

Maths

1^{re} S

ENTRAÎNEMENT

le
Guide
A B C

BAC

S'exercer
intensivement

- Plus de 300 exercices et problèmes
- Classement thématique
- Corrigés détaillés
- Et l'essentiel du cours

 Nathan

Maths

1^{re} S



Marc Gourion

Christian Lixi

Professeur agrégé
au lycée Henri IV
(Paris)

 **Nathan**

Maths

1^{re} 2



Christian Lali
Professeur agrégé
de mathématiques
(1997)

Marc Gouton

Coordination éditoriale : Roselyne Messenger
Edition : Agnès Nicol
Conception graphique intérieur : Killiwatch, avec la participation de Aude Gerton
Couverture : Team Creatif
Compositeur : Alpha Edit

© Nathan 2008
ISBN : 978-2-09-187445-6

Mode d'emploi

Ce **Guide ABC Entraînement** a été conçu pour vous permettre **un entraînement progressif et intensif** en mathématiques. Il est conforme au **programme de Première** en vigueur depuis septembre 2001.

COURS

- Vous trouverez au début de chaque chapitre les résultats essentiels du cours, dont la connaissance est indispensable à la résolution des exercices. Revoyez-les avant d'aborder les exercices et problèmes ; n'hésitez pas à y revenir fréquemment si nécessaire.

EXERCICES

- La rubrique **Vérifiez vos connaissances** permet une auto-évaluation simple des connaissances essentielles du cours.
- Puis, dans le rubrique **Exercices d'entraînement**, les énoncés sont classés par thèmes correspondant le plus souvent aux paragraphes du cours, et, dans chaque thème, la progression est la suivante :
 - pas d'étoile : exercice de base, application immédiate du cours.
 - ★ une étoile : exercice de réflexion ou de synthèse.
 - ★★ deux étoiles : exercice présentant quelques difficultés.

CORRIGÉS

- Très détaillés, ils donnent toutes les étapes des calculs ou des raisonnements, et sont accompagnés de conseils ou de remarques pédagogiques.
- Ils sont volontairement placés à la fin de chaque chapitre pour ne pas vous « tenter ». Votre travail ne sera vraiment profitable que si vous faites l'effort de rechercher vous-même les solutions avant d'aller les consulter !

Sommaire

CHAPITRE 1	Généralités sur les fonctions	7
Cours		7
Exercices		9
Corrigés		16
CHAPITRE 2	Polynômes. Trinômes du second degré	36
Cours		36
Exercices		38
Corrigés		46
CHAPITRE 3	Dérivées	65
Cours		65
Exercices		68
Corrigés		74
CHAPITRE 4	Étude de fonctions	89
Cours		89
Exercices		92
Corrigés		103
CHAPITRE 5	Suites numériques	134
Cours		134
Exercices		138
Corrigés		146

CHAPITRE 6 Statistiques	166
Cours	166
Exercices	172
Corrigés	176
CHAPITRE 7 Probabilités	187
Cours	187
Exercices	190
Corrigés	197
CHAPITRE 8 Repérage dans le plan	215
Cours	215
Exercices	219
Corrigés	224
CHAPITRE 9 Repérage dans l'espace	235
Cours	235
Exercices	240
Corrigés	247
CHAPITRE 10 Barycentre	267
Cours	267
Exercices	269
Corrigés	275
CHAPITRE 11 Produit scalaire dans le plan	293
Cours	293
Exercices	296
Corrigés	304

CHAPITRE 12	Trigonométrie	327
Cours		327
Exercices		329
Corrigés		334

CHAPITRE 13	Transformations du plan	349
Cours		349
Exercices		351
Corrigés		359

Généralités sur les fonctions

1 Opérations sur les fonctions

Soit deux fonctions f et g définies respectivement sur D_f et D_g , et λ un nombre réel non nul.

- On appelle **somme des fonctions f et g** , que l'on note $f + g$, la fonction définie pour tout x de $D_f \cap D_g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- On appelle **produit de la fonction f par le réel λ** , que l'on note λf , la fonction définie pour tout x de D_f par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

- On appelle **produit des fonctions f et g** , que l'on note fg , la fonction définie pour tout x de $D_f \cap D_g$ par :

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

- On appelle **quotient de la fonction f par la fonction g** , que l'on note $\frac{f}{g}$, la fonction définie pour tout x de l'ensemble $D_f \cap D_g$ privé des valeurs annulant g , par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- On appelle **fonction composée de f suivie de g** , que l'on note $g \circ f$, la fonction définie pour tout x tel que

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}, \text{ par :}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

2 Étude des variations

→ Définitions

• Soit une fonction f définie sur un intervalle I (ouvert ou fermé, borné ou non). Si, quels que soient x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$,

• $f(x_1) \leq f(x_2)$, on dit que f est **croissante** sur I ;

• $f(x_1) < f(x_2)$, on dit que f est **strictement croissante** sur I ;

• $f(x_1) \geq f(x_2)$, on dit que f est **décroissante** sur I ;

• $f(x_1) > f(x_2)$, on dit que f est **strictement décroissante** sur I ;

• $f(x_1) = f(x_2)$, on dit que f est **constante** sur I .

• Lorsque f est croissante sur I ou décroissante sur I , on dit que f est **monotone** sur I . Lorsque f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I , on dit que f est **strictement monotone** sur I .

→ Théorèmes

1. Si f et g varient dans le même sens sur I (c'est-à-dire qu'elles sont simultanément croissantes ou décroissantes), leur somme $f + g$ varie sur I dans le même sens que f et g .

2. Si f et g varient dans le même sens respectivement sur les intervalles I et J (l'ensemble $f(I)$ des images des éléments de I étant inclus dans J), ce que l'on peut traduire par : pour tout x de I , $f(x) \in J$, la fonction composée $g \circ f$ est croissante sur I .

Si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante sur les intervalles correspondants I ou J , la fonction composée $g \circ f$ est décroissante sur I .

• Applications

Connaissant les variations de f , on déduira facilement les variations de $g \circ f$ lorsque g est l'une des fonctions suivantes dont on connaît les variations :

$$x \mapsto ax + b ; \quad x \mapsto |x| ; \quad x \mapsto x^2 ;$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} ; \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

On obtient les énoncés fondamentaux suivants :

a) $x \mapsto af(x) + b$ varie dans le même sens que f si $a > 0$, en sens contraire si $a < 0$.

b) $x \mapsto |f(x)|$ et $x \mapsto [f(x)]^2$ varient dans le même sens que f sur tout intervalle où $f \geq 0$ et en sens contraire sur tout intervalle où $f \leq 0$.

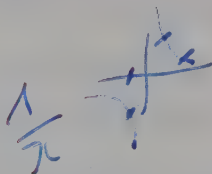
c) $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ et f varient en sens contraire sur tout intervalle où f ne s'annule pas et garde un signe constant.

d) $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ varie dans le même sens que f sur tout intervalle où $f \geq 0$.

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 $f: x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$



a) f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. V F

b) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{2\}$. V F

c) $-2 \leq f(x) \leq 0$ sur $[-1; 1]$. V F

→ Corrigé p. 16

2 $f: x \mapsto -x^2 + 2x - 3$ qu'on peut écrire $-(x-1)^2 - 2$.

a) f est strictement décroissante sur $[1; 2]$ et strictement croissante sur $[-2; 1]$. V F

b) Sur $[1; 2]$, on a $f(2) \leq f(x) \leq f(1)$. V F

c) Sur $[-2; 2]$, on a $f(-2) \leq f(x) \leq f(2)$. V F

d) Sur $[-2; 2]$, on a $-11 \leq f(x) \leq -2$. V F

e) Un tableau de variations permet de montrer le résultat précédent. V F

→ Corrigé p. 16

3 $f: x \mapsto \frac{x^5}{x^4 - x^2}$

a) L'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. V F

b) $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$. V F

c) f est paire. V F

d) f est impaire. V F

→ Corrigé p. 16

4 $f: x \mapsto \frac{|x|}{2|x| + 1}$

a) L'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. V F

b) $D_f = \mathbb{R}$. V F

c) f est paire. V F

d) f est impaire. V F

→ Corrigé p. 16

5 $f: x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

a) f a pour période π .

V F

b) f a pour période $\frac{\pi}{2}$.

V F

→ Corrigé p. 16

6 $f: x \mapsto \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{3}$.

a) f a pour période 6π .

V F

b) f a pour période 12π .

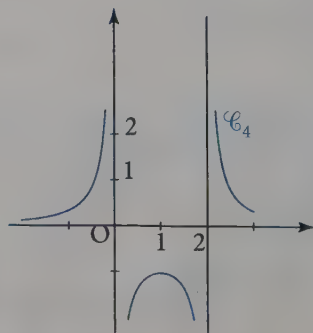
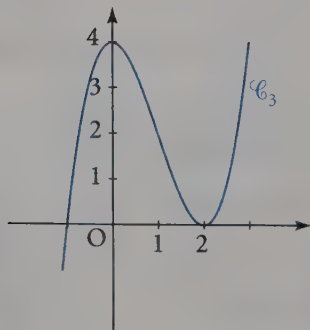
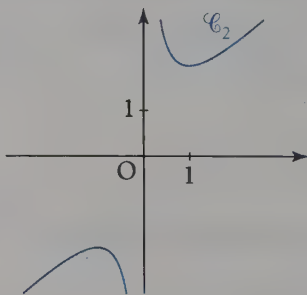
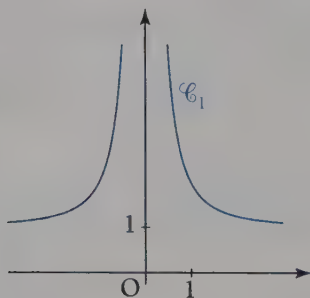
V F

→ Corrigé p. 17

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Axe ou centre de symétrie d'une courbe

7 Soit les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ ci-dessous, dans un repère orthogonal :



Ce sont les représentations graphiques respectivement des fonctions :

- $f_1 : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2}$ définie sur \mathbb{R}^* ;
- $f_2 : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* ;
- $f_3 : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$ définie sur \mathbb{R} ;
- $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x(x-2)}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$.

Démontrer que ces courbes admettent un axe ou un centre de symétrie. (Pour \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 , considérer deux points M et M' de la courbe, d'abscisses respectives $1+h$ et $1-h$.)

→ Corrigé p. 17

Intersection de deux courbes

- 8** 1. Soit les fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 + x - 1 \quad \text{définie sur } [-2 ; 2] ;$$

$$g : x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \quad \text{définie sur } [-2 ; 2] - \{1\}.$$

À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, construire un tableau donnant $f(x)$; $g(x)$ et $f(x) - g(x)$. (On donnera à x les valeurs -2 ; $-1,90$; $-1,80$; ... $1,80$; $1,90$; 2).

À l'aide d'un grapheur ou d'une calculatrice graphique, construire les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentant les fonctions f et g .

2. Par lecture graphique ou en étudiant la différence $f(x) - g(x)$ donnée dans le tableau précédent, que peut-on dire de l'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ?

3. a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

b) En déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

→ Corrigé p. 18

Opérations sur les fonctions

- 9** Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} .

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x + 3$.

$$b) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$$

$$\text{et } g(x) = 3x - 1.$$

→ Corrigé p. 21

10 Soit les fonctions :

$$f: x \mapsto x + 3 \quad \text{définie sur } D_f = \mathbb{R};$$

$$g: x \mapsto \frac{x}{x-2} \quad \text{définie sur } D_g = \mathbb{R} - \{2\}.$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $g \circ f$ est définie et calculer $(g \circ f)(x)$.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f \circ g$ est définie et calculer $(f \circ g)(x)$.

→ Corrigé p. 22

11 Mêmes questions qu'à l'exercice **10**, avec les fonctions :

$$f: x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\};$$

$$g: x \mapsto \frac{1}{x-1} \quad \text{définie sur } \mathbb{R} - \{1\}.$$

→ Corrigé p. 23

12 ★ **1.** Montrer que toute fonction f définie sur \mathbb{R} est la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i définies sur \mathbb{R} .

| Indication : On calculera $p(x)$ et $i(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

2. Application

Décomposer la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ définie sur \mathbb{R} en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur \mathbb{R} .

→ Corrigé p. 24

13 ★★ **Somme de deux fonctions sinusoïdales**

Soit $f, g, f + g$ les fonctions du temps t ($t \geq 0$) définies par :

$$f(t) = 4 \sin t; \quad g(t) = 2 \sin 3t; \quad (f + g)(t) = 4 \sin t + 2 \sin 3t.$$

1. À l'aide d'un tableur, construire un tableau de valeurs des fonctions $f, g, f + g$ pour $t \in [0; 2\pi]$.

À l'aide d'un grapheur, construire les courbes représentant les fonctions précédentes pour $t \in [0; 2\pi]$, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Le graphique montre que les courbes admettent un centre de symétrie. Justifier l'existence de ce centre de symétrie.

3. a) Si k est un entier naturel non nul quelconque, montrer que $k \cdot 2\pi$ est une période des fonctions f , g et $f + g$.

b) Comment obtient-on les autres parties des courbes représentant f , g et $f + g$?

→ Corrigé p. 25

Emploi des théorèmes sur les variations d'une fonction

14 Étudier les variations de la fonction :

$$f: x \mapsto \frac{1}{x} - x + 2 \text{ définie sur }]0; +\infty[.$$

→ Corrigé p. 27

15 Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 + x - 2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Mettre $f(x)$ sous la forme $(x + \alpha)^2 + \beta$, α et β étant des constantes que l'on calculera.

2. Étudier les variations de f .

→ Corrigé p. 27

16 Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x+2}{3-x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

1. Mettre $f(x)$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{3-x}$, α et β étant des constantes que l'on calculera.

2. Étudier les variations de f .

→ Corrigé p. 28

17 Soit les fonctions f et g , définies sur \mathbb{R} par :

$$f: x \mapsto 2x - 1 \text{ et } g: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 2}.$$

1. Calculer $(g \circ f)(x)$.

2. Étudier les variations de $g \circ f$.

→ Corrigé p. 29

Variations d'un produit de deux fonctions

18 **1.** En utilisant les définitions (cf. cours), montrer que le produit de deux fonctions positives strictement croissantes sur un intervalle I est une fonction strictement croissante sur I , et que le produit de deux fonctions positives strictement décroissantes sur I est une fonction strictement décroissante sur I .

2. Application

Étudier les variations de :

a) $h : x \mapsto (2x + 1)\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$;

b) $k : x \mapsto (-x + 2)x^2$ sur $] -\infty ; 0]$.

→ Corrigé p. 29

Applications

- 19** L'unité de résistance électrique est l'ohm, notée Ω .

On fait passer un courant électrique dans deux résistances en parallèle R_1 et R_2 , tout se passe alors comme s'il y a une seule résistance R telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

On suppose $R_1 = 5 \Omega$ et on fait varier R_2 de 1Ω à 5Ω .

Étudier les variations de R .

→ Corrigé p. 30

- 20** ★ Le directeur d'une salle de spectacles cherche à réaliser un revenu maximal. Quand le prix de la place est 8 €, il y a 800 spectateurs. Statistiquement, le directeur constate que chaque hausse du prix de la place de 1 € entraîne une diminution du nombre de spectateurs de 10 personnes.

1. On appelle x le prix d'une place et n le nombre de spectateurs.

Calculer n en fonction de x .

2. a) Calculer le revenu r obtenu avec n spectateurs payant la place à x €.

b) Mettre le revenu r sous la forme : $r = a(x + \alpha)^2 + \beta$,
 a , α et β étant des constantes que l'on calculera.

c) Étudier les variations de r quand x varie de 6 à 60.

3. Combien le directeur doit-il faire payer la place pour obtenir le revenu maximal ? Quel est alors ce revenu et quel est le nombre de spectateurs correspondant à ce revenu ?

→ Corrigé p. 30

- 21** ★ Pour une entreprise dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total $C(x)$ de fabrication de x unités (en euros) est :

$$C(x) = \frac{x^3}{100} + x + 100\,000.$$

1. Étudier les variations de la fonction C définie sur $[0 ; 300]$ par :

$$C : x \mapsto \frac{x^3}{100} + x + 100\,000$$

2. Compléter le tableau suivant :

x	0	50	100	150	200	250	300
$C(x)$							

3. Représenter graphiquement la fonction C sur papier millimétré.

4. Le prix de vente de l'unité est 1 100 €.

a) Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités.

b) Représenter sur le graphique précédent la fonction :

$$R: x \mapsto R(x) \text{ définie sur } [0; 300].$$

5. Le bénéfice pour x unités fabriquées et vendues est (en euros) :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

a) Déterminer graphiquement les nombres d'unités vendues pour lesquels le bénéfice est nul.

b) Dans quel intervalle doit varier x pour que l'entreprise soit bénéficiaire ?

c) À l'aide du graphique, donner une estimation du nombre d'unités vendues pour lequel le bénéfice est maximal.

➔ Corrigé p. 31

Fonctions associées à une fonction

22 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto -1 + \sqrt{4 - x^2}$ définie sur $[-2; 2]$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique \mathcal{C} dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que \mathcal{C} est un demi-cercle de centre $A(0; 1)$ et de rayon 2.

3. Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} avec la droite $(O; \vec{i})$.

4. On considère la famille de fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 associées à la fonction f , définies par :

$$f_1(x) = |f(x)|;$$

$$f_2(x) = f(x) + 2;$$

$$f_3(x) = f(x + 2);$$

$$f_4(x) = 2f(x);$$

$$f_5(x) = f(2x).$$

À partir de la courbe \mathcal{C} , construire les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$, représentant respectivement f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 (on fera des figures distinctes pour chacune des courbes déduites de \mathcal{C}).

➔ Corrigé p. 33

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1 a) Vrai.** Si $2 < x_1 < x_2$ ou $x_1 < x_2 < 2$, on trouve :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3(x_1 - x_2)}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} < 0.$$

b) Faux. On a, par exemple, $f(3) > f(-1)$.

c) Vrai. f est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$ donc $f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$.

- 2 a) Vrai.** Calculez $f(x_2) - f(x_1)$.

b) Vrai. f est strictement décroissante sur $[1 ; 2]$ donc $f(2) \leq f(x) \leq f(1)$.

c) Faux. $f(-2) = -11$, $f(2) = -3$, $f(1) = -2$, $-2 \notin [-11 ; -3]$.

d) Faux. Si $-2 \leq x \leq 2$, alors $-3 \leq x \leq 1$, d'où $0 \leq |x - 1| \leq 3$.

Par suite $0 \leq (x - 1)^2 \leq 9$, $-9 \leq -(x - 1)^2 \leq 0$, $-11 \leq -(x - 1)^2 - 2 \leq -2$.

e) Vrai.

x	-2	1	2
$f(x)$	-11	-2	-3

ce qui montre que $-11 \leq f(x) \leq -3$.

- 3 a) Faux.** $x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 1)(x + 1) = 0.$$

b) Vrai.

c) Faux. Pour tout x de D_f , $f(-x) = -f(x)$.

d) Vrai.

- 4 a) Faux.** Pour tout x de \mathbb{R} , on a $|x| \geq 0$ donc $2|x| + 1 \geq 1$.

b) Vrai. $2|x| + 1$ ne s'annule pas donc $D_f = \mathbb{R}$.

c) Vrai. Pour tout x de \mathbb{R} , $f(-x) = f(x)$.

d) Faux.

- 5 a) Vrai.** Pour tout x de \mathbb{R} , on a $f(x + \pi) = f(x)$.

b) Faux. On n'a pas, pour tout x de \mathbb{R} , $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$.

6 a) Faux. On n'a pas, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x + 6\pi) = f(x)$.

b) Vrai. Pour tout x de \mathbb{R} , on a $f(x + 12\pi) = f(x)$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

7 On se reportera aux figures données dans l'énoncé.

• $f_1(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* . Il apparaît sur le graphique \mathcal{C}_1 donné que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de \mathcal{C}_1 .

Justification :

Pour tout x non nul, $f_1(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = f_1(x)$ donc f_1 est une fonction paire. \mathcal{C}_1 admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

• $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* . Il apparaît sur \mathcal{C}_2 que l'origine O du repère est un centre de symétrie de \mathcal{C}_2 .

Justification :

Pour tout x non nul, $f_2(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f_2(x)$ donc f_2 est une fonction impaire. \mathcal{C}_2 admet O pour centre de symétrie.

• $f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur \mathbb{R} . Il semble que le point $I(1; 2)$ soit un centre de symétrie de \mathcal{C}_3 .

Justification :

Soit les points $M(1 + h; f_3(1 + h))$ et $M'(1 - h; f_3(1 - h))$, $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_3(1 + h) &= (1 + h)^3 - 3(1 + h)^2 + 4 \\ &= 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3(1 + 2h + h^2) + 4 \\ &= 2 - 3h + h^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(1 - h) &= (1 - h)^3 - 3(1 - h)^2 + 4 \\ &= 1 - 3h + 3h^2 - h^3 - 3(1 - 2h + h^2) + 4 \\ &= 2 + 3h - h^3. \end{aligned}$$

Les coordonnées du milieu de $[MM']$ sont :

$$\left(\frac{1+h+1-h}{2}; \frac{2-3h+h^3+2+3h-h^3}{2} \right) = (1; 2).$$

Ce sont les coordonnées de I. Donc M et M' sont symétriques par rapport à I.

• $f_4(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq 2$. La droite \mathcal{D} d'équation $x = 1$ semble être un axe de symétrie de \mathcal{C}_4 .

Justification :

Soit les points $M(1+h; f_4(1+h))$ et $M'(1-h; f_4(1-h))$; la fonction f_4 n'étant pas définie pour $x = 0$ et $x = 2$, nous devons supposer $1+h$ et $1-h$ différents de 0 et 2 donc $h \neq -1$ et $h \neq 1$. Dans ces conditions :

$$f_4(1+h) = \frac{1}{(1+h)(-1+h)} = \frac{1}{h^2-1};$$

$$f_4(1-h) = \frac{1}{(1-h)(-1-h)} = \frac{1}{h^2-1}.$$

Si $h = 0$, les points M et M' sont confondus et, comme leur abscisse est 1, ils appartiennent à D.

Si $h \neq 0$, M et M' sont distincts. Ils ont même ordonnée $\frac{1}{h^2-1}$ donc ils déterminent une droite (MM') parallèle à l'axe des abscisses. Le milieu I de $[MM']$ a pour abscisse $\frac{1+h+1-h}{2} = 1$ donc $I \in D$. Par suite M et M' sont symétriques par rapport à D.

8 1. $f: x \mapsto x^2 + x - 1$ définie sur $[-2; 2]$

$g: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ définie sur $[-2; 2] - \{1\}$.

Construction des tableaux à l'aide du tableur Excel

On introduit les premières valeurs de x ainsi que les formules qui définissent $f(x)$, $g(x)$, $f(x) - g(x)$:

	A	B	C
1	x	-2	=B1+0,1
2	f(x)=x^2+x-1	=B1^2+B1-1	=C1^2+C1-1
3	g(x)=(x+1)/(x-1)	=(B1+1)/(B1-1)	=(C1+1)/(C1-1)
4	f(x)-g(x)	=B2-B3	=C2-C3

On recopie vers la droite avec un cliquer/glisser jusqu'à AP. On obtient le tableau :

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2,00	-1,90	-1,80	-1,70	-1,60	-1,50
2	$f(x)=x^2+x-1$	1,00	0,71	0,44	0,19	-0,04	-0,25
3	$g(x)=(x+1)/(x-1)$	0,33	0,31	0,29	0,26	0,23	0,20
4	$f(x)-g(x)$	0,67	0,40	0,15	-0,07	-0,27	-0,45

H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
-1,40	-1,30	-1,20	-1,10	-1,00	-0,90	-0,80	-0,70	-0,60	-0,50
-0,44	-0,61	-0,76	-0,89	-1,00	-1,09	-1,16	-1,21	-1,24	-1,25
0,17	0,13	0,09	0,05	0,00	-0,05	-0,11	-0,18	-0,25	-0,33
-0,61	-0,74	-0,85	-0,94	-1,00	-1,04	-1,05	-1,03	-0,99	-0,92

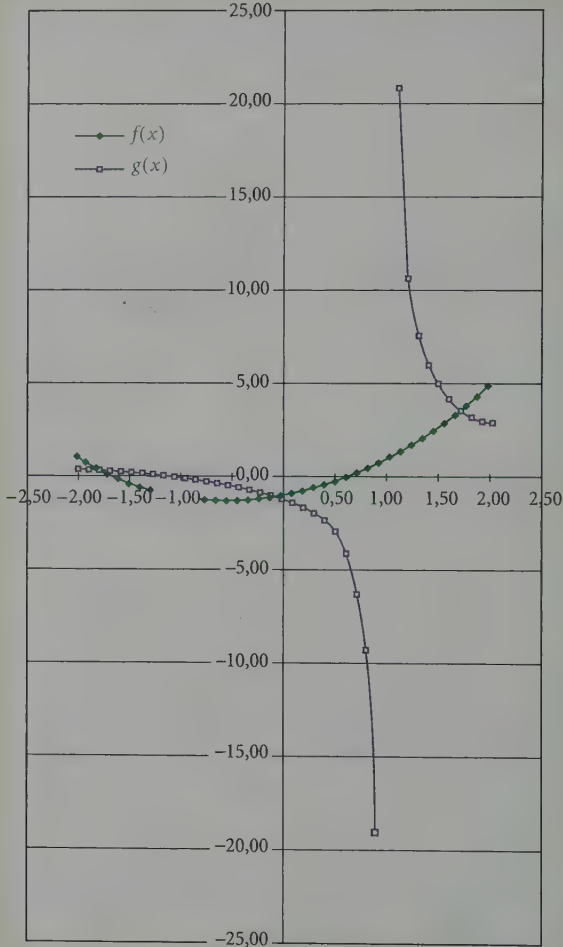
R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40
-1,24	-1,21	-1,16	-1,09	-1,00	-0,89	-0,76	-0,61	-0,44
-0,43	-0,54	-0,67	-0,82	-1,00	-1,22	-1,50	-1,86	-2,33
-0,81	-0,67	-0,49	-0,27	0,00	0,33	0,74	1,25	1,89

AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30
-0,25	-0,04	0,19	0,44	0,71	1,00	1,31	1,64	1,99
-3,00	-4,00	-5,67	-9,00	-19,00		21,00	11,00	7,67
2,75	3,96	5,86	9,44	19,71		-19,69	-9,36	-5,68

AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
2,36	2,75	3,16	3,59	4,04	4,51	5,00
6,00	5,00	4,33	3,86	3,50	3,22	3,00
-3,64	-2,25	-1,17	-0,27	0,54	1,29	2,00

Les deux dernières cases de la colonne AF sont vides car la fonction g n'est pas définie en 1.

Construction des graphiques à l'aide du grapheur Excel



- Sélectionner les lignes qui comportent les données : la ligne comportant les valeurs prises par la variable et les lignes contenant les valeurs prises par les différentes fonctions dont on veut obtenir les représentations graphiques.
- Cliquer sur le bouton Assistant Graphique.
- Dans la fenêtre type de graphique, choisir : Nuages de points (cliquer sur Nuages de points).
- Dans la fenêtre sous-type de graphique, choisir : Nuage de points reliés par une courbe lissée.

- Cliquer sur le bouton : Suivant.
- Cliquer sur Série.
- Dans la fenêtre Série, cliquer sur Série 1.
- Cliquer dans la fenêtre Nom et taper le nom de la fonction.
- Renouveler pour les différentes fonctions (les différentes séries).
- Cliquer sur Suivant.
- Cliquer sur Terminer, les graphiques s'affichent.

2. Par lecture graphique, on constate que \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont 3 points d'intersection d'abscisses proches de $-1,70$; 0 ; $1,70$.

Le tableau donnant $f(x) - g(x)$ nous montre que :

$f(x) - g(x)$ est voisin de 0 pour x voisin de $-1,70$ ou $1,70$.

$f(x) - g(x) = 0$ pour $x = 0$.

Les points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont pour coordonnées :

$(-1,70 ; 0,2)$, $(0 ; -1)$, $(1,70 ; 3,6)$.

3. a) Si $x \neq 1$, on a $x^2 + x - 1 = \frac{x+1}{x-1}$ si et seulement si l'on a successivement :

$$(x^2 + x - 1)(x - 1) = x + 1$$

$$x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 = x + 1$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

Ces nombres appartiennent à $[-2 ; 2] - \{1\}$. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

$\{-\sqrt{3} ; 0 ; \sqrt{3}\}$.

b) Si $x = -\sqrt{3}$, $f(-\sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3} - 1 = 2 - \sqrt{3}$.

Si $x = 0$, $f(0) = -1$.

Si $x = \sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} - 1 = 2 + \sqrt{3}$.

Les points d'intersection des deux courbes sont les points de coordonnées :

$(-\sqrt{3} ; 2 - \sqrt{3})$, $(0 ; -1)$, $(\sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3})$.

9 $x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$ que l'on note $(g \circ f)(x)$.

$(g \circ f)(x)$ est défini si et seulement si :

$$(I) \quad \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g. \end{cases}$$

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x + 3$.

f et g sont définies sur \mathbb{R} donc les conditions (I) précédentes sont vérifiées pour tout x réel et l'on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 2(2x^2 - 3x + 1) + 3 \\ &= 4x^2 - 6x + 5.\end{aligned}$$

$g \circ f$ est la fonction : $x \mapsto 4x^2 - 6x + 5$, définie sur \mathbb{R} .

De même, $(f \circ g)(x)$ est défini si et seulement si :

$$(II) \quad \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$$

Comme f et g sont définies sur \mathbb{R} , les conditions (II) sont vérifiées pour tout x réel et l'on a :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(2x + 3) = 2(2x + 3)^2 - 3(2x + 3) + 1 \\ &= 2(4x^2 + 12x + 9) - 6x - 9 + 1 \\ &= 8x^2 + 18x + 10.\end{aligned}$$

$f \circ g$ est la fonction : $x \mapsto 8x^2 + 18x + 10$, définie sur \mathbb{R} .

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$ et $g(x) = 3x - 1$.

f et g sont définies sur \mathbb{R} , donc comme précédemment, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur \mathbb{R} et l'on a :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g\left(\frac{x^2}{x^2 + 2}\right) = \frac{3x^2}{x^2 + 2} - 1 \\ &= \frac{3x^2 - x^2 - 2}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(3x - 1) = \frac{(3x - 1)^2}{(3x - 1)^2 + 2} \\ &= \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 6x + 3}.\end{aligned}$$

Remarque : Si l'on demandait d'étudier le signe de $(f \circ g)(x)$, il serait préférable de s'arrêter à $(f \circ g)(x) = \frac{(3x - 1)^2}{(3x - 1)^2 + 2}$.

10 $f: x \mapsto x + 3$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

$g: x \mapsto \frac{x}{x - 2}$ est définie sur $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$.

1. $(g \circ f)(x)$ est défini si et seulement si : $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

c'est-à-dire pour $x + 3 \neq 2$ donc $x \neq -1$.

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $g \circ f$ est définie et l'on a :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x+3) = \frac{x+3}{x+3-2} = \frac{x+3}{x+1}$$

$g \circ f$ est la fonction : $x \mapsto \frac{x+3}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

2. $(f \circ g)(x)$ est défini si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} \text{ (ce qui est vrai).} \end{cases}$$

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$, $f \circ g$ est définie et l'on a :

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{x}{x-2} + 3 = \frac{4x-6}{x-2}$$

$f \circ g$ est la fonction : $x \mapsto \frac{4x-6}{x-2}$, définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

11 $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

$g: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

1. $(g \circ f)(x)$ est défini si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{x} \neq 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x}{1-x}$.

$g \circ f$ est la fonction : $x \mapsto \frac{x}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$.

Remarque : L'ensemble de définition de $g \circ f$ est $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ bien que l'expression $\frac{x}{1-x}$ soit définie pour $x = 0$.

2. $(f \circ g)(x)$ est défini si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{1}{x-1} \neq 0 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \neq 1$, $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = x-1$.

$f \circ g$ est la fonction : $x \mapsto x - 1$, définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

Remarque : L'ensemble de définition de $f \circ g$ est $\mathbb{R} - \{1\}$ bien que l'expression $x - 1$ soit définie pour $x = 1$.

12 1. Soit une fonction f quelconque définie sur \mathbb{R} .

Analyse

Si $f = p + i$, p étant une fonction paire et i une fonction impaire, définies sur \mathbb{R} , alors pour tout x réel :

$$(1) \quad f(x) = p(x) + i(x)$$

$$f(-x) = p(-x) + i(-x).$$

Puisque p est paire : $p(-x) = p(x)$; puisque i est impaire : $i(-x) = -i(x)$.

Donc :

$$(2) \quad f(-x) = p(x) - i(x).$$

En additionnant membre à membre (1) et (2) et en divisant par 2 :

$$(3) \quad p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

En retranchant membre à membre (1) et (2) et en divisant par 2 :

$$(4) \quad i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Synthèse

Les fonctions p et i définies sur \mathbb{R} par (3) et (4) répondent-elles à la question ?

• On a pour tout x réel :

$$p(x) + i(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$$

donc $f = p + i$;

• la fonction p est paire car pour tout x de \mathbb{R} :

$$p(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = p(x);$$

• la fonction i est impaire car pour tout x de \mathbb{R} :

$$i(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -i(x).$$

2. Application

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ est définie sur \mathbb{R} car :

$$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x + 1)^2 + 4 > 0.$$

$$p(x) = \frac{1}{2}[\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}].$$

$$i(x) = \frac{1}{2}[\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}].$$

La fonction f est la somme de p qui est paire et i impaire définies sur \mathbb{R} .

13 1. En suivant les instructions données à l'ex. 2 :

	A	B	C
1	t	0	=B1+0,2
2	$f(t)=4\sin(t)$	=4*SIN(B1)	=4*SIN(C1)
3	$g(t)=2\sin(3t)$	=2*SIN(3*B1)	=2*SIN(3*C1)
4	$(f+g)(t)=4\sin(t)+2\sin(3t)$	=B2+B3	=C2+C3

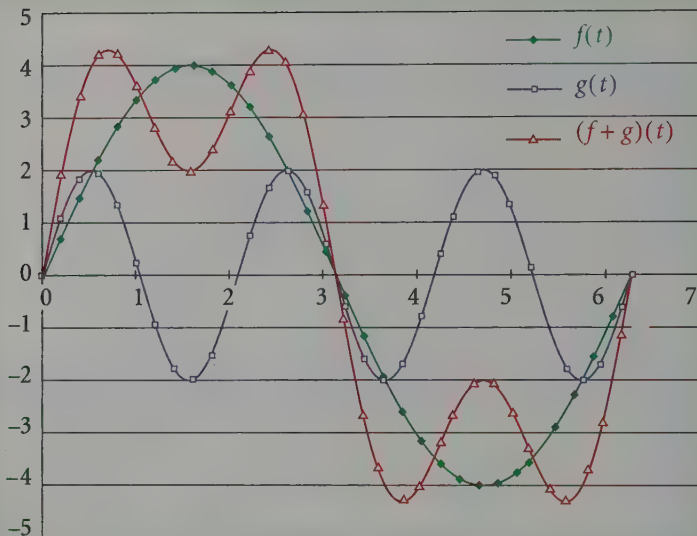
En recopiant vers la droite jusqu'à AG et en introduisant la valeur $2*\text{PI}()$ dans la case AH, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
2	$f(t)=4\sin(t)$	0	0,795	1,558	2,259	2,869	3,366
3	$g(t)=2\sin(3t)$	0	1,129	1,864	1,948	1,351	0,282
4	$(f+g)(t)=4\sin(t)+2\sin(3t)$	0	1,924	3,422	4,206	4,22	3,648

H	I	J	K	L	M	N	O	P
1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8
3,728	3,942	3,998	3,895	3,637	3,234	2,702	2,062	1,34
-0,885	-1,743	-1,992	-1,546	-0,559	0,623	1,587	1,997	1,709
2,843	2,199	2,006	2,35	3,078	3,857	4,289	4,059	3,049

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6
0,564	-0,233	-1,022	-1,77	-2,447	-3,027	-3,486	3,806	3,975
0,824	-0,349	-1,4	-1,962	-1,839	-1,073	0,067	1,184	1,887
1,389	-0,582	-2,422	-3,732	-4,286	-4,1	-3,419	-2,622	-2,087

Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6	6,2	6,283
3,985	3,836	3,534	3,091	2,525	1,858	-1,118	-0,332	0,000
1,931	1,301	0,216	0,945	1,775	1,985	-1,502	-0,494	0,000
-2,053	-2,535	-3,318	-4,036	-4,3	-3,844	-2,62	-0,826	0,000



2. Nous constatons graphiquement que le point de coordonnées $(3,14 ; 0)$ paraît être centre de symétrie des courbes.

Or $\pi \approx 3,14$. Démontrons que le point $I(\pi ; 0)$ est bien un centre de symétrie des courbes.

Justification

Calculons $f(\pi - t)$ et $f(\pi + t)$:

$$f(\pi - t) = 4 \sin(\pi - t) = 4 \sin t$$

$$f(\pi + t) = 4 \sin(\pi + t) = -4 \sin t.$$

Soit les points $M(\pi - t ; 4 \sin t)$ et $M'(\pi + t ; -4 \sin t)$.

Les coordonnées du milieu de $[MM']$ sont :

$$\frac{x_M + x_{M'}}{2} = \pi ; \quad \frac{y_M + y_{M'}}{2} = 0.$$

Le milieu de $[MM']$ est donc I . Donc M et M' sont symétriques par rapport à I . Lorsque t décrit $[0 ; \pi]$, $\pi - t$ décrit $[0 ; \pi]$ et $\pi + t$ décrit $[\pi ; 2\pi]$. Les courbes représentant f sur $[0 ; \pi]$ et sur $[\pi ; 2\pi]$ sont symétriques par rapport à I . On montre, de même, que :

$$g(\pi - t) = -g(\pi + t) \quad \text{et} \quad (f+g)(\pi - t) = -(f+g)(\pi + t).$$

Les courbes représentant g et $(f+g)$ sur $[0 ; \pi]$ et sur $[\pi ; 2\pi]$ sont symétriques par rapport à I .

3. a) Le temps t varie sur $]0; +\infty[$. Si k est un entier naturel non nul quelconque :

$$f(t+k \cdot 2\pi) = 4 \sin(t+k \cdot 2\pi) = 4 \sin t = f(t)$$

$$g(t+k \cdot 2\pi) = 2 \sin(3t+k \cdot 6\pi) = 2 \sin 3t = g(t)$$

il en résulte que : $(f+g)(t+k \cdot 2\pi) = (f+g)(t)$.

Donc $k \cdot 2\pi$ est une période des fonctions f , g et $f+g$.

b) Soit les points $M(t; f(t))$ et $M'(t+k \cdot 2\pi; f(t+k \cdot 2\pi))$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(k \cdot 2\pi; 0)$ donc M a pour image M' par la translation de vecteur $k \cdot 2\pi \vec{i}$.

Il en est de même pour les points de coordonnées :

$$(t; g(t)) \text{ et } (t+k \cdot 2\pi; g(t+k \cdot 2\pi));$$

$$(t; (f+g)(t)) \text{ et } (t+k \cdot 2\pi; (f+g)(t+k \cdot 2\pi)).$$

Les autres parties des courbes représentant f , g et $f+g$ se déduisent de celles précédemment construites par des translations de vecteur $k \cdot 2\pi \vec{i}$.

14 $f: x \mapsto \frac{1}{x} - x + 2$ définie sur $]0; +\infty[$.

On peut remarquer que f est la somme de deux fonctions :

$$u: x \mapsto \frac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur }]0; +\infty[$$

$$v: x \mapsto -x + 2.$$

Rappelons que la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur \mathbb{R} si $a > 0$, et strictement décroissante sur \mathbb{R} si $a < 0$.

La fonction v est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

La somme $f = u + v$ de fonctions strictement décroissantes sur $]0; +\infty[$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ (cf. livret détachable).

15 **1.** Mettons $f(x) = x^2 + x - 2$ sous la forme $(x + \alpha)^2 + \beta$, α et β étant des constantes que nous allons calculer :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } x^2 + x - 2 = (x + \alpha)^2 + \beta = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

$$\text{donc } \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha^2 + \beta = -2 \end{cases}.$$

$$\text{On trouve } \alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = -2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}.$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

2. Nous indiquons dans le tableau les renvois aux théorèmes concernés (cf. résumé de cours) :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$			
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ (cf. théorème 2. b.)			
$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ (cf. théorème 2. a.)			

16 $f: x \mapsto \frac{x+2}{3-x}$ sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

1. Mettons $f(x)$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{3-x}$, α et β étant des constantes que nous allons calculer :

$$\text{pour tout } x \neq 3, \quad \frac{x+2}{3-x} = \alpha + \frac{\beta}{3-x} = \frac{\alpha(3-x) + \beta}{3-x} = \frac{-\alpha x + 3\alpha + \beta}{3-x}$$

$$\text{donc } \begin{cases} -\alpha = 1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases}. \text{ On trouve } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 5.$$

$$f(x) = -1 + \frac{5}{3-x}.$$

2.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$3-x$			
$\frac{1}{3-x}$ (cf. théorème 2. c.)			
$-1 + \frac{5}{3-x}$ (cf. théorème 2. a.)			

17 1. $f: x \mapsto 2x - 1$

$$g: x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 2}$$

Les fonctions f et g étant définies sur \mathbb{R} , $g \circ f$ est aussi définie sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(2x - 1) \\ &= \frac{(2x - 1)^2}{(2x - 1)^2 + 2} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

2. Nous allons déduire les variations de $g \circ f$ des variations de f et de g . f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On peut écrire $g(x) = \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2 + 2} = 1 - \frac{2}{x^2 + 2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	\searrow	0	\nearrow
$x^2 + 2$	\searrow	2	\nearrow
$\frac{1}{x^2 + 2}$	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow
$1 - \frac{2}{x^2 + 2}$	\searrow	0	\nearrow

• Prenons $I = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right]$ et $J = \left] -\infty ; 0 \right]$:

si $x \in I$ c'est-à-dire $x \leq \frac{1}{2}$, alors $2x - 1 \leq 0$, alors $f(x) \in J$, donc $f(I) \subset J$.

f est strictement croissante sur I et g est strictement décroissante sur J donc (cf. livret détachable) $g \circ f$ est strictement décroissante sur I .

• Prenons $I' = \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[$ et $J' = [0 ; +\infty[$:

si $x \in I'$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$, alors $2x - 1 \geq 0$, alors $f(x) \in J'$, donc $f(I') \subset J'$.

f et g sont strictement croissantes respectivement sur I' et J' donc $g \circ f$ est strictement croissante sur I' .

- 18** 1. Soit f et g deux fonctions **positives** et strictement croissantes sur I . Quels que soient x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ et } g(x_1) < g(x_2).$$

Comme $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur I , on peut multiplier membre à membre ces inégalités :

$$f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$$

donc fg est strictement croissante sur I .

• Si f et g sont **positives** et strictement décroissantes sur I , quels que soient x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$g(x_1) > g(x_2).$$

et en multipliant membre à membre :

$$f(x_1)g(x_1) > f(x_2)g(x_2)$$

donc fg est strictement décroissante sur I .

2. Application

a) Soit $h : x \mapsto (2x + 1)\sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto 2x + 1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont positives et strictement croissantes sur $[0 ; +\infty[$ donc h est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) Soit $k : x \mapsto (-x + 2)x^2$ définie sur $]-\infty ; 0]$.

Les fonctions $x \mapsto -x + 2$ et $x \mapsto x^2$ sont positives et strictement décroissantes sur $]-\infty ; 0]$, donc k est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

19 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R_2} = 0,2 + \frac{1}{R_2}$.

Utilisons les théorèmes sur les variations d'une fonction (cf. cours) :

R_2	1	5
$\frac{1}{R_2}$	1	0,2
$\frac{1}{R} = 0,2 + \frac{1}{R_2}$	1,2	0,4
R	$\frac{1}{1,2} \approx 0,83$	$\frac{1}{0,4} = 2,5$

R est strictement croissante sur $[1 ; 5]$.

- 20** 1. Chaque hausse du prix de la place de 1 € entraîne une diminution du nombre de spectateurs de 10 personnes donc l'accroissement de n est proportionnel à l'accroissement de la variable x , ce qui caractérise une fonction affine (voir classe de Seconde) : $n = ax + b$.

$$\text{Or } a = \frac{n_2 - n_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10}{1} = -10. \text{ D'où } n = -10x + b.$$

Pour $x = 8$, $n = 800$ donc :

$$800 = -10 \times 8 + b, \text{ soit } b = 800 + 80 = 880.$$

$$\text{D'où } n = -10x + 880.$$

- 2. a)** Le revenu obtenu est :

$$r = nx = (-10x + 880)x, \text{ soit } r = -10x^2 + 880x.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -10x^2 + 880x &= a(x + \alpha)^2 + \beta \\ &= a(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) + \beta \\ &= ax^2 + 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} a &= -10 \\ 2a\alpha &= 880 \\ a\alpha^2 + \beta &= 0. \end{cases}$$

On trouve :

$$a = -10, \alpha = -44, \beta = 19\,360.$$

$$\text{Donc : } r = -10(x - 44)^2 + 19\,360.$$

- c)** Étudions les variations de $r = -10(x - 44)^2 + 19\,360$ quand le prix des places x varie de 6 à 60 :

x	6	44	60
$x - 44$	-38	0	16
$(x - 44)^2$	1 444	0	256
$-10(x - 44)^2 + 19\,360$	4 920	19 360	16 800

Le directeur doit vendre les places 44 € pour avoir un revenu maximal de 19 360 €. Le nombre de spectateurs correspondant est :

$$n = -10 \times 44 + 880 = 440.$$

- 21 1.** $C : x \mapsto \frac{x^3}{100} + x + 100\,000$ définie sur $[0 ; 300]$.

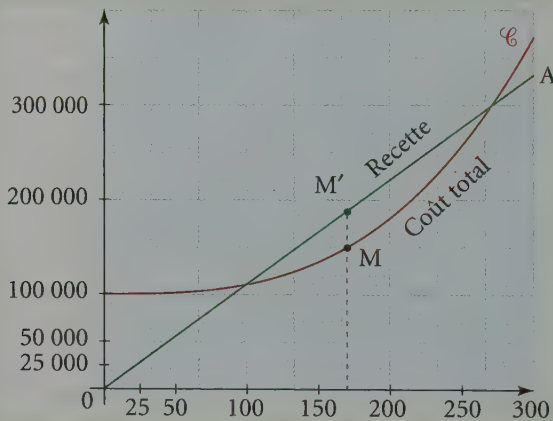
C est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0 ; 300]$:

$x \mapsto \frac{x^3}{100}$ et $x \mapsto x + 100\,000$; donc C est strictement croissante sur $[0 ; 300]$.

2. Tableau complété

x	0	50	100	150	200	250	300
$C(x)$	1 00 000	101 300	110 100	133 900	180 200	256 500	370 300

3.



C est représentée par la courbe \mathcal{C} sur la figure.

4. a) $R(x) = 1\,100x$.

b) La représentation graphique de R est le segment de droite $[OA]$, le point A ayant pour coordonnées $(300 ; 330\,000)$.

5. a) Le bénéfice pour x unités fabriquées et vendues est (en euros) :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

Ce bénéfice est nul pour les points d'intersection de $[OA]$ et de la courbe \mathcal{C} représentant C c'est-à-dire pour $x = 100$ et pour $x = 270$ environ.

b) L'entreprise est bénéficiaire lorsque $B(x) > 0$ c'est-à-dire $R(x) > C(x)$.
Ce qui a lieu pour $x \in]100 ; 270[$.

c) Soit M un point \mathcal{C} de d'abscisse x et M' le point de $[OA]$ de même abscisse que M . Supposons $100 < x < 270$.

$$B(x) = y_{M'} - y_M.$$

Cette différence est maximale aux environs de 190 unités de production.

Remarque : On vérifiera ce résultat en calculant $R(x) - C(x)$ pour x prenant les valeurs 180 ; 190 ; 200.

22 1. $f: x \mapsto -1 + \sqrt{4 - x^2}$ définie sur $[-2 ; 2]$.

Pour étudier les variations de f , appliquons les théorèmes donnant les variations d'une fonction (cf. cours) :

x	-2	0	
x^2	4	0	4
$4 - x^2$	0	4	0
$\sqrt{4 - x^2}$	0	2	0
$-1 + \sqrt{4 - x^2}$	-1	1	-1

2. Pour tout point $M(x ; y)$ du plan :

$$y = -1 + \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow y + 1 = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y + 1)^2 = 4 - x^2 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = 4 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = 4 \\ y \geq -1 \end{cases}, A \text{ ayant pour coordonnées } (0 ; -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

La courbe \mathcal{C} est donc le demi-cercle de centre A et de rayon 2 tel que $y \geq -1$.

3. Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} avec la droite $(O; \vec{i})$ sont les solutions de l'équation :

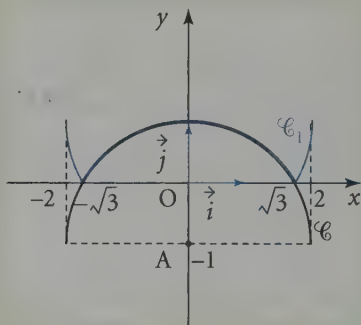
$$-1 + \sqrt{4 - x^2} = 0 \text{ équivaleute successivement à :}$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 1$$

$$4 - x^2 = 1 \text{ (dans } \mathbb{R}^+, a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2)$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$



4. • $f_1(x) = |f(x)|.$

- Si $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, le graphique nous montre que $f(x) \geq 0$ donc $f_1(x) = f(x)$; les parties de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C} correspondantes sont confondues.

- Si $-2 \leq x \leq -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3} \leq x \leq 2$, le graphique nous montre que $f(x) \leq 0$ donc $f_1(x) = -f(x)$; les parties de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C} correspondantes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Ox) .

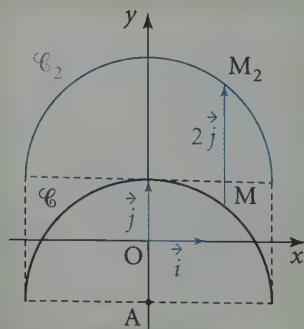
• $f_2(x) = f(x) + 2.$

Considérons les points : $M(x; f(x))$

et $M_2(x; f_2(x)).$

Ils ont même abscisse et $y_{M_2} - y_M = 2.$

Donc M a pour image M_2 par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

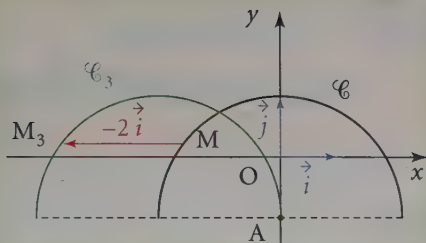


• $f_3(x) = f(x + 2).$

Considérons les points : $M(x + 2; f(x + 2))$ et $M_3(x; f_3(x)).$

Ils ont même ordonnée et $x_{M_3} - x_M = -2.$

Donc M a pour image M_3 par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.



$$\bullet f_4(x) = 2f(x).$$

Considérons les points :

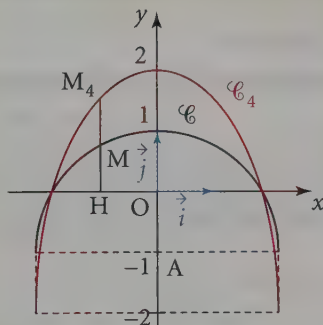
$M(x; f(x))$ et $M_4(x; f_4(x))$.

Les points M et M_4 ont même abscisse x .

Soit H le pied de la perpendiculaire menée de M à (Ox) .

$$\overrightarrow{HM_4} = 2\overrightarrow{HM}.$$

On obtient M_4 en multipliant l'ordonnée de M par 2.



$$\bullet f_5(x) = f(2x).$$

Considérons les points :

$M(2x; f(2x))$ et $M_5(x; f_5(x))$.

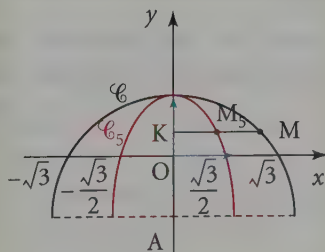
Les points M et M_5 ont même ordonnée

$$f_5(x) = f(2x).$$

Soit K le pied de la perpendiculaire menée de M à (Oy) .

$$\overrightarrow{KM_5} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KM}.$$

On obtient M_5 en multipliant l'abscisse de M par $\frac{1}{2}$.



Remarque : Nous avons déduit les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ de la courbe \mathcal{C} . On pourrait également déduire les variations des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 des variations de f . Mais une lecture graphique nous donne immédiatement ces variations.

Polynômes. Trinômes du second degré

1 Polynôme

→ Définition

Un **polynôme** ou une **fonction polynôme** est une fonction de la forme

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

définie sur \mathbb{R} . Les réels donnés a_0, a_1, \dots, a_n sont les coefficients de P et n est un entier naturel donné. Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n .

Le **polynôme nul** est la fonction : $x \mapsto 0$ définie sur \mathbb{R} .

→ Propriétés

- On démontre qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- On dit que deux polynômes P et Q sont **égaux** si pour tout x réel, $P(x) = Q(x)$. On démontre que les polynômes

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q : x \mapsto b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

sont égaux si et seulement si :

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

- Lorsque $P(a) = 0$, on dit que a est une **racine** de P ou de l'équation $P(x) = 0$.

2 Trinôme du second degré

→ Définition

Un **trinôme du second degré** est un polynôme de degré 2 c'est-à-dire une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

définie sur \mathbb{R} , les coefficients a, b, c étant des réels donnés ($a \neq 0$).

⇒ Racines

Les racines du trinôme f ou de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Ce sont :

- si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles.

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme ou de l'équation.

⇒ Factorisation et signe du trinôme

- Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x')(x - x'')$, est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle $[x'; x'']$ c'est-à-dire sur $]-\infty; x'[\cup]x''; +\infty[$ (en appelant x' la plus petite racine), du signe contraire de a entre les racines c'est-à-dire sur $]x'; x''[$.
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, est du signe de a pour $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel.

⇒ Variations et représentation graphique

Les théorèmes sur les variations d'une fonction donnés dans le chapitre 1 permettent d'obtenir les tableaux de variation suivants :

• Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

La fonction est décroissante puis croissante, son **minimum** étant

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

• Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			

La fonction est croissante puis décroissante, son **maximum** étant

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une **parabole de sommet** $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, d'**axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 On peut trouver sans calcul les racines des équations suivantes :

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$;

V F

b) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;

V F

c) $x^2 + 2x - 1 = 0$;

V F

d) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

V F

➔ Corrigé p. 45

2 Si $ax^2 + 15x + c = 0$ admet pour racines $\frac{4}{3}$ et $-\frac{1}{2}$:

a) $a = 18, c = 12$;

$$\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V F

b) $a = -18, c = 12$.

V F

➔ Corrigé p. 45

3 $ax^2 + 5x + a = 0$ ($a \neq 0$).

a) Cette équation n'admet aucune racine si et seulement si $a > \frac{5}{2}$.

V F

b) Cette équation n'admet aucune racine si et seulement si $a > \frac{5}{2}$ ou $a < -\frac{5}{2}$.

V F

➔ Corrigé p. 45

4 $f(x) = 1 + \frac{3(x+1)}{x^2+1}$. On a $f(x) > 0$ sur \mathbb{R} .

V F

➔ Corrigé p. 45

5 $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+3x-1}{x+1}}$. L'ensemble de définition est :

a) $]1; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.

V F

b) $] -\infty; -1[\cup [\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$.

V F

➔ Corrigé p. 45

$$6 \quad \begin{cases} f: \left[-\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[\\ x \mapsto 4x^2 + 4x + 2 \end{cases}$$

Soit $a \geq 1$.

Un antécédent de a est un nombre x de $\left[-\frac{1}{2}; +\infty[$ tel que $f(x) = a$.

a) f est bijective. V F

b) 3 admet pour antécédent $\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$. V F

c) 3 admet pour antécédent $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$. V F

d) Si $y \geq 1$, $f^{-1}(y) = \frac{-1 - \sqrt{y-1}}{2}$. V F

e) Si $y \geq 1$, $f^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{y-1}}{2}$. V F

➔ Corrigé p. 45

7 Si la parabole représentant $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ a pour sommet $S(-1; 3)$ et passe par $A(2; -3)$:

a) $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{7}{3}$; V F

b) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, $c = \frac{7}{3}$. V F

➔ Corrigé p. 45

8 Si la parabole représentant $f: ax^2 + bx + c$ passe par $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$ et tangente à $\mathcal{D}: y = -3x + 3$:

a) $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$; V F

b) $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. V F

➔ Corrigé p. 46

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Équations du second degré et équations s'y ramenant

9 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $7x^2 - 27x - 40 = 0$; b) $(x - 9)^2 = 49$;

c) $21x^2 - 49x = 0$; d) $(\sqrt{3} - 1)x^2 - (6 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} + 1 = 0$.

| Indication : Le discriminant de l'équation **d.** est $\Delta = 19 - 8\sqrt{3} = (4 - \sqrt{3})^2$.

→ Corrigé p. 46

10 1. Soit le trinôme $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admettant des racines x' et x'' distinctes ou non.

Calculer le produit $x'x''$.

2. Application

Chercher une racine évidente puis résoudre les équations :

a) $5x^2 + x - 6 = 0$;

b) $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

→ Corrigé p. 47

11 Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\frac{3x-2}{2x+5} - \frac{2x+5}{3x-2} = 0$; b) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$;

c) $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$.

| Indication : Pour les équations **b.** et **c.**, on posera $x^2 = X$.

→ Corrigé p. 47

12 1. Démontrer que quels que soient les réels A et B :

$$A = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B \\ A \geq 0. \end{cases}$$

2. **Application.** Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

a) $x - \sqrt{4x - 19} = 4$;

b) $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2$;

c) $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$.

| Indication : Pour l'équation **c.**, on posera $x^2 - 6x + 6 = X$.

→ Corrigé p. 48

- 13 On se propose de résoudre dans \mathbb{R}^2 le système :

$$(I) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96. \end{cases}$$

1. Montrer que si $(x_0; y_0)$ est une solution de (I), alors $(y_0; x_0)$ est aussi une solution de (I).

2. Résoudre le système (I).

→ Corrigé p. 49

Signe du trinôme du second degré

- 14 Résoudre dans \mathbb{R} : $\frac{15}{x+1} \geq 2x+3$.

→ Corrigé p. 50

- 15 Résoudre dans \mathbb{R} : $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1}$.

→ Corrigé p. 50

- 16 Trouver l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 1}}$$

→ Corrigé p. 51

- 17 m étant un réel donné, soit l'équation $mx^2 + 5x + m = 0$ (1).

Trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation (1) admet des racines.

→ Corrigé p. 51

Variations et représentations graphiques

- 18 1. Déterminer la parabole \mathcal{P} d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, f étant un trinôme du second degré tel que :

• \mathcal{P} passe par le point $A(2; 17)$;

• le sommet de \mathcal{P} est le point $S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{33}{8}\right)$.

2. Étudier les variations de f et construire \mathcal{P} .

3. Trouver les valeurs de m pour lesquelles l'équation $2x^2 + 5x - 1 - m = 0$ admet des racines.

→ Corrigé p. 52

19 ★ On considère la fonction $f_1 : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x$ définie sur \mathbb{R} .

1. Étudier les variations de f_1 et construire sa représentation graphique Γ_1 dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Dédire de la construction de Γ_1 les représentations graphiques Γ_2 et Γ_3 des fonctions $f_2 : x \mapsto \left| -\frac{1}{4}x^2 + x \right|$ et $f_3 : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 1$ définies sur \mathbb{R} .

[Indication : On remarquera que $f_3(x) = f_1(x+2)$.

→ Corrigé p. 54

20 ★ On considère la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 - 2x - 2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Étudier les variations de f_1 et construire sa représentation graphique Γ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = 2x + m$ ($m \in \mathbb{R}$).

a) Pour quelles valeurs de m la droite \mathcal{D} a-t-elle des points communs avec Γ ?

b) Dans le cas où Γ et \mathcal{D} ont des points communs M' et M'' distincts ou non, calculer les coordonnées du milieu I de $[M'M'']$.

c) Trouver l'ensemble des points I quand m varie.

→ Corrigé p. 55

Résolution graphique d'inéquations à 2 inconnues

21 1. Construire, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x + 1$ et la parabole \mathcal{P} d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - x$. \mathcal{D}

2. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

Étudier, suivant la position de M dans le plan, le signe de $y + x - 1$ et de $y - \frac{1}{2}x^2 + x$.

3. Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} 2y - x^2 + 2x > 0 \\ y + x - 1 < 0. \end{cases}$$

→ Corrigé p. 56

Problèmes du second degré

22 1. Montrer que l'équation $x^2 + 5x - 1 = 0$ admet deux racines distinctes x' et x'' non nulles.

2. Calculer la somme $S = x' + x''$ et le produit $P = x'x''$.

3. En déduire $(2x' - 1)(2x'' - 1)$ et $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$.

→ Corrigé p. 58

23 ★ 1. La distance parcourue par une pierre qu'on lâche dans un puits, au bout de t secondes est (en mètres) $\frac{1}{2}gt^2$, où g est l'accélération due à la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

La distance parcourue par le son au bout de θ secondes est (en mètres) : $\nu\theta$, où ν est la vitesse du son ($\nu = 340 \text{ m/s}$).

2. On lâche une pierre dans un puits de 85 m de profondeur. Au bout de combien de temps entend-on le bruit de contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits ?

3. On ignore la profondeur du puits. On sait que l'on entend le bruit du contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits 10 secondes après qu'on ait lâché la pierre.

Quelle est la profondeur du puits ?

→ Corrigé p. 58

24 ★ D'une façon générale, dire qu'une action de valeur initiale a_0 augmente de $x\%$ signifie, en appelant a la nouvelle valeur de l'action, que :

$$\frac{a - a_0}{a_0} = \frac{x}{100}$$

$$\frac{a}{a_0} - 1 = \frac{x}{100}$$

$$\frac{a}{a_0} = 1 + \frac{x}{100}$$

$$a = a_0 \left(1 + \frac{x}{100} \right).$$

Une action A augmente de $t\%$ la 1^{re} année et de $(t + 1)\%$ la 2^e année.

Une action B augmente de $t'\%$ la 1^{re} année et encore de $t'\%$ la 2^e année.

Au bout de 2 ans, les deux actions ont augmenté de 6%.

Calculer t et t' .

→ Corrigé p. 59

- 25** ★ Soit un carré ABCD de côté 10 cm. On construit les points I, J, K, L respectivement sur [AB], [BC], [CD], [DA] tels que :

$$AI = BJ = CK = DL = x \quad (0 \leq x \leq 10).$$

1. Montrer que le quadrilatère IJKL est un carré.
2. Calculer le périmètre p et l'aire \mathcal{A} du carré IJKL en fonction de x .
3. a) Étudier les variations de p et \mathcal{A} pour x variant de 0 à 10.
b) Pour quelle valeur de x , le périmètre du carré IJKL est-il minimal ?
Pour quelle valeur de x , l'aire du carré IJKL est-elle minimale ?

→ Corrigé p. 61

Factorisation d'un polynôme

- 26** ★ Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = 6x^3 - 23x^2 - 32x - 15.$$

1. Montrer que 5 est une racine de P.
2. Trouver un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x - 5)Q(x).$$

3. Peut-on factoriser le polynôme Q ?

→ Corrigé p. 62

- 27** ★ Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 29x + 21.$$

1. Montrer que 1 est une racine de P.
2. Trouver un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x - 1)Q(x).$$

3. Mettre sous forme d'un produit de facteurs du premier degré le polynôme P.

→ Corrigé p. 63

- 28** ★ Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = x^3 + mx^2 + mx + 1 \quad (m \text{ réel donné}).$$

1. Montrer que -1 est une racine de P.
2. Trouver un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x + 1)Q(x).$$

3. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de racines de P.
Calculer ces racines.

→ Corrigé p. 63

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) **Vrai.** $x' + x'' = \sqrt{2} + 1$ et $x'x'' = \sqrt{2}$. Les deux racines sont $\sqrt{2}$ et 1.
 b) **Vrai.** $x' + x'' = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $x'x'' = \sqrt{6}$. Les deux racines sont $-\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}$.
 c) **Faux.** On utilise les formules. Les racines sont $-1 \pm \sqrt{2}$.
 d) **Vrai.** $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$ de racine -2 .
- 2** a) **Faux.** $ax^2 + 15x + c = a\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = ax^2 - \frac{5}{6}ax - \frac{2}{3}a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 b) **Vrai.** d'où $-\frac{5}{6}a = 15$ et $-\frac{2}{3}a = c$.
- 3** a) **Faux.** $\Delta = 25 - 4a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > \frac{25}{4} \Leftrightarrow |a| > \frac{5}{2} \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$ ou $a < -\frac{5}{2}$.
 b) **Vrai.**
- 4** **Vrai.** $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} > 0$ car $x^2 + 1 > 0$ et $x^2 + 3x + 4 > 0$ sur \mathbb{R} .
- 5** a) **Faux.**
 b) **Vrai.**
 Vous ferez un tableau donnant le signe du trinôme $-x^2 + 3x - 1$, de $x + 1$ et du quotient.
- 6** a) **Vrai.** $f'(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc f est une bijection strictement croissante.
 b) **Faux.** On résout $4x^2 + 4x + 2 = 3$. Seule la racine $\frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
 c) **Vrai.**
 d) **Faux.** On résout $4x^2 + 4x + 2 - y = 0$.
 Seule la racine $\frac{-1 + \sqrt{y-1}}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
 e) **Vrai.**
- 7** a) **Faux.**
 b) **Vrai.**

On résout le système formé de : $-\frac{b}{2a} = -1$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} = 3$,
 $f(2) = 4a + 2b + c = -3$.

8 a) Vrai.

b) Faux.

$a - b + c = -2$, $a + b + c = 0$, $(b + 3)^2 - 4a(c - 3) = 0$ obtenu en écrivant que $ax^2 + bx + c = -3x + 3$ a une racine double.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

9 a) $7x^2 - 27x - 40 = 0$.

$$\Delta = (-27)^2 - 4 \times 7 \times (-40) = 1\,849.$$

$$x' = \frac{27 - \sqrt{1\,849}}{14} = \frac{27 - 43}{14} = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7}.$$

$$x'' = \frac{27 + 43}{14} = \frac{70}{14} = 5.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{8}{7}; 5\right\}$.

b) $(x - 9)^2 = 49$ si et seulement si $(x - 9)^2 - 49 = 0$.

Il serait très maladroit d'effectuer et d'utiliser les formules donnant les racines d'une équation du second degré. On peut, en effet, *factoriser* :

$$(x - 9)^2 - 7^2 = 0$$

$$(x - 9 + 7)(x - 9 - 7) = 0$$

$$(x - 2)(x - 16) = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{2; 16\}$.

c) $21x^2 - 49x = 0$. Même remarque que précédemment. On peut factoriser facilement et l'équation proposée est équivalente à :

$$7x(3x - 7) = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{0; \frac{7}{3}\right\}$.

d) $(\sqrt{3} - 1)x^2 - (6 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} + 1 = 0$.

$$\Delta = [-(6 - \sqrt{3})]^2 - 4(\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1) = 19 - 8\sqrt{3}$$

$$= (4 - \sqrt{3})^2.$$

En appliquant les formules, on trouve $\mathcal{S} = \left\{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; 1 + 2\sqrt{3}\right\}$.

- 10** 1. Soit x' et x'' les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On suppose $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. On a alors :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x'x'' &= \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

- 2. a)** Une racine évidente de $5x^2 + x - 6 = 0$ est 1. L'autre racine est donc $\frac{c}{a} = -\frac{6}{5}$.

- b)** Une racine évidente de $3x^2 - 2x - 5 = 0$ est -1. L'autre racine est donc $-\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

11 a) $\frac{3x-2}{2x+5} - \frac{2x+5}{3x-2} = 0 \quad (1).$

Le premier membre de (1) est défini si et seulement si $x \neq -\frac{5}{2}$ et si $x \neq \frac{2}{3}$. Dans ces conditions, (1) est équivalente à :

$$\begin{aligned} (3x-2)^2 - (2x+5)^2 &= 0 \\ (3x-2+2x+5)(3x-2-2x-5) &= 0 \text{ soit :} \end{aligned}$$

$$(5x+3)(x-7) = 0 \text{ dont les solutions } -\frac{3}{5} \text{ et } 7 \text{ conviennent car différentes de } -\frac{5}{2} \text{ et de } \frac{2}{3}.$$

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{5}; 7\right\}$.

- b)** $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$, équation dite **bicarrée**.

On pose $x^2 = X$; l'équation devient $X^2 - 34X + 225 = 0$.

On trouve $X' = 25$ et $X'' = 9$ en appliquant les formules.

Pour $x^2 = 25$, alors $x = -5$ ou $x = 5$, et pour $x^2 = 9$, alors $x = -3$ ou $x = 3$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-5; -3; 3; 5\}$.

- c)** $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$. Par la même méthode, on trouve :

$$X' = 1 \text{ et } X'' = -\frac{1}{9}.$$

On ne peut pas avoir $x^2 = -\frac{1}{9}$ dans \mathbb{R} , donc $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.

12 1. Démontrons que, quels que soient les réels A et B :

$$(1) \quad A = \sqrt{B} \Leftrightarrow (2) \quad \begin{cases} A^2 = B \\ A \geq 0 \end{cases}$$

• Si on a (1), alors $A = \sqrt{B} \geq 0$ et $A^2 = (\sqrt{B})^2 = B$ donc on a (2).

• Si on a (2), alors $B = A^2 \geq 0$ et $A^2 = B$ peut s'écrire $A^2 = (\sqrt{B})^2$ donc $A = \sqrt{B}$ ou $A = -\sqrt{B}$.

Puisque l'on a $A \geq 0$, on a donc $A = \sqrt{B}$ c'est-à-dire (1).

2. a) $x - \sqrt{4x - 19} = 4 \Leftrightarrow x - 4 = \sqrt{4x - 19}$.

