendant trois ans.
Les conditions d'embauche des jeunes lui étant favorables, l'entreprise accroît le nombre de ses employés, ce qui lui permet de multiplier sa production par 1,2 en 2002.

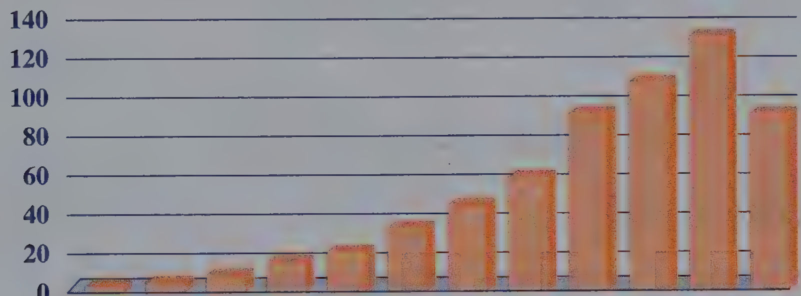
1° a. Déterminer le taux d'augmentation globale de cette production depuis la création de l'entreprise (sans calculer les productions intermédiaires).
b. Quelle sera la production en 2002 ?

2° On suppose que la dernière progression enregistrée en 2002 se poursuit pendant cinq ans. En quelle année la production aura-t-elle quadruplé la production initiale ?

11 ★ ★ 20 min (Corrigé p. 137)

Le schéma ci-après donne l'évolution du chiffre d'affaires des activités de courtage du groupe Joliez-Régol.

Chiffres d'affaires net convertis en centaines de milliers d'euros



	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	98-99	99-00
Chiffre d'affaires	5,5	6,7	13,6	28,9	31,2	51,8	67,5	91	140,7	166	198,5	139,2

Source : Les Échos, novembre 2000

Il est à noter que la durée de l'exercice 1998-1999 *est de* 15 *mois, celui de* 1999-2000 *de* 12 *mois.*

1° Calculer le pourcentage d'évolution d'un exercice sur l'autre.

2° Quelles constatations peut-on faire ?

12 ★ ★ 20 min (Corrigé p. 138)

Le tableau suivant donne la diffusion de quelques titres de la presse informatique :

Diffusion totale	1997	1999
L'Ordinateur individuel	117 721	133 953
PC Expert (Rachat)	102 600	107 770
PC Direct (Rachat)	84 100	93 620
PC Magazine	94 164	91 408
01 Informatique	63 957	71 324
Info PC	90 625	79 287
Le Monde Informatique	53 201	47 395

1° Déterminer, en pourcentage, l'évolution du volume des ventes de chacun de ces titres.

2° Déterminer, en pourcentages :

a. l'importance de chacun de ces titres par rapport au groupe qu'ils constituent en 1997, puis en 1999 ;

b. l'évolution du volume de vente du groupe entre 1997 et 1999.

3° Déterminer alors, en pourcentages, l'évolution de la part de chacun dans le groupe.

4° Retrouver ces résultats à l'aide d'un tableur.

Indices

13 ★ 10 min (Corrigé p. 141)

On demande de compléter le tableau suivant concernant l'indice Euro-Performance-Fininfo des Sicav.

	En fin 1999	Au 27/10/2000	Taux de progression en %
Indice de trésorerie	**180,53**	**186,11**	
Indice obligations		**211,72**	**3,45**
Indice actions et diversifiées	**293,19**		**3,74**

Les Sicav constituent l'univers de référence de la gestion du portefeuille. Indice 100 au 29 décembre 1989.

Source : Euro-Performance-Fininfo

1 1° Le tableau complété est :

sexe / classe	Filles	Garçons	Total
1^{re}	**256**	**384**	**640**
Autres classes	**768**	**192**	**960**
Total	**1 024**	**576**	**1 600**

- $1\,600 \times \frac{2}{5} = 640$, donc 640 élèves sont en 1^{re}.
- $\frac{40}{100} \times 640 = 256$, donc 256 filles sont en 1^{re}.
- Soit f le nombre total de filles du lycée. f vérifie la relation : $\frac{25}{100} \times f = 256$. Donc $f = 1\,024$.

2° L'établissement comporte 576 garçons parmi ses 1 600 élèves.

Or $\frac{576}{1\,600} = 0,36 = \frac{36}{100}$.

Le pourcentage de garçons au sein de l'établissement est de 36 %.

3° **a.** Parmi les élèves de 1^{re}, 40 % sont des filles, donc **60 % sont des garçons** (100 – 40 = 60).

Parmi les 640 élèves de 1^{re}, 384 sont des garçons.
Or $\frac{384}{640} = 0,60$.
Donc 60 % des élèves de 1^{re} sont des garçons.

b. Parmi les 960 élèves des autres classes, 192 sont des garçons.

Or $\frac{192}{960} = 0,20$.

Donc **les autres classes comptent 20 % de garçons.**

4° Parmi les 576 garçons de l'établissement, 384 sont en 1^{re}.

Or $\frac{384}{576} \approx 0,67$. Donc **67 % des garçons sont en 1^{re}.**

2 1° Le coefficient multiplicateur est **1,05.**

2° Le coefficient multiplicateur est **0,997.**

3° Le coefficient multiplicateur est **2.**

4° Le coefficient multiplicateur est **1.**

5° $1{,}04 \times 1{,}03 = 1{,}0712$.

Le coefficient multiplicateur est **1,0712.**

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de t % est $1+\dfrac{t}{100}$, à une diminution de t % est $1-\dfrac{t}{100}$.

3 **a.** $1{,}21 = 1 + 0{,}21 = 1 + \dfrac{21}{100}$; ce coefficient multiplicateur correspond à **une augmentation de 21 %.**

b. $2{,}3 = 1 + 1{,}3 = 1 + \dfrac{130}{100}$; ce coefficient multiplicateur correspond à **une augmentation de 130 %.**

c. $0{,}68 = 1 - 0{,}32 = 1 - \dfrac{32}{100}$; ce coefficient multiplicateur correspond à **une diminution de 32 %.**

d. $0{,}996 = 1 - 0{,}004 = 1 - \dfrac{0{,}4}{100}$; ce coefficient multiplicateur correspond à **une diminution de 0,4 %.**

4 $315 - 300 = 15$.

Donc **l'indice augmente de 15 points.**

Le taux de variation de l'indice est :

$$\frac{315-300}{300} = 0{,}05 = \frac{5}{100}.$$

L'indice a progressé de 5 %.

Le taux de variation s'avère très utile dans le calcul des variations d'indices.

5 Le prix payé prenant en compte les trois rabais de 5 % sera calculé comme suit :

$35 \times 0{,}95^3 = 30{,}008125$; donc le prix réclamé à la caisse sera de 30 €.

Si on applique directement la baisse de 15 %, on a : $35 \times 0{,}85 = 29{,}75$, valeur qui sera arrondie à 30 €.

Dans la pratique, la différence n'étant que de quelques centimes, **on pourra effectivement approximer les trois rabais successifs de 5 % par un rabais global de 15 %.**

6 1° Le prix de vente d'un article s'obtient en multipliant le prix d'achat par $1+\frac{1}{3}$, soit par $\frac{4}{3}$.

Donc **le prix d'achat s'obtient en multipliant le prix de vente par** l'inverse de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire par $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

$\frac{4}{3} \approx 1{,}3333$: il s'agit d'une augmentation d'environ 33,33 %.

2° Ceci correspond à une diminution de 25 %.
Par suite, le prix d'achat est égal **à 75 % du prix de vente.**

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{25}{100}$: il s'agit d'une diminution de 25 %.

7 1° Pour déterminer le pourcentage relatif à la taxe sur la valeur ajoutée, il suffit d'effectuer le calcul suivant : $\frac{137\,427}{304\,294} \times 100 \approx 45{,}16$.

Donc la taxe sur la valeur ajoutée représente 45,16 % des recettes prévues.
On procède de même pour les autres catégories de recette.
Regroupons les réponses dans un tableau :

Nature	Montant en millions d'euros	Pourcentage
Taxe sur la valeur ajoutée	137 427	45,16
Impôt sur le revenu	51 913	17,06
Impôts sur les sociétés	49 594	16,30
Autres impôts indirects	39 816	13,08
Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544	8,39
Total	304 294	99,99

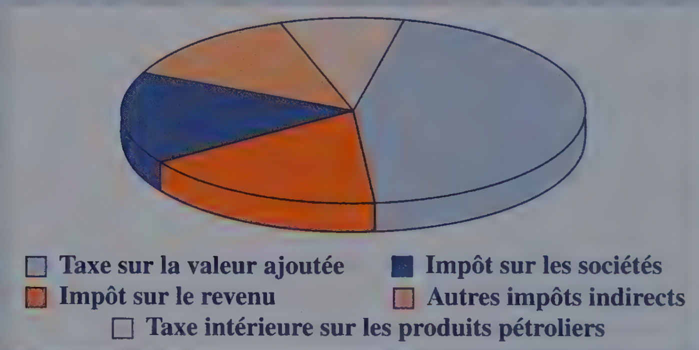
Compte tenu du fait que tous les pourcentages sont arrondis à 10^{-2} *près, il est normal de ne pas trouver exactement un total de* 100 %.

2° Par exemple avec **Excel** :
- entrer les données dans la plage de cellules A1:A5 et B1:B5 ;
- sélectionner les plages de cellules A1:A5 et B1:B5 ;
- cliquer sur l'assistant graphique ;
- sélectionner l'option **Secteur** dans **Type de graphique**, puis choisir un sous-type graphique ;
- cliquer sur **fin**.

Microsoft Excel - Classeur1.xls

	A	B	C	D	E	F
1	Taxe sur la valeur ajoutée	137 427				
2	Impôt sur le revenu	51 913				
3	Impôts sur les sociétés	49 594				
4	Autres impôts indirects	39 816				
5	Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544				
6						

Avec le deuxième sous-type de graphique, on obtient :



Noter qu'en déplaçant le pointeur de la souris sur les différents secteurs, une valeur approchée du pourcentage qui leur correspond s'affiche.

On peut aussi faire apparaître les pourcentages avec Excel :

• dans B6 faire apparaître la somme des valeurs de la colonne : sélectionner la plage de cellules B1 à B6, puis cliquer sur la touche Σ de la barre d'outils ;

• dans C1 indiquer la formule permettant de calculer la fréquence relative à la valeur contenue dans B1, soit : **=$B1/B$6** ;

• ensuite tirer le curseur (petit carré noir, qui activé se transforme en une croix) vers le bas jusqu'à la case C6, afin de répéter la formule ;

• mettre en forme les résultats en sélectionnant la colonne C, puis en sélectionnant successivement **Format, Cellule, Nombre, Pourcentage.**

On obtient :

Microsoft Excel - Classeur1.xls

	A	B	C	D	E	F	G
1	Taxe sur la valeur ajoutée	137 427	45,16%				
2	Impôt sur le revenu	51 913	17,06%				
3	Impôts sur les sociétés	49 594	16,30%				
4	Autres impôts indirects	39 816	13,08%				
5	Taxe intérieure sur les produits pétroliers	25 544	8,39%				
6		304 294	100,00%				
7							

Σ (somme automatique)

Curseur

8 Les prix sont exprimés en euros : notons X le prix total (TVA comprise) et Y le prix hors taxes. Le montant en euros de la TVA est alors égal à X – Y.

On a : $$X=\left(1+\frac{19,6}{100}\right)\times Y=1,196\times Y \text{ d'où } Y=\frac{1}{1,196}X.$$

De plus : $$X-Y=X-\frac{1}{1,196}X=\left(1-\frac{1}{1,196}\right)\times X=\frac{0,196}{1,196}\times X,$$

avec : $$\frac{0,196}{1,196}\approx 0,1639 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Donc le montant de la TVA est égal à 19,6 % du prix hors taxes Y, mais seulement à 16,4 % du prix total X.

Or : $\frac{0,196}{1,196}\times 700\approx 114,72.$

Le montant de la TVA qui devrait figurer sur la facture **est donc de 114,72 €.**

Remarque : 700 × 0,196 = 137,20, c'est la somme indiquée sur la facture. Or une augmentation de *t* % n'est jamais compensée par une diminution de *t* %. On pouvait donc prévoir dès le départ que la facture serait erronée.

La bonne facturation est :

Prix total des réparations	**700,00 €**
Dont TVA à 19,6 %	**114,72 €**

9 **1°** Le montant annuel affecté de la première déduction forfaitaire de 10 % est :

$$16\,800\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=16\,800\times 0,9=15\,120 \text{ €}.$$

Après la déduction de 20 %, **le montant imposable sera égal à :**

$$15\,120\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=15\,120\times 0,8=\mathbf{12\,096 \text{ €}.}$$

2° Soit R le revenu annuel en euros et M le montant imposable de M. Dupont.

On a : $$M=\left(1-\frac{20}{100}\right)\left[\left(1-\frac{10}{100}\right)\times R\right]=0,8\times 0,9\ R=0,72\ R.$$

Si on établit à présent le montant imposable M′ selon les règles de M. Durand, on obtient :

$$M'=\left(1-\frac{10}{100}\right)\left[\left(1-\frac{20}{100}\right)\times R\right]=0,9\times 0,8\ R=0,72\ R.$$

EXERCICES

CORRIGÉS

Par conséquent, appliquer une déduction de 20 % suivie d'une déduction de 10 % revient à appliquer une déduction de 10 % suivie d'une déduction de 20 %, **ce qui donne tort à M. Durand et en partie raison à M. Michel.**

Une variation de t % suivie d'une variation de t' % n'est pas équivalente à une variation de $(t + t')$ %.

Cependant, $0,72 = 1 - \frac{28}{100}$, donc la déduction globale est de 28 % et non de 30 % comme l'affirmait M. Michel.

10 Pour résoudre ce problème, nous allons évaluer les coefficients multiplicateurs successifs correspondant aux variations de la production d'un exercice à l'autre.

1° a. Le coefficient multiplicateur permettant d'obtenir la production de 1997 à partir de celle de 1996 est : $\frac{120\,000 + 75\,000}{120\,000} = 1,625.$

De 1997 à 1998, la production baisse de 20 %, donc est multipliée par :

$$1 - 0,20 = 0,8.$$

De 1998 à 2001, la production augmente chaque année de 15 %, donc elle est multipliée chaque année par 1,15, donc $(1,15)^3$ pour les trois années.

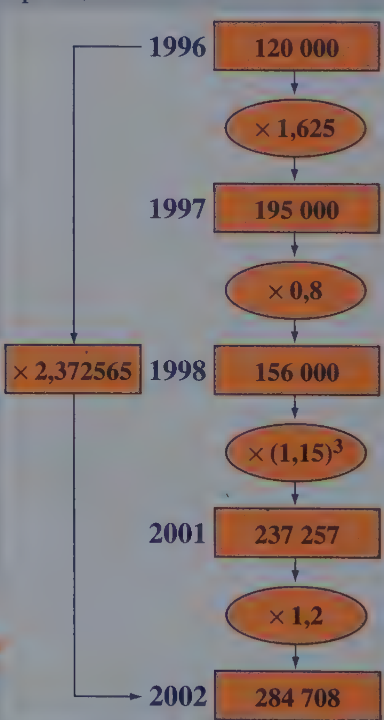
De 2001 à 2002, la production est multipliée par 1,2.

Le schéma ci-contre résume la situation.

Il est clair que **le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution globale de la production depuis sa création est le produit des coefficients multiplicateurs :**

$$1,625 \times 0,8 \times 1,15^3 \times 1,2 = \mathbf{2,372565.}$$

b. Donc **en 2002 la production sera d'environ 284 708 CD.**



On peut vérifier le résultat en évaluant les productions successives :
En 1996 : 120 000.
En 1997 : 120 000 × 1,625 = 195 000
(= 120 000 + 75 000).
En 1998 : 195 000 × 0,8 = 156 000.
En 1999 : 156 000 × 1,15 = 179 400.
En 2000 : 179 400 × 1,15 = 206 310.
En 2001 : 206 310 × 1,15 ≈ 237 257.
En 2002 : 237 257 × 1,2 ≈ 284 708.

2° Si, après 2002, la production est multipliée par 1,2 chaque année, alors le coefficient multiplicateur global permettant de passer de 1996 à 2003 sera : $2{,}372565 \times 1{,}2$.

Celui correspondant à 2004 sera de $2{,}372565 \times 1{,}2^2$.

À l'aide de la calculatrice, on détermine la plus petite valeur de n pour laquelle le produit $2{,}372565 \times 1{,}2^n$ est au moins égal à 4.

Or $2{,}372565 \times 1{,}2^2 \approx 3{,}4$ et $2{,}372565 \times 1{,}2^3 \approx 4{,}1$.

Donc l'entier n cherché est 3 et **la production initiale quadruplera en 2005.**

11 **1°** En notant X_n le montant du chiffre d'affaires de l'année n et X_{n+1} celui de l'année $n + 1$, **le pourcentage d'évolution entre ces deux années est :**

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \times 100.$$

Par exemple, entre l'année 1993 et l'année 1994, on a : $\dfrac{67{,}5 - 51{,}8}{51{,}8} \times 100 \approx 30{,}3$.

Donc le chiffre d'affaires a progressé de 30,3 % entre 1993 et 1994.

On peut aussi procéder ainsi : $\dfrac{67{,}5}{51{,}8} \approx 1{,}303 = 1 + \dfrac{30{,}3}{100}$.

Le tableau suivant regroupe les résultats trouvés :

Exercice	Chiffre d'affaires	Évolution en pourcentage
1988	5,5	
		+ 21,8 %
1989	6,7	
		+ 102,3 %
1990	13,6	
		+ 112,5 %
1991	28,9	
		+ 8,1 %
1992	31,2	
		+ 66,0 %
1993	51,8	
		+ 30,3 %
1994	67,5	
		+ 34,8 %
1995	91	
		+ 54,6 %
1996	140,7	
		+ 18,0 %
1997	166	
		+ 19,6 %
1998-1999	198,5	
		− 29,9 %
1999-2000	139,2	

On peut retrouver les résultats à l'aide d'un tableur.

Avec Excel par exemple :

• entrer les données dans les plages de cellules A1:A13 et B1:B13 ;

• dans la cellule C3, introduire la formule donnant l'évolution du chiffre d'affaires entre les deux premières années, soit : **=(B3-B2)/B2** ;

• tirer ensuite le curseur vers le bas jusqu'à C13 pour réitérer la formule ;

	A	B	C
1	Exercice	Chiffre d'affaires	Evolution en pourcentage
2	1988	5,5	
3	1989	6,7	=(B3-B2)/B2
4	1990	13,6	102,3%
5	1991	28,9	112,5%
6	1992	31,2	8,1%
7	1993	51,8	66,0%
8	1994	67,5	30,3%
9	1995	91,0	34,8%
10	1996	140,7	54,6%
11	1997	166,0	18,0%
12	1998-1999	198,5	19,6%
13	1999-2000	139,2	-29,9%
14			

• mettre en forme la colonne C pour avoir les résultats en pourcentage : **Format, Cellule, Nombre, Pourcentage,** éventuellement régler le nombre de décimales de l'affichage.

On obtient l'écran ci-dessus.

2° On peut dire que le groupe s'est rapidement développé (doublement du chiffre d'affaires en 90 et 91, puis environ tous les deux ans jusqu'en 1999). On peut aussi noter un net repli lors du dernier exercice, qui le ramène au niveau de l'activité en 1996.

12 **1°** Pour déterminer, en pourcentage, l'évolution de *L'Ordinateur individuel*, il suffit de trouver le coefficient multiplicateur permettant d'obtenir la valeur en 1999 à partir de la valeur en 1997 :

$$\frac{133\,953}{117\,721} \approx 1{,}1379.$$

Donc *L'Ordinateur individuel* a progressé d'environ 13,79 % en deux ans.

L'avant-dernière colonne du tableau page suivante récapitule les résultats.

2° a. Le volume de vente en 1997 est de 606 368 et : $\dfrac{117\,721}{606\,368} \times 100 \approx 19{,}4.$

Donc *L'Ordinateur individuel* représente environ 19,4 % du groupe.

Les colonnes « % » du tableau page suivante récapitulent les résultats pour 1997 et 1999.

b. $\dfrac{624\,757}{606\,368} \approx 1{,}030$ à 10^{-3} près ; **le volume de ventes du groupe a donc progressé d'environ 3 % entre 1997 et 1999.**

3° L'évolution, en pourcentage, de la part de *L'Ordinateur individuel* dans le groupe se détermine comme suit :

$\dfrac{21{,}44}{19{,}41} \approx 1{,}1046,$ ce qui indique une augmentation de 10,46 %.

Finalement, le volume de vente de cette revue a augmenté de 13,79 % et sa part dans le groupe de 10,46 %.

Le total de ces pourcentages doit en théorie valoir 100. Il est ici arrondi à 10^{-1} près.

Ces résultats apparaissent dans la dernière colonne du tableau.

Diffusion totale	1997	%	1999	%	Évolution en %	
					volume	part
L'Ordinateur individuel	117 721	19,41	133 953	21,44	+ 13,79	+ 10,46
PC Expert (Rachat)	102 600	16,92	107 770	17,25	+ 5,04	+ 1,95
PC Direct (Rachat)	84 100	13,87	93 620	14,99	+ 11,32	+ 8,07
PC Magazine	94 164	15,53	91 408	14,63	– 2,93	– 5,80
01 Informatique	63 957	10,55	71 324	11,42	+ 11,52	+ 8,25
Info PC	90 625	14,95	79 287	12,69	– 12,51	– 15,12
Le Monde Informatique	53 201	8,77	47 395	7,59	– 10,91	– 13,45
Total	606 368	100,00	624 757	100,01	+ 3,03	

4° On peut retrouver ces résultats avec Excel :

• introduire les données dans les plages A1:A8, B1:B8 et D1:D8 ;

• en B9 : =SOMME(B2:B8)
et en D9 : =SOMME(D2:D8) ;

• les colonnes C, E, F et G devant donner des résultats en pourcentages, mettre en forme le format de ces colonnes : **Format, Cellule, Nombre, Pourcentage** (et 2 chiffres après la virgule) ;

• la colonne C donne la part du volume de vente de chaque revue dans le groupe ; dans la cellule C2, entrer la formule : =B2/B$9,
puis tirer le curseur vers le bas jusqu'à la cellule C9, les celulles C3, …, C9 contiennent les formules : =B3/B$9, …, =B9/B$9 ;

• procéder de manière analogue pour remplir les plages de cellules E2:E9, F2:F9 et G2:G8, en entrant respectivement dans les cellules E2, F2 et G2 les formules : =D2/D$9, =(D2/B2)-1, =(E2/C2)-1.

On aurait pu également entrer les formules de la manière suivante.

• En C2 : =B2/SOMME(B$2:B$8).

Référence relative **Référence absolue**

Les cellules C3 à C9 contiennent respectivement les formules :

=B3/SOMME(B$2:B$8), …, =B9/SOMME(B$2:B$8).

• En E2 : =D2/SOMME(D$2:D$8).

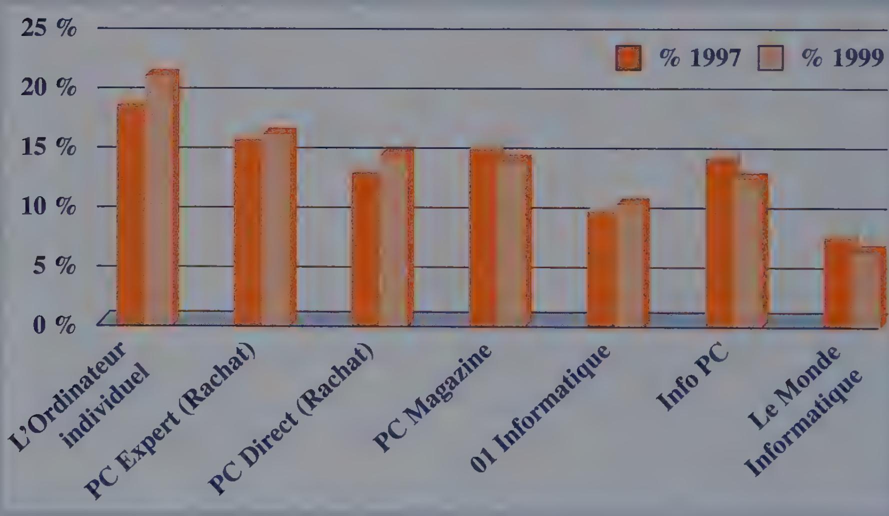
On remarquera que les résultats de cette dernière colonne sont légèrement différents de ceux trouvés précédemment : l'ordinateur effectue les calculs avec les valeurs des colonnes B et D et non avec les valeurs approchées des colonnes C et E.

Finalement, on obtient :

Microsoft Excel-Classeur 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Diffusion totale	1997	%	1999	%	Evolution en % du volume	Evolution en % de la part
2	L'ordinateur individuel	117 721	19,41%	133 953	21,44%	13,79%	10,44%
3	PC Expert (rachat)	102 600	16,92%	107 770	17,25%	5,04%	1,95%
4	PC Direct (Rachat)	84 100	13,87%	93 620	14,99%	11,32%	8,04%
5	PC Magazine	94 164	15,53%	91 408	14,63%	-2,93%	-5,78%
6	01 Informatique	63 957	10,55%	71 324	11,42%	11,52%	8,24%
7	Info PC	90 625	14,95%	79 287	12,69%	-12,51%	-15,09%
8	Le Monde Informatique	53 201	8,77%	47 395	7,59%	-10,91%	-13,54%
9	Total	606 368	100,00%	624 757	100,00%	3,03%	
10							

Le schéma suivant donne, pour chacune des revues, l'évolution de leur part de volume de ventes, en pourcentage, dans le groupe :



14 • $\dfrac{186,11}{180,53} \approx 1,0309$, donc l'indice de « trésorerie » a progressé de 3,09 %.

• On cherche la valeur i de l'indice « obligations » en fin 1999 sachant qu'après une augmentation de 3,45 %, il atteint 211,72.

L'indice i vérifie donc : $\left(1+\dfrac{3,45}{100}\right)\times i = 211,72$;

soit : $1,0345 \times i = 211,72$;

donc : $i = \dfrac{211,72}{1,0345}$,

d'où : $i \approx 204,66$.

• L'indice « actions » i' cherché vérifie :

$i' = 293,19 \times (1 + 0,0374)$;

donc $i' \approx 304,16$.

Le tableau complet se présente ainsi :

	En fin 1999	Au 27/10/2000	Taux de progression en %
Indice de trésorerie	**180,53**	**186,11**	**3,09**
Indice obligations	**204,66**	**211,72**	**3,45**
Indice actions et diversifiées	**293,19**	**304,16**	**3,74**

CHAPITRE 11

STATISTIQUES

Rappels de cours

I- Échantillonnage

Lorsque l'effectif de la population est très important, on peut étudier les différents caractères sur un **échantillonnage** de cette population.

Fluctuation d'échantillonnage

On recherche l'influence sur les résultats d'une modification de l'échantillon, soit en prenant d'autres échantillons de même effectif que le premier échantillon, soit en considérant des échantillons d'effectifs très différents.

II- Paramètres de position d'une série quantitative

Considérons une série statistique $(x_i\ ;\ n_i)$, avec i entier naturel de 1 à p. L'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus observés, sera noté n.
La fréquence f_i est le quotient de l'effectif n_i par l'effectif total n.
On a les relations :

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i \qquad f_i = \frac{n_i}{n} \qquad \sum_{i=1}^{p} f_i = 1$$

Les paramètres de position « globalisent » la série en caractérisant un ordre de grandeur des observations et sont exprimés avec la même unité.

Mode

On appelle **mode de la série statistique** $(x_i\ ;\ n_i)$, la (les) valeur(s) du caractère dont l'effectif est le plus grand. On peut le noter Mo. Il est à remarquer qu'une série peut avoir plusieurs modes.

• **Remarque**

Le mode est peu sensible à la valeur des termes extrêmes mais assez aux fluctuations d'échantillonnages. Il est facile à déterminer mais ne se prête pas aux calculs algébriques.

COURS

Moyenne (arithmétique)

On appelle **moyenne de la série statistique** $(x_i\,;\,n_i)$, le nombre, en général noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i}{n} = \sum_{i=1}^{p} f_i \times x_i .$$

- **Remarque**

La moyenne peut être très sensible à la valeur des termes extrêmes et aux fluctuations d'échantillonnages. Elle est facile à calculer et se prête aux calculs algébriques, tout en ne coïncidant, que par hasard, avec une valeur observée du caractère.

Moyennes mobiles, lissage

Considérons une série chronologique de n valeurs y_i , i variant de 1 à n.

On peut construire le nuage de points $A_i(i\,;\,y_i)$ représentant cette série ainsi que la ligne polygonale A_1 , A_2 , …, A_n représentant l'évolution du phénomène.

On peut dégager une tendance, en lissant ce graphique par les moyennes mobiles : les moyennes mobiles m_i d'ordre 3, par exemple, répondent aux définitions suivantes :

i	1	2	3	----------	$n-1$	n
m_i		$m_2 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$	$m_3 = \dfrac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$	----------	$m_{n-1} = \dfrac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$	

On lisse le graphique par la ligne polygonale B_2 , B_3 , …, B_{n-1} , où B_i a pour coordonnées $(i\,;\,m_i)$. L'utilisation d'un tableur, tel que Excel, permet d'obtenir rapidement ces résultats. Nous mettrons en œuvre cette technique dans les exercices.