D'après la question 1. :

$$x - 4 = \sqrt{4x - 19} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 = 4x - 19 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 35 = 0 \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Les racines de l'équation du second degré sont 5 et 7, supérieures à 4, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{5; 7\}$.

b) $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 2} = 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x + 2} = \sqrt{2x + 3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \sqrt{x + 2})^2 = 2x + 3 \\ 2 + \sqrt{x + 2} \geq 0. \end{cases}$$

Or $2 + \sqrt{x + 2}$ est toujours positif dès que la racine carrée est définie, c'est-à-dire pour $x \geq -2$. Donc l'équation donnée est équivalente successivement à :

$$\begin{cases} (2 + \sqrt{x + 2})^2 = 2x + 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + x + 2 + 4\sqrt{x + 2} = 2x + 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 4\sqrt{x + 2} \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (x - 3)^2 = 16(x + 2) \\ x - 3 \geq 0 \text{ et } x \geq -2 \end{cases}$$

finalement $\begin{cases} x^2 - 22x - 23 = 0 \\ x \geq 3. \end{cases}$

L'équation du second degré a pour racines -1 et 23 . L'ensemble des solutions de l'équation donnée est $\mathcal{S} = \{23\}$.

$$c) x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}.$$

Posons $X = x^2 - 6x + 6$ comme le demande l'énoncé :

$$X + 3 = 4\sqrt{X} \Leftrightarrow \begin{cases} (X+3)^2 = 16X \\ X \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 10X + 9 = 0 \\ X \geq -3. \end{cases}$$

On trouve deux solutions $X' = 1$ et $X'' = 9$.

On est donc ramené à résoudre :

$$x^2 - 6x + 6 = 1 \quad \text{et} \quad x^2 - 6x + 6 = 9.$$

On trouve $\mathcal{S} = \{1; 5; 3 + 2\sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3}\}$.

$$13 \quad (I) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96. \end{cases}$$

1. Si $(x_0; y_0)$ est une solution de (I), on a :

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 208 \\ x_0 y_0 = 96 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} y_0^2 + x_0^2 = 208 \\ y_0 x_0 = 96 \end{cases},$$

ce qui montre que $(y_0; x_0)$ est aussi une solution de (I).

2. Le système (I) est équivalent à :

$$\begin{cases} x^2 + \left(\frac{96}{x}\right)^2 = 208 & (1) \\ y = \frac{96}{x} & (2) \end{cases}$$

(1) est équivalente successivement à :

$$x^2 + \frac{9 \cdot 216}{x^2} = 208, \quad \text{soit} \quad x^4 - 208x^2 + 9 \cdot 216 = 0.$$

C'est une équation bicarrée que l'on résout en posant $x^2 = X$:

$$X^2 - 208X + 9 \cdot 216 = 0$$

$$\Delta = 43 \, 264 - 4 \times 9 \cdot 216 = 6 \, 400 = (80)^2.$$

• Si $x^2 = 64$, alors $x = 8$ ou $x = -8$. On en déduit les valeurs de y d'après

$$(2) : \frac{96}{8} = 12 \quad \text{ou} \quad \frac{96}{-8} = -12.$$

• Si $x^2 = 144$, alors $x = 12$ ou $x = -12$. On en déduit $y = \frac{96}{12} = 8$ ou

$$y = \frac{96}{-12} = -8.$$

Les solutions du système (I) proposé sont :

$$(8; 12), (-8; -12), (12; 8), (-12; -8).$$

14 (1) $\frac{15}{x+1} \geq 2x+3.$

$\frac{15}{x+1}$ est défini si et seulement si $x \neq -1.$

Dans ces conditions, (1) est équivalente successivement à :

$$\frac{15}{x+1} - (2x+3) \geq 0,$$

$$\frac{15 - (2x+3)(x+1)}{x+1} \geq 0,$$

$$\frac{-2x^2 - 5x + 12}{x+1} \geq 0.$$

Le trinôme $-2x^2 - 5x + 12$ a pour racines -4 et $\frac{3}{2}$. Il est du signe de $a = -2$

donc strictement négatif sur $] -\infty ; -4[\cup] \frac{3}{2} ; +\infty [$, et du signe contraire

de $a = -2$ donc strictement positif sur $] -4 ; \frac{3}{2} [$.

Faisons un tableau en indiquant le signe du trinôme précédent, le signe de $x+1$ et le signe du quotient :

x	$-\infty$	-4	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 - 5x + 12$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x^2 - 5x + 12}{x+1}$	$+$	0	$-$	$+$	$-$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =] -\infty ; -4[\cup] -1 ; \frac{3}{2} [$.

15 (1) $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1}.$

$\frac{1}{x}$ est défini si et seulement si $x \neq 0.$

$\frac{1}{x-1}$ est défini si et seulement si $x \neq 1.$

Si $x \neq 0$ et $x \neq 1$, (1) est équivalente successivement à :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} < 0,$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} < 0,$$

$$\frac{-1}{x(x-1)} < 0,$$

$$x(x-1) > 0.$$

Le trinôme $x(x-1)$ a pour racines 0 et 1. Il est du signe du coefficient de x^2 donc strictement positif sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ et du signe contraire du coefficient de x^2 donc strictement négatif sur $]0; 1[$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

16 $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 + 3x - 1}{x+1}}$ est défini si et seulement si $\frac{-x^2 + 3x - 1}{x+1} \geq 0$.

Le discriminant du trinôme $-x^2 + 3x - 1$ est $\Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 5$.

Les racines du trinôme sont :

$$\frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
$-x^2 + 3x - 1$		-	0	+	0	-		
$x + 1$		-	0	+				
$\frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 1}$		+		-	0	+	0	-

L'ensemble de définition de f est :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right].$$

17 $mx^2 + 5x + m = 0$ (1).

• Tout d'abord, si $m = 0$, nous n'avons pas un trinôme du second degré. L'équation (1) s'écrit $5x = 0$ dont la solution est 0.

• Si $m \neq 0$, (1) est une équation du second degré ;

$$\Delta = 5^2 - 4m^2 = 25 - 4m^2.$$

L'équation (1) admet des racines si et seulement si $25 - 4m^2 \geq 0$. On peut considérer que $25 - 4m^2$ est un trinôme du second degré en m .

Il est positif c'est-à-dire du signe contraire de $a = -4$ entre les racines qui sont $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

Conclusion : l'équation (1) admet des racines si et seulement si

$$-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

18 1. Soit $y = ax^2 + bx + c$ une équation de \mathcal{P} . Cherchons un système d'équations vérifiées par a, b, c .

• \mathcal{P} passe par $A(2; 17)$ donc : $17 = 4a + 2b + c$.

• Le point $S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{33}{8}\right)$ est le sommet de \mathcal{P} , c'est-à-dire le point d'abscisse

$-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4}$ et appartient à \mathcal{P} donc $-\frac{33}{8} = \frac{25}{16}a - \frac{5}{4}b + c$.

Le système à résoudre est donc :

$$(S') \begin{cases} 4a + 2b + c = 17 & (1) \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4} & (2) \\ \frac{25}{16}a - \frac{5}{4}b + c = -\frac{33}{8} & (3) \end{cases}$$

• **Résolution du système**

Cherchons à simplifier (2) et (3). L'équation (2) est équivalente à :

$$4b = 10a, \text{ c'est-à-dire } b = \frac{5}{2}a.$$

L'équation (3) est équivalente à (en multipliant les deux membres par 16) : $25a - 20b + 16c = -66$.

Le système (S') est équivalent à :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 17 \\ 25a - 20b + 16c = -66 \\ b = \frac{5}{2}a \end{cases}$$

Remplaçons b par $\frac{5}{2}a$ dans les deux premières équations. On obtient un système de deux équations à deux inconnues a et c :

$$\begin{cases} 9a + c = 17 \\ -25a + 16c = -66 \end{cases}$$

équivalent à (en multipliant les deux membres de la 1^{re} équation par -16 et en additionnant membre à membre l'équation obtenue et la 2^e équation) :

$$\begin{cases} 9a + c = 17 \\ -169a = -338 \end{cases}$$

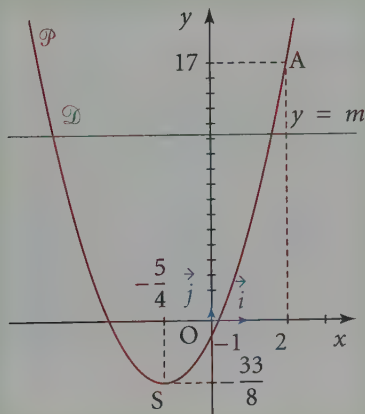
$$a = \frac{-338}{-169} = 2; \quad c = 17 - 9a = -1; \quad b = \frac{5}{2}a = 5.$$

Une équation de \mathcal{P} est : $y = 2x^2 + 5x - 1$.

2. $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4}$; $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{33}{8}$.

D'où le tableau de variation (cf. résumé de cours) :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$			



3. $2x^2 + 5x - 1 - m = 0$ (4).

• On peut résoudre et discuter l'équation (4). Le discriminant est :

$$\Delta = 25 - 8(-1 - m) = 8m + 33.$$

- Si $m < -\frac{33}{8}$, l'équation (4) n'a pas de racines.
- Si $m = -\frac{33}{8}$, l'équation (4) admet une racine double qui est $-\frac{5}{4}$.
- Si $m > -\frac{33}{8}$, l'équation (4) admet deux racines.

• On peut utiliser le graphique : on remarque que (4) est équivalente à $f(x) = m$. Les racines de l'équation (4) sont donc les abscisses des points d'intersection de la parabole \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = m$ parallèle à l'axe des abscisses. Quand on fait varier m , on retrouve la discussion précédente.

• Si $m < -\frac{33}{8}$, \mathcal{D} ne rencontre pas \mathcal{P} et (4) n'a pas de racines.

• Si $m = -\frac{33}{8}$, \mathcal{D} et \mathcal{P} ont un seul point commun $S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{33}{8}\right)$ et l'équation (4) admet une seule racine $-\frac{5}{4}$.

• Si $m > -\frac{33}{8}$, \mathcal{D} et \mathcal{P} ont deux points communs et (4) admet deux racines qui sont les abscisses de ces points communs.

19 1. $f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$ défini sur \mathbb{R} .

$f_1(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2 \quad \text{et} \quad f_1\left(-\frac{b}{2a}\right) = f_1(2) = 1.$$

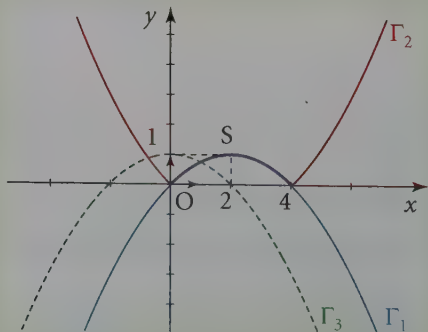
D'où le tableau de variation (cf. résumé de cours) :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f_1(x)$			

La représentation graphique Γ_1 est une parabole de sommet $S(2; 1)$.

$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0$ si et seulement $x\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 4$.

La courbe Γ_1 rencontre l'axe (Ox) aux points d'abscisses 0 et 4.



$$2. \bullet f_2(x) = \left| -\frac{1}{4}x^2 + x \right| = |f_1(x)|.$$

- Si $x \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$, le graphique ou l'étude du signe du trinôme f_1 nous montre que $f_1(x) \leq 0$ donc $f_2(x) = -f_1(x)$. La partie correspondante de Γ_2 est symétrique de la partie correspondante de Γ_1 par rapport à l'axe (Ox).
- Si $x \in [0; 4]$, on a $f_1(x) \geq 0$ donc $f_2(x) = f_1(x)$. Les deux parties de Γ_1 et Γ_2 correspondantes sont confondues.

• $f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$. Pour tout x réel, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_1(x+2) &= -\frac{1}{4}(x+2)^2 + (x+2) = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + x + 2 = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \\ &= f_3(x). \end{aligned}$$

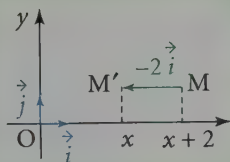
Considérons les points :

$M(x+2; f_1(x+2))$ et $M'(x; f_3(x))$.

Ils ont même ordonnée : $f_1(x+2) = f_3(x)$,

et $x_{M'} - x_M = -2$.

Donc M a pour image M' par la translation de vecteur $-2\vec{i}$. Γ_3 se déduit de Γ_1 par cette translation.

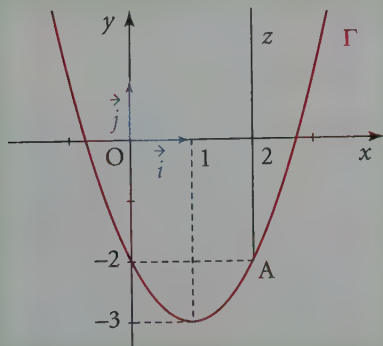


20 1. $f(x) = x^2 - 2x - 2$ définie sur \mathbb{R} .

$f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -3$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘ -3 ↗		



2. a) Quand m varie, la droite Δ d'équation $y = 2x + m$ a une direction fixe qui est celle de la droite d'équation $y = 2x$. Son coefficient directeur est 2. Les points communs à Γ et \mathcal{D} ont pour coordonnées $(x; y)$ les solutions du système :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = 2x + m. \end{cases}$$

Les abscisses de ces points communs sont les racines de l'équation $x^2 - 2x - 2 = 2x + m$ équivalente à :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - m - 2 &= 0 \quad (1) \\ \Delta &= (-4)^2 - 4(-m - 2) = 4m + 24. \end{aligned}$$

Γ et \mathcal{D} ont des points communs si et seulement si :

$$4m + 24 \geq 0, \quad m \geq -6.$$

Si $m > -6$, il y a deux points communs ; si $m = -6$, il y a un seul point commun.

b) Si $m \geq -6$, le milieu de I de $[M'M'']$ a pour abscisse $x_1 = \frac{x' + x''}{2}$, x' et x'' étant les racines de l'équation (1).

$$x' = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x'' = \frac{4 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x' + x'' = 4 \quad \text{d'où} \quad x_1 = 2.$$

Comme I appartient à \mathcal{D} , l'ordonnée de I est $y_1 = 2x_1 + m = 4 + m$.

Les coordonnées de I sont $(2; 4 + m)$.

c) Quel que soit $m \geq -6$, le point I a une abscisse constante égale à 2.

Pour $m \geq -6$, l'ordonnée de I est $4 + m \geq 4 - 6$

$$4 + m \geq -2.$$

Lorsque m décrit $[-6; +\infty[$, $4 + m$ décrit $[-2; +\infty[$.

L'ensemble des points I est la demi-droite (Az) définie par $\begin{cases} x = 2 \\ y \geq -2. \end{cases}$

21 1. La droite \mathcal{D} d'équation $y = -x + 1$ rencontre les axes de coordonnées aux points de coordonnées $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

Soit la parabole \mathcal{P} d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - x$.

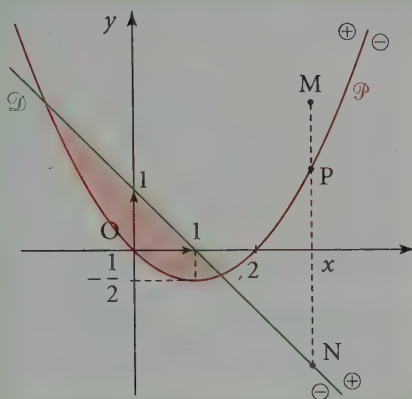
$$\frac{1}{2}x^2 - x = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 0.$$

Donc \mathcal{P} rencontre l'axe $(O; i)$ au point O et au point d'abscisse 2.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 0$.

Le sommet de \mathcal{P} a pour coordonnées :

$$-\frac{b}{2a} = 1; \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -\frac{1}{2}.$$



2. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan, N et P les points de même abscisse que M respectivement sur \mathcal{D} et \mathcal{P} . Donc :

$$N(x; -x + 1) \quad \text{et} \quad P\left(x; \frac{1}{2}x^2 - x\right).$$

La droite \mathcal{D} partage le plan en deux demi-plans :

dans l'un des demi-plans, $y_M > y_N$ c'est-à-dire $y > -x + 1$

donc $y + x - 1 > 0$;

dans l'autre demi-plan, $y_M < y_N$ c'est-à-dire $y < -x + 1$

donc $y + x - 1 < 0$. Par exemple en O , on a $y + x - 1 = -1 < 0$.

Nous avons indiqué sur la figure le signe de $y + x - 1$ de part et d'autre de \mathcal{D} .

La parabole \mathcal{P} partage le plan en deux régions :

• pour les points M « au-dessus » de \mathcal{P} , on a $y_M > y_P$ c'est-à-dire :

$$y > \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{donc} \quad y - \frac{1}{2}x^2 + x > 0;$$

• pour les points M « au-dessous » de \mathcal{P} , on a $y_M < y_P$ c'est-à-dire :

$$y < \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{donc} \quad y - \frac{1}{2}x^2 + x < 0.$$

Nous avons indiqué sur la figure le signe de $y - \frac{1}{2}x^2 + x$ de part et d'autre de \mathcal{P} .

$$3. \begin{cases} 2y - x^2 + 2x > 0 \\ y + x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{1}{2}x^2 + x > 0 \\ y + x - 1 < 0. \end{cases}$$

Les solutions du système sont les coordonnées des points appartenant à la région hachurée (frontière exclue).

22 1. $x^2 + 5x - 1 = 0$ (1).

Le discriminant de l'équation (1) est :

$$\Delta = 25 + 4 = 29 > 0$$

donc (1) admet deux racines distinctes x' et x'' .

Ces racines sont non nulles car pour $x = 0$, l'équation (1) n'est pas vérifiée.

2. $x' = \frac{-5 - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x'' = \frac{-5 + \sqrt{\Delta}}{2}$

$$S = x' + x'' = \frac{-5 - \sqrt{\Delta}}{2} + \frac{-5 + \sqrt{\Delta}}{2} = -5.$$

$$P = x'x'' = \left(\frac{-5 - \sqrt{\Delta}}{2}\right)\left(\frac{-5 + \sqrt{\Delta}}{2}\right) = \frac{(-5)^2 - \Delta}{4}$$

$$P = \frac{25 - 29}{4} = -1.$$

3. Calculons $A = (2x' - 1)(2x'' - 1)$ et $B = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$.

Au lieu de remplacer x' et x'' par les valeurs trouvées à la question 2. qui contiennent des radicaux, calculons A et B en fonction de S et P :

$$A = 4x'x'' - 2x' - 2x'' + 1 = 4x'x'' - 2(x' + x'') + 1$$

$$A = 4P - 2S + 1 = 4(-1) - 2(-5) + 1.$$

$$A = 7.$$

$$B = \frac{x'' + x'}{x'x''} = \frac{S}{P} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

23 1. Soit t le temps mis par la pierre pour toucher l'eau ; la pierre parcourt 85 m donc :

$$85 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}9,81t^2$$

$$t^2 = \frac{2 \times 85}{9,81} = \frac{170}{9,81}$$

$$t = \sqrt{\frac{170}{9,81}}.$$

Soit θ le temps mis par le bruit de la pierre pour nous parvenir, après avoir touché l'eau :

$$85 = v\theta = 340\theta$$

$$\theta = \frac{85}{340}.$$

On entend le bruit du contact de la pierre avec l'eau au bout de :

$$t + \theta = \sqrt{\frac{170}{9,81}} + \frac{85}{340} \approx 4,4 \text{ s.}$$

2. Soit x la profondeur du puits (en mètres) et t le temps mis par la pierre pour toucher l'eau :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}9,81t^2$$

$$t^2 = \frac{2x}{9,81}$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{9,81}}$$

Soit θ le temps mis par le bruit de la pierre pour nous parvenir, après avoir touché l'eau :

$$x = v\theta = 340\theta$$

$$\theta = \frac{x}{340}$$

On a donc :

$$t + \theta = 10$$

$$\sqrt{\frac{2x}{9,81}} + \frac{x}{340} = 10$$

$$\sqrt{\frac{2}{9,81}}\sqrt{x} + \frac{x}{340} = 10.$$

Posons $\sqrt{x} = X$ On aboutit à l'équation du second degré :

$$\frac{X^2}{340} + \sqrt{\frac{2}{9,81}}X - 10 = 0.$$

$$\Delta = \frac{2}{9,81} + \frac{40}{340}$$

$$X = \frac{-\sqrt{\frac{2}{9,81}} + \sqrt{\Delta}}{\frac{2}{340}} = 170\left(-\sqrt{\frac{2}{9,81}} + \sqrt{\Delta}\right)$$

$$x = X^2 \approx 385,6 \text{ m.}$$

La profondeur du puits est de 385,6 m.

24 • Soit a_0 la valeur initiale de l'action A. Sa valeur au bout de 1 an est :

$$a_1 = a_0\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

Sa valeur au bout de la 2^e année est :

$$a_2 = a_1\left(1 + \frac{t+1}{100}\right) = a_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t+1}{100}\right).$$

Au bout de 2 ans, la valeur de l'action A a augmenté de 6 % donc :

$$a_2 = a_0 \left(1 + \frac{6}{100}\right) = a_0(1,06).$$

D'où l'équation donnant t :

$$a_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 + \frac{t+1}{100}\right) = a_0(1,06)$$

$$(100 + t)(100 + t + 1) = 1,06 \times 100 \times 100$$

$$t^2 + 201t + 10\,100 = 10\,600$$

$$t^2 + 201t - 500 = 0$$

$$\Delta = (201)^2 + 4 \times 500 = 42\,401$$

$$t = \frac{-201 + \sqrt{42\,401}}{2} \approx 2,46.$$

• Soit b_0 la valeur initiale de l'action B. Sa valeur au bout de 1 an est :

$$b_1 = b_0 \left(1 + \frac{t'}{100}\right).$$

Sa valeur au bout de la 2^e année est :

$$b_2 = b_1 \left(1 + \frac{t'}{100}\right) = b_0 \left(1 + \frac{t'}{100}\right) \left(1 + \frac{t'}{100}\right)$$

$$b_2 = b_0 \left(1 + \frac{t'}{100}\right)^2.$$

Au bout de 2 ans, la valeur de l'action B a augmenté de 6 % donc :

$$b_2 = b_0 \left(1 + \frac{6}{100}\right) = b_0(1,06).$$

D'où l'équation donnant t' :

$$b_0 \left(1 + \frac{t'}{100}\right)^2 = b_0(1,06)$$

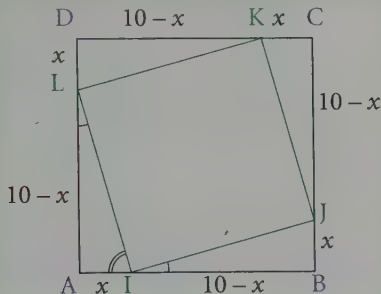
$$\left(1 + \frac{t'}{100}\right)^2 = 1,06$$

$$1 + \frac{t'}{100} = \sqrt{1,06}$$

$$\frac{t'}{100} = \sqrt{1,06} - 1$$

$$t' = 100(\sqrt{1,06} - 1) \approx 2,96.$$

25 1.



• Si $x = 0$ ou $x = 10$, IJKL est le carré ABCD.

• Supposons $0 < x < 10$.

Les côtés du quadrilatère IJKL ont même longueur $\sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$.

Les triangles AIL et BJI sont isométriques (car ils sont rectangles et les côtés de l'angle droit ont même longueur) donc :

$$\widehat{ALI} = \widehat{BIJ}.$$

Or \widehat{ALI} et \widehat{AIL} sont complémentaires, donc \widehat{BIJ} et \widehat{AIL} sont complémentaires, $\widehat{BIJ} + \widehat{AIL} = 90^\circ$. D'où :

$$\widehat{LIJ} = 180^\circ - \widehat{BIJ} - \widehat{AIL} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Le quadrilatère IJKL, ayant les quatre côtés de même longueur et un angle droit, est un carré.

2. Le périmètre du carré IJKL est en cm :

$$p = 4\sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = 4\sqrt{2x^2 - 20x + 100}.$$

L'aire du carré IJKL est en cm^2 :

$$\mathcal{A} = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} \times \sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$$

$$\mathcal{A} = 2x^2 - 20x + 100.$$

3. a) Étudions d'abord les variations de \mathcal{A} :

$2x^2 - 20x + 100$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 100 = 50.$$

D'où le tableau donnant les variations de \mathcal{A} :

x	0	5	10
\mathcal{A}	100	50	100

Étudions les variations de p :

$$p = 4\sqrt{2x^2 - 20x + 100} = 4\sqrt{\mathcal{A}}.$$

Appliquons les théorèmes sur les variations d'une fonction (cf. chap 1) :

x	0	5	10
\mathcal{A}	100	50	100
$\sqrt{\mathcal{A}}$	10	$5\sqrt{2}$	10
$p = 4\sqrt{\mathcal{A}}$	40	$20\sqrt{2}$	40

b) Le périmètre du carré IJKL est minimal pour $x = 5$ c'est-à-dire lorsque les points I, J, K, L sont les milieux des côtés du carré ABCD. Il en est de même pour le minimum de l'aire \mathcal{A} .

26 $P(x) = 6x^3 - 23x^2 - 32x - 15.$

1. $P(5) = 0$ donc 5 est une racine de P.

2. Nous cherchons un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x - 5)Q(x).$$

• Cherchons d'abord le degré de Q.

P est de degré 3 et $x - 5$ de degré 1 donc Q est de degré 2 ;

Q(x) est de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c.$

• Recherche des coefficients a , b et $c.$

Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} 6x^3 - 23x^2 - 32x - 15 &= (x - 5)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b - 5a)x^2 + (c - 5b)x - 5c. \end{aligned}$$

Donc (cf. résumé de cours) :

$$\begin{cases} a = 6 \\ b - 5a = -23 \\ c - 5b = -32 \\ -5c = -15 \end{cases} \text{ on trouve } a = 6; b = 7; c = 3.$$

$$P(x) = (x - 5)(6x^2 + 7x + 3).$$

3. Le discriminant de l'équation $6x^2 + 7x + 3 = 0$ est

$$\Delta = 49 - 72 = -23 < 0;$$

on ne peut pas factoriser $6x^2 + 7x + 3$.

27 $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 29x + 21.$

1. $P(1) = 0$ donc 1 est une racine de P.

2. En procédant comme dans l'exercice **26**, vous trouverez :

$$P(x) = (x - 1)(4x^2 + 8x - 21).$$

3. On peut poursuivre la factorisation en cherchant les racines de :

$$4x^2 + 8x - 21 = 0 \text{ qui sont } -\frac{7}{2} \text{ et } \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x - 21 &= 4\left(x + \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{7}{2}\right) \times 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= (2x + 7)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$P(x) = (x - 1)(2x + 7)(2x - 3).$$

28 $P(x) = x^3 + mx^2 + mx + 1.$

1. $P(-1) = -1 + m - m + 1 = 0$ donc -1 est racine de P.

2. En procédant comme dans l'exercice **26**, vous trouverez :

$$P(x) = (x + 1)[x^2 + (m - 1)x + 1].$$

3. Une racine de P est -1 (question **1.**).

Les autres racines sont celles de l'équation :

$$x^2 + (m - 1)x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (m - 1)^2 - 4.$

Pour étudier le signe de Δ , il serait maladroit d'effectuer.

On peut en effet factoriser facilement :

$$\Delta = (m-1)^2 - 2^2 = (m-1-2)(m-1+2) = (m-3)(m+1).$$

Δ est un trinôme de second degré en m .

Si $m < -1$ ou $m > 3$, l'équation $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ admet deux racines distinctes. Peuvent-elles être égales à -1 (racine de la question 1.) ?

$(-1)^2 + (m-1)(-1) + 1 = 0$ si et seulement si

$$1 - m + 1 + 1 = 0.$$

$$m = 3.$$

D'où la discussion :

• Si $m < -1$ ou $m > 3$, l'équation (1) admet trois racines distinctes :

$$-1, \quad \frac{-m+1-\sqrt{m^2-2m-3}}{2}, \quad \frac{-m+1+\sqrt{m^2-2m-3}}{2}.$$

• Si $m = -1$, l'équation (1) admet deux racines qui sont -1 et 1 .

• Si $-1 < m \leq 3$, l'équation (1) admet une seule racine -1 .

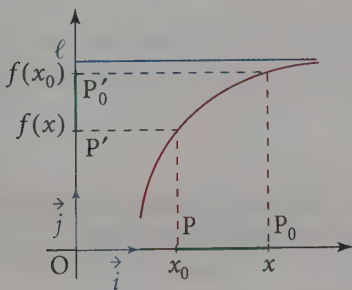
1 Notion de limite

• Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant x_0 (sauf éventuellement en x_0), on dit que f a pour limite le nombre ℓ quand x tend vers x_0 si :
 $|f(x) - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut dès que $|x - x_0|$ est suffisamment proche de 0.

→ Interprétation graphique

Sur la droite $(O ; \vec{i})$, soit les points $P_0(x_0)$ et $P(x)$; sur la droite $(O ; \vec{j})$, soit les points $P'_0(\ell)$ et $P'(f(x))$.

Associons à P le point P' . La distance P'_0P' peut être rendue aussi petite que l'on veut, dès que la distance P_0P est suffisamment proche de 0.



On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou plus simplement $\lim_{x_0} f = \ell$

2 Nombre dérivé

Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant x_0 et \mathcal{C} sa représentation graphique. Considérons deux points appartenant à \mathcal{C} :

$$M_0(x_0; f(x_0)) \text{ et } M(x; f(x)), \quad x \neq x_0.$$

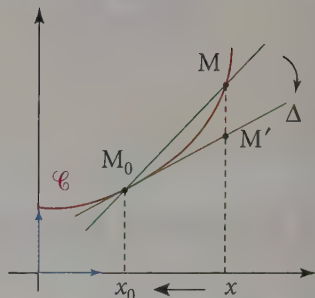
- Le coefficient directeur de la droite (M_0M) est :

$$\frac{y_M - y_{M_0}}{x_M - x_{M_0}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \text{ en posant } x - x_0 = h$$

($h \neq 0$), ce coefficient directeur est aussi

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si ce coefficient directeur a une limite ℓ quand x tend vers x_0 ou quand h tend vers 0 c'est-à-dire si



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \quad \text{ou si} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell,$$

- on dit que ℓ est le **nombre dérivé de f en x_0** . On dit aussi que **f est dérivable en x_0** . La droite Δ passant par M_0 et de coefficient directeur ℓ est appelée **tangente en M_0 à la courbe \mathcal{C}** .

3 Fonction dérivée

La fonction qui associe à tout x_0 d'un intervalle le nombre dérivé de f en x_0 est appelée **fonction dérivée** ou plus simplement **dérivée** définie sur cet intervalle. On la note f' .

4 Équation de la tangente à une courbe. Approximation affine de f

- Soit une fonction f dérivable en x_0 . Une équation de la tangente Δ en M_0 (voir fig. ci-dessus) est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

- Soit M et M' deux points de même abscisse x respectivement sur \mathcal{C} et sur Δ (voir fig. ci-dessus). Pour x « voisin » de x_0 , on a $y_M \approx y_{M'}$, c'est-à-dire :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

On dit que $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est **une valeur approchée affine** de $f(x)$ et que la fonction $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est **une approximation affine de la fonction f pour x voisin de x_0** .

En posant $x - x_0 = h$,

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$

On dit que $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée affine de $f(x_0 + h)$ et que la fonction $h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$ est une approximation affine de la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ pour h voisin de 0.

Remarque : Il existe d'autres approximations affines d'une fonction. Par exemple, lorsqu'on fait une interpolation linéaire sur un intervalle $[a; b]$, on remplace la courbe représentant f par la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

5 Formules sur les dérivées

Lorsque les nombres dérivés ou les fonctions dérivées existent, nous avons les résultats suivants :

$f(x)$	$f'(x)$	Fonction	Fonction dérivée
a	0	$u + v$	$u' + v'$
$ax + b$	a	uv	$u'v + uv'$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$	λu (λ constante)	$\lambda u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$nu^{n-1}u'$
		$x \mapsto f(ax + b)$	$x \mapsto af'(ax + b)$
		$x \mapsto \sqrt{ax + b}$	$x \mapsto \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Coche la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** Soit Γ la représentation graphique de $f: x \mapsto x^2$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle (Ox) et (Oy) les axes des coordonnées.

a) Une équation de la tangente à Γ en $M_0(x_0; x_0^2)$ est :

$$y = 2x_0x + x_0^2.$$

V F

b) $y = 2x_0x - x_0^2.$

V F

c) Cette tangente rencontre (Oy) en T. Soit H le projeté de M_0 sur (Oy) parallèlement à (Ox) . Le point O est milieu de [HT]. Le point O est milieu de [HT].

V F

Corrigé p. 74

- 2** Soit Γ la représentation graphique de $f: x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$ donné).

a) Une équation de la tangente à Γ en $M_0\left(x_0; \frac{a}{x_0}\right)$ est :

$$y = -\frac{a}{x_0^2}x - \frac{2a}{x_0}$$

V F

b) $y = -\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$

V F

c) Cette tangente rencontre (Ox) et (Oy) respectivement en T et T'. Le point M_0 est milieu de [TT'].

V F

Corrigé p. 74

- 3** $f: x \mapsto 2x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

V F

b) Si $x \neq -1$, $f'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{8x(x-1)}{(x+1)^3}$

V F

c) Si $x \neq -1$, $f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x+1)^3}(x^2 + 4x - 1)$

V F

Corrigé p. 74

- 4** $f: x \mapsto \sqrt{2x+5}$. (E) $\sqrt{2x+5} = 2$.

a) f est définie sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

V F

- b) f est dérivable sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$. V F
- c) f est dérivable sur $\left]-\frac{5}{2}; +\infty\right[$. V F
- d) f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$. V F
- e) f est strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$. V F
- f) E admet une solution unique : $x_0 \in [0; 2]$. V F
- g) $x_0 \in [-1; 1]$. V F
- h) E a pour solution $x_0 = -0,5$. V F

→ Corrigé p. 68

- 5 (P) $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.
- a) P admet une solution unique $x_0 \in [2; 4]$. V F
- b) On a $3,11 \leq x_0 \leq 3,12$. V F
- c) On a $3,10 \leq x_0 \leq 3,11$. V F

→ Corrigé p. 69

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Définition du nombre dérivé

- 6 En utilisant la définition du nombre dérivé, trouver dans chacun des cas suivants, le nombre dérivé en x_0 de la fonction f définie par :
- a) $f(x) = 3x^2 - 5x$ en $x_0 = 2$.
- b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ en $x_0 = 3$.
- c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$. V F
- 7 Soit $f: x \mapsto x + 1 + 2x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.
Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. V F
- 8 Soit $f: x \mapsto x(x+5)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. V F

→ Corrigé p. 75

→ Corrigé p. 76

→ Corrigé p. 76

Vitesse moyenne. Vitesse à l'instant t_0

- 9 Un point M se déplace sur l'axe $(O ; \vec{i})$. Son abscisse à l'instant t est :

$$x = f(t) = t^3 - t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer la vitesse moyenne $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ du point M entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

2. Quelle est la limite de la vitesse moyenne quand h tend vers 0 ?

Cette limite est appelée vitesse de M à l'instant t_0 .

Calculer la vitesse de M à l'instant $t_0 = 2$.

→ Corrigé p. 76

Formules sur les dérivées

Après avoir déterminé l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, trouver les fonctions dérivées de ces fonctions à l'aide des opérations sur les fonctions dérivables (exercices 10 à 14).

10 $f: x \mapsto -\frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 4x - 2$; $g: x \mapsto (5x - 2)^2$;

$h: x \mapsto (2x + 3)(x^2 - 4)$; $k: x \mapsto (3 - x)(2x + 1)(5x + 2)$. → Corrigé p. 77

11 $f: x \mapsto \frac{2x - 1}{3x + 4}$; $g: x \mapsto \left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right)^2$;

$h: x \mapsto \frac{-3}{(2x + 3)^2}$; $k: x \mapsto \frac{(3x + 2)^3}{(x + 1)^2}$. → Corrigé p. 77

12 $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3}$; $g: x \mapsto \frac{(1 - 2x)^2}{x^2 - 4}$.

→ Corrigé p. 78

13 $f: x \mapsto \sqrt{3x + 1}$; $g: x \mapsto \frac{-2}{\sqrt{4x + 5}}$;

$h: x \mapsto \frac{\sqrt{1 - x}}{3 + 2x}$; $k: x \mapsto (x - 2)^2 \sqrt{2x + 1}$. → Corrigé p. 79

14 $f: x \mapsto \tan x$; $g: x \mapsto \cos^3 x$;

$h: x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$; $i: x \mapsto x \cos \frac{\pi}{8}$;

$j: x \mapsto x \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

→ Corrigé p. 80

- 15** Soit $f: x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 3)^5}$ définie sur \mathbb{R} ;
 $g: x \mapsto \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^5}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $g'(x)$. Montrer que $g'(x) < 0$ pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

→ Corrigé p. 80

Approximation affine d'une fonction

- 16** **1.** Pour les petites valeurs de x (x exprimé en radians), donner une valeur approchée affine de $\sin x$.
2. En déduire une valeur approchée affine de $\sin(0,01)$.
3. Comparer la valeur approchée précédente (question 2) à celle de $\sin(0,01)$ donnée par une calculatrice.

→ Corrigé p. 81

- 17** Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 6x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

- En utilisant les formules sur les dérivées, calculer $f'(x)$ puis $f'(-2)$.
- À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, construire un tableau de valeurs des fonctions $u: h \mapsto f(-2 + h)$ et $v: h \mapsto f(-2) + hf'(-2)$ en donnant à h les valeurs : $-0,03$; $-0,025$; $-0,02$; $-0,015$; $-0,01$; 0 ; $0,01$; $0,015$; $0,02$; $0,025$; $0,03$.

On calculera également la différence $d(h) = u(h) - v(h)$.

- À l'aide d'un grapheur ou d'une calculatrice graphique, construire les courbes représentant u et v sur l'intervalle $[-0,03 ; 0,03]$.
- Quelles observations pouvez-vous faire sur la différence $d(h)$ et sur les courbes précédentes ?

→ Corrigé p. 81

Étude de limites à l'aide des dérivées

- 18** ★ Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$.

→ Corrigé p. 83

- 19** ★ Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x - 1}$.

→ Corrigé p. 83

Dérivées successives

20 ★ On pose $f'' = (f')'$; $f^{(3)} = (f'')'$, ..., $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

On définit ainsi la dérivée n -ième de f .

Calculer les dérivées successives des fonctions définies sur \mathbb{R} suivantes :

$$f: x \mapsto 12x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1; \quad g: x \mapsto (3x + 4)^5.$$

→ Corrigé p. 83

Problèmes sur les tangentes

21 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto 3 + 2x + 5x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2. Donner une équation de la tangente Δ à la courbe \mathcal{C} représentant f au point d'abscisse 0 de la courbe.

3. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .

→ Corrigé p. 84

22 ★ Soit $f: x \mapsto x^2 + x$ définie sur \mathbb{R} et \mathcal{C} sa représentation graphique.

1. Calculer $f'(2)$.

2. Donner une construction de la tangente Δ à \mathcal{C} au point de \mathcal{C} d'abscisse 2 sans former une équation de Δ .

→ Corrigé p. 84

23 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

1. Donner une équation de la tangente Δ à la courbe \mathcal{C} représentant f au point d'abscisse -1 de la courbe.

2. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .

→ Corrigé p. 85

24 ★ La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction $f: x \mapsto \frac{1-3x}{x+1}$ admet-elle des tangentes de coefficient directeur -1 ?

Si oui, écrire des équations de ces tangentes.

→ Corrigé p. 85

25 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2x + 2$ définie sur \mathbb{R} .

Donner une équation de la tangente Δ à la représentation graphique \mathcal{C} de f dans chacun des cas suivants :

a) Δ est tangente à \mathcal{C} au point de \mathcal{C} d'abscisse -1 .

b) Δ est parallèle à la droite d'équation $y = 6x + 1$.

c) Δ passe par $A(3; 2)$.

→ Corrigé p. 86

26 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$) définie sur \mathbb{R} et \mathcal{P} la parabole représentant f dans un repère orthogonal d'axes (Ox) et (Oy) .

1. Donner une équation de la tangente Δ à \mathcal{P} au point M de \mathcal{P} d'abscisse $x_0 \neq 0$.

2. Δ rencontre la droite (Ox) en T et la droite (Oy) en T' .

Déterminer, en fonction de x_0 , les coordonnées de T et T' .

3. Soit H et H' les projetés orthogonaux de M respectivement sur (Ox) et (Oy) . Montrer que T est le milieu de $[OH]$ et O est le milieu de $[H'T']$.

4. En déduire une construction de la tangente Δ en un point donné M de \mathcal{P} .

→ Corrigé p. 87

27 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) définie sur \mathbb{R}^* et \mathcal{H} l'hyperbole représentant f dans un repère orthogonal d'axes (Ox) et (Oy) .

1. Donner une équation de la tangente Δ à \mathcal{H} au point M de \mathcal{H} d'abscisse $x_0 \neq 0$.

2. Δ rencontre la droite (Ox) en T et la droite (Oy) en T' .

Déterminer, en fonction de x_0 , les coordonnées de T et T' .

3. Montrer que M est le milieu de $[TT']$.

4. En déduire une construction de la tangente Δ en un point donné M de \mathcal{H} .

→ Corrigé p. 88

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

1 a) Faux.

Cette équation est $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

b) Vrai.

c) Vrai. $\overline{OH} = x_0^2$ et $\overline{OT} = -x_0^2$.

2 a) Faux.

b) Vrai.

c) Vrai. On a $x_0 = \frac{x_T + x_{T'}}{2}$ et $y_0 = \frac{y_T + y_{T'}}{2}$.

3 a) Vrai. $\frac{f(x)}{x}$ est le taux de variation de f entre 0 et x .

b) Vrai.

c) Vrai.

4 a) Vrai.

b) Faux. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} > 0$ sur $]-\frac{5}{2}; +\infty[$.

c) Vrai.

d) Faux.

e) Vrai.

f) Faux.

f croît de $f(0) \approx 2,236$ à $f(2) = 3$ donc $f(x)$ ne peut pas être égal à 2.

g) Vrai.

On a une bijection de $[-1; 1]$ sur $[f(-1); f(1)] = [\sqrt{3}; \sqrt{7}]$. $2 \in [\sqrt{3}; \sqrt{7}]$ donc 2 admet un antécédent unique $x_0 \in [-1; 1]$.

h) Vrai. On résout l'équation $\sqrt{2x+5} = 2$.

5 a) Vrai. On a une bijection strictement croissante de $[2; 4]$ sur $[f(2); f(4)] = [-5; 15]$.

$0 \in [-5; 15]$ donc 0 a un antécédent unique $x_0 \in [2; 4]$.

b) Faux. $f(3,11) > 0$ et $f(3,12) > 0$

donc $0 \notin [f(3,11); f(3,12)]$ donc $x_0 \in [3,11; 3,12]$.

c) Vrai. $f(3,10) < 0$ et $f(3,11) > 0$

donc $0 \in [f(3,10); f(3,11)]$ donc $x_0 \in [3,10; 3,11]$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

6 Rappelons que le nombre dérivé de f en x_0 est la limite, si elle existe, du taux de

variation $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x$; $x_0 = 2$.

$$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 5(2+h) = 3(4+4h+h^2) - 5(2+h) \\ = 3h^2 + 7h + 2$$

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 = 2$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3h^2 + 7h + 2 - 2}{h} = \frac{3h^2 + 7h}{h} \quad (\text{si } h \neq 0) \\ = \frac{h(3h+7)}{h} = 3h+7.$$

Pour h voisin de 0, $3h+7$ est voisin de 7 donc $\lim_{h \rightarrow 0} (3h+7) = 7$.

Le nombre dérivé de f en $x_0 = 2$ est 7.

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $x_0 = 3$.

$$f(3+h) = \frac{3+h+1}{3+h-2} = \frac{h+4}{h+1} \quad (\text{si } h \neq -1)$$

$$f(3) = \frac{3+1}{3-2} = 4.$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{h+4}{h+1} - 4}{h} = \frac{h+4-4h-4}{h(h+1)} \quad (\text{si } h \neq -1 \text{ et } h \neq 0) \\ = \frac{-3h}{h(h+1)} = \frac{-3}{h+1}.$$

Pour h voisin de 0, $\frac{-3}{h+1}$ est voisin de -3 donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{h+1} = -3$.

Le nombre dérivé de f en $x_0 = 3$ est -3 .

c) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$.

$$f(1+h) = \sqrt{1+h} \text{ pour tout } h \geq -1$$

$$f(1) = 1$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \text{ est défini pour } h \neq 0 \text{ et } h \geq -1.$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} &= \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.\end{aligned}$$

Pour h voisin de 0, $\sqrt{1+h}$ est voisin de 1 et $\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$ est voisin de $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}. \text{ Le nombre dérivé de } f \text{ en } x_0 = 1 \text{ est } \frac{1}{2}.$$

7 $f: x \mapsto x + 1 + 2x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

Utilisons la définition du nombre dérivé : si $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + 1 + 2x\sqrt{x} - 1}{x} = \frac{x + 2x\sqrt{x}}{x} = 1 + 2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\sqrt{x}) = 1.$$

La fonction f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

8 $f: x \mapsto x(x+5)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Utilisons, comme dans l'exercice précédent, la définition du nombre dérivé :

$$\text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(x+5)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}{x} = (x+5)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+5)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = -5.$$

Donc f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = -5$.

9 **1.** $x = f(t) = t^3 - t$. ($t \in \mathbb{R}$).

La vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est, si $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} &= \frac{(t_0 + h)^3 - (t_0 + h) - (t_0^3 - t_0)}{h} \\ &= \frac{t_0^3 + 3ht_0^2 + 3h^2t_0 + h^3 - t_0 - h - t_0^3 + t_0}{h} \\ &= \frac{3ht_0^2 + 3h^2t_0 + h^3 - h}{h} = \frac{h(3t_0^2 + 3ht_0 + h^2 - 1)}{h} \\ &= 3t_0^2 + 3ht_0 + h^2 - 1.\end{aligned}$$

2. Quand h tend vers 0, la limite de la vitesse moyenne est :

$$3t_0^2 - 1 = f'(t_0).$$

C'est la vitesse du point M à l'instant t_0 .

Pour $t_0 = 2$, cette vitesse est $f'(2) = 11$.

10 Les fonctions polynômes f, g, h et k sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

$$\bullet f(x) = -\frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 4x - 2.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{5}{12}(4x^3) + \frac{1}{2}(3x^2) - 5(2x) + 4 \\ &= -\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x + 4. \end{aligned}$$

$$\bullet g(x) = (5x - 2)^2.$$

g est de la forme u^2 donc $g' = 2uu'$

$$g'(x) = 2(5x - 2) \times 5 = 10(5x - 2).$$

$$\bullet h(x) = (2x + 3)(x^2 - 4).$$

h est de la forme uv , donc $h' = u'v + uv'$; d'où :

$$h'(x) = 2(x^2 - 4) + (2x + 3)(2x) = 6x^2 + 6x - 8.$$

$$\bullet k(x) = (3 - x)(2x + 1)(5x + 2).$$

k est le produit de trois fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

D'une façon générale, calculons $(uvw)'$:

$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw'$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } k'(x) &= (-1)(2x + 1)(5x + 2) + (3 - x) \times 2(5x + 2) + (3 - x)(2x + 1) \times 5 \\ &= -30x^2 + 42x + 25. \end{aligned}$$

11 $\bullet f: x \mapsto \frac{2x-1}{3x+4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$, et f est de la forme $\frac{u}{v}$.

On a : $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ donc sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$:

$$f'(x) = \frac{2(3x+4) - (2x-1) \times 3}{(3x+4)^2} = \frac{11}{(3x+4)^2}.$$

$\bullet g: x \mapsto \left(\frac{2x+1}{x-3}\right)^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$, et g est de la forme

$g = u^2$ donc, sur $\mathbb{R} - \{3\}$, $g' = 2uu'$, soit ici :

$$g'(x) = 2 \frac{2x+1}{x-3} \frac{2(x-3) - (2x+1)1}{(x-3)^2} = \frac{-14(2x+1)}{(x-3)^3}.$$

• $h: x \mapsto \frac{-3}{(2x+3)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ et l'on peut écrire

$$\text{sur } \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}: h(x) = \frac{-3}{v(x)}$$

avec $v(x) = (2x+3)^2$, donc $v'(x) = 2(2x+3) \times 2 = 4(2x+3)$.

$$\text{Alors } h'(x) = \frac{-3[-v'(x)]}{[v(x)]^2} = \frac{-3[-4(2x+3)]}{(2x+3)^4}$$

$$h'(x) = \frac{12}{(2x+3)^3}.$$

Remarque : Plus rapidement, on peut écrire $h(x) = -3(2x+3)^{-2}$. On sait (voir les formules sur les dérivées cf. résumé de cours) que si $n \in \mathbb{Z}$ et si la dérivée existe :

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

d'où en prenant $u(x) = 2x+3$ et $n = -2$:

$$h'(x) = -3 \times (-2)(2x+3)^{-2-1} \times 2 = \frac{12}{(2x+3)^3}.$$

• $k: x \mapsto \frac{(3x+2)^3}{(x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

D'une façon générale, on sait que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, donc pour $x \neq -1$:

$$k'(x) = \frac{[3(3x+2)^2 \times 3](x+1)^2 - (3x+2)^3[2(x+1)]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{9(3x+2)^2(x+1) - 2(3x+2)^3}{(x+1)^3}$$

(après avoir factorisé par $x+1$ et simplifié).

Il serait très maladroit de développer le numérateur. Une factorisation est plus commode car on verra qu'elle permettra d'étudier le signe de $k'(x)$ (voir chapitre 4, **Étude de fonctions**).

$$k'(x) = \frac{(3x+2)^2[9(x+1) - 2(3x+2)]}{(x+1)^3} = \frac{(3x+2)^2(3x+5)}{(x+1)^3}.$$

12 • $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{On trouve } f'(x) = \frac{5x^2 + 22x - 15}{(x^2 + 3)^2}.$$

• $g: x \mapsto \frac{(1-2x)^2}{x^2 - 4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

$$\text{On trouve } g'(x) = \frac{2(2x-1)(x-8)}{(x^2-4)^2}.$$

- 13 • $f: x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est définie sur $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ mais elle est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$, le nombre dérivé étant (cf. résumé de cours) :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

- $g: x \mapsto \frac{-2}{\sqrt{4x+5}}$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{5}{4}; +\infty\right[$, le nombre dérivé étant :

$$g'(x) = \frac{-2[-v'(x)]}{[v(x)]^2}$$

avec $v(x) = \sqrt{4x+5}$, donc $v'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

$$g'(x) = \frac{4}{\sqrt{4x+5}(4x+5)} = \frac{4}{\sqrt{(4x+5)^3}}.$$

- $h: x \mapsto \frac{\sqrt{1-x}}{3+2x}$ est définie si et seulement si $x \leq 1$ et $x \neq -\frac{3}{2}$, donc son ensemble de définition est $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; 1\right]$, mais h est dérivable sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; 1\right[$, le nombre dérivé étant :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(3+2x) - \sqrt{1-x} \times 2}{(3+2x)^2} \\ &= \frac{-3-2x-4(1-x)}{2\sqrt{1-x}(3+2x)^2} = \frac{2x-7}{2\sqrt{1-x}(3+2x)^2}. \end{aligned}$$

- $k: x \mapsto (x-2)^2\sqrt{2x+1}$ est définie sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, mais k est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, le nombre dérivé étant :

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2(x-2)\sqrt{2x+1} + (x-2)^2 \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{2(x-2)(2x+1) + (x-2)^2}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{(x-2)[2(2x+1) + x-2]}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{5x(x-2)}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

- 14** • $f: x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie et dérivable pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Dans ces conditions, f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

- $g: x \mapsto \cos^3 x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

g est de la forme u^3 ; alors sa dérivée s'écrit $g' = 3u^2 u'$.

$$g'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x.$$

- $h: x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$ est définie et dérivable en tout point où $1 + \cos x$ est non nul:

$$1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Donc si $x \neq (2k+1)\pi$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \cos x) - (\sin x + \cos x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1 + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

- $i: x \mapsto x \cos \frac{\pi}{8}$ est de la forme ax donc i est une fonction linéaire définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$i'(x) = \cos \frac{\pi}{8}.$$

- $j: x \mapsto x \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

j est de la forme uv donc $j' = u'v + uv'$.

$$j'(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + x \left[2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$j'(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

- 15** 1. $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 3)^5}$ défini sur \mathbb{R} .

On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = (x^2 + 3)^{-5} = [u(x)]^{-5} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2 + 3.$$

On sait que si $n \in \mathbb{Z}$, sous réserve de l'existence de la dérivée :

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Donc pour tout x réel, f est dérivable et :

$$f'(x) = -5(x^2 + 3)^{-6}(2x) = -\frac{10x}{(x^2 + 3)^6}$$

$$2. g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^5} \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 0\}.$$

On peut écrire $g(x)$ sous la forme : $g(x) = x^{-3} + (x+1)^{-5}$.

D'où, pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 0$,

$$g'(x) = -3x^{-4} - 5(x+1)^{-6} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{(x+1)^6} < 0$$

(somme de deux nombres strictement négatifs).

- 16** 1. Pour les petites valeurs de x , une valeur approchée affine de $\sin x$ est (cf. résumé de cours) :

$$\sin(0) + (x-0)(\sin)'(0)$$

$$\sin(0) = 0$$

$$(\sin)'(x) = \cos x \text{ donc } (\sin)'(0) = 1.$$

On en déduit : $\sin x \approx x$.

2. $\sin(0,01) \approx 0,01$.

3. Une calculatrice donne :

$\sin(0,01) = 0,009998\dots$ valeur très proche de la précédente.

- 17** 1. $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 6x - 1$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \text{ d'où } f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 6 = 2.$$

2. $u(h) = f(-2+h) = (-2+h)^3 + (-2+h)^2 - 6(-2+h) - 1$

$$v(h) = f(-2) + hf'(-2)$$

$$= 7 + 2h.$$

En suivant les instructions données à l'ex. 8. du chapitre 1 :

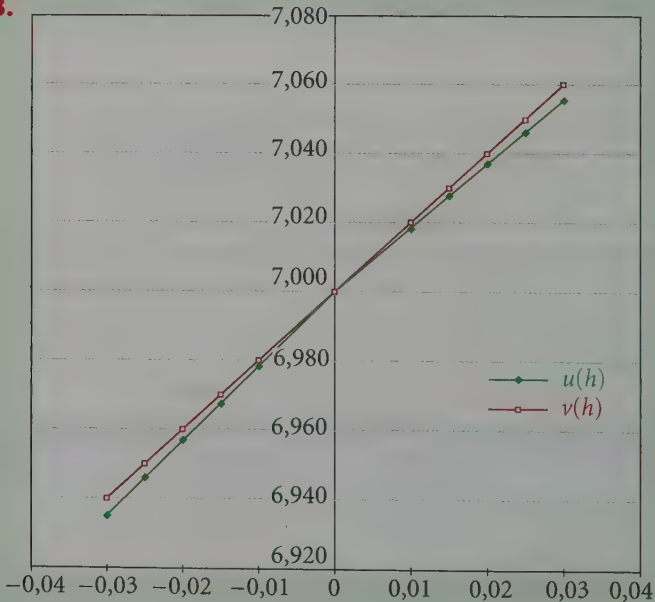
	A	B	C
1	h	-0,03	-0,025
2	-2+h	= -2+B1	= -2+C1
3	$u(h) = f(-2+h)$	$= (B2)^3 + (B2)^2 - 6*(B2) - 1$	$= (C2)^3 + (C2)^2 - 6*(C2) - 1$
4	$v(h) = f(-2) + hf'(-2)$	$= 7 + B1*2$	$= 7 + C1*2$
5	$d(h) = u(h) - v(h)$	$= B3 - B4$	$= C3 - C4$

En recopiant vers la droite, on obtient le tableau :

	A	B	C	D	E
1	h	-0,03	-0,025	-0,02	-0,015
2	$-2+h$	-2,03	-2,025	-2,02	-2,015
3	$u(h) = f(-2+h)$	6,935	6,947	6,958	6,969
4	$v(h) = f(-2) + hf'(-2)$	6,940	6,950	6,960	6,970
5	$d(h) = u(h) - v(h)$	-0,005	-0,003	-0,002	-0,001

F	G	H	I	J	K	L
-0,01	0	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
-2,01	-2	-1,99	-1,985	-1,98	-1,975	-1,97
6,979	7,000	7,020	7,029	7,038	7,047	7,056
6,980	7,000	7,020	7,030	7,040	7,050	7,060
-0,001	0,000	0,000	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004

3.



4. $d(h) = u(h) - v(h)$.

• Nous remarquons que $d(h) \leq 0$ donc $u(h) \leq v(h)$ donc la courbe représentant u est au-dessous de la tangente.

• $|d(h)| \leq 0,005$; ce qui montre que $|d(h)|$ est très petit devant les valeurs de u qui sont proches de 7.

Autrement dit, sur l'intervalle $[-0,03 ; 0,03]$ on peut remplacer pratiquement la courbe représentant u par le segment de droite représentant v .

$$18 \quad \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}, \text{ en prenant } f(x) = \sin x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$19 \quad \frac{\sin^2 \pi x}{x - 1} = \frac{\sin^2 \pi x - \sin^2(\pi \times 1)}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

en prenant $f(x) = \sin^2 \pi x$.

La fonction f est de la forme u^2 donc $f' = 2u(u')$.

$$f'(x) = 2(\sin \pi x)(\pi \cos \pi x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0.$$

20 1. $f: x \mapsto 12x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1$ est un polynôme défini et dérivable sur \mathbb{R} .
Pour tout x réel,

$$f'(x) = 60x^4 - 4x^3 + 6x - 1$$

$$f''(x) = 240x^3 - 12x^2 + 6$$

$$f^{(3)}(x) = 720x^2 - 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 1440x - 24$$

$$f^{(5)}(x) = 1440$$

pour $n > 5$, $f^{(n)}(x) = 0$.

2. $g: x \mapsto (3x + 4)^5$ est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} . Elle est de la forme $g = u^5$ avec $u(x) = 3x + 4$ et $u'(x) = 3$.

$g' = (u^5)' = 5u^4 u'$, donc pour tout x réel :

$$g'(x) = 5(3x + 4)^4 \times 3.$$

Les dérivées successives font apparaître, chaque fois, le facteur 3 obtenu en dérivant $x \mapsto 3x + 4$. Nous pouvons donc faire apparaître une puissance de 3 :

$$g''(x) = 4 \times 5(3x + 4)^3 \times 3^2$$

$$g^{(3)}(x) = 3 \times 4 \times 5(3x + 4)^2 \times 3^3$$

$$g^{(4)}(x) = 2 \times 3 \times 4 \times 5(3x + 4) \times 3^4$$

$$g^{(5)}(x) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3^5.$$

D'une façon générale, le produit $n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$ se note $n!$ et se lit « **factorielle n** ». Donc : $g^{(5)}(x) = 5!3^5$; pour $n > 5$, $g^{(n)}(x) = 0$.

21 Soit $f: x \mapsto 3 + 2x + 5x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, donc on ne peut pas appliquer les formules sur les dérivées. Utilisons la définition du nombre dérivé : si $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3 + 2x + 5x\sqrt{x} - 3}{x} = \frac{2x + 5x\sqrt{x}}{x} = 2 + 5\sqrt{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2.$$

La fonction f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

2. Si f est dérivable en x_0 on sait qu'une équation de la tangente à \mathcal{C} au point de \mathcal{C} d'abscisse x_0 est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Pour $x_0 = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$. Une équation de la tangente Δ à \mathcal{C} au point $A(0; 3)$ est $y = 3 + 2x$.

Remarque : La tangente Δ n'est autre que la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 3 + 2x$, approximation affine de f au voisinage de $x = 0$.

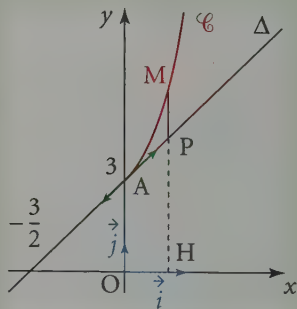
3. $f(x) = 3 + 2x + 5x\sqrt{x}$.

Si $x > 0$, soit H, P, M les points de même abscisse x respectivement sur (Ox) , Δ , \mathcal{C} .

On a si y_M et y_P désignent les ordonnées des points M et P :

$$\begin{aligned} y_M - y_P &= f(x) - (3 + 2x) \\ &= 5x\sqrt{x} > 0. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} est au-dessus de Δ .



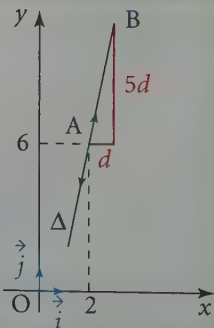
22 **1.** $f(x) = x^2 + x$ $f'(x) = 2x + 1$
sur \mathbb{R} ; $f'(2) = 5$.

2. Soit $A(2; 6)$ un point de \mathcal{C} et Δ la tangente à \mathcal{C} en A. Soit un autre point B de Δ . Le coefficient directeur de Δ est :

$$f'(2) = 5 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Si l'on prend $x_B - x_A = d$ ($d \in \mathbb{R}$), alors

$y_B - y_A = 5d$; ce qui permet d'avoir un autre point B de Δ .



23 Soit $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

1. Une équation de la tangente Δ à \mathcal{C} au point d'abscisse -1 de \mathcal{C} est :

$$y = f(-1) + (x + 1)f'(-1).$$

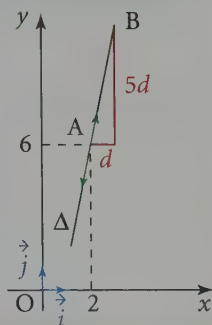
$$f(-1) = 4, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

$$\text{et } f'(-1) = -4.$$

Une équation de Δ est donc :

$$y = 4 + (x + 1)(-4)$$

$$y = -4x.$$



2. Étudions le signe de $f(x) - (-4x)$:

$$f(x) - (-4x) = x^3 + 3x^2 - x + 1 - (-4x)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$= (x + 1)^3$$

$$(\text{car } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

• Si $x < -1$, on a $(x + 1)^3 < 0$

donc $f(x) - (-4x) < 0$;

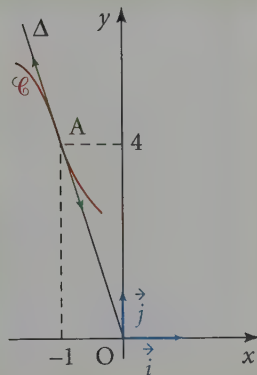
donc \mathcal{C} est en dessous de Δ (raisonner comme à l'exercice 21).

• Si $x > -1$, on a $(x + 1)^3 > 0$

donc $f(x) - (-4x) > 0$;

donc \mathcal{C} est au-dessus de Δ .

Nous avons construit seulement une partie de \mathcal{C} au voisinage de $A(-1; 4)$.



Remarque : La courbe \mathcal{C} est de part et d'autre de la tangente en A.

On dit que A est un **point d'inflexion** de \mathcal{C} .

24 $f: x \mapsto \frac{1-3x}{x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et

$$f'(x) = \frac{-3(x+1) - (1-3x)1}{(x+1)^2} = -\frac{4}{(x+1)^2}.$$

La courbe représentative \mathcal{C} admet une tangente de coefficient directeur -1 si et seulement si $-\frac{4}{(x+1)^2} = -1$ c'est-à-dire :

$$(x+1)^2 = 4, \text{ soit } x+1 = 2 \quad \text{ou} \quad x+1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

Une équation de la tangente en $A(1 ; f(1))$ est :

$$\begin{aligned}y &= f(1) + (x-1)f'(1) \\y &= -1 + (x-1)(-1) \\y &= -x.\end{aligned}$$

Une équation de la tangente en $B(-3 ; f(-3))$ est :

$$\begin{aligned}y &= f(-3) + (x+3)f'(-3) \\y &= -5 + (x+3)(-1) \\y &= -x-8.\end{aligned}$$

- 25** • $f: x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et :

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Une équation de la tangente Δ en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ à \mathcal{C} est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

- a)** Si $x_0 = -1$, $f(x_0) = 5$, $f'(-1) = -4$.

Une équation de Δ est : $y = 5 + (x + 1)(-4)$

$$y = -4x + 1.$$

- b)** Δ est parallèle à la droite \mathcal{D} d'équation $y = 6x + 1$ si et seulement si son coefficient directeur $f'(x_0)$ est égal à celui de \mathcal{D} qui est 6 :

$$2x_0 - 2 = 6$$

$$x_0 = 4.$$

Une équation de Δ est :

$$\begin{aligned}y &= f(4) + (x-4) \times 6 \\y &= 10 + (x-4) \times 6 \\y &= 6x - 14.\end{aligned}$$

- c)** Soit Δ une tangente à \mathcal{C} en $M_0(x_0 ; f(x_0))$ de \mathcal{C} . Son équation est :

$$(1) \quad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Elle passe par $A(3 ; 2)$ donc :

$$2 = f(x_0) + (3 - x_0)f'(x_0).$$

Cette équation va nous permettre de déterminer l'abscisse x_0 du point M_0 :

$$2 = x_0^2 - 2x_0 + 2 + (3 - x_0)(2x_0 - 2).$$

Après simplification : $x_0^2 - 6x_0 + 6 = 0$.

$$\Delta = 36 - 24 = 12,$$

$$x_0 = \frac{6 - \sqrt{12}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x_0 = 3 + \sqrt{3}.$$

Il y a donc deux tangentes répondant à la question.

- Si $x_0 = 3 - \sqrt{3}$, $f(3 - \sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})^2 - 2(3 - \sqrt{3}) + 2$

$$= 9 - 6\sqrt{3} + 3 - 6 + 2\sqrt{3} + 2$$

$$= 8 - 4\sqrt{3}$$

$$f'(3 - \sqrt{3}) = 2(3 - \sqrt{3}) - 2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Une équation de Δ est, d'après (1) :

$$y = 8 - 4\sqrt{3} + (x - 3 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})$$

$$y = 2(2 - \sqrt{3})x - 10 + 6\sqrt{3} \quad (\text{après simplification}).$$

• Si $x_0 = 3 + \sqrt{3}$, par un calcul identique (changer le signe devant $\sqrt{3}$), une équation de Δ est :

$$y = 2(2 + \sqrt{3})x - 10 - 6\sqrt{3}.$$

26 1. $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$); $f'(x) = 2ax$.

Une équation de la tangente en $M(x_0; f(x_0))$ à \mathcal{P} est :

$$y = ax_0^2 + (x - x_0)2ax_0$$

$$(1) \quad y = (2ax_0)x - ax_0^2.$$

2. Si $x_0 \neq 0$, $(2ax_0)x - ax_0^2 = 0$ si et seulement si $x = \frac{ax_0^2}{2ax_0} = \frac{x_0}{2}$.

Les coordonnées de T sont $\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$.

Faisons $x = 0$ dans (1) : $y = -ax_0^2$ et les coordonnées de T' sont $(0; -ax_0^2)$.

3. L'abscisse de H est celle de M : x_0 .

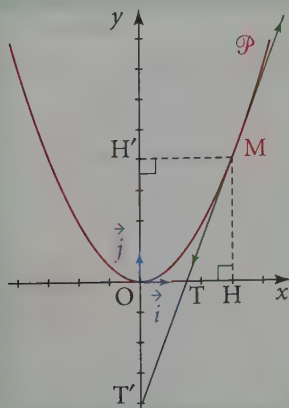
L'abscisse de T est $\frac{x_0}{2}$, les points O, T, H sont alignés (appartiennent à Ox) donc le point T est le milieu de [OH].

L'ordonnée de H' est celle de M : $f(x_0) = ax_0^2$.

L'ordonnée de T' est $-ax_0^2$ les points O, T', H' appartiennent à Oy, les ordonnées T' et H' sont opposées donc le point O est donc le milieu de [H'T'].

4. Connaissant M, soit H son projeté orthogonal sur (Ox).

La tangente cherchée passe par M et le milieu T de [OH].



Remarque : Au lieu de projeter M sur (Ox) , on peut projeter M en H' sur (Oy) .
La tangente cherchée passe par M et le symétrique T' de H' par rapport à O .

27 1. $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} \text{ si } x \neq 0.$$

Une équation de la tangente en $M(x_0; f(x_0))$ à \mathcal{H} est, si $x_0 \neq 0$:

$$y = \frac{a}{x_0} + (x - x_0) \left(-\frac{a}{x_0^2} \right)$$

$$(1) \quad y = \left(-\frac{a}{x_0^2} \right) x + \frac{2a}{x_0}.$$

2. $\left(-\frac{a}{x_0^2} \right) x + \frac{2a}{x_0} = 0$ si est seulement si :

$$\frac{a}{x_0^2} x = \frac{2a}{x_0} \text{ soit } x = 2x_0.$$

Les coordonnées de T sont $(2x_0; 0)$.

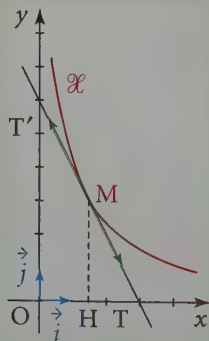
Faisons $x = 0$ dans (1) $y = \frac{2a}{x_0}$ et les coordonnées de T' sont $\left(0; \frac{2a}{x_0} \right)$.

3. Les coordonnées du milieu de $[TT']$ sont :

$$\frac{x_T + x_{T'}}{2} = x_0 \quad \text{et} \quad \frac{y_T + y_{T'}}{2} = \frac{a}{x_0}.$$

Ce sont les coordonnées de M donc M est le milieu de $[TT']$.

4. Connaissant M , soit H son projeté orthogonal sur (Ox) . La tangente cherchée passe par M et le symétrique T de O par rapport à H .



1 Emploi des dérivées : théorèmes

Soit un intervalle I (ouvert ou fermé, borné ou non).

1. Une fonction f est constante sur I si et seulement si elle admet une dérivée nulle sur I .
2. Soit une fonction f dérivable sur I .
 - f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I ($f'(x)$ étant nul pour un nombre fini de valeurs de x).
 - f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I ($f'(x)$ étant nul pour un nombre fini de valeurs de x).

2 Étude des variations d'une fonction

Il existe trois méthodes permettant d'étudier les variations d'une fonction :

1. Emploi des définitions (cf. chapitre 1).
2. Emploi des théorèmes sans l'aide des dérivées (cf. chapitre 1).
3. Emploi de la dérivée qui est un outil *beaucoup plus performant*.

Mais on n'oubliera pas, avant de se lancer dans un calcul de dérivée, que les deux premières méthodes peuvent donner des résultats très rapidement dans certains cas.

3 Branches infinies

Nous supposons le repère orthogonal. Soit \mathcal{C} la courbe représentant une fonction f et $M(x; f(x))$ un point du \mathcal{C} .

→ Asymptote verticale

Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant x_0 (sauf éventuellement en x_0).

On dit que **la limite de $f(x)$ est $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0** si $f(x)$ garde un signe constant et si $|f(x)|$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, dès que $|x - x_0|$ est suffisamment proche de 0.

On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou plus simplement} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$$

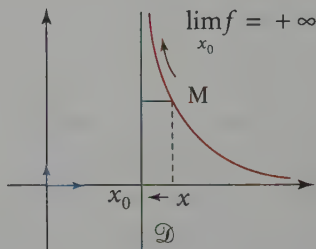
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty.$$

• Interprétation graphique

Donnons un exemple de figure possible. Supposons $f(x) > 0$.

Soit \mathcal{D} la droite d'équation $x = x_0$. $|x - x_0|$ est la distance de M à la droite \mathcal{D} .

$f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, dès que cette distance est suffisamment proche de 0. On dit que \mathcal{D} est une **asymptote verticale** à \mathcal{C} .



→ Asymptote horizontale

On dit que **la limite de $f(x)$ est ℓ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$)** si $|f(x) - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, dès que $|x|$ est suffisamment grand.

On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell.$$

• Interprétation graphique

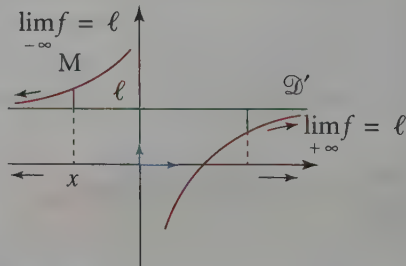
Donnons un exemple de figure possible.

Soit \mathcal{D}' la droite d'équation $y = \ell$; $|f(x) - \ell|$ est la distance de M à \mathcal{D}' .

Cette distance peut être rendue aussi petite que l'on veut, dès que $|x|$ est suffisamment grand.

On dit que \mathcal{D}' est une **asymptote horizontale** à \mathcal{C} .

Nous pouvons avoir d'autres cas de figures suivant que la courbe est *au-dessus* ou *au-dessous* de \mathcal{D}' .



⇒ Asymptote oblique

Soit une fonction affine $g: x \mapsto ax + b$. On dit que **la limite de $f(x) - ax - b$ est nulle quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$)** si $|f(x) - ax - b|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, dès que $|x|$ est suffisamment grand.

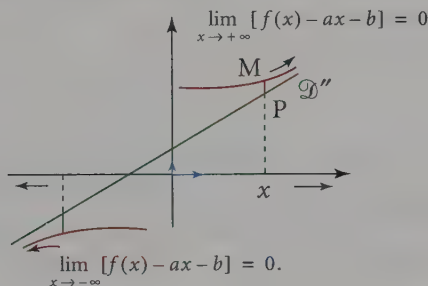
On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

• Interprétation graphique

Donnons un exemple de figure possible.



Soit \mathcal{D}'' la droite d'équation, $y = ax + b$; $|f(x) - ax - b| = PM$, P étant le point de \mathcal{D}'' de même abscisse x que M .

La distance PM peut être rendue aussi petite que l'on veut, dès que $|x|$ est suffisamment grand. On dit que \mathcal{D}'' est une **asymptote oblique** à \mathcal{C} .

Nous pouvons avoir d'autres cas de figures suivant que la courbe est *au-dessus* ou *au-dessous* de \mathcal{D}'' .

⇒ Limite infinie à l'infini

On dit que **la limite de $f(x)$ est $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$)** si $f(x)$ garde un signe constant et si $|f(x)|$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, dès que $|x|$ est suffisamment grand.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Les autres écritures s'obtiennent en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

• Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-5}$ de $]5; +\infty[$ vers \mathbb{R} .

a) En $+\infty$, la limite de f est : $+\infty$.

V F

b) En $+\infty$, la limite de f est : 2.

V F

c) En 5, la limite de f est : 0.

V F

d) En 5, la limite de f est : $-\infty$.

V F

e) En 5, la limite de f est : $+\infty$.

V F

→ Corrigé p. 103

2 $f: x \mapsto x \left(\cos \frac{1}{x} - 2 \right)$.

a) En $+\infty$, la limite de f est : $+\infty$.

V F

b) En $+\infty$, la limite de f est : $-\infty$.

V F

c) En 0, la limite de f est : $+\infty$.

V F

d) En 0, la limite de f est : 0.

V F

→ Corrigé p. 103

3 $f: x \mapsto \frac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)}$ de $]2; +\infty[$ vers \mathbb{R} .

a) En $+\infty$, la limite de f est : $+\infty$.

V F

b) En $+\infty$, la limite de f est : 1.

V F

c) En $+\infty$, la limite de f est : 0.

V F

d) En 2, la limite de f est : 0.

V F

e) En 2, la limite de f est : $+\infty$.

V F

→ Corrigé p. 103

4 $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer a, b, c, d sachant que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -2$, $f(2) = -5$.

Soit $I \left(\frac{1}{3}; \frac{20}{27} \right)$.

a) $a = -1, b = 1, c = -1, d = 1$.

V F

b) $a = 1, b = -1, c = 1, d = 1$.

V F

c) Dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, la fonction obtenue est paire ;

V F

d) Dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, elle est impaire.

V F

➔ Corrigé p. 103

5 $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ $g: x \mapsto |x| + \frac{1}{|x|}$.

a) f est paire.

V F

b) f est impaire.

V F

c) g est paire.

V F

d) g est impaire.

V F

e) Pour tout $x \neq 0$, $\left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \frac{1}{|x|}$.

V F

f) Si $x < 0$, les arcs de courbe représentant f et g sont symétriques par rapport à (Oy) ;

V F

g) Si $x < 0$, les arcs de courbe représentant f et g sont symétriques par rapport à (Ox) .

V F

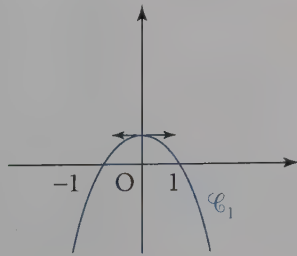
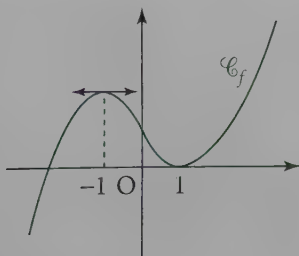
➔ Corrigé p. 104

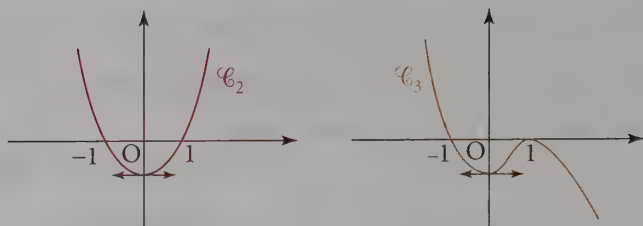
EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Lecture de graphiques

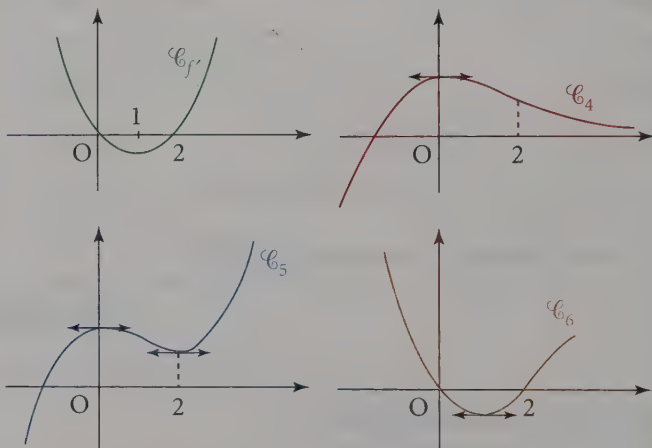
6 On appelle \mathcal{C}_f la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .
 $\mathcal{C}_{f'}$ la représentation graphique d'une fonction dérivée f' définie sur \mathbb{R} .

1. On connaît \mathcal{C}_f . L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ ou \mathcal{C}_3 représente f' . Laquelle ?





2. On connaît \mathcal{C}_f (voir page suivante). L'une des courbes \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}_5 ou \mathcal{C}_6 représente f . Laquelle ?

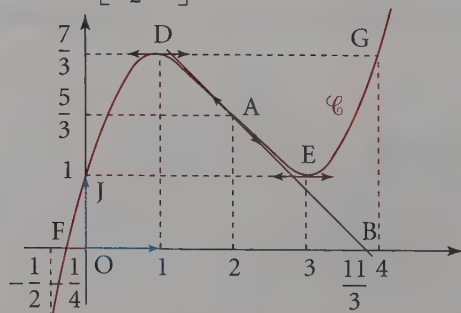


➔ Corrigé p. 104

7 Comme au bac

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Sur le graphique ci-après, la courbe \mathcal{C} représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}; 4]$.



On précise que :

- la courbe \mathcal{C} passe par les points A, D, E, F, G et J de coordonnées respectives $\left(2; \frac{5}{3}\right)$, $\left(1; \frac{7}{3}\right)$, $(3; 1)$, $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$, $\left(4; \frac{7}{3}\right)$, et $(0; 1)$;
- la droite (AB) est tangente en A à la courbe \mathcal{C} et le point B a pour coordonnées $\left(\frac{11}{3}; 0\right)$;
- les tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points D et E sont parallèles à l'axe des abscisses.

1. Donner, en utilisant le graphique précédent :

- les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(2)$;
 - les solutions, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$, des inéquations $f(x) > 0$, $f(x) \geq 1$;
 - les solutions, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$, de l'inéquation $f'(x) \leq 0$.
- 2.** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left[-\frac{1}{4}; 4\right]$.

En déduire celui de la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ définie sur $\left]-\frac{1}{4}; 4\right]$.

➔ Corrigé p. 104

Encadrement de fonctions

- 8** **1.** Étudier les variations de $f: x \mapsto \sin x - x$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire que $\sin x \leq x$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 2.** Étudier les variations de $g: x \mapsto \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 3.** Étudier les variations de $h: x \mapsto \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

4. Étudier les variations de $k : x \mapsto \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

En déduire que pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

5. Application

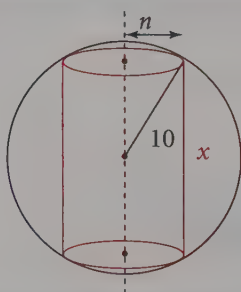
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-4} de $\cos(0,15)$.

→ Corrigé p. 105

Extremum d'une fonction

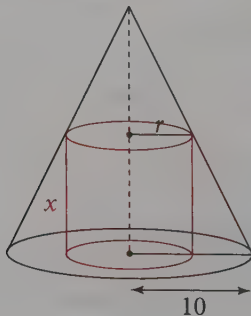
- 9 On donne une sphère de rayon 10 cm. Calculer la hauteur x d'un cylindre inscrit dans la sphère (voir figure) de volume maximal. Calculer ce maximum.

Remarque : Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$.



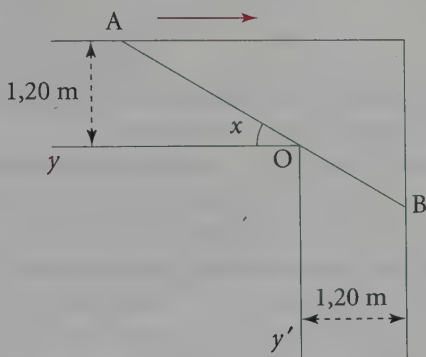
→ Corrigé p. 107

- 10 On donne un cône dont la base est un cercle de rayon 10 cm, de hauteur 20 cm. Calculer la hauteur x d'un cylindre inscrit dans le cône (voir figure) de volume maximal. Calculer ce maximum.



→ Corrigé p. 108

- 11** ★ Un couloir de largeur 1,20 m tourne à angle droit (voir figure).



On veut transporter dans ce couloir, dans le sens de la flèche, un tableau en position verticale. Ce tableau est représenté par le segment $[AB]$ sur la figure.

1. Calculer OA , OB , AB en fonction de $\widehat{AOy} = x$.

2. Étudier les variations de AB si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. Construire le segment $[A_0B_0]$ de longueur minimale.

En déduire la longueur maximale du tableau que l'on peut faire passer dans le couloir.

➔ Corrigé p. 109

Étude de fonctions polynômes

Pour les exercices **12** et **14**, on supposera le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal, les axes de coordonnées étant (Ox) et (Oy) .

12 ★ 1. Soit la fonction $f: x \mapsto -2x^2 + 4x$ définie sur \mathbb{R} .

a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.

b) Étudier les variations et construire la représentation graphique Γ de la fonction f .

2. Étudier les variations et construire la représentation graphique Γ_1 de la fonction $f_1: x \mapsto |-2x^2 + 4x|$ définie sur \mathbb{R} .

3. Étudier les variations et construire la représentation graphique Γ_2 de la fonction $f_2 : x \mapsto -2x^2 + 4|x|$ définie sur \mathbb{R} .

→ Corrigé p. 111

13 ★ 1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f .

c) Montrer que le point $I(0 ; -1)$ est centre de symétrie de la courbe Γ représentant f .

d) Construire Γ ainsi que la tangente à Γ au point I .

2. La courbe Γ rencontre l'axe des abscisses (Ox) en un seul point d'abscisse x_0 . Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2} .

→ Corrigé p. 113

14 ★ 1. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.

b) Étudier les variations de f .

2. a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe Γ représentant f , au point d'abscisse -1 de Γ .

b) Étudier le signe de $f(x) + 6x + \frac{3}{2}$. En déduire la position de Γ par rapport à Δ .

c) Construire Γ et Δ .

3. Discuter graphiquement le nombre de racines de l'équation :

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 2 - m = 0$$

suivant les valeurs du réel m .

→ Corrigé p. 114

Étude de fonctions rationnelles

15 ★ Soit les fonctions :

$$f : x \mapsto x^3 - x \quad \text{définie sur } \mathbb{R} ;$$

$$g : x \mapsto \frac{-9x}{x-1} \quad \text{définie sur } \mathbb{R} - \{1\}.$$

1. a) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.

b) Étudier la parité de f .

c) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) Mettre $g(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-1}$, a et b étant des constantes que l'on calculera.

b) Étudier la limite de g quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$; 1 .

c) Étudier les variations de g .

3. a) Soit le polynôme P défini par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 10.$$

Montrer que -2 est une racine de P .

b) Trouver un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x+2)Q(x).$$

c) En déduire les points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentant les fonctions f et g .

4. a) Construire, dans un même repère, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

→ Corrigé p. 117

16 ★ Comme au bac

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 8x + \frac{57\,800}{x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Unités graphiques : • 1 cm pour 20 unités en abscisses ;
• 1 cm pour 200 unités en ordonnées.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. f' désigne la dérivée de f . Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $(x-85)$.

3. Établir le tableau de variation de f .

4. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = 8x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} . Justifier que \mathcal{C} admet une autre asymptote.

5. Construire \mathcal{C} avec ses asymptotes.

Partie B

Le directeur d'un spectacle doit organiser une tournée en Europe. Le trajet à effectuer pour transporter les décors est de 3 400 km.

Pour cela, on utilise un camion dont la consommation en gazole est donnée par $\left(5 + \frac{v^2}{297,5}\right)$ litres par heure, où v représente la vitesse du véhicule en km/h. Le prix du litre de gazole est de 0,7 € et le chauffeur perçoit 13,5 € par heure.

1. Montrer que le coût du transport, en euros, est égal à $f(v)$.
2. À quelle vitesse doit rouler le camion pour que le coût du transport soit minimal ? Quel est alors ce coût ?
3. On dispose d'au plus 1 556 € pour le transport. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse du véhicule, compte tenu de cette nouvelle donnée (on précise que le camion ne doit pas rouler à une vitesse supérieure à 90 km/h).

→ Corrigé p. 120

17 ★ Une entreprise produit du décapant liquide.

Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x} \quad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction coût moyen

- a) Étudier le sens de variation de cette fonction sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- b) Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.
- c) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} . Étudier la position relative de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} .
- d) Donner le tableau de variation de f et construire \mathcal{C} avec ses asymptotes.

2. Seuils de rentabilité pour l'entreprise

L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.

Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :

$$p(x) = -0,8x + 13$$

où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.

- a) On note P la représentation graphique de la fonction p .

Tracer P dans le même repère que la représentation de f , puis déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

- b) Retrouver le résultat précédent par le calcul. (On pourra se ramener à une inéquation du second degré).

→ Corrigé p. 122

18 ★★ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

On appelle Γ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x + 1}$, a, b et c étant des constantes que l'on calculera.

2. Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$; -1 .

3. Trouver la limite de $f(x) - x - 2$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Quel est le signe de $f(x) - x - 2$? En déduire la position de Γ par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 2$.

4. Changement de repère

a) Soit A le point d'intersection de la droite \mathcal{D} et de la droite \mathcal{D}' d'équation $x = -1$. On considère le nouveau repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point quelconque de coordonnées $(x; y)$ et $(X; Y)$ respectivement dans l'ancien repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et le nouveau repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

Trouver les relations qui permettent de calculer x et y en fonction de X et Y .

b) Trouver l'équation de Γ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

En déduire que A est centre de symétrie de Γ .

5. Étudier les variations de $g: X \rightarrow X + \frac{1}{X}$ sur $]0; +\infty[$.

Construire Γ avec ses asymptotes.

6. Soit M_0 un point de Γ d'abscisse x_0 ($x_0 > -1$) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et d'abscisse X_0 ($X_0 > 0$) dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Donner une équation de la tangente Δ en M_0 à Γ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

b) La droite Δ coupe \mathcal{D} et \mathcal{D}' respectivement en P et P' .

Calculer les coordonnées de P et P' dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$, en fonction de X_0 .

c) Montrer que l'aire du triangle APP' est constante quand $x_0 \in]-1; +\infty[$.

➔ Corrigé p. 124

Étude de fonctions trigonométriques

Indication : On pourra se reporter au chapitre 12 pour transformer certaines écritures à l'aide des formules trigonométriques.

19 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f est une fonction périodique.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.

3. a) Construire la représentation graphique \mathcal{C}_1 de f sur $[0; \pi]$.

b) Comment obtient-on les autres parties de la courbe représentant f ?

→ Corrigé p. 128

20 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto \sin 2x + 2 \sin x$ définie sur \mathbb{R} .

1. a) Étudier la parité de f .

Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que f est une fonction périodique.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.

3. a) Construire la représentation graphique \mathcal{C}_1 de f sur $[0; \pi]$.

b) Comment obtient-on les autres parties de la courbe représentant f ?

→ Corrigé p. 129

21 ★ Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{\cos x}{1 + \cos x}$ définie pour $x \neq \pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Traiter les mêmes questions qu'à l'exercice précédent. On remplacera $[0; \pi]$ par $[0; \pi[$ dans les questions **2.** et **3. a.**

→ Corrigé p. 132

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) Faux. $\frac{2x+1}{x-5} = \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}$ de limite 2 en $+\infty$.
- b) Vrai.
- c) Faux. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x+1) = 11$ et $\lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0$ avec $x-5 > 0$ pour $x > 5$.
- d) Faux. Donc (limite d'un quotient) $\lim_5 f = +\infty$.
- e) Vrai.
- 2** a) Faux. Pour $x \neq 0$, $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ donc $-3 \leq \cos \frac{1}{x} + -2 \leq -1$.
- b) Vrai. Pour $x > 0$, $x\left(\cos \frac{1}{x} - 2\right) \leq -x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$.
- c) Faux. Pour $x \neq 0$, $\left|\cos \frac{1}{x} - 2\right| \leq 3$ et $f(x) \leq 3|x|$ de limite 0 en 0.
- d) Vrai.
- 3** a) Faux. $\frac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+5)} = \frac{x+2}{(x-2)(x+5)}$
- b) Faux. $f(x) = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)}$ de limite 0 en $+\infty$.
- c) Vrai. Si $x > 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$, avec $x-2 > 0$.
- d) Faux. donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-2)(x+5)} = +\infty$.
- e) Vrai.
- 4** a) Vrai. $a+b+c = -1$, $3a+2b+c = -2$.
 $4a+2b+c = -3$, on obtient un système qu'on résout par la méthode du pivot de Gauss facilement.
- b) Faux.
- c) Faux. En posant $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + X \\ y = \frac{20}{27} + Y \end{cases}$ on trouve $Y = -X^3 - \frac{2}{3}X$ impaire.
- d) Vrai.

5 a) Faux. b) Vrai. c) Vrai. d) Faux.

e) Vrai. x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe simultanément donc $\left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}$.

f) Faux. Si $x < 0$, $g(x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$.

g) Vrai.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

6 On se reportera aux figures de l'énoncé.

1. Sur $]-\infty; -1]$, f est strictement croissante donc $f'(x) \geq 0$. Nous devons exclure la courbe \mathcal{C}_1 .

Sur $[-1; 1]$, f est strictement décroissante donc $f'(x) \leq 0$. Ce qui est vérifié sur les courbes \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .

Sur $[1; +\infty[$, f est strictement croissante donc $f'(x) \geq 0$. Ce qui est vérifié seulement sur la courbe \mathcal{C}_2 .

La courbe \mathcal{C}_2 représente f' .

2. On a $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$. Nous devons exclure la courbe \mathcal{C}_6 .

On a $f'(x) < 0$ sur $]0; 2[$ et $f'(0) = f'(2) = 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 2]$. Ce qui est vérifié sur les courbes \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_5 .

On a $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$ et $f'(2) = 0$ donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Ce qui est vérifié seulement sur la courbe \mathcal{C}_5 .

La courbe de la courbe \mathcal{C}_5 représente f .

7 On se reportera à la figure donnée dans l'énoncé.

1. a) • $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point D.

Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) = 0$.

• $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point A.

Cette tangente est la droite (AB) donc son coefficient directeur est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - \frac{5}{3}}{\frac{11}{3} - 2} = -\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = -1 \quad \text{donc} \quad f'(2) = -1.$$

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les abscisses x des points de \mathcal{C} ayant une ordonnée strictement positive, c'est-à-dire des points de \mathcal{C} au-dessus de l'axe des abscisses.

On lit sur le graphique que \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses pour $-\frac{1}{4} < x \leq 4$.

L'ensemble des solutions de $f(x) > 0$ est $]-\frac{1}{4}; 4]$.

• Les solutions de $f(x) \geq 1$ sont les abscisses x des points de \mathcal{C} ayant une ordonnée supérieure ou égale à 1, c'est-à-dire des points de \mathcal{C} au-dessus de la droite ou sur la droite d'équation $y = 1$.

L'ensemble des solutions de $f(x) \geq 1$ est $[0; 4]$.

c) On a $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante c'est-à-dire si et seulement si $1 \leq x \leq 3$.

L'ensemble des solutions de $f'(x) \leq 0$ est $[1; 3]$.

2. Les variations de f se déduisent de la lecture du graphique. Nous avons indiqué ces variations dans le tableau ci-dessous.

Nous déduisons les variations de \sqrt{f} et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ en utilisant les théorèmes **2. d)** et

2. c) (cf. résumé de cours, chapitre 1)

x	$-\frac{1}{4}$	1	3	4
$f(x)$	0	$\frac{7}{3}$	1	$\frac{7}{3}$
$\sqrt{f(x)}$	0	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	1	$\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$		$\sqrt{\frac{3}{7}}$	1	$\sqrt{\frac{3}{7}}$

8 1. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x - x$ et $f'(x) = \cos x - 1$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	0	

On en déduit que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x$.

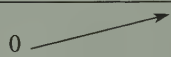
Remarque : Les **variations** de f ont permis de connaître le **signe** de f .

Cette méthode est souvent utilisée pour étudier le signe d'une fonction ou résoudre une inéquation (voir les questions suivantes).

2. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$g'(x) = -\sin x + x = -f(x)$ dont on connaît le signe (question **1.**) :

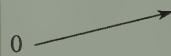
x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	0	

On en déduit que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) \geq 0$ donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

3. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$h(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

$h'(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = g(x)$ dont on connaît le signe (question **2.**) :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	0	+
$h(x)$	0	

On en déduit que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) \geq 0$ donc $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Compte tenu de la question **1.**, on a pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

4. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $k(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$

$k'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} = -h(x)$ dont on connaît le signe (question **3.**) :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$k'(x)$	0	-
$k(x)$	0	

On en déduit que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $k(x) \leq 0$

$$\text{donc } \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Compte tenu de la question **2.**, on a pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

5. Application

$$1 - \frac{(0,15)^2}{2} \leq \cos(0,15) \leq 1 - \frac{(0,15)^2}{2} + \frac{(0,15)^4}{24}.$$

$$\text{La calculatrice donne : } 1 - \frac{(0,15)^2}{2} \approx 0,98875 \quad 1 - \frac{(0,15)^2}{2} + \frac{(0,15)^4}{24} \approx 0,98877$$

$$0,9887 \leq \cos(0,15) \leq 0,9888.$$

C'est bien un encadrement de $\cos(0,15)$ d'amplitude 10^{-4} .

9 On se reportera à la figure de l'énoncé.

Appelons x la hauteur du cylindre cherché et r le rayon d'une base du cylindre. D'après le théorème de Pythagore (x et r évalués en cm) :

$$r^2 = (10)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 100 - \frac{x^2}{4}.$$

Le volume du cylindre est :

$$V(x) = \pi \left(100 - \frac{x^2}{4}\right)x = \pi \left(-\frac{x^3}{4} + 100x\right).$$

$$V'(x) = \pi \left(-\frac{3x^2}{4} + 100\right)$$

$$-\frac{3x^2}{4} + 100 \geq 0 \text{ si et seulement si :}$$

$$100 \geq \frac{3x^2}{4}$$

$$x^2 \leq \frac{400}{3}$$

$$x \leq \frac{20}{\sqrt{3}} \quad (\text{car } x \geq 0).$$

x	0	$\frac{20}{\sqrt{3}}$	20
$V'(x)$		+	0 -
$V(x)$	0	\nearrow	\searrow 0

Le volume du cylindre est maximal pour $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

Ce volume maximal est [en utilisant $V(x) = \pi\left(100 - \frac{x^2}{4}\right)x$]:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) &= \pi\left(100 - \frac{400}{4 \times 3}\right)\frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{200\pi}{3} \times \frac{20}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\,000\pi}{3\sqrt{3}} \approx 2\,418,40 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

- 10** On se reportera à la figure de l'énoncé. La hauteur du cône est 20 cm. Appelons x la hauteur du cylindre cherché et r son rayon. On a :

$$\frac{r}{10} = \frac{20-x}{20}, \text{ d'où le rayon du cylindre } r = \frac{20-x}{2}.$$

Le volume du cylindre est :

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2 x = \pi\left(10 - \frac{x}{2}\right)^2 x \\ &= \pi\left(100 - 10x + \frac{x^2}{4}\right)x \\ &= \pi\left(\frac{x^3}{4} - 10x^2 + 100x\right). \end{aligned}$$

$$V'(x) = \pi\left(\frac{3x^2}{4} - 20x + 100\right).$$

Cherchons les racines de $\frac{3x^2}{4} - 20x + 100 = 0$.

$$\Delta = 400 - 300 = 100 = 10^2,$$

$$x' = \frac{20-10}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \text{ et } x'' = \frac{20+10}{2 \times \frac{3}{4}} = 20.$$

Le signe de $V'(x)$ est donné par le théorème du signe du trinôme.

x	0	$\frac{20}{3}$	20		
$V'(x)$		+	0	-	0
$V(x)$	0	↗ ↘		0	

Le volume du cylindre est maximal pour $x = \frac{20}{3}$.

Ce volume maximal est [en utilisant $V(x) = \pi\left(10 - \frac{x}{2}\right)^2 x$]:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{20}{3}\right) &= \pi\left(10 - \frac{10}{3}\right)^2 \frac{20}{3} = \pi\left(\frac{20}{3}\right)^2 \frac{20}{3} \\ &= \pi\left(\frac{20}{3}\right)^3 \approx 930,84 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

11 1.

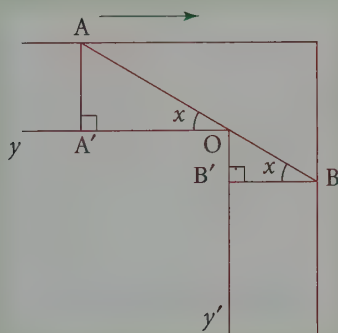


fig. 1

Soit A' le projeté orthogonal de A sur (Oy) et B' le projeté orthogonal de B sur (Oy') .

Dans le triangle rectangle $AA'O$:

$$\sin x = \frac{AA'}{OA} = \frac{1,20}{OA} \quad \text{donc} \quad OA = \frac{1,20}{\sin x} \text{ m.}$$

Dans le triangle rectangle $BB'O$:

$$\cos x = \frac{BB'}{OB} = \frac{1,20}{OB} \quad \text{donc} \quad OB = \frac{1,20}{\cos x} \text{ m.}$$

On en déduit :

$$AB = OA + OB = \frac{1,20}{\sin x} + \frac{1,20}{\cos x} \text{ m.}$$

2. Étudions les variations de la fonction f définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1,20}{\sin x} + \frac{1,20}{\cos x} = 1,20 \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right).$$

Rappelons la formule sur la dérivée : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

$$f'(x) = 1,20 \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{-\sin x}{\cos^2 x} \right) = 1,20 \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, nous avons $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$.

La fonction : $X \mapsto X^3$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $\sin^3 x < \cos^3 x$ si est seulement si $\sin x < \cos x$ c'est-à-dire pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Nous pouvons faire le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$		

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,20 \times 2\sqrt{2} = 2,40\sqrt{2}.$$

3. Le segment $[A_0B_0]$ de longueur minimale $2,40\sqrt{2}$ m s'obtient en construisant $\widehat{yOA_0} = \widehat{y'OB_0} = \frac{\pi}{4}$.

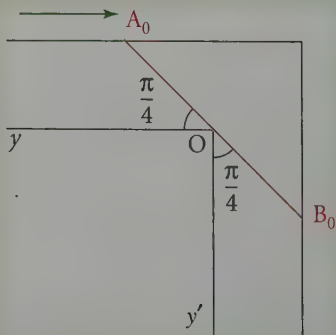


fig. 2

- Si la longueur du tableau est strictement supérieure à A_0B_0 , on arrive à la position $[AB]$ de la fig. 1 et on ne peut plus avancer.
- Si la longueur du tableau est égale à A_0B_0 , on arrive à la position $[A_0B_0]$ de la fig. 2 et on ne peut plus avancer.
- Si la longueur du tableau est strictement inférieure à A_0B_0 , le tableau peut passer. Une valeur approchée par défaut de $2,40\sqrt{2}$, est 3,39 : on ne peut donc traverser le couloir que si la longueur du tableau est inférieure à 3,39 m.

12 1. $f(x) = -2x^2 + 4x$ défini sur \mathbb{R} .

a) Si $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(-2 + \frac{4}{x}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{4}{x}\right) = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2\left(-2 + \frac{4}{x}\right) = -\infty.$$

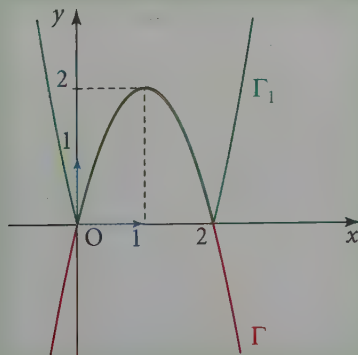
$$\text{Vous verrez, de même, que} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2\left(-2 + \frac{4}{x}\right) = -\infty.$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{+\infty} f = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

b) Pour tout x réel, $f'(x) = -4x + 4 = 4(-x + 1)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$

Remarquons que $-2x^2 + 4x = 0$ si et seulement si $2x(-x + 2) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 2$.



2. $f_1(x) = |-2x^2 + 4x| = |f(x)|$ défini sur \mathbb{R} .

Rappelons (cf. résumé de cours, chapitre 1) que $|f|$ varie dans le même sens que f sur tout intervalle où $f \geq 0$ et en sens contraire sur tout intervalle où $f \leq 0$. D'où le tableau de variation de f_1 :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	2	0	$-\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	0	2	0	$+\infty$

- Si $x \leq 0$ ou $x \geq 2$, $f(x) \leq 0$ donc $f_1(x) = |f(x)| = -f(x)$; les arcs de Γ et Γ_1 correspondants sont symétriques par rapport à (Ox) .
- Si $0 \leq x \leq 2$, $f(x) \geq 0$ donc $f_1(x) = |f(x)| = f(x)$; les arcs de Γ et Γ_1 correspondants sont confondus.

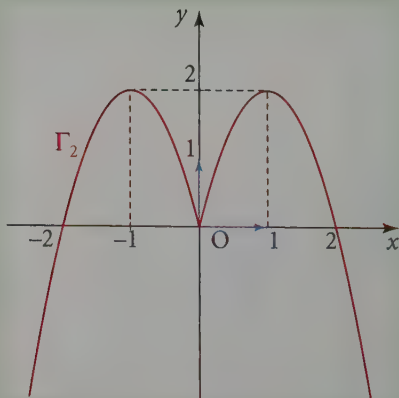
3. $f_2(x) = -2x^2 + 4|x|$ sur \mathbb{R} .

Cette fonction est paire. Nous l'étudions donc sur $[0; +\infty[$.

Nous construirons la courbe représentative sur $[0; +\infty[$ et nous compléterons par symétrie par rapport à (Oy) .

Sur $[0; +\infty[$, on a $x \geq 0$ donc $|x| = x$ et $f_2(x) = f(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f_2(x)$	0	2	$+\infty$



13 1. $f(x) = x^3 + x - 1$ défini sur \mathbb{R} .

a) Si $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

$$\text{Vous verrez, de même, que} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty.$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

b) Pour tout x réel :

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) Utilisons la méthode donnée à l'exercice 7, chap. 1.

Soit les points $M(h; f(h))$ et $M'(-h; f(-h))$.

$$f(h) = h^3 + h - 1 \quad \text{et} \quad f(-h) = -h^3 - h - 1.$$

Les coordonnées du milieu de $[MM']$ sont :

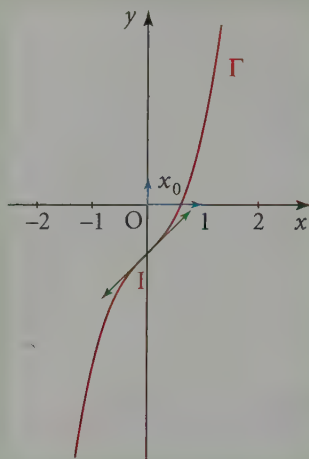
$$\left(\frac{h-h}{2}; \frac{h^3+h-1-h^3-h-1}{2} \right) = (0; -1).$$

Les points M et M' sont donc symétriques par rapport au point $I(0; -1)$.

d) Pour construire Γ , calculons les coordonnées de quelques points :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-11	-3	-1	1	9

$f'(0) = 1$. Le coefficient directeur de la tangente en I est 1. En raison de la symétrie par rapport à I , la courbe est de part et d'autre de la tangente en I .



2. Le graphique nous montre que Γ rencontre (Ox) en un seul point d'abscisse x_0 . C'est la racine de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

On a : $0 < x_0 < 1$.

La calculatrice donne $f(0,6) = -0,184$ et $f(0,7) = 0,043$ donc :

$$f(0,6) < 0 < f(0,7)$$

$$f(0,6) < f(x_0) < f(0,7);$$

comme f est strictement croissante : $0,6 < x_0 < 0,7$.

De plus : $f(0,68) = -0,005568$ et $f(0,69) = 0,018509$ donc :

$$f(0,68) < 0 < f(0,69)$$

$$f(0,68) < f(x_0) < f(0,69);$$

comme f est strictement croissante : $0,68 < x_0 < 0,69$.

C'est un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2} .

14 1. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1$ sur \mathbb{R} .

a) Si $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{2};$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

Vous verrez, de même, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$.

b) Pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(x^2 + 2x - 3) = \frac{3}{2}(x-1)(x+3).$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$\frac{25}{2}$	\searrow	$-\frac{7}{2}$	\nearrow	$+\infty$

2. a) Une équation de la tangente Δ à Γ au point d'abscisse -1 de Γ est :

$$y = f(-1) + (x+1)f'(-1)$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 1 = \frac{9}{2}$$

$$f'(-1) = -6.$$

Une équation de Δ est donc :

$$y = \frac{9}{2} + (x+1)(-6)$$

$$y = -6x - \frac{3}{2}.$$

$$\mathbf{b)} \quad f(x) + 6x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1 + 6x + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^3$$

(car $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, faire $a = x$ et $b = 1$).

• Si $x < -1$, on a $(x+1)^3 < 0$ donc :

$$f(x) + 6x + \frac{3}{2} = f(x) - \left(-6x - \frac{3}{2} \right) < 0.$$

- Soit M et M' deux points de même abscisse x ($x < -1$) respectivement sur Γ et Δ ; appelons y_M et $y_{M'}$ les ordonnées de ces points.

$$y_M - y_{M'} = f(x) - \left(-6x - \frac{3}{2}\right) < 0$$

donc $y_M < y_{M'}$, et Γ est au-dessous de Δ .

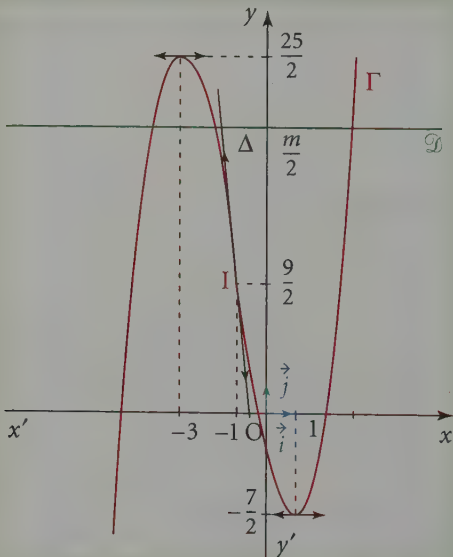
- Si $x > -1$, on a $(x + 1)^3 > 0$.

Soit M et M' deux points de même abscisse x ($x > -1$) respectivement sur Γ et Δ :

$$y_M - y_{M'} = f(x) - \left(-6x - \frac{3}{2}\right) > 0$$

donc $y_M > y_{M'}$, et Γ est au-dessus de Δ .

Remarques : On pourrait démontrer, comme à l'exercice précédent, que le point $I\left(-1; \frac{9}{2}\right)$ est un centre de symétrie de Γ donc la courbe est de part et d'autre de la tangente en I .



3. (1) $x^3 + 3x^2 - 9x - 2 - m = 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1 = \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{2}$$

Les solutions de (1) sont les abscisses des points d'intersection de Γ et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{m}{2}$ parallèle à (Ox).

Quand m varie de $-\infty$ à $+\infty$, on lit graphiquement le nombre de points d'intersection de Γ et \mathcal{D} donc le nombre de racines de (1) :

- si $\frac{m}{2} < -\frac{7}{2}$ c'est-à-dire $m < -7$, une racine ;
- si $\frac{m}{2} = -\frac{7}{2}$ c'est-à-dire $m = -7$, deux racines (l'une d'elles est 1) ;
- si $-\frac{7}{2} < \frac{m}{2} < \frac{25}{2}$ c'est-à-dire $-7 < m < 25$, trois racines ;
- si $m = 25$, deux racines (l'une d'elles est -3) ;
- si $m > 25$, une racine.

15 1. $f: x \mapsto x^3 - x$ définie sur \mathbb{R} .

a) Si $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Vous verrez, de même, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

Donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

b) Pour tout x réel, $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$ donc f est impaire. Nous l'étudierons donc sur $[0; +\infty[$. Nous construirons la courbe représentative sur $[0; +\infty[$ et nous compléterons par symétrie par rapport à O.

c) Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 - 1$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	0	\searrow	\nearrow $+\infty$
		$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

2. $g: x \mapsto -\frac{9x}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

a) Mettons $g(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-1}$, a et b étant des constantes.

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b}{x-1} = \frac{ax + b - a}{x-1}$$

Nous avons $\frac{-9x}{x-1} = \frac{ax + b - a}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a = -9 \\ b - a = 0 \end{cases}; \text{ on trouve } a = -9; b = -9 \text{ donc } g(x) = -9 - \frac{9}{x-1}$$

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{9}{x-1}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-9 - \frac{9}{x-1}\right) = -9$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{9}{x-1}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-9 - \frac{9}{x-1}\right) = -9$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$.

Distinguons deux cas suivant que $x > 1$ ou $x < 1$:

Si $x > 1$, alors $-\frac{9}{x-1} < 0$. donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{9}{x-1}\right) = -\infty$. et nous écrivons :

$$\lim_{1^+} g = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-9 - \frac{9}{x-1}\right) = -\infty.$$

On dit que la limite de g à droite en 1 est $-\infty$.

Si $x < 1$, alors $-\frac{9}{x-1} > 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{9}{x-1}\right) = +\infty$ et nous écrivons :

$$\lim_{1^-} g = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-9 - \frac{9}{x-1}\right) = +\infty.$$

On dit que la limite de g à gauche en 1 est $+\infty$.

c) Pour tout $x \neq 1$, $g(x) = -9 - \frac{9}{x-1}$

$g'(x) = -9 \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{9}{(x-1)^2} > 0$ donc g est strictement croissante sur

$] -\infty ; 1[$ et sur $] 1 ; +\infty[$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	-9	$+\infty$	-9

3. a) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$, d'où $P(-2) = -8 - 4 + 2 + 10 = 0$;
donc -2 est une racine de P .

b) Nous cherchons un polynôme Q tel que pour tout x réel :

$$P(x) = (x+2)Q(x).$$

• Cherchons d'abord le degré de Q .

P est de degré 3 et $x+2$ de degré 1 donc Q est de degré 2 ; $Q(x)$ est de la forme
 $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

• Recherche des coefficients a, b, c .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ réel : } x^3 - x^2 - x + 10 &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c. \end{aligned}$$

Donc (cf. chap. 2) :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = -1 \\ c + 2b = -1 \\ 2c = 10 \end{cases} ; \text{ on trouve } a = 1 ; \quad b = -3 ; \quad c = 5.$$

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 3x + 5).$$

c) Les abscisses des points d'intersection des courbes représentant f et g sont les solutions des équations équivalentes, si $x \neq 1$:

$$x^3 - x = \frac{-9x}{x-1}$$

$$x^3 - x + \frac{9x}{x-1} = 0$$

$$\frac{(x^3 - x)(x-1) + 9x}{x-1} = 0$$

$$\frac{x^4 - x^3 - x^2 + 10x}{x-1} = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - x + 10) = 0. \quad (1)$$

On a vu que $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10 = (x+2)(x^2 - 3x + 5)$ donc (1) est équivalente à $x(x+2)(x^2 - 3x + 5) = 0$.

Le discriminant de $x^2 - 3x + 5 = 0$ est strictement négatif donc cette dernière équation n'a pas de racines.

Les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont : $x = 0$ et $x = -2$.

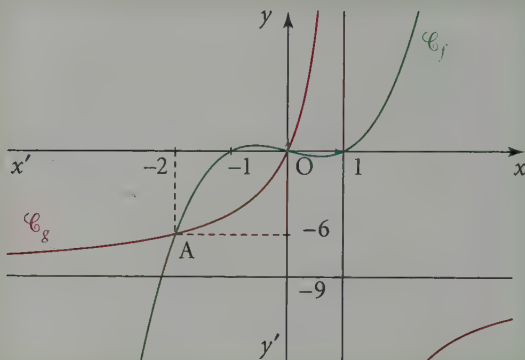
Les points d'intersection sont : O et $A(-2 ; -6)$.

4. a) Construction de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g

On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -9$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = -9$ donc (cf. résumé de cours) une asymptote à la courbe représentant g est la droite d'équation : $y = -9$.

On a vu que $\lim_{1^+} g = -\infty$ et $\lim_{1^-} g = +\infty$ donc une autre asymptote est la droite d'équation $x = 1$.

Nous avons construit ces asymptotes sur le graphique ci-dessous.



b) On a $f(x) \leq g(x)$ lorsque \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g c'est-à-dire sur $] -\infty ; -2] \cup [0 ; 1 [$.

16 Partie A

$$f(x) = 8x + \frac{57\,800}{x} \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (8x) = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{57\,800}{x} = +\infty, \text{ donc } \lim_0 f = +\infty.$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{57\,800}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

2. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8 - \frac{57\,800}{x^2} = \frac{8x^2 - 57\,800}{x^2} \\ &= \frac{8(x^2 - 7\,225)}{x^2} = \frac{8(x - 85)(x + 85)}{x^2}. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 85$.

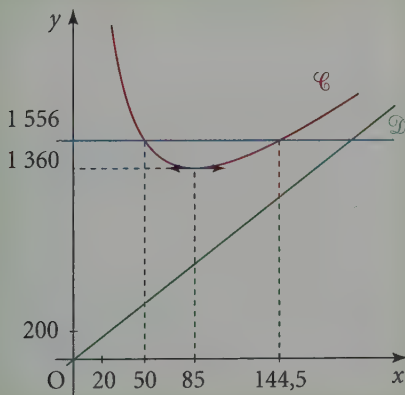
x	0	85	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 1 360 \nearrow	$+\infty$

$$4. f(x) - 8x = \frac{57\,800}{x}.$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 8x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{57\,800}{x} = 0$ donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = 8x$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}) .

• Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, une autre asymptote est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire la droite (Oy) .

5.



Partie B

1. Temps (en heures) mis pour transporter les décors : $\frac{3\,400}{v}$.

Consommation de gazole : $\left(5 + \frac{v^2}{297,5}\right) \times \frac{3\,400}{v}$ litres.

Coût du transport (en euros) :

$$\left(5 + \frac{v^2}{297,5}\right) \times \frac{3\,400}{v} \times 0,7 + 13,5 \times \frac{3\,400}{v} = 8v + \frac{57\,800}{v} = f(v).$$

2. Le coût du transport $f(v)$ est minimal pour $v = 85$.
Ce coût minimal est $f(85) = 1\,360$ €.

3. $f(v) \leq 1\,556$ si et seulement si :

$$8v + \frac{57\,800}{v} \leq 1\,556$$

$$8v^2 - 1\,556v + 57\,800 \leq 0$$

$$v^2 - 194,5v + 7\,225 \leq 0.$$

Le discriminant du trinôme $v^2 - 194,5v + 7\,225$ est :

$$\Delta = (194,5)^2 - 4 \times 7\,225 = 8\,930,25 = (94,5)^2.$$

Les racines sont $v_1 = \frac{194,5 - 94,5}{2} = 50$ et $v_2 = \frac{194,5 + 94,5}{2} = 144,5$.

Graphiquement, on a $f(v) \leq 1\,556$ si et seulement si $50 \leq v \leq 144,5$, mais la vitesse du camion étant limitée à 90 km/h, la vitesse vérifie les conditions : $50 \leq v \leq 90$.

17 1. Étude de la fonction coût moyen

a) La fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{0,5x^2 - 8}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{2x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2}.$$

Lorsque x est strictement positif, les réels $x+4$ et $2x^2$ sont strictement positifs. Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-4$.

Sur l'intervalle $]0; 4[$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]0; 4[$.

Sur l'intervalle $]4; +\infty[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]4; +\infty[$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(0,5x + \frac{8}{x}\right); \lim_{x \rightarrow 0} (0,5x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8}{x} = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(0,5x + \frac{8}{x}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} (0,5x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ montre que la courbe \mathcal{C} représentative de f admet une asymptote d'équation $x = 0$.

$$\text{c) Pour tout réel } x \text{ de }]0; +\infty[, \quad f(x) - 0,5x = \frac{8}{x}.$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0,5x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} = 0.$$

Ce résultat prouve que la droite \mathcal{D} d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à \mathcal{C} .

La position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} est donnée par le signe de :

$$f(x) - 0,5x = \frac{8}{x}.$$

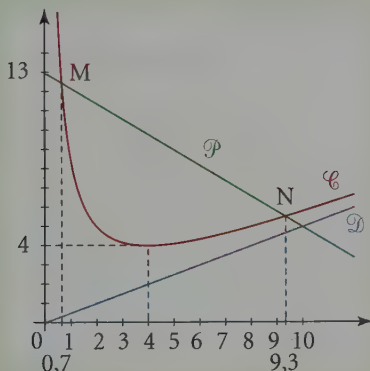
Quel que soit x réel de $]0; +\infty[$, $\frac{8}{x}$ est strictement positif donc \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{D} .

d) Le tableau de variation de f est :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

$$f(4) = 2 + \frac{8}{4} = 4.$$

\mathcal{C} admet deux asymptotes d'équations respectives : $y = 0,5x$ et $x = 0$.



2. Seuil de rentabilité pour l'entreprise

a) La fonction p est une fonction affine de x , sa représentation graphique \mathcal{P} est la demi-droite définie par :

$$\begin{cases} y = -0,8x + 13 \\ x > 0 \end{cases} \quad (\text{car on suppose } x > 0 \text{ dans l'énoncé}).$$

\mathcal{P} coupe \mathcal{C} en deux points M et N. On lit graphiquement que l'abscisse de M est comprise entre 0,5 et 1 ($x_M \approx 0,7$) et que celle de N est comprise entre 9 et 9,5 ($x_N \approx 9,3$).

L'entreprise est bénéficiaire si $p(x) > f(x)$. Graphiquement, cela se produit lorsque \mathcal{P} est au-dessus de \mathcal{C} c'est-à-dire lorsque $x_M < x < x_N$ soit $0,7 < x < 9,3$.

b) L'entreprise est bénéficiaire si :

$$p(x) > f(x).$$

Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, cette inéquation est équivalente successivement à :

$$-0,8x + 13 - 0,5x - \frac{8}{x} > 0$$

$$-1,3x + 13 - \frac{8}{x} > 0.$$

Comme x est strictement positif, cette inéquation est équivalente successivement à :

$$-1,3x^2 + 13x - 8 > 0$$

$$1,3x^2 - 13x + 8 < 0.$$

Le discriminant du trinôme est : $\Delta = 13^2 - 4 \times 1,3 \times 8 = 127,4$.

Le trinôme admet deux racines distinctes qui sont :

$$x' = \frac{13 - \sqrt{127,4}}{2,6} \approx 0,65 \quad x'' = \frac{13 + \sqrt{127,4}}{2,6} \approx 9,34.$$

Le trinôme est strictement négatif (c'est-à-dire du signe contraire du coefficient de x^2) lorsque $x \in]x' ; x''[$.

L'entreprise est bénéficiaire lorsqu'elle produit entre 0,65 et 9,34 hectolitres de décapant.

18 $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

1. Mettons $f(x)$ sous la forme $ax + b + \frac{c}{x + 1}$, a , b et c étant des constantes.

$$ax + b + \frac{c}{x + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1} = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}.$$

Nous avons $\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$ pour tout $x \neq -1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 ; \text{ on trouve } a = 1 ; b = 2 ; c = 1. \\ b + c = 3 \end{cases}$$

Donc $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x + 1}$.

2. • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x + 1}\right) = 2$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1}\right) = +\infty$.

• On verra de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1}\right) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x + 1}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 2) = 1$ donc :

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 1}\right) = +\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x+1} \right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2) = 1 \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x+2 + \frac{1}{x+1} \right) = -\infty.$$

Puisque $\lim_{-1^+} f = +\infty$ et $\lim_{-1^-} f = -\infty$, la droite \mathcal{D}' d'équation $x = -1$ est une asymptote à Γ .

$$\mathbf{3.} f(x) = x+2 + \frac{1}{x+1} \text{ donc } f(x) - x - 2 = \frac{1}{x+1} \text{ pour } x \neq -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0.$$

La droite \mathcal{D} d'équation $y = x+2$ est donc une asymptote oblique à la courbe Γ .

Position de Γ par rapport à \mathcal{D}

$$f(x) - x - 2 = \frac{1}{x+1}.$$

$$\bullet \text{ Si } x < -1, \text{ alors } \frac{1}{x+1} < 0 \text{ donc } f(x) - x - 2 < 0.$$

Soit M et M' deux points de même abscisse x ($x < -1$) respectivement sur Γ et \mathcal{D} , appelons y_M et $y_{M'}$, les ordonnées de ces points :

$$y_M - y_{M'} = f(x) - x - 2 < 0$$

donc $y_M < y_{M'}$, et Γ est au-dessous de \mathcal{D} .

$$\bullet \text{ Si } x > -1, \text{ alors } \frac{1}{x+1} > 0. \text{ Soit } M \text{ et } M' \text{ deux points de même abscisse}$$

x ($x > -1$) respectivement sur Γ et \mathcal{D} :

$$y_M - y_{M'} = f(x) - x - 2 > 0$$

donc $y_M > y_{M'}$, et Γ est au-dessus de \mathcal{D} .

4. Changement de repère

a) Calculons les coordonnées du point d'intersection A des deux asymptotes \mathcal{D} et \mathcal{D}' :

$$\begin{cases} y = x+2 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' est $A(-1; 1)$. Prenons pour nouveau repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point quelconque de coordonnées $(x; y)$ et $(X; Y)$ respectivement dans l'ancien repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et le nouveau repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= (-\vec{i} + \vec{j}) + (X\vec{i} + Y\vec{j}) \\ &= (-1+X)\vec{i} + (1+Y)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x = -1 + X \\ y = 1 + Y. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } y = x + 2 + \frac{1}{x+1} &\Leftrightarrow 1 + Y = -1 + X + 2 + \frac{1}{X} \\ &\Leftrightarrow Y = X + \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

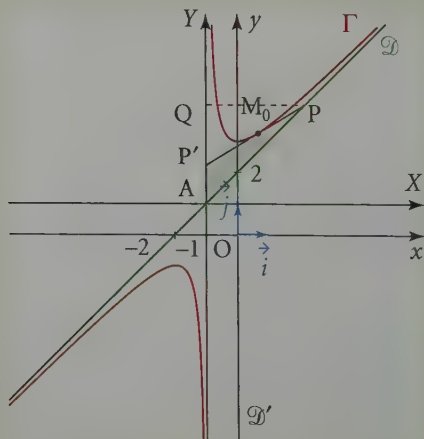
C'est la nouvelle équation de Γ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction $g: X \mapsto X + \frac{1}{X}$ est impaire donc A est centre de symétrie de Γ .

$$\text{5. Pour } X \neq 0, g'(X) = 1 - \frac{1}{X^2} = \frac{X^2 - 1}{X^2}$$

X	0	1	$+\infty$
$g'(X)$		- 0 +	
$g(X)$	↘ 2 ↗		

Construisons Γ pour $X \in]0; +\infty[$ et complétons par symétrie par rapport à A.



6. a) L'équation $Y = X + \frac{1}{X}$ de Γ étant plus simple que celle de Γ dans

l'ancien repère, nous allons traiter la question dans le nouveau repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M_0 un point de Γ d'abscisse x_0 ($x_0 > -1$) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On a $x_0 = -1 + X_0$.

Si $x_0 > -1$, alors $X_0 = x_0 + 1 > 0$.

Une équation de Δ dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$Y = g(X_0) + (X - X_0)g'(X_0)$$

$$Y = X_0 + \frac{1}{X_0} + (X - X_0)\left(1 - \frac{1}{X_0^2}\right)$$

$$Y = X_0 + \frac{1}{X_0} + X - X_0 - \frac{X}{X_0^2} + \frac{1}{X_0}$$

$$Y = \left(1 - \frac{1}{X_0^2}\right)X + \frac{2}{X_0}$$

b) Dans le nouveau repère, une équation de \mathcal{D} est $Y = X$.

• Calculons les coordonnées du point d'intersection P de Δ et \mathcal{D} :

$$\begin{cases} Y = \left(1 - \frac{1}{X_0^2}\right)X + \frac{2}{X_0} \\ Y = X \end{cases}$$

L'abscisse de P est solution de l'équation :

$$X = \left(1 - \frac{1}{X_0^2}\right)X + \frac{2}{X_0}$$

$$\frac{X}{X_0^2} = \frac{2}{X_0} \text{ d'où } X = 2X_0.$$

Le point P a pour coordonnées $(2X_0; 2X_0)$.

• Calculons les coordonnées du point d'intersection P' de Δ et \mathcal{D}' :

$$\begin{cases} Y = \left(1 - \frac{1}{X_0^2}\right)X + \frac{2}{X_0} \\ X = 0 \end{cases}$$

Le point P' a pour coordonnées $\left(0; \frac{2}{X_0}\right)$.

c) Soit Q le projeté orthogonal de P sur la droite \mathcal{D}' . L'aire du triangle APP' est :

$$\text{aire}(APP') = \frac{1}{2}AP' \times PQ = \frac{1}{2} \times \frac{2}{X_0} \times 2X_0 = 2.$$

Cette aire est constante.

19 $f: x \mapsto 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ définie sur \mathbb{R} .

1. Pour tout x réel :

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ que l'on peut écrire :}$$

$$\sin\left[2(x + \pi) + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ donc :}$$

$$1 + \sin\left[2(x + \pi) + \frac{\pi}{4}\right] = 1 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x + \pi) = f(x).$$

Une période de f est π .

Si $k \in \mathbb{Z}^*$, on verra, de même, que $f(x + k\pi) = f(x)$ donc $k\pi$ est aussi une période de f .

Interprétation graphique

Soit les points $M(x; f(x))$ et $M'(x + k\pi; f(x + k\pi))$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(k\pi; 0)$ donc M a pour image M' par la translation de vecteur $\vec{u}(k\pi; 0)$.

2. f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Étudions le signe de $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Pour tout x de \mathbb{R} :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Si $x \in [0; \pi]$, $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = \frac{5\pi}{8}$.

Si $0 \leq x < \frac{\pi}{8}$, alors $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$;

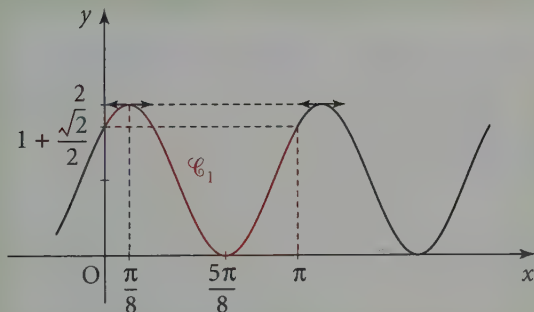
Si $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$, alors $\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$ et $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$;

Si $\frac{5\pi}{8} < x \leq \pi$, alors $\frac{3\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$ et $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

D'où le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	π		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	↗ 2 ↘		0	↗ $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	

3. a) Construction de \mathcal{C}_1



b) D'après la question **1.** (interprétation graphique) les autres parties de la courbe représentant f se déduisent de \mathcal{C}_1 par des translations de vecteur :

$$\vec{u}(k\pi; 0), \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

20 $f: x \mapsto \sin 2x + 2 \sin x$ définie sur \mathbb{R} .

1. a) Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-2x) + 2 \sin(-x) = -\sin 2x - 2 \sin x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est une fonction impaire.

Interprétation graphique

L'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentant f .

b) Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \sin[2(x + 2\pi)] + 2 \sin(x + 2\pi) \\ &= \sin(2x + 4\pi) + 2 \sin x \\ &= \sin 2x + 2 \sin x = f(x). \end{aligned}$$

Une période de f est 2π .

Si $k \in \mathbb{Z}^*$, on verra, de même, que $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$ donc $k \cdot 2\pi$ est aussi une période de f .

Interprétation graphique

Soit les points $M(x; f(x))$ et $M'(x + k \cdot 2\pi; f(x + k \cdot 2\pi))$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(k \cdot 2\pi; 0)$ donc M a pour image M' par la translation de vecteur $\vec{u}(k \cdot 2\pi; 0)$.

2. Pour tout x réel :

$$f'(x) = 2 \cos 2x + 2 \cos x = 2(\cos 2x + \cos x).$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, cherchons à factoriser $\cos 2x + \cos x$:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (\text{voir les formules de duplication, chap. 5, résumé de cours})$$

$$\cos 2x + \cos x = 2 \cos^2 x - 1 + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x - 1.$$

Pour factoriser l'expression $2 \cos^2 x + \cos x - 1$, on pose $X = \cos x$ et on étudie le trinôme $2X^2 + X - 1$.

Ce trinôme admet pour racines -1 et $\frac{1}{2}$ donc :

$$2X^2 + X - 1 = 2(X + 1)\left(X - \frac{1}{2}\right).$$

On obtient donc, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 4(\cos x + 1) \cos\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

• **Signe de $\cos x + 1$**

Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\cos x + 1 \geq 0$;

sur $[0; \pi]$, $\cos x + 1 = 0$ si et seulement si $x = \pi$.

• **Signe de $\cos x - \frac{1}{2}$**

Pour tout réel x de $[0; \pi]$, $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ si et seulement si $\cos x = \frac{1}{2}$

si et seulement si $x = \frac{\pi}{3}$.

D'où, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$:

$$\text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad \text{alors } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\cos x - \frac{1}{2} \geq 0.$$

Si $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$, alors $\cos \frac{\pi}{3} \geq \cos x$

$$\frac{1}{2} \geq \cos x$$

$$\cos x - \frac{1}{2} \leq 0.$$

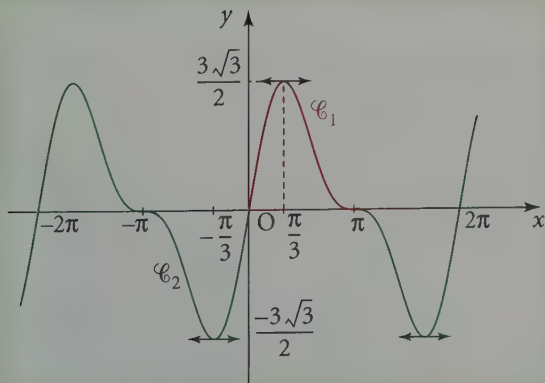
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos x + 1$	+	+	0
$\cos x - \frac{1}{2}$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

D'où le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

3. a) Construction de \mathcal{C}_1



b) D'après la question **1. a)**, l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentant f . Construisons \mathcal{C}_2 symétrique de \mathcal{C}_1 par rapport à O ; $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est la représentation graphique de f sur $[-\pi; \pi]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π .

D'après la question **1. b)**, les autres parties de la courbe représentant f se déduisent de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ par des translations de vecteur $\vec{u}(k \cdot 2\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

21 **1.** $f: x \mapsto \frac{\cos x}{1 + \cos x}$ définie pour $x \neq \pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

L'ensemble de définition D de f est l'ensemble des réels \mathbb{R} privé des nombres $\pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

a) Pour tout x de D , on a $-x \in D$ et :

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = f(x).$$

Donc f est une fonction paire.

Interprétation graphique

Dans un repère orthogonal, l'axe des ordonnées (Oy) est un axe de symétrie de la courbe représentant f .

b) Pour tout x de D , on a $x + 2\pi \in D$ et :

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = f(x).$$

Une période de f est 2π .

Si $k \in \mathbb{Z}^*$, on verra, de même, que $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$ donc $k \cdot 2\pi$ est aussi une période de f .

Interprétation graphique

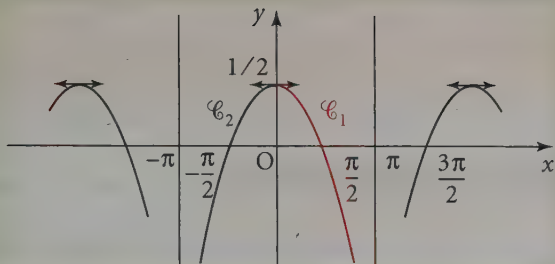
Soit les points $M(x; f(x))$ et $M'(x + k \cdot 2\pi; f(x + k \cdot 2\pi))$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(k \cdot 2\pi; 0)$ donc M a pour image M' par la translation de vecteur $\vec{u}(k \cdot 2\pi; 0)$.

2. La fonction f est dérivable pour tout x de D (quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul) et :

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 + \cos x) - \cos x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\sin x}{(1 + \cos x)^2}.$$

D'où le tableau de variation de f sur $[0; \pi[$:

x	0	π
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	

3. a) Construction de \mathcal{C}_1 

Remarquons que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc \mathcal{C}_1 coupe (Ox) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

b) D'après la question **1. a)**, l'axe (Oy) est un axe de symétrie de la courbe représentant f . Construisons \mathcal{C}_2 symétrique de \mathcal{C}_1 par rapport à (Oy) ; $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est la représentation graphique de f sur $]-\pi; \pi[$ qui est un intervalle d'amplitude 2π .

D'après la question **1. b)**, les autres parties de la courbe représentant f se déduisent de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ par des translations de vecteur $\vec{u}(k \cdot 2\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

1 Suite de nombres réels

→ Vocabulaire

Une suite de nombres réels est une application d'une partie I de \mathbb{N} dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est le terme d'**indice** n ou de **rang** n . On dit aussi que u_n est le **terme général** de la suite. On désigne cette suite simplement par $(u_n)_{n \in I}$ ou encore plus simplement par (u_n) .

→ Récurrence

On dit qu'une suite est **récurrente** si chaque terme (autre que les premiers termes) est défini en fonction des termes qui la précèdent.

Par exemple, elle peut être définie par :

$$\begin{cases} u_0 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (1)$$

ou par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n; u_{n-1}) \end{cases} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) sont appelées **relations de récurrence**.

→ Variations d'une suite

• Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **constante** si :

$$\text{pour tout } n \in I, n+1 \in I \text{ et } u_n = u_{n+1}.$$

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **croissante** si :

$$\text{pour tout } n \in I, n+1 \in I \text{ et } u_n \leq u_{n+1}.$$

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite **décroissante** si :

$$\text{pour tout } n \in I, n+1 \in I \text{ et } u_n \geq u_{n+1}.$$

- Si on a des inégalités strictes c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$ ou $u_n > u_{n+1}$, on dit que la suite est **strictement** croissante ou décroissante.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est dite **périodique** s'il existe un entier naturel non nul P tel que pour tout n de \mathbb{I} , on a $n + P \in \mathbb{I}$ et $u_{n+P} = u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est dite **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que pour tout n de \mathbb{I} , on a $u_n \geq m$.
Elle est dite **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que pour tout n de \mathbb{I} , on a $u_n \leq M$.
Une suite majorée et minorée est une suite **bornée**.

2 Suite arithmétique

→ Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (1) Pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.
 - (2) Il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.
 - (3) Il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.
- Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique considérée.

→ Somme des termes d'une suite arithmétique

Rappelons le calcul de la somme S_n suivante :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_0$$

d'où :

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_n + u_0)$$

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)$$

$$S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : En partant de u_1 au lieu de u_0 , on trouve :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

3 Suite géométrique

→ Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(1') Pour tout entier naturel non nul n , $u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}$.

(2') Il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

(3') Il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0q^n$.

Le nombre réel q est appelé **raison** de la suite géométrique considérée.

→ Somme des termes d'une suite géométrique

Rappelons le calcul de la somme S_n suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ qS_n &= qu_0 + qu_1 + \dots + qu_n \end{aligned}$$

d'où en retranchant membre à membre :

$$(1-q)S_n = u_0 - qu_n = u_0 - q^{n+1}u_0 = u_0(1 - q^{n+1}).$$

Si $q \neq 1$,

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$, $S_n = u_0 + u_0 + \dots + u_0 = (n+1)u_0$.

Remarque : En partant de u_1 au lieu de u_0 , si $q \neq 1$, on trouve :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

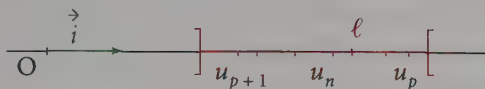
4 Limite d'une suite

Nous supposons toutes les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) définies pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

→ Définitions

• On dit que la suite (u_n) a pour limite le nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



• Lorsqu'une suite admet une limite ℓ , on dit qu'elle est **convergente**. On dit aussi qu'elle **converge** vers ℓ .

⇒ Exemples

- Soit k un entier naturel non nul, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$.

⇒ Théorèmes

Théorème « des gendarmes »

Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$

et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \ell \ell'$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell' \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$.

Remarque : Les théorèmes précédents sont encore vrais si l'une des suites (v_n) ou (w_n) est constante, sa limite étant la valeur constante de la suite.

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.

a) La suite est croissante.

V F

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 2$.

V F

→ Corrigé p. 146

2 Pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

a) Si $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

V F

b) Si $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

V F

c) Si $n \geq 3$, la suite est croissante.

V F

→ Corrigé p. 146

3 Pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n = \frac{n}{1+n^2}$.

a) La suite est croissante.

V F

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

V F

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

V F

→ Corrigé p. 146

4 Pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = (-1)^{2n+1}$.

a) La suite est : croissante ;

V F

b) La suite est : décroissante ;

V F

c) La suite est : constante.

V F

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

V F

→ Corrigé p. 146

5 Forage d'un tunnel

Le 1^{er} mètre de forage coûte 1 000 F, le 2^e mètre 50 F de plus, le 3^e mètre 50 F de plus..., chaque mètre de forage coûte 50 F de plus que le mètre précédent.

a) Le prix du n^{e} mètre de forage est $P_n = 1\,000 + 50n$.

V F

b) Le prix du n^{e} mètre de forage est $P_n = 950 + 50n$.

V F

c) Le prix total des n mètres est $\frac{n(2\,000 + 50n)}{2}$.

V F

d) Le prix total des n mètres est $\frac{n(1\,950 + 50n)}{2}$.

V F

→ Corrigé p. 146

6 Soit D_0 le demi-disque de diamètre $[AB]$ de rayon 1 cm.

Soit D_1, D_2, \dots, D_n les demi-disques tangents en A à D_0 , de rayons en cm :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$. On suppose $D_n \subset D_{n-1} \subset \dots \subset D_1 \subset D_0$.

a) L'aire de D_n est $\mathcal{A}_n = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

V F

b) L'aire de D_n est $\mathcal{A}_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

V F

c) Soit $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}_n) = \pi$.

V F

d) Soit $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{S}_n) = \frac{2\pi}{3}$.

V F

→ Corrigé p. 146

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Étude des variations

7 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n}.$$

1. Étudier les variations de cette suite.

2. Montrer que la suite est minorée par 2.

→ Corrigé p. 147

8 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{2^n}{n}.$$

Étudier les variations de cette suite.

→ Corrigé p. 147

- 9 Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n^2 + u_n. \end{cases}$$

Étudier les variations de cette suite.

→ Corrigé p. 148

Suites arithmétiques

- 10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que :

$$u_0 = 11, u_n = 433, u_0 + u_1 + \dots + u_n = 47\,064.$$

Déterminer le nombre entier n et la raison de la suite.

→ Corrigé p. 148

- 11 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que sa raison soit égale à 4 et telle que $u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = 18\,900$. Déterminer u_0 et u_{99} .

→ Corrigé p. 148

- 12 Déterminer les termes réels u_0, u_1, u_2, u_3 d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 20 et la somme de leurs carrés 120.

Indication : Poser $u_0 = a - \frac{3r}{2}, u_1 = a - \frac{r}{2}, u_2 = a + \frac{r}{2}, u_3 = a + \frac{3r}{2}$.

→ Corrigé p. 148

- 13 ★ Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$.

1. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de u_0, u_n et n .

2. En partant de la formule donnant $(a+r)^3$ où l'on remplacera successivement a par u_0, u_1, \dots, u_n , en déduire : $S'_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

3. Calculer la somme des n premiers nombres entiers non nuls, la somme des carrés des n premiers nombres entiers non nuls.

→ Corrigé p. 149

- 14 ★ 1. Soit P la fonction définie sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 + 9x - 4\,140$.

a) Calculer $P(60)$.

b) Résoudre $P(x) = 0$ et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction de x .