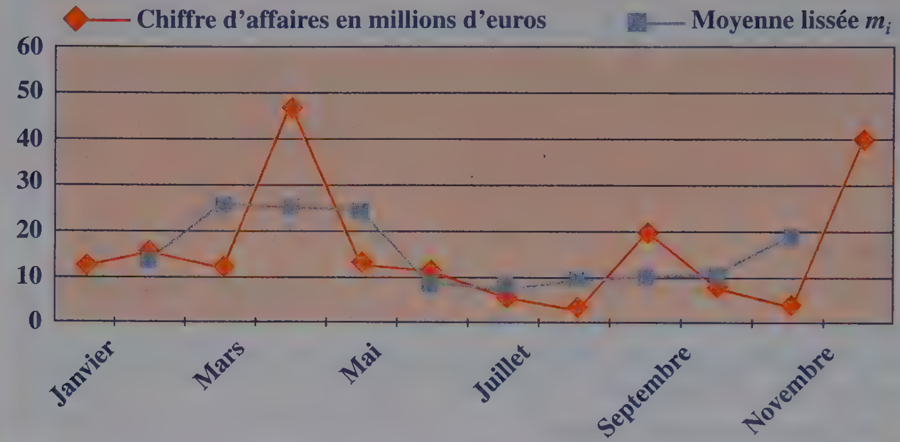
Illustration concernant le chiffre d'affaires d'une entreprise au cours d'une année :

C3 = =(B2+B3+B4)/3

Microsoft Excel - Classeur1

	A	B	C	D	E
1	Mois	Chiffre d'affaires en millions d'euros	Moyenne lissée *mi*		
2	Janvier	12			
3	Février	14	12,7		
4	Mars	12	24,7		
5	Avril	48	24,0		
6	Mai	12	23,7		
7	Juin	11	9,3		
8	Juillet	5	6,3		
9	Août	3	9,3		
10	Septembre	20	10,3		
11	Octobre	8	11,3		
12	Novembre	6	18,0		
13	Décembre	40			

L'assistant graphique d'Excel nous donne les courbes suivantes :



L'avantage d'une telle représentation est de rendre compte de la tendance générale de l'évolution, en tenant compte de toutes les valeurs, tout en « gommant » les résultats extrêmes.

Médiane

On ordonne la série des observations (x_i) par ordre croissant ; la médiane, souvent notée *Me*, est une valeur (réelle ou fictive) du caractère, qui partage la population en deux sous-populations de même effectif.

• **Remarque**

La médiane est peu sensible à la valeur des termes extrêmes mais elle l'est aux fluctuations d'échantillonnages. Elle est facile à calculer mais ne se prête pas aux calculs algébriques.

III- Paramètres de dispersion d'une série quantitative

Les paramètres de dispersion d'une série statistique (x_i ; n_i) évaluent la dispersion des valeurs, en général, autour d'un des paramètres de position, $\overline{x}$ ou *Me*. Ils s'expriment avec la même unité que les valeurs.

L'étendue

C'est la différence entre la valeur la plus grande des x_i et la valeur la plus petite des x_i .

Les quartiles et l'écart interquartile

Les valeurs sont ordonnées par ordre croissant.

Le premier quartile est le plus petit élément Q_1 des valeurs du caractère tel qu'au moins 25 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

■ **Le troisième quartile** est le plus petit élément Q_3 des valeurs du caractère tel qu'au moins 75 % des valeurs lui soient inférieures ou égales.

■ **L'écart interquartile** est le réel $Q_3 - Q_1$.

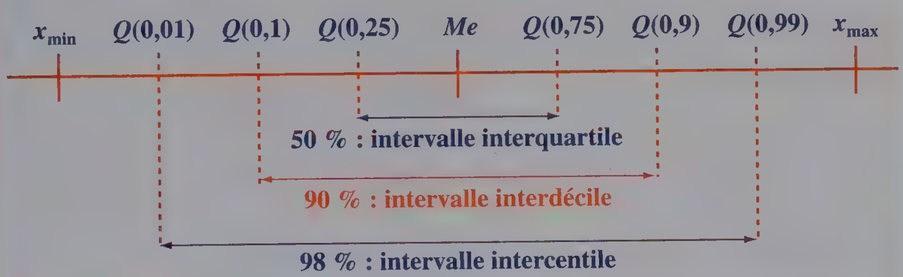
■ De manière générale, pour une série statistique à valeurs dans un intervalle I, on définit la fonction quantile Q, de [0 ; 1] dans I, par :

$$Q(u) = \inf\{x, F(x) \geqslant u\},$$

où F désigne la fréquence des éléments inférieurs ou égaux à x.

On a alors : $Q_1 = Q(0{,}25)$ et $Q_3 = Q(0{,}75)$.

• On peut de manière analogue définir les déciles, les centiles, et les écarts correspondants.



La variance V

C'est la moyenne des carrés des écarts de chacune des valeurs à leur moyenne, c'est-à-dire la moyenne des $(x_i - \bar{x})^2$.

$$V = \frac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2}{n},$$

c'est-à-dire : $$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

ou encore : $$V = \sum_{i=1}^{p} f_i \times (x_i - \bar{x})^2.$$

On peut démontrer : $$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i^2}{n} - \bar{x}^2.$$ *Cette formule facilite les calculs.*

■ **L'écart type**, noté s, est la racine carrée de la variance. Il est d'autant plus grand que les valeurs sont plus éloignées les unes des autres. $s = \sqrt{V}.$

IV- Les représentations graphiques

Rappelons pour mémoire les différents types de diagrammes vus en classe de Seconde :

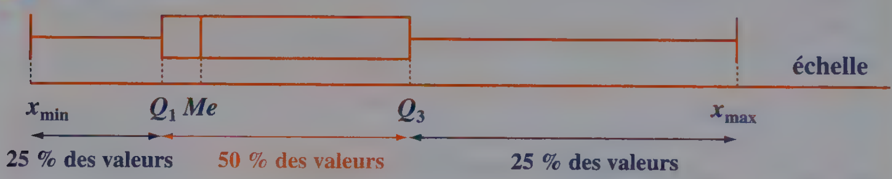
■ Pour **les caractères qualitatifs** nous disposons :
- du diagramme en bandes ;
- du diagramme à secteurs circulaires.

■ Pour **les caractères quantitatifs** discrets, nous disposons :
- du diagramme en bâtons ;
- du diagramme à secteurs circulaires.

■ Pour **les séries** dont les valeurs sont regroupées en classes, nous disposons de l'histogramme, l'aire du rectangle étant proportionnelle à l'effectif de la classe.

Diagramme en boîte ou boîte-à-pattes ou boîte-à-moustaches

■ **Boîte médiane**



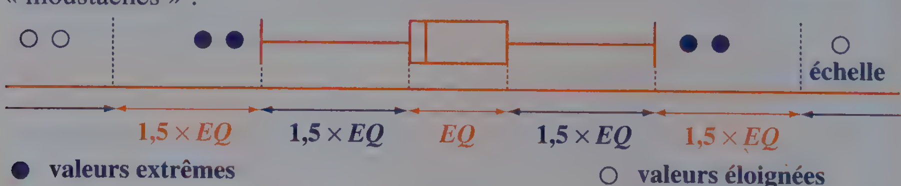
Cette représentation donne simultanément des renseignements sur sa tendance centrale, sa dispersion, son asymétrie et l'importance des valeurs extrêmes. Elle permet de comparer facilement plusieurs distributions statistiques.

■ **Boîte-à-moustaches de largeur variable**

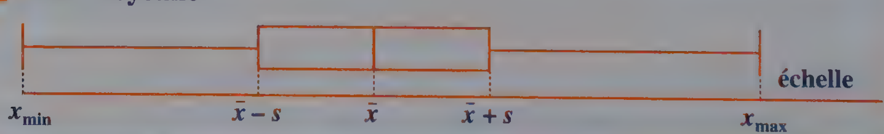
On peut améliorer la comparaison en faisant intervenir les tailles respectives des populations comparées. Dans ce cas, la largeur des rectangles est proportionnelle à la racine carrée de la taille de la population.

■ **Compléments**

On peut aussi améliorer l'observation d'une série en modifiant les « moustaches » :



■ **Boîte moyenne**



EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 151)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le mode, la moyenne et la médiane.

1° De la série statistique brute : 12 ; 13 ; 10 ; 15 ; 15 ; 12 ; 11 ; 12 ; 15 ; 13.

2° De la série statistique brute : 4 ; 6 ; 1 ; 8 ; 2 ; 8 ; 7 ; 7 ; 2 ; 3 ; 7.

3° De la série statistique dépouillée (x_i ; n_i) définie par :

x_i	3	– 2	5	– 4	0	2
n_i	15	10	22	17	10	1

4° a. De la série statistique, dont les valeurs ont été regroupées en classes, définie par :

Classes	Effectif
[0 ; 5[	15
[5 ; 10[	25
[10 ; 15[	7
[15 ; 20]	3

b. Pour cette dernière série, dessiner son histogramme.

2 (Corrigé p. 153)

Les 25 membres d'un club passent un test de 9 questions.

Le nombre de bonnes réponses de chacun des participants est donné par la liste suivante :

5, 1, 2, 4, 9, 8, 7, 4, 0, 0, 1, 5, 6, 8, 9, 9, 8, 6, 1, 7, 6, 5, 2, 8, 9.

1° Rechercher la médiane de cette série, puis calculer sa moyenne.

2° Cinq nouvelles personnes s'inscrivent au club ; elles ont respectivement 7, 8, 9, 9 et 8 bonnes réponses. Que deviennent la médiane et la moyenne ?

3° Le club connaissant un succès croissant, son effectif augmente de 10 à l'occasion de la grande fête annuelle. Les nouveaux arrivants obtiennent respectivement 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8 et 8 bonnes réponses.

a. Rechercher les quartiles et préciser l'intervalle interquartile.

b. Rechercher les déciles et préciser l'intervalle interdécile.

EXERCICES d'entraînement

3 ★★ 5 min Utilisation d'une calculatrice (Corrigé p. 154)

On demande aux 20 élèves d'une classe le nombre de CD qu'ils possèdent.
Les réponses sont les suivantes :

6, 10, 5, 10, 50, 5, 15, 50, 50, 5, 6, 10, 17, 15, 10, 5, 6, 5, 50, 10.

1° Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le mode, la moyenne, la médiane, les quartiles et l'écart type de cette série.

2° Tracer les diagrammes en boîte (sur une feuille ou à l'aide de la calculatrice) et commenter la figure obtenue.

4 ★★ 15 min Utilisation d'un tableur (Corrigé p. 157)

On recense le nombre d'enfants des 50 familles d'un quartier.
On obtient les résultats ci-contre.

0	1	1	3	2	4	2	1	1	2
3	1	2	2	1	0	1	0	0	1
3	1	2	2	2	3	0	1	2	5
4	2	2	4	5	3	2	1	1	2
1	1	0	2	2	1	3	2	4	2

1° a. Quelle est la population étudiée ?
b. Quelle est la nature du caractère ?

2° À l'aide d'un tableur, effectuer le dépouillement de cette série.

3° Calculer les fréquences en pourcentages.

4° Dessiner le diagramme circulaire associé à cette série.

5° Quel est le nombre d'enfants dominant ?

6° Calculer la moyenne de cette série.

7° Donner l'arrondi automatique à 10^{-2} près de son écart type.

5 ★★★ 30 min Diagramme en boîte (Corrigé p. 158)

On considère la série statistique $(x_i\,;\,n_i)$:

$\bar{x} = 17$

x_i	0	11	12	13	14	15	19	23	56
n_i	1	1	1	3	1	2	1	1	1

$n_i(x_i-\bar{x})^2$ 289 36 25 16 9 4 4 36 1521

1° Déterminer la moyenne et l'écart type de la série.

2° Déterminer la médiane de cette série.

3° Déterminer le premier et le troisième quartile ainsi que l'écart interquartile.

4° a. Dessiner la boîte-à-moustaches correspondant à la moyenne.
b. Dessiner la boîte-à-moustaches correspondant à la médiane en faisant apparaître s'il y a lieu les valeurs éloignées ou extrêmes.

5° Comparer les deux figures.

6° Dessiner l'histogramme de cette série regroupée en quatre classes, d'extrémités : $x_{\min}$, Q_1, Me, Q_3 et $x_{\max}$.

6 ★★ 15 min Lissage par moyennes mobiles (Corrigé p. 162)

Le tableau ci-dessous donne les variations du chiffre d'affaires d'une entreprise, au cours d'une année, en millions d'euros.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
i	1	2	3	4	5	6
y_i : Chiffre d'affaires	75	125	55	45	110	85

Mois	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
i	7	8	9	10	11	12
y_i : Chiffre d'affaires	90	155	55	60	125	70

1° a. On considère les points $A_i(i\ ;\ y_i)$. Placer les points A_i dans un repère orthogonal et dessiner la ligne polygonale A_1 , A_2 , …, A_{12} .

b. Que représente cette ligne ?

c. Quel est le chiffre d'affaires moyen pour cette année ?

2° a. Compléter le tableau suivant avec les moyennes mobiles d'ordre 3, notées m_i , i variant de 2 à 11.

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_i										

Placer sur la même figure que **1° a.** les points $B_i(i\ ;\ m_i)$, i variant de 2 à 11 et tracer la ligne polygonale B_2 , …, B_{11} .

b. Comment peut-on interpréter cette nouvelle courbe ?

Remarque : on pourra traiter cet exercice à l'aide d'un tableur.

7 ★★ 30 min Simulation d'une expérience (Corrigé p. 163)

Le but de l'exercice est de simuler le lancement d'un dé normal et d'évaluer la fréquence de l'un des six résultats au bout de n lancers.

1° On lance le dé 10 fois de suite.

a. À l'aide d'un tableur, simuler ces lancements.

b. Dresser le tableau des résultats et de la fréquence de chacun des six résultats possibles au bout de n lancers.

c. Tracer les six courbes représentant l'évolution de ces fréquences pour n variant de 1 à 10.

2° On lance 100 fois le dé.

a. Simuler ces 100 lancers à l'aide du tableur.

b. Calculer la fréquence d'apparition du 5 au bout de n lancers.

c. Tracer la courbe représentative de l'évolution de cette fréquence.

3° a. Tracer sur une même figure les courbes représentatives de l'évolution des fréquences relatives à deux résultats.

b. Simuler 1 000, puis 10 000 lancers.

Remarque : la simulation de 10 000 *lancers, à l'aide d'un tableur, peut prendre plusieurs minutes.*

8 ★ 10 min **Tableaux à double entrée** (Corrigé p. 167)

Les résultats, en pourcentages, du baccalauréat pour les séries classiques d'un lycée se répartissent de la manière suivante.

Série	Admis	Refusés	Total
L	87	13	100
ES	65	35	100
S	75	25	100
Total	75	25	100

Série	Admis	Refusés	Total
L	29	13	25
ES	26	42	30
S	45	45	45
Total	100	100	100

1° Que représente le premier tableau ?

2° a. Par quelles phrases peut-on interpréter les valeurs suivantes extraites du premier tableau : 13 ; 65 et 75 ?

b. Donner la notation fréquentielle de ces résultats.

3° a. Par quelles phrases peut-on interpréter les valeurs suivantes extraites du second tableau : 13 et 45 ?

b. Donner la notation fréquentielle de ces résultats.

4° Les phrases suivantes sont-elles vraies ?

a. 25 % des candidats ont présenté le bac L.

b. C'est en S que le taux de réussite a été le plus faible.

c. Les élèves de L ont mieux réussi que ceux de S.

d. 26 % des élèves de ES ont réussi leur bac.

e. 42 % des élèves refusés sont en ES.

f. C'est en série L qu'il y avait le moins de candidats.

CORRIGÉS des exercices

1 1° Commençons par ranger les 10 valeurs par ordre croissant :

10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 15 ; 15.

• Les valeurs que l'on rencontre le plus (3 fois chacune) sont 12 et 15. Cette série a donc **deux modes : 12 et 15.**

• **La moyenne $\bar{x}$** est telle que : $\bar{x} = \dfrac{10+11+3\times12+2\times13+3\times15}{10} = \mathbf{12{,}8.}$

• 10 = 5 + 5. La médiane sera donc une valeur laissant 5 valeurs de part et d'autre :

10 11 12 12 12 ↑ **13 13 15 15 15**

5 valeurs **médiane** **5 valeurs**

On peut prendre ici n'importe quelle valeur située entre la valeur de rang 5 et la valeur de rang 6 de la suite ordonnée, c'est-à-dire située entre 12 et 13 : 12,2 par exemple conviendrait. En fait, **on prend généralement la demi-somme de ces deux valeurs, soit 12,5.**

2° Rangeons ces valeurs par ordre croissant : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8.

• **Le mode est 7.**

• **La moyenne est :** $\bar{x} = \dfrac{1+2+2+3+4+6+7+7+7+8+8}{11} = \mathbf{5.}$

• 11 = 5 + 1 + 5. **La médiane est donc la valeur de rang 6 soit : 6.**

1 2 2 3 4 **6** **7 7 7 8 8**

5 valeurs ↑ **médiane** **5 valeurs**

3° Établissons un tableau statistique.

x_i	n_i	$n_i x_i$	n_i cumulés croissants	
– 4	17	– 68	17	de la valeur de rang 1 à celle de rang 17
– 2	10	– 20	27	de la valeur de rang 18 à celle de rang 27
0	10	0	37	de la valeur de rang 28 à celle de rang 37
2	1	2	38	la valeur de rang 38
3	15	45	53	de la valeur de rang 39 à celle de rang 53
5	22	110	75	de la valeur de rang 54 à celle de rang 75
	75	69		

• L'effectif maximum (22) est atteint pour la valeur 5 du caractère.
Le mode est donc 5.

• **La moyenne est** $\bar{x} = \dfrac{69}{75} = \mathbf{0{,}92}$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i}{n}.$$

• 75 = 37 + 1 + 37. Donc la médiane est la 38^e^ valeur du caractère. Pour la trouver, on utilise les effectifs cumulés croissants (voir tableau). **La médiane est donc 2.**

4° **a.** Complétons ce tableau selon les besoins.

Classes	Effectif : n_i	Centre de la classe : x_i	$n_i x_i$	Effectifs cumulés croissants
[0 ; 5[	15	2,5	37,5	15
[5 ; 10[	25	7,5	187,5	40
[10 ; 15[	7	12,5	87,5	47
[15 ; 20]	3	17,5	52,5	50
	50		365	

• **La classe modale est la classe [5 ; 10[.**

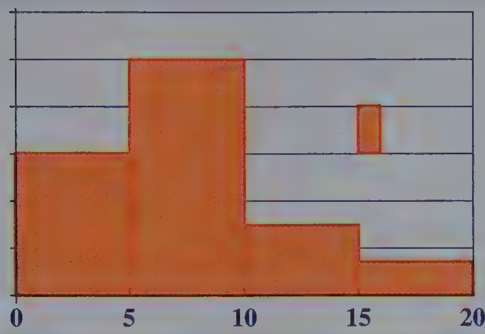
• Pour calculer la moyenne, on considère que tous les éléments d'une même classe sont égaux au centre de la classe, puis on procède comme pour un caractère discret. Donc **la moyenne est** $\bar{x}$: $\dfrac{365}{50} = \mathbf{7{,}3}$.

• Pour la médiane, on prendra la 25^e^ valeur. Il s'agit de la classe [5 ; 10[, d'amplitude 5.

Pour préciser la médiane, on peut faire un ajustement linéaire, en appliquant l'hypothèse d'équirépartition des valeurs de la classe. On a 15 valeurs dans les classes précédentes. Il en manque 10 pour atteindre la 25^e^ valeur. La classe médiane en comporte 25 pour une amplitude de 5, donc l'amplitude correspondant à 10 de ces valeurs est : $5 \times \dfrac{10}{25} = 2$. **La médiane peut être évaluée** à partir de la valeur minimale 5 de la classe médiane **à 5 + 2**, c'est-à-dire **7.**

b. L'histogramme est composé de rectangles dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe.

Les classes ayant toutes la même amplitude (le même pas), la hauteur du rectangle sera ici proportionnelle à l'effectif. (*Voir schéma ci-après.*)



1° • Rangeons les 25 valeurs dans l'ordre croissant.
On a : 25 = 12 + 1 + 12 ; donc celle située au 13ᵉ rang est la médiane.

0 0 1 1 1 2 2 4 4 5 5 5 — **6** — **6 6 7 7 8 8 8 8 9 9 9 9**

12 valeurs — **médiane** — **12 valeurs**

La médiane est 6.

• La moyenne m vérifie :

$$m = \frac{2\times0+3\times1+2\times2+2\times4+3\times5+3\times6+2\times7+4\times8+4\times9}{25} = \frac{130}{25};$$

donc **la moyenne est 5,2.**

2° Le club comporte maintenant 30 membres.

• Les valeurs étant toujours rangées dans l'ordre croissant, la médiane sera une valeur fictive quelconque prise entre la valeur de rang 15 et celle de rang 16.

0 0 1 1 1 2 2 4 4 5 5 5 6 6 6 — **7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9**

15 valeurs — **médiane** — **15 valeurs**

On prend, en général, **la demi-somme, soit 6,5.**

• En utilisant les résultats du **1°**, la nouvelle moyenne m' vérifie :

$$m' = \frac{25\times5{,}2+1\times7+2\times8+2\times9}{30} = \frac{171}{30},$$ donc $\boldsymbol{m' = 5{,}7}$.

3° a. Établissons un tableau donnant les fréquences cumulées croissantes de cette série.

Valeur	**0**	**1**	**2**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Effectif	**2**	**3**	**2**	**3**	**6**	**6**	**4**	**8**	**6**
Fréquence cumulée croissante	**0,05**	**0,125**	**0,175**	**0,25**	**0,4**	**0,55**	**0,65**	**0,85**	**1**

La plus petite valeur pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,25 est 4 ; celle pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,75 est 8.

Donc : $Q_1 = 4$ et $Q_3 = 8$.

La médiane sera : $Me = 6$ (pour 5, la fréquence est inférieure à 0,5 et pour 6 elle lui est supérieure).

L'écart interquartile est :

$$Q_3 - Q_1 = 4\ ;$$

il comprend 50 % de l'effectif total.

La calculatrice prendra :
- Q_1 compris entre la valeur de rang 10 et celle de rang 11, soit $Q_1 = 4{,}5$;
- Q_3 compris entre la valeur de rang 30 et celle de rang 31, soit $Q_3 = 8$.

b. On peut de la même façon évaluer les déciles. La plus petite valeur pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,1 est 1 ; celle pour laquelle cette fréquence est supérieure ou égale à 0,9 est 9.

Donc : $Q(0{,}1) = 1$ et $Q(0{,}9) = 9$.

Les déciles valent successivement :
1 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 8 et 9.

L'intervalle interdécile est 8 (9 – 1 = 8).

Donc 80 % de la population s'étend sur une amplitude de 8, l'étendue de la série étant 9. On peut en conclure que les 20 % négligés ne sont pas ici des valeurs aberrantes.

1° Une calculatrice telle que la CASIO 35, 60, 80, 100 ou la TI-82, TI-83 permet d'obtenir rapidement l'ensemble des résultats suivants.

<table>
<tr><th>CASIO</th><th>TI</th></tr>
<tr><td>• Sélectionner le menu <code>STAT</code></td><td>• Sélectionner le menu <code>STAT</code>
• Sélectionner le menu <code>EDIT</code></td></tr>
<tr><td colspan="2">• Introduire la liste des valeurs du caractère dans la liste 1 (<code>List1</code>) et celle des effectifs associés dans la liste 2 (<code>List2</code>).</td></tr>
<tr><td>• Sélectionner successivement (en bas de l'écran) <code>CALC</code>, <code>SET</code>
Régler la page de la manière suivante, sachant que <code>Freq</code> représente en fait l'effectif :
<code>1Var Xlist : List1</code>
<code>1Var Freq : List2</code>
<code>2Var Xlist :</code>
<code>2Var Ylist :</code>
<code>2Var Freq :</code>
• Sélectionner alors <code>1VAR</code></td><td>• <code>STAT</code>
• <code>CALC</code>
• <code>1-Var-Stat L1,L2</code>
• <code>Enter</code></td></tr>
</table>

• La liste déroulante suivante apparaît à l'écran.

	CASIO	TI
	1-Variable	**1-VarStat**
Moyenne	$\bar{x}$ = 17	$\bar{x}$ = 17
Somme des valeurs	$\sum x$ = 340	$\sum x$ = 340
Somme des carrés des valeurs	$\sum x^2$ = 11472	$\sum x^2$ = 11472
Écart type population	$x\sigma n$ = 16.8700918	σx = 16.8700918
Écart type échantillon	$x\sigma n-1$ = 17.308349	Sx = 17.308349
Effectif	n = 20	n = 20
Valeur minimale de la série	minX = 5	minX = 5
Premier quartile	Q1 = 5.5	Q1 = 5.5
Médiane	Med = 10	Med = 10
Troisième quartile	Q3 = 16	Q3 = 16
Intervalle gauche	$\bar{x}-x\sigma n$ = 0.12990812	
Intervalle droit	$\bar{x}+x\sigma n$ = 33.8700918	
Valeur maximale de la série	maxX = 50	maxX = 50
Mode	Mod = 10	

Boîtes-à-moustaches avec une CASIO

▶ Pour construire la boîte médiane, procédons comme suit :

• régler V-Window pour que toutes les valeurs de la série soient comprises entre Xmin et Xmax ;

• sélectionner le menu **STAT** ;

• introduire la liste des valeurs du caractère dans la liste 1 (**List1**) et celle des effectifs associés dans la liste 2 (**List2**) ;

• sélectionner successivement (en bas de l'écran) **GRPH**, puis **SET** ;

• l'écran **StatGraph1** apparaît ;

• dans **GraphType** sélectionner (en bas de l'écran) **Box**, c'est-à-dire **MedBox** ;

• **Exit**, puis **Gph1**.

▶ On procède de la même manière pour la boîte moyenne.

• Lorsque l'écran **StatGraph1** apparaît, on sélectionne **GPH2**.

• Dans **GraphType** on sélectionne la touche **Box**, c'est-à-dire **MeanBox**. On termine de la même façon.

▶ Si on veut faire apparaître simultanément les deux boîtes :

• on sélectionne successivement **GRPH**, **SEL** ;

• pour **StatGraph1** et **StatGraph2**, on sélectionne **DrawOn** ;

• **Draw** permet d'obtenir la figure.

Boîtes-à-moustaches avec une TI

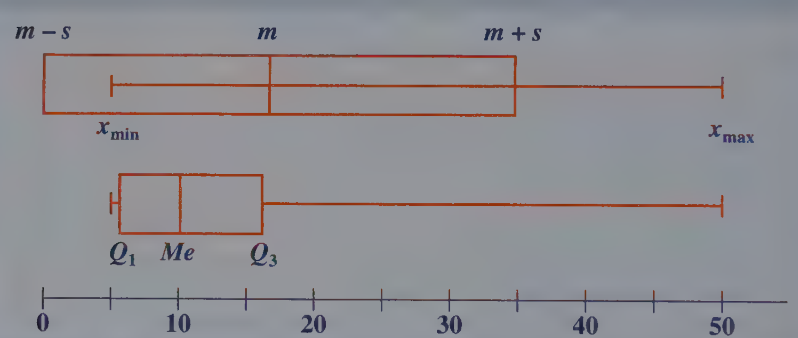
- Dans le menu **STAT**, on choisit le menu **STAT PLOT**.
- L'écran suivant apparaît, on sélectionnera ce qui est en gras :

STAT PLOT							
Plot 1							
On	Off						
Type							
Xlist :		**L_1**	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
Freq :		1	L_1	**L_2**	L_3	L_4	L_5	L_6

- On appuie sur **Graph** et on obtient la boîte médiane.

En conclusion, **le mode de cette série statistique est 10 ;**
la moyenne est égale à 17 ;
l'écart type vaut environ 16,87 ;
la médiane est 10 et les quartiles valent 5,5 et 16.

2°



La comparaison des deux boîtes permet de constater à quel point la moyenne et l'écart type sont sensibles aux quatre valeurs extrêmes (50), à tel point que la boîte moyenne « sort » de l'intervalle des valeurs [5 ; 50].

Le rectangle de la boîte médiane contient 50 % de la population (25 % dans chacune des deux parties du rectangle). Dans l'exemple choisi, ces 50 % sont très groupés puisque EQ vaut 11,5 alors que l'étendue de la série est de 45.

4 1° **a.** La population est **l'ensemble des 50 familles du quartier.**
b. Le caractère étudié est le nombre d'enfants par famille ; c'est **un caractère quantitatif discret.**

2° Les différentes valeurs prises par le caractère sont, dans l'ordre :

0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Utilisons Excel pour effectuer le dépouillement.

- Dans la colonne A, on copie la liste des résultats du recensement.
- Dans la colonne C « Valeurs », on dresse la liste des valeurs de 0 à 5.
- La fonction **=NB.SI(…α…;…β…)** compte combien de termes de la plage α sont égaux au contenu de la cellule β.

En D2, on introduit la formule :
= NB.SI($A$2:$A$51;$C2)
afin de compter combien de fois on rencontre la valeur située en C2, c'est-à-dire 0, dans la liste initiale située dans la zone A2:A51.

$A : la colonne A est une donnée fixe
$2 : la ligne 2 est une donnée fixe
$A$2 : la cellule A2 est fixée
$C2 : la colonne C est fixée mais lorsqu'on déplacera la poignée vers le bas, on remplacera la cellule C2 par C3, puis C4…
en D3, on aura :
= NB.SI($A$2:$A$51;$C3)…

- On tire ensuite la poignée jusqu'en D7.

On obtient ainsi le dépouillement.
En D8, on introduit la somme des effectifs avec :

=SOMME(D2:D7).

3° La fréquence en pourcentages s'obtient comme suit.

- En E2, on introduit la formule donnant la fréquence :

=D2/$D$8

puis on tire la poignée jusqu'en E8 : on a alors toutes les fréquences.

- Pour les obtenir en pourcentages, il suffit de sélectionner la zone E2:E8 et d'activer la touche %.