2. On dispose d'une subvention de 82 800 € pour atteindre dans un désert une nappe d'eau souterraine. Le coût du forage est fixé à 200 € pour le premier mètre creusé, 240 € pour le deuxième, 280 € pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 40 € par mètre creusé.

On désigne par u_n le coût en euros du n -ième mètre creusé ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Déterminer u_5 . Préciser la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n .

b) Pour tout entier non nul n , on désigne par S_n le coût total en francs du forage d'un puits de n mètres (par exemple, le coût total du forage d'un puits de 3 mètres est $200 + 240 + 280 = 720$).

Montrer que le coût total du forage d'un puits de n mètres est $20n^2 + 180$.

c) À l'aide de la question 1., indiquer la profondeur maximale du forage que l'on peut réaliser.

➔ Corrigé p. 149

Suites géométriques

15 Déterminer le premier terme u_0 et la raison de la suite géométrique (u_n) vérifiant $u_3 = \frac{12}{5}$, $u_4 < 0$, $u_5 = \frac{48}{5}$.

➔ Corrigé p. 150

16 1. On place un capital c_0 à intérêts capitalisés annuellement au taux de $t\%$. Calculer le capital obtenu c_n au bout de n années.

2. Donner une valeur approchée affine de $(1+h)^n$ pour h voisin de 0 pour $n \in \{2; 3; 4\}$ (cf. résumé de cours, chapitre 3).

3. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + n \frac{t}{100}.$$

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 , et v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 et comparer les résultats lorsque le taux est de 4% ; 5% ; 6% .

➔ Corrigé p. 151

17 ★ Une personne reçoit 200 000 € en héritage. Le 1^{er} janvier 2008, elle a placé cette somme à intérêts composés au taux annuel de $7,5\%$.

1. De quelle somme disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2009 ?

2. On pose $u_0 = 200\,000$. On désigne par u_n la somme dont elle dispose le 1^{er} janvier de l'année $(2008+n)$ et par u_{n+1} celle dont elle disposera l'année suivante.

a) Établir une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer pour tout entier n , u_n en fonction de n .

c) Calculer u_{12} .

3. Une publicité annonce : « gagner de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100% en 12 ans ».

a) Ce placement est-il plus au moins intéressant que le précédent ?

b) Déterminer son taux annuel sachant qu'il s'agit aussi d'un placement à intérêts composés.

➔ Corrigé p. 152

- 18** ★ 1. On appelle période de désintégration d'une substance radioactive le temps T au bout duquel la moitié des noyaux de cette substance est désintégrée. Soit u_0 le nombre de noyaux radioactifs à l'instant $t = 0$.

Calculer le nombre u_n de noyaux radioactifs restants à l'instant $t = nT$ (n entier naturel).

2. La période de désintégration du plutonium 239 est $T = 24\,000$ ans.

Une centrale nucléaire produit 10 kg de plutonium 239 radioactif.

a) Combien reste-t-il de plutonium 239 radioactif au bout de n périodes ?

b) Au bout de combien de périodes, reste-t-il moins de 100 g de plutonium 239 radioactif ?

→ Corrigé p. 153

- 19** ★ Le salaire annuel d'un technicien s'élève pour l'année 2008 à 18 000 €.

Chaque année, son employeur décide de l'augmenter de 2 % et de lui allouer en plus 1 000 €.

On désigne par S_0 le salaire du technicien pour l'année 2008. Pour tout entier naturel n , on désigne par S_n son salaire pour l'année $(2008 + n)$.

Par exemple : S_2 est le salaire du technicien pour l'année 2010.

1. Calculer S_1 et S_2 .

2. Pour tout entier naturel n , exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = S_n + 50\,000$ pour tout entier naturel.

a) Calculer u_0 .

b) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

c) Exprimer u_n en fonction de n .

4. a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) En déduire le salaire prévu pour l'année 2015.

5. À partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé ?

→ Corrigé p. 153

Limites de suites

- 20** 1. Soit la suite de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que pour $n \geq 1$, $v_n \leq u_n \leq w_n$

avec $v_n = -\frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n^2}$.

2. En appliquant le théorème « des gendarmes », en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

3. À l'aide d'un tableur, construire un tableau de valeurs des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) puis représenter ces suites à l'aide d'un grapheur.

→ Corrigé p. 155

21 Soit la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$.

1. Montrer que, pour $n \geq 1$, $-\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq u_n \leq 0$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

3. Comme dans l'exercice précédent, construire un tableau de valeurs et donner les représentations graphiques des suites ci-dessus.

→ Corrigé p. 156

22 1. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2} \right)$.

2. Utiliser une calculatrice pour retrouver le résultat de la question 1.

→ Corrigé p. 157

23 Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+n+5} \right)$.

→ Corrigé p. 158

24 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 5}{u_n - 1}$$

1. Calculer u_{n+2} en fonction de u_n .

2. En déduire que la suite (u_n) est périodique. Est-elle convergente ?

→ Corrigé p. 159

25 ★ **Comme au bac**

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis, il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.

Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.

Soit V_1, V_2, V_3 les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte.

De manière générale, soit V_n le volume stocké le $n^{\text{ième}}$ samedi après la tonte.

1. a) Montrer que $V_1 = 120$ litres, $V_2 = 150$ litres, $V_3 = 157,5$ litres.

b) Calculer les volumes V_4, V_5, V_6 , exprimés en litres, stockés respectivement les 4^e, 5^e, 6^e samedis après la tonte.

2. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

3. Pour $n \geq 1$, on pose $t_n = 160 - V_n$.

a) Montrer que (t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_1 = 40$ et de raison $\frac{1}{4}$.

b) En déduire l'expression de t_n puis celle de V_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de (t_n) puis celle de (V_n) .

→ Corrigé p. 159

26 ★ Comme au bac

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 7 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - 2.$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n , et en déduire que :

$$u_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2.$$

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Illustration graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \frac{2x + 6}{5}.$$

a) Tracer la représentation graphique \mathcal{D} de f , ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0 .

En utilisant les droites \mathcal{D} et Δ , construire les points P_1, P_2, P_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 .

À quoi correspond, sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites \mathcal{D} et Δ ?

27 ★ Comme au bac

On empile l'un sur l'autre des cubes dont les arêtes ont pour longueurs respectives : $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots$ (la longueur d'une arête est la moitié de celle du cube précédent).

1. Quelle est la hauteur maximale de la pile ?
2. Quel est le volume maximal de tous les cubes ?

→ Corrigé p. 162

Limite infinie

- 28** 1. Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si quel que soit le réel $A > 0$, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

a) Soit n et k deux entiers naturels non nuls. Démontrer que : $n^k \geq n$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^k) = +\infty$.

2. On admet que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell > 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$, alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$. Étudier les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^4 - 2n^3 + n^2 - 1)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n - 3}{n + 1} \right)$.

→ Corrigé p. 163

29 ★★ **Comme au bac**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. Écrire successivement u_1 en fonction de u_0 , u_2 en fonction de u_1 , u_3 en fonction de u_2 , ..., u_n en fonction de u_{n-1} .

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$. (On utilisera l'exercice 22).

4. Écrire un programme qui permet de calculer les 15 premiers termes de la suite, ainsi que la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

→ Corrigé p. 164

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) **Vrai.** $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$ donc $u_n \leq u_{n+1}$.
 b) **Faux.** $u_{n+1} \geq n^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = +\infty$.

2 a) **Faux.** $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \sqrt{2}$.

On trouve $n > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

b) **Vrai.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \approx 2,414$ donc si $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

c) **Faux.** Pour $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc $u_n > u_{n+1}$. Suite strictement décroissante pour $n \geq 3$.

- 3** a) **Faux.** Calculer $u_n - u_{n+1}$ qui est du signe de $n^2 + n - 1 > 0$ si $n \geq 1$.

b) **Faux.** $0 \leq \frac{n}{1+n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ de limite 0.

c) **Vrai.**

- 4** a) **Faux.** $u_n = (-1)^{2n}(-1) = 1(-1) = -1$. Suite constante.

b) **Faux.**

c) **Vrai.**

d) **Faux.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -1$.

- 5** a) **Faux.** $P_n = P_1 + (n-1) = 50 = 1\,000 + (n-1)50$
 $= 950 + 50n$.

b) **Vrai.**

c) **Faux.** $P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{n(P_1 + P_n)}{2} = \frac{n(1\,950 + 50n)}{2}$.

d) **Vrai.**

6 a) **Faux.** $\mathcal{A}_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

b) **Vrai.** (\mathcal{A}_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

- c) Faux. $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$ de limite $\frac{2\pi}{3}$.
- d) Vrai.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

7 $u_n = \frac{2n+1}{n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

1. • 1^{re} méthode : calculons la *différence* $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{(2n+3)n - (2n+1)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{2n^2+3n-2n^2-n-2n-1}{(n+1)n} \\ &= -\frac{1}{(n+1)n} < 0, \end{aligned}$$

donc pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n > u_{n+1}$.

La suite (u_n) est strictement décroissante.

• 2^e méthode : u_n est de la forme $f(n)$; étudions les *variations de la fonction* f :

$x \mapsto \frac{2x+1}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}.$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0 ; +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur

$]0 ; +\infty[$. Si l'on donne à x les valeurs n et $n+1$, on a $f(n) > f(n+1)$ c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$.

2. On peut écrire pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2 \text{ puisque } \frac{1}{n} > 0, \text{ donc la suite } (u_n) \text{ est minorée par } 2.$$

8 $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour tout n de \mathbb{N}^* . Nous avons $u_n \neq 0$.

Calculons le *rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}.$$

Tous les termes de la suite (u_n) étant strictement positifs, la suite est croissante ou décroissante suivant que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{2n - n - 1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \geq 0,$$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. La suite (u_n) est croissante.

9

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n^2 + u_n. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0,$$

donc $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

10 On sait (cf. résumé de cours) que :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \frac{11 + 433}{2} = 222(n+1),$$

d'où : $222(n+1) = 47\,064$

$$n = \frac{47\,064}{222} - 1 = 211.$$

Or $u_n = u_0 + nr$,

d'où : $433 = 11 + 211r$, donc $r = 2$.

11

$$\begin{aligned} \text{On a : } 18\,900 &= u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = 100 \frac{u_0 + u_{99}}{2} \\ &= 50(u_0 + u_{99}). \end{aligned}$$

Mais : $u_{99} = u_0 + 99r = u_0 + 99 \times 4$

$$u_{99} = u_0 + 396.$$

D'où : $50(u_0 + u_0 + 396) = 18\,900$

$$u_0 = -9$$

$$u_{99} = u_0 + 396 = 387.$$

12

La suite peut s'écrire :

$$u_0 = a - \frac{3r}{2}, \quad u_1 = a - \frac{r}{2}, \quad u_2 = a + \frac{r}{2}, \quad u_3 = a + \frac{3r}{2}.$$

Traduisons les hypothèses :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 4a = 20 \\ u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \left(a - \frac{3r}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{r}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{3r}{2}\right)^2 = 120 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a = 5 \\ 4a^2 + 5r^2 = 120. \end{cases}$$

On en déduit $r^2 = 4$, donc $r = \pm 2$.

Pour $r = 2$, $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 6$, $u_3 = 8$.

Pour $r = -2$, $u_0 = 8$, $u_1 = 6$, $u_2 = 4$, $u_3 = 2$.

Remarque : Si l'on avait considéré la suite $u_0, u_0 + r, u_0 + 2r, u_0 + 3r$, on aurait obtenu un système d'inconnues u_0 et r beaucoup plus compliqué.

13 1. On sait (cf. résumé de cours) que :

$$S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

2. $(a+r)^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$.

Remplaçons a successivement par u_0, u_1, \dots, u_n :

$$(u_0 + r)^3 = u_0^3 + 3u_0^2r + 3u_0r^2 + r^3$$

$$(u_1 + r)^3 = u_1^3 + 3u_1^2r + 3u_1r^2 + r^3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(u_n + r)^3 = u_n^3 + 3u_n^2r + 3u_nr^2 + r^3.$$

Additionnons membre à membre ces $n+1$ égalités et simplifions :

$$(u_n + r)^3 = u_0^3 + 3rS'_n + 3r^2S_n + (n+1)r^3.$$

$$\text{d'où } S'_n = \frac{1}{3r} \left[(u_n + r)^3 - u_0^3 - 3r^2S_n - (n+1)r^3 \right].$$

3. Pour $u_0 = 0$, $r = 1$, $u_n = n$, on trouvera :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14 1. Étude de la fonction P

a) $P(60) = 60^2 + 9 \times 60 - 4 \ 140 = 0$.

Donc 60 est une racine de $P(x) = 0$.

b) $x^2 + 9x - 4 \ 140$ est de la forme $ax^2 + bx + c = a(x-x')(x-x'')$, x' et x'' étant les racines de $P(x) = 0$:

$$x^2 + 9x - 4 \ 140 = (x-60)(x-x'').$$

Considérons le terme constant des deux membres :

$$-4\,140 = (-60)(-x'')$$

donc
$$x'' = -\frac{4\,140}{60} = -69.$$

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont -69 et 60 .

- $P(x)$ est du signe de $a = 1$ c'est-à-dire strictement positif si $x < -69$ ou si $x > 60$.
- $P(x)$ est strictement négatif si $-69 < x < 60$.

2. Étude de la suite (u_n)

a) $u_1 = 200$

$$u_2 = 200 + 40 = 240$$

$$u_3 = 240 + 40 = 280$$

$$u_4 = 280 + 40 = 320$$

$$u_5 = 320 + 40 = 360.$$

Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n + 40$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 40 et de premier terme

$$u_1 = 200.$$

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 40 = 200 + (n-1) \times 40$$

$$u_n = 40n + 160.$$

b) Le coût total du forage d'un puits de n mètres est :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad (\text{cf. résumé de cours})$$

$$= \frac{n}{2}(200 + 40n + 160)$$

$$= \frac{n}{2}(40n + 360)$$

$$= 20n^2 + 180n.$$

c) Soit n le nombre de mètres qu'il sera possible de creuser avec une subvention de $82\,800$ euros. L'entier naturel n doit vérifier

$$S_n \leq 82\,800$$

soit $20n^2 + 180n - 82\,800 \leq 0$

$$n^2 + 9n - 4\,140 \leq 0.$$

D'après l'étude faite au **1.**, les entiers solutions sont les entiers compris entre 1 et 60 .

La profondeur maximale du forage qu'on pourra réaliser sera de 60 mètres.

15 On a $u_4 = u_3q$ et $u_5 = u_3q^2$.

Sachant que u_3 est positif et u_4 négatif, la raison q est un réel négatif.

$$u_5 = \frac{48}{5} = \frac{12}{5}q^2, \text{ d'où } q^2 = 4 \text{ donc } q = -2 \text{ (puisque } q < 0 \text{).}$$

$$u_3 = u_0 q^3 = u_0 (-2)^3 = -8u_0, \text{ d'où } u_0 = -\frac{1}{8} \times \frac{12}{5} = -\frac{3}{10}.$$

- 16** 1. Soit c_p le capital obtenu au bout de la p -ième année. Il devient au bout de la $(p+1)^e$ année :

$$c_{p+1} = c_p + c_p \frac{t}{100} = c_p \left(1 + \frac{t}{100}\right),$$

donc la suite (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$ et de 1^{er} terme c_0 .

Le capital obtenu au bout de n années est :

$$c_0 \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

- 2.** Soit la fonction $f: x \mapsto x^n$, $n \in \{2; 3; 4\}$. Une valeur approchée affine de $f(1+h) = (1+h)^n$ est $f(1) + hf'(1)$.

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ donc } f'(1) = n.$$

Donc $(1+h)^n \approx 1 + nh$.

- 3.** $u_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ et $v_n = 1 + n \frac{t}{100}$.

Nous remarquons que :

$$u_0 = v_0 = 1$$

$$u_1 = v_1 = 1 + \frac{t}{100}.$$

D'après la question **2.**, u_2, u_3, u_4 ont pour valeurs approchées affines respectivement v_2, v_3, v_4 . Nous calculerons u_2, u_3, u_4 à l'aide d'une calculatrice.

- Si le taux est de 4 % : $u_n = (1,04)^n$ et $v_n = 1 + 0,04n$.

$$u_0 = 1$$

$$v_0 = 1$$

$$u_1 = 1,04$$

$$v_1 = 1,04$$

$$u_2 = (1,04)^2 = 1,0816$$

$$v_2 = 1,08$$

$$u_3 = (1,04)^3 = 1,124864$$

$$v_3 = 1,12$$

$$u_4 = (1,04)^4 = 1,16985856$$

$$v_4 = 1,16.$$

- Si le taux est de 5 % : $u_n = (1,05)^n$ et $v_n = 1 + 0,05n$.

$$u_0 = 1$$

$$v_0 = 1$$

$$u_1 = 1,05$$

$$v_1 = 1,05$$

$$u_2 = (1,05)^2 = 1,1025$$

$$v_2 = 1,1$$

$$u_3 = (1,05)^3 = 1,157625$$

$$v_3 = 1,15$$

$$u_4 = (1,05)^4 = 1,21550625$$

$$v_4 = 1,2.$$

- Si le taux est de 6 % : $u_n = (1,06)^n$ et $v_n = 1 + 0,06n$.

$$u_0 = 1$$

$$v_0 = 1$$

$$u_1 = 1,06$$

$$v_1 = 1,06$$

$$\begin{aligned} u_2 &= (1,06)^2 = 1,1236 & v_2 &= 1,12 \\ u_3 &= (1,06)^3 = 1,191016 & v_3 &= 1,18 \\ u_4 &= (1,06)^4 = 1,26247696 & v_4 &= 1,24. \end{aligned}$$

Dans les 3 cas étudiés, $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Les valeurs de u_2, u_3, u_4 sont très proches de celles de v_2, v_3, v_4 .

Nous remarquons aussi que l'écart $u_n - v_n$ augmente avec le taux.

- 17** 1. Au 1^{er} janvier 2009, la personne aura la somme déposée à laquelle s'ajoute les intérêts I . On a $I = \frac{7,5}{100} \times 200\,000 = 15\,000$ €.

Au 1^{er} janvier 2009, la personne disposera de $200\,000 + 15\,000 = 215\,000$ €.

2. a) La somme u_{n+1} est égale à la somme u_n obtenue l'année précédente augmentée des intérêts produits par u_n pendant 1 an, d'où

$$\text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{7,5}{100}u_n = 1,075u_n.$$

Cette égalité montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 1,075 et de premier terme $u_0 = 200\,000$.

b) On a donc pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = 200\,000 \times (1,075)^n$.

c) On a donc $u_{12} = 200\,000 \times (1,075)^{12} \approx 476\,356$.

3. a) Le placement « généreux » rapporte au bout de 12 ans une somme $v_{12} = 2 \times u_0$ (augmenter de 100 % signifie que la somme est doublée en 12 ans), donc $v_{12} = 400\,000$. Le placement « généreux » est moins intéressant que le précédent.

b) Soit t le taux annuel en pourcentage qui permet d'obtenir $400\,000$ € au bout de 12 ans. On obtient de la même manière que dans la question **2.** :

$$v_{12} = 200\,000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 400\,000.$$

On en déduit que $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 2$. On remarque que t est inférieur à 7,5 %, car la somme v_{12} est inférieure à u_{12} .

À l'aide d'une calculatrice, on essaie par tâtonnement différentes valeurs de t : 7 ; 6,5 ; 6 ; 5,9.

$$\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{12} \approx 2,25; \quad \left(1 + \frac{6,5}{100}\right)^{12} \approx 2,13; \quad \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{12} \approx 2,01;$$

$$\left(1 + \frac{5,9}{100}\right)^{12} \approx 1,99.$$

Pour $t = 5,95$ on obtient $\left(1 + \frac{5,95}{100}\right)^{12} \approx 2,0008$.

Le taux recherché est proche de 5,95 %.

- 18** 1. Soit u_p le nombre de noyaux radioactifs restants au bout de p périodes T , le nombre de noyaux radioactifs restants au bout de $(p+1)$ périodes est :

$$u_{p+1} = \frac{u_p}{2}.$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme u_0 .

$$\text{D'où : } u_n = \frac{u_0}{2^n} = u_0(0,5)^n.$$

2. a) Dans 10 kg c'est-à-dire 10 000 g de plutonium 239 radioactif, il y a u_0 noyaux radioactifs.

Dans x g de plutonium radioactif restant au bout de n périodes, il y a u_n noyaux radioactifs. On peut écrire :

$$\frac{x}{10\,000} = \frac{u_n}{u_0} = (0,5)^n.$$

D'où $x = 10\,000(0,5)^n$ grammes.

b) Il reste moins de 100 g de plutonium radioactif pour :

$$10\,000(0,5)^n \leq 100$$

$$(0,5)^n \leq 10^{-2} \text{ c'est-à-dire } (0,5)^n \leq 0,01.$$

Étudions les variations de $(0,5)^n$. Pour tout entier naturel n :

$$\frac{(0,5)^{n+1}}{(0,5)^n} = 0,5 < 1 \text{ donc } (0,5)^{n+1} < (0,5)^n. \text{ La suite } ((0,5)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strict-}$$

tement décroissante. La calculatrice donne :

$$(0,5)^5 = 0,03125 > 0,01$$

$$(0,5)^6 = 0,015625 > 0,01$$

$$(0,5)^7 = 0,0078125 < 0,01.$$

Il reste moins de 100 g de plutonium 239 radioactif au bout de 7 périodes de 24 000 ans soit 168 000 ans.

- 19** 1. $S_1 = S_0 + S_0 \times \frac{2}{100} + 1\,000 = 1,02S_0 + 1\,000$
 $= 1,02 \times 18\,000 + 1\,000$
 $= 19\,360 \text{ €}.$

De même :

$$S_2 = 1,02S_1 + 1\,000 = 1,02 \times 19\,360 + 1\,000$$

$$S_2 = 20\,747,2 \text{ €}.$$

- 2.** $S_{n+1} = S_n + S_n \times \frac{2}{100} + 1\,000$
 $S_{n+1} = 1,02S_n + 1\,000.$

3. a) Pour tout entier naturel n , $u_n = S_n + 50\,000$

$$\text{donc } u_0 = S_0 + 50\,000 = 18\,000 + 50\,000$$

$$u_0 = 68\,000.$$

b) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= S_{n+1} + 50\,000 \\ &= (1,02S_n + 1\,000) + 50\,000 \\ &= 1,02S_n + 51\,000 \\ &= 1,02(S_n + 50\,000) \\ &= 1,02u_n \end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$.

c) $u_n = u_0q^n = 68\,000(1,02)^n$.

4. a) Puisque $u_n = S_n + 50\,000$ (question **3. a)**), on en déduit :

$$S_n = u_n - 50\,000$$

$$S_n = 68\,000(1,02)^n - 50\,000.$$

b) 2015 = 2008 + 7 donc l'année 2015 correspond à $n = 7$. Le salaire prévu pour l'année 2015 est :

$$S_7 = 68\,000(1,02)^7 - 50\,000 \approx 28\,111 \text{ €}.$$

5. On a $S_n \geq 2S_0$ pour :

$$68\,000(1,02)^n - 50\,000 \geq 36\,000$$

$$68\,000(1,02)^n \geq 86\,000$$

$$(1,02)^n \geq \frac{86\,000}{68\,000}$$

$$(1,02)^n \geq \frac{86}{68}.$$

$$(1,02)^n \geq \frac{43}{34}. \text{ On a } \frac{43}{34} \approx 1,2647.$$

Étudions les variations de $(1,02)^n$. Pour tout entier naturel n :

$\frac{(1,02)^{n+1}}{(1,02)^n} = 1,02 > 1$ donc $(1,02)^{n+1} > (1,02)^n$. La suite $((1,02)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. La calculatrice donne :

$$(1,02)^{10} = 1,2189... < \frac{43}{34}$$

$$(1,02)^{11} = 1,2433... < \frac{43}{34}$$

$$(1,02)^{12} = 1,2682... > \frac{43}{34}.$$

À partir de l'année 2008 + 12 = 2020, le salaire du technicien aura doublé.

20 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

donc d'après le théorème « des gendarmes » : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin n}{n^2}\right) = 0.$

3. Construction des tableaux

– Placer sur la première ligne les différentes valeurs de la variable.

– Construire les lignes suivantes contenant les valeurs prises par les différentes fonctions.

	A	B	C
1	n	1	2
2	$(-1)/(n^2)$	$=(-1)/(B1^2)$	$=(-1)/(C1^2)$
3	$(\sin(n))/(n^2)$	$=(\text{SIN}(B1))/(B1^2)$	$=(\text{SIN}(C1))/(C1^2)$
4	$(1)/(n^2)$	$=(1)/(B1^2)$	$=(1)/(C1^2)$

En glissant vers la droite, on obtient :

	A	B	C	D	E	F
1		3	4	5	6	7
2	$(-1)/(n^2)$	-0,1111	-0,0625	-0,0400	-0,0278	-0,0204
3	$(\sin(n))/(n^2)$	0,0157	-0,0473	-0,0384	-0,0078	0,0134
4	$(1)/(n^2)$	0,1111	0,0625	0,0400	0,0278	0,0204

G	H	I	J	K	L	M
8	9	10	11	12	13	14
-0,0156	-0,0123	-0,0100	-0,0083	-0,0069	-0,0059	-0,0051
0,0155	0,0051	-0,0054	-0,0083	-0,0037	0,0025	0,0051
0,0156	0,0123	0,0100	0,0083	0,0069	0,0059	0,0051

Utilisation du grapheur

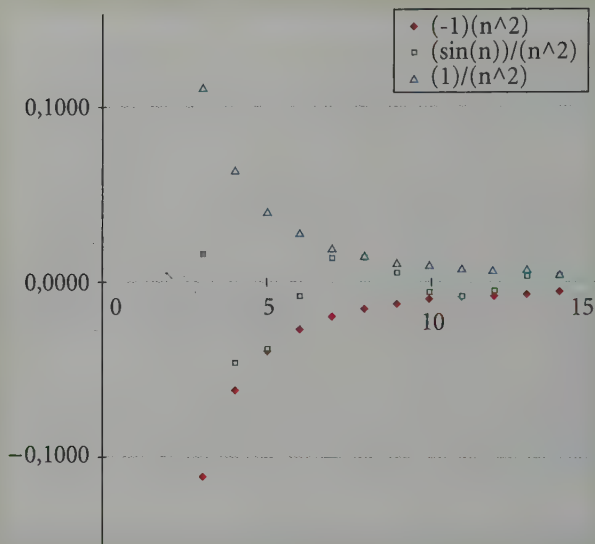
– Sélectionner les lignes qui comportent les données : la ligne comportant les valeurs prises par la variable et les lignes contenant les valeurs prises par les différentes fonctions dont on veut obtenir les représentations graphiques ; on inclura la première colonne qui comporte les expressions ou le nom des fonctions.

– Cliquer sur le bouton Assistant Graphique.

– Dans la fenêtre type de graphique, choisir Nuages de points (cliquer sur Nuages de points).

– Dans la fenêtre sous-type de graphique, choisir Nuages de points.

- Cliquer sur le bouton Suivant.
- Cliquer sur Terminer, le graphique s'affiche.



21 1. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} + \sqrt{n}$, et donc les deux membres étant strictement positifs, $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Mais pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \\
 -\frac{1}{2\sqrt{n}} &\leq -\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq 0 \\
 -\frac{1}{2\sqrt{n}} &\leq u_n \leq 0.
 \end{aligned}$$

2. La suite $\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a pour limite 0, donc en utilisant le théorème « des gendarmes » $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

3. En procédant comme dans l'exercice 20, nous obtenons les tableaux et les représentations graphiques ci-dessous :

	A	B	C
1	n	1	2
2	$(-1)/(2*\text{RACINE}(n))$	$=(-1)/(2*\text{RACINE}(B1))$	$=(-1)/(2*\text{RACINE}(C1))$
3	un	$=\text{RACINE}(B1)-\text{RACINE}(B1+1)$	$=\text{RACINE}(C1)-\text{RACINE}(C1+1)$
4	0	0	0

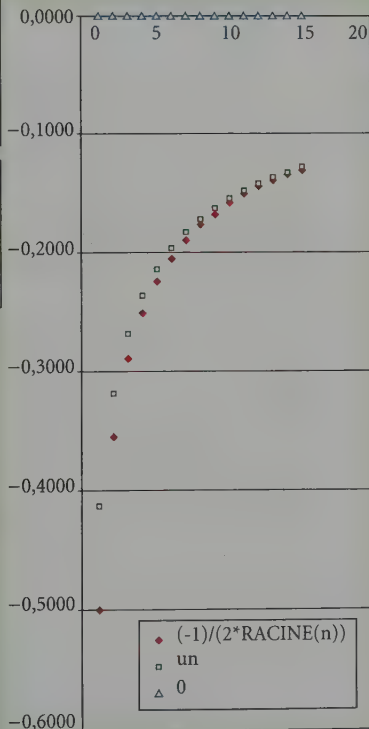
	A	B	C
1	n	1	2
2	$(-1)/(2*\text{RACINE}(n))$	-0,5000	-0,3536
3	un	-0,4142	-0,3178
4	0	0,0000	0,0000

	D	E	F	G
1	3	4	5	6
2	-0,2887	-0,2500	-0,2236	-0,2041
3	-0,2679	-0,2361	-0,2134	-0,1963
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

	H	I	J
1	7	8	9
2	-0,1890	-0,1768	-0,1667
3	-0,1827	-0,1716	-0,1623
4	0,0000	0,0000	0,0000

	K	L	M
1	10	11	12
2	-0,1581	-0,1508	-0,1443
3	-0,1543	-0,1475	-0,1414
4	0,0000	0,0000	0,0000

	N	O	P
1	13	14	15
2	-0,1387	-0,1336	-0,1291
3	-0,1361	-0,1313	-0,1270
4	0,0000	0,0000	0,0000



22 1. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

1^{re} méthode

Mettons u_n sous la forme $a + \frac{b}{n+2}$ pour tout n de \mathbb{N} :

$$\frac{3n+1}{n+2} = a + \frac{b}{n+2} = \frac{an+2a+b}{n+2}.$$

On prendra :

$$\begin{cases} a = 3 \\ 2a+b = 1. \end{cases} \text{ On trouve } a = 3 \text{ et } b = -5.$$

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{n+2} \right) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 3.$$

2^e méthode

$$\text{Si } n \geq 1, \quad u_n = \frac{3n+1}{n+2} = \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} \right) = 0$ donc en appliquant les théorèmes sur les limites (d'une somme et d'un quotient) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 3.$$

2. En opérant de la manière suivante (avec la TI 89) on obtient la limite de la suite :
HOME

$(3n+1)/(n+2)$ STO $u(n)$

F3 3 (il s'affiche « limit »)

$u(n), n, \infty$)

ENTER (la limite 3 de la suite s'affiche).

$$\textcircled{23} \text{ Si } n \geq 1, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+n+5} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} \right).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{n^2} \right) = 0$ donc en appliquant les théorèmes sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} \right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0 \times 1 = 0.$$

- 24** 1. Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{u_n - 5}{u_n - 1} - 5}{\frac{u_n - 5}{u_n - 1} - 1} = \frac{u_n - 5 - 5u_n + 5}{u_n - 5 - u_n + 1} \text{ d'où :}$$

$$u_{n+2} = u_n.$$

2. 2 est donc une période de la suite (u_n) ,

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{2-5}{2-1} = -3, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = -3, \dots$$

La suite (u_n) n'est pas convergente car elle prend alternativement les valeurs 2 et -3.

- 25** 1. *Calcul des six premiers termes de la suite*

a) Le 1^{er} samedi après la tonte, le volume stocké est égal à 120 L.

Le 2^e samedi après la tonte, le volume V_2 stocké est égal à 120 L auxquels s'ajoute le quart de V_1 , soit :

$$V_2 = V_1 \times \frac{1}{4} + 120 = 30 + 120 = 150 \text{ L.}$$

Le 3^e samedi après la tonte, le volume V_3 stocké est égal à 120 L auxquels s'ajoute le quart de V_2 , soit :

$$V_3 = \frac{1}{4}V_2 + 120 = \frac{1}{4} \times 150 + 120 = 157,5 \text{ L.}$$

b) De la même façon on a successivement :

$$V_4 = \frac{1}{4}V_3 + 120 = 159,375 \text{ L.}$$

$$V_5 = \frac{1}{4}V_4 + 120 = 159,84 \text{ L.}$$

$$V_6 = \frac{1}{4}V_5 + 120 = 159,96 \text{ L.}$$

2. Calcul de V_{n+1} en fonction de V_n

Comme précédemment, le volume stocké V_{n+1} , après la tonte, le $(n+1)$ ^{ème} samedi est égal à 120 L auxquels s'ajoute le quart restant de V_n ; d'où pour tout

entier n supérieur ou égal à 1, $V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120$.

3. Limite de la suite (V_n)

a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , $t_n = 160 - V_n$.

Montrons que (t_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout entier } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad t_{n+1} &= 160 - V_{n+1} \\
 &= 160 - \left(\frac{1}{4}V_n + 120 \right) \\
 &= -\frac{1}{4}V_n + 40 \\
 &= \frac{1}{4}(160 - V_n) \\
 &= \frac{1}{4}t_n
 \end{aligned}$$

Par définition, la suite (t_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 Son premier terme est $t_1 = 160 - V_1 = 40$.

b) Expression, en fonction de n , de t_n puis de V_n

La suite (t_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $t_1 = 40$, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = 40 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}.$$

D'où, en utilisant l'égalité qui lie t_n et V_n :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = 160 - t_n \text{ soit } V_n = 160 - 40 \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}.$$

c) Limite de (t_n) et de (V_n)

D'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (160 - t_n) = 160$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 160.$$

26 1. Calcul des premiers termes de la suite

Pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$ et $u_0 = 7$.

En remplaçant successivement n par 0, 1, 2 dans la relation donnée, on a :

$$u_1 = \frac{2u_0 + 6}{5} = 4$$

$$u_2 = \frac{2u_1 + 6}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$u_3 = \frac{2u_2 + 6}{5} = 2,32.$$

2. a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique.

Pour tout entier n de \mathbb{N} , $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5} - 2 = \frac{2u_n - 4}{5}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n - 2) = \frac{2}{5}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 5$.

b) Expression de v_n et de u_n

Pour tout entier naturel n , le terme v_n d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et

de premier terme 5 est $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

D'où, pour tout entier n de \mathbb{N} :

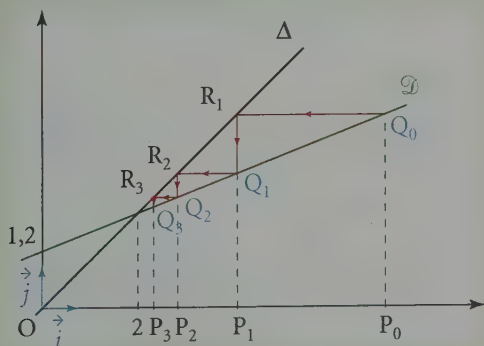
$$u_n = v_n + 2 \text{ soit } u_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2.$$

c) Limite de (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ (limite d'une suite géométrique de raison } \frac{2}{5} \text{ avec } 0 < \frac{2}{5} < 1)$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2\right) = 2.$$

3. a)



b) Soit le point P_0 de l'axe $(O ; i)$ d'abscisse $u_0 = 7$.

Construisons « l'escalier » $Q_0R_1Q_1R_2Q_2R_3Q_3$ en menant des parallèles aux axes de coordonnées (voir figure).

Construction de u_1 à partir de u_0

P_0 a pour coordonnées $(u_0 ; 0)$, Q_0 est un point de D , donc ses coordonnées

sont $(u_0; f(u_0)) = (u_0; u_1)$. R_1 a même ordonnée que Q_0 et puisque R_1 appartient à Δ , ses coordonnées sont $(u_1; u_1)$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par R_1 coupe l'axe des abscisses en P_1 d'abscisse u_1 .

Construction de u_2 et u_3

On construit, de même, u_2 à partir de u_1 : on obtient le point P_2 d'abscisse u_2 .

On construit, de même, u_3 à partir de u_2 : on obtient le point P_3 d'abscisse u_3 .

L'abscisse 2 du point d'intersection de D et Δ est la limite de la suite (u_n) .

- 27 1.** Appelons h_0, h_1, \dots, h_n les hauteurs des cubes. Elles forment une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$:

$$h_0 = a, \quad h_1 = \frac{a}{2}, \quad \dots, \quad h_n = h_0 q^n = a \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La hauteur de la pile obtenue est :

$$S_n = h_0 + h_1 + \dots + h_n = h_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = a \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right].$$

Quand n augmente, la hauteur maximale de la pile est $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

On sait (cf. résumé de cours) que si $|q| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2a.$$

- 2.** Appelons v_0, v_1, \dots, v_n les volumes des cubes. Ils forment une suite géométrique de raison $q' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$:

$$v_0 = a^3, \quad v_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8}, \quad \dots, \quad v_n = v_0 q'^n = a^3 \left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Le volume total obtenu est :

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q'^{n+1}}{1 - q'}$$

$$S'_n = a^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8a^3}{7} \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \frac{8a^3}{7}.$$

C'est le volume maximal de tous les cubes quand leur nombre augmente indéfiniment.

28 1. a) Soit n et k deux entiers naturels non nuls :

$$\frac{n^k}{n} = n^{k-1} \geq 1 \quad \text{donc} \quad n^k \geq n.$$

b) Soit A un réel strictement positif arbitraire.

À partir d'un certain rang, on a $n \geq A$ et $n^k \geq n \geq A$.

$$\text{Donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^k) = +\infty.$$

2. a) $u_n = 3n^4 - 2n^3 + n^2 - 1$.

$$\text{Si } n \geq 1, \quad u_n = n^4 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4}\right) = 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) = 3.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^4) = +\infty$ donc, d'après le théorème donné dans l'énoncé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right) = +\infty.$$

b) $v_n = \frac{n^2 + n - 3}{n + 1}$.

$$\text{Si } n \geq 1, \quad v_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n \left(\frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$ donc, d'après le théorème donné dans l'énoncé, la limite du

produit $n \left(\frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \right)$ est $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$.

29 1. Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , on étudie pour tout entier naturel n le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = n$, donc pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n \geq 0$; la suite (u_n) est croissante.

2. On a $u_1 = u_0$

$$u_2 = u_1 + 1$$

$$u_3 = u_2 + 2$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + (n-1) \text{ pour } n \geq 1.$$

En faisant la somme membre à membre de ces n lignes, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + 1 + 2 + \dots + (n-1).$$

D'où, en simplifiant

$$u_n = u_0 + 1 + 2 + \dots + (n-1).$$

$1 + 2 + \dots + (n-1)$ est la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de dernier terme $(n-1)$ donc (cf. livret détachable) :

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)[1 + (n-1)]}{2} = \frac{(n-1)n}{2};$$

d'où

$$u_n = u_0 + \frac{(n-1)n}{2}.$$

3. Pour tout entier n , $\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

4. Avec une TI 89, le programme est le suivant :

Touche MODE

Dans le menu qui s'affiche, dans la rubrique GRAPH choisir SEQUENCE à l'aide du curseur.

ENTER

Dans le même menu qui s'affiche, dans la rubrique Display Digits choisir FLOAT 12 à l'aide du curseur (pour la précision).

ENTER

$Y =$ (obtenu en appuyant sur touche verte et F1)

Il s'affiche $u1(n) =$, taper $u1(n-1) + n - 1$.

ENTER

Il s'affiche $u1$, taper 0 (premier terme).

ENTER

WINDOW (obtenu en appuyant sur touche verte et F2)

Placer 0 dans nmin (indice du premier terme de la suite).

TblSet (obtenu en appuyant sur touche verte et F4)

Dans INDEPENDANT choisir Auto.

Placer 0 dans TblStart (valeur de n à partir de laquelle on veut l'affichage).

Placer 1 dans Δ Tabl.

TABLE (obtenu en appuyant sur touche verte et F5). Les termes de la suite s'affichent.

Pour calculer un terme de rang donné, par exemple 30, on appuie sur HOME et on tape $u1(30)$ puis on appuie sur la touche ENTER, le terme $u(30)$ s'affiche.

Pour calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$:

HOME

F3

4 il s'affiche Σ .

Taper $u1(n)$, n , 0, 10)

ENTER le résultat s'affiche.

D'une façon générale, lorsque des énoncés feront intervenir une proposition p ou une proposition q , pour éviter de répéter les énoncés avec p puis avec q , nous écrirons p (resp. q).

Dans toute la suite, on désigne par (x) la série statistique $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ (resp. $((x_1; n_1); (x_2; n_2); \dots; (x_i; n_i))$) où n_i est l'effectif de la valeur x_i et $n = n_1 + n_2 + \dots + n_i$ l'effectif total).

1 Moyenne et médiane d'une série statistique

Soit (x) une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ (resp. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i$), les différentes valeurs ayant été classées par ordre croissant,

→ Moyenne

On appelle **moyenne**, le réel noté \bar{x} , égal à $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$
(resp. $\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_ix_i)$).

→ Médiane

- Si n est un nombre impair, on désigne par **médiane** la valeur de la série ayant pour rang l'entier qui suit $\frac{n}{2}$;

- si n est un nombre pair, on désigne par **médiane** le réel $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$, dans ce cas, il se peut que la médiane ne soit pas une valeur de la série.

On désignera par $m(x)$ la médiane de la série proposée.

→ Transformation affine des données

Si l'on opère sur les valeurs x_i la transformation $y_i = ax_i + b$ ($a \neq 0$), on a en notant (y) la série des y_i :

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad m(y) = am(x) + b$$

2 Variance et écart type d'une série statistique

⇒ Variance

• Définition

On appelle **variance**, le réel noté $V(x)$, égal à

$$\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2).$$

$$\text{(resp. } \frac{1}{n}(n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_l(x_l - \bar{x})^2)).$$

• Propriétés

– La variance d'une série est un réel positif ou nul.

– On a (**théorème de Huygens**) :
$$V(x) = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \bar{x}^2$$

$$\text{(resp. } \frac{1}{n}(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_lx_l^2) - \bar{x}^2).$$

– La fonction $t \mapsto \frac{1}{n}((x_1 - t)^2 + (x_2 - t)^2 + \dots + (x_n - t)^2)$

(resp. $t \mapsto \frac{1}{n}(n_1(x_1 - t)^2 + n_2(x_2 - t)^2 + \dots + n_l(x_l - t)^2)$) admet un minimum

pour $t = \bar{x}$. Ce minimum est $V(x)$.

⇒ Écart type

On appelle **écart type** le réel positif noté $s(x)$ égal à la racine carrée de $V(x)$:

$$s(x) = \sqrt{V(x)}$$

⇒ Transformation affine des données

Si l'on opère sur les valeurs x_i la transformation $y_i = ax_i + b$ ($a \neq 0$), on a en notant (y) la série des y_i :

$$V(y) = a^2V(x), \quad s(y) = |a|s(x)$$

⇒ Écart moyen d'une série statistique

On appelle **écart moyen** le réel positif :

$$e(x) = \frac{1}{n}(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|)$$

$$\text{(resp. } \frac{1}{n}(n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + n_l|x_l - \bar{x}|).$$

Remarque : On étudiera à l'exercice. 4. le minimum de la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{n}(|x_1 - t| + \dots + |x_n - t|) \quad (\text{resp. } t \mapsto \frac{1}{n}(n_1|x_1 - t| + \dots + n_l|x_l - t|)).$$

3 Quartiles, intervalle et écart interquartiles d'une série statistique

Soit (x) une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

→ Premier et troisième quartiles

• Le premier quartile est le plus petit élément q_1 des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à q_1 .

Méthode pratique : on recherche la valeur du caractère dont le rang est le premier entier qui suit le rationnel $\frac{n}{4}$ (c'est-à-dire supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$).

• Le troisième quartile est le plus petit élément q_3 des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à q_3 .

Méthode pratique : on recherche la valeur du caractère dont le rang est le premier entier qui suit le rationnel $\frac{3n}{4}$.

→ Intervalle et écart interquartiles

• On appelle **intervalle interquartile**, l'intervalle $[q_1 ; q_3]$.

• On appelle **écart interquartile**, le réel $q_3 - q_1$.

→ Transformation affine des données

Si l'on opère sur les valeurs x_i la transformation $y_i = ax_i + b$ ($a > 0$), on a en notant (y) la série des y_i :

$$q_1(y) = aq_1(x) + b$$

$$q_3(y) = aq_3(x) + b$$

$$q_3(y) - q_1(y) = a(q_3(x) - q_1(x))$$

4 Déciles d'une série statistique

Soit (x) une série statistique avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ (resp. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_l$), les différentes valeurs ayant été classées par ordre croissant.

→ Premier décile

- C'est le plus petit élément d_1 des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à d_1 .
- **Méthode pratique** : on recherche la valeur du caractère dont le rang est le premier entier qui suit le rationnel $\frac{n}{10}$.

→ Neuvième décile

- C'est le plus petit élément d_9 des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 90 % des données soient inférieures ou égales à d_9 .
- **Méthode pratique** : on recherche la valeur du caractère dont le rang est le premier entier qui suit le rationnel $\frac{9n}{10}$.

5 Résumé de données statistiques

C'est la donnée de quelques paramètres qui permet une bonne interprétation de la série statistique. Donnons quelques exemples de résumés :

- (Médiane, écart interquartile)

Ce couple est dit « robuste » aux modifications des valeurs extrêmes ce qui signifie que les deux nombres, médiane et écart interquartile, ne changent pas si l'on modifie une ou deux valeurs extrêmes.

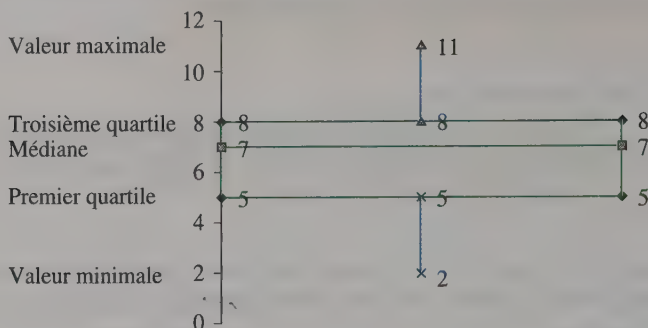
- (Moyenne, écart type)

La moyenne est sensible à la modification de valeurs extrêmes.

- (Médiane, premier quartile, troisième quartile, valeur extrême inférieure, valeur extrême supérieure)

La représentation graphique est un **diagramme en boîte de Tukey**.

Exemple (la largeur de la boîte est arbitraire)



La construction peut se faire « à la main » ou à l'aide d'un tableur.

⇒ Construction à l'aide du tableur Excel

Supposons que les données de la série statistique se trouvent entre les cases A1 et B25.

1^{re} partie

Construire le tableau ci-dessous que l'on placera sur la feuille contenant les données :

0	2	2	0	0
=QUARTILE(A1 :B25 ;1)	=QUARTILE(A1 :B25 ;1)	=QUARTILE(A1 :B25 ;3)	=QUARTILE(A1 :B25 ;3)	=QUARTILE(A1 :B25 ;1)
0	2			
=MEDIANE(A1 :B25)	=MEDIANE(A1 :B25)			
1	1			
=QUARTILE(A1 :B25 ;3)	=MAX(A1 :B25)			
1	1			
=MIN(A1 :B25)	=QUARTILE(A1 :B25 ;1)			

=QUARTILE(A1 :B25 ;1) calcule le premier quartile ;

=QUARTILE(A1 :B25 ;3) calcule le troisième quartile ;

=MEDIANE(A1 :B25) calcule la médiane ;

=MIN(A1 :B25) calcule la valeur minimale de la série ;

=MAX(A1 :B25) calcule la valeur maximale de la série.

Les résultats obtenus avec différents logiciels et « à la main » diffèrent entre eux, car les définitions prises ne sont pas toujours les mêmes.

2^e partie

À l'aide de la souris, sélectionner les deux premières lignes du tableau précédent et cliquer sur l'icône (Assistant Graphique).

Choisir dans « Type de graphique » « Nuages de points » et dans « Sous-type de graphique » : « Nuage de points reliés par une courbe ».

Cliquer sur Suivant.

Sur la fenêtre suivante, vérifier que « Série en ligne » est coché.

Cliquer sur l'onglet « Série ».

Cliquer sur « Ajouter ».

Cliquer dans la fenêtre : « Valeur X », puis sélectionner la troisième ligne (0,2), la fenêtre « Valeur X » se remplit.

Effacer le contenu de la fenêtre : « Valeurs Y », puis sélectionner la quatrième ligne, la fenêtre « Valeur Y » se remplit.

Recommencer deux fois les dernières instructions à partir de « Ajouter » avec les lignes 5,6 et 7,8.

Cliquer sur Suivant.

Dans l'onglet « Quadrillage », tout décocher.

Dans l'onglet « Axes », décocher « Axes des ordonnées (X) » et cocher « Axes des ordonnées (Y) ».

Dans l'onglet « Légende », décocher « Afficher la légende ».

Dans l'onglet « Étiquettes de données », cocher « Afficher la valeur ».

Cliquer sur Suivant.

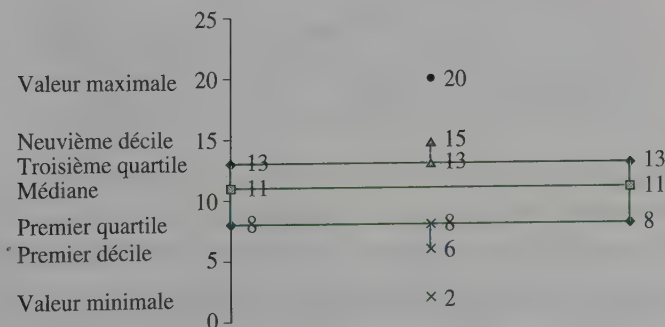
Cocher « En tant qu'objet dans ».

Cliquer sur Terminer et la boîte apparaît.

- (Médiane, premier quartile, troisième quartile, premier décile, neuvième décile, valeur extrême inférieure, valeur extrême supérieure).

La représentation graphique est une variante de la boîte précédente.

Exemple (la largeur de la boîte est arbitraire) :



VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 On désigne par (x) la série statistique :

$(-1 ; 3) ; (0 ; 4) ; (2 ; 5) ; (3 ; 8)$

où 3, 4, 5, 8 désignent les effectifs des valeurs $-1, 0, 2, 3$.

a) La moyenne est 5.

V F

b) L'écart type est 4,1.

V F

c) La médiane est 2.

V F

d) Le premier quartile est 0.

V F

e) L'écart interquartile est 4.

V F

f) Le premier décile est -1 .

V F

g) Le 9^e décile est 3.

V F

→ Corrigé p. 176

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Moyenne, médiane, variance et écart type

2 On donne le tableau des notes (x_i) d'un devoir d'une classe de première :

5	7	8	9	7	12	13	15	7	5	6
13	17	16	5	10	8	11	11	12	10	9
14	16	12	13	10	9	4	3	5	12	10

1. Écrire le tableau précédent sous forme d'une suite croissante.

2. Déterminer la médiane de la série précédente.

3. Déterminer la moyenne, la variance et l'écart type de la série précédente.

4. Reprendre la question 3. en faisant la transformation affine $y_i = x_i - 10$.

→ Corrigé p. 176

3 Reprendre l'exercice précédent avec le tableau suivant :

6	4	10	9	6	13	14	13	8	5	6
14	18	16	15	10	9	11	11	13	10	9
14	16	12	13	11	10	4	3	5	14	

→ Corrigé p. 178

4 Soit la série de données suivantes :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	4	6	12	16	20

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \frac{1}{6}((x_1-t)^2 + (x_2-t)^2 + (x_3-t)^2 + (x_4-t)^2 + (x_5-t)^2 + (x_6-t)^2).$$

a) Construire le tableau de variation de la fonction f .

b) En déduire la moyenne, la variance et l'écart type de la série.

c) En effectuant la transformation affine $y_i = \frac{1}{2}x_i - 5$, retrouver la moyenne, la variance et l'écart type précédents.

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(t) = \frac{1}{6}(|x_1-t| + |x_2-t| + |x_3-t| + |x_4-t| + |x_5-t| + |x_6-t|).$$

a) Donner une expression de g sans utiliser les valeurs absolues.

b) Construire un tableau de variation de g .

c) Déterminer des valeurs de t pour lesquelles g est minimale.

→ Corrigé p. 180

Résumés. Diagrammes en boîtes

5 En reprenant le tableau de l'exercice 2 :

1. Déterminer :

a) la médiane ;

b) les premier et troisième quartiles ;

c) les premier et neuvième déciles.

2. Construire le diagramme en boîte représentant tous les éléments précédents, ainsi que les valeurs extrêmes.

→ Corrigé p. 181

6 Reprendre l'exercice précédent avec le tableau de l'exercice **3**.  Corrigé p. 182

7 ★ À l'aide d'un tableur (Excel), on a simulé le résultat obtenu en faisant la somme des nombres lus sur deux dés pendant 50 lancers (on a rempli un tableau de 2 colonnes et de 25 lignes à l'aide de la fonction :

$$= \text{ENT}(\text{ALEA}() * 6 + 1) + \text{ENT}(\text{ALEA}() * 6 + 1))$$

En renouvelant l'expérience deux fois on a obtenu les deux tableaux suivants :

Série 1		9	10	Série 2		3	11
8	7	11	6	4	10	6	11
8	5	9	8	9	2	6	10
8	8	4	7	8	7	9	6
7	6	11	5	6	6	10	9
10	6	8	8	9	9	5	8
3	6	6	7	9	8	10	10
10	7	9	4	9	9	9	9
10	12	11	7	7	7	5	11
8	4	10	5	5	11	9	8
8	7	5	11	5	5	12	10
8	5	9	6	2	3	9	11
3	12	9	6	6	11	3	4

1. Déterminer le résumé à cinq valeurs (les premier et troisième quartiles, la médiane, les deux valeurs extrêmes) des deux séries, à la main ou à l'aide d'un tableur.

2. Construire à l'aide d'un tableur ou « à la main » les diagrammes en boîtes correspondants.

 Corrigé p. 183

8 ★ On donne le tableau suivant présentant le PNB par habitant des quinze pays de la Communauté européenne (en dollars) (Source OCDE)

1. Déterminer :

- la médiane ;
- les premier et troisième quartiles ;
- les premier et neuvième déciles.

2. En déduire la construction à la main ou en adaptant la méthode proposée p. 176 le diagramme en boîte représentant tous les éléments précédents, ainsi que les valeurs extrêmes.

Pays	PNB par habitant
Allemagne	23 560
Autriche	23 120
Belgique	21 210
Danemark	26 510
Espagne	13 650
Finlande	18 970
France	22 360
Grèce	7 390
Irlande	12 580
Italie	19 620
Luxembourg	35 850
Pays-Bas	20 710
Portugal	7 890
Royaume-Uni	17 970
Suède	24 830

 Corrigé p. 185

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) **Faux.** Attention, la moyenne appartient à l'intervalle d'extrémités les valeurs extrêmes de x , dans l'exemple $[-1 ; 3]$.
b) **Faux.** L'écart type est inférieur à l'étendue de la série : $3 - (-1) = 4$.
c) **Vrai.** Les 10^e et 11^e valeurs sont égales à 2.
d) **Vrai.** La 5^e valeur est 0.
e) **Vraie.** La 3^e quartile est 3 donc l'intervalle interquartile est $[0 ; 3]$.
f) **Vrai.**
g) **Vrai.**

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

2 1.

3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	8
8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	12
12	12	12	13	13	13	14	15	16	16	17

2. L'effectif total, 33, étant impair, la médiane est le nombre ayant pour rang l'entier qui suit $\frac{33}{2} = 16,5$, soit la 17^e note, c'est 10. Il y a autant d'élèves ayant moins de 10 que d'élèves ayant plus de 10.

3. Construisons un tableau permettant de faire simplement les calculs, en utilisant la formule d'Huygens pour le calcul de la variance, ce tableau peut être réalisé très simplement sous Excel. Les calculatrices donnent les résultats de la moyenne, de la variance et de l'écart type.

La moyenne est donc :

$$\bar{x} = \frac{324}{33} \approx 9,82.$$

La variance est égale à :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{33} 3\,626 - \left(\frac{324}{33}\right)^2 = \frac{3\,626 \times 33 - 324^2}{33^2} = \frac{14\,682}{33^2} = \frac{2 \times 3 \times 2\,447}{33 \times 33} \\ &= \frac{4\,894}{363} \approx 13,48. \end{aligned}$$

L'écart type est :

$$s(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{14\,682}}{33} \approx 3,67.$$

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
3	1	3	9	9
4	1	4	16	16
5	4	20	25	100
6	1	6	36	36
7	3	21	49	147
8	2	16	64	128
9	3	27	81	243
10	4	40	100	400
11	2	22	121	242
12	4	48	144	576
13	3	39	169	507
14	1	14	196	196
15	1	15	225	225
16	2	32	256	512
17	1	17	289	289
Sommes	33	324		3 626

4. Construisons un nouveau tableau identique au précédent en faisant la transformation affine $y_i = x_i - 10$.

La moyenne de la série (y) est :

$$\bar{y} = \frac{-6}{33}.$$

On peut retrouver la moyenne :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{y} + 10 = \frac{-6}{33} + 10 \\ &= \frac{330 - 6}{33} = \frac{324}{33}.\end{aligned}$$

La variance de la série (y) est :

$$V(y) = \frac{1}{33}(446) - \left(\frac{-6}{33}\right)^2 = \frac{14\,682}{33^2}.$$

La transformation étant $y_i = x_i - 10$, on a :

$$V(y) = V(x) \text{ et } s(y) = s(x).$$

$y_i = x_i - 10$	n_i	$n_i y_i$	y_i^2	$n_i y_i^2$
-7	1	-7	49	49
-6	1	-6	36	36
-5	4	-20	25	100
-4	1	-4	16	16
-3	3	-9	9	27
-2	2	-4	4	8
-1	3	-3	1	3
0	4	0	0	0
1	2	2	1	2
2	4	8	4	16
3	3	9	9	27
4	1	4	16	16
5	1	5	55	25
6	2	12	36	72
7	1	7	49	49
Sommes	33	-6		446

3 1.

3	4	4	5	5	6	6	6	8	9	9
9	10	10	10	10	11	11	11	12	13	13
13	13	14	14	14	14	15	16	16	18	

2. L'effectif total, 32, étant pair, la médiane est la demi-somme des nombres de rang 16 et 17 soit $\frac{1}{2}(10 + 11) = 10,5$. Il y a autant d'élèves ayant moins de 10,5 que d'élèves ayant plus de 10,5.

3. Construisons un tableau permettant de faire simplement les calculs, en utilisant la formule d'Huygens pour le calcul de la variance, ce tableau peut être réalisé très simplement sous Excel. Les calculatrices donnent les résultats de la moyenne, de la variance et de l'écart type.

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
3	1	3	9	9
4	2	8	16	32
5	2	10	25	50
6	3	18	36	108
8	1	8	64	64
9	3	27	81	243
10	4	40	100	400
11	3	33	121	363
12	1	12	144	144
13	4	52	169	676
14	4	56	196	784
15	1	15	225	225
16	2	32	256	512
18	1	18	324	324
Sommes	32	332		3 934

La moyenne est donc :

$$\bar{x} = \frac{332}{32} \approx 10,38.$$

La variance est égale à :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{32} 3\,934 - \left(\frac{332}{32}\right)^2 \\ &= \frac{3\,934 \times 32 - 332^2}{32^2} \\ &= \frac{15\,664}{32^2} \\ &= \frac{16 \times 11 \times 89}{32 \times 32} = \frac{979}{64} \\ &\approx 15,3. \end{aligned}$$

L'écart type est :

$$s(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{979}}{8} \approx 3,91.$$

4. Construisons un nouveau tableau identique au précédent en faisant la transformation affine $y_i = x_i - 10$.

$y_i = x_i - 10$	n_i	$n_i y_i$	y_i^2	$n_i y_i^2$
-7	1	-7	49	49
-6	2	-12	36	72
-5	2	-10	25	50
-4	3	-12	16	48
-2	1	-2	4	4
-1	3	-3	1	3
0	4	0	0	0
1	3	3	1	3
2	1	2	4	4
3	4	12	9	36
4	4	16	16	64
5	1	5	25	25
6	2	12	36	72
8	1	8	64	64
Sommes	32	12		494

La moyenne de la série (y) est :

$$\bar{y} = \frac{12}{32}.$$

On peut retrouver la moyenne :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{y} + 10 = \frac{12}{32} + 10 \\ &= \frac{320 + 12}{32} = \frac{332}{32}. \end{aligned}$$

La variance de la série (y) est :

$$\begin{aligned} V(y) &= \frac{1}{32} (494) - \left(\frac{12}{32}\right)^2 \\ &= \frac{15\,664}{32^2}. \end{aligned}$$

La transformation étant

$y_i = x_i - 10$, on a :

$$V(y) = V(x) \text{ et } s(y) = s(x).$$

4 1. Pour tout réel t , on a :

$$f(t) = \frac{1}{6}((2-t)^2 + (4-t)^2 + (6-t)^2 + (12-t)^2 + (16-t)^2 + (20-t)^2)$$

$$= t^2 - 20t + \frac{428}{3}.$$

a) Pour tout réel t , on a $f'(t) = 2t - 20 = 2(t - 10)$. f est un trinôme du second degré, le coefficient de t^2 est strictement positif, donc la fonction f admet un minimum en 10 égal à $f(10) = \frac{128}{3}$.

t	$-\infty$	10	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{128}{3}$	$+\infty$

b) La fonction f atteint son minimum (cf. résumé du cours) lorsque $t = \bar{x}$, donc $\bar{x} = 10$, la variance est égale à $f(10) = \frac{128}{3}$ et l'écart type est $s(x) = \sqrt{\frac{128}{3}} \approx 6,53$.

c)

x_i	y_i	y_i^2
2	-4	16
4	-3	9
6	-2	4
12	1	1
16	3	9
20	5	25
Sommes	0	64

On a donc $\bar{y} = 0$, mais $\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} - 5 = 0$ d'où $\bar{x} = 10$.

On a en utilisant la formule d'Huygens :

$$V(y) = \frac{1}{6}64 - 0^2 = \frac{32}{3}.$$

Mais $V(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(x)$, d'où $V(x) = \frac{128}{3}$ et

$$s(x) = \sqrt{\frac{128}{3}} \approx 6,53.$$

2. a) $g(t) = \frac{1}{6}(|2-t| + |4-t| + |6-t| + |12-t| + |16-t| + |20-t|)$.

On trouve :

$$\text{si } t < 2, g(t) = \frac{1}{6}(-6t + 60) = -t + 10$$

$$\text{si } 2 \leq t < 4, g(t) = \frac{1}{6}(-4t + 56) = -\frac{2}{3}t + \frac{28}{3}$$

$$\text{si } 4 \leq t < 6, g(t) = \frac{1}{6}(-2t + 48) = -\frac{1}{3}t + 8$$

$$\text{si } 6 \leq t < 12, g(t) = 6$$

$$\text{si } 12 \leq t < 16, g(t) = \frac{1}{6}(2t + 12) = \frac{1}{3}t + 2$$

$$\text{si } 16 \leq t < 20, g(t) = \frac{1}{6}(4t - 20) = \frac{2}{3}t - \frac{10}{3}$$

$$\text{si } 20 \leq t, g(t) = \frac{1}{6}(6t - 60) = t - 10.$$

b) La fonction affine $t \mapsto at + b$ est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$, d'où le tableau de variation de g :

t	$-\infty$	2	4	6	12	16	20	$+\infty$
$g(t)$	$-\infty$	8	$\frac{20}{3}$	6	6	$\frac{22}{3}$	10	$+\infty$

c) La fonction g est minimale sur l'intervalle $[6 ; 12]$.

5 1. L'effectif total est 33. Pour déterminer la médiane, les quartiles et les déciles, il faut ordonner les différentes valeurs de la série.

3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	8
8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	12
12	12	12	13	13	13	14	15	16	16	17

a) L'effectif total étant un nombre impair la médiane est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{33}{2}$ soit le 17^e terme, la médiane est 10.

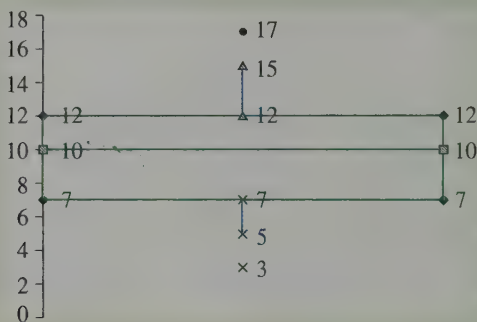
b) Le premier quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{33}{4} = 8,25$ soit le 9^e terme, le premier quartile est 7.

Le troisième quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $3 \times \frac{33}{4} = 24,75$ soit le 25^e terme, le troisième quartile est 12.

c) Le premier décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{33}{10} = 3,3$ soit le 4^e terme, le premier décile est 5.

Le neuvième décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $9 \times \frac{33}{10} = 29,7$ soit le 30^e terme, le neuvième décile est 15.

2. La valeur maximale est 17, la valeur minimale est 3, il est possible alors de construire le diagramme en boîte demandé :



- 6 1. L'effectif total est de 32. Pour déterminer la médiane, les quartiles et les déciles il faut ordonner les différentes valeurs de la série.

3	4	4	5	5	6	6	6	8	9	9
9	10	10	10	10	11	11	11	12	13	13
13	13	14	14	14	14	15	16	16	18	

a) L'effectif total étant un nombre pair, la médiane est la moyenne des deux termes de la série de rang $\frac{32}{2}$ et $\frac{32}{2} + 1$ soit $\frac{1}{2}(10 + 11) = 10,5$, la médiane est 10,5.

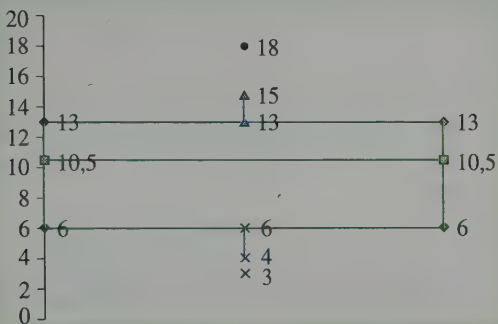
b) Le premier quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{32}{4} = 8$ soit le 8^e terme, le premier quartile est 6.

Le troisième quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $3 \times \frac{32}{4} = 24$ soit le 24^e terme, le troisième quartile est 13.

c) Le premier décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{32}{10} = 3,2$ soit le 4^e terme, le premier décile est 5.

Le neuvième décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $9 \times \frac{32}{10} = 28,8$ soit le 29^e terme, le neuvième décile est 15.

2. La valeur maximale est 18, la valeur minimale est 3, il est possible alors de construire le diagramme en boîte demandé :



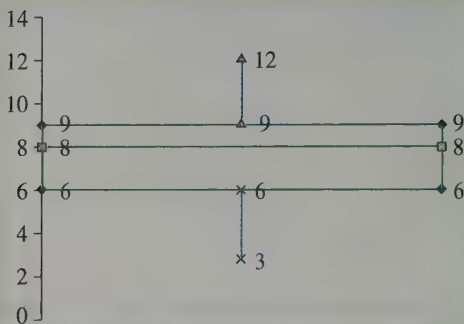
7 La construction des diagrammes en boîtes sera effectuée à l'aide du tableur Excel, les résultats obtenus à l'aide d'autres logiciels, ou manuellement peuvent être légèrement différents.

• **Série 1**

En utilisant la méthode proposée dans le cours, construisons le tableau :

0	2	2	0	0
6	6	9	9	6
0	2			
8	8			
1	1			
9	12			
1	1			
3	6			

En suivant les instructions, on obtient automatiquement le diagramme en boîte suivant :

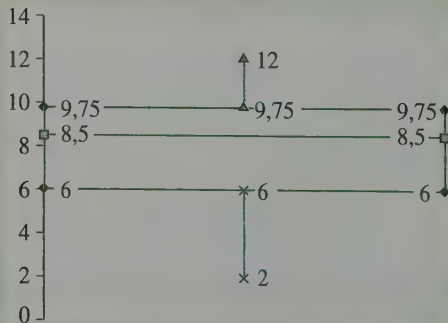


• **Série 2**

En utilisant la méthode proposée dans le cours, construisons le tableau :

0	2	2	0	0
6	6	9,75	9,75	6
0	2			
8,5	8,5			
1	1			
9,75	12			
1	1			
2	6			

En suivant les instructions, on obtient automatiquement le diagramme en boîte suivant :



- 8** 1. Pour déterminer les différents paramètres il est nécessaire de construire un tableau des valeurs ordonnées de façon croissante

7 390	7 890	12 580	13 650	17 970	18 970	19 620	20 710
21 210	22 360	23 120	23 560	24 830	26 510	35 850	

a) L'effectif total 15, étant un nombre impair la médiane est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{15}{2} = 7,5$ soit le 8^e terme, la médiane est 20 710.

b) Le premier quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{15}{4} = 3,75$ soit le 4^e terme, le premier quartile est 13 650.

Le troisième quartile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $3 \times \frac{15}{4} = 11,25$ soit le 12^e terme, le troisième quartile est 23 560.

c) Le premier décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $\frac{15}{10} = 1,5$ soit le 2^e terme, le premier décile est 7 890.

Le neuvième décile est le terme de la série de rang le nombre entier qui suit $9 \times \frac{15}{10} = 13,5$ soit le 14^e terme, le neuvième décile est 26 510.

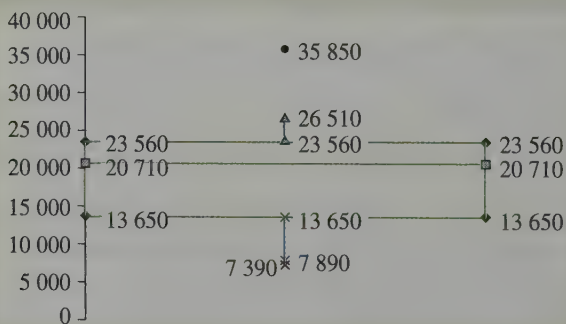
2. La valeur maximale est 35 850, la valeur minimale est 7 390, il est possible alors de construire le diagramme en boîte correspondant :

On peut construire la boîte « à la main » ou adapter la méthode proposée dans le cours. Pour cela on construit sur une feuille de calcul d'Excel, le tableau suivant en remplaçant les différents indices par leur valeur, en remplaçant les valeurs extrêmes par les premier et neuvième déciles et en insérant quatre nouvelles lignes comportant les valeurs extrêmes.