Geneva 9 G I S %

E2 = =D2/$D$8

Microsoft Excel-5-Classeur4.xls

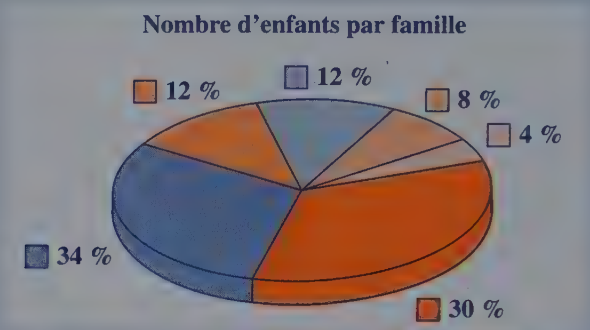
	A	B	C	D	E	F
1	Liste des Valeurs		Valeurs	Effectifs	Fréquences en %	
2	0		0	6	12%	
3	1		1	15	30%	
4	1		2	17	34%	
5	3		3	6	12%	
6	2		4	4	8%	
7	4		5	2	4%	
8	2			50	100%	
9	1					
10	1					

Style de pourcentage

4° Pour obtenir la figure, on poursuit ainsi :

• on sélectionne les zones C2:C7 et D2:D7, correspondant aux valeurs et aux effectifs ;

• on active **l'assistant graphique**.



Ce schéma a été obtenu avec les **Secteur, Secteur avec effet 3D.**
Si on s'y déplace, on fait apparaître les pourcentages.
5° L'effectif le plus important est 17 ; il correspond à la valeur 2 du caractère.
Donc **2 est le nombre d'enfants dominant de cette série.** C'est son mode.
6° Pour calculer sa moyenne, on peut inscrire dans une cellule :

=MOYENNE(A2:A51).

La moyenne $\bar{x}$ de cette série est telle que : $\bar{x} = 1{,}86$.
7° Pour calculer son écart type, on peut inscrire dans une cellule :

=ECARTYPE(A2:A51;1).

L'écart type de cette série vérifie $s \simeq 1{,}25$.

5 Dans la première partie de cet exercice, nous mènerons les calculs « manuellement ». Dans la seconde partie, nous établirons ces résultats à l'aide d'une calculatrice.

Première partie

1° La moyenne $\bar{x}$ est telle que :

$$\bar{x} = \frac{0+11+12+3\times13+14+2\times15+19+23+56}{12},$$

soit $\bar{x} = 17$.

La variance V est telle que :

$$V = \frac{1}{12}\left[(0-17)^2+(11-17)^2+\ldots+(56-17)^2\right];$$

soit $V \approx 164{,}67$.

L'écart type est tel que : $s = \sqrt{V}$,

soit $s \approx 12{,}8$.

2° 12 = 6 + 6. La médiane sera donc une valeur du caractère laissant 6 valeurs de part et d'autre :

0	11	12	13	13	13	↑	14	15	15	19	23	56
6 valeurs						**médiane**	**6 valeurs**					

On prendra **la demi-somme de 13 et 14, soit 13,5.**

3° Par définition, le premier quartile est la plus petite valeur x_i du caractère pour laquelle la fréquence $F(x_i)$ des éléments de la série, qui sont inférieurs ou égaux à x_i, est supérieure ou égale à 0,25, c'est-à-dire telle que la fréquence cumulée croissante soit supérieure ou égale à $\dfrac{3}{12}$.

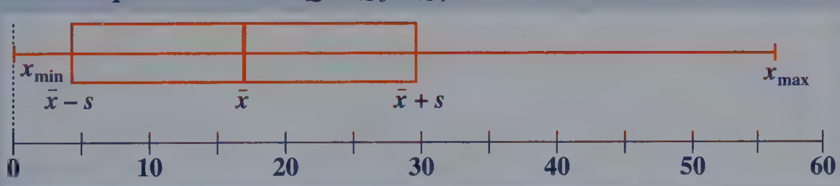
Établissons un tableau donnant les valeurs de $F(x_i)$:

x_i	0	11	12	13	14	15	19	23	56
$F(x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$

Donc : Q_1 **= 12** et de la même manière : Q_3 **= 15.**

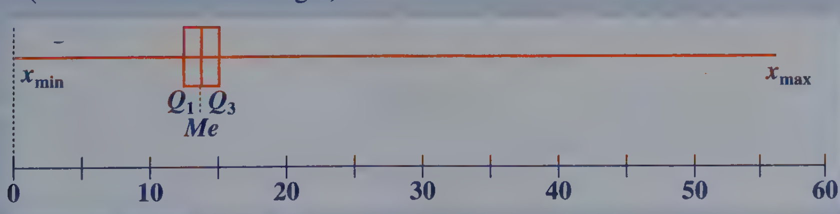
L'écart interquartile est : $EQ = Q_3 - Q_1 = 15 - 12 = 3$.

4° a.



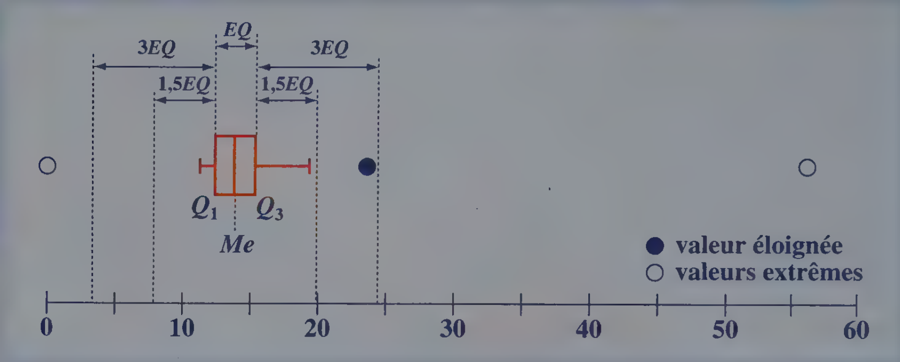
Cette boîte-à-moustaches est composée de la manière suivante :
– un rectangle de largeur quelconque centré en $\bar{x}$, c'est-à-dire en 17 ;
– le rectangle s'étend de la valeur $\bar{x} - s \approx 17 - 12{,}8$, soit : 4,2 à la valeur $\bar{x} + s \approx 17 + 12{,}8$, soit : 29,8 ;
– les moustaches vont de la plus petite à la plus grande valeur de x, soit de 0 à 56 (en traversant le rectangle).

b.



Cette boîte-à-moustaches élémentaire comporte :
– un rectangle de largeur quelconque, s'étendant de Q_1 à Q_3 , c'est-à-dire de 12 à 15, partagé par un trait à hauteur de la médiane 13,5 ;
– une moustache reliant Q_1 à la valeur minimale 0 et une autre reliant Q_3 à la valeur maximale 56.

• On peut affiner cette représentation en proposant la figure suivante.



L'intervalle interquartile [12 ; 15] a pour amplitude : $EQ = 3$.

■ $1{,}5 \times EQ = 4{,}5$;

donc : $Q_1 - 1{,}5 \times EQ = 12 - 4{,}5 = 7{,}5$

et : $Q_3 + 1{,}5 \times EQ = 15 + 4{,}5 = 19{,}5$.

– Les valeurs x_i du caractère appartenant à l'intervalle [7,5 ; 19,5] sont :

11 12 … 15 19

– La première moustache relie la valeur 11 et Q_1 ; la seconde moustache relie Q_3 à la valeur 19.

Leurs longueurs ne dépassent pas 1,5 fois la longueur du rectangle.

■ $3 \times EQ = 9$;

donc : $Q_1 - 3 \times EQ = 12 - 9 = 3$

et : $Q_3 + 3 \times EQ = 15 + 9 = 24$.

– La valeur x_i du caractère appartenant à l'intervalle [3 ; 24] mais extérieure à l'intervalle [7,5 ; 19,5] est : 23. Cette valeur est dite « éloignée ».

– Les valeurs x_i du caractère extérieures à l'intervalle [3 ; 24] sont : 0 et 56. Ces valeurs sont dites « extrêmes ».

■ **Seconde partie**

L'exercice 3 propose la façon d'utiliser une calculatrice.

• La liste déroulante est la suivante :

	1-Variable
Moyenne	$\bar{x}$ = 17
Somme des valeurs	$\sum x$ = 204
Somme des carrés des valeurs	$\sum x^2$ = 5444
Écart type population	$x\sigma n$ = 12,832251
Écart type échantillon	$x\sigma n$-1 = 13,402849
Effectif	n = 12
Valeur minimale de la série	minX = 0
Premier quartile	Q1 = 12,5
Médiane	Med = 13,5
Troisième quartile	Q3 = 17
Intervalle gauche	$\bar{x}-x\sigma n$ = 4,16774896
Intervalle droit	$\bar{x}+x\sigma n$ = 29,832251
Valeur maximale de la série	maxX = 56
Mode	Mod = 13

• **Remarque**

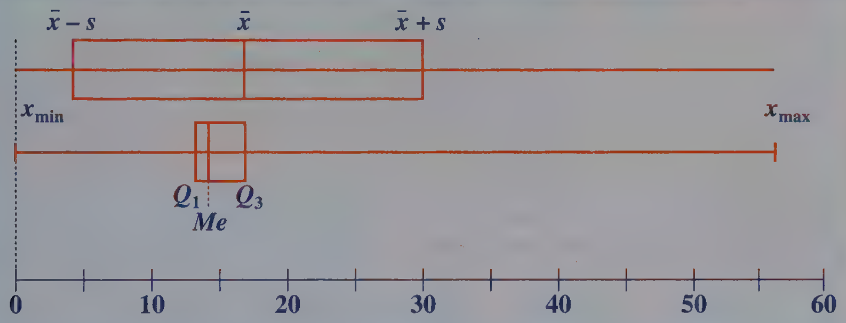
Rappelons que la calculatrice prend pour les quartiles une définition analogue à celle de la médiane. Donc pour l'exemple traité :

comme $12 = 3 + 3 + 3 + 3$, Q_1 sera la demi-somme des termes de rangs 3 et 4, le troisième quartile sera la demi-somme des termes de rangs 9 et 10.

Soit : $Q_1 = \dfrac{12+13}{2} = 12{,}5$ et $Q_3 = \dfrac{15+19}{2} = 17$;

d'où $EQ = 17 - 12{,}5 = 4{,}5$.

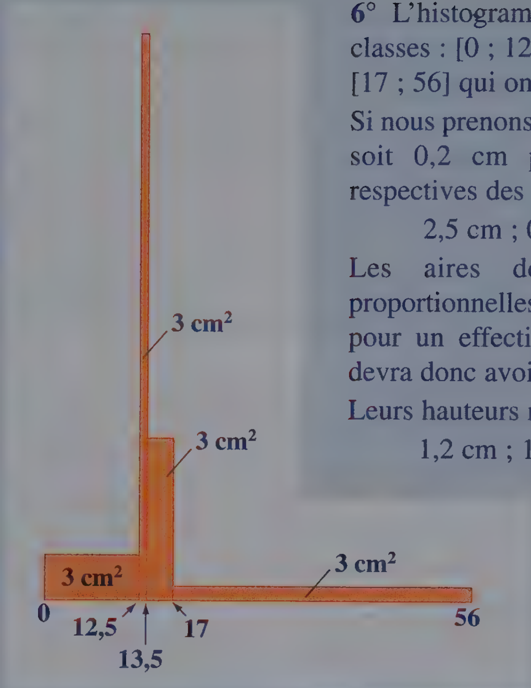
Les boîtes-à-moustaches données par la calculatrice sont reproduites ici :



5° La comparaison des deux boîtes, quels que soient le type de « moustaches » et la manière de calculer les quartiles, permet de constater à quel point la moyenne et l'écart type sont sensibles aux trois valeurs éloignées ou extrêmes.

Le rectangle de la boîte médiane contient 50 % de la population (25 % dans chacune des deux parties du rectangle).

Dans l'exemple choisi, ces 50 % sont très groupés puisque EQ vaut 3 ou 4,5 alors que l'étendue de la série est de 56.



6° L'histogramme demandé est composé des classes : [0 ; 12,5[; [12,5 ; 13,5[; [13,5 ; 17[et [17 ; 56] qui ont chacune pour effectif 3.

Si nous prenons 1 cm pour 5 unités en abscisses, soit 0,2 cm pour une unité, les largeurs respectives des quatre classes seront :

2,5 cm ; 0,2 cm ; 0,7 cm et 7,9 cm.

Les aires des rectangles doivent être proportionnelles aux effectifs. Prenons 1 cm² pour un effectif de 1. Chacun des rectangles devra donc avoir une aire de 3 cm².

Leurs hauteurs respectives seront donc :

1,2 cm ; 15 cm ; 4,3 cm et 0,38 cm.

1° a. et 2° a. Utilisons Excel :

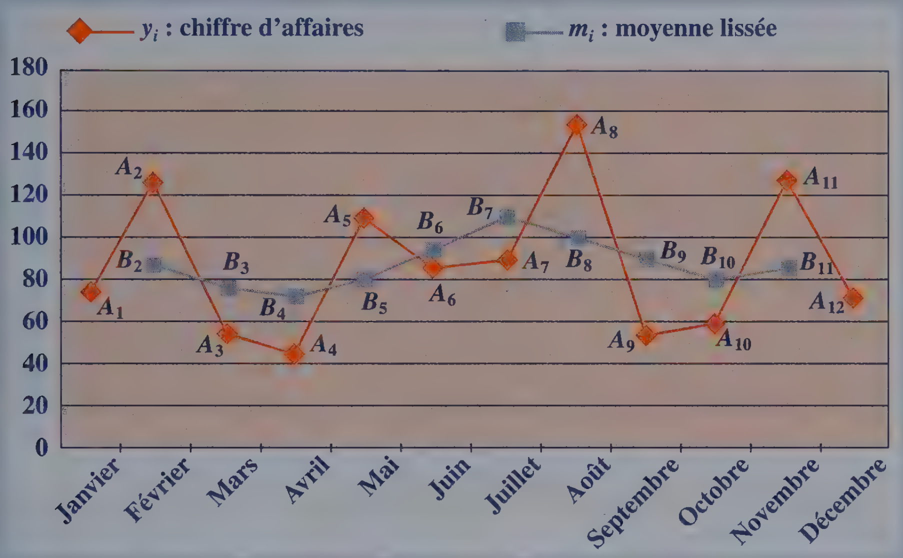
- Introduisons dans la colonne A le rang du mois : 1 en A2, 2 en A3, puis tirons la poignée jusqu'en A13.
- Introduisons les mois dans la colonne B : Janvier en B2, puis tirons la poignée jusqu'en B13.
- Introduisons les valeurs dans la zone C2:C13.
- En D3, introduisons la première moyenne lissée : **=(C2+C3+C4)/3** ; puis tirons la poignée jusqu'en D12, nous obtenons ainsi le tableau des moyennes lissées.

D3 = =(C2+C3+C4)/3

Microsoft Excel - Classeur1

	A	B	C	D
1	Rang i du mois	Mois	y_i : Chiffre d'affaires	m_i : moyenne lissée
2	1	Janvier	75	
3	2	Février	125	85
4	3	Mars	55	75
5	4	Avril	45	70
6	5	Mai	110	80
7	6	Juin	85	95
8	7	Juillet	90	110
9	8	Août	155	100
10	9	Septembre	55	90
11	10	Octobre	60	80
12	11	Novembre	125	85
13	12	Décembre	70	
14				

• Pour tracer les deux courbes sur la même figure, il suffit de sélectionner les zones B, C et D, puis de sélectionner dans l'assistant graphique les courbes avec marques affichées à chaque point.



1° b. La ligne polygonale A_1 , A_2 , …, A_{12} représente **l'évolution du chiffre d'affaires au cours de cette année d'exercice.**

$$\bar{y} = \frac{1}{12}(75+125+55+45+110+85+90+155+55+60+125+70)$$

soit : $\bar{y} = 87{,}5$.

c. Le chiffre d'affaires moyen est de **87,5 millions d'euros.**

2° b. L'avantage d'une représentation à l'aide des moyennes lissées est de rendre compte de la tendance générale de l'évolution, en tenant compte de toutes les valeurs, tout en « gommant » les résultats extrêmes.

La tendance est une légère baisse en début d'année, puis une hausse sensible jusqu'à l'été, puis à nouveau une baisse qui ramène pratiquement le chiffre d'affaires à sa valeur initiale. Il semblerait que cette entreprise a un fonctionnement saisonnier marqué mais très régulier.

7 1° Utilisons Excel.

a. Pour simuler le lancement d'un dé, on va utiliser la fonction **=ALEA()** qui donne de manière aléatoire un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 1[.

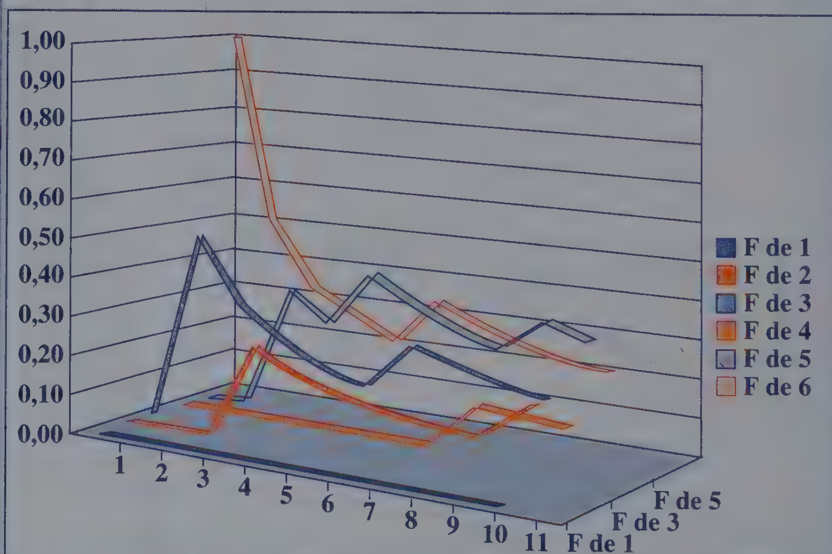
En le multipliant par 6 et en lui ajoutant 1, on obtient un nombre appartenant à l'intervalle [1 ; 7[. Il suffit d'en prendre la partie entière pour obtenir un entier naturel de {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La fonction **=NB.SI(…α…;…β…)** compte combien de termes de la plage α sont égaux au contenu de la cellule β.

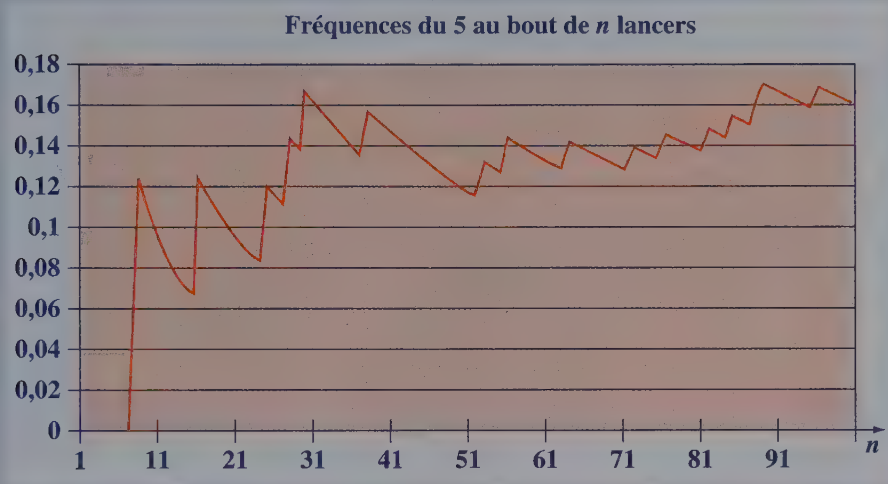
b. Dans la colonne A, on indique le numéro du lancer :
En A2 on rentre 1, en A3 on entre 2, on sélectionne la plage A1:A2, puis on étire la poignée jusqu'à A11 pour avoir 10 lancers.
Dans la colonne B, on simule le lancement du dé :
En B2, on entre : **=ENT(ALEA()*6+1)** puis on étire la poignée jusqu'à B11.
Dans les colonnes C à H, on calcule la fréquence de chacun des résultats après n lancers :
En C2 : **=NB.SI($B$2:B2;1)/A2** puis on étire la poignée jusqu'à C11.
En D2 : **=NB.SI($B$2:B2;2)/A2.**
Etc.

c. Pour la figure, on sélectionne les colonnes C à H et on active l'assistant graphique. Le schéma suivant a été obtenu avec les courbes 3D avec effet D.
On peut ensuite faire varier l'échantillonnage pour voir comment les courbes varient.

	A	B	C	D	E	F	G
1	lancer	résultat	F de 1	F de 2	F de 3	F de 4	F de 5
2	1	6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	2	3	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00
4	3	5	0,00	0,00	0,33	0,00	0,33
5	4	2	0,00	0,25	0,25	0,00	0,25
6	5	5	0,00	0,20	0,20	0,00	0,40
7	6	6	0,00	0,17	0,17	0,00	0,33
8	7	3	0,00	0,14	0,29	0,00	0,29
9	8	4	0,00	0,13	0,25	0,13	0,25
10	9	5	0,00	0,11	0,22	0,11	0,33
11	10	2	0,00	0,20	0,20	0,10	0,30

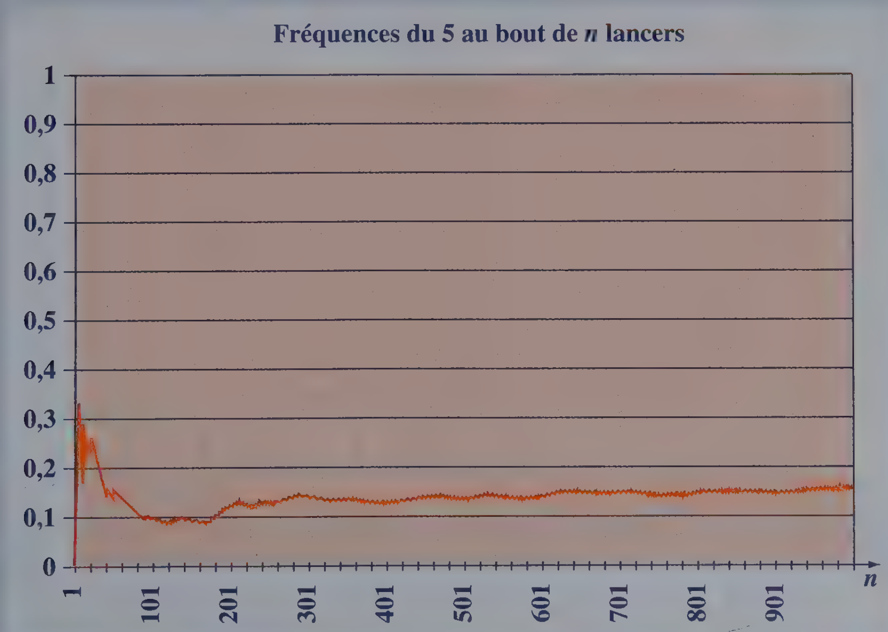


2° et 3° On procède de manière analogue pour 100, 1 000 ou 10 000 lancers.
La figure ci-dessous correspond à 100 lancers.



Pour recommencer une simulation, appuyer sur la touche F9.

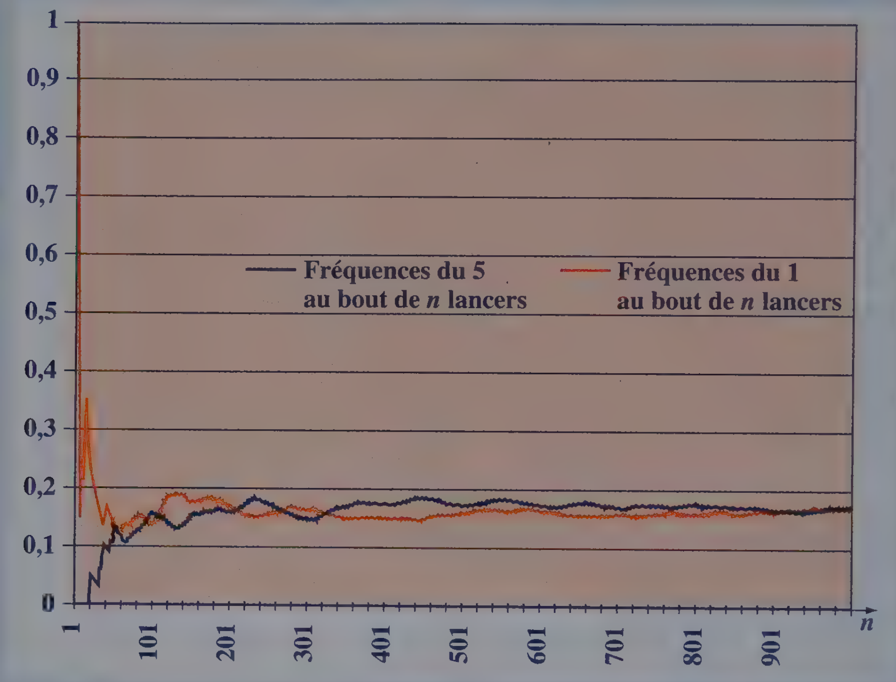
La figure ci-dessous correspond à 1 000 lancers.



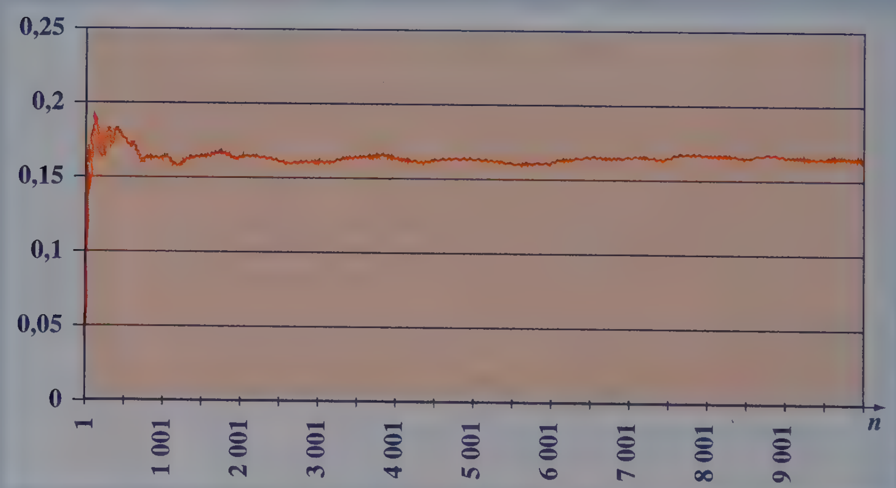
CORRIGÉS

CHAPITRE 11

La figure suivante permet de comparer les fréquences pour deux valeurs différentes.



La figure ci-dessous correspond à 10 000 lancers.



On constate que plus le nombre de lancers est important moins le résultat final est fluctuant. La fréquence au bout des 1 000 ou 10 000 lancers est proche de $\frac{1}{6}$.

1° Le premier tableau donne **les fréquences, en pourcentages, des admis ou des refusés, conditionnées par chacune des séries E, ES ou L.**

2° **a. 13 %** des candidats de la série **L** ont **échoué ; 65 %** des candidats de la série **ES** ont **réussi** leur bac ; **75 %** des candidats de la série **S** ont **réussi** leur bac et **75 % de l'ensemble des candidats** ont **réussi** leur bac.

b. $f_L(\text{Refusés}) = 13\ \%$; $f_{ES}(\text{Admis}) = 65\ \%$; $f_S(\text{Admis}) = 75\ \%$ et $f(\text{Admis}) = 75\ \%$.

3° **a. 13 %** des candidats **refusés** appartenaient à la série **L ; 45 %** des candidats **refusés** appartenaient à la série **S ; 45 %** des candidats **admis** appartenaient à la série **S ; 45 % des candidats** appartenaient à la série **S.**

La répartition des S est régulière.

b. $f_{\text{Refusés}}(L) = 13\ \%$ et $f_{\text{Refusés}}(S) = 45\ \%$ et $f_{\text{Admis}}(S) = 45\ \%$ et $f(S) = 45\ \%$.

4° **a. Vrai**, d'après la colonne « Total » du second tableau.

b. Faux, c'est en ES, d'après le premier tableau.

c. Vrai, d'après le premier tableau (87 % en L contre 75 % en S).

d. Faux, 65 %.

e. Vrai, d'après la colonne « Refusés » du second tableau.

f. Vrai, d'après la colonne « Total » du second tableau.

CHAPITRE 12

PROBABILITÉS

Rappels de cours

I- Loi de probabilité sur un ensemble fini

Une loi de probabilité sur un ensemble fini est un objet mathématique qui a les propriétés des distributions de fréquences.

Définitions

- Une loi de probabilité P sur un ensemble Ω de r éléments $\omega_1, \ldots, \omega_r$ est la donnée de r nombres $p_1, \ldots, p_r$, positifs ou nuls, et de somme 1.

Le nombre p_i s'appelle la $i^{\text{ième}}$ composante de P ou encore la probabilité du $i^{\text{ième}}$ élément de Ω.

On peut écrire : $\boldsymbol{P = (p_1, \ldots, p_r)}$,

où, pour tout entier i compris entre 1 et r : $\boldsymbol{p_i \geqslant 0}$

et : $$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1.$$

On dit alors que l'ensemble (fini) Ω est muni d'une loi de probabilité P.

- La probabilité d'une partie A de Ω (c'est-à-dire d'un événement A) est la somme des probabilités des éléments qui le composent.

Propriétés

Soient Ω un ensemble fini et P une loi de probabilité définie sur Ω.