0	2	2	0	0
1 ^{er} quartile	1 ^{er} quartile	3 ^e quartile	3 ^e quartile	1 ^{er} quartile
0	2			
médiane	médiane			
1	1			

3 ^e quartile	9 ^e décile			
1	1			
1 ^{er} décile	1 ^{er} quartile			
1				
valeur minimale				
1				
valeur maximale				

Pour la réalisation graphique, il suffit d'ajouter deux nouvelles séries en utilisant les dernières lignes. On obtient alors la boîte suivante :



1 Définitions

Une épreuve est une expérience dont l'issue est aléatoire, c'est-à-dire dont l'issue ne peut être prévue *a priori*. Les résultats possibles d'une épreuve sont appelés des **éventualités** ou encore des **cas possibles**. Leur ensemble Ω est appelé l'**univers** des possibles, il sera toujours supposé fini et non vide.

On appelle **événement** toute partie de Ω .

- Un événement qui contient une seule éventualité (singleton de Ω) est appelé un **événement élémentaire**.
- La partie pleine Ω est appelée l'**événement certain**.
- La partie vide \emptyset est appelée l'**événement impossible**.
- Le complémentaire dans Ω de l'événement A est appelé l'**événement contraire de A** ; on le note \bar{A} .
- $A \cap B$ est l'événement « A et B ». Dire que « A et B » est réalisé cela signifie que les événements A et B se produisent simultanément.
- $A \cup B$ est l'événement « A ou B ». Dire que « A ou B » est réalisé cela signifie que l'un au moins des événements A ou B se produit.
- Si A et B sont disjoints c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux événements **incompatibles**.

2 Loi de probabilité sur un univers

• Soit un univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$.

Une **loi de probabilité p** sur Ω est la donnée de n nombres p_i , associés à chacun des ω_i , positifs ou nuls et de somme 1.

Pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

• Si Ω est un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} , on appelle **espérance de la loi de probabilité p** , le réel μ tel que :

$$\mu = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \dots + p_n\omega_n$$

• Si Ω est un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} , on appelle **variance de la loi de probabilité p** , le réel σ^2 tel que :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= p_1(\omega_1 - \mu)^2 + p_2(\omega_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(\omega_n - \mu)^2 \\ &= p_1(\omega_1)^2 + p_2(\omega_2)^2 + \dots + p_n(\omega_n)^2 - \mu^2\end{aligned}$$

• Si Ω est un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} , on appelle **écart type de la loi de probabilité p** , le réel positif σ égal à la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{p_1(\omega_1 - \mu)^2 + p_2(\omega_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(\omega_n - \mu)^2}$$

3

Probabilité d'un événement

⇒ Définition

La probabilité sur l'univers $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ associé à une loi de probabilité p est une application P de l'ensemble des parties de Ω dans $[0; 1]$ définie par :

(1) la donnée des probabilités des événements élémentaires :

$$\text{pour tout } i \in \{1; 2; \dots; n\}, \quad P(\{\omega_i\}) = p_i$$

où p_1, p_2, \dots, p_n sont les nombres réels, compris entre 0 et 1 et de somme 1, associés respectivement à chacun des ω_i ;

(2) pour tout événement A non vide, $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A .

⇒ Propriétés

- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tout couple $(A; B)$ d'événements incompatibles :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Pour tout événement A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Si A_1, A_2, \dots, A_k sont des événements incompatibles deux à deux (c'est-à-dire si i et j sont des éléments de $\{1; 2; \dots; k\}$ et $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

- Pour tout couple $(A; B)$ d'événements: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

⇒ Équiprobabilité

Soit P une probabilité sur un univers fini non vide Ω , on dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Si A est un événement, on a alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } (A)}{\text{nombre d'éléments de } (\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

4 Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X est une grandeur numérique, associée à une expérience ou à un phénomène aléatoire, susceptible de prendre un nombre fini de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n et telle qu'une probabilité $p_i = P(X = x_i)$ soit affectée à chacun des événements $(X = x_i)$ où $i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

On appelle **loi de probabilité d'une variable aléatoire** X l'application qui à chacune des valeurs prises x_1, x_2, \dots, x_n associe $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$.

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$.

L'**espérance mathématique** ou **moyenne** de X est le réel :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

La **variance** de X est le réel positif :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

$$V(X) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - (E(X))^2$$

On appelle **écart type** de la variable aléatoire X la racine carrée positive de la variance, on note ce réel :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** Si A et B sont deux événements distincts non vides tels que $A \subset B$ alors :
- a) $P(A) < P(B)$; V F
- b) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$; V F
- c) $P(A) \leq P(B)$. V F
- ➔ Corrigé p. 197
- 2** A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ alors :
- a) $A \cup B = \Omega$; V F
- b) $A \subset B$; V F
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. V F
- ➔ Corrigé p. 197
- 3** On lance simultanément deux dés équilibrés, la probabilité d'obtenir un double est :
- a) $\frac{1}{6}$; V F
- b) $\frac{1}{3}$; V F
- c) égale à la probabilité que la somme des nombres lus soit 7. V F
- ➔ Corrigé p. 197
- 4** On lance simultanément deux dés équilibrés, la probabilité que la somme des nombres lus soit 8 est strictement supérieure à celle pour laquelle la somme est 6. V F
- ➔ Corrigé p. 197
- 5** Il y a équiprobabilité, A et B deux événements tels que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ alors :
- a) $A \cap B = \emptyset$; V F
- b) $A \cup B = \Omega$; V F
- c) $B = \bar{A}$. V F
- ➔ Corrigé p. 197

6 Si A et B sont deux événements tels que : $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$,
 $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$, alors :

a) $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$; V F

b) $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$; V F

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{2}$; V F

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{11}{12}$. V F

→ Corrigé p. 197

7 A et B sont deux événements de Ω tels que $P(A) = P(B)$ alors :

a) A et B ont le même nombre d'éléments ; V F

b) $A = B$; V F

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. V F

→ Corrigé p. 197

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Modèles de probabilités

8 Peut-on trouver une probabilité P sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3\}$ telle que

$$P(\{1; 2\}) = \frac{1}{4}, P(\{1; 3\}) = \frac{1}{4}, \text{ et } P(\{2; 3\}) = \frac{1}{2} ?$$

→ Corrigé p. 198

9 Reprendre l'exercice précédent avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$P(\{1; 2; 3\}) = \frac{5}{8}, P(\{1; 3\}) = \frac{3}{8}, \text{ et } P(\{2; 3; 4\}) = \frac{7}{8}.$$

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de la loi de probabilité associée.

→ Corrigé p. 198

- 10** Soit Ω l'ensemble fini $\{a, b, c\}$; lesquelles des applications P_1, P_2, P_3 suivantes sont des probabilités ?

	P_1	P_2	P_3
$\{a\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\{b\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\{a, b\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\{a, c\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\{b, c\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\{a, b, c\}$	1	1	1

→ Corrigé p. 199

- 11** ★ Soit une expérience E , P la probabilité modélisant E , A et B deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4}, \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cup B)$.

→ Corrigé p. 200

Calculs de probabilités

- 12** Deux dés cubiques non pipés sont lancés sur une table. Soit S la somme des nombres lus sur les faces supérieures des dés.

- Déterminer les différentes valeurs possibles de S .
- Déterminer les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs.

→ Corrigé p. 200

- 13** Une personne possède trois chemises différentes C_1, C_2, C_3 ; deux cravates différentes K_1, K_2 et deux pantalons différents P_1, P_2 .

- Déterminer toutes les manières que cette personne a de s'habiller.

2. Si elle prend au hasard ses vêtements, quelle est la probabilité qu'elle porte trois vêtements de même indice ?

→ Corrigé p. 201

14 Une urne contient trois boules rouges R_1, R_2, R_3 et deux boules noires N_1 et N_2 , toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Décrire l'ensemble des éventualités Ω .

2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule noire.

→ Corrigé p. 202

15 **1.** Déterminer le nombre de dominos dans un jeu de dominos.

2. Déterminer la probabilité de tirer un double lorsque l'on tire au hasard un domino du jeu.

→ Corrigé p. 202

16 **1.** Déterminer le nombre de mots de deux lettres que l'on peut former à l'aide des lettres du mot MOI (chacune des lettres peut être redoublée).

2. Déterminer la probabilité que le mot soit formé de deux lettres identiques.

→ Corrigé p. 203

17 On lance deux dés cubiques non pipés. Soit A l'événement « la somme S des nombres lus sur les faces supérieures est inférieure ou égale à 8 », et B l'événement « S est divisible par 3 ».

Calculer les probabilités des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

→ Corrigé p. 203

18 On lance trois fois une pièce de monnaie, on suppose que tous les résultats ont la même probabilité (face se notera F, pile se notera P). Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux faces.

→ Corrigé p. 204

19 Dans une école, il y a 60 % de filles et 40 % de garçons, 30 % des garçons et 15 % des filles font de l'informatique. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il fasse de l'informatique ?

→ Corrigé p. 204

20 Une urne contient trois boules rouges R_1, R_2, R_3 et deux boules noires N_1, N_2 . On tire au hasard deux boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?

→ Corrigé p. 204

- 21** Dans une classe, 70 % des élèves étudient l'anglais, 10 % l'allemand et 5 % l'anglais et l'allemand. On choisit un élève au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il étudie l'anglais ou l'allemand ?

→ Corrigé p. 205

- 22** ★ On prépare trois colis différents et trois étiquettes portant les noms et adresses des trois destinataires. On colle une étiquette sur chacun des colis sans faire attention. Quelles sont les probabilités que 3, 2, 1, 0 colis arrivent à leur vrai destinataire ?

→ Corrigé p. 205

- 23** ★ Dans une classe de 1^{re}, 88 % des élèves ont déclaré aimer les mathématiques, 20 % ont déclaré aimer la chimie et 15 % ont déclaré aimer les mathématiques et la chimie.

On choisit un élève au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il aime les mathématiques et pas la chimie ?
2. Quelle est la probabilité qu'il aime la chimie et pas les mathématiques ?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'aime ni les mathématiques ni la chimie ?

→ Corrigé p. 205

- 24** ★ On tire au hasard un numéro entier n compris entre 100 et 999 ($100 \leq n \leq 999$).

1. Calculer la probabilité de l'événement « le numéro n est un multiple de 7 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement « la somme des chiffres du numéro tiré est 4 ».

→ Corrigé p. 206

- 25** ★ On tire au hasard un numéro entier n compris entre 100 et 499 ($100 \leq n \leq 499$). Calculer la probabilité que dans le numéro tiré figure au moins un chiffre 1.

→ Corrigé p. 206

- 26** ★ On donnera les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, on la remet dans le jeu et on tire au hasard une deuxième carte.

- a) Trouver la probabilité de tirer un seul as au cours des deux tirages.
- b) Trouver la probabilité de tirer au moins un as au cours des deux tirages.

2. Répondre aux mêmes questions a) et b) lorsqu'on tire au hasard une carte du jeu puis une deuxième sans remettre la première carte dans le jeu.

→ Corrigé p. 207

27 ★ Quatre camarades André, Bernard, Claude, Dominique décident sans se concerter (indépendamment les uns des autres) d'aller au cinéma un dimanche à 14 h. Il y a trois cinémas. On suppose l'équiprobabilité dans le choix des trois cinémas.

- Dénombrer tous les choix possibles (on pourra commencer un arbre).
- Calculer les probabilités des événements suivants :
 - les quatre camarades se retrouvent dans le même cinéma ;
 - dans chaque cinéma, il y a au moins l'un des quatre camarades.

→ Corrigé p. 208

Variables aléatoires

28 Un enfant possède 4 cubes rouges et 1 cube bleu, il les aligne devant lui en les plaçant au hasard.

- Préciser les différentes dispositions possibles. (Les cubes rouges sont indiscernables et on admettra que les différentes dispositions obtenues sont équiprobables).
- Soit X la variable aléatoire égale au rang du cube bleu dans les différents alignements. Donner la loi de X .
- Calculer la probabilité de l'événement « il y a autant de cubes rouges de part et d'autre du cube bleu ».
- Calculer la probabilité de l'événement ($X \geq 4$).

→ Corrigé p. 209


29 Un sac contient 10 billes noires, 35 billes rouges et 55 billes bleues. On tire au hasard une bille du sac. Si elle est noire, on gagne 2 €, si elle est rouge, on gagne 1 €, enfin si elle est bleue, on gagne 0,2 €.

Pour jouer une partie, la mise est de 0,8 €. Soit X le gain du joueur. Le gain est égal à ce que lui rapporte le tirage diminué de sa mise.


- Quels sont les gains possibles ?
- Établir la loi de X .
- Calculer la probabilité de l'événement ($X \geq 0,8$).

→ Corrigé p. 209


30 ★ Un premier jeton porte sur ses deux faces les numéros 1 et 2, un deuxième porte les numéros 3 et 4 et un troisième porte les numéros 5 et 6. On suppose les jetons bien équilibrés. On lance les trois jetons et on fait la somme des nombres apparus.

1. Préciser les différents lancers possibles.
2. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des nombres lus, déterminer la loi de S .
3. Calculer la probabilité de l'événement ($S > 10$).
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de S .  Corrigé p. 210

31 ★ On place dans une enveloppe les rois, les dames, et les valets de pique et de cœur, soit 6 cartes. Un joueur tire au hasard 2 cartes de l'enveloppe. Un roi rapporte 5 points, une dame 3 points et un valet 1 point.

1. Préciser les résultats possibles du tirage.
2. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus au cours d'un tirage. Donner la loi de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .  Corrigé p. 211

32 ★ On lance sur une table deux dés cubiques non pipés (il y a équiprobabilité de sortie des nombres lus sur la face supérieure de chaque dé).

1. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Soit X le plus grand des nombres lus sur la face supérieure de chaque dé.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X .  Corrigé p. 212

Simulation à l'aide d'un tableur

33 ★ Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, trois rouges et deux bleues, on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Écrire tous les résultats possibles d'un tirage.
2. Calculer la probabilité de l'événement A « obtenir deux boules rouges ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B « obtenir deux boules de couleurs distinctes ».
4. À l'aide d'un tableur, simuler l'expérience précédente 50, 100, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000 fois. Calculer dans chacun des cas la fréquence f de réalisation de l'événement A. Comparer avec le résultat obtenu à la question 2..

 Corrigé p. 213

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) **Faux.** Il n'y a pas forcément équiprobabilité, des éventualités peuvent avoir une probabilité nulle.
 b) **Vrai.** Car $P(A \cap B) \geq 0$.
 c) **Vrai.** $P(A) \leq P(B)$.
- 2** a) **Faux.**
 b) **Faux.**
 c) **Faux.**
- 3** a) **Vrai.** Il y a 6 doubles.
 b) **Faux.**
 c) **Vrai.** Il y a 6 manières d'obtenir 7.
- 4** a) **Faux.** La probabilité d'obtenir 6 est égale à la probabilité d'obtenir 8.
- 5** a) **Vrai,** car il y a équiprobabilité.
 b) **Faux.**
 c) **Faux.**
- 6** a) **Vrai.** $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
 b) **Faux.** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.
 c) **Vrai.** $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{2}$.
 d) **Vrai.** $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{11}{12}$.
- 7** a) **Faux.** Non s'il n'y a pas équiprobabilité.
 b) **Faux.**
 c) **Faux.**

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

- 8** Les événements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$; désignons par p_1, p_2, p_3 , les probabilités de chacun de ces événements. On a :

$$P(\{1; 2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = p_1 + p_2 = \frac{1}{4};$$

$$P(\{1; 3\}) = P(\{1\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) = p_1 + p_3 = \frac{1}{4};$$

$$P(\{2; 3\}) = P(\{2\} \cup \{3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = p_2 + p_3 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = \frac{1}{4} \\ p_1 + p_3 = \frac{1}{4} \\ p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 - p_3 = 0 \\ p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \\ p_1 + p_2 = \frac{1}{4} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = p_3 = \frac{1}{4} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Il n'y a pas de probabilité répondant aux hypothèses (car pour $p_1 = 0$ et $p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$, $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} \neq 1$).

- 9** Les événements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$; désignons par p_1, p_2, p_3, p_4 , les probabilités de chacun de ces événements.

On a :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = \frac{5}{8} \\ p_1 + p_3 = \frac{3}{8} \\ p_2 + p_3 + p_4 = \frac{7}{8} \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = \frac{1}{4} \\ p_1 + p_3 = \frac{3}{8} \\ p_3 + p_4 = \frac{5}{8} \\ p_1 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{8} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ p_3 = \frac{1}{4} \\ p_4 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Il existe une unique probabilité, vérifiant les conditions données, définie par :

$$P(\{1\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{4\}) = \frac{3}{8}.$$

La loi de probabilité sur l'ensemble $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ est le quadruplet $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8})$. L'ensemble Ω est une partie finie de \mathbb{R} , on peut donc calculer l'espérance μ , la variance σ^2 et l'écart type σ . On a :

$$\mu = 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{8} = \frac{23}{8}$$

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{3}{8} - \left(\frac{23}{8}\right)^2 = \frac{71}{64}$$

D'où l'écart type : $\sigma = \frac{\sqrt{71}}{8} \approx 1,053$.

- 10** • On a : $P_1(\{a\}) = \frac{1}{2}$; $P_1(\{b\}) = \frac{1}{4}$; donc on devrait avoir $P_1(\{a; b\}) = \frac{3}{4}$;
 or par hypothèse, $P_1(\{a; b\}) = \frac{1}{2}$, il y a donc une contradiction : P_1 n'est pas une probabilité.

• On a :

$$P_2(\{a\}) = \frac{1}{2}; \quad P_2(\{b\}) = \frac{1}{4};$$

$$P_2(\{a; c\}) = P_2(\{a\}) + P_2(\{c\}) = \frac{3}{4};$$

$$\text{d'où } P_2(\{c\}) = \frac{1}{4}.$$

Vérifions que ces nombres sont compatibles avec les données :

$$P_2(\{a; b\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P_2(\{b; c\}) = \frac{1}{2}, \quad P_2(\{a; b; c\}) = 1;$$

P_2 est une probabilité.

$$\bullet \text{ On a : } P_3(\{a\}) = \frac{1}{2}; \quad P_3(\{b\}) = \frac{1}{4};$$

$$P_3(\{a; c\}) = P_3(\{a\}) + P_3(\{c\}) = \frac{3}{4};$$

$$\text{d'où } P_3(\{c\}) = \frac{1}{4}.$$

Vérifions que ces nombres sont compatibles avec les données :

$$P_3(\{a; b\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$P_3(\{b; c\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}.$$

P_3 n'est pas une probabilité.

- 11** • On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, d'où :

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

- On a :

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \quad (1)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Calculons $P(A \cap \bar{B})$ à l'aide des données :

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont incompatibles donc :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\text{d'où } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit d'après (1) :

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{11}{12}.$$

- De même : $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$ (2)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(\bar{A} \cap B)$ à l'aide des données :

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$, $(B \cap A)$ et $(B \cap \bar{A})$ sont incompatibles donc

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A});$$

$$\text{d'où } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

On en déduit d'après (2) :

$$P(\bar{A} \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

- 12** 1. Lorsque deux dés sont lancés, il y a 36 cas possibles que l'on peut regrouper de la manière suivante :

$$S = 2 \quad \{(1; 1)\}$$

$$S = 3 \quad \{(1; 2), (2; 1)\}$$

$$S = 4 \quad \{(1; 3), (3; 1), (2; 2)\}$$

$$S = 5 \quad \{(1; 4), (4; 1), (2; 3), (3; 2)\}$$

$$S = 6 \quad \{(1; 5), (5; 1), (2; 4), (4; 2), (3; 3)\}$$

$$S = 7 \quad \{(1; 6), (6; 1), (2; 5), (5; 2), (4; 3), (3; 4)\}$$

$$S = 8 \quad \{(2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4)\}$$

$$S = 9 \quad \{(3; 6), (6; 3), (4; 5), (5; 4)\}$$

$$S = 10 \quad \{(4; 6), (6; 4), (5; 5)\}$$

$$S = 11 \quad \{(5; 6), (6; 5)\}$$

$$S = 12 \quad \{(6; 6)\}.$$

2. L'ensemble Ω des éventualités (univers) est l'ensemble des 36 couples précédents. Les dés étant précisés non pipés, il y a équiprobabilité, chacun des couples a donc la même probabilité $\frac{1}{36}$ d'apparaître.

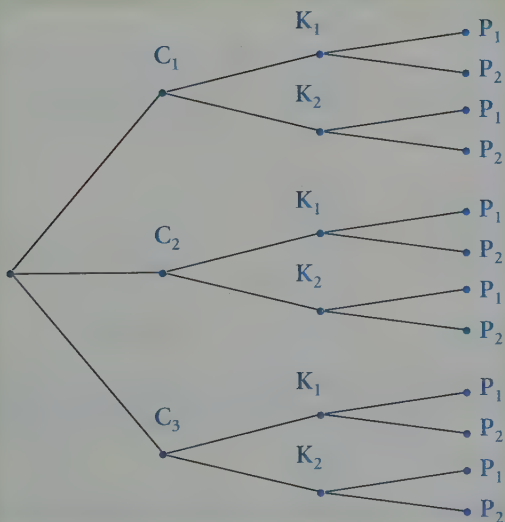
$$P(S = 2) = \frac{1}{36}; \quad P(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}; \quad P(S = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$P(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad P(S = 6) = \frac{5}{36}; \quad P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$P(S = 8) = \frac{5}{36}; \quad P(S = 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad P(S = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}; \quad P(S = 12) = \frac{1}{36}.$$

13 **1.** Construisons un arbre qui détermine toutes les manières de se vêtir ;



Chaque chemin est une manière différente de se vêtir ; il y a douze chemins, donc douze tenues différentes.

2. Le tirage étant fait au hasard, toutes les tenues sont équiprobables. Il y a deux cas favorables ($C_1K_1P_1$) et ($C_2K_2P_2$);

donc la probabilité demandée est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

14 1. Soit l'ensemble $\{R_1; R_2; R_3; N_1; N_2\}$.

L'ensemble Ω contient toutes les paires possibles de deux boules :

$$\Omega = \{\{R_1; R_2\}, \{R_1; R_3\}, \{R_1; N_1\}, \{R_1; N_2\}, \{R_2; R_3\} \\ \{R_2; N_1\}, \{R_2; N_2\}, \{R_3; N_1\}, \{R_3; N_2\}, \{N_1; N_2\}\}.$$

2. Le nombre de ces tirages possibles est 10 ; il y a équiprobabilité, le nombre de cas favorables (tirages comportant une boule rouge et une noire) est 6. La

probabilité demandée est $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

15 1. Un jeu de dominos est constitué de rectangles comportant deux nombres chacun allant de 0 (blanc) à 6 (6 points noirs).

Il n'y a pas lieu de distinguer le domino (1 ; 2) et le domino (2 ; 1) ; on le désignera par {1 ; 2}. On a donc :

$$\{0; 0\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{0; 3\}; \{0; 4\}; \{0; 5\}; \{0; 6\}; \\ \{1; 1\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{1; 5\}; \{1; 6\}; \\ \{2; 2\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{2; 6\}; \\ \{3; 3\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{3; 6\}; \\ \{4; 4\}; \{4; 5\}; \{4; 6\}; \\ \{5; 5\}; \{5; 6\}; \\ \{6; 6\}.$$

Il y a donc en tout $1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 28$ dominos.

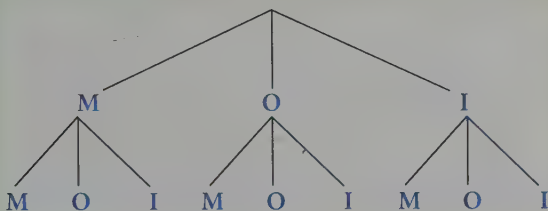
2. Le texte précise que le tirage a lieu au hasard ; cela signifie qu'il y a équiprobabilité des événements élémentaires, chacun des dominos a une probabilité

$\frac{1}{28}$ d'être tiré.

Il y a sept doubles (le nombre de cas favorables est 7). On a donc, si D désigne l'événement « tirer un double » :

$$P(D) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}.$$

- 16 1. On peut utiliser un arbre ; un mot est un chemin possible, il y a donc 9 mots possibles.



2. Il y a équiprobabilité et trois cas favorables, MM, OO, II. La probabilité demandée est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- 17 L'événement A : « $S \leq 8$ » est réalisé 26 fois (cf. exercice 5) ; les dés étant non pipés, il y a équiprobabilité, d'où :

$$P(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

L'événement B : « S est divisible par 3 » est réalisé lorsque $S = 3$ ou $S = 6$ ou $S = 9$ ou $S = 12$, il est donc réalisé 12 fois :

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

L'événement $A \cap B$ est l'événement « $S \leq 8$ et S est divisible par 3 », soit encore « $S = 3$ ou $S = 6$ », il est donc réalisé 7 fois :

$$P(A \cap B) = \frac{7}{36}$$

$A \cup B$ est l'événement « $S \leq 8$ ou S est divisible par 3 », il est réalisé lorsque S prend l'une des valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 ce qui est réalisé 31 fois :

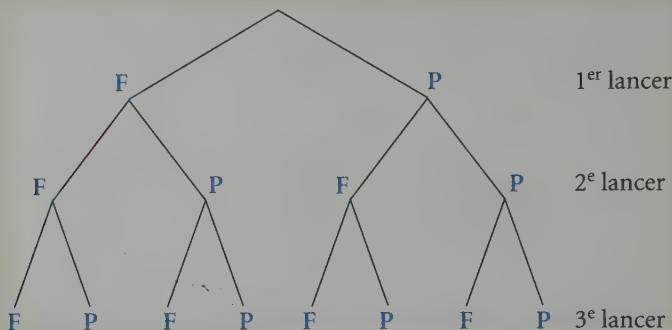
$$P(A \cup B) = \frac{31}{36}$$

• **Autre méthode**

On a aussi : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{26}{36} + \frac{12}{36} - \frac{7}{36} = \frac{31}{36}$$

- 18** L'ensemble des cas possibles peut être dénombré par un arbre :



Il y a autant de cas possibles qu'il y a de chemins soit 8 éventualités. Il y a équiprobabilité et trois cas favorables : PFF, FPF et FFP, d'où la probabilité demandée : $\frac{3}{8}$.

- 19** Soit n le nombre d'élèves de l'école. Il y a 40 % de garçons dans l'école donc le nombre de garçons est $\frac{n \times 40}{100}$.

Il y a 30 % de garçons faisant de l'informatique donc le nombre de garçons faisant de l'informatique est $\frac{n \times 40}{100} \times \frac{30}{100} = 0,12n$.

De même, le nombre de filles faisant de l'informatique est :

$$\frac{n \times 60}{100} \times \frac{15}{100} = 0,09n.$$

Considérons les événements, I, G et F suivants :

I : « l'élève choisi fait de l'informatique » ;

G : « l'élève choisi est un garçon » ;

F : « l'élève choisi est une fille ».

On a : $P(I \cap G) = \frac{0,12n}{n} = 0,12$ et $P(I \cap F) = \frac{0,09n}{n} = 0,09$.

L'événement I est la réunion des événements $I \cap G$ et $I \cap F$, ces événements étant incompatibles, donc :

$$P(I) = P(I \cap G) + P(I \cap F) = 0,12 + 0,09 = 0,21.$$

- 20** Soit l'ensemble $\{R_1 ; R_2 ; R_3 ; N_1 ; N_2\}$. En raisonnant comme dans l'exercice **14**, il y a 10 cas possibles.

L'événement contraire de « tirer au moins une boule rouge » est « ne pas tirer une boule rouge » donc « tirer deux boules noires ».

Un seul cas favorable : tirer N_1 et N_2 . Si A désigne l'événement « tirer au moins une boule rouge », on a :

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{10} = 1 - P(A)$$

$$P(A) = \frac{9}{10}.$$

- 21** Si AN est l'événement « l'élève choisi étudie l'anglais » et AL l'événement « l'élève choisi étudie l'allemand », on a :

$$P(AN) = 0,7, \quad P(AL) = 0,1 \quad \text{et} \quad P(AN \cap AL) = 0,05.$$

L'événement dont on cherche la probabilité est $AN \cup AL$. On a :

$$\begin{aligned} P(AN \cup AL) &= P(AN) + P(AL) - P(AN \cap AL) \\ &= 0,7 + 0,1 - 0,05 = 0,75. \end{aligned}$$

- 22** Les colis C_1, C_2, C_3 étant posés dans cet ordre, il y a 6 manières de coller les étiquettes, respectivement :

$$E_1E_2E_3; E_1E_3E_2; E_2E_1E_3; E_2E_3E_1; E_3E_1E_2; E_3E_2E_1.$$

Les collages se faisant au hasard, il y a équiprobabilité, et chacune des éventualités a une probabilité $\frac{1}{6}$.

- L'événement « les trois destinataires reçoivent leur colis » est réalisé une fois (cas où les étiquettes sont dans l'ordre $E_1E_2E_3$). La probabilité est donc $\frac{1}{6}$.
- Deux destinataires ne peuvent recevoir leur colis sans que le troisième le reçoive. La probabilité que deux destinataires et seulement deux reçoivent leur colis est donc nulle.
- Un destinataire et un seul reçoit son colis (cas où les étiquettes sont dans l'ordre $E_1E_3E_2, E_3E_2E_1, E_2E_1E_3$) cet événement est réalisé trois fois, la probabilité est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- La probabilité qu'aucun destinataire ne reçoive son colis est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- 23** Soit M l'événement « l'élève choisi aime les mathématiques » et C l'événement « l'élève choisi aime la chimie ». On a :

$$P(M) = 0,88, \quad P(C) = 0,2 \quad \text{et} \quad P(M \cap C) = 0,15.$$

1. On cherche la probabilité de l'événement $M \cap \bar{C}$.

$M \cap \bar{C}$ et $M \cap C$ sont incompatibles et $(M \cap \bar{C}) \cup (M \cap C) = M$ d'où :

$$P(M) = P((M \cap \bar{C}) \cup (M \cap C)) = P(M \cap C) + P(M \cap \bar{C}),$$

$$\text{donc } P(M \cap \bar{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0,88 - 0,15 = 0,73.$$

2. De même, pour chercher $P(C \cap \bar{M})$, on remarque que $C \cap \bar{M}$ et $C \cap M$ sont incompatibles et $(C \cap \bar{M}) \cup (C \cap M) = C$.

D'où $P(C) = P((C \cap \bar{M}) \cup (C \cap M)) = P(C \cap \bar{M}) + P(C \cap M)$

donc $P(C \cap \bar{M}) = P(C) - P(C \cap M) = 0,2 - 0,15 = 0,05$.

3. L'événement « l'élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie » est l'événement contraire de $M \cup C$.

$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$

$$= 0,88 + 0,2 - 0,15 = 0,93.$$

La probabilité demandée est $1 - P(M \cup C) = 1 - 0,93 = 0,07$.

24 **1.** Si n est un nombre entier multiple de 7, il existe un entier m tel que $n = 7m$. La condition $100 \leq n \leq 999$ impose donc que m vérifie :

$$100 \leq 7m \leq 999, \text{ soit } \frac{100}{7} \leq m \leq \frac{999}{7}.$$

On a $\frac{100}{7} \approx 14,28$ et $\frac{999}{7} \approx 142,71$; m étant un nombre entier, on a donc $15 \leq m \leq 142$.

De 1 à 14, il y a 14 nombres entiers ; de 1 à 142, il y en a 142 ; donc de 15 à 142, il y en a $142 - 14 = 128$.

Il y a donc 128 entiers compris entre 100 et 999, qui sont des multiples de 7. Il y a 900 entiers compris entre 100 et 999.

Le tirage étant au hasard, il y a équiprobabilité des tirages donc la probabilité de tirer un multiple de 7 est :

$$\frac{128}{900} = \frac{32}{225} \approx 0,142.$$

2. Les numéros de trois chiffres dont la somme est 4 sont dans l'ordre des valeurs croissantes : 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400. Il y en a dix. La probabilité de tirer un numéro entre 100 et 999 dont la somme des chiffres est 4 est :

$$\frac{10}{900} = \frac{1}{90} \approx 0,011.$$

25 Soit abc l'écriture du numéro tiré, le nombre n étant compris entre 100 et 499, on a :

$$1 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9.$$

L'événement contraire de « au moins un chiffre 1 figure dans l'écriture du nombre » est : « il n'y a pas de chiffres 1 dans l'écriture du nombre ».

L'entier a peut prendre alors trois valeurs possibles 2, 3, 4 ; les entiers b et c , neuf valeurs possibles : 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il y a donc, pour l'écriture du nombre n , $3 \times 9 \times 9 = 243$ cas favorables.

Il y a 400 nombres compris entre 100 et 499, la probabilité de tirer un numéro qui ne comporte pas de chiffres 1 dans son écriture est donc $\frac{243}{400}$.

La probabilité cherchée, qui est celle de l'événement contraire, est donc :

$$1 - \frac{243}{400} = \frac{157}{400} = 0,3925.$$

26 1. a) L'univers formé des tirages de deux cartes avec remise de la 1^{re} carte comporte 32×32 éléments.

Les cas favorables s'obtiennent en tirant :

- 1 as puis une carte autre qu'un as, il y a 4×28 choix ;
- une carte autre qu'un as puis 1 as, il y a 28×4 choix.

La probabilité de tirer un seul as est :

$$p_1 = \frac{4 \times 28 + 28 \times 4}{32 \times 32} = \frac{28 \times 8}{32 \times 32} = \frac{7}{32}.$$

b) 1^{re} méthode : cherchons la probabilité p' de l'événement contraire « tirer 2 cartes qui ne sont pas des as ». Il y a 28×28 choix de deux cartes sans as.

Donc
$$p' = \frac{28 \times 28}{32 \times 32} = \frac{7 \times 7}{8 \times 8} = \frac{49}{64}.$$

La probabilité de tirer au moins un as est donc :

$$p = 1 - p' = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}.$$

2^e méthode : sans passer par l'événement contraire.

On a calculé la probabilité p_1 de tirer un seul as : $p_1 = \frac{7}{32}$.

Pour tirer deux as, il y a 4×4 choix, donc la probabilité de tirer deux as est :

$$p_2 = \frac{4 \times 4}{32 \times 32} = \frac{1}{64}.$$

D'où :
$$p = p_1 + p_2 = \frac{7}{32} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}.$$

2. a) Soit l'univers formé des tirages de deux cartes sans remise de la 1^{re} carte. Il y a 32×31 cas possibles.

Les cas favorables sont les mêmes qu'à la question **1. a**.

La probabilité de tirer un seul as est :

$$p_1 = \frac{4 \times 28 + 28 \times 4}{32 \times 31} = \frac{28 \times 8}{32 \times 31} = \frac{7}{31}.$$

b) On peut encore utiliser l'une des deux méthodes de la question **1. b**.

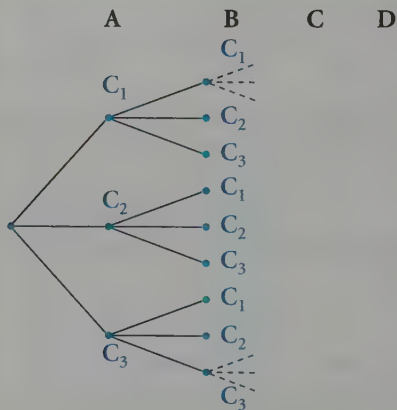
Utilisons, par exemple, la 1^{re} méthode. Avec les mêmes notations, il y a 28×27 choix de deux cartes sans as.

$$p' = \frac{28 \times 27}{32 \times 31} = \frac{7 \times 27}{8 \times 31} = \frac{189}{248}.$$

La probabilité de tirer au moins un as est

$$p = 1 - p' = 1 - \frac{189}{248} = \frac{59}{248}.$$

- 27 1.** Appelons A, B, C, D les quatre camarades et C_1 , C_2 et C_3 les 3 cinémas. Il y a pour A et B, 3×3 choix du cinéma.



À chaque choix de B, on peut associer 3 ramifications représentant les choix de C. Donc pour A, B et C, il y a $3 \times 3 \times 3$ choix du cinéma. Aux dernières extrémités, on peut encore associer 3 ramifications représentant les choix de D. Le nombre de choix possibles est : $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

2. a) Il y a 3 cas favorables : les quatre camarades vont tous au cinéma C_1 , tous au cinéma C_2 , tous au cinéma C_3 .

La probabilité qu'ils se retrouvent dans le même cinéma est :

$$\frac{3}{81} = \frac{1}{27}.$$

b) Les cas favorables sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{deux camarades dans } C_1, \text{ il y a 6 choix :} \\ \quad \{A ; B\}, \{A ; C\}, \{A ; D\}, \{B ; C\}, \{B ; D\}, \{C ; D\} \\ \text{les deux autres dans } C_2 \text{ et } C_3, \text{ il y a deux choix ;} \end{array} \right.$$

le nombre des cas favorables précédents est $6 \times 2 = 12$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{deux camarades dans } C_2 \\ \text{les deux autres dans } C_1 \text{ et } C_3 ; \end{array} \right.$$

il y a encore $6 \times 2 = 12$ cas favorables (même raisonnement que précédemment) ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{deux camarades dans } C_3 \\ \text{les deux autres dans } C_1 \text{ et } C_2, \end{array} \right.$$

il y a encore $6 \times 2 = 12$ cas favorables.

La probabilité qu'il y ait au moins l'un des quatre camarades dans chaque cinéma est :

$$\frac{12 + 12 + 12}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

28 **1.** Il y a 4 cubes rouges et un bleu. Dans l'alignement le cube bleu peut être posé à gauche des 4 rouges ou entre le 1^{er} et le 2^e cube rouge ou ... à droite des cubes rouges. Il y a donc 5 dispositions possibles des 5 cubes.

2. À chaque disposition correspond une valeur du rang et une seule, les différentes valeurs prises par la variable X sont donc les entiers de 1 à 5. Les dispositions étant équiprobables, elles sont toutes réalisées avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Donc $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = \frac{1}{5}$.

3. L'événement « il y a autant de cubes rouges de part et d'autre du cube bleu » est l'événement $(X = 3)$, sa probabilité est donc $\frac{1}{5}$.

4. L'événement $(X \geq 4)$ est la réunion des événements incompatibles $(X = 4)$ et $(X = 5)$, sa probabilité est donc la somme des probabilités des événements $(X = 4)$ et $(X = 5)$ soit $\frac{2}{5}$.

29 **1.** Si le joueur tire une bille noire, X prend la valeur $2 - 0,8 = 1,2$.
Si le joueur tire une bille rouge, X prend la valeur $1 - 0,8 = 0,2$.
Si le joueur tire une bille bleue, X prend la valeur $0,2 - 0,8 = -0,6$.
Les différentes valeurs possibles du gain sont $-0,6$; $0,2$ et $1,2$.

2. Dans le sac il y a $10 + 35 + 55 = 100$ billes.

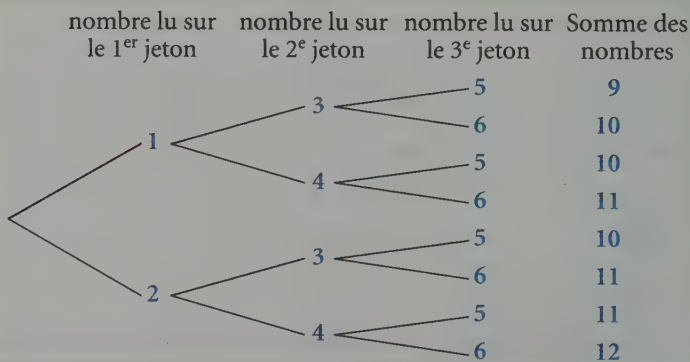
L'événement $(X = 1,2)$ est réalisé si et seulement si le joueur tire une bille noire. La probabilité $P(X = 1,2)$ est égale à la probabilité de tirer une bille noire soit $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

De même l'événement $(X = 0,2)$ est réalisé si et seulement si le joueur tire une bille rouge. La probabilité $P(X = 0,2)$ est égale à la probabilité de tirer une bille rouge soit $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$.

De même l'événement $(X = -0,6)$ est réalisé si et seulement si le joueur tire une bille bleue. La probabilité $P(X = -0,6)$ est égale à la probabilité de tirer une bille bleue soit $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

3. L'événement $(X \geq 0,8)$ est l'événement $(X = 1,2)$, donc $P(X \geq 0,8) = P(X = 1,2) = \frac{1}{10}$.

30 1. On peut représenter les lancers possibles en faisant l'arbre suivant :



Il y a 8 résultats possibles de même probabilité $\frac{1}{8}$.

2. D'après l'arbre construit ci-dessus les valeurs possibles de S sont 9, 10, 11, 12. La somme 9 est obtenue une seule fois donc :

$$P(S = 9) = \frac{1}{8}$$

La somme 10 est obtenue trois fois donc $P(S = 10) = \frac{3}{8}$. La somme 11 est obtenue trois fois donc $P(S = 11) = \frac{3}{8}$. La somme 12 est obtenue une seule fois donc $P(S = 12) = \frac{1}{8}$.

3. L'événement $(S > 10)$ est la réunion des événements incompatibles $(S = 11)$ et $(S = 12)$, sa probabilité est donc la somme des probabilités des événements $(S = 11)$ et $(S = 12)$ soit $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

4. L'espérance de S est :

$$\begin{aligned} E(S) &= 9 \times \frac{1}{8} + 10 \times \frac{3}{8} + 11 \times \frac{3}{8} + 12 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{84}{8} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

La variance de S est égale à :

$$\begin{aligned} V(S) &= 9^2 \times \frac{1}{8} + 10^2 \times \frac{3}{8} + 11^2 \times \frac{3}{8} + 12^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

L'écart type de S est :

$$\sigma(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

31 1. On note $R\spadesuit$, $D\spadesuit$ et $V\spadesuit$ le roi, la dame et le valet de pique, et $R\heartsuit$, $D\heartsuit$ et $V\heartsuit$ le roi, la dame et le valet de cœur. Les résultats du tirage sont les sous-ensembles à deux éléments pris dans $\{R\spadesuit; D\spadesuit; V\spadesuit; R\heartsuit; D\heartsuit; V\heartsuit\}$:

$$\begin{aligned} &\{R\spadesuit; D\spadesuit\} \quad \{R\spadesuit; V\spadesuit\} \quad \{R\spadesuit; R\heartsuit\} \quad \{R\spadesuit; D\heartsuit\} \quad \{R\spadesuit; V\heartsuit\} \\ &\{D\spadesuit; V\spadesuit\} \quad \{D\spadesuit; R\heartsuit\} \quad \{D\spadesuit; D\heartsuit\} \quad \{D\spadesuit; V\heartsuit\} \\ &\{V\spadesuit; R\heartsuit\} \quad \{V\spadesuit; D\heartsuit\} \quad \{V\spadesuit; V\heartsuit\} \\ &\{R\heartsuit; D\heartsuit\} \quad \{R\heartsuit; V\heartsuit\} \\ &\{D\heartsuit; V\heartsuit\}. \end{aligned}$$

Il y a 15 résultats possibles, chaque résultat a la probabilité $\frac{1}{15}$ d'apparaître.

2. La somme des points est :

- 10 pour le tirage des deux rois ;
- 8 pour le tirage d'un roi et d'une dame ;
- 6 pour le tirage d'un roi et d'un valet ou de deux dames ;
- 4 pour le tirage d'une dame et d'un valet ;
- 2 pour le tirage de deux valets.

En s'aidant du tableau des 15 résultats on obtient la loi de X que l'on résume dans le tableau :

x_i	2	4	6	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

Remarques : on constate que la somme des probabilités obtenues est égale à 1.

3. L'espérance est égale à :

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 6 \times \frac{5}{15} + 8 \times \frac{4}{15} + 10 \times \frac{1}{15} = 6.$$

La variance est égale à :

$$\begin{aligned} V(X) &= 2^2 \times \frac{1}{15} + 4^2 \times \frac{4}{15} + 6^2 \times \frac{5}{15} + 8^2 \times \frac{4}{15} + 10^2 \times \frac{1}{15} - 6^2 \\ &= \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

L'écart type est égal à $\sqrt{\frac{64}{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$.

32 1. Les résultats possibles sont représentés par les couples (voir ex. 12) :

(1 ; 1), (1 ; 2), ..., (5 ; 6), (6 ; 5), (6 ; 6).

Il y a 6 choix du premier élément du couple et 6 choix pour le second élément.

Le nombre de résultats possibles est $6 \times 6 = 36$.

2. a) Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Le plus grand nombre lu est 1 lorsqu'on obtient (1 ; 1) : un seul cas.

Donc $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.

Le plus grand nombre lu est 2 lorsqu'on obtient (1 ; 2) ou (2 ; 1) ou (2 ; 2) :

3 cas. Donc $P(X = 2) = \frac{3}{36}$.

Le plus grand nombre lu est 3 lorsqu'on obtient (1 ; 3) ou (3 ; 1) ou (2 ; 3)

ou (3 ; 2) ou (3 ; 3) : 5 cas. Donc $P(X = 3) = \frac{5}{36}$.

Le plus grand nombre lu est 4 lorsqu'on obtient (1 ; 4) ou (4 ; 1) ou (2 ; 4) ou (4 ; 2) ou (3 ; 4) ou (4 ; 3) ou (4 ; 4) : 7 cas.

Donc $P(X = 4) = \frac{7}{36}$.

On trouvera de même $P(X = 5) = \frac{9}{36}$ et $P(X = 6) = \frac{11}{36}$ (on dénombrera les couples donnés à l'ex. 12).

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

(On remarquera que $\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = 1$).

$$\begin{aligned} \text{b) } E(X) &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36} \approx 4,47. \end{aligned}$$

La variance est :

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{36} + 2^2 \times \frac{3}{36} + 3^2 \times \frac{5}{36} + 4^2 \times \frac{7}{36} + 5^2 \times \frac{9}{36} + 6^2 \times \frac{11}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2\,555}{1\,296} \approx 1,97.$$

L'écart type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2\,555}{36^2}} = \frac{\sqrt{2\,555}}{36} \approx 1,40.$$

33 1. Désignons par R_1, R_2, R_3 les trois boules rouges et par B_1, B_2 les deux boules bleues. Un résultat d'un tirage est une paire d'éléments de l'ensemble $\{R_1; R_2; R_3; B_1; B_2\}$. Les résultats possibles sont donc : $\{R_1; R_2\}$, $\{R_1; R_3\}$, $\{R_1; B_1\}$, $\{R_1; B_2\}$, $\{R_2; R_3\}$, $\{R_2; B_1\}$, $\{R_2; B_2\}$, $\{R_3; B_1\}$, $\{R_3; B_2\}$, $\{B_1; B_2\}$. Il y a 10 tirages possibles tous équiprobables.

2. L'événement A est réalisé si on obtient un des tirages : $\{R_1; R_2\}$, $\{R_1; R_3\}$, $\{R_2; R_3\}$, la probabilité de l'événement A est donc $\frac{3}{10} = 0,3$.

3. L'événement B est réalisé si on obtient un des tirages : $\{R_1; B_1\}$, $\{R_1; B_2\}$, $\{R_2; B_1\}$, $\{R_2; B_2\}$, $\{R_3; B_1\}$, $\{R_3; B_2\}$, la probabilité de l'événement B est donc $\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$.

4. On associe les nombres 1, 2, 3 respectivement aux tirages $\{R_1; R_2\}$, $\{R_1; R_3\}$, $\{R_2; R_3\}$ pour lesquels A est réalisé. On associe les nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 aux autres tirages possibles.

Simulons sur le tableur Excel le tirage aléatoire d'un nombre entier compris entre 1 et 10 à l'aide de la fonction « ENT(ALEA()*10+1) » que l'on entre, précédée du signe =, dans la cellule A1. En recopiant cette fonction 10 000 fois vers le bas on obtient un échantillon de 10 000 nombres entiers compris entre 1 et 10. À l'aide de la fonction « NB.SI(\$A\$1:\$A\$50;"<=3") » que l'on entre, précédée du signe =, dans la cellule B1, on obtient le nombre N de fois où l'événement A est réalisé. En remplaçant successivement 50 par 100, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000 on obtient par exemple :

- pour 50, $N = 9$ d'où la fréquence $f = \frac{9}{50} \approx 0,18$;
- pour 100, $N = 27$ d'où la fréquence $f = \frac{27}{100} \approx 0,27$;
- pour 1 000, $N = 293$ d'où la fréquence $f = \frac{293}{1\,000} \approx 0,293$;
- pour 2 000, $N = 581$ d'où la fréquence $f = \frac{581}{2\,000} \approx 0,2905$;
- pour 5 000, $N = 1\,546$ d'où la fréquence $f = \frac{1\,546}{5\,000} \approx 0,3092$;
- pour 10 000, $N = 3\,031$ d'où la fréquence $f = \frac{3\,031}{10\,000} \approx 0,3031$.

Lorsque le nombre de tirages augmente, la fréquence d'apparition se rapproche de la probabilité théorique 0,3 trouvée à la question 2.

1 Définition, mesures

- Un couple (\vec{u}, \vec{v}) de deux vecteurs non nuls ou un couple de deux demi-droites (Ox, Oy) définissent un **angle orienté**.
- Le plan étant orienté (le sens positif est le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre, on peut associer à un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) une infinité de mesures. Si l'une d'elles (en radians) est α , toutes les autres sont :

$$\alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Il en existe une seule appartenant à $] -\pi ; \pi]$ appelée **mesure principale** de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

→ Notation

Si une mesure d'un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est α , il s'agit toujours, lorsqu'il n'y a aucune précision, d'une mesure en radians et on écrit :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$$

(On confond un angle orienté et l'une de ses mesures).

2 Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

3 Bases et repères orthonormaux directs ou indirects

• Une **base orthonormale** (ou orthonormée) est formée de deux vecteurs de longueur (on dit aussi norme) 1 et orthogonaux. Soit (\vec{i}, \vec{j}) une telle base.

Si $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$, on dit que la base est **directe**.

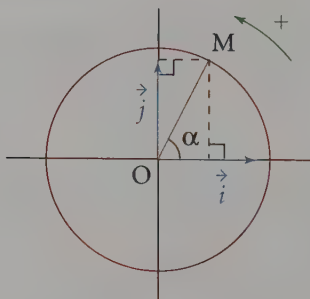
Si $(\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2}$, on dit que la base est **indirecte**.

• Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est alors un **repère orthonormal** (ou orthonormé) direct ou indirect.

4 Rappels de trigonométrie

→ Définitions

Un **cercle trigonométrique** de centre O est un cercle de rayon 1 et muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Soit M un point du cercle trigonométrique et α une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

• Le **cosinus** de α , noté $\cos \alpha$, est l'abscisse de M .

• Le **sinus** de α , noté $\sin \alpha$, est l'ordonnée de M .

• Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la tangente de α notée $\tan \alpha$ est le réel :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

→ Relations entre $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$

Pour tout réel ; $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

→ Angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

→ Lignes trigonométriques des angles associés

Pour tout réel α , on a :

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

On retrouvera rapidement ces formules en construisant un cercle trigonométrique, le point M tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, et le point M' tel que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\alpha, \text{ ou } \pi - \alpha, \text{ ou } \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ ou } \pi + \alpha.$$

On retrouve de même $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ en faisant une figure.

On peut aussi écrire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right] = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

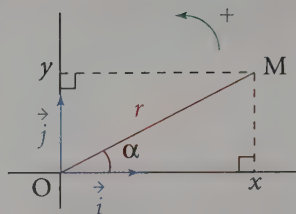
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right] = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

5 Repérage polaire

Soit un point O et un vecteur \vec{i} de longueur (de norme) 1 dans le plan orienté.

On peut repérer un point M du plan, M étant distinct de O , par :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \alpha \text{ et } OM = r.$$



6 Lien entre repérage polaire et repérage cartésien

Les coordonnées $(x; y)$ de M dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont liées à α et r par les formules :

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Soit un vecteur \overrightarrow{AB} non nul, les coordonnées de \overrightarrow{AB} dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$\left(AB \cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}); AB \sin(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \right)$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 a) $\cos \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

V F

b) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

V F

→ Corrigé p. 224

2 a) A, B, C trois points du plan distincts deux à deux
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{BA}, \vec{CA})$.

V F

b) Dans un repère polaire, le point M vérifie $OM = 3$
 et $(\vec{i}, \vec{OM}) = \frac{2\pi}{3}$, ses coordonnées cartésiennes sont

$$\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

V F

→ Corrigé p. 224

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Mesure principale d'un angle orienté

3 Donner la mesure principale (en radians) de l'angle orienté dont on connaît une mesure dans chacun des cas suivants :

1. $-\frac{17\pi}{3}$ rad;

2. -279° ;

3. $1\ 380^\circ$.

→ Corrigé p. 224

Relation de Chasles. Calculs d'angles

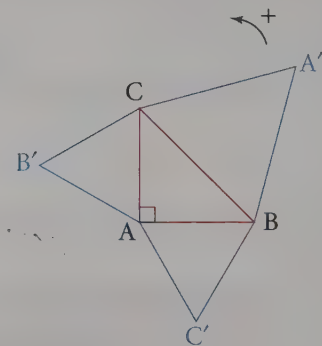
4 On donne l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

Calculer en fonction de (\vec{u}, \vec{v}) :

(\vec{v}, \vec{u}) ; $(-\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{u}, -\vec{v})$; $(-\vec{u}, -\vec{v})$.

→ Corrigé p. 225

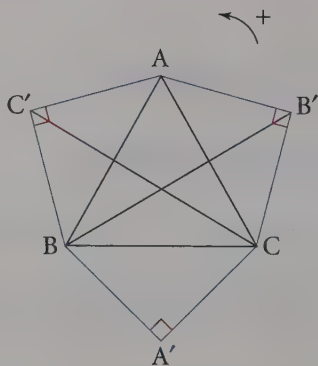
- 5 On donne un triangle rectangle isocèle ABC *direct* (le sens de parcours A, B, C, A est le sens positif du plan orienté). On construit, à l'extérieur du triangle ABC , des triangles équilatéraux ABC' , BCA' , CAB' .



Déterminer les mesures principales des angles orientés suivants :

1. (\vec{AB}, \vec{BC}) ; 2. $(\vec{AB'}, \vec{AC'})$; 3. $(\vec{CA'}, \vec{BA})$. ➔ Corrigé p. 225

- 6 On donne un triangle équilatéral ABC *direct* (voir exercice 5). On construit, à l'extérieur du triangle ABC , des triangles rectangles isocèles ABC' , BCA' , CAB' .



Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

1. $(\vec{AB'}, \vec{AB})$; 2. $(\vec{AB'}, \vec{BA'})$; 3. $(\vec{BB'}, \vec{CC'})$. ➔ Corrigé p. 226

- 7 Démontrer que, dans un triangle ABC :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi.$$

➔ Corrigé p. 226

Lignes trigonométriques des angles associés

8 Calculer : $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{3\pi}{4}$.

Indication : $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$;

$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4})$.

→ Corrigé p. 227

9 Calculer :

$$S_1 = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8};$$

$$S_2 = \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{5\pi}{8} - \sin \frac{7\pi}{8};$$

$$S_3 = \tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{3\pi}{8} + \tan \frac{5\pi}{8} + \tan \frac{7\pi}{8}.$$

Indication : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$;

$\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$;

$\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$.

→ Corrigé p. 227

10 Calculer : $S_1 = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$;

$S_2 = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

→ Corrigé p. 228

11 Calculer : $S_1 = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x)$;

$S_2 = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi - x)$. → Corrigé p. 228

12 Calculer :

$$S_1 = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos^2(\pi - x);$$

$$S_2 = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin^2(\pi - x).$$

→ Corrigé p. 228

13 Calculer, si les tangentes existent :

$$S_1 = \tan x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan(\pi - x);$$

$$S_2 = \tan^2 x + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \tan^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \tan^2(\pi - x).$$

→ Corrigé p. 228

Lien entre repérage polaire et repérage cartésien

On suppose le plan orienté et muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (ex. 14 à 19).

- 14 Soit le point M défini par :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{23\pi}{3} \text{ et } OM = 5.$$

Calculer les coordonnées de M.

→ Corrigé p. 228

- 15 Soit le point $M(1 ; -\sqrt{3})$. Donner les mesures principales des angles orientés $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $(\vec{j}, \overrightarrow{OM})$.

→ Corrigé p. 228

- 16 Soit la demi-droite]Oz) (demi-droite privée de O), de vecteur directeur \vec{u} .
On suppose $(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6}$.

1. Calculer les coordonnées (x, y) d'un point quelconque M de]Oz) en fonction de $OM = r$.

2. Calculer les coordonnées de M uniquement en fonction de x .

→ Corrigé p. 229

- 17 Soit les point M et M' du cercle trigonométrique de centre O tels que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} \text{ et } (\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{3}.$$

1. Calculer les coordonnées du milieu I de [MM'].

2. Calculer OI et $(\vec{i}, \overrightarrow{OI})$.

→ Corrigé p. 230

- 18 ★ On donne $A(\sqrt{3} ; 1)$ et on construit un carré OABC direct (le sens de parcours, O, A, B, C, O est le sens positif du plan orienté).

1. Calculer $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{BC})$.

2. En déduire les coordonnées de B et C.

3. En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

→ Corrigé p. 231

19 ★ Les points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sont définis par :

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = 1 ;$$

$$\begin{aligned} (\vec{i}, OA_1) &= (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) \\ &= (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) \\ &= (\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) \\ &= (\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}) \\ &= (\overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_6}) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Calculer les coordonnées de A_6 .

→ Corrigé p. 233

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

1 a) Faux. $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Vrai. $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2 a) Vrai. $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (-\vec{AB}, -\vec{AC}) = (\vec{BA}, \vec{CA})$.

b) Faux. $x = 3 \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -3 \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}$

$y = 3 \sin \frac{2\pi}{3} = 3 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

3 1. $-\frac{17\pi}{3} = -\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -6\pi + \frac{\pi}{3}$

de la forme $\frac{\pi}{3} + k2\pi$, avec $k = -3$ et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$.

Donc la mesure principale est $\frac{\pi}{3}$.

2. $-279^\circ = -\frac{279\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{31}{20}\pi \text{ rad}$.

On peut écrire : $-\frac{31\pi}{20} = -2\pi + \frac{9\pi}{20}$,

de la forme $\frac{9\pi}{20} + k2\pi$, avec $k = -1$ et $\frac{9\pi}{20} \in]-\pi; \pi]$.

Donc la mesure principale est $\frac{9\pi}{20}$.

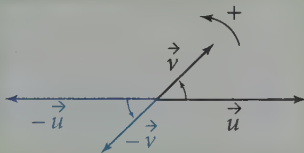
3. $1380^\circ = \frac{1380\pi}{180} \text{ rad} = \frac{23}{3}\pi \text{ rad}$.

On peut écrire : $\frac{23}{3}\pi = 8\pi - \frac{\pi}{3}$,

de la forme $-\frac{\pi}{3} + k2\pi$, avec $k = 4$ et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$.

Donc la mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

- 4 • Si α est une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , $-\alpha$ est une mesure de l'angle orienté (\vec{v}, \vec{u}) , donc :
- $$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}).$$



En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}).$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi.$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}).$$

On a vu que $(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$; une mesure de $(\vec{v}, -\vec{v})$ est $-\pi$ donc :

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) - \pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}),$$

autrement dit, **un angle orienté ne change pas si l'on remplace chaque vecteur par son opposé.**

- 5 On se reportera à la figure de l'énoncé.

$$1. (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi] \text{ donc } \frac{3\pi}{4} \text{ est la mesure principale de } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}).$$

$$2. (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{-7\pi}{6}.$$

Mais $-\frac{7\pi}{6} \notin]-\pi; \pi]$. On peut écrire :

$$-\frac{7\pi}{6} = -2\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$$

donc la mesure principale de $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

$$3. (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \in]-\pi; \pi]$$

donc $\frac{11\pi}{12}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{BA})$.

6 On se reportera à la figure de l'énoncé.

$$1. (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}, \quad -\frac{7\pi}{12} \text{ est une mesure de } (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}).$$

$$2. (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}).$$

On a calculé précédemment $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})$ dont une mesure est $-\frac{7\pi}{12}$ donc

$$(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BA'}) = -\frac{7\pi}{12} + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}.$$

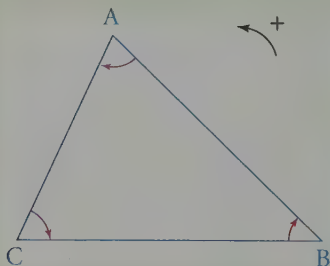
$$3. (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'}).$$

Puisque B et B' sont équidistants de A et C, la droite (BB') est la médiatrice de [AC] donc $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$.

Puisque C et C' sont équidistants de A et B, la droite (CC') est la médiatrice de [AB] donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'}) = -\frac{\pi}{6}$.

$$\text{D'où } (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) = -\frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

7



Calculons la somme :

$$S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$ (on peut remplacer chaque vecteur par son opposé, voir exercice 4). Donc :

$$S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$$

$$S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

$$S = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) = \pi.$$

$$8 \quad \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{3\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{2}. \end{aligned}$$

$$9 \quad \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \quad \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos \frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sin \frac{\pi}{8} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} = 0. \end{aligned}$$

$$S_3 = \tan \frac{\pi}{8} + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{-\sin \frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}$$

$$\tan\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{-\cos \frac{\pi}{8}} = -\tan \frac{\pi}{8}$$

$$\text{D'où : } S_3 = \tan \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}} - \tan \frac{\pi}{8} = 0.$$

10 En s'inspirant de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] + \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Vous trouverez de même : $S_2 = 2$.

11 En s'inspirant de l'exercice **9** on trouve :

$$S_1 = 0 \text{ et } S_2 = 0.$$

12 En s'inspirant de l'exercice **10** on trouve :

$$S_1 = 2 \text{ et } S_2 = 2.$$

13 $S_1 = \tan x + \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x} - \tan x = 0.$

$$S_2 = \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} - \tan^2 x = 0.$$

14 $-\frac{23\pi}{3} = -8\pi + \frac{\pi}{3}.$

Les coordonnées de M sont :

$$x = OM \cos(\vec{i}, \vec{OM}) = 5 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2}$$

$$y = OM \sin(\vec{i}, \vec{OM}) = 5 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

15 Les coordonnées de M sont :

$$x = OM \cos(\vec{i}, \vec{OM}) = 1$$

$$y = OM \sin(\vec{i}, \vec{OM}) = -\sqrt{3}.$$

$$OM^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \text{ donc } OM = 2.$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \cos(\vec{i}, \vec{OM}) = \frac{1}{OM} = \frac{1}{2} \\ \sin(\vec{i}, \vec{OM}) = -\frac{\sqrt{3}}{OM} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{On peut écrire : } \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{donc } \begin{cases} \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Deux angles orientés ont même mesure si et seulement s'ils ont même cosinus et même sinus.

$$\text{Donc } (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Comme $-\frac{\pi}{3}$ appartient à $]-\pi; \pi]$, la mesure principale de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

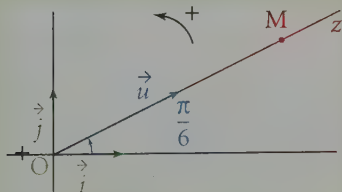
$$(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{j}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Comme $-\frac{5\pi}{6}$ appartient à $]-\pi; \pi]$, la mesure principale de $(\vec{j}, \overrightarrow{OM})$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

- 16** 1. Soit $M(x; y)$ un point quelconque de $]Oz)$.

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6}. \text{ Posons } OM = r \ (r > 0):$$

$$\begin{cases} x = r \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} r \\ y = r \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} r. \end{cases}$$



2. On en déduit (puisque $x > 0$ donc $x \neq 0$):

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ soit } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Les coordonnées de M sont :

$$\left(x; \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \text{ où } x \text{ est un réel strictement positif quelconque.}$$

17 1. Les coordonnées de M sont :

$$x_M = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y_M = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

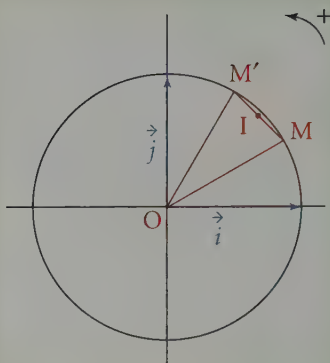
Les coordonnées de M' sont :

$$x_{M'} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$y_{M'} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les coordonnées du milieu I de [MM'] sont :

$$\begin{cases} x = \frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \\ y = \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad \text{OI} &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}. \end{aligned}$$

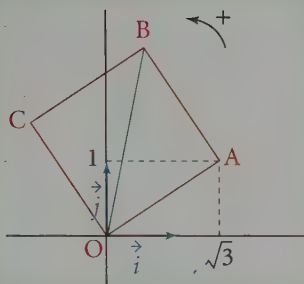
$$\begin{aligned} \cos(\vec{i}, \vec{\text{OI}}) &= \frac{x}{\text{OI}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

de même,

$$\sin(\vec{i}, \vec{\text{OI}}) = \frac{y}{\text{OI}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \cos(\vec{i}, \vec{\text{OI}}) = \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin(\vec{i}, \vec{\text{OI}}) = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ donc } (\vec{i}, \vec{\text{OI}}) = \frac{\pi}{4}.$$

18



$$1. \bullet (\vec{i}, \vec{AB}) = (\vec{i}, \vec{OC}) = (\vec{i}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OC}).$$

On calcule (\vec{i}, \vec{OA}) . Les coordonnées de A sont :

$$\begin{cases} \sqrt{3} = OA \cos(\vec{i}, \vec{OA}) \\ 1 = OA \sin(\vec{i}, \vec{OA}). \end{cases}$$

$$\text{D'où } OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \cos(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{\sqrt{3}}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \sin(\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{1}{OA} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{donc } (\vec{i}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{6}.$$

On en déduit alors, d'après [1] :

$$\bullet (\vec{i}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\bullet (\vec{i}, \vec{BC}) = (\vec{i}, \vec{AO}) = (\vec{i}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

2. $\bullet \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ donc les coordonnées de B sont :

$$\begin{cases} x_B = x_A + X \\ y_B = y_A + Y \end{cases}$$

en appelant X et Y les coordonnées de \vec{AB} .

On sait que $x_A = \sqrt{3}$ et $y_A = 1$. On sait aussi (cf. résumé de cours) que :

$$\begin{cases} X = AB \cos(\vec{i}, \vec{AB}) \\ Y = AB \sin(\vec{i}, \vec{AB}) \end{cases}$$

AB = OA = 2. Donc :

$$\begin{cases} X = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -2 \cos \frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{1}{2} = -1 \\ Y = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Par suite :
$$\begin{cases} x_B = \sqrt{3} - 1 \\ y_B = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

• $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$ donc les coordonnées de C sont :

$$\begin{cases} x_C = x_B - X' \\ y_C = y_B + Y' \end{cases}$$

en appelant X' et Y' les coordonnées de \vec{BC} .

$$\begin{cases} X' = BC \cos(\vec{i}, \vec{BC}) = 2 \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \\ Y' = BC \sin(\vec{i}, \vec{BC}) = 2 \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} X' = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3} \\ Y' = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1 \\ y_C = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3} \end{cases}$$

• Remarquons que $(\vec{i}, \vec{OB}) = (\vec{i}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

On peut écrire :
$$\begin{cases} x_B = OB \cos(\vec{i}, \vec{OB}) \\ y_B = OB \sin(\vec{i}, \vec{OB}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} - 1 = OB \cos \frac{5\pi}{12} \\ \sqrt{3} + 1 = OB \sin \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

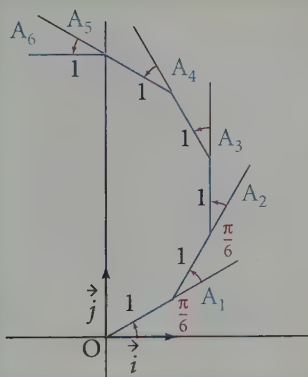
Or, $OB = OA\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ donc :

$$\begin{cases} \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} \\ \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

On en déduit : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

19



$$\overrightarrow{OA_6} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6}. \quad [1]$$

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$. Nous en déduirons les coordonnées de leur somme $\overrightarrow{OA_6}$ donc du point A_6 .

- $\overrightarrow{OA_1}$ a pour coordonnées $\left(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$.

- $\overrightarrow{A_1A_2}$ a pour coordonnées : $(A_1A_2 \cos(\vec{i}, \overrightarrow{A_1A_2}); A_1A_2 \sin(\vec{i}, \overrightarrow{A_1A_2}))$.

On sait que $A_1A_2 = 1$. En outre :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{A_1A_2}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{A_1A_2}$ sont :

$$\left(\cos \frac{\pi}{3}; \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

- $\overrightarrow{A_2A_3}$ a pour coordonnées :

$$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{A_2A_3}) = (A_2A_3 \cos(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{A_2A_3}); A_2A_3 \sin(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{A_2A_3})).$$

On sait que $A_2A_3 = 1$. En outre :

$$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{A_2A_3}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{A_1A_2}) + (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{A_2A_3}$ sont :

$$\left(\cos \frac{\pi}{2}; \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0; 1).$$

Vous verrez, de même, que les coordonnées de $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$ sont respectivement :

- $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\cos \frac{2\pi}{3}; \sin \frac{2\pi}{3}\right)$
 $= \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right); \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$
- $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\cos \frac{5\pi}{6}; \sin \frac{5\pi}{6}\right)$
 $= \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$
- $\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = (\cos \pi; \sin \pi) = (-1; 0).$

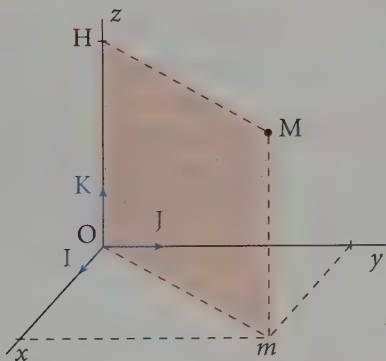
D'après [1], les coordonnées de A_6 sont :

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -1.$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 + \sqrt{3}.$$

1 Repère cartésien de l'espace

Coordonnées d'un point



Soit trois droites (Ox) , (Oy) , (Oz) non coplanaires et trois points I, J, K distincts de O et pris respectivement sur (Ox) , (Oy) , (Oz) . On obtient un repère cartésien $(O ; I, J, K)$.

• On peut repérer un point M quelconque de l'espace de la façon suivante : la parallèle à (Oz) menée par M rencontre le plan (xOy) en m ; si m est distinct de O , la parallèle à (Om) menée par M rencontre (Oz) en H ; si m est en O , le point H est confondu avec M sur la droite (Oz) .

m a pour coordonnées $(x ; y)$ dans le plan (xOy) muni du repère $(O ; I, J)$.

H a pour coordonnée z sur la droite (Oz) muni du repère $(O ; K)$.