- La probabilité de tout événement est comprise entre 0 et 1.
- La probabilité de Ω est égale à 1, celle de l'ensemble vide à 0.
- Si A et B sont des événements tels que A soit inclus dans B, alors :
$$P(A) \leqslant P(B).$$
- Si A et B sont des événements disjoints, alors :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- La probabilité du complémentaire $\overline{A}$ d'un événement A vérifie :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- La probabilité de la réunion de deux événements A et B vérifie :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Cas de l'équiprobabilité

Étant donné un ensemble Ω à r éléments, on appelle loi équirépartie sur Ω la loi de probabilité pour laquelle tous les éléments de l'ensemble Ω ont la même probabilité ;

c'est donc la loi $\underbrace{\left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)}_{r \text{ composantes}}$, dont toutes les composantes valent $\frac{1}{r}$.

La probabilité d'un événement A est alors égale au nombre de ses éléments divisé par r :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions de fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

II- Modélisation d'expériences aléatoires de référence

■ Soit Ω un ensemble fini qui possède r éléments.

• Ω^2 désigne l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de Ω, et Ω^2 possède r^2 éléments.

• Ω^3 désigne l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments de Ω, et Ω^3 possède r^3 éléments.

• Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, Ω^n désigne l'ensemble des n-listes $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de Ω, et Ω^n possède r^n éléments.

■ Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité sur l'ensemble des issues possibles. On peut généralement trouver une expérience de référence qui, à un recodage près des issues possibles, est régie par le même modèle.

<table>
<tr><th>Expérience aléatoire</th><th>Un modèle adapté</th></tr>
<tr><td>Choix d'un élément au hasard dans Ω.</td><td>Ω muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>Choix de n éléments au hasard dans Ω.</td><td rowspan="2">Ω^n muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>Choix d'un élément au hasard dans Ω^n.</td></tr>
<tr><td>Lancer d'un dé équilibré.</td><td>$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>n lancers d'un dé équilibré.</td><td rowspan="2">$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>Lancer de n dés équilibrés discernables.</td></tr>
<tr><td>Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.</td><td>$\{0, 1\}$ muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.</td><td rowspan="2">$\{0, 1\}^n$ muni de la loi de probabilité équirépartie.</td></tr>
<tr><td>Lancer de n pièces de monnaie équilibrées discernables.</td></tr>
<tr><td>Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant N_1 boules rouges et N_2 boules blanches.</td><td>$\{0, 1\}$ muni de la loi de probabilité $\left(\frac{N_1}{N_1+N_2}, \frac{N_2}{N_1+N_2}\right)$.</td></tr>
</table>

III- Utilisation d'une calculatrice, d'un tableur

Les calculatrices et les tableurs disposent d'un générateur de nombre aléatoire qui produit un décimal (possédant un nombre fixe de chiffres après la virgule, qui dépend du matériel) pris au hasard dans [0 ; 1[; par exemple :

TI	**Rand**
CASIO	**Ran #**
Excel	**ALEA()**

Si n est un entier naturel non nul et x un nombre aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[, alors nx est un nombre aléatoire de l'intervalle [0 ; n[; la partie entière de nx est un entier aléatoire de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ et la partie entière de $nx + 1$ est un entier aléatoire de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

En associant le générateur de nombre aléatoire et la fonction « partie entière » :

Obtention d'un…	TI-82	GRAPH 65	Excel
…chiffre aléatoire (choix d'un chiffre au hasard)	**int(10rand)**	**Int(10Ran#)**	**ENT(10*ALEA())**
…nombre aléatoire parmi 0 et 1 (lancer d'une pièce de monnaie équilibrée)	**int(2rand)**	**Int(2Ran#)**	**ENT(2*ALEA())**
…entier aléatoire compris entre 1 et 6 (lancer d'un dé équilibré)	**int(6rand+1)**	**Int(6Ran#+1)**	**ENT(6*ALEA()+1)**

Intéressons-nous à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer deux lancers d'une pièce de monnaie équilibrée et à relever le nombre de côtés face obtenus. En codant « face » par 1 et « pile » par 0, les résultats de l'expérience aléatoire sont les couples (i, j) de nombres 0 ou 1, tous équiprobables, et le nombre de côtés face est alors la somme $i + j$.

Le nombre de côtés face peut valoir 0 (« double pile »), 1 (« pile et face ») ou 2 (« double face ») ; de plus, on peut démontrer que les probabilités que le nombre de côtés face soit égal à 0, 1, 2 sont respectivement égales à 1/4, 1/2 et 1/4.

Calculatrices

Utilisons une liste de trois éléments (c'est un triplet) ; dans les premier, deuxième et troisième éléments de cette liste seront cumulés les nombres de résultats égaux respectivement à 0, 1 et 2.

Programmons l'algorithme suivant :
- entrer le nombre N d'expériences ;
- initialiser à (0,0,0) une liste L ;
- pour I variant de 1 à N :

– calculer la somme de deux entiers aléatoires de {0 ; 1}, ajouter 1 et affecter le résultat à la variable A (A contient alors le rang de l'élément de la liste auquel il faut ajouter 1),

– ajouter 1 à l'élément de la liste L de rang A ;
- afficher les fréquences d'apparition des résultats 0, 1 et 2.

Variable	Utilisation	Valeur initiale
N	**Nombre d'expériences**	**Fourni par l'utilisateur**
I	**Compteur de boucle**	**1**
A	**Nombre de côtés face + 1**	
L1 ou List1	**Liste à 3 éléments**	**(0, 0, 0)**

Avec la TI-82

```
:3→dim L1:Fill(0,L1)
:Prompt N
:For(I,1,N)
:int(2rand)
     +int(2rand+1)→A
:L1(A)+1→L1(A)
:End
:L1/N→L1
:Disp "FRQ 0",L1(1)
:Disp "FRQ 1",L1(2)
:Disp "FRQ 2",L1(3)
```

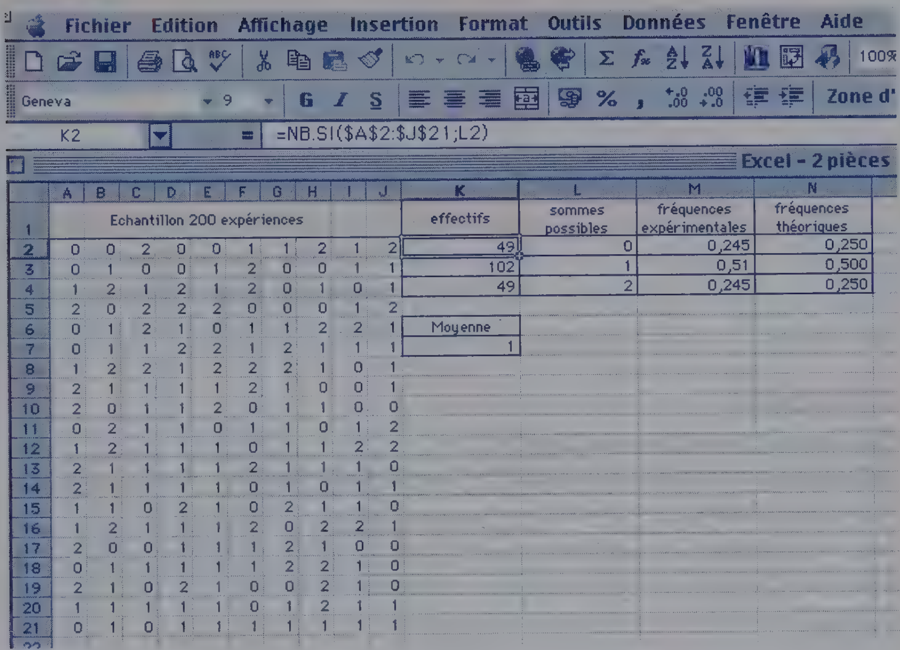
Avec la GRAPH 65

```
{0,0,0}→ List 1↵
"NB EXP"? → N↵
For 1→I To N↵
Int(2Ran#)
    +Int(2Ran#+1)→A↵
List 1[A]+1→List 1[A]↵
Next↵
List 1÷N→List 1↵
"FREQ 0":List 1[1]◢
"FREQ 1":List 1[2]◢
"FREQ 2":List 1[3]
```

Voici un exemple de résultat, pour 400 expériences :

```
400
FRQ 0
                0.29
FRQ 1
                 0.5
FRQ 2
                0.21
```

Tableurs



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Echantillon 200 expériences										effectifs	sommes possibles	fréquences expérimentales	fréquences théoriques
2	0	0	2	0	0	1	1	2	1	2	49	0	0,245	0,250
3	0	1	0	0	1	2	0	0	1	1	102	1	0,51	0,500
4	1	2	1	2	1	2	0	1	0	1	49	2	0,245	0,250
5	2	0	2	2	2	0	0	0	1	2				
6	0	1	2	1	0	1	1	2	2	1	Moyenne			
7	0	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1			
8	1	2	2	1	2	2	2	1	0	1				
9	2	1	1	1	1	2	1	0	0	1				
10	2	0	1	1	2	0	1	1	0	0				
11	0	2	1	1	0	1	1	0	1	2				
12	1	2	1	1	1	0	1	1	2	2				
13	2	1	1	1	1	2	1	1	1	0				
14	2	1	1	1	1	0	1	0	1	1				
15	1	1	0	2	1	0	2	1	1	0				
16	1	2	1	1	1	2	0	2	2	1				
17	2	0	0	1	1	1	2	1	0	0				
18	0	1	1	1	1	1	2	2	1	0				
19	2	1	0	2	1	0	0	2	1	0				
20	1	1	1	1	1	0	1	2	1	1				
21	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1				

Échantillon de 200 expériences

Adresses	Formules	Observations
A2:J21	=ENT(2*ALEA()) +ENT(2*ALEA())	entrer cette formule dans A2, puis utiliser la poignée de recopie rapide, vers la droite, vers le bas.

Sommes possibles

Adresses	Formules	Observations
L2:L4		entrer 0, 1 et 2.

Effectifs

Adresses	Formules	Observations
K2:K4	=NB.SI($A$2:$J$21;L2)	entrer cette formule dans K2 et utiliser la poignée de recopie rapide vers le bas.

Moyenne

Adresses	Formules	Observations
K7	=MOYENNE(A2:J21)	

Fréquences expérimentales

Adresses	Formules	Observations
L2:L4	=L2/200	entrer cette formule dans L2 et utiliser la poignée de recopie rapide vers le bas.

Remarques

• La formule : =NB.SI($A$2:$J$21;L2)
retourne le nombre de cellules de la plage A2:J21 dont la valeur est égale à celle entrée dans L2.

Noter l'utilisation des références absolues ($A$2) ou relatives (L2), qui permettent d'utiliser la fonction de recopie rapide en incrémentant automatiquement les références relatives et en ne modifiant pas les références absolues.

• En appuyant sur la touche F9, une nouvelle simulation est effectuée.

• Pour une meilleure lisibilité de la feuille de calcul Excel, les tailles des dix premières colonnes ont été diminuées (sélectionner les colonnes A à J, dérouler le menu **Format**, choisir les options **Colonne**, **Largeur**).

EXERCICES
de contrôle des connaissances

1 (Corrigé p. 178)

Dans une expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une boule d'une urne comportant des boules rouges et des boules bleues, la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{2}{3}$.

Que peut-on dire des nombres N_1 de boules rouges et N_2 de boules bleues contenues dans l'urne ?

2 (Corrigé p. 178)

Chacune des expériences aléatoires proposées ci-dessous peut-elle être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble $\{0 ; 1\}$?

1° Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.

2° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules rouges et dix boules blanches.

3° Jet d'un dé équilibré et relevé du caractère « pair » ou « impair » du numéro porté par le dé.

4° Lancer d'une punaise et relevé de la position ($\perp$ ou λ).

3 (Corrigé p. 179)

Proposer un modèle de chacune des expériences aléatoires suivantes.

1° Deux jets successifs d'un dé équilibré.

2° Jet de deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre bleu.

3° Trois lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

4° Jet de trois pièces équilibrées indiscernables.

5° Tirage d'une boule au hasard dans une urne contenant dix boules blanches et trente boules vertes.

4 (Corrigé p. 180)

À l'aide de la calculatrice, écrire un programme qui simule chacune des expériences aléatoires proposées.

1° Relevé du nombre de côtés face obtenus lors de cinq lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.

2° Relevé du minimum des points amenés lors de six jets successifs d'un dé équilibré.

Loi de probabilité, événements

5 ★ 10 min (Corrigé p. 181)

On dispose d'une urne contenant des boules rouges et des boules bleues, et on effectue dans cette urne trois tirages au hasard successifs d'une boule avec remise. On note R_i les événements « obtenir une boule rouge au $i^{\text{ième}}$ tirage » pour i valant 1, 2 ou 3.

1° Décrire chacun des événements :

a. $R_1 \cap R_2$; **b.** $R_1 \cup R_2$; **c.** $\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3$.

2° Écrire à l'aide des événements R_i chacun des événements suivants :

a. A : « obtenir trois boules rouges » ;

b. B : « obtenir au moins une boule rouge » ;

c. C : « obtenir une boule rouge au premier tirage et une boule bleue au deuxième ».

3° Décrire le complémentaire de chacun des événements $R_1 \cap R_2$ et $R_1 \cup R_2$.

Probabilité d'un événement

6 ★ 10 min (Corrigé p. 182)

Un club de tennis compte 350 adhérents qui se répartissent de la façon suivante :

	Hommes	Femmes
Pratiquent le tennis en compétition	60	20
Ne pratiquent le tennis qu'en loisir	190	80
Total	250	100

1° On choisit un adhérent au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit :

a. un homme ?

b. une femme ?

c. une femme pratiquant la compétition ?

2° On choisit une femme au hasard parmi les adhérents. Quelle est la probabilité qu'elle joue en compétition ?

7 ★ 15 min (Corrigé p. 182)

On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à choisir trois lettres au hasard, les deux premières parmi les lettres A, B et C, la troisième parmi A et B. Un résultat possible est une liste de trois lettres ; on notera, par exemple, CAB celui pour lequel la première lettre est C, la deuxième A et la troisième B.

1° Construire un arbre permettant d'obtenir tous les résultats possibles.

2° Calculer la probabilité des événements E, F, G et H suivants :

a. E : « obtenir trois lettres identiques » ;

b. F : « obtenir au plus une lettre A » ;

c. G : « obtenir trois lettres distinctes » ;

d. H : « obtenir au moins une lettre C ».

3° a. Montrer que la probabilité de l'événement $F \cap H$ est égale à $\frac{4}{9}$.

b. Déduire la probabilité de l'événement $F \cup H$.

(Les résultats des calculs de probabilités seront présentés sous forme de fraction irréductible.)

Modélisation et simulation d'expériences aléatoires

8 ★★ 30 min (Corrigé p. 184)

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré.

1° Déterminer la probabilité que le maximum des deux nombres lus sur la face supérieure du dé soit égale à 6.

2° a. Écrire un programme qui simule la répétition de cette expérience aléatoire. Ce programme :

• demandera le nombre d'expériences à réaliser ;

• affichera la fréquence du cas où le maximum des deux nombres obtenus est égal à 6.

b. Exécuter le programme pour un grand nombre d'expériences.

c. Commenter.

CORRIGÉS des exercices

1 Les événements « tirer une boule rouge » et « tirer une boule bleue » sont des événements contraires, donc la somme de leurs probabilités est égale à 1 ; la probabilité de tirer une boule rouge étant 2/3, celle de tirer une boule bleue est donc 1/3.

La probabilité de tirer une boule d'une des deux couleurs rouge ou bleue est égale à la proportion de boules de cette couleur dans l'urne.

$$\frac{N_1}{N_1+N_2}=\frac{2}{3},$$
$$\frac{N_2}{N_1+N_2}=\frac{1}{3}.$$

La probabilité de tirer une boule rouge (2/3) étant le double de celle de tirer une boule bleue (1/3), l'urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules bleues :

$$N_1 = 2\,N_2\,.$$

2 **1°** La pièce de monnaie étant équilibrée, chacun des deux côtés pile ou face a la même probabilité d'apparaître.
En codant par exemple pile par 0 et face par 1, **l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble {0 ; 1}.**

2° L'urne contenant autant de boules rouges que de boules blanches, les proportions de boules rouges et de boules blanches sont égales à 1/2.
En codant par exemple l'obtention d'une boule rouge par 0 et l'obtention d'une boule blanche par 1, **l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble {0 ; 1}.**

3° Parmi les entiers compris entre 1 et 6, il y en a autant de pairs (2, 4 et 6) que d'impairs (1, 3 et 5).
Le dé étant équilibré, la probabilité qu'il amène un chiffre pair et la probabilité qu'il amène un chiffre impair sont donc égales à 1/2.
En codant par exemple l'obtention d'un chiffre pair par 0 et l'obtention d'un chiffre impair par 1, **l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi équirépartie sur l'ensemble {0 ; 1}.**

4° Rien ne permet d'affirmer que chacune des deux éventualités $\perp$ et λ a la même probabilité de se réaliser.

Une étude statistique permettrait de déterminer un modèle adapté.

1° L'ensemble Ω des issues possibles est celui des couples (i, j) de nombres entiers entre 1 et 6 (i : numéro porté par le dé au premier jet, j : numéro porté par le dé au deuxième jet).
Le dé étant équilibré, **l'expérience aléatoire est modélisée par l'équiprobabilité sur Ω.**

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}^2$,
$\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

2° L'expérience aléatoire peut se modéliser **de la même façon** qu'au **1°**, en considérant par exemple que l'issue (i, j) correspond à : le dé rouge amène le chiffre i et le dé bleu amène le chiffre j.

3° En codant par exemple pile par 0 et face par 1, l'ensemble Ω des issues possibles est celui des triplets (i, j, k) de nombres 0 ou 1.
La pièce de monnaie étant équilibrée, **l'expérience aléatoire est modélisée par l'équiprobabilité sur Ω.**

$\Omega = \{0 ; 1\}^3$,
$\text{card}(\Omega) = 2^3 = 8$.

4° En codant par exemple pile par 0 et face par 1, les issues observables de cette expérience aléatoire sont « triple 0 », « triple 1 », « 1 et double 0 », « 0 et double 1 », et on peut démontrer que **le choix de la probabilité $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{8};\frac{3}{8};\frac{3}{8}\right)$ sur ces quatre issues est adapté.** Mais pour parvenir à cette conclusion, on est amené à partir d'un modèle équiréparti sur $\{0 ; 1\}^3$ et à calculer la probabilité des événements « obtenir k côtés face », l'entier k variant de 0 à 3.

Pour certaines expériences aléatoires, on est amené à choisir un modèle calculé à partir d'un modèle d'équiprobabilité sur un ensemble qui n'est pas celui des issues observables.

5° La proportion de boules blanches contenues dans l'urne est égale à 1/4, celle de boules vertes est égale à 3/4. En codant par exemple l'obtention d'une boule blanche par 0 et l'obtention d'une boule verte par 1, **l'expérience aléatoire peut être modélisée par la loi de probabilité $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ sur l'ensemble $\{0 ; 1\}$.**

$\frac{10}{10+30} = \frac{1}{4}$, $\frac{30}{10+30} = \frac{3}{4}$.

4 1° Pour relever le nombre de côtés face obtenus lors de cinq lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée, programmons l'algorithme suivant :

- initialiser une variable A à 0 (dans laquelle seront cumulés les côtés face obtenus) ;
- à chacun des cinq passages dans une boucle **For**, si le générateur de nombre aléatoire fournit un nombre inférieur à 0,5 , alors ajouter 1 à A ;
- afficher A.

En choisissant un nombre au hasard dans [0 ; 1[, il y a une chance sur deux que ce nombre soit inférieur à 0,5.

Avec la TI-82

```
:0 → A
:For (I,1,5)
:If rand<.5
:Then
:A+1 → A
:End
:End
:Disp"NB FACE",A
```

Avec la GRAPH 65

```
0 →A↵
For 1→I To 5↵
If Ran#<.5↵
Then A+1 → A↵
IfEnd↵
Next↵
"NB FACE":A
```

2° Pour relever le minimum des points amenés lors de six jets successifs d'un dé équilibré, programmons l'algorithme suivant :

- définir une liste à six éléments ;
- à l'aide d'une boucle **For**, remplir la 6-liste par des entiers choisis au hasard dans {1, 2, ..., 6} ;
- afficher le minimum de la liste.

Avec la TI-82

```
:6→dim L1
:For(I,1,6)
:int (6rand+1)→L1(I)
:End
:Disp "MIN",min(L1)
```

Avec la GRAPH 65

```
6→Dim List 1↵
For 1→I To 6↵
Int (6Ran#+1)→List1[I]↵
Next↵
"MIN":min(List 1)
```

5 **1° a.** $R_1 \cap R_2$ est l'événement « obtenir une boule rouge au premier **et** au deuxième tirage ».

b. $R_1 \cup R_2$ est l'événement « obtenir une boule rouge au premier **ou** au deuxième tirage ».

c. $\overline{R}_1 \cap R_2 \cap R_3$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier et une boule rouge aux deuxième et troisième tirages » .

2° a. L'événement A : « obtenir trois boules rouges » est réalisé si et seulement si R_1, R_2 et R_3 le sont, donc :

$$\boldsymbol{A = R_1 \cap R_2 \cap R_3 .}$$

b. L'événement B : « obtenir au moins une boule rouge » est réalisé si et seulement si R_1 ou R_2 ou R_3 est réalisé, donc :

$$\boldsymbol{B = R_1 \cup R_2 \cup R_3 .}$$

c. L'événement C : « obtenir une boule rouge au premier tirage et une boule bleue au deuxième » est réalisé si et seulement si R_1 et le complémentaire de R_2 sont réalisés, donc :

$$\boldsymbol{C = R_1 \cap \overline{R}_2 .}$$

3° • La négation de « obtenir une boule rouge au premier et au deuxième tirage » est « ne pas obtenir une boule rouge au premier tirage **ou** ne pas obtenir une boule rouge au deuxième tirage », donc le complémentaire de l'événement **$R_1 \cap R_2$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier ou au deuxième tirage ».**

$$\overline{R_1 \cap R_2} = \overline{R_1} \cup \overline{R_2} .$$

• La négation de « obtenir une boule rouge au premier ou au deuxième tirage » est « ne pas obtenir une boule rouge au premier tirage **et** ne pas obtenir une boule rouge au deuxième tirage », donc **le complémentaire de l'événement $R_1 \cup R_2$ est l'événement « obtenir une boule bleue au premier tirage et au deuxième tirage ».**

$$\overline{R_1 \cup R_2} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} .$$

On peut compléter le tableau de la façon suivante :

	Hommes	Femmes	Total
Pratiquent le tennis en compétition	**60**	**20**	**80**
Ne pratiquent le tennis qu'en loisir	**190**	**80**	**270**
Total	**250**	**100**	**350**

1° **a.** Le club comprend 350 adhérents dont 250 hommes, donc la **probabilité de choisir un homme est $\frac{250}{350}$ soit $\frac{5}{7}$.**

b. « Choisir une femme » est l'événement complémentaire de « choisir un homme ». Donc **la probabilité de choisir une femme est $\left(1-\frac{5}{7}\right)$ soit $\frac{2}{7}$.**

Autre méthode de calcul : sur les 350 adhérents, 100 sont des femmes, donc la probabilité de choisir une femme est :

$$\frac{100}{350} \text{ soit } \frac{2}{7}.$$

c. 20 femmes pratiquent la compétition, donc **la probabilité de choisir une femme faisant de la compétition est $\frac{20}{350}$ soit $\frac{2}{35}$.**

2° Parmi les 100 femmes du club, 20 jouent en compétition. On peut donc affirmer que, sachant que la personne choisie est une femme, **la probabilité qu'elle fasse de la compétition est $\frac{20}{100}$ soit $\frac{1}{5}$.**

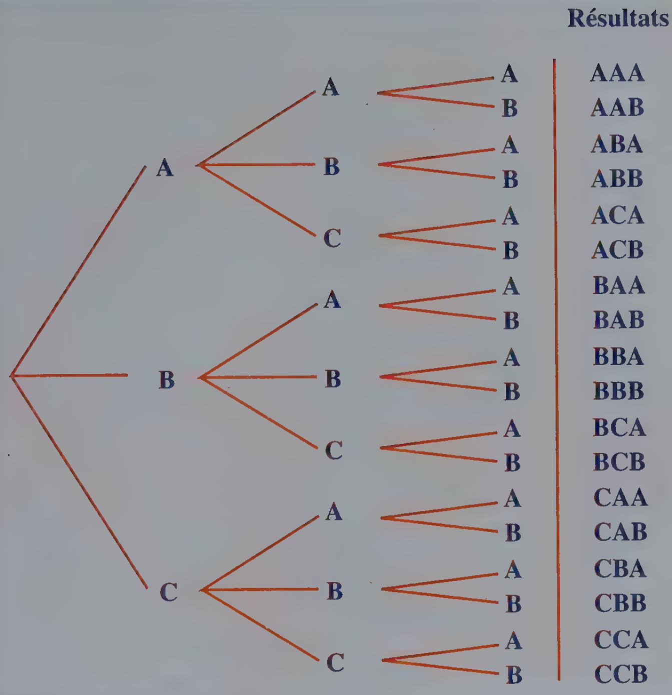
1° D'après l'arbre ci-après, les résultats sont au nombre de 18, ce qui correspond au calcul suivant :

$$3 \times 3 \times 2 = 18.$$

Trois choix possibles pour la première lettre,

le premier choix étant fait, trois choix possibles pour la deuxième lettre,

les deux premiers choix étant faits, deux choix possibles pour la troisième lettre.



2° La loi de probabilité P associée à l'expérience aléatoire est l'équiprobabilité sur l'ensemble des 18 listes obtenues précédemment ; la probabilité d'un événement est donc le quotient par 18 du nombre de listes qui réalisent cet événement.

a. E = {AAA, BBB}, donc : $P(E)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

b. Les listes qui réalisent l'événement F sont au nombre de 12, donc :

$$P(F)=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

c. Seules quatre listes réalisent l'événement G : ACB, BCA, CAB et CBA, donc :

$$P(G)=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}.$$

d. Exactement dix listes réalisent l'événement H, donc :

$$P(H)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}.$$

3° **a.** $F \cap H$ est l'événement : « obtenir au plus une lettre A et au moins une lettre C » ; les listes qui le réalisent sont au nombre de 8 :

ACB, BCA, BCB, CAB, CBA, CBB, CCA, CCB,

donc : $$P(F \cap H) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

b. De l'égalité : $P(F \cup H) = P(F) + P(H) - P(F \cap H)$, on déduit :

$$P(F \cup H) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{6+5-4}{9} = \frac{7}{9}.$$

8 1° Le modèle associé à l'expérience aléatoire est l'équiprobabilité sur l'ensemble Ω des couples (i, j) de nombres entiers compris entre 1 et 6.

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\longrightarrow$

dé 1 / dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Le premier tableau représente toutes les issues possibles : elles sont au nombre de 36 ; toutes les issues étant équiprobables, chacune a pour probabilité 1/36.

Le deuxième tableau donne le maximum des deux nombres i et j pour chacune des issues (i, j) possibles.

$\Omega = \{1 ; 2, \ldots, 6\}^2$,
$\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

Parmi les trente-six issues possibles, onze réalisent l'événement « le maximum est égal à 6 » , donc :
la probabilité de l'événement « le maximum est égal à 6 » est égale à $\frac{11}{36}$.

$\frac{11}{36} \approx 0,31.$

2° a. Simulation

Programmons l'algorithme suivant :

• définir une liste à deux éléments, initialiser la variable *A* à 0, entrer la valeur du nombre d'expériences souhaité dans la variable *N* ;

• à chacun des *N* passages dans une boucle **For**, remplir la 2-liste par des entiers choisis au hasard dans {1, 2, ..., 6} et ajouter 1 à la variable *A* si le maximum des éléments de la liste est égal à 6 ;

• afficher le quotient *A*/*N*.

Avec la TI-82

```
:2→dim L1
:0→A
:Prompt N
:For(I,1,N)
:int (6rand+1)→L1(1)
:int (6rand+1)→L1(2)
:If max(L1)=6
:Then
:A+1→A
:End
:End
:Disp "FREQ 6",A/N
```

Avec la GRAPH 65

```
2→Dim List 1↵
0→A↵
"NB EXP"? → N↵
For 1→I To N↵
Int(6Ran#+1)→List1[1]↵
Int(6Ran#+1)→List1[2]↵
If Max(List1)=6↵
Then A+1→A↵
IfEnd↵
Next↵
"FREQ 6":A/N
```

b. Pour 200 et 500 expériences, on obtient :

```
200
FREQ 6
                    0,285
NB EXP?
500
FREQ 6
                    0,308
```

c. La fréquence de réalisation d'un événement, calculée sur des séries de taille *n*, se rapproche de la probabilité de cet événement quand *n* devient grand.

CHAPITRE 13

SYSTÈMES LINÉAIRES, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Rappels de cours

I- Systèmes linéaires

Définitions

- On appelle système linéaire de trois équations à trois inconnues x, y et z tout système :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

où a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'' et d'' sont des réels.

- On appelle solution tout triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels qui vérifie simultanément les trois équations du système.

Opérations élémentaires

On appelle opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires l'une des trois opérations suivantes.

- L'échange des deux lignes (L_i) et (L_j) dont le codage est $(L_i) \leftrightarrow (L_j)$.
- La multiplication d'une ligne (L_i) par un réel λ non nul ; le codage en est $(L_i) \leftarrow \lambda(L_i)$.
- L'addition à une ligne (L_i) du produit d'une autre ligne (L_j) par un réel λ ; le codage en est $(L_i) \leftarrow (L_i) + \lambda(L_j)$.
- Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme celui-ci en un système équivalent (c'est-à-dire qui a le même ensemble de solutions).

Dans la suite du chapitre, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

II- Repérage, norme et distance dans l'espace

- Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x\ ;y\ ;z)$ de réels tels que :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

$(x\ ;y\ ;z)$ est appelé le triplet de coordonnées du point M.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\ ;y\ ;z)$ de réels tels que :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

$(x\ ;y\ ;z)$ est appelé le triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

- Des vecteurs $\vec{u}(x\ ;y\ ;z)$ et $\vec{v}(x'\ ;y'\ ;z')$ sont **colinéaires** si et seulement si leurs triplets de coordonnées $(x\ ;y\ ;z)$ et $(x'\ ;y'\ ;z')$ sont proportionnels.

- Des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement s'il existe des points A, B, C et D coplanaires tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.

- Des vecteurs $\vec{u}(x\ ;y\ ;z)$ et $\vec{v}(x'\ ;y'\ ;z')$ sont orthogonaux si et seulement si l'on a : $xx'+yy'+zz'=0.$

- La norme d'un vecteur $\vec{u}(x\ ;y\ ;z)$ est le réel, noté $\|\vec{u}\|$ et défini par :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

- La distance de deux points A et B est le réel noté AB et défini par :

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

III- Plans parallèles à un plan de base et droites parallèles à un axe

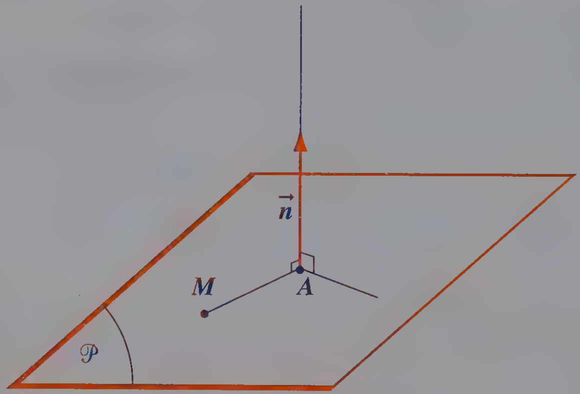
- Un plan est parallèle au plan de base $(O\ ;\vec{j},\vec{k})$ (respectivement $(O\ ;\vec{i},\vec{k})$ et $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$) si et seulement s'il admet une équation de la forme $x=a$ (respectivement $y=b$ et $z=c$).
- Une droite est parallèle à l'axe $(O\ ;\vec{i})$ (respectivement $(O\ ;\vec{j})$ et $(O\ ;\vec{k})$) si et seulement si elle admet un système d'équations de la forme $\begin{cases}y=b\\z=c\end{cases}$

$\left(\text{respectivement } \begin{cases}x=a\\z=c\end{cases} \text{ et } \begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}\right)$.

IV- Équation cartésienne d'un plan

■ Soient A un point de l'espace et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.
Les plans admettant $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ comme vecteur normal ont une équation du type : $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.

■ Toute équation du type : $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des réels tels que a, b, c ne sont pas simultanément nuls, est une équation de plan, et $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à ce plan.



V- Équations cartésiennes d'une droite

Toute droite d de l'espace peut être considérée comme l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Ceux-ci ont des équations qui peuvent s'écrire :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

On dit alors que :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$ **est un système d'équations cartésiennes de la droite *d*.**

EXERCICES
de contrôle des connaissances

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1

(Corrigé p. 193)

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ chacun des systèmes Σ proposés, d'inconnue $(x\,;y\,;z)$, par la méthode de Gauss.

1° $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 5x + y - z = 4. \end{cases}$

2° $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - y + 7z = -4 \\ 2x + 4y + 9z = -9. \end{cases}$

3° $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -5x + y - z = 1 \\ 7x + 3y + 7z = 9. \end{cases}$

4° $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ 5x + 4y - 10z = 7. \end{cases}$

2

(Corrigé p. 194)

On considère les points $A(-2\,;1\,;3)$ et $B(3\,;5\,;-1)$; on note I le milieu de $[AB]$ et l'on pose :

$$\vec{u} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}.$$

1° Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2° Donner les coordonnées du point I.

3° Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4° Calculer la distance AB.

3

(Corrigé p. 194)

1° Les vecteurs $\vec{u}(1\,;2\,;-3)$ et $\vec{v}(3\,;0\,;1)$ sont-ils orthogonaux ?

2° Les vecteurs $\vec{u}(-6\,;4\,;5)$ et $\vec{v}(1\,;-2\,;3)$ sont-ils orthogonaux ?

4

(Corrigé p. 195)

1° Donner une équation du plan horizontal $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(1\,;2\,;3)$.

2° Donner un système d'équations cartésiennes de la droite verticale d passant par le point B de coordonnées $(-1\,;4\,;9)$.

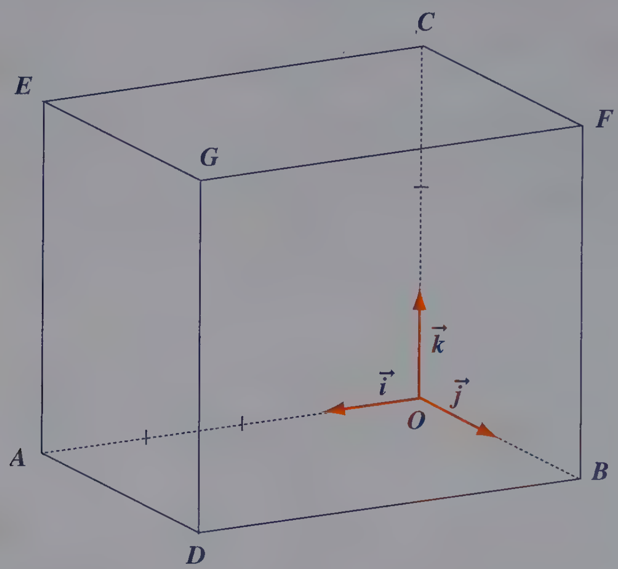
EXERCICES

5

(Corrigé p. 195)

On considère le parallélépipède rectangle $OABCDEFG$, les points A, B et C étant définis par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{OA} = 4\,\vec{i}\,,\quad \overrightarrow{OB} = 2\,\vec{j}\,,\quad \overrightarrow{OC} = 3\,\vec{k}\,.$$



Déterminer :

a. les coordonnées de chacun des sommets du parallélépipède ;

b. une équation des plans de chacune de ses faces ;

c. un système d'équations des droites portant chacune de ses arêtes.

Systèmes linéaires

6 ★ 5 min (Corrigé p. 196)

Soit Σ le système d'inconnue $(x\,;y\,;z)$:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 8 \\ x + 3y + z = 10 \\ 3x + y + z = 12. \end{cases}$$

1° On suppose que le triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ vérifie Σ.
Calculer $x + y + z$.
2° À l'aide du résultat du **1°**, résoudre le système Σ dans $\mathbb{R}^3$.

7 ★★ 10 min (Corrigé p. 197)

Noémie, Clara, Hugo et Adèle décident de déjeuner dans un restaurant italien.
Noémie prend une salade, une pizza, des spaghetti et une glace pour la somme de 15,20 €.
Clara prend une pizza, des spaghetti et une glace pour 11,80 €.
Hugo prend une salade, une pizza et une glace pour 11,20 €.
Adèle prend une salade, une pizza et des spaghetti pour 12,40 €.
Combien coûte une salade ? Une pizza ? Un plat de spaghetti ? Une glace ?

8 ★★ 15 min (Corrigé p. 197)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
Représenter l'ensemble $\mathcal{R}$ des points du plan dont le couple de coordonnées $(x\,;y)$ vérifie :

1° $\begin{cases} y \leqslant 2 \\ y \geqslant -3x \\ x - y + 1 \leqslant 0. \end{cases}$

2° $2 \leqslant 2x + y \leqslant 4.$

EXERCICES

CHAPITRE 13

Programmation linéaire

9 ★★ 20 min (Corrigé p. 199)

Un marchand de glaces vend des glaces en cornets, les unes à une boule, les autres à deux boules. Chaque jour, le marchand dispose de soixante cornets prévus pour une boule et de soixante cornets prévus pour deux boules. Il vend au plus cent cornets par jour et il dispose d'une quantité de crème glacée lui permettant de faire cent cinquante boules par jour. Le bénéfice réalisé est de 1 € pour un cornet à une boule et de 2,50 € pour un cornet à deux boules.

Déterminer, à l'aide d'une représentation graphique, le bénéfice maximal qu'il peut espérer faire en un jour.

Le plan sera muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Équations de plans

10 ★ 15 min (Corrigé p. 200)

Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ défini par la condition proposée.

1° $\mathcal{P}$ passe par les points $A(2\,;-3\,;1)$, $B(1\,;0\,;2)$ et $C(4\,;-2\,;3)$.

2° $\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, avec $A(0\,;2\,;1)$ et $B(4\,;-1\,;3)$.

3° $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation : $2x+y-3z+7=0$ et passe par le point $A(3\,;-2\,;5)$.

11 ★ 10 min (Corrigé p. 201)

Trouver le réel k (s'il existe) tel que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ soient parallèles.

1° $\mathcal{P} : 2x+y-z=12$ et $\mathcal{Q} : 6x+ky-3z=0$.

2° $\mathcal{P} : x-2y-z=0$ et $\mathcal{Q} : 2x+4y-kz=5$.

12 ★ 10 min (Corrigé p. 201)

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont-ils perpendiculaires ?

1° $\mathcal{P} : 2x+3y-z=1$ et $\mathcal{Q} : -x+y+z=9$.

2° $\mathcal{P} : x-y+z=-6$ et $\mathcal{Q} : 2x+y+7z=13$.

13 ★★ 20 min (Corrigé p. 202)

Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

1° $\mathcal{P} : 2x+2y+6z=-1\,;$
$\mathcal{Q} : -3x-4y-9z=1\,;$
$\mathcal{R} : -y+2z=4.$

2° $\mathcal{P} : x+2y-z=3\,;$
$\mathcal{Q} : 2x-y+3z=4\,;$
$\mathcal{R} : x-3y+4z=2.$

1 1° Les systèmes suivants, obtenus par des opérations élémentaires successives, sont équivalents à Σ :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 11y - 5z = 7 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 16y - 11z = -1 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_1). \end{cases}$$

La méthode de Gauss permet d'obtenir un système triangulaire équivalent au système étudié (la résolution d'un système triangulaire s'effectue sans problème !).

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (L_1) \\ 11y - 5z = 7 & (L_2) \\ -41z = -123 & (L_3) \leftarrow 11(L_3) - 16(L_2). \end{cases}$$

Ce dernier système admet une seule solution et on obtient « en cascade » :

$$z = \frac{-123}{-41} = 3, \quad y = \frac{7 + 5 \times 3}{11} = 2 \quad \text{et} \quad x = 1 + 3 \times 2 - 2 \times 3 = 1.$$

Le système Σ admet une seule solution, le triplet (1 ; 2 ; 3).

2° $$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (L_1) \\ y + 4z = -5 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \\ 8y + 3z = -11 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 2(L_1). \end{cases}$$

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & (L_1) \\ y + 4z = -5 & (L_2) \\ -29z = 29 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 8(L_2). \end{cases}$$

On obtient alors « en cascade » : $z = -1$, $y = -1$ et $x = 2$.

Le système Σ admet une seule solution, le triplet (2 ; – 1 ; – 1).

3° Le système suivant est équivalent à :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & (L_1) \\ 11y + 14z = 21 & (L_2) \leftarrow (L_2) + 5(L_1) \\ 11y + 14z = 19 & (L_3) \leftarrow -(L_3) + 7(L_1). \end{cases}$$

Les équations : $11y + 14z = 21$ et $11y + 14z = 19$ sont incompatibles, donc **le système Σ n'admet pas de solution.**

4° Le système suivant est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 & (L_1) \\ -y + 5z = 2 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ -y + 5z = 2 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_1). \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont identiques ; Σ se réduit donc à un système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ -y + 5z = 2. \end{cases}$$

Σ admet une infinité de solutions. En effet, Σ est encore équivalent à :

$$\begin{cases} x = 1 - y + 3z \\ y = -2 + 5z, \end{cases}$$

c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} x = 3 - 2z \\ y = -2 + 5z. \end{cases}$$

Le système Σ admet une infinité de solutions ; ce sont tous les triplets $(3 - 2z\,;\, -2 + 5z\,;\, z)$, où z décrit $\mathbb{R}$.

2 1° On a : $\overrightarrow{AB}\,(3 - (-2)\,;\, 5 - 1\,;\, -1 - 3)$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\,(5\,;\,4\,;\,-4)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(5\,;\,4\,;\,-4)$.

2° On a :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3,$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;3\,;1\right)$.

3° $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(5\,;\,4\,;\,-4)$

donc $\vec{u}$ **a pour coordonnées** $\left(\frac{15}{2}\,;6\,;-6\right)$

et $\vec{v}$ **a pour coordonnées** $\left(\frac{-5}{4}\,;-1\,;1\right)$.

La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4° On a : $AB = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16+16} = \boldsymbol{\sqrt{57}}$.

3 1° On a : $1 \times 3 + 2 \times 0 + (-3) \times 1 = 3 - 3 = 0$,
donc $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux.**
2° On a : $(-6) \times 1 + 4 \times (-2) + 5 \times 3 = -6 - 8 + 15 = 1$,
donc : $(-6) \times 1 + 4 \times (-2) + 5 \times 3 \neq 0$,
par conséquent, $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **ne sont pas orthogonaux.**

4 1° $\mathcal{P}$ est un plan horizontal donc une équation de $\mathcal{P}$ s'écrit : $z = a$. De plus, $\mathcal{P}$ passe par le point A, de cote 3,
donc **une équation de $\mathcal{P}$ est : $z = 3$.**

2° d est une droite verticale, donc un système d'équations cartésiennes de d est de la forme : $\begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$

De plus, d passe par le point B, d'abscisse – 1 et d'ordonnée 4,

donc **un système d'équations de d est : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4. \end{cases}$**

5 **a.** On obtient immédiatement :

$$O(0\ ;0\ ;0),\quad A(4\ ;0\ ;0),\quad B(0\ ;2\ ;0)\quad \text{et}\quad C(0\ ;0\ ;3),$$

puis, $OADB$ étant un parallèlogramme : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

donc : $\overrightarrow{OD}(4\ ;2\ ;0)$,

c'est-à-dire : $\boldsymbol{D(4\ ;2\ ;0)}$.

De même : $\boldsymbol{E(4\ ;0\ ;3)}$ **et** $\boldsymbol{F(0\ ;2\ ;3)}$.

Enfin, des égalités : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on déduit :
$\overrightarrow{OG}(4, 2, 3)$, d'où : $\boldsymbol{G(4\ ;2\ ;3)}$.

b. Le plan ($OADB$) de la face inférieure est le plan de base (Oxy) du repère,
donc : **une équation du plan ($OADB$) est $z = 0$.**

Le plan ($CEGF$) de la face supérieure :
- est parallèle au plan de base (Oxy) du repère,
- passe par le point $C(0\ ;0\ ;3)$,

donc : **une équation du plan ($CEGF$) est $z = 3$.**

De même :

plan	($OAEC$)	($BDGF$)	($OBFC$)	($ADGE$)
équation	$y = 0$	$y = 2$	$x = 0$	$x = 4$

c. $(OC) = (Oz)$, donc :

un système d'équations de la droite (OC) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

La droite (DG) :
- est parallèle à l'axe (Oz) du repère,
- passe par le point $D(4\ ;2\ ;0)$,

donc **un système d'équations de la droite (DG) est $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases}$**

De même :

droite	système d'équations
(AE)	$x=4$ et $y=0$
(BF)	$x=0$ et $y=2$
(OB)	$x=0$ et $z=0$
(CF)	$x=0$ et $z=3$
(AD)	$x=4$ et $z=0$
(EG)	$x=4$ et $z=3$
(OA)	$y=0$ et $z=0$
(BD)	$y=2$ et $z=0$
(CE)	$y=0$ et $z=3$
(FG)	$y=2$ et $z=3$

6 **1°** Soit $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un triplet de réels qui vérifie Σ.
L'opération $(L_1)+(L_2)+(L_3)$ donne : $5x+5y+5z=30$,
soit : $$\boldsymbol{x+y+z=6.}$$
2° Supposons que le triplet de réels $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est une solution de Σ.
On a alors nécessairement :
$$x+y+z=6.$$
En soustrayant membre à membre cette égalité à L_1, L_2 et L_3, on obtient :
$$\begin{cases}2z=2\\2y=4\\2x=6,\end{cases}$$
soit : $$\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1.\end{cases}$$
On vérifie sans peine que $(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ est bien solution de Σ. On a ainsi prouvé :
la seule solution de Σ est le triplet $(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

7 • Mathématisation

Notons x, y, z et t les prix respectifs en euros d'une salade, d'une pizza, d'un plat de spaghetti et d'une glace.

Les données de l'énoncé se traduisent par le système Σ d'inconnue $(x\ ;\ y\ ;\ z)$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 15{,}2 & (L_1) \\ \quad\;\; y + z + t = 11{,}8 & (L_2) \\ x + y \quad\;\; + t = 11{,}2 & (L_3) \\ x + y + z \quad\;\; = 12{,}4 & (L_4). \end{cases}$$

• Traitement mathématique

Il s'agit maintenant de résoudre Σ. On a nécessairement :

- $x = 15{,}2 - 11{,}8 = 3{,}4$;
- $z = 15{,}2 - 11{,}2 = 4$;
- $t = 15{,}2 - 12{,}4 = 2{,}8$;
- et d'après (L_2) :

$$y = 11{,}8 - 4 - 2{,}8 = 5.$$

On vérifie aisément que $(3{,}4\ ;\ 5\ ;\ 4\ ;\ 2{,}8)$ est bien solution de Σ.

La seule solution de Σ est donc $(3{,}4\ ;\ 5\ ;\ 4\ ;\ 2{,}8)$.

• Réponse au problème

Finalement, **une salade coûte 3,40 €, une pizza 5 €, un plat de spaghetti 4 € et une glace 2,80 €.**

8 **1°** $\mathcal{R}$ est l'intersection des trois demi-plans fermés $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ d'inéquations respectives : $y \leqslant 2$, $y \geqslant -3x$, $x - y + 1 \leqslant 0$.

Pour déterminer géométriquement un demi-plan, il s'agit d'en donner la frontière et de préciser de quel côté de cette droite il se situe.

• $\mathcal{R}_1$ a pour frontière la droite horizontale d_1 d'équation $y = 2$; l'origine O appartient à $\mathcal{R}_1$ (en effet : $0 \leqslant 2$).

• $\mathcal{R}_2$ a pour frontière la droite d_2 d'équation : $y = -3x$, qui a pour pente -3 et passe par l'origine O.

$0 \geqslant -3 \times 0$, donc O est un point de $\mathcal{R}_2$; ce renseignement ne permet cependant pas de préciser de quel côté de d_2 se situe $\mathcal{R}_2$, puisque O appartient à la frontière. On choisit un autre point, qui n'appartient pas à d_2, par exemple : $A(1\ ;\ 0)$.

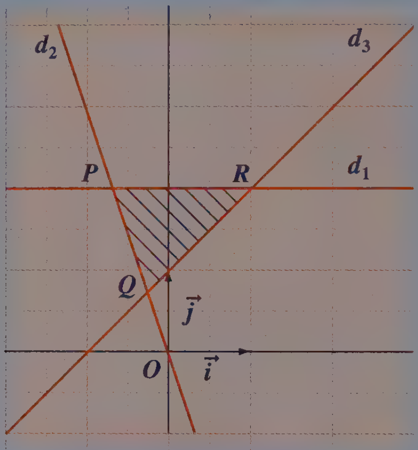
Les coordonnées de A vérifient l'inéquation de $\mathcal{R}_2$ $(0 \geqslant -3 \times 1)$, donc A appartient à $\mathcal{R}_2$.

• $\mathcal{R}_3$ a pour frontière la droite d_3 d'équation : $x - y + 1 = 0$; d_3 passe par le point $B(0\ ;\ 1)$ et $\vec{i} + \vec{j}$ est un de ses vecteurs directeurs.

O n'appartient pas à $\mathcal{R}_3$.

- d_1 et d_2 sont sécantes au point $P\left(-\dfrac{2}{3}\,;2\right)$;
- d_2 et d_3 sont sécantes au point $Q\left(-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{3}{4}\right)$;
- d_1 et d_3 sont sécantes au point $R(1\,;2)$.

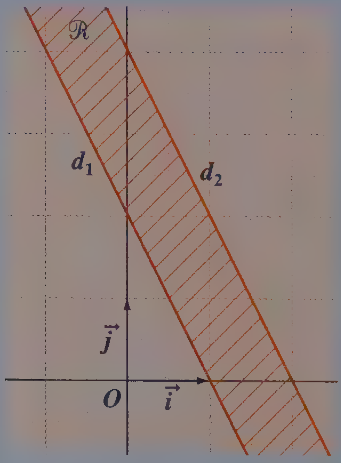
$\mathcal{R}$ **est la surface triangulaire fermée de frontière le triangle** ***PQR*****.**



2° $\mathcal{R}$ est l'intersection des deux demi-plans fermés $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ d'inéquations respectives : $2 \leqslant 2x + y$, $2x + y \leqslant 4$.

- $\mathcal{R}_1$ a pour frontière la droite d_1 d'équation : $2x + y = 2$, et O n'appartient pas à $\mathcal{R}_1$;
- $\mathcal{R}_2$ a pour frontière la droite d_2 d'équation : $2x + y = 4$, et O appartient à $\mathcal{R}_2$;
- d_1 et d_2 sont strictement parallèles.

On en déduit que $\mathcal{R}$ **est la bande de plan située entre les droites d_1 et d_2 , toutes deux incluses dans** $\mathcal{R}$**.**



Il s'agit de déterminer le nombre x de cornets à une boule et le nombre y de cornets à deux boules permettant de réaliser un bénéfice maximal (x et y sont bien sûr des naturels).
Les contraintes de l'énoncé sont traduites par le système Σ d'inconnue $(x\,;\,y)$:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 60 \\ 0 \leqslant y \leqslant 60 \\ 0 \leqslant x+y \leqslant 100 \\ 0 \leqslant x+2y \leqslant 150. \end{cases}$$

Traçons les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 d'équations respectives :

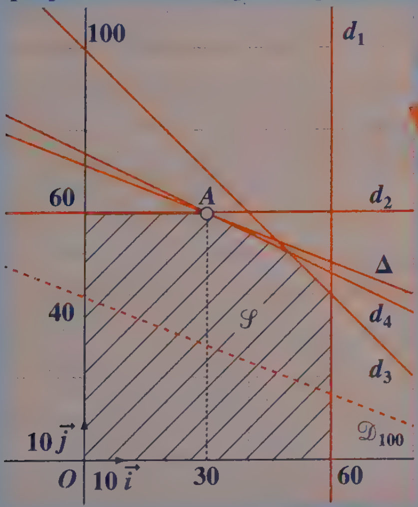
$$x = 60, \quad y = 60, \quad x + y = 100, \quad x + 2y = 150.$$

Hachurons l'ensemble $\mathcal{S}$ des points du plan dont les couples de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système Σ. Tout point de la région $\mathcal{S}$ correspond à une fabrication journalière possible, s'il est à coordonnées entières.
Soit b le bénéfice en euros réalisé avec la vente de x cornets à une boule et de y cornets à deux boules.

On a : $$b = x + 2{,}5\,y\,,$$

soit : $$y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}b.$$

La droite $\mathcal{D}_b$ d'équation $y = -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}b$ est la droite « d'égal bénéfice » b : les coordonnées entières positives des points de cette droite correspondent au bénéfice b.
Traçons la droite Δ de pente $-\frac{2}{5}$ dont l'ordonnée à l'origine est maximale et qui passe au moins par un point de $\mathcal{S}$ à coordonnées entières.



La pente de $\mathcal{D}_b$ est égale à $-\frac{2}{5}$;
son ordonnée à l'origine est $\frac{2}{5}b$:
le bénéfice espéré est d'autant plus grand que l'ordonnée à l'origine est grande.

Δ a un seul point commun avec $\mathcal{S}$: le point d'intersection $A(30~;~60)$ des droites d_2 et d_4 .

Par conséquent, le bénéfice maximal est réalisé avec la vente de 30 cornets à une boule et de 60 cornets à deux boules.

On a : $$1 \times 30 + 2{,}5 \times 60 = 180,$$

donc **le bénéfice maximal espéré est de 180 € par jour.**

10 1° Une équation de $\mathcal{P}$ est du type : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c et d réels.

Comme $\mathcal{P}$ passe par les points $A(2~;~-3~;~1)$, $B(1~;~0~;~2)$ et $C(4~;~-2~;~3)$, il vient que $(a~;~b~;~c)$ est solution de Σ :

$$\begin{cases} 2a - 3b + c + d = 0 & (L_1) \\ a + 2c + d = 0 & (L_2) \\ 4a - 2b + 3c + d = 0 & (L_3). \end{cases}$$

Les systèmes suivants sont équivalents à Σ :

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 & \\ 2a - 3b + c + d = 0 & (L_2) \leftrightarrow (L_1) \\ 4a - 2b + 3c + d = 0 & (L_3)~; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 & (L_1) \\ -3b - 3c - d = 0 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ -2b - 5c - 3d = 0 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 4(L_1)~; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 & (L_1) \\ -3b - 3c - d = 0 & (L_2) \\ -9c - 7d = 0 & (L_3) \leftarrow 3(L_3) - 2(L_2). \end{cases}$$

On peut choisir : $d = 9$; il vient alors successivement : $c = -7$, $b = 4$, $a = 5$.

Une équation de $\mathcal{P}$ est : $5x + 4y - 7z + 9 = 0$.

2° $\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, avec $A(0~;~2~;~1)$ et $B(4~;~-1~;~3)$, donc $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x~;~y~;~z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient orthogonaux, où I est le milieu de $[AB]$.

Autre méthode : $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x~;~y~;~z)$ équidistants de A et de B.

Donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow MA = MB \\ &\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \\ &\quad = (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow 8x - 6y + 4z - 21 = 0. \end{aligned}$$

On a : $I\left(2\,;\dfrac{1}{2}\,;2\right)$,

$\overrightarrow{AB}(4\,;-3\,;2)$ et $\overrightarrow{IM}\left(x-2\,;y-\dfrac{1}{2}\,;z-2\right)$,

donc :

$$M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow 4(x-2)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(z-2)=0\Leftrightarrow 4x-3y+2z-\frac{21}{2}=0.$$

On a établi qu'**une équation de $\mathcal{P}$ est : $4x-3y+2z-\dfrac{21}{2}=0$.**

3° $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation : $2x+y-3z+7=0$,
donc le vecteur $\vec{n}(2\,;1\,;-3)$, qui est normal à $\mathcal{P}$, est aussi normal à $\mathcal{Q}$;
par conséquent, une équation de $\mathcal{Q}$ s'écrit : $2x+y-3z+d=0$, où d est un réel qui reste à déterminer.
Comme de plus $\mathcal{Q}$ passe par le point $A(3\,;-2\,;5)$, il vient :

$$6-2-15+d=0,$$

c'est-à-dire : $d=11$.
Finalement, **une équation de $\mathcal{Q}$ est : $2x+y-3z+11=0$.**

11 **1°** Le vecteur $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et le vecteur $\vec{n}\,'(6\,;k\,;-3)$ est normal à $\mathcal{Q}$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si : **$k=3$.**
2° Le vecteur $\vec{n}(1\,;-2\,;-1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et le vecteur $\vec{n}\,'(2\,;4\,;-k)$ est normal à $\mathcal{Q}$;
il n'existe pas de valeur de k telle que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ soient colinéaires, donc **il n'existe pas de valeur de k telle que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ soient parallèles.**

$(1\,;-2)$ et $(2\,;4)$ ne sont pas proportionnels car :
$1\times4-(-2)\times2\neq0$.

12 **1°** Le vecteur $\vec{n}(2\,;3\,;-1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et le vecteur $\vec{n}\,'(-1\,;1\,;1)$ est normal à $\mathcal{Q}$;
les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont orthogonaux.
Or : $\qquad 2\times(-1)+3\times1+(-1)\times1=-2+3-1=0$,
donc : $\vec{n}\perp\vec{n}\,'$.
Cela prouve que **les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires.**

EXERCICES
CORRIGÉS
INTERRO p. 230

2° Le vecteur $\vec{n}(1\ ;-1\ ;1)$ est normal à $\mathcal{P}$, et le vecteur $\vec{n}\,'(2\ ;1\ ;7)$ est normal à $\mathcal{Q}$;

$1\times 2+(-1)\times 1+1\times 7=2-1+7=8.$

Ce résultat étant non nul, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ ne sont pas orthogonaux, ce qui prouve que **les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas perpendiculaires.**

13 1° Afin de déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, résolvons le système Σ :

$$\begin{cases} 2x+2y+6z=-1 & (L_1)\\ -3x-4y-9z=1 & (L_2)\\ -y+2z=4 & (L_3).\end{cases}$$

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+6z=-1 & (L_1)\\ -2y=-1 & (L_2)\leftarrow 2(L_2)+3(L_1)\\ -y+2z=4 & (L_3).\end{cases}$$

Donc Σ admet une seule solution et on obtient « en cascade » :

$$y=\frac{1}{2}\ ;\ z=2+\frac{1}{2}y=\frac{9}{4}\ \text{ et }\ x=-\frac{1}{2}-y-3z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{31}{4}.$$

On en déduit que **$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ ont un seul point d'intersection :**

$$\boldsymbol{I\left(-\frac{31}{4}\ ;\frac{1}{2}\ ;\frac{9}{4}\right)}.$$

2° Il s'agit de résoudre le système Σ :

$$\begin{cases} x+2y-z=3 & (L_1)\\ 2x-y+3z=4 & (L_2)\\ x-3y+4z=2 & (L_3).\end{cases}$$

On a : $$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=3 & (L_1)\\ -5y+5z=-2 & (L_2)\leftarrow(L_2)-2(L_1)\\ -5y+5z=-1 & (L_3)\leftarrow(L_3)-(L_1).\end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, **les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ ont une intersection vide.**

CALCUL MATRICIEL

Rappels de cours

n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls.