Les coordonnées de M dans le repère $(O ; I, J, K)$ sont :

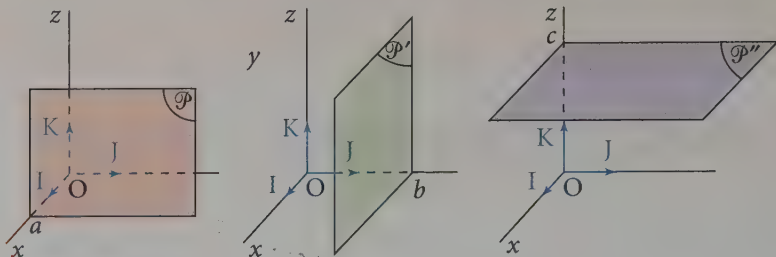
$$(x ; y ; z).$$

• Réciproquement, la donnée de $(x ; y ; z)$ permet de déterminer un point M unique dans l'espace :

x est l'abscisse de M
 y est l'ordonnée de M
 z est la cote de M

→ Équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

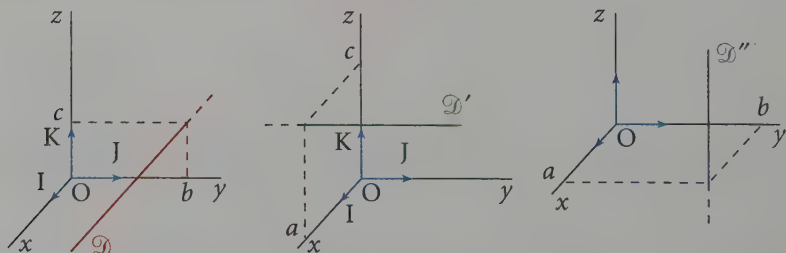
Un plan parallèle à un plan de coordonnées a une équation de la forme suivante :



\mathcal{P} parallèle à (yOz) : $x = a$ \mathcal{P}' parallèle à (xOz) : $y = b$ \mathcal{P}'' parallèle à (xOy) : $z = c$

→ Équations de droites parallèles aux axes de coordonnées

Une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées est l'intersection de deux plans parallèles aux plans de coordonnées. Elle est donc définie par un système de deux équations de la forme suivante :



\mathcal{D} parallèle à (Ox) : \mathcal{D}' parallèle à (Oy) : \mathcal{D}'' parallèle à (Oz) :

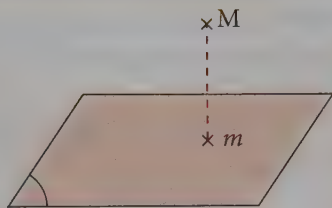
$$\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

2 Projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite

• Soit un plan \mathcal{P} et M un point quelconque de l'espace. La perpendiculaire menée de M au plan \mathcal{P} coupe en m . Le point m est appelé **projeté orthogonal** de M sur le plan \mathcal{P} .



• Soit une droite \mathcal{D} et M un point quelconque de l'espace. Si $M \notin \mathcal{D}$, le point M et la droite \mathcal{D} déterminent un plan \mathcal{Q} . La perpendiculaire menée de M à la droite \mathcal{D} dans le plan \mathcal{Q} coupe \mathcal{D} en H . Le point H est appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite \mathcal{D} . Si $M \in \mathcal{D}$, le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} est confondu avec M .



3 Repère orthogonal. Repère orthonormal

- Si les droites (Ox) , (Oy) , (Oz) du repère précédent sont orthogonales deux à deux, on dit que le **repère est orthogonal**.
- Si, de plus, $OI = OJ = OK = 1$, on dit que le **repère est orthonormal**. Dans les deux cas (repère orthogonal ou orthonormal), le point m (fig. 1 du paragraphe 1.) est le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) et le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite (Oz) .
- Dans le cas d'un repère orthonormal, soit un point $M(x; y; z)$:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et une équation de la sphère de centre O et de rayon R est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

4 Vecteurs de l'espace

Les définitions et les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent à l'espace. En particulier :

- Quels que soient les points A, B, C de l'espace :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

c'est la relation de Chasles, on peut aussi écrire, O étant l'origine :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

- On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction. Par convention, le vecteur nul et tout autre vecteur sont colinéaires.

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

- Soit un point A et un vecteur \vec{u} non nul. On appelle **droite** passant par A et de vecteur directeur \vec{u} l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\vec{AM} = \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Cette droite \mathcal{D} sera noté $\mathcal{D}(A; \vec{u})$.

5 Vecteurs coplanaires

→ Définition

Dire que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont **coplanaires** signifie que : O, A, B, C étant des points tels que :

$$\vec{OA} = \vec{u}, \quad \vec{OB} = \vec{v}, \quad \vec{OC} = \vec{w},$$

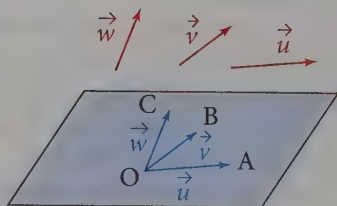
Les points O, A, B, C sont coplanaires (c'est-à-dire appartiennent à un même plan).

→ Théorème

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires si et seulement si :

- soit \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ;
- soit \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et il existe des réels λ et λ' tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}.$$



→ Plan défini par un point et deux vecteurs

Soit un point A et deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} .

Le plan \mathcal{P} passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} que nous noterons $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{v} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \lambda' \text{ sont des réels quelconques.}$$

6 Coordonnées d'un vecteur. Applications

• Soit quatre points O, I, J, K non coplanaires. Ils définissent un repère cartésien (O ; I, J, K).

Soit $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, on définit ainsi le repère cartésien (O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}).

Lorsque le repère (O ; I, J, K) est orthogonal (voir paragraphe 3.), on dit que le repère (O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) est orthogonal.

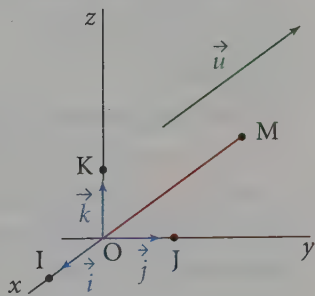
Lorsque le repère (O ; I, J, K) est orthonormal, on dit que le repère (O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) est orthonormal.

• Les coordonnées d'un vecteur \vec{u} sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ définies au paragraphe 1.

Si M a pour coordonnées (x ; y ; z), on écrit

$$\vec{u}(x; y; z) \quad \text{ou encore} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{OM} = \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



• Soit les points A(a ; a' ; a'') et B(b ; b' ; b'') et I le milieu de [AB] :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b-a \\ b'-a' \\ b''-a'' \end{pmatrix}, \quad I \left(\frac{a+b}{2}; \frac{a'+b'}{2}; \frac{a''+b''}{2} \right)$$

Dans un repère orthonormal, la distance des points A(a ; a' ; a'') et B(b ; b' ; b'') est :

$$AB = \sqrt{(b-a)^2 + (b'-a')^2 + (b''-a'')^2}$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** a) Si A, B, C sont trois points non alignés alors, quel que soit le point O de l'espace, $(O ; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est une base. V F
- b) Si deux quelconques des vecteurs $\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ est une base de l'espace. V F
- c) O, I, J, K quatre points non coplanaires, les coordonnées dans le repère $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ des sommets du parallélépipède construit à partir de O, I, J, K sont 0 ou 1. V F

→ Corrigé p. 247

- 2** Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(1; 2; 1)$ deux vecteurs. L'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est :
- a) un plan ; V F
- b) un plan contenant le point $M_0(4; 5; 4)$; V F
- c) un plan parallèle à la droite $\mathcal{D}(A, \vec{w})$ avec $A(3; 1; 1)$ et $\vec{w}(0; -1; 0)$; V F
- d) un plan contenant la droite $\mathcal{D}'(A', \vec{w})$ avec $A'(1; 1; 2)$ et $\vec{w}(0; -1; 0)$. V F

→ Corrigé p. 247

- 3** L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne quatre points A(1; 1; 1), B(1; 0; 1) C(2; 1; 3) et D(0; 0; -1) alors :
- a) les points A, B, C sont alignés ; V F
- b) les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires ; V F
- c) les droites (AD) et (BC) sont parallèles. V F

→ Corrigé p. 247

- 4** L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(1; -1; 1)$, et $\vec{u}(1; 2; 1)$ alors :
- a) le point $B(4; 5; 4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$; V F
- b) le point $C(4; 4; 5)$ appartient à la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$; V F
- c) tous les points $M(4 + \lambda; 5 + 2\lambda; 1 + \lambda)$ appartient à la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$. V F
- ➔ Corrigé p. 247
- 5** Par un point A de l'espace il passe :
- a) un plan et un seul parallèle à une droite donnée; V F
- b) un plan et un seul contenant une droite donnée; V F
- c) un plan et un seul contenant une droite ne contenant pas le point A. V F
- ➔ Corrigé p. 247
- 6** Par une droite \mathcal{D} de l'espace il passe :
- a) un plan et un seul contenant un point donné; V F
- b) un plan et un seul contenant un point qui n'appartient pas à \mathcal{D} . V F
- ➔ Corrigé p. 247
- 7** Par un point A de l'espace il passe :
- a) une droite et une seule contenant A et parallèle à un plan donné; V F
- b) une droite et une seule contenant A et parallèle à une droite \mathcal{D}' donnée. V F
- ➔ Corrigé p. 247
- 8** Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un repère orthonormé. Soit $A(1; -1; 0)$ et $B(2; 1; -3)$.
- a) la distance AB est $\sqrt{14}$; V F
- b) la distance AB est $\sqrt{10}$. V F
- ➔ Corrigé p. 247
- 9** L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(3; -1; 1)$, $B(2; -2; 5)$ et $C(-2; -2; 4)$ trois points alors :
- a) le triangle ABC est rectangle; V F
- b) le triangle ABC est isocèle. V F
- ➔ Corrigé p. 248

- 10** On se donne un cube de côté a alors :
- l'angle de deux diagonales de deux faces, issues d'un même sommet est 60° ;
 - l'angle de deux diagonales issues d'un même sommet de deux faces est 90° ;
 - la distance de deux sommets opposés est $a\sqrt{3}$;
 - la distance de deux sommets opposés est $2a\sqrt{2}$.

 V F

 V F

 V F

 V F

 Corrigé p. 248

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Géométrie analytique

- 11** 1. Soit un cube ABCDEFGH ($\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$). Dans le repère orthonormal $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, calculer les coordonnées des sommets et du centre O du cube.
2. Soit M, N, P, Q les milieux respectifs de [AB], [CD], [GH], [EF].
- Calculer les coordonnées des points M, N, P, Q.
 - Donner une équation du plan (MNPQ).
 - Donner des systèmes d'équations des droites (MN), (NP), (PQ), (QM).

 Corrigé p. 248

Pour les exercices **12** à **15** l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle (Ox) , (Oy) , (Oz) les droites munies respectivement des repères $(O ; \vec{i})$, $(O ; \vec{j})$, $(O ; \vec{k})$. L'unité de longueur sur les axes de coordonnées est 1 cm.

- 12** On donne les points $A(0 ; 0 ; 1)$ et $A'(0 ; 0 ; 2)$. Soit \mathcal{D} la droite passant par A et parallèle à (Ox) et \mathcal{D}' la droite passant par A' et parallèle à (Oy) .
- Donner des systèmes d'équations de \mathcal{D} et \mathcal{D}' .
 - Montrer que les points $M(x ; 0 ; 1)$ et $M'(0 ; y' ; 2)$ appartiennent respectivement à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .
 - Calculer la distance MM' .
 - Déterminer les points M et M' pour que cette distance soit minimale.

 Corrigé p. 249

- 13** 1. Donner une équation de la **sphère** \mathcal{S} de centre O et de rayon 5.
 2. Déterminer l'intersection de \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} d'équation $z = 4$.
 3. Déterminer l'intersection de \mathcal{S} et de la droite \mathcal{D} d'équations $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

→ Corrigé p. 250

- 14** Soit \mathcal{C} le **cylindre de révolution** d'axe (Oz) , de hauteur 8 cm et de base le cercle Γ du plan (xOy) de centre O et de rayon 3 cm.

1. Trouver les relations vérifiées par les coordonnées d'un point M de l'espace pour qu'il appartienne au cylindre \mathcal{C} .

2. Déterminer l'intersection de \mathcal{C} par :

a) le plan \mathcal{P} d'équation $z = 5$.

b) le plan \mathcal{Q} d'équation $y = 1$.

→ Corrigé p. 251

- 15** Soit \mathcal{P} la plan d'équation $z = 10$. Il coupe (Oz) en I.

Soit Γ le cercle du plan \mathcal{P} , de centre I et de rayon 5 cm. On considère le **cône de révolution** \mathcal{C} d'axe (Oz) , de sommet O et de base Γ .

1. Soit N un point de Γ . Calculer l'angle $\theta = \widehat{ION}$ en degrés.

2. Trouver les relations vérifiées par les coordonnées d'un point M de l'espace pour qu'il appartienne au cône \mathcal{C} .

3. Déterminer l'intersection de \mathcal{C} par le plan \mathcal{Q} d'équation $z = 4$.

→ Corrigé p. 252

Intersections de droites et de plans

- 16** L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle (Ox) , (Oy) , (Oz) les droites munies respectivement des repères $(O; \vec{i})$, $(O; \vec{j})$, $(O; \vec{k})$.
 Soit les points $A(1; 2; 2)$ et $B(-1; 2; 1)$.

1. Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (xOz) .

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les plans (xOy) et (yOz) .

→ Corrigé p. 253

- 17** 1. L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étudier si les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont coplanaires.}$$

2. On donne $A(0; 0; 1)$, $B(1; 1; -1)$ et $C(2; 1; 0)$.

Étudier si la droite (BC) est parallèle ou sécante au plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.

→ Corrigé p. 254

- 18** 1. L'espace étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étudier si les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ sont coplanaires.}$$

2. On donne $A(0; 1; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(4; 14; 17)$.

Étudier si la droite (BC) est parallèle ou sécante au plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.

→ Corrigé p. 255

Points coplanaires

- 19** Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(3; 1; 4)$, $B(2; -1; 5)$, $C(1; 2; 6)$, $D(5; 0; 7)$ sont-ils coplanaires ?

→ Corrigé p. 256

Section plane d'un tétraèdre

- 20** On donne un tétraèdre $ABCD$ et on suppose (AB) et (CD) orthogonales. Soit M le milieu de $[BC]$ et le plan $\Pi(M; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

1. Montrer que l'intersection du plan Π et du tétraèdre est un rectangle.

2. Calculer les coordonnées des sommets du rectangle dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

→ Corrigé p. 256

- 21** ★ On donne un tétraèdre régulier $ABCD$ (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). Soit M, N, P les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}.$$

1. Calculer les coordonnées des points M, N, P dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
2. Construire les points d'intersection I et Q du plan (MNP) respectivement avec les droites (BC) et (BD).
3. Construire la section du tétraèdre par le plan (MNP).

→ Corrigé p. 257

Section plane d'un cube

22 ★ Usage d'un ordinateur

Soit un cube ABCDEFGH ($\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$). On appelle M, N, P les milieux respectifs de [AE], [AB], [BC].

1. Construire, à l'aide d'un logiciel de géométrie, la section du cube par le plan (MNP). On appellera cette section MNPQRS avec $Q \in [CG]$, $R \in [GH]$, $S \in [HE]$.

Quelles constatations pouvez-vous faire ? Nous allons justifier ces constatations.

2. a) Soit I le point d'intersection de (MN) et (BF). Soit d_1 la droite d'intersection des plans (MNP) et (BCGF).

Montrez que d_1 passe par I. En déduire le point d'intersection Q du plan (MNP) et de la droite (CG).

- b) Montrer que Q est le milieu de [CG].

Montrer de même, que le plan (MNP) rencontre [GH] en son milieu R et [HE] en son milieu S.

3. a) Dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, calculer les coordonnées des sommets de la section et du centre O du cube.

- b) Calculer les longueurs des côtés de la section.

- c) Montrer que O appartient au plan de la section.

- d) Calculer les distances de O aux sommets de la section.

- e) Qu'en concluez-vous pour la section ?

→ Corrigé p. 258

Propriétés du cube

23 ★ Soit un cube ABCDEFGH ($\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$).

On calculera les coordonnées dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. On rappelle que l'ensemble des points équidistants de B et D est le **plan médiateur** de [BD] (plan perpendiculaire à (BD) et passant par le milieu de [BD]).

- a) Montrer que l'ensemble des points équidistants de B, D et E est la droite (AG).
- b) Montrer que l'ensemble des points équidistants de C, F et H est aussi la droite (AG).
2. La droite (AG) coupe les plans (BDE) et (CFH) respectivement en I et J.
- a) Montrer que I et J sont les centres de gravité respectivement des triangles BDE et CFH.
- b) Calculer les coordonnées du milieu D' de [BE] et du milieu F' de [CH].
- c) En déduire les coordonnées de I et J.
- d) Montrer que $AI = IJ = JG = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Calculer les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 respectivement :
- du tétraèdre ABDE ;
 - du tétraèdre GCFH ;
 - de la pyramide de sommet D et de base BCHE ;
 - de la pyramide de sommet F et de base BCHE.

→ Corrigé p. 264

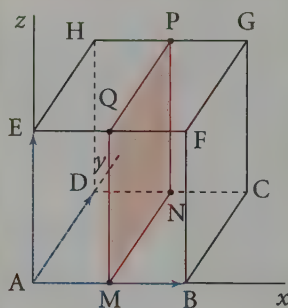
VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) **Faux.** Les quatre points peuvent être coplanaires.
 b) **Faux.** Non, ils ne peuvent pas être coplanaires.
 c) **Vrai.** Les coordonnées des sommets du parallélépipède sont 0 ou 1.
- 2** a) **Vrai.** Oui car \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.
 b) **Vrai.** Oui car $\vec{OM}_0 = 3\vec{u} + \vec{v}$.
 c) **Vrai.** Oui car $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.
 d) **Faux.** Non la droite \mathcal{D}' est parallèle au plan mais $A' \notin \mathcal{P}$ car il n'existe pas x et y tels que $\vec{OA}' = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- 3** a) **Faux.** $\vec{AB}(0; -1; 0)$ et $\vec{AC}(1; 0; 2)$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.
 b) **Faux.** C'est la même question que la précédente.
 c) **Vrai.** Oui car $\vec{AD}(-1; -1; -2)$ et $\vec{BC}(1; 1; 2)$.
- 4** a) **Vrai.** $B \in \mathcal{D}$ car \vec{AB} et \vec{u} sont colinéaires.
 b) **Faux.** $C \notin \mathcal{D}$ car \vec{AC} et \vec{u} ne sont pas colinéaires.
 c) **Faux.** Non car, pour tout λ , \vec{AM} et \vec{u} ne sont pas colinéaires.
- 5** a) **Faux.** Il en passe une infinité.
 b) **Faux.** Non si A appartient à la droite.
 c) **Vrai.** Un point extérieur à une droite et cette droite définissant un plan.
- 6** a) **Faux.** Non si le point appartient à \mathcal{D} .
 b) **Vrai.**
- 7** a) **Faux.** Une infinité de droites contenues dans un plan parallèle au plan donné.
 b) **Vrai.**
- 8** a) **Vrai.** $AB = \sqrt{14}$.
 b) **Faux.**

- 9 a) Vrai. $\vec{AB}(-1; -1; 4)$ $\vec{BC}(-4; 0; -1)$ $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ le triangle est rectangle en B.
 b) Faux. $AB \neq BC$ le triangle n'est pas isocèle.
- 10 a) Vrai. 60° car on peut former avec trois diagonales un triangle équilatéral.
 b) Faux.
 c) Vrai. La distance de deux sommets opposés est $a\sqrt{3}$.
 d) Faux.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

11 1.



Les coordonnées des sommets du cube sont :

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0),$$

$$E(0; 0; 1), F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1).$$

Le centre O du cube est le milieu de [AG]. Ses coordonnées sont :

$$\frac{x_A + x_G}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{y_A + y_G}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{z_A + z_G}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. a) M est le milieu de [AB] donc $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

N est le milieu de [CD] donc $N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

P est le milieu de [GH] donc $P\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

Q est le milieu de [EF] donc $Q\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

b) La plan (MNPQ) est parallèle au plan de coordonnées (A ; \vec{AD} , \vec{AE}).
Une équation de ce plan est de la forme :

$$x = a.$$

les abscisses des points M, N, P, Q de ce plan sont égales à $\frac{1}{2}$. Donc une équation du plan (MNPQ) est $x = \frac{1}{2}$.

c) (MN) est parallèle à la droite (Ay) contenant A et D donc (MN) est définie par des équations de la forme : $\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$.

M et N ont pour abscisse $\frac{1}{2}$ et pour cote 0 donc des équations définissant

$$(MN) \text{ sont : } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Vous raisonnerez, de même, avec les équations définissant (NP), (PQ), (QM) :

$$(NP) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \quad (PQ) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \quad (QM) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

12 1. \mathcal{D} est une droite parallèle à (Ox). Elle a des équations de la forme :

$$\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$$

Elle passe par A(0 ; 0 ; 1), donc des équations de \mathcal{D} sont :

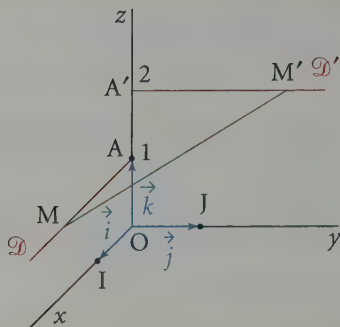
$$\mathcal{D} \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

\mathcal{D}' est une droite parallèle à (Oy). Elle a des équations de la forme :

$$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$$

Elle passe par A'(0 ; 0 ; 2) donc des équations de \mathcal{D}' sont :

$$\mathcal{D}' \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$



2. Le point $M(x; 0; 1)$ a des coordonnées vérifiant les équations de \mathcal{D} donc $M \in \mathcal{D}$.

Le point $M'(0; y'; 2)$ a des coordonnées vérifiant les équations de \mathcal{D}' donc $M' \in \mathcal{D}'$.

3. a) La distance MM' est :

$$MM' = \sqrt{(0-x)^2 + (y'-0)^2 + (2-1)^2}$$

$$MM' = \sqrt{x^2 + y'^2 + 1}.$$

b) On a $x^2 + y'^2 \geq 0$ donc $MM' \geq 1$. Le minimum de MM' est 1 pour $x^2 + y'^2 = 0$ c'est-à-dire pour $x = y' = 0$.

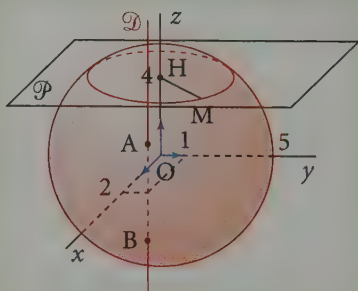
Le point M est alors en A et le point M' en A' .

13 1. Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à la sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon 5 si et seulement si l'on a successivement :

$$OM = 5$$

$$OM^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$



2. Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à l'intersection de \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} d'équation $z = 4$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x^2 + y^2 + 16 = 25 \\ z = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Soit H le point d'intersection de \mathcal{P} et de (Oz) .

La distance des points $H(0; 0; 4)$ et $M(x; y; 4)$ est :

$$HM = \sqrt{x^2 + y^2 + (4-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'intersection de \mathcal{S} et \mathcal{P} est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} HM^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} HM = 3 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Cette intersection est le cercle situé dans le plan \mathcal{P} , de centre H et de rayon 3 cm.

3. Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à l'intersection de \mathcal{S} et de la

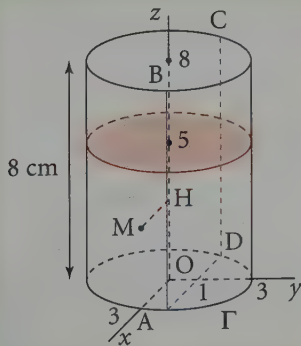
droite \mathcal{D} $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y^2 = 25 - 4 - 1 = 20 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z = \pm 2\sqrt{5} \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

La droite \mathcal{D} coupe la sphère \mathcal{S} en deux points :

$$A(2; 1; 2\sqrt{5}) \text{ et } B(2; 1; -2\sqrt{5}).$$

- 14** Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace et $H(0; 0; z)$ son projeté orthogonal sur la droite (Oz) . On a $HM = \sqrt{x^2 + y^2}$.



1. M appartient au cylindre \mathcal{C} si et seulement si on a successivement :

$$\begin{cases} HM = 3 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases}.$$

2. a) Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à l'intersection de \mathcal{C} et du plan \mathcal{P} d'équation $z = 5$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 5 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} HM = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

L'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{P} est le cercle situé dans le plan \mathcal{P} (plan parallèle au plan (xOy)), de centre le point $(0; 0; 5)$ et de rayon 3.

b) Le plan \mathcal{Q} d'équation $y = 1$ est un plan parallèle à (xOz) . Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à l'intersection de \mathcal{C} et de \mathcal{Q} si et seulement si :

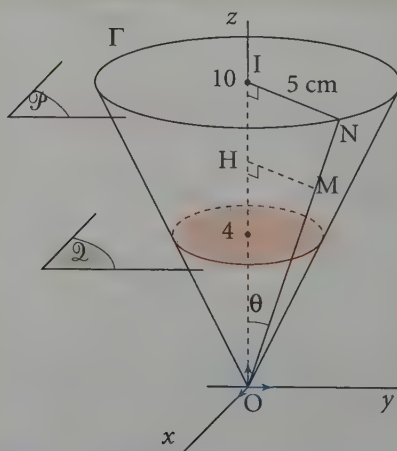
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 1 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x^2 = 9 - 1 = 8 \\ y = 1 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 1 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases}$$

L'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{Q} est la réunion des segments :

$$[AB] \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 1 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases} \text{ et } [CD] \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = 1 \\ 0 \leq z \leq 8 \end{cases}$$

Remarque : Si l'on adjoint au cylindre \mathcal{C} défini précédemment les deux disques déterminés par les deux bases du cylindre, l'intersection de l'ensemble par le plan \mathcal{Q} est le rectangle ABCD.

15 1.



Dans le triangle rectangle OIN : $\tan \widehat{ION} = \frac{IN}{OI} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

$\theta = \widehat{ION} \approx 26,6$ degrés.

Nous remarquons que θ est constant quand N décrit Γ .

2. Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace et $H(0; 0; z)$ son projeté orthogonal sur la droite (Oz) . On a $HM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Supposons M distinct de O.

M appartient au cône \mathcal{C} si et seulement si l'on a successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{HOM} = \theta \\ 0 < z \leq 10 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \widehat{HOM} = \frac{1}{2} \\ 0 < z \leq 10 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{HM}{z} = \frac{1}{2} \\ 0 < z \leq 10 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{1}{2} \\ 0 < z \leq 10 \end{array} \right. \quad \text{équivalent à} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 \\ 0 < z \leq 10 \end{array} \right.$$

Si l'on inclus le sommet O du cône, le cône \mathcal{C} est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 \\ 0 \leq z \leq 10 \end{array} \right.$$

3. Un point $M(x; y; z)$ de l'espace appartient à l'intersection de \mathcal{C} et du plan \mathcal{Q} d'équation $z = 4$ si et seulement si l'on a successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 \\ z = 4 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}16 = 4 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} HM^2 = 4 \\ z = 4 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} HM = 2 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

L'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{Q} est le cercle situé dans le plan \mathcal{Q} , de centre le point $(0; 0; 4)$ et de rayon 2 cm.

- 16** **1.** Soit les points $A(1; 2; 2)$ et $B(-1; 2; 1)$. Nous remarquons qu'ils ont même ordonnée 2 donc ils appartiennent au plan \mathcal{P} d'équation $y = 2$. Le plan \mathcal{P} est parallèle au plan (xOz) . Donc toute droite de \mathcal{P} est parallèle au plan (xOz) donc la droite (AB) est parallèle au plan (xOz) .

2. Un point $M(x; y; z)$ appartient à (AB) si et seulement s'il existe un réel λ tel que : $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$. On a :

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

M appartient à (AB) si et seulement si il existe un réel λ tel que :

$$\begin{cases} x-1 = -2\lambda \\ y-2 = 0\lambda \\ z-2 = -\lambda \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2 \\ z = 2-\lambda \end{cases}.$$

• Le point d'intersection de (AB) avec (xOy) s'obtient en faisant $z = 0$ donc $\lambda = 2$; d'où $x = 1 - 2 \times 2 = -3$.

La droite (AB) rencontre le plan (xOy) au point de coordonnées $(-3; 2; 0)$.

• Le point d'intersection de (AB) avec (yOz) s'obtient en faisant $x = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{2}$ d'où : $z = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

La droite (AB) rencontre le plan (yOz) au point de coordonnées $(0; 2; \frac{3}{2})$.

17 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires car $\vec{u} = k\vec{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 1 = -k \\ 2 = k \\ 0 = k \end{cases} \text{ ce qui est impossible.}$$

Cherchons s'il existe des réels λ et λ' tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 = \lambda - \lambda' & [1] \\ 0 = 2\lambda + \lambda' & [2] \\ 1 = 0\lambda + \lambda' & [3] \end{cases}$$

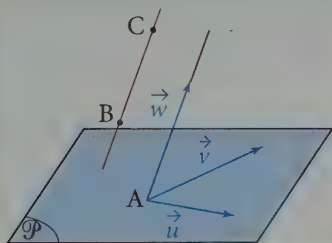
D'après [3], $\lambda' = 1$ que l'on reporte dans [1] on trouve $\lambda = 2$. Mais les valeurs trouvées $\lambda = 2$ et $\lambda' = 1$ ne vérifient pas [2], donc les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2. On donne $A(0; 0; 1), B(1; 1; -1), C(2; 1; 0)$.

Soit $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} .

Un vecteur directeur de la droite (BC) est :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ C'est le vecteur } \vec{w} \text{ de la question précédente.}$$



Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ne sont pas coplanaires ; la droite (BC) est parallèle à la droite (A ; \vec{w}) qui est sécante à \mathcal{P} , donc (BC) est sécante à \mathcal{P} .

18 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}.$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires car $\vec{u} = k\vec{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 1 = -k \\ 2 = k \\ 0 = k \end{cases} \text{ ce qui est impossible.}$$

Cherchons s'il existe des réels λ et λ' tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{v}$, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{cases} 3 = \lambda - \lambda' & [1] \\ 12 = 2\lambda + \lambda' & [2] \\ 17 = 3\lambda + \lambda' & [3] \end{cases}$$

En additionnant à membre à membre [1] et [2], on trouve :

$$15 = 3\lambda \text{ donc } \lambda = 5.$$

En faisant $\lambda = 5$ dans [2], on obtient $\lambda' = 2$.

Pour $\lambda = 5$ et $\lambda' = 2$, l'équation [3] est vérifiée donc :

$$\vec{w} = 5\vec{u} + 2\vec{v}.$$

Les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont coplanaires.

2. A(0 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 0), C(4 ; 14 ; 17).

Soit $\mathcal{P}(A ; \vec{u}, \vec{v})$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} .

Un vecteur directeur de la droite (BC) est :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 14-2 \\ 17-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}. \text{ c'est le vecteur } \vec{w} \text{ de la question précédente.}$$

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} étant coplanaires, la droite (BC) est parallèle à la droite (A ; \vec{w}) du plan \mathcal{P} (voir fig. de l'exercice 17.)

donc (BC) est parallèle à \mathcal{P} .

- 19** Les points A(3 ; 1 ; 4), B(2 ; -1 ; 5), C(1 ; 2 ; 6) et D(5 ; 0 ; 7) sont coplanaires si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont coplanaires :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -1 = -2k \\ -2 = k \\ 1 = 2k \end{cases} \text{ ce qui est impossible.}$$

Cherchons s'il existe des réels λ et λ' tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \lambda' \overrightarrow{AC}$.

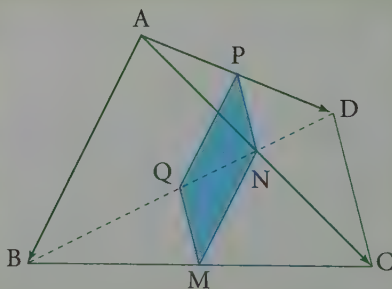
$$\begin{cases} 2 = -\lambda - 2\lambda' & [1] \\ -1 = -2\lambda + \lambda' & [2] \\ 3 = \lambda + 2\lambda' & [3] \end{cases}$$

D'après [1], on a $\lambda + 2\lambda' = -2$, D'après [3], on a $\lambda + 2\lambda' = 3$, ce qui est impossible. Les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

- 20** 1. Soit $\Pi(M ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ le plan passant par M et de vecteurs directeurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} .

Π est parallèle à (AB) donc les intersections de Π avec les plans (ABC) et (ABD) sont des droites parallèles à (AB).

Π est parallèle à (CD) donc les intersections de Π avec les plans (ACD) et (BCD) sont des droites parallèles à (CD).



On obtient un quadrilatère $MNPQ$ qui a ses côtés parallèles deux à deux. C'est donc un parallélogramme. Comme (AB) et (CD) sont orthogonales, (MN) et (MQ) sont orthogonales. Ce parallélogramme ayant un angle droit est donc un rectangle.

2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, on a :

$$B(1; 0; 0), C(0; 1; 0), D(0; 0; 1).$$

Les coordonnées du milieu d'un segment sont les demi-sommes des coordonnées des extrémités du segment (cf. résumé de cours) :

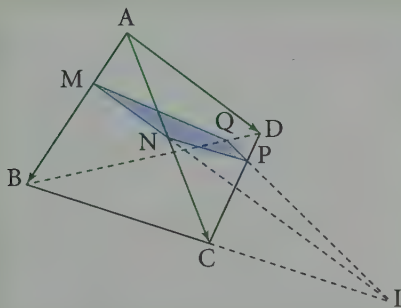
$$M \text{ est le milieu de } [BC] \text{ donc } M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$

$$N \text{ est le milieu de } [AC] \text{ donc } N\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$P \text{ est le milieu de } [AD] \text{ donc } P\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$Q \text{ est le milieu de } [BD] \text{ donc } Q\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right).$$

21 1.



$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$.

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc les coordonnées de N sont $\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$. Introduisons l'origine A :

$$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

$$\vec{AP} = \vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}.$$

Les coordonnées de P sont $\left(0; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

2. Construction de I

Nous cherchons le point d'intersection I du plan (MNP) et de la droite (BC) :

$I \in (\text{MNP})$;

$I \in (\text{BC})$ donc I appartient au plan (ABC).

I appartenant aux plans (MNP) et (ABC), le point I appartient à l'intersection (MN) de ces deux plans. Donc I est le point d'intersection de (BC) et (MN).

Construction de Q

Nous cherchons le point d'intersection Q du plan (MNP) et de la droite (BD) :

$Q \in (\text{MNP})$;

$Q \in (\text{BD})$ donc Q appartient au plan (BCD).

Q appartenant aux plans (MNP) et (BCD), le point Q appartient à l'intersection de ces deux plans qui est (IP) car I et P appartiennent à ces deux plans. Donc Q est le point d'intersection de (BD) et (IP).

3. La section du tétraèdre par le plan (MNP) est le quadrilatère MNPQ.

22 1. Nous utilisons le logiciel GEOSPACW.

Lorsque l'on précise « cliquer » c'est avec le bouton gauche de la souris.

1^{re} étape :

Afficher (cliquer)

Repère *oxyz* afficher (cliquer)

2^e étape :

Vues (cliquer)

Vue standard avec *oxz* de face (F9) (cliquer)

3^e étape :

Vues (cliquer)

Projection oblique (cliquer)

4^e étape :

Éditer (cliquer)

Éditer texte figure (cliquer)

Effacer le signe – devant 90

Exécuter (cliquer)

cliquer sur oui

5^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Point repéré

dans l'espace (cliquer)

Abscisse 0

Ordonnée 0
Cote 0
Nom du point A (cliquer sur OK)

6^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 1
Ordonnée 0
Cote 0
Nom du point B (cliquer sur OK)

7^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 1
Ordonnée 1
Cote 0
Nom du point C (cliquer sur OK)

8^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 0
Ordonnée 1
Cote 0
Nom du point D (cliquer sur OK)

9^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 0
Ordonnée 0
Cote 1
Nom du point E (cliquer sur OK)

10^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 1
Ordonnée 0
Cote 1
Nom du point F (cliquer sur OK)

11^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 1
Ordonnée 1
Cote 1
Nom du point G (cliquer sur OK)

12^e étape :
Icône bis cliquer

Abscisse 0
Ordonnée 1

Cote 1

Nom du point H (cliquer sur OK)

13^e étape :

Créer (cliquer)

Solide

Polyèdre convexe (cliquer)

défini par ses sommets (cliquer)

Liste des sommets ABCDHEFG

Nom du polyèdre P_1 (cliquer sur OK)

14^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Milieu (cliquer)

Nom du segment AB

Nom du polyèdre N (cliquer sur OK)

15^e étape :

Icone bis cliquer

Nom du segment AE

Nom du milieu M (cliquer sur OK)

16^e étape :

Icone bis cliquer

Nom du segment BC

Nom du milieu P (cliquer sur OK)

17^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Droite(s)

Intersection de deux plans (cliquer)

Premier plan MNP

Deuxième plan BCG

Nom de la droite d_1 (cliquer sur OK)

18^e étape :

Icone bis cliquer

Premier plan MNP

Deuxième plan DCG

Nom de la droite d_2 (cliquer sur OK)

19^e étape :

Icone bis cliquer

Premier plan MNP

Deuxième plan ADH

Nom de la droite d_3 (cliquer sur OK)

20^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Intersection de deux droites (cliquer)

Première droite d_1

Deuxième droite CG

Nom du point Q (cliquer sur OK)

21^e étape :

Icone bis cliquer

Première droite d_2

Deuxième droite HG

Nom du point R (cliquer sur OK)

22^e étape :

Icone bis cliquer

Première droite d_3

Deuxième droite EH

Nom du point S (cliquer sur OK)

Il semble que Q, R, S soient les milieux respectivement de [CG], [GH], [HE].

23^e étape :

Icone bis cliquer

Première droite MN

Deuxième droite BF

Nom du point I (cliquer sur OK)

Il semble que la droite (PQ) passe par I.

24^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Segment (cliquer)

Définis par 2 points (cliquer)

Nom des segments MN, NP, PQ, QR, RS, SM (cliquer OK)

25^e étape :

Créer (cliquer)

Affichage

Longueur d'un segment (cliquer)

Nom du segment MN

Nombre de décimales 6 (cliquer sur OK)

À l'écran on lit MN : 0,707107

26^e étape :

Icone bis cliquer

Nom du segment MS

Nombre de décimales 6 (cliquer sur OK)

À l'écran on lit MS : 0,707107

On peut constater ainsi que le polygone MNPQRS semble être un hexagone régulier en calculant les différentes longueurs des côtés.

27^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Milieu (cliquer)

Nom de segment AG

Nom du milieu O (cliquer sur OK)

28^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Droite(s)

perpendiculaire à un plan (cliquer)

Droite passant par O et perpendiculaire au plan MNP

Nom de droite d_4 (cliquer sur OK)**29^e étape :**

Créer (cliquer)

Point

Intersection de droite-plan (cliquer)

Nom de la droite d_4

Nom du plan MNP

Nom du point K (cliquer sur OK)

30^e étape :

Créer (cliquer)

Affichage

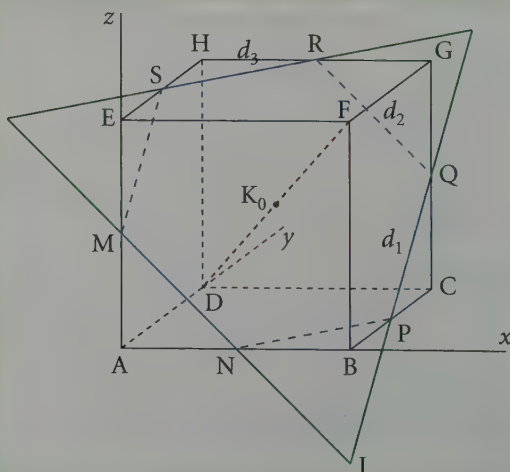
Longueur d'un segment (cliquer)

Nom du segment OK

Nombre de décimales 6 (cliquer sur OK)

À l'écran on lit OK : 0

Donc le point O appartient au plan MNP.



2. • Soit I le point d'intersection de (MN) et (BF).

$I \in (MN)$ donc I appartient au plan (MNP).

$I \in (BF)$ donc I appartient au plan (BCGF).

Donc I est un point de l'intersection d_1 des plans (MNP) et (BCGF).

• La droite (IP) coupe (CG) au point d'intersection Q du plan (MNP) et de la droite (CG).

a) • En raison des symétries par rapport à N et P :

$$\vec{BI} = -\vec{AM} \quad \text{et} \quad \vec{CQ} = -\vec{BI}$$

donc $\vec{CQ} = \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{CG}$ donc Q est le milieu de [CG].

• De proche en proche, on déduit les autres sommets de la section : en remplaçant M, N, P par N, P, Q, on montrera que le plan (NPQ) (c'est-à-dire le plan (MNP)) rencontre [GH] en son milieu R ; en remplaçant N, P, Q par P, Q, R, on montrera que le plan (PQR) (c'est-à-dire le plan (MNP)) rencontre [HE] en son milieu S.

La section du cube par le plan (MNP) est l'hexagone MNPQRS.

3. a) Les coordonnées des sommets du cube sont :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad C(1; 1; 0), \quad D(0; 1; 0),$$

$$E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1), \quad H(0; 1; 1).$$

• Les sommets M, N, P, Q, R, S de la section sont les milieux respectifs de :

$$[AE], \quad [AB], \quad [BC], \quad [CG], \quad [GH], \quad [HE].$$

Les coordonnées des sommets sont donc les demi-sommets des coordonnées des extrémités de ces segments (cf. livret détachable) :

$$M\left(0; 0; \frac{1}{2}\right), \quad N\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \quad P\left(1; \frac{1}{2}; 0\right),$$

$$Q\left(1; 1; \frac{1}{2}\right), \quad R\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), \quad S\left(0; \frac{1}{2}; 1\right).$$

• Le centre O du cube est le milieu, par exemple, de la diagonale [AG]. Ses coordonnées sont :

$$O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

b) Dans le triangle rectangle MNP, d'après le théorème de Pythagore :

$$MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On calcule, de même, les longueurs des autres côtés de la section.

c) Le milieu de [MQ] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right),$$

c'est le point O. Comme (MQ) appartient au plan de la section, le point O appartient à ce plan.

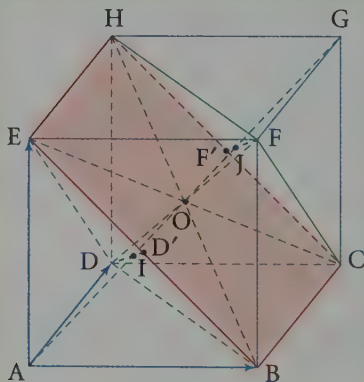
$$\begin{aligned} \text{d) } OM &= \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vous verrez, de même, que :

$$ON = OP = OQ = OR = OS = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

e) La section MNPQRS est donc un hexagone régulier inscrit dans le cercle du plan de section, de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

23 1.



a) L'ensemble des points équidistants de B et D est le plan médiateur de [BD].
L'ensemble des points équidistants de D et E est le plan médiateur de [DE].
Les points B, D, E, n'étant pas alignés, ces plans médiateurs sont sécants suivant une droite Δ qui est l'ensemble des points équidistants de B, D, E.

$AB = AD = AE = 1$ donc A appartient à Δ ;

$GB = GD = GE = \sqrt{2}$ donc G appartient à Δ .

La droite Δ n'est autre que (AG).

b) En raisonnant comme précédemment, l'ensemble des points équidistants de C, F et H est la droite d'intersection des plans médiateurs de [CF] et [FH]. Cette droite est la droite (AG) car A et G sont équidistants de C, F et H.

2. a) La droite (AG) est l'ensemble des points équidistants des points B, D, E et des points C, F, H donc les points d'intersection I et J de (AG) avec les plans (BDE) et (CFH) sont aussi équidistants des points B, D, E et des points C, F, H. Comme les triangles BDE et CFH sont équilatéraux (les côtés ont pour longueurs $\sqrt{2}$), I et J sont les centres de gravité de ces triangles.

$$\mathbf{b)} \quad x_{D'} = \frac{x_B + x_E}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_{D'} = \frac{y_B + y_E}{2} = 0, \quad z_{D'} = \frac{z_B + z_E}{2} = \frac{1}{2},$$

$$x_{F'} = \frac{x_C + x_H}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_{F'} = \frac{y_C + y_H}{2} = 1, \quad z_{F'} = \frac{z_C + z_H}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) • Puisque I est le centre de gravité du triangle BDE, on a $\vec{DI} = \frac{2}{3}\vec{DD}'$.

Soit x, y, z les coordonnées de I :

$$\vec{DI} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{DD}' \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$x = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$y-1 = \frac{2}{3} \times (-1) = -\frac{2}{3} \quad \text{donc } y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$z = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de I sont : $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

• Puisque J est le centre de gravité du triangle CFH, on a $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FF}'$.

Soit x', y', z' les coordonnées de J :

$$\vec{FJ} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \\ z'-1 \end{pmatrix}, \quad \vec{FF}' \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$x'-1 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{donc } x' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$y' = \frac{2}{3};$$

$$z' - 1 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ donc } z' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Les coordonnées de J sont : $J\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$\text{d) } AI = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$IJ = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$JG = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Soit V_1 et V_2 les volumes des tétraèdres ABDE et GFCH.

Soit V_3 et V_4 les volumes des pyramides de sommets F et D et de base le rectangle BCHE.

En raison de la symétrie par rapport au centre O du cube, on remarque que $V_1 = V_2$ et $V_3 = V_4$.

• Calculons V_1 :

La droite (AG) étant l'intersection des plans médiateurs de [BD] et [DE], elle est orthogonale aux droites (BD) et (DE) donc au plan (BDE); il en résulte qu'une hauteur du tétraèdre ABDE a pour longueur $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$V_1 = \frac{1}{3} \text{ aire (BDE)} \times \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dans le triangle équilatéral BDE :

$$\text{aire (BDE)} = \frac{1}{2} BE \times DD'.$$

$$BE = \sqrt{2} \text{ et } DD' = BE \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc :}$$

$$\text{aire (BDE)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6} \text{ donc } V_1 = V_2 = \frac{1}{6}.$$

• Dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, le volume du cube est $V = 1 \times 1 \times 1 = 1$ d'où :

$$V_3 = V_4 = \frac{1}{2}(V - V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

1 Définition

Soit O un point quelconque du plan ou de l'espace, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant des réels.

• Si $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) est défini par l'une des égalités :

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}) \\ \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Si l'on prend O en A dans la première égalité :

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB} \quad [1]$$

Cette égalité montre que le barycentre de deux points distincts appartient à la droite passant par ces deux points. Elle permet aussi de construire le point G .

• Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le barycentre G des points pondérés (A, α) , (B, β) , (C, γ) est défini par des égalités :

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}) \\ \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

• Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$, le barycentre G des points pondérés (A, α) , (B, β) , (C, γ) , (D, δ) est défini par l'une des égalités :

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}(\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} + \delta\vec{OD}) \\ \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} + \delta\vec{GD} &= \vec{0}\end{aligned}$$

On généralisera à plus de 4 points.

2 Isobarycentre

Lorsque les coefficients des points pondérés sont égaux et non nuls, le barycentre de ces points est appelé **isobarycentre** de ces points.

- L'isobarycentre de A et B est le milieu de [AB].
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC.
- L'isobarycentre de quatre points non coplanaires A, B, C, D est le centre de gravité du tétraèdre ABCD.

3 Propriétés

- Le barycentre ne change pas si l'on change l'ordre des points pondérés en gardant leurs coefficients.
- Le barycentre ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise tous les coefficients par un même nombre réel non nul.
- **Associativité** : le barycentre (s'il existe) affecté du coefficient égal à la somme de leurs coefficients.
- Les égalités précédentes donnant \overrightarrow{OG} permettent de calculer les coordonnées de G. Par exemple si l'on connaît les coordonnées des points A, B, C de l'espace dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** Soit un parallélogramme ABCD.
Le point de rencontre O des diagonales est un barycentre de A, B, C, D. V F
➔ Corrigé p. 275
- 2** Soit un trapèze ABCD ((AB) // (CD)). I, J, K, L sont les milieux respectivement de [AB], [BC], [CD], [DA]. O est le milieu de [JL].
- a) $\vec{LJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$. V F
- b) O est un barycentre de A, B, C, D. V F
- c) O est milieu de [IK]. V F
- d) Si M est un point quelconque du plan,
 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{OM}$. V F
➔ Corrigé p. 275
- 3** Soit un triangle ABC, A' barycentre de (B, 1), (C, 1), B' barycentre de (C, 1), (A, -2), C' barycentre de (A, -2), (B, 1).
- a) Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes. V F
- b) Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles. V F
➔ Corrigé p. 275
- 4** Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC, G₁ barycentre de (A, -1), (B, 1), (C, 1), G₂ barycentre de (A, 1), (B, -1), (C, 1), G₃ barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, -1).
- a) La droite (AG₁) passe par G. V F
- b) Les droites (AG₁), (BG₂), (CG₃) sont parallèles; V F
- c) Les droites (AG₁), (BG₂), (CG₃) sont concourantes. V F
➔ Corrigé p. 275
- 5** $f(M) = 2\vec{MA} + 4\vec{MB} - 3\vec{MC} - 3\vec{MD}$ $g(M) = 2\vec{MA} + 4\vec{MB} + 3\vec{MC} + 3\vec{MD}$
(A, B, C, D quatre points donnés, $\vec{AB} \neq \vec{AC} + \vec{AD}$). G est le barycentre de (A, 2), (B, 4), (C, 3), (D, 3).
- a) f(M) est indépendant de M. V F

b) $g(M)$ est indépendant de M .

V F

c) $g(M) = 12\overrightarrow{MG}$.

V F

d) L'ensemble des points M tels que $f(M) = \overrightarrow{AB}$ est une droite ;

V F

e) l'ensemble vide.

V F

f) L'ensemble des points M tels que $g(M) = \overrightarrow{AB}$ est une droite ;

V F

g) un singleton.

V F

→ Corrigé p. 275

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Barycentre dans le plan

6 Soit A et B deux points du plan tels que : $AB = 8$ cm.
Placer sur une figure le barycentre de $(A, 8)$ et $(B, 12)$.

→ Corrigé p. 276

7 On donne un triangle ABC .
Construire le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.

→ Corrigé p. 276

8 Soit A, B, C, D quatre points distincts.
Construire le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 4)$.

→ Corrigé p. 277

9 Soit un triangle ABC . On appelle A' le point du segment $[BC]$ tel que $\frac{CA'}{CB} = \frac{1}{3}$ et B' le point du segment $[AC]$ tel que $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{4}$. Soit G le point d'intersection de (AA') et (BB') .
Déterminer les coefficients α, β, γ pour que G soit le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) .

→ Corrigé p. 277

10 Soit un triangle ABC de centre de gravité G . On appelle A' le milieu de $[BC]$. La parallèle à la droite (BC) menée par G coupe $[AC]$ en E .
Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Quel est le barycentre de $(A, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$?

2. Montrer que E est le barycentre de (A, 1) et (C, 2).

3. En déduire que les points A', D, E sont alignés. Préciser la position de A' sur le segment [DE]. → Corrigé p. 278

11 Soit un triangle ABC.

1. Construire les points :

A' barycentre de (B, 4) et (C, 3) ;

B' barycentre de (C, 3) et (A, 2) ;

C' barycentre de (A, 1) et (B, 2).

2. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. → Corrigé p. 279

12 Soit un triangle ABC et les points :

A' barycentre de (B, 1) et (C, 2) ;

B' barycentre de (C, 2) et (A, -3) ;

C' barycentre de (A, -3) et (B, 1) ;

1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

2. En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles. → Corrigé p. 280

13 Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. un repère du plan et A(1 ; 4) et B(4 ; 1) deux points du plan. Soit G le barycentre de A(1 ; 4) et B(4 ; 1).

1. Déterminer les coordonnées de G.

2. Soit H le point du plan tel que G soit le barycentre de (H, 2) et (O, 1).

a) Calculer les coordonnées de H.

b) Montrer que les droites (AH) et (OB) sont parallèles. → Corrigé p. 281

14 Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points :

A(1 ; -4), B(2 ; -1) et B(-1 ; 2).

Déterminer le réel α pour que le point O soit le barycentre de (A, 3), (B, 2), (C, α). → Corrigé p. 282

15 On donne trois points A, B, C non alignés du plan P.

1. Soit M le point de coordonnées (2 ; -3) dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; le point M est alors le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

2. Traiter la même question que précédemment en considérant le point $M(x; y)$.

→ Corrigé p. 282

16 Soit \mathcal{C} un cercle trigonométrique de centre O et $ABCDE$ un pentagone régulier convexe inscrit dans \mathcal{C} et direct (le sens de parcours A, B, C, D, E, A est le sens positif du cercle trigonométrique).

1. a) Montrer que l'isobarycentre des points A, B, C, D, E , appartient aux droites (OA) et (OB) .

b) En déduire que cet isobarycentre est le point O .

c) Montrer que :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$$

2. Démontrer l'égalité :

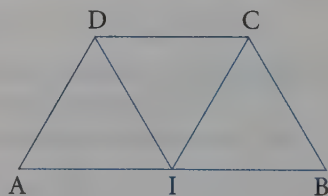
$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

→ Corrigé p. 283

Centre d'inertie d'un solide

17 1. Une plaque homogène a la forme d'un trapèze $ABCD$ formé de 3 triangles équilatéraux AID, DIC, CIB .

L'épaisseur de la plaque est constante. Lorsqu'un solide est formé de 3 solides de centre d'inerties G_1, G_2, G_3 et de masse respectives m_1, m_2, m_3 , le centre d'inertie G de tout le solide est le barycentre de (G_1, m_1) , (G_2, m_2) , (G_3, m_3) . Déterminer le centre d'inertie G de la plaque.



2. La plaque n'est plus homogène. Le triangle AID est homogène de masse 100 g, le triangle DIC est homogène de masse 200 g, le triangle CIB est homogène de masse 300 g.

On suppose que l'épaisseur de la plaque est constante. Les côtés des 3 triangles équilatéraux ont pour longueur 12 cm.

Construire le centre d'inertie G de la plaque et calculer ses coordonnées en choisissant un repère orthonormal d'origine I .

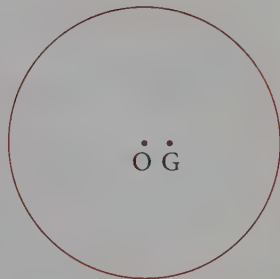
→ Corrigé p. 284

18 Équilibrage d'une roue

Une roue d'automobile a une masse de 10 kg et un rayon de 20 cm. Son centre d'inertie G est à 1 mm de l'axe de rotation représenté en O sur la figure.

On veut mettre en un point A du pourtour (jante) de la roue une masse de m grammes pour rétablir le centre d'inertie de l'ensemble en O .

Déterminer la position de A et de calculer m .



→ Corrigé p. 285

Barycentre dans l'espace

19 Soit un tétraèdre $ABCD$. Construire successivement les barycentres E , F , G des points pondérés suivants :

1. $(B, 1)$ et $(C, 2)$.
2. $(B, 1)$, $(C, 2)$ et $(D, 3)$.
3. $(B, 1)$, $(C, 2)$, $(D, 3)$ et $(A, 4)$.

→ Corrigé p. 286

20 Soit un tétraèdre $ABCD$. On appelle G son centre de gravité. On considère les points I , J , K , L , M , N milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$, $[BD]$. Soit A' , B' , C' , D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD , ACD , ABD , ABC .

1. Usage d'un ordinateur

Construire, à l'aide d'un logiciel, le tétraèdre $ABCD$ et les points G , I , K , L , M , N , et A' . Constater que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ et $[AA']$ passant par G .

2. Justification

a) En associant deux à deux les points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, montrer que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ se coupent en leur milieu G .

b) En associant trois des quatre points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, montrer que les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ se coupent en G .

Préciser la position de G sur ces segments.

→ Corrigé p. 286

21 Soit un tétraèdre $ABCD$. On appelle P le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, -1)$, G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu de $[AD]$.

1. Construire le point P .

2. a) Montrer que $\vec{IP} = \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID}$.

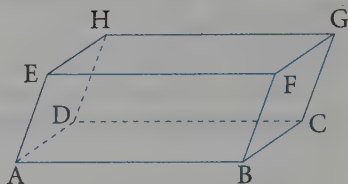
b) Montrer que $3\vec{IG} = \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID}$.

c) En déduire que les points P, G, I sont alignés.

→ Corrigé p. 289

22 ★ Soit un parallélépipède ABCDEFGH, les faces étant des parallélogrammes.

1. Soit I le centre de gravité du triangle BEG. Montrer que les points D, I, F sont alignés et préciser leurs positions relatives.



2. Soit O l'isobarycentre des huit sommets du parallélépipède.

Montrer que :

- a) O est le milieu des segments joignant les centres de deux faces opposées ;
b) O est le milieu des diagonales du parallélépipède (une telle diagonale est un segment joignant deux sommets n'appartenant pas à une même face ; par exemple [AG]).

→ Corrigé p. 289

23 ★ 1. Démontrer que si deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' ont même centre de gravité G :

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0}.$$

2. Réciproquement, si deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont tels que la relation précédente soit vérifiée, démontrer qu'ils ont même centre de gravité.

3. L'espace étant rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points : A(1 ; 0 ; -1), B(2 ; 1 ; 4), A(0 ; 0 ; 1), A(0 ; 1 ; 0).

a) Montrer que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre ABCD.

→ Corrigé p. 290

24 ★ Soit un tétraèdre ABCD et M un point quelconque de l'espace.

On appelle G le barycentre de (A, 1), (B, -1), (C, 2), (D, 3). Soit les vecteurs :

$$\vec{u} = \vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} + 3\vec{MD}$$

$$\vec{v} = \vec{MA} - \vec{MB} + 2(\vec{MC} - 2\vec{MD})$$

1. a) Démontrer que $\vec{u} = 5\vec{MG}$.

b) Démontrer que \vec{v} est un vecteur constant (indépendant de M).

2. Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires ?

→ Corrigé p. 292

EXERCICES ET PROBLÈMES

- 1** **Vrai.** O est barycentre de A, B, C, D affectés du coefficient 1.
- 2** a) **Vrai.**
$$\vec{LJ} = \frac{1}{2}(\vec{LB} + \vec{LC}) = \frac{1}{2}(\vec{LA} + \vec{AB} + \vec{LD} + \vec{DC})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$
- b) **Vrai.** O est barycentre de A, B, C, D, affectés du coefficient 1.
- c) **Vrai.**
$$\vec{OI} + \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \vec{0}.$$
- d) **Faux.**
$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = (\vec{MO} + \vec{OA}) + (\vec{MO} + \vec{OB})$$
$$+ (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OD})$$
$$= 4\vec{MO}.$$
- 3** a) **Faux.** $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ sont colinéaires à $\vec{AB} + \vec{AC}$ (on appliquera la formule donnant les barycentres A', B', C' en prenant l'origine en A, B, C).
- b) **Vrai.**
- 4** a) **Vrai.** En prenant l'origine en G
$$\vec{GG}_1 = -(-\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC}$$
$$= 2\vec{GA} - (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 2\vec{GA}.$$
- b) **Faux.** De même $\vec{G}_2\vec{G}_1 = 2\vec{GB}$, $\vec{G}_3\vec{G}_1 = 2\vec{GC}$.
- c) **Vrai.** (AG_1) , (BG_2) , (CG_2) sont concourantes en G.
- 5** a) **Vrai.** En introduisant A, $f(M) = 4\vec{AB} - 3\vec{AC} - 3\vec{AD}$.
- b) **Faux.** En introduisant G, $g(M) = 12\vec{MG}$ dépend de M.
- c) **Vrai.**
- d) **Faux.** $f(M) = \vec{AB} \Leftrightarrow 4\vec{AB} - 3\vec{AC} - 3\vec{AD} = \vec{AB}$
$$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{AD} \text{ impossible.}$$
- e) **Vrai.** Oui, car on a supposé $\vec{AB} \neq \vec{AC} + \vec{AD}$.

f) Faux. $g(M) = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 12\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{1}{12}\overrightarrow{BA}$.

g) Vrai. Soit I le point tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{12}\overrightarrow{BA}$. L'ensemble des points M est {I}.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

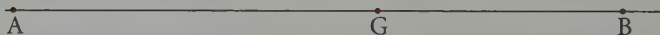
- 6 Le point G, barycentre de (A, 8) et (B, 12) existe, car $8 + 12 \neq 0$; c'est encore le barycentre de (A, 2) et (B, 3), car on ne change pas le barycentre de deux points pondérés si on multiplie ou si on divise l'ensemble des coefficients par un même réel non nul.

En appliquant la formule [1] du cours p. 261 :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AB} sont de même sens et :

$$AG = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \times 8 = 4,8 \text{ cm}.$$

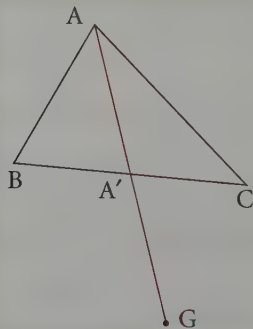


- 7 Soit G le barycentre de (A, -1), (B, 1), (C, 1). Soit A' le milieu de [BC].

Nous utiliserons les notations :

$$G = \text{Bar}\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$$

$$A' = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 1)\}.$$



On sait que le barycentre G ne change pas si l'on remplace les points pondérés (B, 1) et (C, 1) par leur barycentre A' affecté du coefficient $1 + 1 = 2$ (associativité du barycentre).

Donc $G = \text{Bar}\{(A, -1), (A', 2)\}$.

En appliquant la formule [1] du cours :

$$\vec{AG} = \frac{2}{-1+2} \vec{AA'} = \vec{AA'}$$

Ce qui permet de construire G.

Remarquons que le quadrilatère ABGC, ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

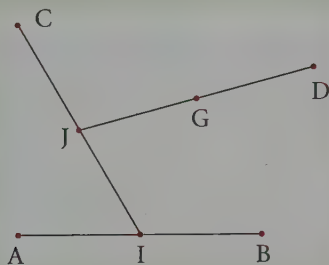
8 Avec les mêmes notations que précédemment, on peut écrire :

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 2), (D, 4)\}$$

Remplaçons (A, 1) et (B, 1) par leur barycentre, c'est-à-dire le milieu I de [AB] affecté du coefficient $1 + 1 = 2$:

$$G = \text{Bar}\{(J, 4), (D, 4)\}$$

Les points J et D étant affectés de coefficients égaux, G est l'isobarycentre de J et D c'est-à-dire le milieu de [JD].



9 • Puisque $\frac{CA'}{CB} = \frac{1}{3}$ et $A' \in [BC]$,

Les vecteurs $\vec{CA'}$ et \vec{CB} sont de même sens et on peut écrire :

$$\vec{CA'} = \frac{1}{3} \vec{CB}$$

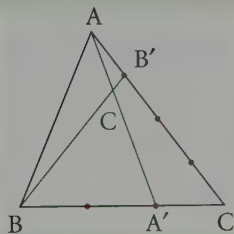
Introduisant un point O, on peut écrire :

$$\vec{OA'} - \vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$\vec{OA'} = \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{2}{3} \vec{OC}$$

$$\vec{OA'} = \frac{1}{1+2} (1\vec{OB} + 2\vec{OC})$$

ce qui montre que $A' = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 2)\}$.



- Puisque $\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{4}$ et $B' \in [AC]$, les vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et \overrightarrow{AC} sont de même sens et on peut écrire : $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Introduisons un point O dans cette égalité :

$$\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{3+1}(3\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OC})$$

ce qui montre que $B' = \text{Bar}\{(A, 3), (C, 1)\}$.

- On peut aussi écrire $B' = \text{Bar}\{(A, 6), (C, 2)\}$. Soit alors

$$G' = \text{Bar}\{(A, 6), (B, 1), (C, 2)\}.$$

G' ne change pas si l'on remplace (B, 1) et (C, 2) par (A' , 3) :

$$G' = \text{Bar}\{(A, 6), (A', 3)\}.$$

Le barycentre de deux points distincts appartient à la droite passant par ces deux points. Donc $G' \in (AA')$.

G' ne change si l'on remplace (A, 6) et (C, 2) par (B' , 8) :

$$G' = \text{Bar}\{(B, 1), (B', 8)\}.$$

Donc $G' \in (BB')$.

Puisque G' est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') , c'est le point G.

Donc $G = \text{Bar}\{(A, 6), (B, 1), (C, 2)\}$.

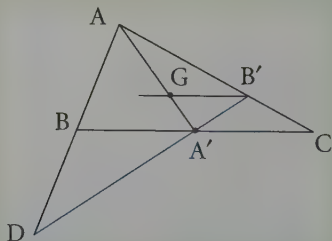
Les coefficients cherchés sont $\alpha = 6$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$.

- 10** 1. Construisons le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc B est le milieu de [AD] et $B = \text{Bar}\{(A, 1), (D, 1)\}$.

On peut écrire : $\text{Bar}\{(A, 1), (C, 2), (D, 1)\} = \text{Bar}\{(A, 1), (D, 1), (C, 2)\}$

$$= \text{Bar}\{(B, 2), (C, 2)\}$$

$\text{Bar}\{(B, 2), (C, 2)\}$ est l'isobarycentre de B et C c'est-à-dire le milieu A' de [BC].



Le barycentre de (A, 1), (C, 2), (D, 1) est le point A' .

2. La parallèle à (BC) menée par G coupe [AC] en E donc (théorème de Thalès)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AG}{AA'}$$

G est le centre de gravité du triangle ABC donc $\frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3}$. Par suite :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}. \text{ Comme } E \in [AC], \text{ on a } \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

Introduisons un point O :

$$\vec{OE} - \vec{OA} = \frac{2}{3}(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OC}$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{1+2}(1\vec{OA} + 2\vec{OC})$$

ce qui montre que $E = \text{Bar}\{(A, 1), (C, 2)\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad A' &= \text{Bar}\{(A, 1), (C, 2), (D, 1)\} \\ &= \text{Bar}\{(E, 3), (D, 1)\}. \end{aligned}$$

Appliquons la formule [1] du cours, l'origine étant D :

$$\vec{DA'} = \frac{3}{3+1}\vec{DE} = \frac{3}{4}\vec{DE}.$$

Ce qui montre que les points D, A' et E sont alignés et permet de préciser la position de A' sur [DE].

11 **1.** • A' est le barycentre de (B, 4) et (C, 3) donc (cf. cours, formule [1]) l'origine étant B :

$$\vec{BA'} = \frac{3}{4+3}\vec{BC} = \frac{3}{7}\vec{BC}.$$

• B' est le barycentre de (C, 3) et (A, 2) donc (cf. cours, formule [1]) l'origine étant A :

$$\vec{AB'} = \frac{3}{3+2}\vec{AC} = \frac{3}{5}\vec{AC}.$$

ce qui permet de construire B'.

- C' est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$
donc :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

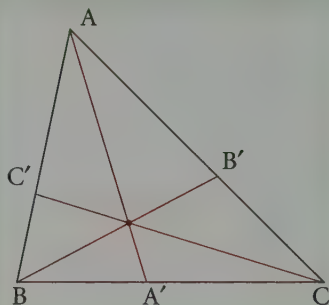
ce qui permet de placer C' .

$$2. A' = \text{Bar}\{(B, 4), (C, 3)\}$$

$$B' = \text{Bar}\{(C, 3), (A, 2)\}$$

$$C' = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$$

$$= \text{Bar}\{(A, 2), (B, 4)\}.$$



Soit alors : $G = \text{Bar}\{(A, 2), (B, 4), (C, 3)\}$.

Remplaçons successivement : $(B, 4)$ et $(C, 3)$ par $(A', 7)$

$(C, 3)$ et $(A, 2)$ par $(B', 5)$

$(A, 2)$ et $(B, 4)$ par $(C', 6)$.

On a alors respectivement :

$$G = \text{Bar}\{(A, 2), (A', 7)\} \text{ donc } G \in (AA')$$

$$G = \text{Bar}\{(B, 4), (B', 5)\} \text{ donc } G \in (BB')$$

$$G = \text{Bar}\{(C, 3), (C', 6)\} \text{ donc } G \in (CC')$$

Les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en G .

- 12** 1. • $A' = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 2)\}$ donc en prenant l'origine en A :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{1+2}(1\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}), \text{ soit } \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}).$$

- $B' = \text{Bar}\{(C, 2), (A, -3)\}$ donc en prenant l'origine en B :

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2-3}(2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BB'} = -2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + 3\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BB'} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}).$$

- $C' = \text{Bar}\{(A, -3), (B, 1)\}$ donc en prenant l'origine en C :

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{-3+1}(-3\overrightarrow{CA} + 1\overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

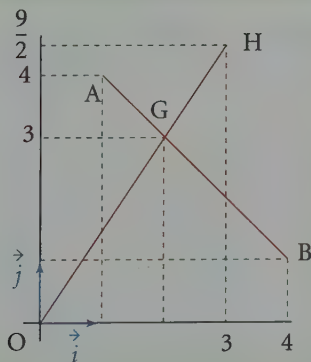
$$\overrightarrow{CC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CC'} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ étant colinéaires au même vecteur non nul $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, sont colinéaires entre eux, et les droites (AA') , (BB') , (CC') sont parallèles.

- 13** 1. Puisque G est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2+1}(2\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}).$$



De $A(1; 4)$ et $B(4; 1)$, on déduit les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(2 \times 1 + 1 \times 4) = 2 \\ y_G = \frac{1}{3}(2 \times 4 + 1 \times 1) = 3 \end{cases}$$

2. a) Soit le point $H(x; y)$. Le point G est le barycentre de $(H, 2)$ et $(O, 1)$ donc :

$$\vec{OG} = \frac{1}{2+1}(2\vec{OH} + 1\vec{OO}) = \frac{2}{3}\vec{OH}$$

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}x \\ 3 = \frac{2}{3}y \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

b) $\vec{AH} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 9 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car

$$\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{OB} \quad \text{donc (AH) et (OB) sont parallèles.}$$

14 Le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 2)$, (C, α) existe si et seulement si $3 + 2 + \alpha \neq 0$, c'est-à-dire $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire $\alpha \neq -5$; sous cette condition, déterminons les coordonnées du barycentre de $\{(A, 3), (B, 2), (C, \alpha)\}$:

$$\begin{cases} \frac{3 \times 1 + 2 \times 2 + \alpha(-1)}{5 + \alpha} = \frac{7 - \alpha}{5 + \alpha} \\ \frac{3 \times (-4) + 2(-1) + \alpha(2)}{5 + \alpha} = \frac{-14 + 2\alpha}{5 + \alpha} \end{cases}$$

Ce sont les coordonnées du point O si et seulement si :

$$\frac{7 - \alpha}{5 + \alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-14 + 2\alpha}{5 + \alpha} = 0$$

c'est-à-dire $\alpha = 7$.

15 1. $\vec{AM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$

$$\vec{AM} = 2(\vec{AM} + \vec{MB}) - 3(\vec{AM} + \vec{MC})$$

$$2\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$$

ce qui montre que M est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, -3)$.

2. Procédons comme précédemment en remplaçant $(2; -3)$ par $(x; y)$:

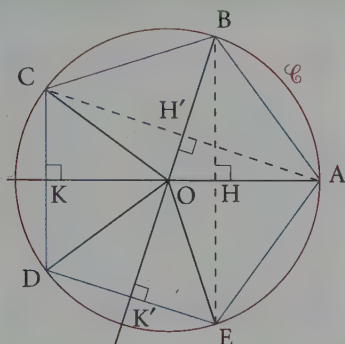
$$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

$$\vec{AM} = x(\vec{AM} + \vec{MB}) + y(\vec{AM} + \vec{MC})$$

$$(1 - x - y)\vec{MA} + x\vec{MB} + y\vec{MC} = \vec{0}$$

M est le barycentre de $(A, 1-x-y)$, (B, x) , (C, y) si et seulement si $1 - x - y + x + y \neq 0$, ce qui est vérifié quels que soient x et y .

16 1.



a) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D, E :

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 1)\}.$$

On peut remplacer les points pondérés (B, 1) et (E, 1) par leur isobarycentre H affecté du coefficient 2. Le point H est le milieu de [BE].

On peut aussi remplacer les points pondérés (C, 1) et (D, 1) par (K, 2), le point K étant le milieu de [CD].

D'où :

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (H, 2), (K, 2)\}.$$

Les points A, H, K appartiennent à la droite (OA), axe de symétrie du pentagone régulier, donc leur barycentre G appartient à (OA).

De même, en appelant H' et K' les milieux respectifs de [AC] et [DE], on peut remplacer (A, 1) et (C, 1) par (H', 2) ainsi que (D, 1) et (E, 1) par (K', 2).

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (C, 1), (D, 1), (B, 1)\}$$

$$G = \text{Bar}\{(H', 2), (K', 2), (B, 1)\}.$$

Les points H', K', B appartiennent à la droite (OB), axe de symétrie du pentagone régulier, donc leur barycentre G appartient à (OB).

b) G appartient aux droites (OA) et (OB) donc G est le point d'intersection O des droites (OA) et (OB).

c) Puisque O est l'isobarycentre des points A, B, C, D, E :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0} \quad [1]$$

2. Prenons pour repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \vec{OA}$.

D'après [1] :

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 0$$

C'est-à-dire :

$$1 + \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) + \cos(\vec{OA}, \vec{OC}) + \cos(\vec{OA}, \vec{OD}) + \cos(\vec{OA}, \vec{OE}) = 0.$$

Les angles au centre du pentagone régulier sont égaux :

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OC}, \vec{OD}) = (\vec{OD}, \vec{OE}) = (\vec{OE}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{5}.$$

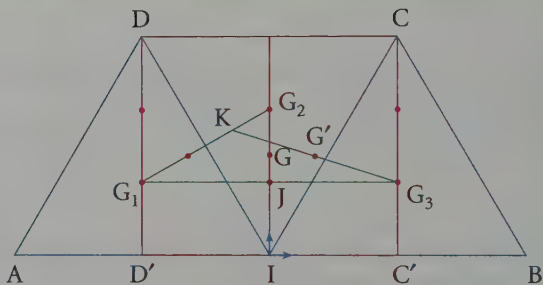
On en déduit :

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \left(-\frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0.$$

17 1.



Appelons m_1, m_2, m_3 les masses respectives des plaques triangulaires AID, DIC, CIB. La plaque ABCD étant homogène et d'épaisseur constante, ces masses sont égales ($m_1 = m_2 = m_3$) et les centres d'inertie de AID, DIC, CIB sont les centres de gravité G_1, G_2, G_3 de ces triangles.

Le centre d'inertie de la plaque est :

$$G = \text{Bar}\{(G_1, m_1), (G_2, m_2), (G_3, m_3)\}$$

$$G = \text{Bar}\{(G_1, 1), (G_2, 1), (G_3, 1)\} \text{ (puisque } m_1 = m_2 = m_3).$$

Remplaçons $(G_1, 1)$ et $(G_3, 1)$ par leur barycentre $(J, 2)$, J étant le milieu de $[G_1G_3]$:

$$G = \text{Bar}\{(J, 2), (G_2, 1)\}$$

$$\vec{IG} = \frac{1}{2+1}(2\vec{IJ} + \vec{IG}_2) = \frac{2}{3}\vec{IJ} + \frac{1}{3}\vec{IG}_2$$

$$\vec{IG} = \frac{2}{3}\vec{IJ} + \frac{1}{3}(2\vec{IJ})$$

$$\vec{IG} = \frac{4}{3}\vec{IJ}.$$

$$2. G' = \text{Bar}\{(G_1, 100), (G_2, 200), (G_3, 300)\}$$

$$G' = \text{Bar}\{(G_1, 1), (G_2, 2), (G_3, 3)\}.$$

Soit K le barycentre de $(G_1, 1)$ et $(G_2, 2)$:

$$\overrightarrow{G_1K} = \frac{1}{1+2}(2\overrightarrow{G_1G_2}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{G_1G_2}. \text{ D'où :}$$

$$G' = \text{Bar}\{(K, 3), (G_3, 3)\} \text{ donc } G' \text{ est le milieu de } [KG_3].$$

Soit $(I; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal, l'unité de longueur étant 1 cm.

Rappelons que $AI = IB = 12$ cm. Nous choisirons le repère orthonormal de manière que A, B, G_1, G_3 aient pour abscisses respectives : $-12; 12; -6, 6$ et que G_1, G_2, G_3 aient des ordonnées positives que nous allons calculer :

Doit D' le milieu de $[AI]$ et C' le milieu de $[IB]$,

$$DD' = CC' = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ d'où :}$$

$$D'G_1 = C'G_3 = \frac{1}{3}(6\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \text{ et } IG_2 = 4\sqrt{3}.$$

Les coordonnées de G_1, G_2, G_3 sont donc :

$$G_1(-6; 2\sqrt{3}), \quad G_2(0; 4\sqrt{3}), \quad G_3(6; 2\sqrt{3}).$$

Les coordonnées de G' sont :

$$x_{G'} = \frac{1}{1+2+3}(1(-6) + 2(0) + 3 \times 6) = 2$$

$$y_{G'} = \frac{1}{1+2+3}(1 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 4\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

18 10 kg = 10 000 g. Déterminons A et calculons m en grammes.

$$O = \{(G, 10\,000), (A, m)\}$$

$$\text{donc } 10\,000\overrightarrow{IG} + m\overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

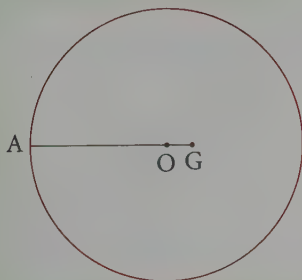
$$\overrightarrow{OA} = -\frac{10\,000}{m}\overrightarrow{OG}$$

ce qui montre que A et G sont alignés avec O et de part et d'autre de O.

Les distances étant évaluées en mm :

$$OA = \frac{10\,000}{m}OG \quad \text{soit}$$

$$200 = \frac{10\,000}{m} \times 1$$



$$\text{d'où } m = \frac{10\,000}{200} = 50.$$

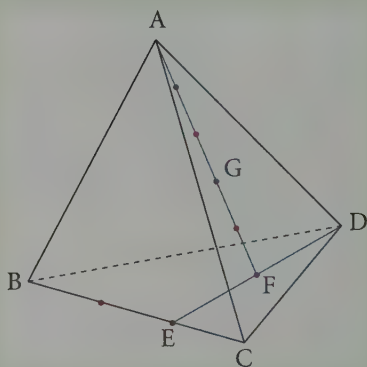
Pour rétablir le centre d'inertie en O, nous devons mettre en A une masse de 50 g.

19 1. $E = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 2)\}$

donc :

$$\vec{BE} = \frac{2}{1+2} \vec{BC}$$

$$\vec{BE} = \frac{2}{3} \vec{BC}.$$



2. $E = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 2), (D, 3)\}$
 $= \text{Bar}\{(E, 3), (D, 3)\}.$

F est donc l'isobarycentre de E et D c'est-à-dire le milieu de [ED].

3. $E = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 2), (D, 3), (A, 4)\}$
 $= \text{Bar}\{(F, 6), (A, 4)\} = \text{Bar}\{(F, 3), (A, 2)\}$ donc :

$$\vec{AG} = \frac{3}{3+2} \vec{AF} = \frac{3}{5} \vec{AF}.$$

On en déduit la position de G sur [AF].

20 1. Nous utilisons le logiciel GEOSPACW.

Lorsque l'on précise « clique » c'est avec le bouton gauche de la souris.

1^{re} étape :

Créer (cliquer)

Point

Point libre

Dans l'espace (cliquer)

Nom des points A, B, C, D (cliquer sur OK)

2^e étape :

Créer (cliquer)

Solide

Polyèdre convexe (cliquer)

Défini par ses sommets (cliquer)

Liste des sommet A, B, C, D

Nom du polyèdre P_1 (cliquer sur OK)**3^e étape :**

Créer (cliquer)

Point

Centre (divers)

Centre de gravité (cliquer)

Nom du polyèdre P_1

Centre de gravité G (cliquer sur OK)

4^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Milieux (cliquer)

Nom du segment AB

Nom du milieu I (cliquer sur OK)

5^e étape :

Icône bis (cliquer)

Nom du segment CD

Nom du milieu J (clique sur OK)

6^e, 7^e, 8^e étapes : identiques à la 5^e étape, remplacer CD successivement par AD, BC, AC, BD et remplacer J remplacer J successivement par K, L, M, N.

9^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Centre (divers)

Centre de gravité (cliquer)

Nom du triangle BCD

Centre de gravité A' (cliquer sur OK)

10^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Segment (cliquer)

Nom du segment IJ, KL, MN, AA' (cliquer sur OK)

Nous remarquons que les segments précédents passent par G.

2. Justification

$$\mathbf{a)} \quad G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$$

$$G = \text{Bar}\{(I, 2), (J, 2)\},$$

donc G est l'isobarycentre de I et J, c'est-à-dire le milieu de [IJ].

En associant (A, 1) et (D, 1) d'une part, (B, 1) et (C, 1) d'autre part :

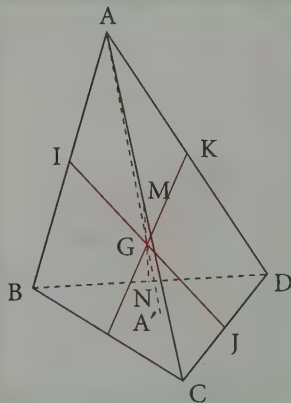
$$G = \text{Bar}\{(K, 2), (L, 2)\},$$

donc G est le milieu de [KL].

En associant (A, 1) et (C, 1) d'une part, (B, 1) et (D, 1) d'autre part :

$$G = \text{Bar}\{(M, 2), (N, 2)\},$$

donc G est le milieu de [MN].



b) En remplaçons (B, 1), (C, 1) et (D, 1) par leur barycentre A' affecté du coefficient 3 :

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (A', 3)\},$$

$$\text{donc } G \in (AA') \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}.$$

En remplaçant (A, 1), (B, 1), (D, 1) par (C', 3) ou (A, 1), (B, 1), (C, 1) par (D', 3) on verra de même que :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}.$$

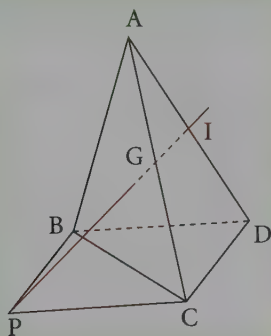
$$21 \quad 1. P = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 1), (D, -1)\}$$

donc :

$$\vec{BP} = \frac{1}{1+1-1}(\vec{1BC} - \vec{BD})$$

$$\vec{BP} = \vec{BC} - \vec{BD} = \vec{DC}$$

donc BDCP est un parallélogramme.



$$2. \text{ a) } P = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 1), (D, -1)\}$$

donc :

$$\vec{IP} = \frac{1}{1+1-1}(\vec{IB} - \vec{IC} - \vec{ID}) = \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID}$$

b) Puisque G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), on peut écrire, en prenant l'origine en I :

$$\vec{IG} = \frac{1}{1+1+1}(\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}) \text{ donc :}$$

$$3\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}$$

Comme I est le milieu [AD], $\vec{IA} = -\vec{ID}$, donc :

$$3\vec{IG} = \vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID}$$

c) Des égalités trouvées en **a)** et **b)** en déduit :

$$\vec{IP} = 3\vec{IG}$$

donc les points P, G, I sont alignés.

22 1. Pour montrer que D, I, F sont alignés, montrons que les vecteurs \vec{FI} et \vec{FD} sont colinéaires.

$I = \text{Bar}\{(E, 1), (G, 1)\}$ donc en prenant l'origine en F :

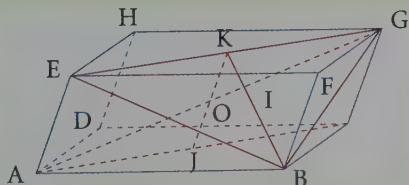
$$\vec{FI} = \frac{1}{1+1+1}(\vec{FB} + \vec{FE} + \vec{FG}) = \frac{1}{3}(\vec{FB} + \vec{FE} + \vec{FG})$$

Or :

$$\vec{FD} = \vec{FB} + \vec{BD}$$

$$= \vec{FB} + \vec{BA} + \vec{AD}$$

$$= \vec{FB} + \vec{FE} + \vec{FG}$$



Donc : $\vec{FI} = \frac{1}{3}\vec{FD}$ et les points D, I, F sont alignés.

2. a) Soit O l'isobarycentre des huit sommets du parallélépipède c'est-à-dire le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 1), (F, 1), (G, 1), (H, 1).

On peut remplacer (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) par leur isobarycentre J centre de la face ABCD affecté du coefficient 4.

On peut remplacer (E, 1), (F, 1), (G, 1), (H, 1) par leur isobarycentre K centre de la face EFGH affecté du coefficient 4.

O = Bar{(J, 4), (K, 4)} donc O est le milieu de [JK].

En associant quatre par quatre les huit sommets du parallélépipède, on verra, de même, que O est le milieu des deux autres segments joignant les centres de deux faces opposées.

b) Montrons que $\vec{OA} + \vec{OG} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OG} &= (\vec{OJ} + \vec{JA}) + (\vec{OK} + \vec{KG}) \\ &= (\vec{OJ} + \vec{OK}) + (\vec{JA} + \vec{KG}).\end{aligned}$$

Or $\vec{OJ} + \vec{OK} = \vec{0}$ puisque O est le milieu de [JK],

$$\vec{JA} + \vec{KG} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{EG} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{EG}) = \vec{0} \text{ puisque}$$

ACGE est un parallélogramme donc :

$$\vec{OA} + \vec{OG} = \vec{0},$$

ce qui montre que O est le milieu de [AG].

On raisonnera, de même, avec les trois autres diagonales du parallélépipède. Il y a donc 7 segments remarquables se coupant en leur milieu O.

23 1. Si G est le centre de gravité des tétraèdres ABCD et A'B'C'D' :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \quad [1]$$

$$\vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'} + \vec{GD'} = \vec{0} \quad [2]$$

En retranchant membre à membre :

$$(\vec{GA'} - \vec{GA}) + (\vec{GB'} - \vec{GB}) + (\vec{GC'} - \vec{GC}) + (\vec{GD'} - \vec{GD}) = \vec{0}$$

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'} = \vec{0} \quad [3]$$

2. Réciproquement si l'on a [3] et, si G est le centre de gravité de ABCD, on a [1]. D'où, en additionnant membre à membre [1] et [3] :

$$\begin{aligned}(\vec{GA} + \vec{AA}') + (\vec{GB} + \vec{BB}') + (\vec{GC} + \vec{CC}') + (\vec{GD} + \vec{DD}') &= \vec{0} \\ \vec{GA}' + \vec{GB}' + \vec{GC}' + \vec{GD}' &= \vec{0}\end{aligned}$$

ce qui montre que G est le centre de gravité de A'B'C'D'.

3. On donne A(1 ; 0 ; -1), B(2 ; 1 ; 4), C(0 ; 0 ; 1), D(0 ; 1 ; 0).

a) On en déduit :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires car $\vec{AB} = k\vec{AC}$ si et seulement

$$\text{si : } \begin{cases} 1 = -k \\ 1 = k \times 0 \text{ ce qui est impossible.} \\ 5 = 2k \end{cases}$$

$\vec{AD} = \lambda\vec{AB} + \lambda'\vec{AC}$ si seulement si :

$$\begin{cases} 1 = \lambda - \lambda' & [1] \\ 1 = \lambda & [2] \\ 1 = 5\lambda + 2\lambda' & [3] \end{cases}$$

D'après [2], $\lambda = 1$ que l'on reporte dans [1]. On trouve $\lambda' = 2$. Mais les valeurs trouvées $\lambda = 1$ et $\lambda' = 2$ ne vérifient pas [3] donc les trois vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} ne sont pas coplanaires. Ils déterminent un tétraèdre ABCD.

b) G est le centre de gravité du tétraèdre ABCD c'est-à-dire l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D donc :

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

Les coordonnées de G sont :

$$\frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 0 + 0) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = \frac{1}{4}(0 + 1 + 0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = \frac{1}{4}(-1 + 4 + 1 + 0) = 1.$$

24 1. a) $G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, -1), (C, 2), (D, 3)\}$.

Prenons l'origine en M :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{1-1+2+3}(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}).$$

On en déduit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{v} &= \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) + 2(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DC}. \text{ qui est bien un vecteur indépendant de M.} \end{aligned}$$

2. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si \overrightarrow{MG} est colinéaire au vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DC}$. Ce dernier vecteur est non nul car $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{DC}$, les droites (AB) et (CD) seraient parallèles ce qui est impossible car A, B, C, D forment un tétraèdre.

L'ensemble des points M tels que \overrightarrow{MG} est colinéaire à \vec{v} est la droite passant par G et de vecteur directeur \vec{v} .

11

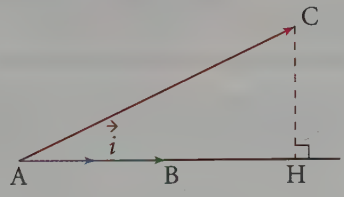
Produit scalaire dans le plan

1 Produit scalaire

• Si $\vec{AB} \neq \vec{0}$ et $\vec{AC} \neq \vec{0}$, on appelle **produit scalaire** des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} du plan le réel noté $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ défini par :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AH$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



• Si $\vec{AB} = \vec{0}$ ou $\vec{AC} = \vec{0}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

Si A, B, C sont distincts, on démontre que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

• Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} du plan et quel que soit λ de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \begin{cases} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{u}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) \end{cases} \\ \begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit (en posant $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ et $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$) :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \end{aligned}$$

2 Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur \vec{u} est sa longueur. On la note $\|\vec{u}\|$.

Si $\vec{u} = \vec{AB}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$.

Si $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que \vec{u} est **vecteur unitaire**.

On démontre que la norme de $\vec{u} = \vec{AB}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{AB}^2}$$

3 Application du produit scalaire à l'orthogonalité

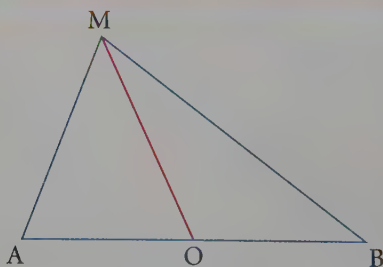
On dit qu'un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ est **orthogonal** à un vecteur $\vec{v} = \vec{AC}$ si l'un au moins de ces deux vecteurs est nul ou si, dans le cas où aucun des deux vecteurs n'est nul, la droite (AB) est orthogonale à la droite (AC).

On remarque que si \vec{u} est orthogonal à \vec{v} , alors \vec{v} est orthogonal à \vec{u} . On dit alors que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

On démontre que :

- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- les droites $d(A ; \vec{u})$ et $d'(A' ; \vec{u}')$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0$.

4 Théorème de la médiane



Soit deux points donnés A et B.
Soit O le milieu de [AB]. Quel que soit le point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

5 Calculs dans un repère orthogonal

- Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs quelconques

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- La distance des points $A(a; a')$ et $B(b; b')$ est :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b-a)^2 + (b'-a')^2}$$

- Le cercle de centre $A(a; a')$ et de rayon R est l'ensemble des point $M(x; y)$ tel que $AM = R$, c'est-à-dire $AM^2 = R^2$ soit :

$$(x-a)^2 + (y-a')^2 = R^2$$

- Soit une droite \mathcal{D} d'équation $ax + by + c = 0$, $(a; b) \neq (0; 0)$.

Un vecteur **directeur** de \mathcal{D} est $\vec{u}(-b; a)$.

Un vecteur **normal** à \mathcal{D} (c'est-à-dire orthogonal à \mathcal{D}) est $\vec{n}(a; b)$.

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** ABC est un triangle équilatéral, de centre de gravité G. A', B', C', sont les milieux de [BC], [CA], [AB]. On pose $AB = a$.

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{4}$ V F

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ V F

c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$ V F

d) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2}{2}$ V F

e) $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = -\frac{a^2}{6}$ V F

f) $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = -\frac{3a^2}{8}$ V F

→ Corrigé p. 305

- 2** ABC est un triangle quelconque A', B', C', sont les milieux de [BC], [CA], [AB]. soit E l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}AB^2$, E est la perpendiculaire de C à (AB). V F

b) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}AB^2$, E est la médiatrice de [AB]. V F

c) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} \leq 0$, E est une demi-droite. V F

d) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} \leq 0$, E est un demi-plan. V F

e) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AM} \cdot \vec{AC}$, E est la perpendiculaire de A à (BC). V F

f) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AM} \cdot \vec{AC}$, E est la perpendiculaire de B à (BC). V F

g) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} + \vec{AM} \cdot \vec{AC} = 0$, E est la perpendiculaire de A à (AA'). V F

h) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} + \vec{AM} \cdot \vec{AC} = 0$, E est la perpendiculaire de A' à (AA'). V F

→ Corrigé p. 305

3 \vec{u} et \vec{v} sont non nuls.

a) On a $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \times \vec{v}^2$.

V F

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \times \vec{v}^2$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

V F

→ Corrigé p. 305

4 ABCD est un rectangle. $AB = a$, $BC = b$. soit O le centre du rectangle, M un point du plan.

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4OM^2 + a^2 + b^2$.

V F

b) L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$ est un cercle (\mathcal{C})

si $k \geq a^2 + b^2$.

V F

c) (\mathcal{C}) passe par A, B, C, D si $k = a^2 + b^2$.

V F

d) (\mathcal{C}) passe par A, B, C, D si $k = 2a^2 + 2b^2$.

V F

→ Corrigé p. 305

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Propriétés du produit scalaire

5 On donne un triangle équilatéral ABC de côté a . On appelle A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Calculer en fonction de a :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}; \vec{AB} \cdot \vec{AA}'; \vec{AB} \cdot \vec{BC}; \vec{GA} \cdot \vec{GB}; \vec{AA}' \cdot \vec{BB}'; \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$$

→ Corrigé p. 305

6 On donne un carré ABCD. On construit à l'extérieur du carré un triangle équilatéral CDE. Soit a la longueur des côtés du carré et du triangle équilatéral.

1. En utilisant l'égalité $\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA}$, calculer le produit scalaire $\vec{CA} \cdot \vec{CE}$ en fonction de a .

2. En déduire $\cos(105^\circ)$.

→ Corrigé p. 305

7 Calculer : $S = 2(2\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - 2\vec{v})^2 - (3\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} - \vec{v}) - 7\vec{v}^2$.

Démontrer que $S = 0$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

→ Corrigé p. 306

8 Démontrer que $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux. ➔ Corrigé p. 306

9 1. Démontrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

2. Soit un triangle ABC. En prenant $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, quel théorème obtient-on ? ➔ Corrigé p. 306

10 1. Démontrer que, quels que soient \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

En déduire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

2. Soit un parallélogramme ABCD. En prenant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, en déduire qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur. ➔ Corrigé p. 307

11 1. Démontrer que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.

2. Soit un parallélogramme ABCD. En prenant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, en déduire qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si les diagonales sont perpendiculaires. ➔ Corrigé p. 307

12 1. Démontrer que, quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

2. Soit un triangle ABC et A' le milieu de [BC].

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sachant que : AB = 2 ; AC = 4 ; AA' = 3.

➔ Corrigé p. 307

13 On donne $\vec{u} \neq \vec{0}$ et un point A du plan \mathcal{P} .

1. Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ (k constante donnée).

2. On suppose $\|\vec{u}\| = 2$.

Construire l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \leq 0$;

b) $2 \leq \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \leq 4$.

➔ Corrigé p. 308

Théorème de la médiane

- 14** On donne deux points A et B. On pose $AB = a$.

Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 5a^2.$$

Construire cet ensemble.

→ Corrigé p. 309

- 15** Soit un triangle ABC. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Calculer les longueurs des médianes en fonction de a , b , c .

2. Démontrer qu'un triangle dans lequel les médianes ont même longueur est un triangle équilatéral.

→ Corrigé p. 309

- 16** On donne un cercle de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par E et F les milieux respectifs de [OA] et [OB], par M un point quelconque du cercle et par H le projeté orthogonal de M sur (AB). On pose :

$$AB = 4; \quad EM = x; \quad FM = y.$$

1. Montrer que, quel que soit le point M du cercle, l'expression $x^2 + y^2$ est constante.

2. Calculer x et y tels que $x + y = \frac{17}{4}$.

3. Où doit être le point M sur le cercle pour que $HM = \sqrt{3}$? → Corrigé p. 310

- 17** Soit un rectangle ABCD tel que $AB = 4$ et $BC = 3$. On appelle O le centre du rectangle. Trouver et construire l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

1. $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 50$;

2. $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 34$.

→ Corrigé p. 311

Ensembles de points

- 18** Soit un triangle équilatéral ABC. La longueur des côtés est a . En faisant intervenir le centre de gravité G du triangle, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

Construire cet ensemble.

→ Corrigé p. 312

- 19 1. On donne deux points distincts A et B.

Soit O le milieu de [AB] et M un point quelconque du plan. On appelle H le projeté orthogonal de M sur (AB).

Démontrer l'égalité :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB} \times \overline{OH}.$$

2. On pose $AB = a$. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 - MB^2 = 3a^2. \quad \rightarrow \text{Corrigé p. 313}$$

- 20 On appelle **puissance du point M par rapport au cercle** \mathcal{C} de centre O et de rayon R le nombre $OM^2 - R^2$. On donne un deuxième cercle \mathcal{C}' de centre O' ($O' \neq O$) et de rayon R'. Quel est l'ensemble des points M ayant même puissance par rapport aux deux cercles ?

| **Indication** : on utilisera l'égalité donnée dans l'exercice précédent (question 1).

\rightarrow Corrigé p. 314

- 21 Soit un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

1. a) Démontrer que $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant du point M du plan.

b) Soit D le point tel que $\overrightarrow{CD} = f(M)$ et C' le milieu de [AB].

Montrer que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CC'}$.

2. Soit E l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0.$$

a) Montrer que O appartient à l'ensemble E.

b) Montrer que, pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

c) En déduire l'ensemble E.

\rightarrow Corrigé p. 314

- 22 ★ Soit A et B deux points distincts. On appelle **ligne de niveau k** ($k > 0$ donné), de la fonction $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$ l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

1. Si $k = 1$, quelle est la ligne de niveau 1 de la fonction f ?

2. On suppose $k \neq 1$. On peut écrire pour tout point M du plan, $\frac{MA}{MB} = k$ si et seulement si :


$$\begin{aligned} MA^2 - k^2 MB^2 &= 0 \\ (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) &= 0. \end{aligned}$$

Déterminer les lignes du niveau k de la fonction f en faisant intervenir :

I le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) ;

J le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$.

3. Application

Construire les lignes de niveau pour $k = 1$, $k = 2$, $k = \frac{1}{3}$.  Corrigé p. 315

Norme d'un vecteur

23 ★ Soit un triangle ABC rectangle en A. On suppose $AB = 3$ et $AC = 4$.

1. Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AC}\|.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 3\vec{MC}\|. \quad \text{img alt="arrow icon" data-bbox="760 455 785 475"/> \text{Corrigé p. 317}$$

24 ★ 1. Soit un triangle ABC et M un point quelconque du plan. Que peut-on dire de la norme :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\|$$

lorsque M décrit le plan ?

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|. \quad \text{img alt="arrow icon" data-bbox="760 660 785 680"/> \text{Corrigé p. 318}$$

Coordonnées dans un repère orthonormal

Pour les exercices **25** à **31**, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

25 On donne $A(1; 1)$ et $B(3; 0)$.

Déterminer une équation de :

1. la médiatrice de $[AB]$;

2. la perpendiculaire en A à la droite (AB).

 Corrigé p. 319

- 26** ★ 1. Soit A, B, C, D quatre points du plan.

Démontrer que : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.

2. En remplaçant D par le point H d'intersection des hauteurs issue de A et B d'un triangle ABC, en déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes (on supposera que ABC n'est pas un triangle rectangle).

3. On donne A(1 ; 0), B(3 ; 0), C(0 ; 4).

Déterminer des équations des hauteurs du triangle ABC.

Vérifier qu'elles sont concourantes.

→ Corrigé p. 319

- 27** ★ 1. Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des points M(x ; y) tels que :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Construire cet ensemble.

2. Donner une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point O (O est l'origine du repère (O ; \vec{i} , \vec{j})).

→ Corrigé p. 320

- 28** ★ Discuter, suivant les valeurs du réel m, la nature de l'ensemble E des points M(x ; y) tels que :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - m^2 + 4m + 5 = 0.$$

→ Corrigé p. 321

- 29** ★ 1. On donne deux points A et B, soit I le milieu de [AB].

Démontrer que pour tout point M du plan :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2.$$

2. On suppose AB = 4. Trouver l'ensemble E des points M tels que :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \quad (k \text{ constante donnée}).$$

3. a) Quel est l'ensemble obtenu pour $k = 0$?

b) On donne A(1 ; -1) et B(2 ; 3). Donner une équation du cercle de diamètre [AB].

→ Corrigé p. 321

- 30** ★ On donne A(0 ; -2), B(1 ; -1), C(-2 ; -1).

1. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle ABC.

2. Donner les coordonnées du centre de \mathcal{C} et son rayon.

→ Corrigé p. 322

- 31** ★ 1. Construire le cercle \mathcal{C} de centre C(0 ; 3) et tangent à la droite \mathcal{D} d'équation $x + y + 1 = 0$.

2. Déterminer une équation de \mathcal{C} .

→ Corrigé p. 323

32 ★ On donne deux points A et B tels que $AB = 3$.

1. Déterminer le barycentre G de (A, 1) et (B, 2).

2. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6.$$

3. Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 = 9.$$

4. On choisit un repère orthonormal de manière que A soit l'origine du repère et B ait pour coordonnées (3 ; 0). Retrouver analytiquement l'ensemble de la question précédente.

→ Corrigé p. 324

33 ★ On donne un triangle isocèle ABC tel que :

$$AB = AC = \sqrt{5} \text{ et } BC = 2.$$

1. Déterminer le barycentre G de (A, 2), (B, 1), (C, 1).

2. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 6.$$

3. Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 11.$$

On choisit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de manière que O soit le milieu de [BC] et $\vec{OC} = \vec{i}$.

Retrouver analytiquement l'ensemble de la question précédente.

→ Corrigé p. 325

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) Faux. On applique la définition du produit scalaire dans tout l'exercice.
 b) Vrai.
 c) Faux.
 d) Vrai.

e) Vrai. Rappelons que $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \overline{GA} \times \overline{GA'} = -\frac{2a\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

f) Faux.

- 2** a) Faux. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), H est en C'.
 b) Vrai.
 c) Faux. E est le demi-plan (frontière incluse) limité par la perpendiculaire en A à (AB) et ne contenant pas C'.
 d) Vrai.

e) Vrai. $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{CB} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM}$ et \vec{CB} orthogonaux.

f) Faux.

g) Vrai. $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (2\vec{AA}') = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}$

$\Leftrightarrow \vec{AM}$ et \vec{AA}' orthogonaux.

h) Faux.

- 3** a) Faux. Si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux et non nuls, $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 0$ mais $\vec{u}^2 \times \vec{v}^2 \neq 0$.

b) Vrai. $\vec{u}^2 \times \vec{v}^2 \cos^2(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^2 \times \vec{v}^2$ si et seulement si $|\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1$.

- 4** a) Vrai. $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (MA^2 + MC^2) + (MB^2 + MD^2)$
 $= 2OM^2 + \frac{AC^2}{2} + 2OM^2 + \frac{DB^2}{2}$.

b) Vrai. Cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{k - (a^2 + b^2)}$ si $k \geq a^2 + b^2$.

c) Faux. Le rayon est $OA = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k - (a^2 + b^2)}$

pour $k = 2a^2 + 2b^2$.

d) Vrai.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \overline{AB} \times \overline{AC'} = a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} \\ &= a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AA'} = \overline{AA'} \times \overline{AA'} = \overline{AA'}^2.$$

On sait que dans un triangle équilatéral de côté a , chaque hauteur a pour longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ donc :

$$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ et } \vec{AB} \cdot \vec{AA'} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \overline{AB} \times \overline{BC'} \text{ [en projetant C en C' sur (AB)]}$$

$$= -\left(a \times \frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}.$$

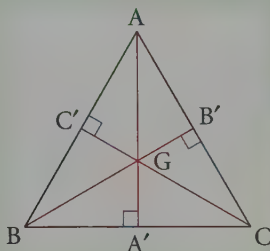
$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \overline{GA} \times \overline{GA'} \text{ [en projetant B en A' sur (GA)]}$$

$$= -\frac{2a\sqrt{3}}{3} \times \frac{1a\sqrt{3}}{3} = -\frac{a^2}{6}.$$

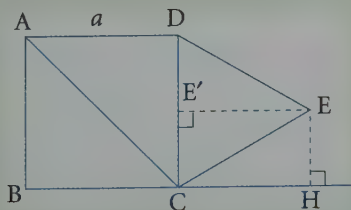
$$\vec{AA'} \cdot \vec{BB'} = \left(-\frac{3}{2}\vec{GA}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\vec{GB}\right) = \frac{9}{4}\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{9}{4}\left(-\frac{a^2}{6}\right) = -\frac{3a^2}{8}.$$

$$\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = \left(\frac{1}{2}\vec{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{CA}\right) = \frac{1}{4}\vec{BA} \cdot \vec{CA} = \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{AC}).$$

$$\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = \frac{1a^2}{4 \times 2} = \frac{a^2}{8} \text{ car } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}.$$



6 1.



$$\vec{CA} \cdot \vec{CE} = (\vec{CD} + \vec{DA}) \cdot \vec{CE} = \vec{CD} \cdot \vec{CE} + \vec{DA} \cdot \vec{CE}$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{CE} = CD \times CE \times \cos \widehat{DCE} = a \times a \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\vec{DA} \cdot \vec{CE} &= \vec{CB} \cdot \vec{CE} = \vec{CB} \times \vec{CH} \quad [\text{H projeté orthogonal de E sur (BC)}] \\ &= \vec{CB} \times \vec{E'E} \quad [\text{E' projeté orthogonal de E sur (CD)}] \\ &= -a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{CA} \cdot \vec{CE} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

$$2. \vec{CA} \cdot \vec{CE} = CA \times CE \times \cos \widehat{ACE}$$

$$CA = a\sqrt{2}; CE = a \text{ et :}$$

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ.$$

$$\text{On a vu à la question précédente que } \vec{CA} \cdot \vec{CE} = \frac{a^2}{2}(1 - \sqrt{3}) \text{ donc :}$$

$$\frac{a^2}{2}(1 - \sqrt{3}) = a\sqrt{2} \times a \times \cos(105^\circ).$$

$$\text{D'où } \cos(105^\circ) = \frac{\frac{a^2}{2}(1 - \sqrt{3})}{a^2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

$$7. S = 2(4\vec{u}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2) + \vec{u}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\vec{v}^2 - (9\vec{u}^2 - \vec{v}^2) - 7\vec{v}^2$$

$$S = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$S = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux.}$$

Remarque : Le **symbole** \Leftrightarrow signifie « si et seulement si » ou « équivalent à ».

$$\begin{aligned}8. \quad \|\vec{2u} + 3\vec{v}\| &= \|\vec{2u} - 3\vec{v}\| \Leftrightarrow (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = (2\vec{u} - 3\vec{v})^2 \\ &\Leftrightarrow 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\vec{u}^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 \\ &\Leftrightarrow 24\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9. \quad 1. \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux.}\end{aligned}$$

2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$ donc :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si \vec{AB} et \vec{AC} sont orthogonaux.

On retrouve le théorème de Pythagore et sa réciproque.

$$\begin{aligned} 10 \quad 1. \quad \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) &= \frac{1}{4}[(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2] \\ &= \frac{1}{4}(\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 - \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

2. Un parallélogramme ABCD est un rectangle si et seulement si \vec{AB} et \vec{BC} sont orthogonaux, c'est-à-dire, en prenant $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$:

$$\|\vec{AB} + \vec{BC}\| = \|\vec{AB} - \vec{BC}\|$$

$$\|\vec{AC}\| = \|\vec{DB}\|.$$

Les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur.

$$\begin{aligned} 11 \quad 1. \quad \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| &\Leftrightarrow \vec{u}^2 = \vec{v}^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} \text{ et } \vec{u} - \vec{v} \text{ sont orthogonaux.} \end{aligned}$$

2. Un parallélogramme ABCD est un losange si et seulement si $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\|$ c'est-à-dire, en prenant $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \text{ et } \vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB} \text{ orthogonaux.}$$

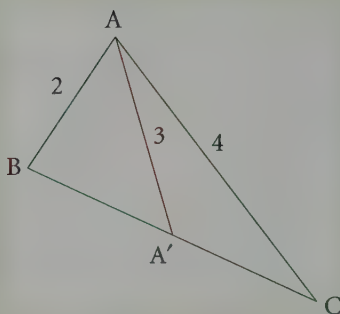
12 1. Quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

D'où la relation cherchée :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2). \quad [1]$$

2.



Appliquons la relation [1] trouvée à la 1^{re} question en prenant :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{AC} \\ \vec{u} + \vec{v} &= \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AA}'.\end{aligned}$$

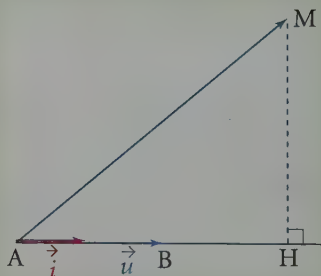
La relation [1] devient :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(4AA'^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(4 \times 9 - 4 - 16) = 8.$$

- 13** 1. Menons $\vec{AB} = \vec{u}$. Soit M un point quelconque du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB), la droite (AB) étant munie d'un

repère (A ; \vec{i}), $\|\vec{i}\| = 1$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{AM} &= k \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AM} = k \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{AH} = k \\ &\Leftrightarrow \vec{AH} = \frac{k}{\vec{AB}} \quad [1]\end{aligned}$$



L'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$ est la droite perpendiculaire à (AB) au point H défini par [1].

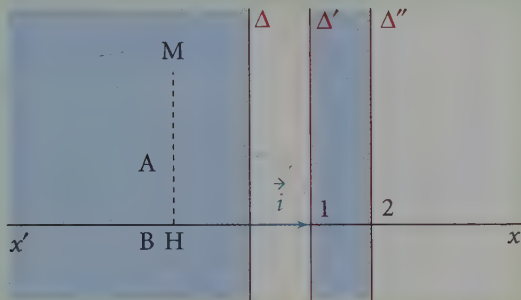
2. a) On suppose $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = 2$. Choisissons le repère (A ; \vec{i}) de manière que $\vec{AB} = 2\vec{i}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{AM} \leq 0 &\Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{AH} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\vec{AH} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{AH} \leq 0.\end{aligned}$$

Considérons sur la droite (AB) les demi-droites (Ax') et (Ax) ensembles des points d'abscisses respectivement négatives et positives. Soit Δ la perpendiculaire en A à (AB). L'ensemble des points H est la demi-droite (Ax') et l'ensemble des points M est le demi-plan (Δ , Ax'), en bleu, frontière Δ incluse.

$$\text{b) } 2 \leq \vec{u} \cdot \vec{AM} \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq \overline{AB} \times \overline{AH} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq \overline{AH} \leq 2.$$

L'ensemble des points M est la bande, en bleu, limitée par les droites Δ' et Δ'' (frontières incluses) perpendiculaires à (AB) aux points d'abscisses respectives 1 et 2.



- 14** 1. Soit O le milieu de [AB]. D'après le théorème de la médiane (cf. résumé de cours), quel que soit le point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 = 2OM^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

On a $MA^2 + MB^2 = 5a^2$ si et seulement si l'on a successivement :

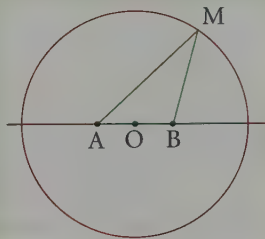
$$2OM^2 + \frac{AB^2}{2} = 5a^2$$

$$2OM^2 + \frac{a^2}{2} = 5a^2$$

$$OM^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$OM = \frac{3a}{2}.$$

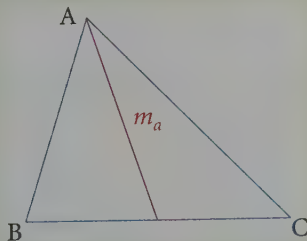
L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon $\frac{3}{2}a$.



- 15** 1. Appelons m_a, m_b, m_c les longueurs des médianes issues respectivement de A, B, C. D'après le théorème de la médiane :

$$AB^2 + AC^2 = 2m_a^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$



d'où :

$$2m_a^2 = c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \text{ De même :}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \text{ et } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

2. Si les médianes ont même longueur :

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \quad [1]$$

De la première égalité de [1] on déduit :

$$2b^2 - a^2 = 2a^2 - b^2$$

$$3b^2 = 3a^2$$

$$b = a.$$

De la deuxième égalité de [1] on déduit :

$$2c^2 - b^2 = 2b^2 - c^2$$

$$3c^2 = 3b^2$$

$$c = b.$$

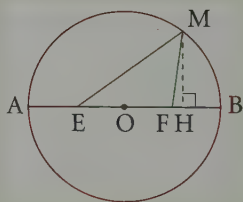
Donc $a = b = c$, le triangle ABC est équilatéral.

16 1. Puisque $AB = 4$ et puisque E et F sont les milieux respectifs de [OA] et [OB] :

$$OM = OA = OB = 2 \text{ et } EF = 2.$$

Appliquons le théorème de la médiane au triangle MEF :

$$x^2 + y^2 = 2OM^2 + \frac{EF^2}{2} = 2 \times 2^2 + \frac{2^2}{2} = 10.$$



$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = \frac{17}{4} \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x^2 + \left(\frac{17}{4} - x\right)^2 = 10 \\ y = \frac{17}{4} - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{289}{16} - \frac{17}{2}x - x^2 = 10 \\ y = \frac{17}{4} - x \end{cases} \begin{cases} x^2 - \frac{17}{4}x + \frac{129}{32} = 0 \quad [1] \\ y = \frac{17}{4} - x \end{cases}$$

Les racines de [1] sont $\frac{17 - \sqrt{31}}{8}$ et $\frac{17 + \sqrt{31}}{8}$.

$$\text{Si } x = \frac{17 - \sqrt{31}}{8}, \text{ alors } y = \frac{17}{4} - \frac{17 - \sqrt{31}}{8} = \frac{17 + \sqrt{31}}{8};$$

$$\text{Si } x = \frac{17 + \sqrt{31}}{8}, \text{ alors } y = \frac{17}{4} - \frac{17 + \sqrt{31}}{8} = \frac{17 - \sqrt{31}}{8}.$$

Les solutions du système sont :

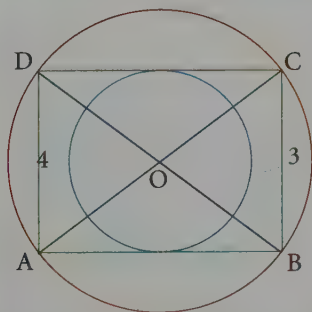
$$\left(\frac{17 - \sqrt{31}}{8}; \frac{17 + \sqrt{31}}{8} \right) \text{ et } \left(\frac{17 + \sqrt{31}}{8}; \frac{17 - \sqrt{31}}{8} \right).$$

3. Calculons OH dans le triangle rectangle OHM :

$$OH^2 = OM^2 - HM^2 = 4 - 3 = 1$$

donc $OH = 1$. Le point H est en E ou F. Il y a 4 points M sur le cercle se projetant orthogonalement en E ou F sur la droite (AB).

17 1. Pour tout point M du plan :



$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (MA^2 + MC^2) + (MB^2 + MD^2) \\ &= \left(2OM^2 + \frac{AC^2}{2} \right) + \left(2OM^2 + \frac{BD^2}{2} \right) \\ &= 4OM^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} \\ &= 4OM^2 + AC^2 = 4OM^2 + 4^2 + 3^2 \\ &= 4OM^2 + 25. \end{aligned}$$

On a $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 50$ si et seulement si :

$$4OM^2 + 25 = 50$$

$$4OM^2 = 25$$

$$OM^2 = \frac{25}{4}$$

$$OM = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon $\frac{5}{2}$. Puisque $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{5}{2}$, ce cercle passe par les quatre sommets A, B, C, D du rectangle.

2. On a $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 34$ si et seulement si :

$$4OM^2 + 25 = 34, \text{ soit } OM^2 = \frac{9}{4}$$

$$OM = \frac{3}{2}.$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon $\frac{3}{2}$. Il est tangent aux côtés [AB] et [CD] du rectangle.

18 Soit G le centre de gravité du triangle équilatéral ABC. Cherchons à transformer $MA^2 + MB^2 + MC^2$ en introduisant G comme le propose l'énoncé.

M étant un point quelconque du plan :

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 + MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} \\ &\quad + GB^2 + MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + GC^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

G est le centre de gravité du triangle ABC donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ et } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Calculons $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3GA^2$ en fonction de a.

Soit A' le milieu de [BC].

$$GA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc : } GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

$$\text{d'où : } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2.$$

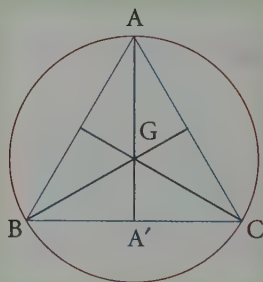
On a $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$ si et seulement si :

$$3MG^2 + a^2 = 2a^2$$

$$3MG^2 = a^2$$

$$MG^2 = \frac{a^2}{3}$$

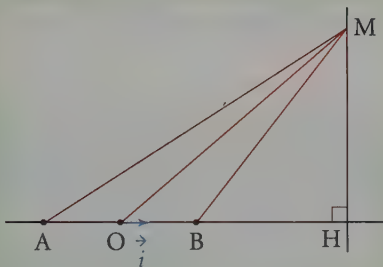
$$MG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Puisque $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ce cercle passe par A, B, et C.

19 1. Pour tout point M du plan :



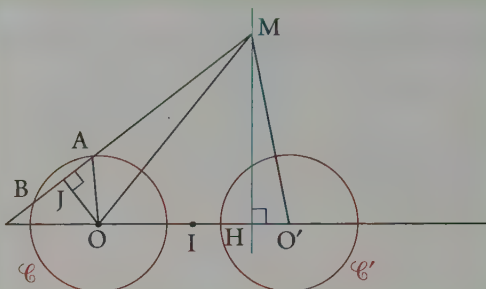
$$\begin{aligned}
 MA^2 - MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 \\
 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\
 &= MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2 - MO^2 - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} - OB^2 \\
 &= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\
 &= 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA} \\
 &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} \\
 &= 2\overline{AB} \times \overline{OH}.
 \end{aligned}$$

2. $MA^2 - MB^2 = 3a^2$ si et seulement si :

$$2\overline{AB} \times \overline{OH} = 3a^2, \text{ soit } \overline{OH} = \frac{3a^2}{2\overline{AB}}.$$

Supposons (AB) munie d'un repère $(O; \vec{i})$, $\|\vec{i}\| = 1$, de manière que $\overline{AB} = a$, alors $\overline{OH} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$.

L'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 3a^2$ est la droite perpendiculaire à (AB) au point H d'abscisse $\frac{3a}{2}$.



Soit M un point quelconque du plan, H son projeté orthogonal sur la droite (OO') . Appelons I le milieu de $[OO']$. M a même puissance par rapport aux deux cercles si et seulement si :

$$OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2$$

$$OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2.$$

$2\overline{OO'} \times \overline{IH} = R^2 - R'^2$ (d'après la question 1. de l'ex. précédent)

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}. \quad [1]$$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (OO') au point H défini par [1].

Remarques :

1. Un tel ensemble est appelé **axe radical** des deux cercles.

2. Soit (MAB) une sécante au cercle \mathcal{C} et J le milieu de $[AB]$:

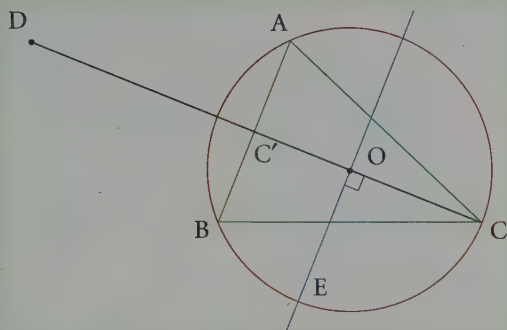
$$\begin{aligned} \overline{MA} \times \overline{MB} &= (\overline{MJ} + \overline{JA}) \times (\overline{MJ} + \overline{JB}) \\ &= (\overline{MJ} + \overline{JA}) \times (\overline{MJ} - \overline{JA}) = MJ^2 - JA^2 \\ &= MJ^2 - (OA^2 - OJ^2) = (MJ^2 + OJ^2) - OA^2 \\ &= OM^2 - R^2. \end{aligned}$$

Quelle que soit la sécante (MAB) , le produit $\overline{MA} \times \overline{MB}$ est constant, égal à $OM^2 - R^2$ qui est la puissance de M par rapport au cercle \mathcal{C} .

21 1. a) En introduisant A par exemple :

$$f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ est bien indépendant de M .



b) Soit D le point tel que $\vec{CD} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{CD} &= (\vec{AB} - \vec{AC}) - \vec{AC} = (\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{CA} \\ &= \vec{CB} + \vec{CA} = 2\vec{CC'}, \text{ en appelant } C' \text{ le milieu de } [AB].\end{aligned}$$

2. a) $OA = OB = OC$ donc $OA^2 + OB^2 - 2OC^2 = 0$,
ce qui montre que $O \in E$.

b) En introduisant O :

$$\begin{aligned}MA^2 + MB^2 - 2MC^2 &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 - 2(\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OC^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{OA} + 2\vec{MO} \cdot \vec{OB} - 4\vec{MO} \cdot \vec{OC} \\ &= 2\vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) \\ &= 2\vec{MO} \cdot \vec{f}(O) \\ &= 2\vec{MO} \cdot \vec{CD} \text{ [puisque } f(O) = f(M) = \vec{CD}\text{]}.\end{aligned}$$

c) $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$ si et seulement si $2\vec{MO} \cdot \vec{CD} = 0$ c'est-à-dire
 \vec{OM} orthogonal à \vec{CD} .

\mathcal{E} est la droite passant par O et orthogonale à (CD).

22 1. $\frac{MA}{MB} = k$ [1]

Si $k = 1$, la ligne de niveau 1 est l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.
C'est la médiatrice de [AB].

2. Si $k > 0$ et $k \neq 1$, montrons que, pour tout point M du plan :
[1] $\Leftrightarrow MA = kMB$ [2]

• Si on a [1], $\frac{MA}{MB}$ étant défini et égal à k, on a $MB \neq 0$.

Donc, en multipliant les deux membres de [1] par $MB \neq 0$, on a [2].

• Réciproquement, si on a [2], MB ne peut pas être nul car, si on avait $MB = 0$, M serait en B, on aurait $MA = k \times 0 = 0$ donc M serait aussi en A, ce qui est impossible puisque A et B sont distincts. Donc, en divisant les deux membres de [2] par $MB \neq 0$, on a [1].

Pour tout point M du plan, on peut donc écrire :

$$[1] \Leftrightarrow MA = kMB$$

$$MA^2 = k^2 MB^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0$$

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

Soit I le barycentre de (A, 1) et (B, k) qui existe, car $k > 0$. En prenant l'origine en M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{1+k}(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \text{ donc } \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1+k)\overrightarrow{MI}.$$

Soit J le barycentre de (A, 1) et (B, -k) qui existe, car $k \neq 1$.

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \text{ donc } \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1-k)\overrightarrow{MJ}.$$

On a alors pour tout point M du plan :

$$[1] \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{MI} \cdot (1-k)\overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \text{ et } \overrightarrow{MJ} \text{ orthogonaux.}$$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [IJ].

3. On a construit page suivante les lignes de niveau demandées.

• Si $k = 1$, c'est la médiatrice de [AB].

• Si $k = 2$:

- soit I le barycentre de (A, 1) et (B, 2) :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}, \text{ soit } \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB};$$

- soit J le barycentre de (A, 1) et (B, -2) :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{-2}{1-2}\overrightarrow{AB}, \text{ soit } \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB};$$

la ligne de niveau 2 est le cercle de diamètre [IJ].

• Si $k = \frac{1}{3}$:

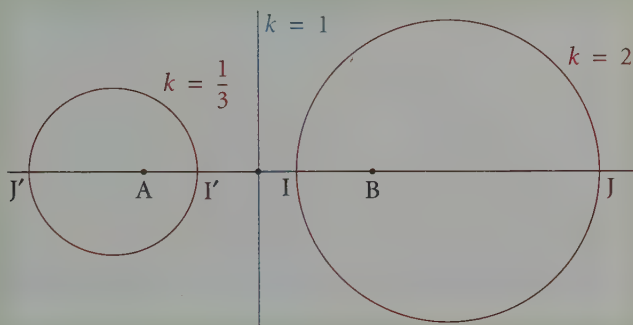
- soit I' le barycentre de (A, 1) et $(B, \frac{1}{3})$:

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{AB}, \text{ soit } \overrightarrow{AI'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB};$$

– soit J' le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -\frac{1}{3})$:

$$\vec{AJ}' = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \vec{AB}, \text{ soit } \vec{AJ}' = -\frac{1}{2} \vec{AB};$$

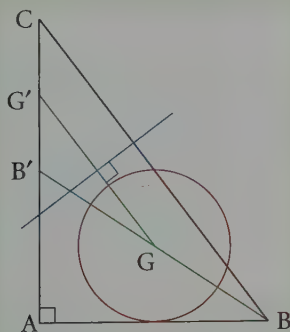
la ligne de niveau $\frac{1}{3}$ est le cercle de diamètre $[I'J']$.



- 23** 1. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$.
Il est commode de remplacer $(A, 1)$ et $(C, 1)$ par leur barycentre B' milieu de $[AC]$ affecté du coefficient 2 :

$$G = \text{Bar}\{(B', 2), (B, 2)\}$$

donc G est l'isobarycentre de B et B' c'est-à-dire le milieu de $[BB']$.



2. G étant le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$,

$$\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} &= (\vec{MG} + \vec{GA}) + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) \\ &= 4\vec{MG} + \vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = 4\vec{MG}. \end{aligned}$$

On a $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AC}\|$ si et seulement si :

$$\|\vec{4MG}\| = \|\vec{AC}\|$$

$MG = \frac{AC}{4}$ donc $MG = 1$ (puisque $AC = 4$).

L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 1.

3. Pour chercher l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 3\vec{MC}\|, \quad [1]$$

remplaçons $\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}$ par $4\vec{MG}$ et transformons, de même,

$\vec{MA} + 3\vec{MC}$ en introduisant le barycentre G' de $(A, 1)$, $(C, 3)$:

$\vec{AG}' = \frac{3}{1+3}\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AC}$ ce qui permet de placer G' sur le segment $[AC]$.

On peut alors écrire pour tout point M du plan :

$$\vec{MA} + 3\vec{MC} = (\vec{MG}' + \vec{G}'A) + 3(\vec{MG}' + \vec{G}'C)$$

$$\vec{MA} + 3\vec{MC} = 4\vec{MG}' + \vec{G}'A + 3\vec{G}'C$$

$$\vec{MA} + 3\vec{MC} = 4\vec{MG}' \quad (\text{puisque } \vec{G}'A + 3\vec{G}'C = \vec{0}).$$

Donc l'égalité [1] est vérifiée si et seulement si :

$$\|\vec{4MG}\| = \|\vec{4MG}'\|$$

$$MG = MG'.$$

L'ensemble des points M est la médiatrice de $[GG']$.

24 1. On ne peut plus introduire, comme nous l'avons fait précédemment, le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$ car ce barycentre n'existe pas puisque $1 + 2 - 3 = 0$. Étudions la somme $\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$ en introduisant l'un des sommets du triangle ABC, par exemple A :

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{MA} + 2(\vec{MA} + \vec{AB}) - 3(\vec{MA} + \vec{AC}) = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}.$$

Lorsque M décrit le plan, la norme : $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\|$ est constante et égale à $\|2\vec{AB} - 3\vec{AC}\|$.

2. Pour chercher l'ensemble des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|, \quad [1]$$

transformons $\vec{MA} + 2\vec{MB}$ en introduisant le barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$ qui existe car $1 + 2 = 3 \neq 0$.

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GA} + 2(\vec{MG} + \vec{GB}) = 3\vec{MG}.$$

L'égalité [1] est vérifiée si et seulement si (en tenant compte du résultat de la question 1.) :

$$\|2\vec{AB} - 3\vec{AC}\| = \|3\vec{MG}\|, \text{ d'où } \|\vec{MG}\| = \frac{1}{3}\|2\vec{AB} - 3\vec{AC}\|.$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}\|2\vec{AB} - 3\vec{AC}\|$.

- 25** 1. $M(x; y)$ appartient à la médiatrice Δ de $[AB]$ si et seulement si :

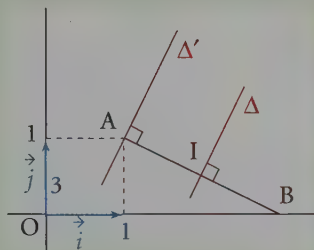
$$MA = MB$$

$$MA^2 = MB^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$4x - 2y - 7 = 0.$$



Remarque : Autre méthode : $M(x; y)$ appartient à Δ si et seulement si, en appelant I le milieu de $[AB]$, \vec{IM} est orthogonal à \vec{AB} . Les coordonnées de I sont :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ et } \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\vec{IM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$2(x-2) - \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2x - y - \frac{7}{2} = 0$$

$$4x - 2y - 7 = 0.$$

On retrouve la même équation de Δ .

- 2.** $M(x; y)$ appartient à la perpendiculaire en A à (AB) si et seulement si

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, soit :

$$2(x-1) - (y-1) = 0, \text{ soit aussi } 2x - y - 1 = 0.$$

- 26** 1. Posons $S = \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC}$.

On peut écrire par exemple :

$$S = \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$S = \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AC}$$

$$S = \vec{AB} \cdot (\vec{CD} - \vec{AD}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AD} + \vec{DB})$$

$$S = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

Donc, quels que soient les points A, B, C, D du plan, on a :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0. \quad [1]$$

2. Considérons un triangle ABC non rectangle.

Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B du triangle ABC.

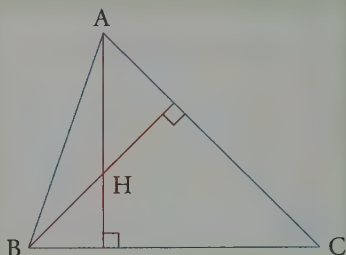
On a : $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ et $\vec{AC} \cdot \vec{HB} = 0$.

Si l'on fait $D = H$ dans [1]

on déduit $\vec{AB} \cdot \vec{CH} = 0$,

donc AB et CH sont orthogonaux.

Ce qui montre que la hauteur issue de C est (CH).



3. Appelons h_A, h_B, h_C les hauteurs issues respectivement de A, B, C.

$M(x; y)$ appartient à h_A si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$(x-1)(-3) + 4y = 0$$

$$-3x + 4y + 3 = 0.$$

$M(x; y)$ appartient à h_B si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

$$\vec{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux}$$

$$\vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$(x-3)(-1) + 4y = 0$$

$$-x + 4y + 3 = 0.$$

La droite h_C est la droite $(O; \vec{j})$ d'équation cartésienne $x = 0$.

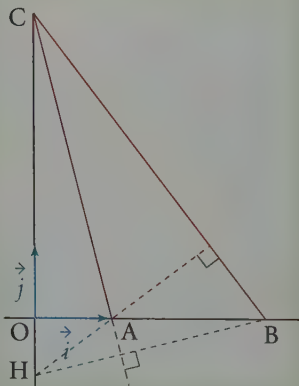
Les hauteurs h_A et h_B se coupent au point H dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} -3x + 4y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 4y + 3 = 0 \\ -x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

La solution est $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$. Le point $H\left(0; -\frac{3}{4}\right)$

appartient bien à la droite h_C d'équation $x = 0$.



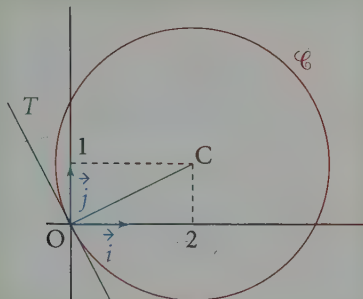
27 1. L'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

peut s'écrire : $(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = 0$

$$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5;$$

c'est une équation du cercle \mathcal{C} (cf. résumé de cours) de centre $C(2; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.



2. Le point O appartient au cercle \mathcal{C} car ses coordonnées vérifient l'équation de \mathcal{C} . La tangente T à \mathcal{C} en O est la perpendiculaire en O à (OC) . Le point $M(x; y)$ appartient à T si et seulement si l'on a successivement :

$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{OC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonaux

soit $2x + y = 0$ ou $y = -2x$;
c'est une équation de la tangente T .

28 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - m^2 + 4m + 5 = 0$ est équivalente à :

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) - m^2 + 4m + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - m^2 + 4m + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2 - 4m \quad [1]$$

Le trinôme du second degré en m :

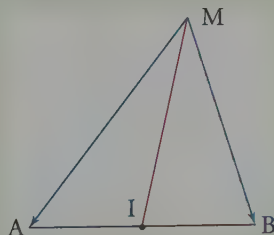
$$m^2 - 4m = m(m-4)$$

est du signe du coefficient de m^2 c'est-à-dire strictement positif à l'extérieur des racines 0 et 4.

- Si $m < 0$ ou $m > 4$, alors $m^2 - 4m > 0$ et l'ensemble E des points $M(x; y)$ vérifiant [1] est le cercle de centre $C(2; 1)$ et de rayon $\sqrt{m^2 - 4m}$.
- Si $m = 0$ ou $m = 4$, $E = \{C\}$.
- Si $0 < m < 4$, alors $m^2 - 4m < 0$ et le premier membre de [1] est $(x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 0$. L'équation [1] ne peut pas être vérifiée donc $E = \emptyset$.

29 **1.** Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) \\ &= \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 \\ &= MI^2 - IA^2. \end{aligned}$$



2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$ si et seulement si :

$$MI^2 - IA^2 = k$$

$$MI^2 = k + IA^2$$

$$MI^2 = k + 4 \quad (\text{puisque } IA = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2).$$

• Si $k > -4$, l'ensemble E des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+4}$.

• Si $k = -4$, $E = \{I\}$.

• Si $k < -4$, alors $k+4 < 0$. Comme $MI^2 \geq 0$, l'égalité $MI^2 = k+4$ ne peut pas être vérifiée donc $E = \emptyset$.

3. a) Si $k = 0$, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ et E est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \vec{MA} et \vec{MB} sont orthogonaux, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

b) On donne $A(1; -1)$ et $B(2; 3)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$\vec{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \end{pmatrix}$ et $\vec{MB} \begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$(1-x)(2-x) + (-1-y)(3-y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 2y - 1 = 0.$$

C'est une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

30 1. Une équation du cercle \mathcal{C} de centre le point de coordonnées $(a; b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

que l'on peut écrire, en développant, sous la forme :

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Calculons les coefficients α, β, γ .

• $A(0; -2)$ appartient à \mathcal{C} donc :

$$0 + (-2)^2 + 0 - 2\beta + \gamma = 0$$

$$-2\beta + \gamma + 4 = 0.$$

• $B(1; -1)$ appartient à \mathcal{C} donc :

$$1 + (-1)^2 + \alpha - \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha - \beta + \gamma + 2 = 0.$$

• $C(-2; -1)$ appartient à \mathcal{C} donc :

$$(-2)^2 + (-1)^2 - 2\alpha - \beta + \gamma = 0$$

$$-2\alpha - \beta + \gamma + 5 = 0.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} -2\beta + \gamma + 4 = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma + 2 = 0 \\ -2\alpha - \beta + \gamma + 5 = 0 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre la 3^e équation de la 2^e :

$$3\alpha - 3 = 0$$

$$\alpha = 1.$$

Par suite, on trouve $\beta = 1$ et $\gamma = -2$.

Une équation de \mathcal{C} est :

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0. \quad [1]$$

2. [1] est équivalente à :

$$(x^2 + x) + (y^2 + y) - 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

Le cercle \mathcal{C} a pour centre le point $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

31 1. Construisons le point C et la droite \mathcal{D} . Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite \mathcal{D} . Le cercle \mathcal{C} est le cercle de centre C et de rayon CH.

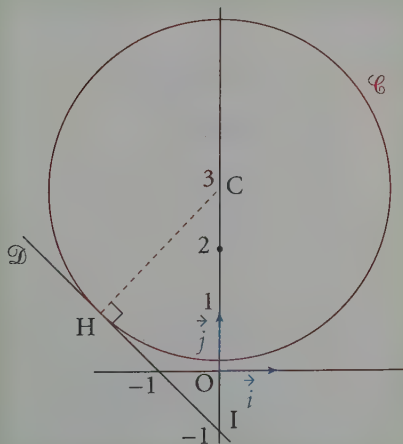
2. Une équation de \mathcal{C} est :

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = R^2$$

$$x^2 + (y - 3)^2 = R^2.$$

Calculons le rayon $R = CH$. Soit I le point d'intersection de \mathcal{D} et de la droite $(O; \vec{j})$. Le triangle CHI est rectangle isocèle donc :

$$R = CH = CI \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$



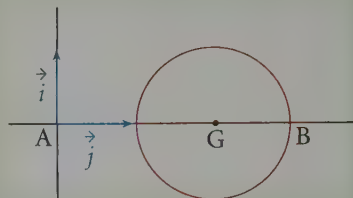
Une équation de \mathcal{C} est :

$$\begin{aligned}x^2 + (y-3)^2 &= (2\sqrt{2})^2 \\x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 8 \\x^2 + y^2 - 6y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

- 32** 1. Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, 2).

$$\vec{AG} = \frac{1}{1+2}(2\vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB}.$$

Ce qui permet de construire G sur [AB].



2. Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}MA^2 + 2MB^2 &= \vec{MA}^2 + 2\vec{MB}^2 \\&= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + 2(\vec{MG} + \vec{GB})^2 \\&= \vec{MG}^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA} + \vec{GA}^2 + 2(\vec{MG}^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GB} + \vec{GB}^2) \\&= 3\vec{MG}^2 + 2\vec{MG} \cdot (\vec{GA} + 2\vec{GB}) + \vec{GA}^2 + 2\vec{GB}^2 \\&= 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2 \quad (\text{car } \vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}).\end{aligned}$$

Puisque $AB = 3$,

$$\text{on a } GA = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ et } GB = 3 - 2 = 1$$

donc $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6$.

3. On a $MA^2 + 2MB^2 = 9$ si et seulement si :

$$3MG^2 + 6 = 9$$

$$3MG^2 = 3$$

$$MG = 1.$$

L'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = 9$ est le cercle de centre G et de rayon 1.

4. Dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ de l'énoncé :

$$A(0; 0), \quad B(3; 0), \quad M(x; y).$$

$MA^2 + 2MB^2 = 9$ si et seulement si :

$$x^2 + y^2 + 2[(3-x)^2 + (-y)^2] = 9$$

$$x^2 + y^2 + 2(9 - 6x + x^2 + y^2) = 9$$

$$3(x^2 + y^2) - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + y^2 + 3 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + y^2 + 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 1.$$

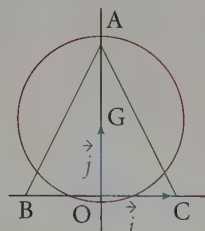
L'ensemble des points M est le cercle de centre G(2; 0) et de rayon 1.

On retrouve les résultats de la question 3..

- 33** 1. Soit G le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 1).
Remplaçons (B, 1) et (C, 1) par (O, 2) où O est le milieu de [BC] :

$$G = \text{Bar}\{(A, 2), (O, 2)\}$$

donc G est l'isobarycentre de A et O c'est-à-dire le milieu de [AO].



2. Pour tout point M du plan :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2$$

$$= 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 2(MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2) + MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2 + MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + GC^2$$

$$= 4MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (\text{car } 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}).$$

Calculons $2GA^2 + GB^2 + GC^2$:

soit O le milieu de [BC], on a $OC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Dans le triangle rectangle AOC :

$$OA^2 = AC^2 - OC^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$$

donc $OA = 2$ et, puisque G est le milieu de [AO], $OG = 1$.

On en déduit :

$$GA^2 = 1 \quad \text{et} \quad GB^2 = GC^2 = OC^2 + OG^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Donc $2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 2 \times 1 + 2 + 2 = 6$.

Pour tout point M du plan, on a donc :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 6.$$

3. $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 11$ si et seulement si :

$$4MG^2 + 6 = 11$$

$$4MG^2 = 5$$

$$MG = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

L'ensemble des points M tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 11$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. Dans le repère de l'énoncé, on a $B(-1; 0)$ et $C(1; 0)$.

On calcule OA comme précédemment : $OA = 2$. Prenons $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ donc le point A a pour coordonnées $(0; 2)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

On a $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 11$ si et seulement si :

$$2[x^2 + (y-2)^2] + (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 11$$

$$2(x^2 + y^2 - 4y + 4) + x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 11$$

$$4(x^2 + y^2) - 8y + 10 = 11$$

$$x^2 + y^2 - 2y - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre $G(0 ; 1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
On retrouve les résultats de la question 3.

1 Formules d'addition

Pour tous réels α et β :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

2 Formules de multiplication par 2 (ou de duplication)

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha \cos\alpha\end{aligned}$$

3 Applications au triangle

Soit un triangle quelconque ABC. On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

On désigne par \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} les mesures des angles non orientés de ce triangle, R le rayon du cercle circonscrit et \mathcal{S} l'aire du triangle ABC.