I- Matrices à n lignes et p colonnes

On appelle matrice de format (n, p) à coefficients réels tout tableau rectangulaire A possédant n lignes et p colonnes, dont les éléments sont des réels ; si i et j sont des entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est appelé le terme de position (i, j) de A.

Exemple

Posons : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; A est une matrice de format (2, 3) (elle possède 2 lignes et 3 colonnes) ; le terme (ou coefficient, ou élément) de A de position (1, 2) est 0, celui de position (2, 2) est – 1.

Cas particuliers

- Si $n = 1$, alors A est un vecteur (ou matrice) ligne.
- Si $p = 1$, alors A est un vecteur (ou matrice) colonne.
- Si $n = p$, alors A est une matrice carrée d'ordre n.
- Si $n = p = 1$, alors A est un réel.

II- Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices, produit d'une matrice par un réel

Définitions

- **Somme** : si A et B sont des matrices de format (n, p), alors $A + B$ est la matrice de format (n, p) dont le terme de position (i, j) est la somme des termes de position (i, j) de A et de B.
- **Produit par un scalaire** : pour tout réel λ et toute matrice A de format (n, p), λA est la matrice de format (n, p) dont le terme de position (i, j) est le produit par λ du terme de position (i, j) de A.

Propriétés

Dans l'ensemble des matrices de format (n, p), on effectue les calculs concernant l'addition des matrices et la multiplication d'une matrice par un réel en suivant les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$; la matrice de format (n, p) dont tous les termes sont nuls est appelée matrice nulle et se note souvent (0).

Produit matriciel

Définitions

• Produit d'une matrice ligne L de format $(1, p)$ par une matrice colonne C de format $(p, 1)$

Si $L = (a_1 \ \dots \ a_p)$ et $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors le produit $L \times C$, noté usuellement LC, est le réel défini par : $\boldsymbol{LC = a_1 \times x_1 + \dots + a_p \times x_p}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

• Produit de A de format (n, p) par C de format $(p, 1)$

En notant A_1, A_2, …, A_p les colonnes successives de A, et en posant $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, le produit $A \times C$, noté usuellement AC, est la matrice de format $(n, 1)$ définie par : $\boldsymbol{AC = x_1 A_1 + \dots + x_p A_p}$;

on dit que AC est la combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 2 \times 4 + 1 \times 5 - 2 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \end{pmatrix}$$

• **Produit AB d'une matrice A de format (n, q) par une matrice B de format (q, p)**

Considérons B comme la juxtaposition de ses p matrices colonnes B_1, B_2, …, B_p :

$$B = (B_1 \ \ B_2 \ \ \dots \ \ B_p).$$

Alors, le produit $A \times B$, noté usuellement AB, est défini par :

$$\boldsymbol{AB = (AB_1 \ \ AB_2 \ \ \dots \ \ AB_p),}$$

c'est-à-dire que AB est la matrice obtenue comme la juxtaposition des p matrices colonnes AB_1, …, AB_p, toutes de format $(n, 1)$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 4 \end{array}$$

Remarques

• On appelle matrice unité (ou identité) d'ordre n la matrice carrée I_n d'ordre n (souvent notée plus simplement I) définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Alors : – pour toute matrice A de format (p, n), $AI_n = A$;
– pour toute matrice A de format (n, p), $I_nA = A$;
– pour toute matrice A carrée d'ordre n, $AI_n = I_nA = A$.

• Attention aux calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

– En général : $AB \neq BA$.

Lorsque $AB = BA$, on dit que les matrices A et B commutent.

– On peut avoir $AB = (0)$ sans qu'aucune des deux matrices A et B ne soit la matrice nulle.

– On peut avoir $AB = AC$, la matrice A étant non nulle, sans que pour autant B et C soient égales.

Interprétation d'un système d'équations linéaires

Par exemple, le système $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ (interprétation matricielle),}$$

ou encore à : $$x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ (interprétation vectorielle).}$$

III- Matrices carrées

Opérations sur les matrices carrées d'ordre n

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n, alors :

- pour tout réel λ, λA est une matrice carrée d'ordre n ;
- $A + B$ et AB sont des matrices carrées d'ordre n.

Puissances d'une matrice

Définition

Pour toute matrice A carrée d'ordre n, on pose :

- $A^1 = A$;
- pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $A^k = \underbrace{A\times\cdots\times A}_{\text{produit de } k \text{ facteurs, tous égaux à } A}$.

Propriété

Pour toute matrice A carrée d'ordre n et tous p et q de $\mathbb{N}^*$:

$$A^p \times A^q = A^{p+q} = A^q \times A^p.$$

1

(Corrigé p. 212)

1° À quelle condition peut-on calculer la somme de deux matrices A et B ?
2° À quelle condition peut-on calculer le produit AB de deux matrices A et B ?
3° Quel est le format de la matrice AB si A est une matrice de format (3, 6) et B une matrice de format (6, 2) ?

2

(Corrigé p. 212)

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer :

a. $2A$; **b.** $-B$; **c.** $2A + 3B$; **d.** $5A - 4B$; **e.** $A - 2B - 6(A - B)$.

3

(Corrigé p. 213)

Soient x, y et z des nombres réels. Calculer :

1° $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. **2°** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. **3°** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. **4°** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4

(Corrigé p. 213)

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

5

(Corrigé p. 214)

On pose : $A = (1, 2, 3)$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits AB et BA.

6

(Corrigé p. 214)

Traduire le système (Σ) : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases}$ par :

a. une égalité portant sur des vecteurs colonnes ;
b. une égalité entre matrices, de la forme $AX = Y$.

EXERCICES

CORRIGÉS

EXERCICES d'entraînement

Calcul matriciel

7 ★★ 10 min (Corrigé p. 214)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2, A^3 et A^4.

b. Quelle conjecture est-on amené à formuler concernant A^n, n désignant un entier naturel non nul ?

8 ★ 15 min (Corrigé p. 215)

Soient A, B et I les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1° Calculer : **a.** $A + B$, **b.** $(A + B)^2$, **c.** AB, **d.** BA, **e.** A^2, **f.** B^2, **g.** $A^2 + 2AB + B^2$.

2° a. Développer $(A + B)^2$.

b. Pourquoi les matrices $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$ ne sont-elles pas égales ?

3° Calculer rapidement $(A + I)^2$.

4° Du calcul de B^2, déduire une matrice B' telle que : $B'B = I$.

9 ★★ 15 min (Corrigé p. 216)

Une entreprise exporte du matériel audiovisuel en Allemagne et en Italie.

En janvier, elle a vendu 1 000 magnétoscopes et 1 200 téléviseurs en Allemagne, 510 magnétoscopes et 600 téléviseurs en Italie ; on choisit de représenter cette activité par la matrice $\begin{pmatrix} 1000 & 510 \\ 1200 & 600 \end{pmatrix}$.

1° En février, l'entreprise vend 1 020 magnétoscopes et 1 300 téléviseurs en Allemagne, 600 magnétoscopes et 650 téléviseurs en Italie.

a. Quelle matrice représente l'activité de l'entreprise de février ?

b. Quelle matrice représente l'activité globale de l'entreprise des mois de janvier et février ?

2° Si, en mars, les ventes de magnétoscopes et de téléviseurs, en Allemagne comme en Italie, augmentaient de 10 % par rapport à celles de janvier, quelle matrice représenterait l'activité de l'entreprise de mars ?

Matrices et systèmes d'équations linéaires

10 ★★ 20 min (Corrigé p. 216)

On considère le système (Σ) d'inconnue (x ; y) : $\begin{cases} -x+2y=1 \\ x+y=5. \end{cases}$

1° a. Écrire une équation portant sur des vecteurs colonnes équivalente à (Σ).
b. Le plan étant rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), en déduire graphiquement la solution de (Σ) .

2° a. Écrire la matrice A telle que (Σ) soit équivalent à : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b. Calculer A^2, puis démontrer :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c. Retrouver le résultat de la question **1°**.

11 ★★ 20 min (Corrigé p. 218)

On considère le système (Σ) d'inconnue (x, y) : $\begin{cases} x-2y=a \\ -3x+6y=b. \end{cases}$

1° a. Combien (Σ) admet-il de solutions dans le cas où $a=1$ et $b=-3$? Comment cela se traduit-il sur les matrices lignes $(1\ \ -2\ \ 1)$ et $(-3\ \ 6\ \ -3)$?
b. Combien (Σ) admet-il de solutions dans le cas où $a=1$ et $b=2$? Comment cela se traduit-il sur les matrices lignes $(1\ \ -2)$, $(-3\ \ 6)$, $(1\ \ -2\ \ 1)$ et $(-3\ \ 6\ \ 2)$?
c. Existe-t-il des réels a et b tels que (Σ) admette une seule solution ?

2° Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, associée au système ($\Sigma$) .

a. Entrer la matrice A dans la calculatrice ; demander le calcul de A^{-1} ; que répond la calculatrice ?
b. Calculer A^2 et vérifier que l'on peut écrire : $A^2=\lambda A$, où λ est un réel à préciser.
En déduire qu'il n'existe pas de matrice B telle que : $BA=I$, où I désigne la matrice unité de format (2, 2).

12 ★★ 20 min (Corrigé p. 219)

1° On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & -29 & -1 \\ -7 & 31 & 2 \\ -6 & 24 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Avec la calculatrice, déterminer AB et BA ; en déduire une matrice A' telle que : $A'A = AA' = I$, où I est la matrice unité de format (3, 3).

b. Avec la calculatrice, déterminer la matrice A^{-1}, appelée matrice inverse de A ; comparer avec les résultats de **a.**

2° Résoudre le système (Σ) d'inconnue $(x\,;\,y\,;\,z)$:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 10 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + 5z = 13. \end{cases}$$

Systèmes dynamiques

13 ★★★ 30 min (Corrigé p. 220)

Un laboratoire de biologie animale a mené une étude pendant dix années sur un insecte qui ne vit que trois ans et se reproduit la troisième année ; cette étude a montré que, d'une année sur l'autre :

- ne survit que la moitié des insectes de premier âge ;
- ne survit que le tiers des insectes de deuxième âge ;
- le groupe des insectes de troisième âge donne naissance à une nouvelle génération d'insectes, dont l'effectif est égal à six fois celui des insectes de troisième âge.

En notant a_n , b_n et c_n les effectifs des groupes respectivement des premier, deuxième et troisième âges à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, on obtient donc :

$$a_{n+1} = 6c_n\,, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n\,, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n\,.$$

1° a. Écrire la matrice A telle que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

b. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^4, A^5 et A^6.

2° Initialement, chacun des groupes d'insectes des premier, deuxième et troisième âges est composé de 3 000 individus :

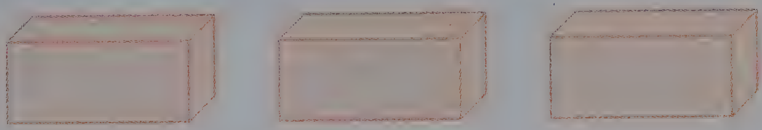
$$a_0 = b_0 = c_0 = 3\,000.$$

a. À l'aide de la formule de **1° a.**, donner l'effectif de chacun des groupes d'insectes à la fin des première, deuxième et troisième années.

b. Quel résultat établi dans la question **1° b.** permettait de prévoir les effectifs des groupes d'insectes à la fin de la troisième année ? Quel est l'effectif de chacun des groupes d'insectes à la fin de la neuvième année ? À la fin de la dixième année ?

14 ★ ★ ★ 30 min (Corrigé p. 222)

Initialement, des pièces sont réparties entre trois boîtes A, B et C :



boîte A : 512 pièces **boîte B : 1 024 pièces** **boîte C : 1 536 pièces**

On considère la manipulation suivante :

- première étape : retirer toutes les pièces de la boîte C ;
- deuxième étape : placer la moitié des pièces de la boîte A dans la boîte C (l'autre moitié reste dans A) et la moitié des pièces de la boîte B dans la boîte C (l'autre moitié reste dans B) ;
- troisième étape : partager équitablement les pièces retirées de la boîte C lors de la première étape entre les boîtes A et B.

On répète cette manipulation jusqu'à ce qu'un partage soit impossible (une boîte contient un nombre impair de pièces).

1° Que contient chacune des trois boîtes A, B et C après la première manipulation ? Après la deuxième ?

2° Écrire la matrice A telle que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$,

où a_n, b_n et c_n désignent le nombre de pièces respectivement dans les boîtes A, B et C après la $n^{\text{ième}}$ manipulation, et avant la $(n+1)^{\text{ième}}$.

3° a. Calculer $A^3 \begin{pmatrix} 512 \\ 1\,024 \\ 1\,536 \end{pmatrix}$, $A^4 \begin{pmatrix} 512 \\ 1\,024 \\ 1\,536 \end{pmatrix}$, …, $A^{10} \begin{pmatrix} 512 \\ 1\,024 \\ 1\,536 \end{pmatrix}$ à la calculatrice.

b. Que représentent les sept premiers résultats ?

Que constate-t-on concernant l'évolution du nombre de pièces dans chacune des trois boîtes ?

À quelle étape le processus s'arrête-t-il ?

CORRIGÉS des exercices

1 1° On ne peut calculer la somme de deux matrices A et B qu'**à la condition que A et B soient de même format,** c'est-à-dire possèdent le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

> Ce sont des conditions de compatibilité de formats.

2° On ne peut calculer le produit AB de deux matrices A et B qu'**à la condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.**

3° Si A est une matrice de format (3, 6) et B une matrice de format (6, 2), alors **la matrice AB a pour format (3, 2).**

compatibilité des formats

A de format (3, 6) ← → B de format (6, 2)

format de AB : (3, 2)

2 **a.** $2A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (on a multiplié chacun des termes de A par 2).

b. $-B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (on a pris l'opposé de chacun des termes de B).

c. $2A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$ (on a additionné les termes de même position de $2A$ et $3B$).

d. $5A-4B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{14} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{13} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$.

e. $A-2B-6(A-B)=A-2B-6A+6B=-5A+4B=-(5A-4B)$, donc :

$$A-2B-6(A-B)=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-13} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}.$$

3 **1°** $\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\2x+2y\\3x+3y\end{pmatrix}$; en effet :

$$(1\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=1\times x+1\times y,\quad (2\ 2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\times x+2\times y,\quad (3\ 3)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\times x+3\times y.$$

2° $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y-z\\2x-3y+z\end{pmatrix}.$

3° $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2y\\3z\end{pmatrix}.$

4° $\begin{pmatrix}0&3&5\\1&0&6\\2&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y+5z\\x+6z\\2x+4y\end{pmatrix}.$

4 • A est une matrice de format (2, 3), B une matrice de format (3, 2), donc AB est une matrice de format (2, 2).
Par exemple, le terme de position (1, 1) de la matrice AB est égal au produit

$(1\ 1\ 2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire à $1\times 1+1\times(-1)+2\times 1$.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2\\ & & & -1 & 2\\ & & & 1 & 3\\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 10\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5\end{array}\qquad AB=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{10}\\\mathbf{2}&\mathbf{5}\end{pmatrix}.$$

Il y a compatibilité des formats : le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

• B est une matrice de format (3, 2), A une matrice de format (2, 3), donc BA est une matrice de format (3, 3) ;

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 1 & 2\\ & & 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 1 & 5\end{array}\qquad BA=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{4}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{4}&\mathbf{1}&\mathbf{5}\end{pmatrix}.$$

Il y a compatibilité des formats : le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A.

5 • A est une matrice de format (1, 3), B une matrice de format (3, 1), donc AB est une matrice de format (1, 1), c'est-à-dire un nombre réel.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=1\times2+2\times1+3\times(-1)=\mathbf{1}.$$

Il y a compatibilité des formats : le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

• B est une matrice de format (3, 1), A une matrice de format (1, 3), donc BA est une matrice de format (3, 3) ;

	1	2	3
2	2×1	2×2	2×3
1	1×1	1×2	1×3
-1	-1×1	-1×2	-1×3

$$BA=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}.$$

6 Le système (Σ) : $\begin{cases}2x + y = 3\\ 5x - 4y = 7\end{cases}$ est équivalent à :

a. $x\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$; **b.** $\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

a.

		1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	4	4	8	8
1	1	2	2	4	4	8	8
		A^2		A^3		A^4	

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix}8 & 8\\8 & 8\end{pmatrix}.$$

b. On est amené à conjecturer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=2^{n-1}A.$$

8 a. $A+B=\begin{pmatrix}2-1 & 1+1\\ 3+2 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2}\end{pmatrix}.$

b. $\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 2\\ & & 5 & 2\\ \hline 1 & 2 & 11 & 6\\ 5 & 2 & 15 & 14\end{array}$ $\quad (A+B)^2=\begin{pmatrix}\mathbf{11} & \mathbf{6}\\ \mathbf{15} & \mathbf{14}\end{pmatrix}.$

c. $\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 1\\ & & 2 & 1\\ \hline 2 & 1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{array}$ $\quad AB=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{4}\end{pmatrix}.$

d. $\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 1\\ & & 3 & 1\\ \hline -1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 7 & 3\end{array}$ $\quad BA=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{7} & \mathbf{3}\end{pmatrix}.$

e. $\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 1\\ & & 3 & 1\\ \hline 2 & 1 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 9 & 4\end{array}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{3}\\ \mathbf{9} & \mathbf{4}\end{pmatrix}.$

f. $\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 1\\ & & 2 & 1\\ \hline -1 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{array}$ $\quad B^2=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix}.$

Tous ces résultats se vérifient rapidement à la calculatrice.

g. $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 6\\ -2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{10} & \mathbf{9}\\ \mathbf{7} & \mathbf{15}\end{pmatrix}.$

2° **a.** Par définition du carré d'une matrice : $(A+B)^2=(A+B)\,(A+B)$,
donc : $(A+B)^2=A(A+B)+B(A+B)=\mathbf{A^2+AB+BA+B^2}$.
b. Les matrices A et B ne commutent pas : $AB \neq BA$,
donc : $\mathbf{AB+BA \neq 2AB}$,
ce qui explique que les matrices $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$ ne sont pas égales.

3° $(A+I)^2=(A+I)\,(A+I)=A^2+AI+IA+I^2$,
or, I étant la matrice unité de format (2, 2) :
$AI=IA=A,\ I^2=I$,
donc : $\quad (A+I)^2=A^2+2A+I$;
on en déduit, en reportant le résultat du calcul de A^2 effectué dans **1°** :

On a ainsi évité de poser le calcul du produit de la matrice $(A+I)$ par elle-même.

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{12} & \mathbf{5}\\ \mathbf{15} & \mathbf{7}\end{pmatrix}.$$

4° D'après **1°** : $B^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

cette égalité peut s'écrire : $B^2=3I$, ou encore :
$\left(\dfrac{1}{3}B\right)B=I$, ce qui met en évidence qu'en posant :

On a bien sûr également : $BB'=I$.

$\mathbf{B'=\dfrac{1}{3}B}$, la matrice B' vérifie : $B'B=I$.

9 1° **a.** L'activité de l'entreprise de février de l'année en cours est représentée par la matrice : $\begin{pmatrix} \mathbf{1020} & \mathbf{600} \\ \mathbf{1300} & \mathbf{650} \end{pmatrix}$.

b. L'activité globale de l'entreprise des mois de janvier et février de l'année en cours est représentée par la somme des matrices $\begin{pmatrix} 1000 & 510 \\ 1200 & 600 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1020 & 600 \\ 1300 & 650 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1000 & 510 \\ 1200 & 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1020 & 600 \\ 1300 & 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2020} & \mathbf{1110} \\ \mathbf{2500} & \mathbf{1250} \end{pmatrix}.$$

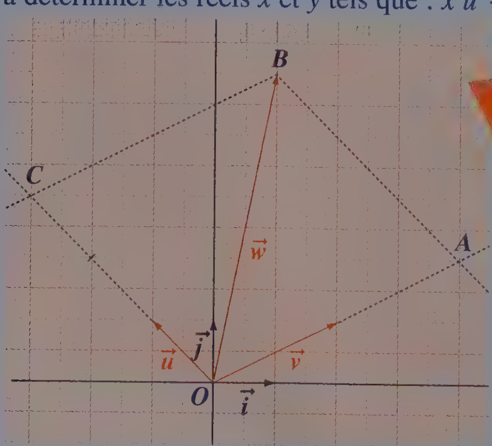
2° Si, en mars, les ventes de magnétoscopes et de téléviseurs, en Allemagne comme en Italie, augmentaient de 10 % par rapport à celles de janvier de la même année, la matrice qui représenterait l'activité de l'entreprise de mars serait $1{,}1\begin{pmatrix} 1000 & 510 \\ 1200 & 600 \end{pmatrix}$:

Augmenter de 10 %, c'est multiplier par (1 + 0,10).

$$1{,}1\begin{pmatrix} 1000 & 510 \\ 1200 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1\times 1000 & 1{,}1\times 510 \\ 1{,}1\times 1200 & 1{,}1\times 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1100} & \mathbf{561} \\ \mathbf{1320} & \mathbf{660} \end{pmatrix}.$$

10 1° **a.** Le système (Σ) est équivalent à : $x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b. Posons : $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j}$; résoudre (Σ) revient alors à déterminer les réels x et y tels que : $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$.



On complète le parallélogramme $OABC$, connaissant ses sommets O et B et la direction des droites (OA) et (OC).

On lit sur le graphique : $\vec{w} = 3\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$ (et que cette décomposition de $\vec{w}$ est unique), donc **la seule solution de (Σ) est $(3\ ;\ 2)$.**

2° a. En posant : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le système ($\Sigma$) est équivalent à :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b. $\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 2 \\ & & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit, en notant I la matrice unité de format (2, 2) : $\boldsymbol{A^2 = 3I}$.

• Si $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors, en multipliant à gauche par A chaque membre de l'égalité, on obtient :

$$A^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d'où : $$3I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d'où : $$3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

et finalement : $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

• Réciproquement, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors, en multipliant à gauche par A chaque membre de l'égalité, on obtient :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d'où : $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3I)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

et finalement : $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$A \times \left(\frac{1}{3}A\right) = \frac{1}{3}(A \times A) = \frac{1}{3}A^2,$

$\frac{1}{3}(3I) = \left(\frac{1}{3} \times 3\right)I = 1I = I.$

• Il a été prouvé :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}.$$

Cette équivalence peut être interprétée par : on ne perd pas d'information en multipliant par A. En effet, on peut « défaire » ce qui a été fait : il suffit de multiplier par $\frac{1}{3}$A.

c. D'après **2° a.**, dire que $(x\ ;y)$ est solution de (Σ) signifie : $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$,

c'est-à-dire, d'après **2° b.** : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$;

de plus : $\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\times1+2\times5\\1\times1+1\times5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$;

on retrouve donc bien que la seule solution de (Σ) est $(3\ ;2)$.

11 **1° a.** Dans le cas où $a = 1$ et $b = -3$, (Σ) s'écrit : $\begin{cases} x-2y=1\\ -3x+6y=-3,\end{cases}$

donc (Σ) est équivalent à : $x - 2y = 1$, et admet **une infinité de solutions :**
tous les couples $(1 + 2y\ ; y)$, y décrivant $\mathbb{R}$.
Cela se traduit par le fait que **les matrices lignes $(1\ \ -2\ \ 1)$ et $(-3\ \ 6\ \ -3)$ sont proportionnelles :**

$$(-3\ \ 6\ \ -3) = -3\,(1\ \ -2\ \ 1).$$

$x - 2y = 1$ et $-3x + 6y = -3$ sont des équations cartésiennes d'une même droite.

b. Dans le cas où $a = 1$ et $b = 2$, (Σ) s'écrit : $\begin{cases} x-2y=1\\ -3x+6y=2,\end{cases}$

or l'équation $x - 2y = 1$ est équivalente à $-3x + 6y = -3$, ce qui met en évidence que **(Σ) n'admet pas de solution.**
Cela se traduit par le fait que **les matrices lignes $(1\ \ -2)$ et $(-3\ \ 6)$ sont proportionnelles :** $(-3\ \ 6) = -3\,(1\ \ -2)$, alors que **les matrices lignes $(1\ \ -2\ \ 1)$ et $(-3\ \ 6\ \ 2)$ ne le sont pas** $(2 \neq -3 \times 1)$.

La droite d'équation : $x - 2y = 1$ et celle d'équation : $-3x + 6y = 2$ sont strictement parallèles.

c. • Si $b = -3a$, alors (Σ) admet une infinité de solutions ;
• si $b \neq -3a$, alors (Σ) n'admet aucune solution,
donc **il n'existe pas de réels a et b tels que (Σ) admette une seule solution.**

La droite d'équation : $x - 2y = a$ et celle d'équation : $-3x + 6y = b$ sont parallèles.

2° a. Une fois entrée la matrice A en mémoire, la calculatrice retourne un **message d'erreur** si on exécute le calcul de A^{-1}.

b. • $$\begin{array}{rr|rr} & & 1 & -2 \\ & & -3 & 6 \\ \hline 1 & -2 & 7 & -14 \\ -3 & 6 & -21 & 42 \end{array} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ -21 & 42 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{7A.}$$

• Supposons qu'il existe une matrice B telle que : $BA = I$.
En multipliant chaque membre de l'égalité à droite par A, on obtient :

$$BA^2 = IA\ ;$$

or : $A^2 = 7A$, et, par définition de la matrice I : $IA = A$,
donc : $B(7A) = A$, soit : $7BA = A$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{A = 7I,}$$

et **cette dernière affirmation est incompatible avec la définition de A.**
La supposition : « il existe une matrice B telle que $BA = I$ » conduisant à une contradiction, elle est à rejeter, ce qui permet de conclure :

il n'existe aucune matrice B telle que : $BA = I$.

12 **1° a.** • Avec la calculatrice : $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

• I désignant la matrice unité de format (3, 3), le résultat précédent peut s'écrire : $AB = 9I$ et $BA = 9I$,

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{9}(AB) = \dfrac{1}{9}(BA) = I$,

ou encore : $A \times \left(\dfrac{1}{9}B\right) = \left(\dfrac{1}{9}B\right) \times A = I$;

en posant : $\boldsymbol{A' = \dfrac{1}{9}B,}$ la matrice A' vérifie : $A'A = AA' = I$.

b. À l'exécution de la commande du calcul de A^{-1}, la calculatrice retourne la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{29}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{31}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

qui est **égale à la matrice A' obtenue en a.**

2° Le système (Σ) est équivalent à :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire à : $$A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix},$$

Il y a bien équivalence, car on peut « défaire » l'opération qui consiste à multiplier à gauche par A^{-1} chaque membre de l'égalité : il suffit de multiplier à gauche par A.

ou encore, la matrice $A^{-1}A$ étant égale à I : $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix}.$$

De plus :

$$A^{-1}\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8&-29&-1\\-7&31&2\\-6&24&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\times10-29\times2-1\times13\\-7\times10+31\times2+2\times13\\-6\times10+24\times2+3\times13\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9\\18\\27\end{pmatrix}$$

autrement dit : $$A^{-1}\begin{pmatrix}10\\2\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

ce qui permet de conclure que :
(1 ; 2 ; 3) est la seule solution de (Σ).

Pour contrôler les résultats, substituer respectivement 1, 2 et 3 aux inconnues x, y et z du système (Σ).

13 **1° a.** Les données de l'énoncé peuvent se traduire par :

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&6\\1/2&0&0\\0&1/3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix};$$

en posant : $A=\begin{pmatrix}0&0&6\\1/2&0&0\\0&1/3&0\end{pmatrix}$, on a donc : $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_{n+1}}\\\boldsymbol{b_{n+1}}\\\boldsymbol{c_{n+1}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_n}\\\boldsymbol{b_n}\\\boldsymbol{c_n}\end{pmatrix}$.

b. •

			0	0	6	0	0	6
			1/2	0	0	1/2	0	0
			0	1/3	0	0	1/3	0
0	0	6	0	2	0	1	0	0
1/2	0	0	0	0	3	0	1	0
0	1/3	0	1/6	0	0	0	0	1

$$\boldsymbol{A^2=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\1/6&0&0\end{pmatrix}}\ \textbf{et}$$

$$\boldsymbol{A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

• D'après les calculs précédents : $A^3 = I$, où I désigne la matrice unité de format (3, 3).

On en déduit :
$$\boldsymbol{A^4 = A \times A^3 = A \times I = A,}$$
$$\boldsymbol{A^5 = A^2 \times A^3 = A^2 \times I = A^2,}$$
$$\boldsymbol{A^6 = A^3 \times A^3 = I \times I = I.}$$

2° a. Initialement, chacun des trois groupes d'insectes est composé de 3 000 individus :
$$a_0 = b_0 = c_0 = 3\,000.$$

Les effectifs a_1, b_1, c_1 respectivement des premier, deuxième et troisième groupes d'insectes à la fin de la première année vérifient :

Il est bien sûr également possible d'utiliser directement les formules :
$$a_{n+1} = 6c_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3000 \\ 3000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18000 \\ 1500 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $\boldsymbol{a_1 = 18\,000}$, $\boldsymbol{b_1 = 1\,500}$ **et** $\boldsymbol{c_1 = 1\,000.}$

De même :
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{c_2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18000 \\ 1500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6000} \\ \mathbf{9000} \\ \mathbf{500} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3000} \\ \mathbf{3000} \\ \mathbf{3000} \end{pmatrix}.$$

b. À la fin de la troisième année, l'effectif de chacun des trois groupes d'insectes reprend sa valeur initiale, ce qui correspond à l'égalité matricielle : $\boldsymbol{A^3 = I}$.

En effet :
$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = A \times A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A \times A \times A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue, en remarquant :
$$A^9 = (A^3)^3 = I^3, \; A^{10} = A \times A^9 = A \times I = A,$$

on obtient : $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_9} \\ \boldsymbol{b_9} \\ \boldsymbol{c_9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3000} \\ \mathbf{3000} \\ \mathbf{3000} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{10}} \\ \boldsymbol{b_{10}} \\ \boldsymbol{c_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{18000} \\ \mathbf{1500} \\ \mathbf{1000} \end{pmatrix}.$

14 1° • **Après la première manipulation,** les boîtes A, B et C contiennent respectivement un nombre de pièces égal à :

$$\frac{512}{2}+\frac{1536}{2},\quad \frac{1024}{2}+\frac{1536}{2}\quad \text{et}\quad \frac{512}{2}+\frac{1024}{2},$$

c'est-à-dire : **1 024, 1 280 et 768.**

• **Après la deuxième manipulation,** les boîtes A, B et C contiennent respectivement un nombre de pièces égal à :

$$\frac{1024}{2}+\frac{768}{2},\quad \frac{1280}{2}+\frac{768}{2}\quad \text{et}\quad \frac{1024}{2}+\frac{1280}{2},$$

c'est-à-dire : **896, 1 024 et 1 152.**

2° D'après la description de la manipulation :

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n\ ,$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\ ,$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\ ,$$

Ceci à condition que les entiers naturels a_n, b_n, c_n soient pairs.

ce qui se traduit par l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$

En posant : $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$

3° **a.** À l'aide de la calculatrice :

$$A^3\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1024 \\ 1088 \\ 960 \end{pmatrix},\quad A^4\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 992 \\ 1024 \\ 1056 \end{pmatrix},\quad A^5\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1024 \\ 1040 \\ 1008 \end{pmatrix},$$

$$A^6\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1016 \\ 1024 \\ 1032 \end{pmatrix},\quad A^7\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1024 \\ 1028 \\ 1020 \end{pmatrix},\quad A^8\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1022 \\ 1024 \\ 1026 \end{pmatrix},$$

$$A^9\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1024 \\ 1025 \\ 1023 \end{pmatrix},\quad A^{10}\begin{pmatrix} 512 \\ 1024 \\ 1536 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2047/2 \\ 1024 \\ 2049/2 \end{pmatrix}.$$

b. • Mis à part le dernier, ces résultats représentent **les contenus des boîtes A, B et C** après les troisième, quatrième, …, neuvième manipulations.
En effet, d'après l'énoncé : $a_0 = 512$, $b_0 = 1\,024$ et $c_0 = 1\,536$,

et par exemple : $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = A \times A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A \times A \times A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$,

ce qui montre qu'après la troisième manipulation **les boîtes A, B et C contiennent respectivement 1 024, 1 088 et 960 pièces.**

• On constate que **plus n augmente plus les nombres a_n, b_n et c_n se rapprochent de 1 024** (qui est la moyenne de a_0, b_0 et c_0).

• Tous les nombres a_1, b_1, c_1, …, a_9, b_9, c_9 sont des entiers (positifs) : les neuf premières manipulations sont réalisables. En revanche, les entiers b_9 et c_9 sont impairs, et il n'est pas possible de réaliser une dixième manipulation.

Le processus s'arrête donc à la fin de la neuvième étape.

Le coin des interros

ÉNONCÉS

Interro 1 révision des ch. 1, 2 et 3. 45 min

(Corrigé p. 233)

1 Sens de variation

En revenant à la définition, étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2 Maximum

Soit f la fonction : $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$.

1° Pour tout réel x, factoriser $f(x) - 4$.

2° En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

3 Fonctions associées aux fonctions usuelles

Dresser le tableau de variation et tracer les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de chacune des fonctions suivantes :

1° $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1}$. **2°** $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} - 2$. **3°** $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1} + 2$.

4 Équations du second degré

1° Résoudre l'équation $(E) : 3x^2 - 5x - 2 = 0$.

2° En déduire les solutions de l'équation $(E') : 3x^4 - 5x^2 - 2 = 0$.

Interro 2 révision des ch. 2, 3 et 4. 45 min

(Corrigé p. 235)

1 Résolution graphique

Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E) :

$$\sqrt{x+2} = x^2 - x - 2.$$

2 Un problème concret

Une personne achète du tissu pour 540 euros. Si le mètre de tissu coûtait 5 euros de moins, alors cette personne aurait eu 9 mètres de tissu en plus. Combien de mètres de tissu a-t-elle achetés ?

3 Calculs de dérivées

Justifier que, dans chacun des cas suivants, la fonction f proposée est dérivable sur $\mathbb{R}$; puis déterminer $f'(x)$, pour tout x réel.

1° $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 7\sqrt{2}$;

2° $f : x \mapsto (x^3 - 9x^2)(5x - 6)$;

3° $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$;

4° $f : x \mapsto (8x+7)^{2002}$.

Interro 3 — révision des ch. 5 et 6 — 45 min

(Corrigé p. 237)

1 Sens de variation

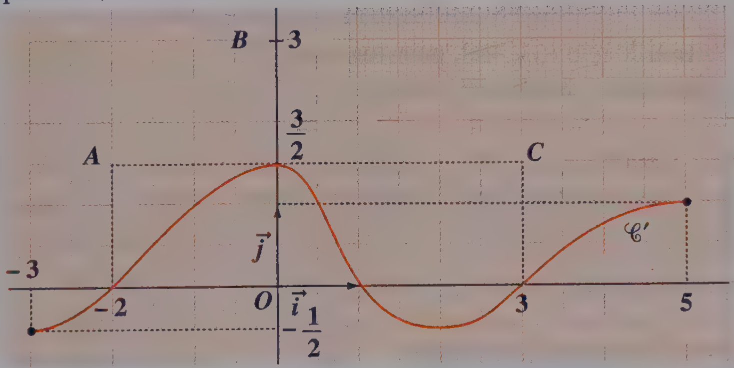
Déterminer l'ensemble de définition puis étudier le sens de variation de la fonction f : $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

2 Courbe d'une fonction dérivée

f est une fonction dérivable sur $[-3 ; 5]$. $\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.

1° Étudier le sens de variation de f.

2° Déterminer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sachant qu'elle passe par les points A, B et C.



3 Maximum

Déterminer le maximum sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ de la fonction f :

$$x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

4 Asymptotes

f est la fonction : $x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{5}{x^2 + 1}$. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interro 4 — révision des ch. 7, 8 et 9. — 45 min

(Corrigé p. 240)

1 Une fonction rationnelle

f est la fonction : $x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$.

1° Étudier la fonction f (parité, limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation). Préciser les droites asymptotes de $\mathcal{C}_f$ et la courbe représentative de f.

2° Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de cette fonction.

2 Calculs des termes d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{(u_n)^2}$.

Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

3 Sens de variation d'une suite

u est la suite telle que $u_0 = 4$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Existe-t-il un naturel n tel que $u_n \geqslant 4{,}1$?

4 Une suite arithmétique

u est une suite arithmétique telle que : $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17{,}4$.

1° Calculer u_{21}.

2° Calculer la somme S telle que : $S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{21}$.

Interro — révision des ch. 9 et 10. — 40 min

(Corrigé p. 243)

1 Suites géométriques et placements

Pendant douze années consécutives, M. Dupont place une somme de 10 000 euros le 1er janvier de chaque année au taux d'intérêt annuel de 6 %.

M. Durand place une somme de 30 000 euros le 1er janvier des 1re, 4^{e}, 7^{e} et 10^{e} années au même taux d'intérêt annuel de 6 %.
De combien dispose chacun au bout des douze années ?

2 Pourcentages

Vrai ou faux ?

1° Une augmentation de 7 % est compensée par une diminution de 7 %.

2° Une augmentation de 30 % suivie d'une augmentation de 40 % équivaut à une augmentation de 70 %.

3° Une diminution de 45 % suivie d'une augmentation de 45 % permet de retrouver la quantité initiale.

4° Augmenter de 25 % puis diminuer de 7 % revient à diminuer de 7 % puis à augmenter de 25 %.

5° Une augmentation de 13 % suivie d'une diminution de 3 % équivaut à une augmentation de 10 %.

3 Augmentations de salaires

Le salaire mensuel moyen d'une catégorie de fonctionnaires est de 1 900 €.

Le gouvernement et les syndicats négocient une augmentation répartie en quatre étapes : au début de chacun des quatre prochains trimestres. Les syndicats aimeraient obtenir une augmentation de 0,5 % par étape, le gouvernement préconise une augmentation de 9,5 € par étape.

Deux millions de fonctionnaires sont concernés.

On remarquera que 9,5 € *représentent* 0,5 % *du salaire moyen et, par conséquent, que la proposition gouvernementale est en fait une approximation de la proposition syndicale.*

1° Quel serait le salaire mensuel moyen et le salaire annuel moyen d'un fonctionnaire à la suite des quatre augmentations dans chacun des deux cas ?

2° Quel est le montant de la différence annuelle entre les deux propositions

a. pour le fonctionnaire ?

b. pour le gouvernement ?

3° Qu'en pensez-vous ?

4 Pouvoir d'achat

Rappelons que le pouvoir d'achat d'une personne est le rapport entre son salaire mensuel et le prix d'un objet fictif de référence (prix obtenu à partir d'un certain nombre de produits de consommation et de services).

La situation suivante est fictive.

1° Au début de l'année 2000, le salaire d'Antoine est de 1 250 € et le prix de l'objet de référence de 25 €. Quel est son pouvoir d'achat ?

2° En cours d'année, son salaire augmente de 15 € et l'objet augmente de 1 €.

a. Quel est son nouveau pouvoir d'achat ?

b. Quel est le taux d'évolution de son pouvoir d'achat au cours de cette année ?

3° L'année suivante, son salaire augmente de 1,2 %, de même que le prix de l'objet. Quel est son nouveau pouvoir d'achat ?

Interro 6 — révision des ch. 11 et 12. — 45 min

(Corrigé p. 246)

1 Statistiques et tableau à double entrée

Dans un quartier, on demande à 1 600 personnes (« Enfants », « Hommes » et « Femmes ») de choisir leur distraction favorite parmi le sport, le cinéma, la musique et la télévision.

Le tableau suivant donne les résultats du sondage.

Population Y / Distraction X	Enfants	Hommes	Femmes
Sport	120	200	160
Cinéma	40	80	120
Musique	240	200	120
Télévision	80	128	112

1° a. Compléter ce tableau en ajoutant une ligne et une colonne « Total ».

b. Combien y a-t-il de femmes ? de cinéphiles ? de femmes cinéphiles ?

2° a. Quelle est la fréquence, en pourcentage de la population interrogée, des femmes préférant le cinéma ?

b. Établir le tableau des fréquences, en pourcentages, par rapport à l'effectif total.

3° a. Quel est, parmi les amateurs de sport, le pourcentage de femmes ?

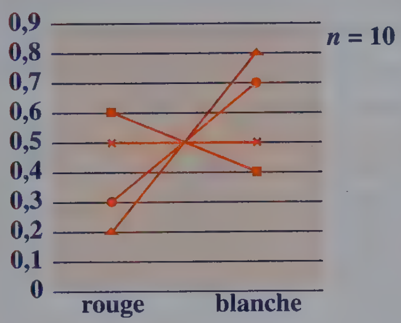
b. Quel est, parmi les hommes, le pourcentage de ceux qui préfèrent le cinéma ?

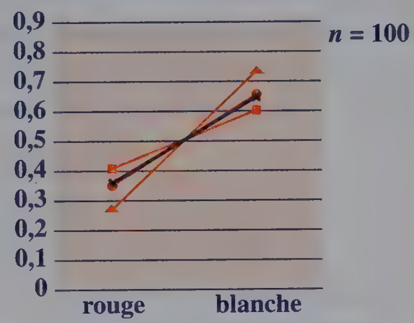
4° Dessiner l'histogramme (multiple) représentant les effectifs comparés des différentes activités selon la catégorie de population observée.

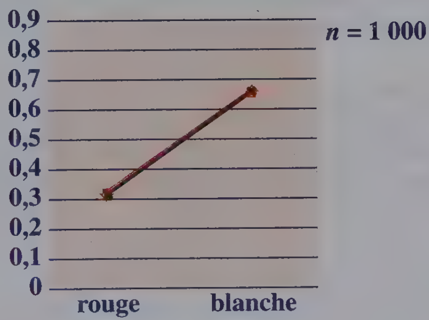
2 Fréquences

Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant six boules, certaines étant rouges, les autres blanches.

Les trois graphiques suivants, obtenus avec un tableur, représentent quatre distributions des fréquences d'apparition d'une boule rouge et d'une boule blanche lors de la répétition de n expériences, respectivement pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1\,000$.







1° Commenter ces graphiques.

2° Peut-on savoir combien l'urne comporte de boules rouges ?

3 Jeu de cartes et probabilités

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, D, E et F ci-dessous.

1° A : « tirer un cœur ».

2° B : « tirer un roi ».

3° C : « tirer le roi de cœur ».

4° D : « tirer une dame rouge ».

5° E : « tirer un roi ou un cœur ».

6° F : « tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un cœur ».

Interro 2 | révision du chapitre 13 | 50 min | Systèmes linéaires, géométrie analytique dans l'espace

(Corrigé p. 249)

1 Programmation linéaire

Un directeur de chenil nourrit ses chiens en leur apportant un minimum journalier de 120 kg de glucides, 90 kg de protides et 60 kg de lipides.

Deux aliments tout préparés Cani et Alica sont proposés sur le marché. Leurs caractéristiques pour un sac sont données dans le tableau ci-dessous.

	Glucides	Protides	Lipides
Cani	**3 kg**	**3 kg**	**1 kg**
Alica	**2 kg**	**1 kg**	**2 kg**

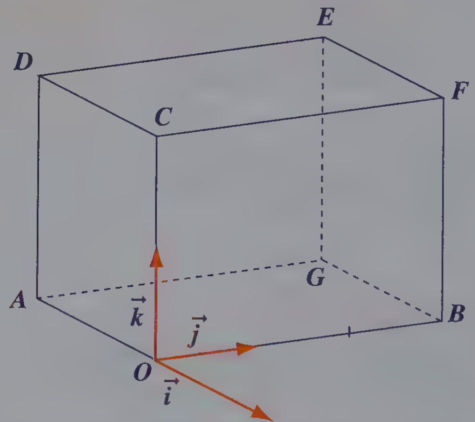
Un sac de Cani coûte 5 € et un sac d'Alica 2,5 €.

1° Combien de sacs de chaque catégorie le directeur va-t-il utiliser par jour pour nourrir ses chiens à moindre coût ?

2° Quelle sera alors la dépense journalière ?

2 Équations de plans, de droites

On considère le parallélépipède rectangle *OAGBCDEF* de la figure ci-dessous, dont les arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ ont pour longueurs respectives 1, 3 et 2.



L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1° Donner les coordonnées :

a. du point D ;

b. du point E ;

c. du centre I de la face $OADC$;

d. du centre J du parallélépipède.

2° Déterminer :

a. une équation du plan supérieur du parallélépipède ;

b. un système d'équations de la droite (DE).

3° Calculer :

a. la distance OE (diagonale du parallélépipède) ;

b. le cosinus de l'angle $\widehat{OED}$ et une valeur approchée à un degré près de $\widehat{OED}$;

c. le volume du tétraèdre $OAGC$.

3 Vecteur normal à un plan

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ est le point $A(1\,;-5\,;7)$.

Interro | révision du chapitre 14 | 40 min | Calcul matriciel (Corrigé p. 252)

1 Calcul matriciel

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1° Calculer A^2.

2° Que vaut A^{10} ?

2 Inverse d'une matrice

Soient $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de format (3, 3).

1° Calculer $A - I$, $A - 2I$, puis $(A - I)(A - 2I)$.

2° Développer le produit $(A - I)(A - 2I)$.

3° En déduire qu'il existe une matrice B, à préciser, telle que : $BA = AB = I$.

3 Puissance d'une matrice

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. En déduire la matrice A^n, suivant la valeur de l'entier naturel non nul n.

4 Matrices et systèmes d'équations linéaires

Le but de l'exercice est de déterminer des réels a, b et c (s'ils existent) tels que le polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie : $f(-3) = 8$, $f(-1) = -6$ et $f(2) = 18$.

1° Déterminer un système Σ dont $(a\,;\,b\,;\,c)$ doit être solution.

2° On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 8 \\ -6 & 30 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices AB et BA.

3° Déduire des deux questions précédentes la réponse au problème posé.

Interro 1

(Énoncé p. 224)

1 $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Soient x et x' des réels tels que : $0 < x < x'$; on a :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x'}}{\sqrt{x'}\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x'}}{\sqrt{x'}\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x'})(\sqrt{x}+\sqrt{x'})}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x}+\sqrt{x'})} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x'})^2}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x}+\sqrt{x'})} \\ &= \frac{x-x'}{\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x}+\sqrt{x'})}, \end{aligned}$$

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

or : $\sqrt{x}\sqrt{x'}(\sqrt{x}+\sqrt{x'}) > 0$ et $x - x' < 0$ (car $x < x'$),
donc : $f(x') - f(x) < 0$, c'est-à-dire : $f(x) > f(x')$.
On a ainsi démontré que, pour tous réels x et x' appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$: si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2 $f : x \mapsto -x^2 - 2x + 3$.

1° Pour tout réel x, $\boldsymbol{f(x) - 4} = -x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = \boldsymbol{-(x+1)^2}$.

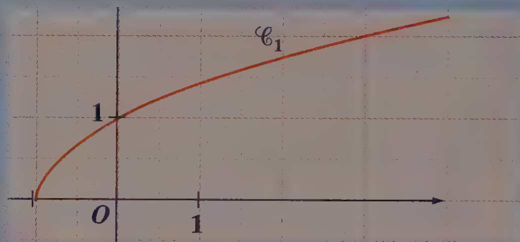
2° D'après **1°** : pour tout réel x, $f(x) = -(x+1)^2 + 4$,
or : $-(x+1)^2 \leqslant 0$,
donc : pour tout réel x, $f(x) \leqslant 4$,
autrement dit, 4 est un majorant de f sur $\mathbb{R}$.
De plus : $f(-1) = 4$, donc 4 est une valeur prise par f.
On déduit que **4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.**

3 Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
Le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3 se déduit de celui de la fonction racine carrée :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

1° $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

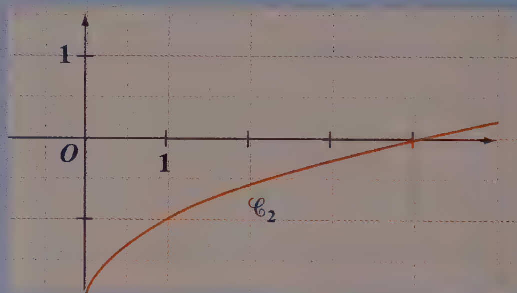
x	-1	$+\infty$
$f_1(x)$	0 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_1$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

2° $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} - 2$.

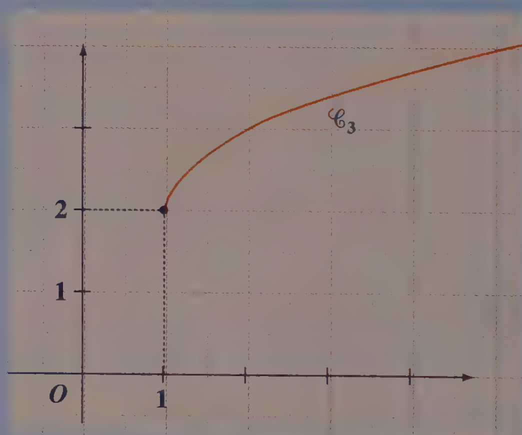
x	0	$+\infty$
$f_2(x)$	-2 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

3° $f_3 : x \mapsto \sqrt{x-1} + 2$.

x	1	$+\infty$
$f_3(x)$	2 ↗	$+\infty$



$\mathscr{C}_3$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$.

4 1° $(E) : 3x^2 - 5x - 2 = 0$.
Soit Δ le discriminant de l'équation du second degré (E) :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49\ ;$$

$\Delta > 0$, donc **(E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :**

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times 3} = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 3} = \frac{5+7}{6} = 2.$$

2° $(E') : 3x^4 - 5x^2 - 2 = 0.$

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3x^4-5x^2-2=0 &\Leftrightarrow 3(x^2)^2-5x^2-2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x^2=2 \\ &\Leftrightarrow x^2=2 \\ &\Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

x est solution de (E') si et seulement si x^2 est solution de (E).

Finalement, **les solutions de (E') sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.**

$-\frac{1}{3} < 0$, donc l'équation $x^2 = -\frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

Interro 2

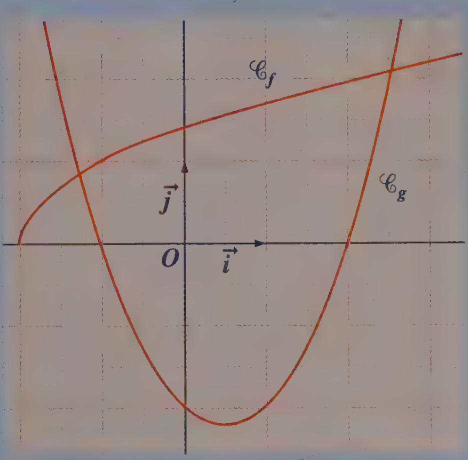
(Énoncé p. 224)

1 $(E) : \sqrt{x+2} = x^2 - x - 2.$

Soient f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+2}$, et g le polynôme du second degré : $x \mapsto x^2 - x - 2$.

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{C}_f$ est l'image de la demi-parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-2\,\vec{i}$. La forme canonique de g étant : $x \mapsto \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, $\mathscr{C}_g$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j}$.



Sur le graphique, on lit que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont exactement deux points d'intersection, donc :
le nombre de solutions de (*E*) est 2.

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}$
$=x^2-x-2.$

2 Soit x le nombre de mètres de tissu acheté.

$\frac{540}{x}$ est le prix, en euros, d'un mètre de tissu ; $\frac{540}{x+9}$ serait le prix, en euros, d'un mètre de tissu avec la réduction.

On a donc : $\frac{540}{x}-\frac{540}{x+9}=5,$

c'est-à-dire : $\frac{540(x+9)-540x}{x(x+9)}=5,$

soit : $5x(x+9)=540\times 9$

ou : $x^2+9x=108\times 9$

d'où : $x^2+9x-972=0.$

Le discriminant Δ de cette équation (*E*) du second degré vérifie :

$$\Delta=9^2-4\times(-972)=81+3\,888=3\,969=63^2.$$

Les solutions de (*E*) sont donc $\frac{-9-63}{2}$ et $\frac{-9+63}{2}$, c'est-à-dire -36 et 27.

La seule solution positive étant 27, on peut conclure que **la personne a acheté 27 mètres de tissu.**

3 1° $f: x\mapsto x^3-4x^2+5x-7\sqrt{2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

Pour tout réel x, on a : $f'(x)=3x^2-8x+5$.

2° $f: x\mapsto (x^3-9x^2)(5x-6)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

Pour tout réel x :

$f'(x)=(3x^2-18x)(5x-6)+(x^3-9x^2)\times 5,$

donc :

$f'(x)=15x^3-18x^2-90x^2+108x+5x^3-45x^2,$

d'où : $\boldsymbol{f'(x)=20x^3-153x^2+108x}$.

Il est également possible de développer avant de dériver :
$f(x)=5x^4-45x^3-6x^3+54x^2$
$=5x^4-51x^3+54x^2.$

3° $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction rationnelle dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{3(x^2+1)-(3x+4)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2+3-6x^2-8x}{(x^2+1)^2}$,

donc : $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}}$.

4° $f : x \mapsto (8x+7)^{2002}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

Pour tout réel x : $f'(x) = 8 \times 2\,002\,(8x+7)^{2001}$

donc : $\boldsymbol{f'(x) = 16\,016\,(8x+7)^{2001}}$.

Interro 1

(Énoncé p. 225)

1 $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

• L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que :

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

1 étant une solution de l'équation du second degré : $x^2 - 4x + 3 = 0$, son autre solution, notée α, vérifie : $\alpha \times 1 = \dfrac{3}{1}$, donc $\alpha = 3$.

On en déduit que la fonction f a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$, c'est-à-dire $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

• f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout réel x différent de 1 et de 3 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-4x+3)-(x^2+1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}, \\ &= \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3-2x+4x^2+4}{(x^2-4x+3)^2}, \\ &= \frac{4(-x^2+x+1)}{(x^2-4x+3)^2}, \end{aligned}$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2+x+1$.

Résolvons l'équation (E) du second degré : $-x^2+x+1=0$.

Son discriminant Δ vérifie : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$;

$\Delta > 0$, donc (E) admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62$,
$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.

Remarquons que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 3$ et dressons le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que f **est strictement décroissante** sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$, $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,3\right[$ **et** $]3\,;\,+\infty[$, et **strictement croissante** sur chacun des intervalles $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right[$ **et** $\left]1\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

2 1° Nous constatons sur le graphique que :

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$;
- pour tout x de $[-3\,;\,5]$: si $x < -2$, alors $f'(x) < 0$,
  si $-2 < x < 1$, alors $f'(x) > 0$,
  si $1 < x < 3$, alors $f'(x) < 0$,
  si $x > 3$, alors $f'(x) > 0$.

On en déduit que f **est strictement décroissante** sur chacun des intervalles **$[-3\,;\,-2]$ et $[1\,;\,3]$** et que f **est strictement croissante** sur chacun des intervalles **$[-2\,;\,1]$ et $[3\,;\,5]$.**

2° f est dérivable sur $[-3\,;\,5]$, donc $\mathscr{C}$ est « bien régulière », c'est-à-dire qu'elle admet une tangente en chacun de ses points ; pour tout x de $[-3\,;\,5]$, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x.

- $f'(-2) = f'(1) = f'(3) = 0$, donc $\mathscr{C}$ **admet une tangente horizontale en A, en C et au point d'abscisse 1.**
- $f'(0) = \frac{3}{2}$, donc le coefficient directeur de la tangente en B est $\frac{3}{2}$.
- $f'(-3) = -\frac{1}{2}$ et $f'(5) = 1$, donc les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -3 et 5 ont respectivement pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et 1.

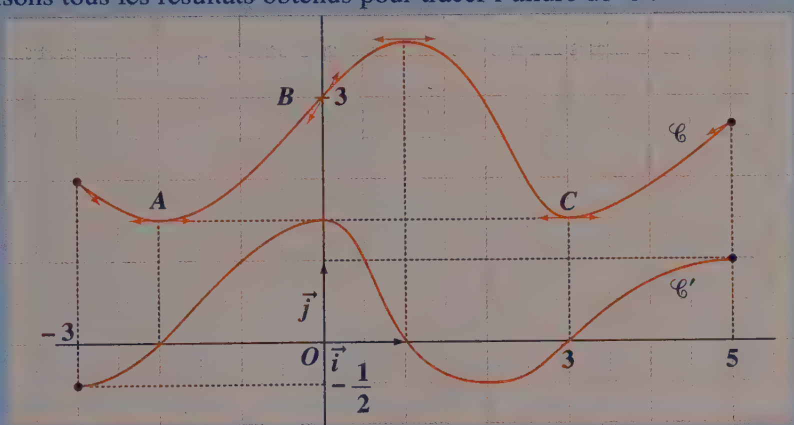
Résumons tous ces renseignements dans un tableau :

x	-3		-2		0		1		3		5
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	1
f		↘	$\frac{3}{2}$	↗	3	↗		↘	$\frac{3}{2}$	↗	

On constate que le minimum de f sur $[-3 ; 5]$ est $\frac{3}{2}$, il est atteint en -2 et 3 :

$$f(-2) = f(3) = \frac{3}{2}.$$

Utilisons tous les résultats obtenus pour tracer l'allure de $\mathscr{C}$:



3 $f : x \mapsto 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$

En tant que polynôme, la fonction f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 6x^2 - x - 2$.

Soit Δ le discriminant du polynôme du second degré f' :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49.$$

$\Delta > 0$, donc f' admet deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1-7}{2 \times 6} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1+7}{2 \times 6} = \frac{2}{3}.$$

Pour tout réel x :
$f'(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$

INTERROS • Corrigés

Nous sommes en mesure de dresser le tableau de variation de f sur $[-1 ; 1]$ (en n'y consignant que les renseignements utiles pour répondre à la question posée) :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Penser à vérifier : $-1 < -\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$.

On en déduit que le maximum de f sur $[-1 ; 1]$ est le plus grand des deux nombres $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$, or :

- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 2 = \frac{13}{8}$,
- $f(1) = 2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2}$,
- $\frac{13}{8} > \frac{1}{2}$,

donc **le maximum de f sur $[-1 ; 1]$ est $\frac{13}{8}$.**

4 $f :\ x \mapsto 2x + 3 + \dfrac{5}{x^2+1}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (2x+3) = 2x + 3 + \dfrac{5}{x^2+1} - 2x - 3 = \dfrac{5}{x^2+1}$,

de plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2+1} = 0$, donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interro

(Énoncé p. 226)

1 $f :\ x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$.

1° L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $-x$ appartient à $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à zéro),

et $f(-x) = -x + \dfrac{4}{-x} = -\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$, donc $f(-x) = -f(x)$.

f est donc une fonction impaire ; il suffit de l'étudier sur $]0\,;+\infty[$, on complètera sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$,

et : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$,

donc la droite Δ **d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$,** et :

$$\lim_{+\infty} f=+\infty.$$

Si f est impaire et si $\lim\limits_{+\infty} f=a$, alors : $\lim\limits_{-\infty} f=-a$.

Si f est impaire et si $\lim\limits_{0^+} f=a$, alors : $\lim\limits_{0^-} f=-a$.

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$f(x)=x+\frac{4}{x},$$

et : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4}{x}=+\infty$,

donc $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$ et **la droite d'équation $x=0$,** c'est-à-dire l'axe des ordonnées, **est asymptote à $\mathscr{C}_f$.**

De plus, f étant impaire, on obtient :

$$\lim_{-\infty} f=-\infty \text{ et } \lim_{0^-} f=-\infty.$$

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x non nul :

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2},$$

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$: $x+2>0$ et $x^2>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$.

donc : $f'(2)=0$,

si $0<x<2$, alors $f'(x)<0$;

si $x>2$, alors $f'(x)>0$.

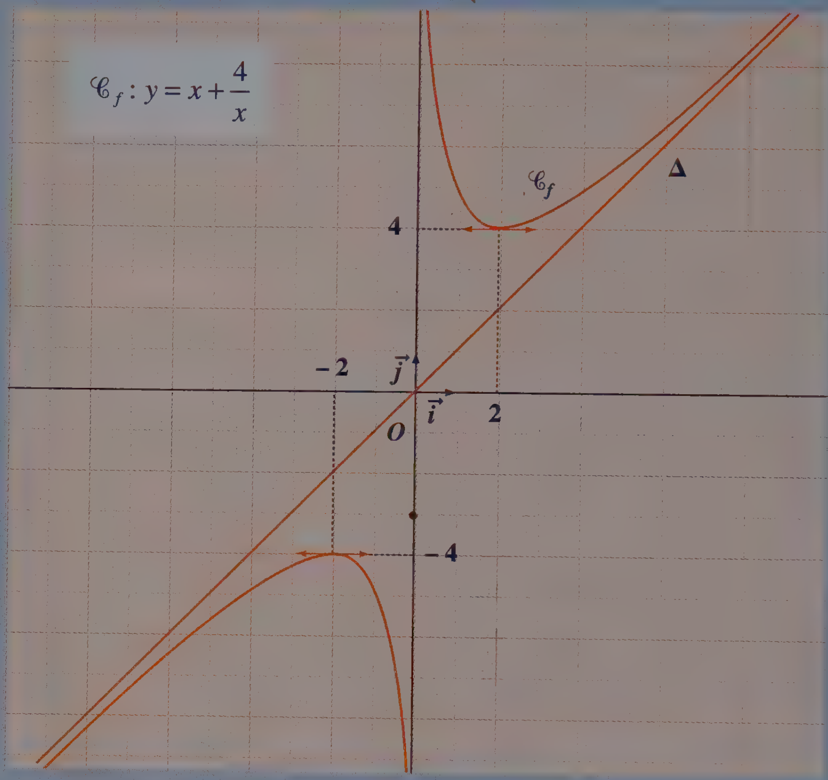
On en déduit que f est **strictement décroissante sur $]0\,;2]$** et **strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.**

$f(2)$, c'est-à-dire 4, est donc le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

3°



2 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{(u_n)^2}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+2} = \dfrac{3}{(u_{n+1})^2} = \dfrac{3}{\dfrac{9}{(u_n)^4}} = \dfrac{3}{9} \times (u_n)^4$,

donc : $\boldsymbol{u_{n+2} = \dfrac{1}{3}(u_n)^4}$.

3 $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Pour tout naturel n : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$,
or $-u_n^2 \leqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Cela prouve que u est décroissante.
De plus $u_0 = 4$ donc, pour tout naturel n, $u_n \leqslant 4$.
Finalement, il n'existe pas de naturel n tel que $u_n \geqslant 4{,}1$.

4 1° On a : $u_{17} = u_{10} + 7r$, or : $u_{10} = 9$ et $u_{17} = 17{,}4$,

donc : $r = \dfrac{8{,}4}{7} = 1{,}2.$

On a : $u_{21} = u_{17} + 4r = 17{,}4 + 4 \times 1{,}2 = 17{,}4 + 4{,}8$,

donc : $\boldsymbol{u_{21} = 22{,}2.}$

2° $S = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{21}$; S est donc la somme des douze termes consécutifs de la suite arithmétique u, de u_{10} à u_{21} .

On en déduit : $S = 12 \times \dfrac{u_{10} + u_{21}}{2} = 6 \times (9 + 22{,}2)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{S = 187{,}2.}$

Interro 5

(Énoncé p. 226)

1 **• Placement de M. Dupont**

$1 = (1{,}06)^0$ et il y a douze entiers compris au sens large entre 0 et 11.

10 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans,
10 000 euros ont été placés pendant exactement 11 ans,
⋮
10 000 euros ont été placés pendant exactement 1 an.

Le capital C_1 , en euros, de M. Dupont vérifie donc :

$$C_1 = (1{,}06)^{12} \times 10\,000 + (1{,}06)^{11} \times 10\,000 + \ldots + 1{,}06 \times 10\,000,$$

c'est-à-dire : $C_1 = 1{,}06 \times 10\,000 \times [(1{,}06)^{11} + (1{,}06)^{10} + \ldots + 1]$.

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 12 premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 1.

On a donc : $C_1 = 1{,}06 \times 10\,000 \times \dfrac{1-(1{,}06)^{12}}{1-1{,}06}$,

soit : $C_1 = 10\,600 \times \dfrac{(1{,}06)^{12} - 1}{0{,}06}$.

Par conséquent, **au bout des douze années, M. Dupont dispose de 178 821,38 euros, au centième près.**

• Placement de M. Durand

30 000 euros ont été placés pendant exactement 12 ans,
30 000 euros ont été placés pendant exactement 9 ans,
30 000 euros ont été placés pendant exactement 6 ans,
30 000 euros ont été placés pendant exactement 3 ans.

Le capital C_2 , en euros, de M. Durand vérifie donc :

$C_2 = (1{,}06)^{12} \times 30\,000 + (1{,}06)^9 \times 30\,000 + (1{,}06)^6 \times 30\,000 + (1{,}06)^3 \times 30\,000$,

soit : $C_2 = (1{,}06)^3 \times 30\,000 \times [(1{,}06)^9 + (1{,}06)^6 + (1{,}06)^3 + 1]$.

On reconnaît à l'intérieur des crochets la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison $(1{,}06)^3$ et de premier terme 1.

On a donc : $C_2 = (1{,}06)^3 \times 30\ 000 \times \dfrac{1-[(1{,}06)^3]^4}{1-(1{,}06)^3}$,

soit : $C_2 = 35\ 730{,}48 \times \dfrac{(1{,}06)^{12}-1}{0{,}191\ 016}$.

Par conséquent, **au bout des douze années, M. Durand dispose de 189 336,32 euros, au centième près.**

2 **1° Faux !**

La quantité est multipliée par :
$1{,}07 \times 0{,}93 = 0{,}9951 = 1 - 0{,}0049$.

La quantité est finalement diminuée de 0,49 %.

2° Faux !

La quantité est multipliée par : $1{,}30 \times 1{,}40 = 1{,}82$.

Ce coefficient correspond à une augmentation de 82 %.

3° Faux !

La quantité est multipliée par :
$0{,}55 \times 1{,}45 = 0{,}7975 = 1 - 0{,}2025$.

Ce coefficient correspond à une diminution de 20,25 %.

4° Vrai !

La quantité est multipliée par :
$1{,}25 \times 0{,}93$ dans le premier cas,
$0{,}93 \times 1{,}25$ dans le second cas,
ces deux produits étant égaux.

Le résultat est de 1,1625.

La quantité sera augmentée de 16,25 %.

5° Faux !

La quantité est multipliée par :
$1{,}13 \times 0{,}97 = 1{,}0961$.

Ce coefficient correspond à une augmentation de 9,61 %.

Le coefficient multiplicateur associé à deux variations successives est le produit des deux coefficients multiplicateurs.

De façon générale, une augmentation de t % n'est jamais compensée par une diminution de t %, le coefficent multiplicateur étant égal à :
$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{t}{100}\right) = 1 - \dfrac{t^2}{10\ 000}$
qui est différent de 1.

De manière générale, une augmentation de t % suivie d'une autre de t' % n'est pas équivalente à une augmentation de $(t + t')$ %, le coefficient multiplicateur étant égal à :
$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{t'}{100}\right) = 1 + \dfrac{t+t'}{100} + \dfrac{tt'}{100\ 000}$
qui est supérieur à $1 + \dfrac{t+t'}{100}$.

3 1° • $1\,900 + 4 \times 9{,}5 = 1\,938$; donc **avec la proposition gouvernementale, le salaire mensuel moyen**, après les quatre augmentations, sera de **1 938 €.**
Le salaire annuel moyen sera alors égal à : 12 × 1 938 €, soit **23 256 €.**
• $1\,900 \times 1{,}005^4 = 1\,938{,}28595119$; donc **avec la proposition syndicale, le salaire mensuel moyen** après les quatre augmentations, sera de **1 938,29 €.**
Le salaire annuel moyen sera alors égal à : 12 × 1 938,29 €, soit **23 259,48 €.**

2° **a.** La différence annuelle pour le fonctionnaire sera de **3,48 €.**
b. $3{,}48 \times 2\,000\,000 = 6\,960\,000$.
Pour l'État cette différence sera de **6,96 millions d'euros.**

3° La proposition gouvernementale approximant la proposition syndicale permet à l'État de réduire ses dépenses de presque 7 millions d'euros, ce qui n'est évidemment pas négligeable dans la négociation.

4 1° Le pouvoir d'achat d'Antoine est :

$$\frac{1\,250}{25} = \mathbf{50}.$$

Antoine pourrait acheter 50 fois l'objet de référence avec son salaire mensuel.

2° **a.** Son nouveau salaire mensuel est :
1 250 + 15 €, c'est-à-dire 1 265 €.
Le nouveau prix de référence est :
25 + 1 €, soit 26 €.
Le nouveau pouvoir d'achat est donc :

$$\frac{1\,250}{26} \text{ soit environ } \mathbf{48{,}65}.$$

Antoine ne pourrait plus acheter que 48 fois l'objet de référence avec son nouveau salaire mensuel.

b. $$\frac{48{,}65 - 50}{50} \approx -0{,}027.$$

Donc **son pouvoir d'achat a baissé de 2,7 %.**
3° Son nouveau salaire mensuel est : 1,012 × 1 265 €.
Le nouveau prix de référence est : 1,012 × 26 €.
Le nouveau pouvoir d'achat est donc :

$$\frac{1\,265 \times 1{,}012}{26 \times 1{,}012} = \frac{1\,265}{26}$$

soit environ **48,65.**
L'année suivante, **le pouvoir d'achat d'Antoine n'a pas changé.**

Interro 6

(Énoncé p. 228)

1 1° **a.** Le tableau complet des effectifs est le suivant.

Distraction X \ Population Y	Enfants	Hommes	Femmes	Total
Sport	120	200	160	480
Cinéma	40	80	120	240
Musique	240	200	120	560
Télévision	80	128	112	320
Total	480	608	512	1 600

b. La population comporte **512 femmes, 240 cinéphiles et 120 femmes cinéphiles.**

La colonne « Total » nous indique que parmi les 1 600 personnes interrogées, on a 480 amateurs de sport, 240 de cinéma, 560 de musique et 320 de télévision.
Par ailleurs, cette population se compose de 480 enfants, 608 hommes et 512 femmes.

2° **a.** Parmi les 1 600 personnes interrogées, 120 sont des femmes cinéphiles.

Leur fréquence est le nombre f tel que : $f = \dfrac{120}{1\,600} = \mathbf{0{,}075}$.

Les femmes préférant le cinéma représentent donc **7,5 %** de la population interrogée.

b.

Distraction X \ Population Y	Enfants	Hommes	Femmes	Total
Sport	7,5 %	12,5 %	10 %	30 %
Cinéma	2,5 %	5 %	7,5 %	15 %
Musique	15 %	12,5 %	7,5 %	35 %
Télévision	5 %	8 %	7 %	20 %
Total	50 %	38 %	32 %	100 %

3° **a.** On notera cette fréquence des femmes, conditionnée par le caractère « sport » : $f_{\text{Sport}}(\text{Femmes})$.

Parmi les 480 amateurs de sport, on a 160 femmes ; de plus $\dfrac{160}{480}\times 100 \approx 33{,}33$.

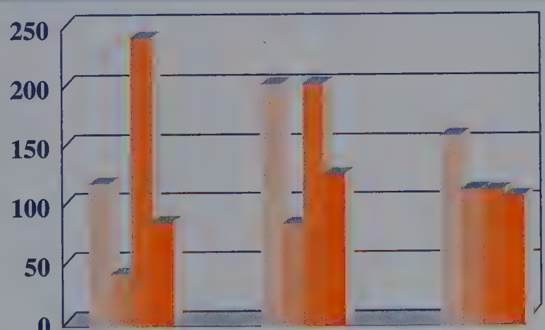
On a donc : $\boldsymbol{f_{\text{Sport}}(\text{Femmes}) \approx 33{,}33\ \%}$.

b. On notera cette fréquence des cinéphiles, conditionnée par le caractère « hommes » : $f_{\text{Hommes}}(\text{Cinéma})$.

Parmi les 608 hommes, on a 180 cinéphiles ; et $\dfrac{80}{608}\times 100 \approx 13{,}2$.

On a donc : $\boldsymbol{f_{\text{Hommes}}(\text{Cinéma}) \approx 13{,}2\ \%}$.

4° L'histogramme représentant les effectifs de chaque activité selon la catégorie de population est le suivant :



	Enfants	Hommes	Femmes
Sport	120	200	160
Cinéma	40	80	120
Musique	240	200	120
Télévision	80	128	112

2 1° Les trois graphiques mettent en évidence des fluctuations d'échantillonnages d'autant plus faibles que le nombre n d'expériences est grand.

2° Le troisième graphique fait apparaître une stabilisation de la distribution des fréquences de sortie d'une boule rouge et d'une boule blanche sur $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$; il est donc raisonnable d'affirmer que l'urne contient des boules rouges et blanches dans les proportions 1/3 et 2/3, autrement dit, l'urne contenant six boules, il est raisonnable d'affirmer que **l'urne contient deux boules rouges et quatre boules blanches.**

3

L'expérience aléatoire est modélisée par la loi équirépartie P sur l'ensemble des 32 cartes du jeu. La probabilité d'un événement est égale au nombre de ses éléments divisé par 32.

1° Un jeu de 32 cartes comprend 8 cœurs, donc :

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}}.$$

A possède 8 éléments : $\text{card}(A) = 8$.

2° Quatre cartes sont des rois, donc :

$$\boldsymbol{P(B)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}}.$$

$\text{card}(B) = 4$.

3° Le jeu comporte un seul roi de cœur, donc : $\boldsymbol{P(C)=\frac{1}{32}}$.

4° La dame de carreau et la dame de cœur sont les deux dames rouges du jeu, donc : $\boldsymbol{P(D)=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}}$.

5° On remarque : $E = A \cup B$ et $C = A \cap B$, donc :

$$P(E)=P(A)+P(B)-P(C)=\frac{8}{32}+\frac{4}{32}-\frac{1}{32},$$

d'où : $\boldsymbol{P(E)=\frac{11}{32}}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Un jeu de 32 cartes comprend 8 cœurs, dont le roi de cœur, et trois autres rois, donc : $\text{card}(E) = 11$, et on retrouve bien : $P(E) = 11/32$.

6° F est l'événement complémentaire (on dit aussi « contraire ») de l'événement E, donc :

$$P(F)=1-P(E)=1-\frac{11}{32},$$

d'où : $\boldsymbol{P(F)=\frac{21}{32}}$.

Interro 7

(Énoncé p. 230)

1 1° Il s'agit de déterminer le nombre x de sacs de Cani et le nombre y de sacs d'Alica permettant une dépense journalière minimale.
Les contraintes de l'énoncé sont traduites par le système Σ d'inconnue (x, y) :

$$\begin{cases} 3x+2y \geqslant 120 \\ 3x+y \geqslant 90 \\ x+2y \geqslant 60 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 . \end{cases}$$

Traçons les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives :

$$3x + 2y = 120, \quad 3x + y = 90 \quad \text{et} \quad x + 2y = 60,$$

dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Hachurons l'ensemble $\mathcal{S}$ des points du plan dont le couple de coordonnées (x, y) vérifie le système Σ.

Soit p la somme journalière dépensée en euros pour x sacs de Cani et y sacs d'Alica.
On a : $p = 5x + 2{,}5y$,

soit : $y=-2x+\dfrac{p}{2{,}5}$,

ou encore :

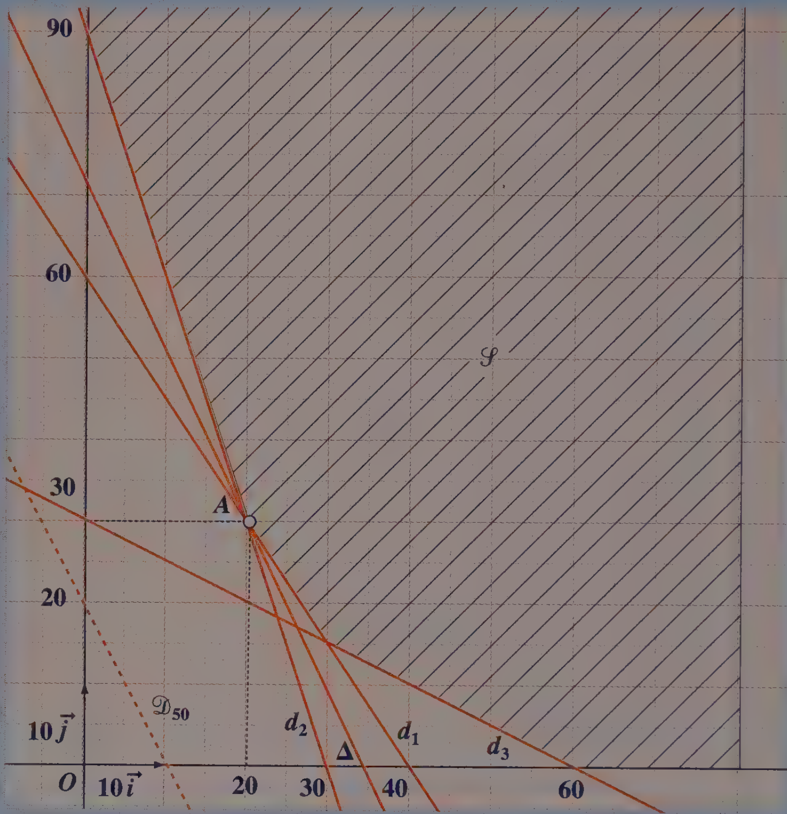
$y=-2x+\dfrac{2}{5}p.$

La pente $\mathcal{D}_p$ est égale à -2 ; son ordonnée à l'origine est $\dfrac{2}{5}p$: la dépense sera d'autant plus faible que l'ordonnée à l'origine est « petite ».

Les points à coordonnées positives de la droite $\mathcal{D}_p$ d'équation $y=-2x+\dfrac{2}{5}p$ correspondent tous à la même dépense p.

Traçons la droite Δ de pente -2 dont l'ordonnée à l'origine est minimale (et positive) et qui passe au moins par un point de $\mathcal{S}$.

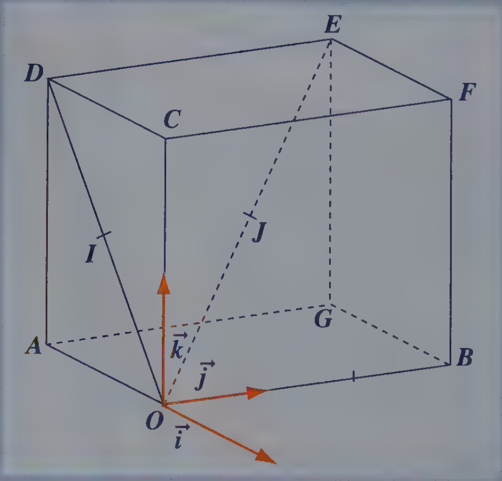
Δ a un seul point commun avec $\mathcal{S}$: le point d'intersection $A(20 ; 30)$ des droites d_1 et d_2.



Par conséquent, pour nourrir ses chiens à moindre coût, le directeur du chenil utilise **20 sacs de Cani et 30 sacs d'Alica par jour.**

2° On a : $5 \times 20 + 2{,}5 \times 30 = 175$, donc **la dépense journalière est de 175 €.**

2



Par définition du repère : $O(0~;0~;0)$, $A(-1~;0~;0)$, $B(0~;3~;0)$ et $C(0~;0~;2)$.

1° a. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ ($OADC$ est un parallélogramme), donc $\overrightarrow{OD}(-1~;0~;2)$, donc : $\mathbf{D(-1~;0~;2)}$.

b. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc $\overrightarrow{OE}(-1~;3~;2)$, donc : $\mathbf{E(-1~;3~;2)}$.

c. Le centre I de la face $OADC$ est le milieu du segment $[OD]$, donc :

$\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, donc : $\boldsymbol{I\left(-\dfrac{1}{2}~;0~;1\right)}$.

d. Le centre J du parallélépipède est le milieu du segment $[OE]$, donc :

$\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OE}$, donc : $\boldsymbol{J\left(-\dfrac{1}{2}~;\dfrac{3}{2}~;1\right)}$.

2° a. Le plan $(CDEF)$ de la face supérieure :
- est parallèle au plan de base $(O~;\vec{i},\vec{j})$ du repère ;
- passe par le point $C(0~;0~;2)$.

Donc une équation du plan de la face supérieure est $\mathbf{z = 2}$.

b. La droite (DE) :
- est parallèle à l'axe $(O~;\vec{j})$ du repère ;
- passe par le point $D(-1~;0~;2)$.

Donc un système d'équations de la droite (DE) est $\begin{cases} \mathbf{x = -1} \\ \mathbf{z = 2.} \end{cases}$

3° a. $E(-1~;3~;2)$, donc : $OE = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}$, soit : $\mathbf{OE = \sqrt{14}}$.

b. $OD^2 = 1 + 4 = 5$, $DE^2 = OB^2 = 9$ et $OE^2 = 14$, donc :

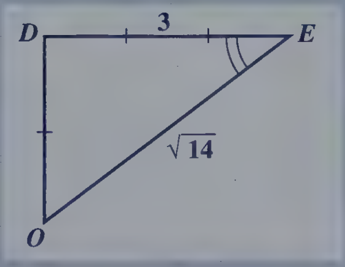
$$OE^2 = OD^2 + DE^2.$$

On en déduit, d'après le théorème de Pythagore, que le triangle OED est rectangle en D (ce résultat est clair graphiquement : la droite (DE) est perpendiculaire au plan de la face $OADC$, donc à la droite (OD) de ce plan).

On en déduit : $\cos\widehat{OED} = \dfrac{DE}{OE}$,

soit : $\mathbf{\cos\widehat{OED} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}}$.

À l'aide de la calculatrice : $\mathbf{\widehat{OED} \approx 37°}$.



c. On considère le tétraèdre $OAGC$ comme une pyramide dont :
- la base est le triangle OAG (rectangle en A) ;
- la hauteur est l'arête $[OC]$ du parallélogramme.

On obtient alors : $\quad \text{Volume}(OAGC) = \dfrac{\text{Aire}(OAG) \times OC}{3}$;

or : $\quad \text{Aire}(OAG) = \dfrac{OA \times AG}{2} = \dfrac{1 \times 3}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ et $\quad OC = 2,$

ce qui implique : $\quad \text{Volume}(OAGC) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} \times 2 = 1,$

soit : $\quad$ **Volume $(OAGC) = 1$.**

3 Le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ est le point $A(1\,;-5\,;7)$, donc le vecteur $\overrightarrow{OA}(1\,;-5\,;7)$ est normal à $\mathcal{P}$; une équation de $\mathcal{P}$ s'écrit donc :

$$x - 5y + 7z + d = 0, \quad \text{avec } d \text{ réel.}$$

De plus, $A \in \mathcal{P}$, donc : $1 - 5 \times (-5) + 7 \times 7 + d = 0$, d'où : $d = -75$.
Par conséquent, une équation de $\mathcal{P}$ est :

$$x - 5y + 7z - 75 = 0.$$

Interro

(Énoncé p. 231)

1 1° $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

$A^{10} = A^2 A^8 = (0)A^8 = (0).$

2° $A^{10} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

2 1° • $A - I = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-16} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{15} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$.

• $A - 2I = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-17} & \mathbf{10} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-24} & \mathbf{15} & \mathbf{11} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & -17 & 10 & 8 \\ & & & -8 & 4 & 4 \\ & & & -24 & 15 & 11 \\ \hline -16 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 15 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

• $(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{(0)}$.

2° $(A-I)(A-2I) = A(A-2I) - I(A-2I)$
$$= A^2 - A \times (2I) - IA - I \times (-2I)$$
$$= A^2 - 2AI - IA + 2I^2,$$
or, I étant la matrice unité de format (3, 3) :
$$AI = IA = A \text{ et } I^2 = I,$$
donc : $\boldsymbol{(A - I)(A - 2I) = A^2 - 3A + 2I.}$

Attention de ne pas oublier la matrice I dans la factorisation de $3A - A^2$ par A.

3° D'après les réponses aux questions **1°** et **2°** : $A^2 - 3A + 2I = (0)$;
cette égalité peut encore s'écrire : $3A - A^2 = 2I$,
ou encore : $(3I - A)\,A = A(3I - A) = 2I$,
c'est-à-dire : $\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A\right)A = A\left(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A\right) = I.$

Explicitement : $B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -4 \\ 4 & -1{,}5 & -2 \\ 12 & -7{,}5 & -5 \end{pmatrix}.$

Finalement, **en posant :** $\boldsymbol{B = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A,}$

la matrice B vérifie : $BA = AB = I$.

3

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

A^3 étant égale à la matrice unité I de format (3, 3) :
$$A^4 = A^3 \times A = I \times A = A, \quad A^5 = A^3 \times A^2 = I \times A^2 = A^2,$$
$$A^6 = A^3 \times A^3 = I \times I = I, \ \dots$$
et, plus généralement, pour tout entier naturel n non nul :
- $\boldsymbol{A^n = A}$ **si $n = 3p + 1$** **($p \in \mathbb{N}$) ;**
- $\boldsymbol{A^n = A^2}$ **si $n = 3p + 2$** **($p \in \mathbb{N}$) ;**
- $\boldsymbol{A^n = I}$ **si $n = 3p$** **($p \in \mathbb{N}^*$).**

4 1° $\begin{cases} f(-3) = a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c = 9a - 3a + c \\ f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c \\ f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b + c, \end{cases}$

donc $f(-3) = 16$, $f(1) = 12$ et $f(2) = 6$ si et seulement si $(a\,;\,b\,;\,c)$ est solution du système Σ : $\begin{cases} \mathbf{9a - 3b + c = 8} \\ \mathbf{a - b + c = -6} \\ \mathbf{4a + 2b + c = 18.} \end{cases}$

2° $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 8 \\ -6 & 30 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 3 & -5 & 2 \\ & & & -3 & -5 & 8 \\ & & & -6 & 30 & 6 \\ \hline 9 & -3 & 1 & 30 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 30 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 30 \end{array} \qquad AB = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = 30\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 9 & -3 & 1 \\ & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & -5 & 2 & 30 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 8 & 0 & 30 & 0 \\ -6 & 30 & 6 & 0 & 0 & 30 \end{array} \qquad BA = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = 30\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, en notant I la matrice unité de format (3, 3) :

$$\boldsymbol{AB = BA = 30\,I.}$$

3° Le système Σ est équivalent à : $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$. De plus : si $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$,

alors, en multipliant les deux membres de cette égalité à gauche par B, on obtient :

$$BA\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix},$$

La matrice A est inversible, et son inverse est la matrice A^{-1} définie par :

$A^{-1} = \frac{1}{30}B$; alors : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Une fois entrée la matrice A, la calculatrice retourne la matrice inverse de A quand on lui commande de calculer A^{-1}.

c'est-à-dire : $30\,I\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$,

soit : $30\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$, ou encore : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30}B\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30} B \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$, alors, en multipliant les deux membres de cette égalité à gauche par A, on obtient : $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30} AB \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi démontré que Σ est équivalent à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30} B \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que Σ admet une seule solution.

On a : $B\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 8 \\ -6 & 30 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 8-5\times(-6)+2\times 18 \\ -3\times 8-5\times(-6)+8\times 18 \\ -6\times 8+30\times(-6)+6\times 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ -120 \end{pmatrix}$,

donc Σ est équivalent à : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ -120 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Finalement, (3 ; 5 ; – 4) est la seule solution de Σ,
et $x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$ est le seul polynôme f de degré au plus 2 tel que : $f(-3) = 8$, $f(-1) = -6$ et $f(2) = 18$.

Achevé d'imprimer en Italie par L.E.G.O. S.p.A. Plant Lavis
Dépôt légal: février 2009
Edition: 02- 16/9743/2

Exos *résolus*

1re ES

Le meilleur coach pour s'entraîner et réussir !

Maths

La collection **Exos** *résolus* s'adresse à tous ceux qui veulent **réussir** dans les matières scientifiques, de la 3e à la terminale, grâce à un **entraînement intensif**. Chaque titre présente des batteries d'**exercices minutés**, classés par thèmes et par niveaux de difficulté. Vous y trouverez :

- des **résumés de cours** pour réviser les connaissances indispensables ;
- des **exercices de contrôle des connaissances** pour assimiler les notions fondamentales ;
- des **exercices d'entraînement** pour s'exercer et se perfectionner ;
- **8 interrogations écrites** pour terminer ses révisions ;
- tous les **corrigés détaillés**, avec de nombreux conseils.

+ Mémento de poche détachable

Dans la même collection

	3e	2de	1re S	1re ES	Term S	Term ES
Mathématiques	▲	▲	▲	Obligatoire et Option	Obligatoire et Spécialité	Obligatoire et Spécialité
Physique - Chimie	▲	▲				
Physique			▲		Obligatoire et Spécialité	
Chimie			▲		Obligatoire et Spécialité	
SVT			▲		Obligatoire et Spécialité	

ISBN 978-2-01-169743-1

9 782011 697431

16/9743/2

www.hachette-education.com

HACHETTE Éducation

10,95 € TTC
France métropolitaine