Formules d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \cos \widehat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \widehat{A}} &= \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \\ \mathcal{S} &= \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}\end{aligned}$$

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1 α un nombre réel, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ est égal à :

- a) $\sin \alpha$;
 b) $-\sin \alpha$;
 c) $\cos \alpha$.

- V F
 V F
 V F

➔ Corrigé p. 334

2 α un nombre réel, $\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \alpha\right)$ est égal à :

- a) $-\sin \alpha$;
 b) $-\cos \alpha$.

- V F
 V F

➔ Corrigé p. 334

3 a) x un nombre réel alors $\sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

- V F

b) x un nombre réel alors $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

- V F

➔ Corrigé p. 334

4 Si x et y sont deux réels de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $\cos y = \frac{1}{2}$ $\cos(x - 2y)$ est égal à :

a) $\frac{3\sqrt{5} + 1}{8}$;

- V F

b) $\frac{3\sqrt{5} - 1}{8}$.

- V F

➔ Corrigé p. 334

5 Si x et y sont deux réels de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin x = \frac{1}{8}$ et $\cos y = \frac{1}{4}$ alors $\sin(x + 2y)$ est égal à :

a) $\frac{3\sqrt{105} - 7}{64}$;

- V F

b) $\frac{3\sqrt{105} + 7}{64}$.

- V F

➔ Corrigé p. 334

- 6** Soit x et y sont deux nombres réels alors $\cos(x - y)\sin(x + y)$ est égal à :
- a) $\sin x \cos x + \sin y \cos y$; V F
- b) $\sin x \cos x - \sin y \cos y$. V F
- ➔ Corrigé p. 334
- 7** Soit x un nombre réel $\cos^4 x - \sin^4 x$ est égal à :
- a) $\cos 2x$; V F
- b) $\cos^2 x$. V F
- ➔ Corrigé p. 335
- 8** x, y, z trois nombres réels alors $\sin x \sin(y - z) + \sin y \sin(z - x) + \sin z \sin(x - y)$ est égal à :
- a) 0; V F
- b) $\sin x + \sin y + \sin z$. V F
- ➔ Corrigé p. 335
- 9** Si dans un triangle ABC $a^2 > b^2 + c^2$, alors :
- a) \widehat{A} ; est obtus; V F
- b) \widehat{A} est aigu. V F
- ➔ Corrigé p. 335
- 10** Si dans un triangle ABC on $a^2 = 2b^2 + c^2$, alors $\sin^2 A = 2 \sin^2 B + \sin^2 C$. V F
- ➔ Corrigé p. 335

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Formules d'addition et de multiplication par 2

- 11** À l'aide des formules d'addition, calculer :
- $$\cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$
- ➔ Corrigé p. 335
- 12** À l'aide des formules de multiplication par 2, calculer :
- $$\cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$
- Comparer aux résultats de l'exercice précédent. ➔ Corrigé p. 335

13 Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8}$, $\sin \frac{3\pi}{8}$.

→ Corrigé p. 336

14 ★ 1. Calculer, pour tout réel α , $\sin 3\alpha$ en fonction de $\sin \alpha$.

2. Démontrer que pour tout α réel :

$$4 \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \sin(3\alpha).$$

→ Corrigé p. 337

15 ★ Soit α un nombre réel.

1. Calculer $\cos^2 \alpha$ et $\sin^2 \alpha$ en fonction de $\cos(2\alpha)$.

2. Montrer l'égalité suivante :

$$\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4\alpha).$$

→ Corrigé p. 337

16 ★ $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin x} + \frac{\cos(2x)}{\cos x}$.

1. Pour quelles valeurs de x , peut-on définir $f(x)$?

2. Simplifier $f(x)$.

→ Corrigé p. 338

17 ★ 1. Simplifier $f(x) = \frac{\sin x + \sin(2x)}{1 + \cos x + \cos(2x)}$ pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$.

2. On suppose le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit le point $A(1 ; 0)$ et les points B et C définis de la façon suivante :

$$AB = BC = 1$$

$$(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = x.$$

a) Calculer les coordonnées $(X ; Y)$ du point C .

b) En déduire que l'on a pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$:

$$f(x) = \tan x.$$

→ Corrigé p. 338

18 ★ 1. Factoriser : $1 + \sin x - \cos(2x)$.

2. En déduire les solutions appartenant à $]-\pi ; \pi]$ de l'équation :

$$1 + \sin x - \cos(2x) = 0.$$

→ Corrigé p. 339

Applications au triangle et au calcul de distances

Pour les exercices 19 à 22 et 25 à 27.

Soit un triangle ABC, on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

On désigne par \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} les mesures des angles non orientés du triangle.

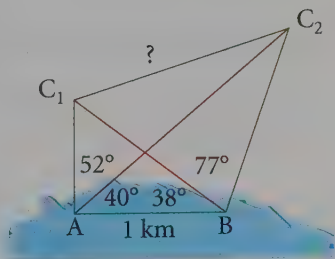
- 19** Soit ABC un triangle tel que $a = 13$ m, $\widehat{B} = 35^\circ$ et $\widehat{C} = 43^\circ$.
Déterminer b , c et une mesure en degrés de \widehat{A} . ➔ Corrigé p. 340
- 20** Soit ABC un triangle tel que $a = 15$ m, $b = 7$ m et $c = 20$ m.
Déterminer les mesures \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} en degrés des angles du triangle. ➔ Corrigé p. 340
- 21** Même exercice que l'exercice 20 avec $a = 8$ m, $b = 17$ m et $c = 26$ m. ➔ Corrigé p. 340
- 22** 1. Soit ABC un triangle tel que $a = 12$ m, $b = 7$ m et $\widehat{A} = 75^\circ$.
Déterminer c et les mesures en degrés des angles \widehat{B} et \widehat{C} du triangle.
2. Même exercice avec $a = 6,8$ m, $b = 7$ m et $\widehat{A} = 75^\circ$. ➔ Corrigé p. 341
- 23** Par suite d'obstacles, on ne peut pas mesurer directement la distance de deux points A et B. On utilise un autre point C facilement repérable tel que :
 $AC = 85,5$ m ; $\widehat{BAC} = 44^\circ$; $\widehat{ACB} = 39^\circ$.
Calculer AB. ➔ Corrigé p. 341

- 24** La distance de deux points A et B d'une côte est $AB = 1$ km. On veut mesurer la distance de deux points C_1 et C_2 situés en pleine mer.

On connaît : $\widehat{C_1AC_2} = 52^\circ$; $\widehat{C_2AB} = 40^\circ$;

$\widehat{C_1BA} = 38^\circ$; $\widehat{C_1BC_2} = 77^\circ$.

Calculer BC_1 et BC_2 . En déduire la distance C_1C_2 .



➔ Corrigé p. 342

- 25** ★ Soit \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} les mesures des angles en radians d'un triangle ($\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$).

Démontrer les relations suivantes :

$$1. \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} = 4 \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2}.$$

$$2. \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) = 4 \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}.$$

$$3. \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) = -4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - 1.$$

$$4. \sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 2(1 + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}).$$

→ Corrigé p. 342

- 26** ★ Dans un triangle ABC, soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle. Ce cercle est tangent en A' à la droite (BC). On donne $BA' = 8$, $CA' = 6$ et le rayon du cercle inscrit est $r = IA' = 4$.

$$1. \text{ Calculer } \sin \frac{\widehat{B}}{2}, \cos \frac{\widehat{B}}{2}, \sin \widehat{B}, \cos \widehat{B}.$$

$$2. \text{ Calculer } \sin \frac{\widehat{C}}{2}, \cos \frac{\widehat{C}}{2}, \sin \widehat{C}, \cos \widehat{C}.$$

$$3. \text{ Calculer } \sin \widehat{A}.$$

4. En déduire b et c .

5. a) Démontrer que l'aire du triangle ABC est $5 = pr$ où p est le demi-périmètre du triangle ABC.

b) Calculer cette aire.

→ Corrigé p. 344

- 27** ★★ Soit un triangle ABC d'aire \mathcal{S} .

1. À l'aide de la formule $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$, exprimer \mathcal{S} en fonction de b^2 , c^2 et de $\cos^2 \widehat{A}$.

2. À l'aide des formules d'Al kashi, calculer \mathcal{S}^2 en fonction de a , b , c .

En déduire la formule de Héron :

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle ABC.

→ Corrigé p. 346

Relations dans un quadrilatère convexe

- 28 ★★ Soit un quadrilatère convexe ABCD.
Démontrer que l'aire de ce quadrilatère est :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \widehat{AIB}$$

(I est le point d'intersection des diagonales.)

→ Corrigé p. 346

- 29 ★★ Soit ABCD un quadrilatère convexe **inscritible** (inscritible signifie que les quatre sommets sont sur un même cercle). Les angles opposés sont alors supplémentaires.

$$a = AB, \quad b = BC, \quad c = CD, \quad d = DA, \quad u = DB \quad \text{et} \quad v = AC.$$

On pose $\widehat{A} = \widehat{BAD}$ et $\widehat{C} = \widehat{RCD}$.

1. Calculer u^2 en fonction de a, d et $\cos \widehat{A}$, puis de b, c et $\cos \widehat{C}$ et enfin de b, c et $\cos \widehat{A}$.

Calculer $\cos \widehat{A}$ en fonction de a, b, c, d .

2. En déduire $u^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

3. Calculer v^2 , en déduire que :

$$\frac{u}{v} = \frac{ab + cd}{ad + bc} \quad \text{et} \quad uv = ac + bd.$$

→ Corrigé p. 347

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

1 a) Vrai. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
 $= -(-\sin\alpha) = \sin\alpha.$

b) Faux.

c) Faux.

2 a) Faux. Non car : $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
 $= -\cos\alpha.$

b) Vrai.

3 a) Vrai. $\sin(\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 $= -\sin x + \sin x = 0.$

b) Vrai. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
 $= \sin x - \sin x = 0.$

4 a) Faux. Les quatre réels $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$, $\sin y$ sont positifs.

$$\sin x = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{et} \quad \sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Vrai. $\cos(x - 2y) = (\cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y)$
 $= \cos x (2 \cos^2 y - 1) + \sin x (2 \sin y \cos y)$
 $= \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}.$

5 a) Vrai. Les quatre réels $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$, $\sin y$ sont positifs.

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8} \quad \text{et} \quad \sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

b) Faux. $\sin(x + 2y) = \sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x$
 $= \sin x (2 \cos^2 y - 1) + 2 \sin y \cos y \cos x$
 $= \frac{3\sqrt{105} - 7}{64}.$

6 a) Vrai.

b) Faux.

- 7** a) Vrai. $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
- b) Faux.
- 8** a) Vrai. b) Faux.
- 9** a) Vrai. On a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ donc si $a^2 > b^2 + c^2$ on a $\cos A < 0$ donc \hat{A} obtus.
- b) Faux.
- 10** a) Vrai. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ d'où $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ que l'on reporte dans $a^2 = 2b^2 + c^2$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

- 11** $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
- $\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
 - $\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Remarque :

On peut écrire $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ et appliquer les formules d'addition à $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

- 12** • Nous remarquons que $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6}$ donc $\frac{\pi}{6} = 2 \frac{\pi}{12}$.

Appliquons la formule de duplication :

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

dans laquelle nous remplaçons α par $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1, \text{ soit } \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \text{ d'où } \cos \frac{\pi}{12} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

$$\frac{\pi}{12} \in]0; \frac{\pi}{12}[\text{ donc } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \text{ d'où : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

- Pour calculer $\sin \frac{\pi}{12}$, appliquons la formule de duplication :

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

dans laquelle nous remplaçons α par $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{\pi}{12} \in]0; \frac{\pi}{12}[\text{ donc } \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ d'où :}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Les résultats semblent différents de ceux de l'exercice précédent. Il n'en est rien car l'on élève au carré les résultats trouvés à l'exercice 1. :

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

ce sont les carrés des expressions de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ trouvés à l'exercice 12.

- 13** • Nous remarquons que $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8}$.

En appliquant les formules de duplication :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

dans lesquelles vous remplacez α par $\frac{\pi}{8}$, vous trouverez (raisonnez comme précédemment) :

- $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
- $\cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
- $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

14 1. On a pour tout réel α :

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

2. Développons $P = 4 \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\text{d'où : } P = 4 \sin \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha\right)$$

$$P = 4 \sin \alpha \left(\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha\right)$$

$$P = 4 \sin \alpha \left[\frac{3}{4}(1 - \sin^2 \alpha) - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha\right]$$

$$P = 4 \sin \alpha \left(\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha\right) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$P = \sin 3\alpha \text{ (d'après la question 1).}$$

15 1. Pour tout réel α :

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{d'où : } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha &= \left(\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2(2\alpha)).
 \end{aligned}$$

d'après la question 1. (remplacer α par 2α),

$$\cos^2 2\alpha = \frac{1 + \cos(4\alpha)}{2} \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1 + \cos(4\alpha)}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos(4\alpha)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4\alpha).
 \end{aligned}$$

- 16** 1. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin x} + \frac{\cos(2x)}{\cos x}$ est défini pour $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x}{\sin x \cos x} \\
 &= \frac{\sin(2x + x)}{\frac{1}{2} \sin(2x)} \\
 &= \frac{2 \sin(3x)}{\sin(2x)}.
 \end{aligned}$$

- 17** 1. $f(x) = \frac{\sin x + \sin(2x)}{1 + \cos x + \cos(2x)}$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.

Cherchons à factoriser le numérateur et le dénominateur :

$$\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x (1 + 2 \cos x).$$

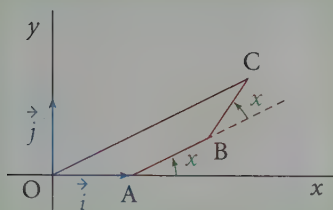
$$\begin{aligned}
 1 + \cos x + \cos(2x) &= 1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1 \\
 &= \cos x + 2 \cos^2 x \\
 &= \cos x (1 + 2 \cos x).
 \end{aligned}$$

Remplaçons que pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos x > 0$ et $1 + 2 \cos x > 0$ donc

$1 + \cos x + \cos 2x \neq 0$ et f est définie. On peut écrire :

$$f(x) = \frac{\sin x (1 + 2 \cos x)}{\cos x (1 + 2 \cos x)} = \tan x.$$

2.



a) $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$ [1] donc :

$$X = 1 + \cos(\vec{i}, \vec{AB}) + \cos(\vec{i}, \vec{BC}).$$

Or $(\vec{i}, \vec{AB}) = x$; $(\vec{i}, \vec{BC}) = (\vec{i}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{BC}) = x + x = 2x$

donc $X = 1 + \cos x + \cos 2x$.

D'après [1] : $Y = \sin(\vec{i}, \vec{AB}) + \sin(\vec{i}, \vec{BC}) = \sin x + \sin 2x$.

b) $OA = BC = 1$ et $\widehat{OAB} = \widehat{ABC}$ donc OABC est un trapèze isocèle.

Par suite (OC) est parallèle à (AB) et $(\vec{i}, \vec{OC}) = (\vec{i}, \vec{AB}) = x$.

$$\frac{Y}{X} = \tan(\vec{i}, \vec{OC}) = \tan x.$$

On retrouve, par ce calcul de Y et X, que $\frac{\sin x + \sin(2x)}{1 + \cos x + \cos(2x)} = \tan x$.

18 1. $1 + \sin x - \cos(2x) = (1 - \cos(2x)) + \sin x$.

On sait que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc :

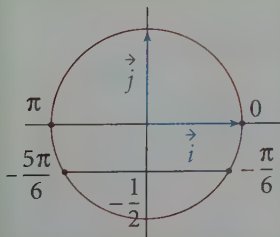
$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x \text{ et :}$$

$$1 + \sin x - \cos(2x) = 2\sin^2 x + \sin x$$

$$= \sin x(1 + 2\sin x).$$

2. $1 + \sin x - \cos(2x) = 0$ si et seulement si : $\sin x(1 + 2\sin x) = 0$

$$\sin x = 0 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}.$$



L'ensemble des solutions appartenant à $]\pi ; \pi]$ est :

$$\left\{ -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; 0 ; \pi \right\}.$$

19 On a : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

d'où : $\widehat{A} = 180^\circ - 35^\circ - 43^\circ = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ.$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \text{ donc } \frac{13}{\sin(102^\circ)} = \frac{b}{\sin(35^\circ)} = \frac{c}{\sin(43^\circ)}$$

$$b = \frac{13 \sin(35^\circ)}{\sin(102^\circ)} ; \quad c = \frac{13 \sin(43^\circ)}{\sin(102^\circ)}.$$

La calculatrice donne :

$$b \approx 7,62 \text{ m} ; \quad c \approx 9,06 \text{ m}.$$

20 Utilisons les formules d'Al Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

d'où : $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{224}{280}$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{576}{600}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{126}{210}$$

d'où $\cos \widehat{A} = 0,8$ $\cos \widehat{B} = 0,96$ $\cos \widehat{C} = -0,6.$

La calculatrice donne :

$$\widehat{A} \approx 36,87^\circ \quad \widehat{B} \approx 16,26^\circ \quad \widehat{C} \approx 126,87^\circ.$$

21 $\cos \widehat{A} = \frac{17^2 + 26^2 - 8^2}{2 \times 17 \times 26} = \frac{901}{884}.$

Ce calcul est impossible car $\frac{901}{884} > 1.$

Il n'existe pas de triangle répondant aux conditions imposées.

Remarque : Le calcul ne sera possible que si la mesure de l'un des côtés est strictement comprise entre la somme et la différence des deux autres.

$$22 \quad 1. \quad \begin{cases} \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{12}{\sin(75^\circ)} = \frac{7}{\sin \widehat{B}} \quad \text{donc} \quad \sin \widehat{B} = \frac{7 \times \sin(75^\circ)}{12}$$

$$\widehat{B} \approx 34,30^\circ \quad \text{ou} \quad \widehat{B} \approx 180^\circ - 34,30^\circ \approx 145,70^\circ.$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \widehat{B} \approx 34,30^\circ, \quad \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 70,70^\circ.$$

$$\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} \quad \text{d'où} \quad c = \frac{a \sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}} \approx 11,73 \text{ m.}$$

2^e cas : $\widehat{B} \approx 145,70^\circ$, $\widehat{A} + \widehat{B} = 75^\circ + 145,70^\circ \approx 220,70 > 180^\circ$
ce qui est impossible.

2. Avec $a = 6,8 \text{ m}$, $b = 7 \text{ m}$, $\widehat{A} = 75^\circ$, on obtient :

$$\frac{6,8}{\sin(75^\circ)} = \frac{7}{\sin \widehat{B}}; \quad \sin \widehat{B} = \frac{7 \times \sin(75^\circ)}{6,8}$$

$$\widehat{B} \approx 83,90^\circ \quad \text{ou} \quad \widehat{B} \approx 180^\circ - 83,90^\circ \approx 96,10^\circ.$$

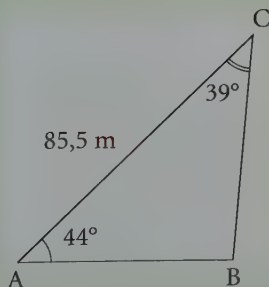
$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \widehat{B} \approx 83,90^\circ \quad \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 21,10^\circ$$

$$\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} \quad \text{d'où} \quad c = \frac{a \sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}} \approx \frac{6,8 \sin(21,10^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 2,53 \text{ m.}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } \widehat{B} \approx 96,10^\circ, \quad \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 8,90^\circ$$

$$c \approx \frac{6,8 \sin(8,90^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 1,09 \text{ m.}$$

23



$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 44^\circ - 39^\circ = 97^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin(39^\circ)} = \frac{85,5}{\sin(97^\circ)}$$

$$\text{d'où} \quad AB = \frac{85,5 \sin(39^\circ)}{\sin(97^\circ)} \approx 54,2 \text{ m.}$$

- 24** On se reportera à la figure donnée dans l'énoncé.
 Dans le triangle AC_1B :

$$\frac{AB}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{BC_1}{\sin \widehat{BAC_1}}$$

$$\widehat{AC_1B} = 180^\circ - 52^\circ - 40^\circ - 38^\circ = 50^\circ$$

$$\widehat{BAC_1} = 40^\circ + 52^\circ = 92^\circ$$

$AB = 1$ km d'où :

$$\frac{1}{\sin(50^\circ)} = \frac{BC_1}{\sin(92^\circ)}, \text{ soit } BC_1 = \frac{\sin(92^\circ)}{\sin(50^\circ)} \approx 1,30 \text{ km.}$$

dans le triangle AC_2B :
$$\frac{AB}{\sin \widehat{AC_2B}} = \frac{BC_2}{\sin \widehat{BAC_2}}$$

$$\widehat{AC_2B} = 180^\circ - 40^\circ - 38^\circ - 77^\circ = 25^\circ$$

$$\widehat{BAC_2} = 40^\circ \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{\sin(25^\circ)} = \frac{BC_2}{\sin(40^\circ)} \text{ d'où } BC_2 = \frac{\sin(40^\circ)}{\sin(25^\circ)} \approx 1,52 \text{ km.}$$

Dans le triangle BC_1C_2 , appliquons la formule d'Al Kashi donnant $C_1C_2^2$:

$$\begin{aligned} C_1C_2^2 &= BC_1^2 + BC_2^2 - 2BC_1 \times BC_2 \cos(77^\circ) \\ &\approx (1,30)^2 + (1,52)^2 - 2 \times 1,30 \times 1,52 \cos(77^\circ) \end{aligned}$$

$$C_1C_2 \approx 1,76 \text{ km.}$$

25 1.
$$\begin{aligned} S_1 &= \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C} \\ &= \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin(\pi - \widehat{A} - \widehat{B}) \\ &= \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin(\widehat{A} + \widehat{B}) \\ &= \sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{A} \cos \widehat{B} + \cos \widehat{A} \sin \widehat{B} \\ &= \sin \widehat{A}(1 + \cos \widehat{B}) + \sin \widehat{B}(1 + \cos \widehat{A}). \end{aligned}$$

On sait que (cf. « résumé de cours ») :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \text{ donc } 1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha \text{ et}$$

$$1 + \cos \widehat{B} = 2\cos^2 \frac{\widehat{B}}{2}; \quad 1 + \cos \widehat{A} = 2\cos^2 \frac{\widehat{A}}{2}.$$

$$\text{D'où : } S_1 = 2\sin \widehat{A} \cos^2 \frac{\widehat{B}}{2} + 2\sin \widehat{B} \cos^2 \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 4 \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos^2 \frac{\widehat{B}}{2} + 4 \sin \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos^2 \frac{\widehat{A}}{2} \\
 &= 4 \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \left(\sin \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} + \cos \frac{\widehat{A}}{2} \sin \frac{\widehat{B}}{2} \right) \\
 &= 4 \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \sin \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \right) \\
 &= 4 \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} \right) \\
 &= 4 \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2} \quad (\text{car } \widehat{C} = \pi - \widehat{A} - \widehat{B}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad S_2 &= \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) \\
 &= \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\pi - 2\widehat{A} - 2\widehat{B}) \\
 &= \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) - \sin(2\widehat{A} + 2\widehat{B}) \\
 &= \sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) - \sin(2\widehat{A})\cos(2\widehat{B}) - \cos(2\widehat{A})\sin(2\widehat{B}) \\
 &= \sin(2\widehat{A})(1 - \cos(2\widehat{B})) + \sin(2\widehat{B})(1 - \cos(2\widehat{A})).
 \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
 \cos(2\alpha) &= 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{donc } 1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha \quad \text{et} \\
 1 - \cos(2\widehat{B}) &= 2\sin^2\widehat{B}; \quad 1 - \cos(2\widehat{A}) = 2\sin^2\widehat{A}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } S_2 &= 2\sin(2\widehat{A})\sin^2\widehat{B} + 2\sin(2\widehat{B})\sin^2\widehat{A} \\
 &= 4\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}\sin^2\widehat{B} + 4\sin\widehat{B}\cos\widehat{B}\sin^2\widehat{A} \\
 &= 4\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}(\cos\widehat{A}\sin\widehat{B} + \sin\widehat{A}\cos\widehat{B}) \\
 &= 4\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) \\
 &= 4\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin(\pi - \widehat{A} - \widehat{B}) \\
 &= 4\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad S_3 &= \cos(2\widehat{A}) + \cos(2\widehat{B}) + \cos(2\widehat{C}) \\
 &= \cos(2\widehat{A}) + \cos(2\widehat{B}) + \cos(2\pi - 2\widehat{A} - 2\widehat{B}) \\
 &= \cos(2\widehat{A}) + \cos(2\widehat{B}) + \cos(2\widehat{A} + 2\widehat{B}) \\
 &= \cos(2\widehat{A}) + \cos(2\widehat{B}) + \cos(2\widehat{A})\cos(2\widehat{B}) - \sin(2\widehat{A})\sin(2\widehat{B}) \\
 &= \cos(2\widehat{A})(1 + \cos(2\widehat{B})) + \cos(2\widehat{B}) - \sin(2\widehat{A})\sin(2\widehat{B}).
 \end{aligned}$$

On sait que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, donc $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$.

D'autre part, $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} \text{d'où : } S_3 &= (2 \cos^2 \widehat{A} - 1)(2 \cos^2 \widehat{B}) + 2 \cos^2 \widehat{B} - 1 - 4 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos \widehat{B} \\ &= 4 \cos^2 \widehat{A} \cos^2 \widehat{B} - 1 - 4 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos \widehat{B} \\ &= 4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} (\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \sin \widehat{A} \sin \widehat{B}) - 1 \\ &= 4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos(\widehat{A} + \widehat{B}) - 1 \\ &= 4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos(\pi - \widehat{C}) - 1 \\ &= -4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - 1. \end{aligned}$$

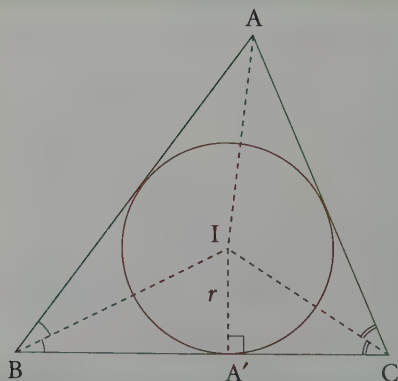
$$4. S_4 = \sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}.$$

On sait que $\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, donc $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ et

$$\sin^2 \widehat{A} = \frac{1 - \cos(2\widehat{A})}{2}; \quad \sin^2 \widehat{B} = \frac{1 - \cos(2\widehat{B})}{2}; \quad \sin^2 \widehat{C} = \frac{1 - \cos(2\widehat{C})}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } S_4 &= \frac{1 - \cos(2\widehat{A})}{2} + \frac{1 - \cos(2\widehat{B})}{2} + \frac{1 - \cos(2\widehat{C})}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos(2\widehat{A}) + \cos(2\widehat{B}) + \cos(2\widehat{C})) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} S_3 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-4 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - 1) \\ &= 2 + 2 \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} \\ &= 2(1 + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}). \end{aligned}$$

26 1.



$$\sin \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{IA'}{BI} = \frac{4}{\sqrt{4^2+8^2}} = \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{BA'}{BI} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin \widehat{B} = 2 \sin \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

On sait que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ donc en remplaçant α par $\frac{\widehat{B}}{2}$.

$$\cos \widehat{B} = 2\cos^2 \frac{\widehat{B}}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}.$$

$$2. \sin \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{IA'}{CI} = \frac{4}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{4}{\sqrt{52}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\cos \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{CA'}{CI} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \widehat{C} = 2 \sin \frac{\widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}.$$

$$\cos \widehat{C} = 2\cos^2 \frac{\widehat{C}}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = \frac{5}{13}.$$

$$\begin{aligned} 3. \sin \widehat{A} &= \sin(\pi - \widehat{B} - \widehat{C}) = \sin(\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \cos \widehat{B} \sin \widehat{C} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{56}{65}. \end{aligned}$$

4. On sait que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ donc, en remarquant que

$$a = BC = BA' + A'C = 8 + 6 = 14, \text{ on a :}$$

$$\frac{14}{\frac{56}{65}} = \frac{b}{\frac{4}{5}} = \frac{c}{\frac{12}{13}} \text{ d'où } b = \frac{14 \times \frac{4}{5}}{\frac{56}{65}} = \frac{14 \times 4 \times 65}{56 \times 5} = 13,$$

$$c = \frac{14 \times \frac{12}{13}}{\frac{56}{65}} = \frac{14 \times 12 \times 65}{56 \times 13} = \frac{1 \times 12 \times 5}{46 \times 1} = 15.$$

5. a) L'aire \mathcal{S} du triangle ABC est la somme des aires des triangles IBC, ICA, IAB :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

$$\mathcal{S} = pr.$$

b) $\mathcal{S} = \frac{1}{2}(14 + 13 + 15) \times 4 = 84.$

27 **1.** $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 \widehat{A} = \frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 \widehat{A}).$$

2. En utilisant les formules d'Al Kashi on trouve $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
donc :

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \left[1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \right]$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16} [4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16} [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16} (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c).$$

Soit p le demi-périmètre ; $b + c + a = 2p$ donc :

$$b + c - a = b + c + a - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b).$$

D'où : $\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16} \times 2p \times 2(p - a) \times 2(p - c) \times 2(p - b).$

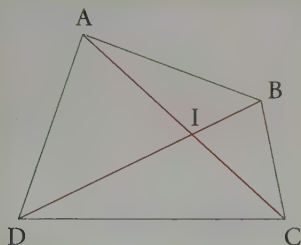
$$\mathcal{S}^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

28 Appelons \mathcal{S}_{AIB} , \mathcal{S}_{BIC} , \mathcal{S}_{CID} , \mathcal{S}_{DIA} , les aires des triangles AIB, BIC, CID, DIA.

L'aire du quadrilatère ABCD est :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{AIB} + \mathcal{S}_{BIC} + \mathcal{S}_{CID} + \mathcal{S}_{DIA}.$$



$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}AI \times IB \sin \widehat{AIB} + \frac{1}{2}IB \times IC \sin \widehat{BIC} + \frac{1}{2}IC \times ID \sin \widehat{CID} \\ + \frac{1}{2}ID \times IA \sin \widehat{DIA}.$$

Or $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ et $\widehat{BIC} = \widehat{DIA} = \pi - \widehat{AIB}$,
donc :

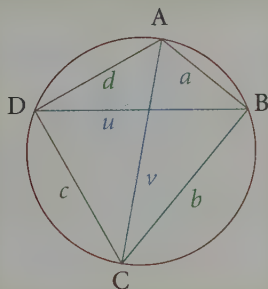
$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(IA \times IB + IB \times IC + IC \times ID + ID \times IA) \sin \widehat{AIB}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}[IA \times (IB + ID) + IC \times (IB + ID)] \sin \widehat{AIB}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(IA \times BD + IC \times BD) \sin \widehat{AIB} = \frac{1}{2}[(IA + IC) \times BD] \sin \widehat{AIB}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}AC \times BD \times \sin \widehat{AIB}.$$

- 29** 1. Le quadrilatère convexe ABCD étant inscriptible, les angles de sommets A et C sont supplémentaires donc $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{C}$.



On peut écrire les formules d'Al Kashi :

$$u^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A}$$

$$u^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{C}$$

$$u^2 = b^2 + c^2 + 2bcc\widehat{A}.$$

D'où :

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{A} = b^2 + c^2 + 2bcc\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad u^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \\ &= a^2 + d^2 - \frac{ad(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{ad + bc} \\ &= \frac{(a^2 + d^2)(ad + bc) - ad(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{ad + bc} \\ &= \frac{(a^2 + d^2)bc + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc} \\ &= \frac{a^2bc + d^2bc + adb^2 + adc^2}{ad + bc} \\ &= \frac{(a^2bc + adb^2) + (d^2bc + adc^2)}{ad + bc} \\ &= \frac{ab(ac + bd) + dc(bd + ac)}{ad + bc} \\ &= \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ De même on montre que : } v^2 = \frac{(ac + bd)(bc + ad)}{ab + cd}$$

$$\text{d'où : } \frac{u^2}{v^2} = \frac{(ab + cd)^2}{(ad + bc)^2}$$

$$\text{ou encore : } \frac{u}{v} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

$$\text{On a aussi : } u^2v^2 = (ac + bd)^2$$

$$\text{d'où : } uv = ac + bd.$$

1 Définitions

- La translation de vecteur \vec{u} notée $t_{\vec{u}}$ associée à tout point M du plan ou de l'espace le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

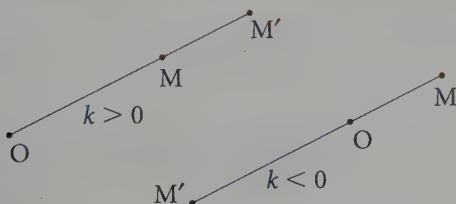
$$M' = t_{\vec{u}}(M) \text{ si et seulement si } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$



- L'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$ notée $h(O, k)$ associée à tout point M du plan ou de l'espace le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

$$M' = h(O, k)(M) \text{ si et seulement si } \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$



Si $k > 0$, les points M et M' sont d'un même côté par rapport à O .

Si $k < 0$, les points M et M' sont de part et d'autre de O .

Si $k = -1$, l'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O .



2 Propriétés

- L'image d'un couple de points (M, N) est un couple de points (M', N') tels que :
 - dans une translation : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$;
 - dans une homothétie de rapport k : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
- Une translation ou une homothétie conserve :
 - l'alignement ;
 - le barycentre (en particulier le milieu d'un segment et le centre de gravité d'un triangle) ;
 - les angles orientés.
- Par une translation ou une homothétie, l'image d'un segment est un segment et l'image d'une droite \mathcal{D} est une droite parallèle à \mathcal{D} .
- L'image d'un cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre l'image de Ω et de rayon R si la transformation est une translation, de rayon $|k| R$ si la transformation est une homothétie de rapport k .
- Dans une translation, les distances, les aires et les volumes sont conservés.
- Dans une homothétie de rapport k , les distances sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES



Cochez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

- 1** Si A' et B' sont les images respectivement des points distincts A et B dans la translation t alors :
- a) $[AB]$ et $[A'B']$ ont le même milieu ; V F
- b) $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$; V F
- c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$; V F
- d) Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. V F
- ➔ Corrigé p. 359
- 2** Soit s la réflexion d'axe $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1$ une droite du plan et \mathcal{D}'_1 son image par s alors :
- a) \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}'_1 sont parallèles ; V F
- b) $s(\mathcal{D}'_1) = \mathcal{D}_1$. V F
- ➔ Corrigé p. 359
- 3** Soit r la rotation de centre O et d'angle α , \mathcal{D} et \mathcal{D}_1 deux droites du plan, \mathcal{D}' et \mathcal{D}'_1 leurs images par r alors :
- a) si $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}_1$ alors $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}'_1$; V F
- b) si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}_1$ alors $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}'_1$; V F
- c) $r(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$. V F
- ➔ Corrigé p. 359
- 4** Une rotation de centre O et d'angle nul est :
- a) une homothétie ; V F
- b) une translation. V F
- ➔ Corrigé p. 359
- 5** Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k ; A, B, C, D quatre points d'images respectives A', B', C', D' alors :
- a) $AB = A'B'$; V F
- b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$; V F
- c) si (A, B, C, D) est un carré, (A', B', C', D') aussi. V F
- ➔ Corrigé p. 359

- 6** Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux sécantes en O alors :
- a) il existe une réflexion laissant $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ invariant. V F
- b) il existe une symétrie centrale laissant $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ invariant. V F
-  Corrigé p. 359
- 7** Soit un triangle ABC et A', B', C' les milieux de [BC], [CA], [AB]. Soit H, G, O l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle Γ circonscrit à ABC. Soit Γ' le cercle circonscrit à A'B'C'.
- a) Γ a pour image Γ' par l'homothétie $h\left(G, -\frac{1}{3}\right)$. V F
- b) Γ a pour image Γ' par l'homothétie $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. V F
- c) $\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GH}$. V F
- d) $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. V F
-  Corrigé p. 359

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Reconnaître une transformation

- 8** On donne un point A. Reconnaître la transformation qui associe à tout point M du plan ou de l'espace le point M' dans chacun des cas suivants :
- a) M' est le milieu de [AM] ;
- b) M' est le symétrique de A par rapport à M ;
- c) M' est le barycentre de (A, 1) et (M, 2).  Corrigé p. 360
- 9** On donne deux points distincts A et B. Reconnaître la transformation qui associe à tout point M du plan ou l'espace le point M' dans chacun des cas suivants :
- a) M' est le centre de gravité du triangle ABM ;
- b) M' est le barycentre de (A, 1), (B, 1) et (M, 3).  Corrigé p. 360
- 10** On donne trois points A, B, C. Reconnaître la transformation qui associe à tout point M du plan ou de l'espace le point M' dans chacun des cas suivants :
- a) $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$;

$$\text{b) } \overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}.$$

→ Corrigé p. 360

- 11** ★ On donne deux points A et B et k un réel non nul. Soit un point M quelconque du plan ou de l'espace :

M a pour image M_1 par l'homothétie $h(A, k)$;

M_1 a pour image M' par l'homothétie $h'\left(B, \frac{1}{k}\right)$.

Démontrer que $\overrightarrow{MM'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{AB}$ et reconnaître la transformation qui associe à M le point M' .

→ Corrigé p. 361

Ensemble de points

- 12** Un parallélogramme ABCD est tel que A et B sont fixes et C décrit une droite une droite Δ .

Quels sont les ensembles décrits par :

1. le quatrième sommet D ?
2. le centre du parallélogramme ?

→ Corrigé p. 361

- 13** On donne deux points A et B ; le point C décrit une droite \mathcal{D} .

Quels sont les ensembles décrits par :

1. le milieu A' de [BC] ?
2. le milieu B' de [AC] ?
3. l'isobarycentre G des points A, B, C ?

→ Corrigé p. 362

- 14** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, en supposant que C décrit un cercle Γ .

→ Corrigé p. 362

- 15** On donne deux points distincts A et B. Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre [AB]. Un point M décrit le cercle \mathcal{C} ; soit M_1 le symétrique de A par rapport à M et M' le milieu de $[BM_1]$.

1. Trouver l'ensemble décrit par M_1 .
2. En déduire l'ensemble décrit par M' .
3. Peut-on trouver l'ensemble décrit par M' sans passer par l'ensemble décrit par M_1 ?

→ Corrigé p. 363

16 Usage d'un ordinateur

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et A et B deux points diamétralement opposés sur le cercle \mathcal{C} . Un point M décrit \mathcal{C} privé de A et B . On construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.

- Utiliser un logiciel de géométrie pour répondre aux questions suivantes :
 - Sur quelle courbe se déplace le milieu I de $[MQ]$?
 - Sur quelle courbe se déplace le centre de gravité G du triangle BQM ?
 - Soit N le symétrique de A par rapport à M . Que peut-on dire de la disposition des points B, I, N ?
 - Soit P le point d'intersection des droites (ON) et (BM) . Sur quelle courbe se déplace le point P ?
- Trouver (par un raisonnement de géométrie) lorsque M décrit $\mathcal{C} - \{A, B\}$:
 - l'ensemble des points I ;
 - l'ensemble des points G ;
 - la disposition des points B, I, N ;
 - l'ensemble décrit par P .

→ Corrigé p. 363

17 ★ Comme au bac

Partie A

Soit un triangle ABC et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Soit O le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

- Démontrer que $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$.
- Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .
- On suppose B et C fixes ainsi que le cercle Γ . Le point A décrit Γ privé de B et C .
Quel est l'ensemble décrit par H ?

Partie B

- Soit G le centre de gravité du triangle ABC .
Démontrer que $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$.
- Quel est l'ensemble décrit par G lorsque A décrit Γ privé de B et C ?

→ Corrigé p. 367

- ★ Soit deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de même centre O et de rayons R et R' ($R < R'$). A est un point fixe de \mathcal{C} , une droite passant par A recoupe \mathcal{C} en M (distinct

de A ou non) et elle coupe \mathcal{C}' en N et P . La perpendiculaire en A à (AM) recoupe \mathcal{C} en Q . Soit I le milieu de $[AM]$. On suppose que M décrit \mathcal{C} .

1. Montrer que I est l'image de M par une homothétie que l'on précisera.

2. Quel est l'ensemble décrit par I par M décrit \mathcal{C} ?

3. Montrer que I est aussi le milieu de $[NP]$.

En déduire que les triangles AMQ et NPQ ont même centre de gravité G .

4. que peut-on dire de G quand M décrit \mathcal{C} ?

5. Soit R le milieu de $[PQ]$.

Quel est l'ensemble décrit par R quand M décrit \mathcal{C} ?

→ Corrigé p. 368

19 ★ Soit un tétraèdre $ABCD$. On considère les points :

B' centre de gravité du triangle ACD ,

G centre de gravité du tétraèdre $ABCD$,

H projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) .

En supposant B, C, D , et H fixes, trouver les ensembles décrit par A, B' et G .

→ Corrigé p. 369

Problèmes de construction

20 On donne deux droites sécantes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 et deux points A et B n'appartenant ni à \mathcal{D}_1 , ni à \mathcal{D}_2 . On suppose que (AB) n'est parallèle ni à \mathcal{D}_1 ni à \mathcal{D}_2 .

Construire un parallélogramme $ABCD$ de manière que C appartienne à \mathcal{D}_1 et D à \mathcal{D}_2 .

→ Corrigé p. 370

21 On donne deux droites sécantes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 et un point A n'appartenant ni à \mathcal{D}_1 , ni à \mathcal{D}_2 .

Construire les points M_1 et M_2 appartenant respectivement à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de manière que A soit le milieu de $[M_1M_2]$.

→ Corrigé p. 370

22 ★ Soit un cercle Γ de centre O et une droite Δ n'ayant pas de point commun avec Γ . Soit A un point de Γ . On suppose que la droite (OA) n'est ni parallèle à Δ , ni perpendiculaire à Δ .

On se propose de construire un cercle \mathcal{C} tangent à Δ et tangent à Γ en A .

1. Supposons qu'un tel cercle \mathcal{C} existe. Soit I le point de contact de Δ avec \mathcal{C} .

2. Quelle est l'image J de I par l'homothétie de centre A transformant \mathcal{C} en Γ ?

3. En déduire une construction du cercle \mathcal{C} tangent à Δ et tangent à Γ en A .

→ Corrigé p. 371

23 ★★ Soit un triangle ABC dont les angles \widehat{B} et \widehat{C} sont aigus.

1. Soit un carré MNPQ vérifiant les conditions :

$$(I) \begin{cases} M \text{ appartient à } [AB] \\ N \text{ et } P \text{ appartiennent à } [BC] \\ Q \text{ appartient à } [AC] \end{cases}$$

Soit un autre carré IJKL vérifiant les conditions :

$$(II) \begin{cases} I \text{ appartient à } [AB] \\ J \text{ et } K \text{ appartiennent à } (BC) \end{cases}$$

En utilisant l'homothétie de centre B transformant I en M, montrer que les points B, Q, L sont alignés.

2. En déduire une construction d'un carré MNPQ répondant aux conditions (I) à partir d'un carré IJKL répondant aux conditions (II).

3. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). On pose :

$$BC = a, \quad AH = h \quad \text{et} \quad MN = x.$$

a) MNPQ étant le carré construit précédemment, calculer x en fonction de a et h .

b) En déduire que, quel que soit le carré IJKL répondant aux conditions (II), le carré MNPQ répondant aux conditions (I) est un *unique*.

→ Corrigé p. 372

Propriétés des figures

24 Soit un trapèze ABCD [(AB) est parallèle à (CD)].

1. Construire les points suivants :

G barycentre de (A, 1) et (B, 2) ;

G' barycentre de (D, 1) et (C, 2) ;

2. Montrer que les droites (AD), (BC) et (GG') sont concourantes.

→ Corrigé p. 373

25 Soit un parallélogramme ABCD.

1. Construire les points suivants :

G barycentre de (A, 1) et (D, -3) ;

G' barycentre de (B, 1) et (C, -3) ;

2. Montrer que la droite (GG') est parallèle aux droites (AB) et (DC).

→ Corrigé p. 374

- 26** ★ Soit un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle Γ . Soit I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].

1. Montrer que les segments [IK] et [JL] se coupent en leur milieu Ω .

2. Par chacun des points I, J, K, L on mène les perpendiculaires respectivement à (CD), (DA), (AB), (BC).

Montrer que les droites obtenues sont concourantes.

→ Corrigé p. 374

Transformations définies analytiquement

- 27** Soit f l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, qui associe, à tout point $M(x; y)$, le point $M'(x'; y')$, tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

1. Déterminer un point invariant I par f (c'est-à-dire un point I tel que $f(I) = I$).

Calculer les coordonnées de \overrightarrow{IM} et de $\overrightarrow{IM'}$. En déduire la nature de l'application f .

2. Déterminer une équation de l'image par f de la droite \mathcal{D} d'équation :

$$x - y + 5 = 0.$$

→ Corrigé p. 375

- 28** Soit f l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, qui associe, à tout point $M(x; y)$, le point $M'(x'; y')$, tel que :

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la nature de l'application f (on calculera les coordonnées $\overrightarrow{MM'}$).

2. Déterminer une équation de l'image par f de la droite \mathcal{D} d'équation :

$$2x - y + 7 = 0.$$

→ Corrigé p. 376

- 29** ★ Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $h(I, -2)$ l'homothétie de centre $I(1; -1)$ et de rapport -2 . Un point quelconque $M(x; y)$ a pour image $M'(x'; y')$.

1. Définir analytiquement h (on calculera les coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M).

2. Déterminer une équation de l'image par h de :

a) la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 + x - 1$;

b) l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $y = \frac{x-1}{x+1}$.

➔ Corrigé p. 376

30 ★★ Soit $h(O, k)$ l'homothétie de centre O et de rapport k

$h'(O', k')$ l'homothétie de centre O' et de rapport k' .

On suppose O et O' distincts. Soit M un point quelconque de l'espace :

M a pour image M_1 par l'homothétie h ;

M_1 a pour image M' par l'homothétie h' ;

On se propose d'étudier analytiquement l'application f qui associe au point M le point M' . On choisit un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de manière que $\overrightarrow{OO'} = \vec{i}$.

1. Calculer : les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M ;

les coordonnées de M' en fonction de celles de M_1 ;

les coordonnées de M' en fonction de celles de M ;

2. Si $kk' = 1$, reconnaître l'application f .

3. Si $kk' \neq 1$, trouver un point invariant I par f (c'est-à-dire un point I tel que $f(I) = I$).

Reconnaître l'application f .

➔ Corrigé p. 377

31 ★★ Soit $h(O, k)$ l'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$, et soit

$t_{\overrightarrow{OA}}$ la translation de vecteur \overrightarrow{OA} .

Soit M un point quelconque de l'espace :

• M a pour image M_1 par $h(O, k)$;

• M_1 a pour image M' par $t_{\overrightarrow{OA}}$.

On se propose d'étudier analytiquement l'application f qui associe au point M le point M' . On choisit un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de manière que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

1. Calculer :

• les coordonnées de M_1 en fonction de celle de M ;

• les coordonnées de M' en fonction de celle de M_1 ;

• les coordonnées de M' en fonction de celle de M .

2. Trouver un point invariant I par f .

Reconnaître l'application f .

➔ Corrigé p. 378

VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES

- 1** a) Faux.
 b) Vrai. $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$.
 c) Vrai. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
 d) Vrai. $(AB) \parallel (A'B')$.
- 2** a) Faux. Non si \mathcal{D}_1 n'est pas parallèle à \mathcal{D} .
 b) Vrai, car $s \circ s = \text{id}$.
- 3** a) Vrai, car r conserve l'orthogonalité.
 b) Vrai, car r conserve le parallélisme.
 c) Faux. En général non.
- 4** a) Vrai. Une homothétie de centre O et de rapport 1.
 b) Vrai. Une translation de vecteur nul.
- 5** a) Faux, si $k \neq 1$.
 b) Vrai. Une homothétie conserve les angles.
 c) Vrai. Un carré homothétique.
- 6** a) Vrai. Une réflexion par rapport à une bissectrice laisse $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ invariant.
 b) Vrai. La symétrie par rapport à O.
- 7** a) Faux. G est aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.
 b) Vrai. $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.
 c) Faux. O est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$.
 $h(H) = O$ donc :
 d) Vrai. $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

8 a) $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

$M \mapsto M'$ par l'homothétie $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

$M \mapsto M'$ par l'homothétie $h(A, 2)$.

c) $M' = \text{Bar}\{(A, 1), (M, 2)\}$ donc $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$M \mapsto M'$ par l'homothétie $h\left(A, \frac{2}{3}\right)$.

9 a) Soit I le milieu de $[AB]$.

Puisque M' est le centre de gravité du triangle

ABM , $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$

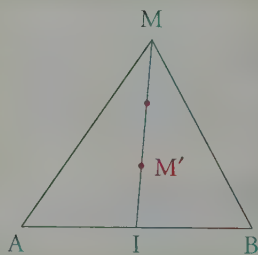
donc $M \mapsto M'$ par $h\left(I, \frac{1}{3}\right)$.

b) $M' = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (M, 3)\}$

$M' = \text{Bar}\{(I, 2), (M, 3)\}$, I étant le milieu de $[AB]$

donc $\overrightarrow{IM'} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{IM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IM}$

$M \mapsto M'$ par l'homothétie $h\left(I, \frac{3}{5}\right)$.



10 a) $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ [1]

Soit G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$; il existe car $3 + 1 - 1 = 3 \neq 0$;

$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Introduisons G dans l'égalité [1] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} &= 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$

$$\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$$

donc M a pour image M' par l'homothétie $h(G, -2)$.

$$\text{b) } \overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} \quad [2]$$

Le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, -4)$ n'existe pas puisque la somme des coefficients est $3 + 1 - 4 = 0$. Montrons alors que la somme $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ est indépendante de M . Introduisons le point A par exemple :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} &= 3\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

L'égalité [2] devient :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$$

donc M a pour image M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$.

$$\text{11) } M \xrightarrow{h(A, k)} M_1 \xrightarrow{h\left(B, \frac{1}{k}\right)} M'.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM_1} = k\overrightarrow{AM} \quad [1] \\ \overrightarrow{BM'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{BM_1} \quad [2] \end{array} \right.$$

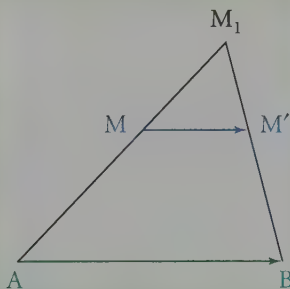
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'}.$$

Remplaçons \overrightarrow{MA} par $\frac{1}{k}\overrightarrow{M_1A}$ d'après [1]

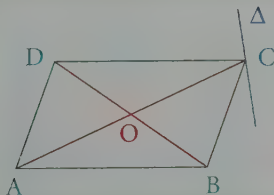
et $\overrightarrow{BM'}$ par $\frac{1}{k}\overrightarrow{BM_1}$ d'après [2] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \frac{1}{k}\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{k}\overrightarrow{BM_1} \\ &= \frac{1}{k}(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{BM_1}) + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{k}(\overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM_1}) + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{k}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

M a pour image M' par la translation de vecteur $\left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{AB}$.



12



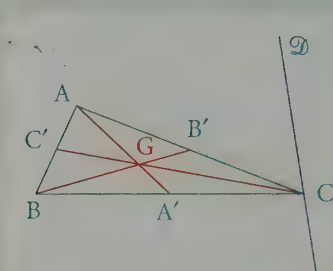
$$1. \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA},$$

le point D décrit la droite image de Δ par la translation de vecteur \overrightarrow{BA} .

2. Soit O le centre du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC};$$

Le point O décrit la droite image de Δ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.



$$1. \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

A' décrit la droite image de \mathcal{D} par l'homothétie $h\left(B, \frac{1}{2}\right)$.

$$2. \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$$

B' décrit la droite image de \mathcal{D} par l'homothétie $h'\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

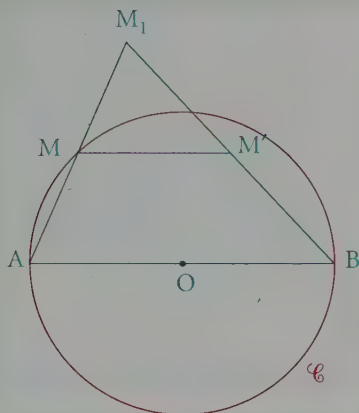
$$3. \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

G décrit la droite image de la droite décrite par A' , par l'homothétie $h''\left(A, \frac{2}{3}\right)$.

Remarque : Soit C' le milieu de $[AB]$, on a $[\overrightarrow{C'G}] = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ donc la droite décrite par G est aussi l'image de \mathcal{D} par l'homothétie de centre C' et de rapport $\frac{1}{3}$.

14 A', B', G décrivent des cercles images du cercle Γ (considérer encore les homothéties précédentes). Si Γ a pour rayon R , les cercles décrits par A' et B' ont pour rayon $\frac{R}{2}$; le cercle décrit par G a pour rayon $\frac{2R}{3} = \frac{R}{3}$. Les centres sont les images du centre Γ par les homothéties de l'exercice précédent.

15 1.



$\overrightarrow{AM_1} = 2\overrightarrow{AM}$ donc lorsque M décrit le cercle \mathcal{C} , le point M_1 décrit l'image \mathcal{C}_1 du cercle \mathcal{C} par l'homothétie $h(A, 2)$.

2. $\overrightarrow{BM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM_1}$ donc M' décrit l'image du cercle \mathcal{C}_1 par l'homothétie $h'(B, \frac{1}{2})$.

3. Puisque M est le milieu de $[AM_1]$ et M' le milieu de $[BM_1]$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{M_1B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} \quad (O \text{ centre de } \mathcal{C}).\end{aligned}$$

Donc M' est l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{OA} . Le point M' décrit le cercle image \mathcal{C}' par cette translation.

16 1. Nous utilisons le logiciel GEOPLANW.

a) Lorsque l'on précise « cliquer » c'est avec le bouton gauche de la souris.

1^{re} étape :

Créer (cliquer)

Point

Point libre

Dans le plan (cliquer)

Nom des points A, B, (cliquer sur OK)

2^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Milieu (cliquer)

Nom du segment AB

Nom du milieu O (cliquer sur OK)

3^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Cercle

Défini par centre et un point (cliquer)

Nom du centre O

Point du cercle A

Nom du cercle C (clique sur OK)

4^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Point libre

sur un cercle (cliquer)

Nom des points M (cliquer sur OK)

5^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Point image par

Translation point image (clique)

qui transforme le point A

en le point B

Points de départ M

Images de ces points Q (clique sur OK)

6^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Polygone

Polygone défini par ses sommets (cliquer)

Liste des sommets A, B, Q, M

Nom du polygone P_1 (cliquer sur OK)**7^e étape :**

Créer (cliquer)

Point

Milieu (cliquer)

Nom du segment MQ

Nom du milieu I (cliquer sur OK)

8^e étape :

Afficher (cliquer)

Sélection trace

cliquer sur I milieu de MQ

cliquer sur OK

9^e étape :

Afficher (cliquer)

Mode trace bascule (cliquer)

À cet instant, en cliquant sur le point M et en maintenant la touche gauche enfoncée, on déplace le point M le long du cercle \mathcal{C} . On voit que le point I se déplace sur un cercle de centre B de même rayon que \mathcal{C} .

b) 10^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Centre (divers)

Centre de gravité (cliquer)

Nom du triangle BQM

Centre de gravité G (cliquer sur OK)

11^e et 12^e étapes : identiques aux 8^e et 9^e étapes, remplacer « cliquer sur I milieu de MQ » par « cliquer sur G centre de gravité de BQM ». On voit que G se déplace sur un cercle de centre B.

c) 13^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Segment (cliquer)

Nom du segment BI, BM (cliquer sur OK)

14^e étape :

Créer (cliquer)

Point

Point image par

Symétrie centrale (cliquer)

Symétrie de centre M

Points de départ A

Images de ces points N (cliquer sur OK)

On voit que I paraît être le milieu de [BN].

d) 15^e étape :

Créer (cliquer)

Ligne

Segment (cliquer)

Nom du segment MN, ON (clique sur OK)

16^e étape :

Créer (cliquer)

Point

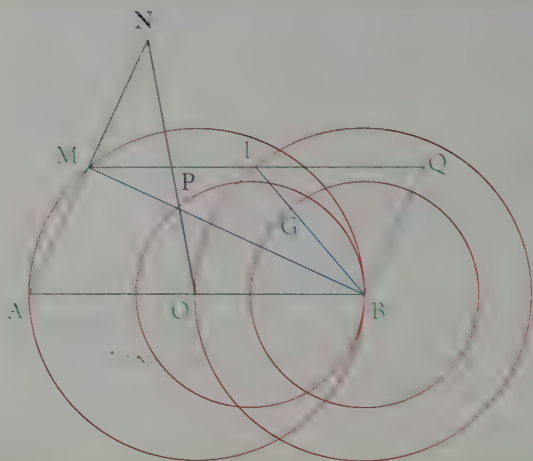
Intersection de deux droites (cliquer)

Première droite ON

Deuxième droite BM

Point d'intersection P (clique sur OK)

17^e et 18^e étapes : identiques aux 8^e et 9^e étapes, remplacer « cliquer sur I milieu MQ » par « cliquer sur P point d'intersection des droites ON et BM ». On voit que P se déplace sur un cercle de même rayon que le cercle sur lequel se déplace G.



2. a) Puisque I est le milieu de [MQ],

$$\vec{MI} = \frac{1}{2}\vec{MQ} = \vec{AO}.$$

Donc I est l'image de M par la translation de vecteur \vec{AO} . Le point M décrivant le cercle \mathcal{C} privé de A et B, le point I décrit l'image de cet ensemble (cercle privé de deux points) par la translation $t_{\vec{AO}}$.

b) Le centre de gravité G du triangle BQM est aux $\frac{2}{3}$ de la médiane [BI] en partant de B c'est-à-dire que :

$$\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BI}.$$

Le point G décrit un cercle privé de deux points, image de l'ensemble décrit par I dans l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

c) Montrons que le quadrilatère MBQN est un parallélogramme :

puisque MABQ est un parallélogramme, $\vec{BQ} = \vec{AM}$;

puisque M est le milieu de [AN], $\vec{MN} = \vec{AM}$;

donc $\vec{BQ} = \vec{MN}$ et le quadrilatère MBQN est un parallélogramme.

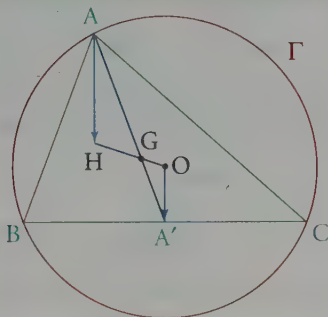
Il en résulte que les diagonales [MQ] et [BN] se coupent en leur milieu I.

d) Le point P est le point d'intersection des médianes [ON] et [BM] du triangle ABN donc P est le centre de gravité de ce triangle :

$\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{BM}$ donc P décrit l'image $\mathcal{C} - \{A, B\}$ par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

Remarque : On a aussi $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{ON}$ donc P décrit l'image de l'ensemble décrit par N par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

17



Partie A

$$1. \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad [1]$$

$$\vec{OH} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\vec{AH} = \vec{OB} + \vec{OC}$$

Puisque A' est le milieu de [BC], $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}'$ donc :

$$\vec{AH} = 2\vec{OA}'.$$

2. On a, de même, en utilisant [1] :

$$\vec{BH} = \vec{OH} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OB}'$$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OC}'$$

Il en résulte que \vec{AH} , \vec{BH} , \vec{CH} sont respectivement colinéaires à \vec{OA}' , \vec{OB}' , \vec{OC}' .

L'un des vecteurs \vec{OA}' , \vec{OB}' , \vec{OC}' est nul si le triangle ABC est un triangle rectangle. Mais ABC ne peut avoir deux angles droits donc deux au moins des vecteurs \vec{OA}' , \vec{OB}' , \vec{OC}' sont non nuls et deux au moins des couples (O, A'), (O, B'), (O, C') déterminent deux droites orthogonales à deux côtés du triangle ABC.

Par suite, deux au moins des couples (A, H), (B, H), (C, H) déterminent deux droites orthogonales à deux côtés du triangle ABC. Ce sont donc des hauteurs et H est l'orthocentre de ABC.

3. Puisque $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$, le point H est l'image de A par la translation $t_{2\vec{OA}'}$.

Si A décrit $\Gamma - \{B, C\}$, le point H décrit l'image de cet ensemble (cercle privé de deux points) par la translation $t_{2\vec{OA}'}$.

Partie B

1. G est l'isobarycentre des points A, B, C donc :

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

et, puisque $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, on a bien : $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$.

Remarque : Lorsque O, G, H sont distincts (c'est-à-dire lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral), ils déterminent une droite appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.

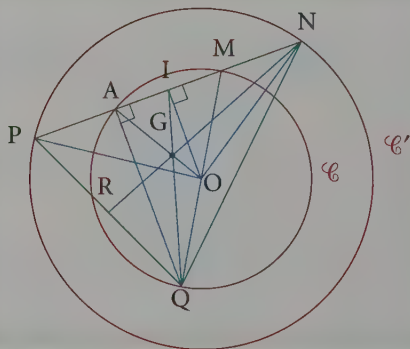
2. Puisque $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$, le point G est l'image de H par l'homothétie $h\left(O, \frac{1}{3}\right)$ et l'ensemble décrit par G est l'image par h de l'ensemble décrit par H.

Remarque : On peut aussi remarquer, puisque G est centre de gravité du triangle ABC, que :

$$\vec{A'G} = \frac{1}{3}\vec{A'A}$$

donc G est l'image de A par l'homothétie $h'\left(A', \frac{1}{3}\right)$ et l'ensemble décrit par G est l'image par h' de l'ensemble décrit par A.

18



1. $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AM}$, donc I est l'image de M par l'homothétie $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

2. I décrit l'image de \mathcal{C} par l'homothétie précédente.

3. ● On sait que I est le milieu de [AM], la droite (OI) est une médiane et hauteur du triangle isocèle AOM. Elle est aussi hauteur du triangle isocèle NOP, donc aussi une médiane du triangle NOP.

Donc le milieu I de [AM] est aussi le milieu de [NP].

● Les triangles AMQ et NPQ ont la médiane [QI] commune, donc ils ont même centre de gravité G.

4. Soit [AO] la médiane passant par A du triangle AMQ.

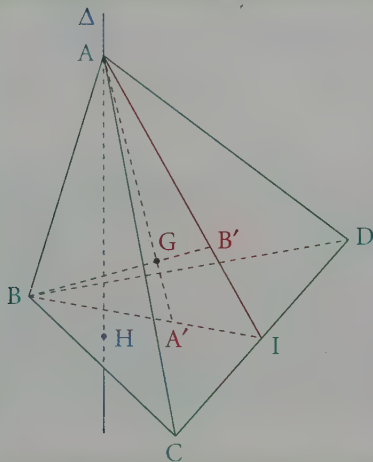
$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{OA}, \text{ donc } G \text{ est fixe.}$$

5. Soit [NR] la médiane passant par N du triangle NPQ.

$$\vec{GR} = -\frac{1}{2}\vec{GN}, \text{ donc } R \text{ est l'image de } N \text{ par l'homothétie } h'\left(G, -\frac{1}{2}\right).$$

Quand M décrit \mathcal{C} , le point N décrit \mathcal{C}' . Le point R décrit l'image de \mathcal{C}' par l'homothétie h' .

19



• Soit un tétraèdre ABCD, si le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD) est fixe, A appartient à la droite Δ perpendiculaire en H au plan (BCD).

Réciproquement, soit A un point de Δ , on obtient un tétraèdre ABCD à condition que les points A, B, C, D ne soient pas coplanaires donc A distinct de H. Le point A a bien pour projeté orthogonal sur le plan (BCD) le point H. L'ensemble des points A est donc la droite Δ privée de H.

• Soit I le milieu de [CD],

$\vec{IB'} = \frac{1}{3}\vec{IA}$ donc B' est l'image de A par l'homothétie $h\left(I, \frac{1}{3}\right)$ et l'ensemble décrit par B' est l'image de l'ensemble décrit par A (droite privée d'un point) par $h\left(I, \frac{1}{3}\right)$.

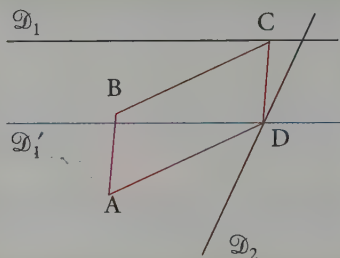
• $G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$. Soit A' le centre de gravité du triangle BCD.

$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (A', 3)\} \text{ donc } \vec{A'G} = \frac{1}{1+3}\vec{A'A},$$

$\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A'A}$, puisque B, C, D sont fixes, le point A' est fixe.

G est l'image de A par l'homothétie $h'\left(A', \frac{1}{4}\right)$ et l'ensemble décrit par G est l'image de l'ensemble décrit par A (droite privée d'un point) par $h'\left(A', \frac{1}{4}\right)$.

20

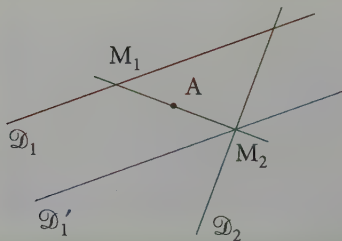


Analyse. • Si le parallélogramme répond à la question $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, donc D appartient à la droite \mathcal{D}'_1 image de \mathcal{D}_1 par la translation de vecteur \overrightarrow{BA} .

Synthèse. • On construit \mathcal{D}'_1 image de \mathcal{D}_1 par la translation de vecteur \overrightarrow{BA} .

- D est le point d'intersection de \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}'_1 (car \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes).
- On construit la parallèle à (AB) menée par D ; elle rencontre \mathcal{D}_1 en C. ABCD est le parallélogramme cherché.

21



Analyse. • Si A est le milieu de $[M_1M_2]$ avec $M_1 \in \mathcal{D}_1$ et $M_2 \in \mathcal{D}_2$, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point A, donc M_2 appartient à la droite \mathcal{D}'_1 image de \mathcal{D}_1 par la symétrie de centre A.

Synthèse. • On construit \mathcal{D}'_1 image de \mathcal{D}_1 par la symétrie de centre A.

- M_2 est le point d'intersection de \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}'_1 .
 - La droite (AM_2) rencontre \mathcal{D}_1 en M_1 .
- Le point A est bien le milieu de $[M_1M_2]$ car M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à A.

- (AJ) et (AJ') rencontrent Δ respectivement en I et I'.
- Les perpendiculaires à Δ en I et I' rencontrent (OA) respectivement en C et C'.
- On construit les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de centres C et C' et passant par A.

Les cercles construits \mathcal{C} et \mathcal{C}' répondent-ils à la question ?

Ils sont bien tangents en A à Γ car C, A, O sont alignés ainsi que C', A, O et le point de contact de ces cercles est A.

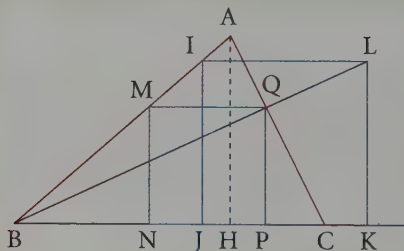
Les droites (IC) et (OJ) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{AO}{AC} = \frac{OJ}{CI};$$

comme $AO = OJ$, on en déduit $AC = CI$ et le cercle \mathcal{C} passe par I. Comme Δ est perpendiculaire à (IC), le cercle \mathcal{C} est bien tangent à Δ .

De même, $(I'C') \parallel (OJ')$ donc $\frac{AO}{AC'} = \frac{OJ'}{C'I'}$. Comme $AO = OJ'$, on a $AC' = C'I'$ donc \mathcal{C}' passe par I'. Comme Δ est perpendiculaire à (I'C'), le cercle \mathcal{C}' est bien tangent à Δ .

23 1.



L'homothétie de centre B qui transforme I en M, transforme le carré IJKL en un carré de côtés parallèles à ceux du carré IJKL et dont l'un des sommets est M. D'autre part, les sommets J et K appartenant à (BC), leurs images par cette homothétie appartiennent aussi à (BC). L'image du carré IJKL par cette homothétie est donc le carré MNPQ.

L'image de L par cette homothétie est le point Q donc les points B, Q, L sont alignés.

2. On construit :

- un carré IJKL répondant aux conditions (II) ;
- Q point d'intersection de (BL) et [AC] ;
- la parallèle menée par Q à (BC) rencontrant [AB] en M ;
- la perpendiculaire menée par Q à (BC) rencontrant [BC] en P ;
- la perpendiculaire menée par M à (BC) rencontrant [BC] en N.

Le quadrilatère MNPQ est un carré car il est l'image du carré IJKL par une homothétie de centre B et MNPQ répond aux conditions (I).

3. a) Dans le triangle ABH, la droite (MN) est parallèle à (AH) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{MN}{AH} = \frac{BN}{BH} \text{ que l'on peut écrire } \frac{x}{h} = \frac{BN}{BH}.$$

Dans le triangle ACH, la droite (QP) est parallèle à (AH) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{QP}{AH} = \frac{CP}{CH} \text{ que l'on peut écrire } \frac{x}{h} = \frac{CP}{CH}.$$

On a alors $\frac{x}{h} = \frac{BN}{BH} = \frac{CP}{CH}$ d'où $\begin{cases} x \times BH = h \times BN \\ x \times CH = h \times CP \end{cases}$

d'où : $x(BH + CH) = h(BN + CP)$

$$ax = h(a - x)$$

$$ax = ha - hx$$

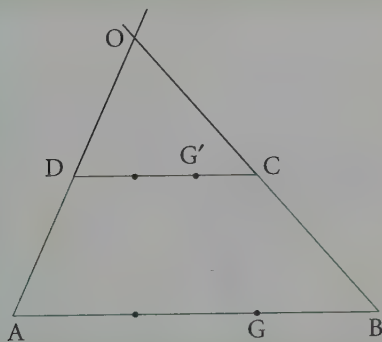
$$ax + hx = ha$$

$$x(a + h) = ha$$

$$x = \frac{ha}{a + h}.$$

b) Quel que soit le carré IJKL répondant aux conditions (II), la distance x de M à la droite (BC) est unique donc le carré MNPQ obtenu est unique.

24 1.

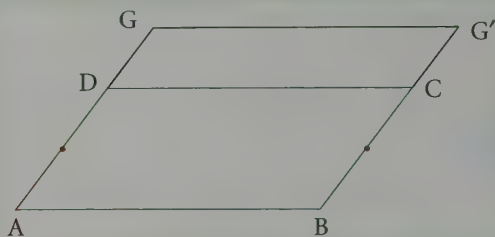


$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 2)\} \quad \text{donc} \quad \vec{AG} = \frac{2}{1+2}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AB}.$$

$$G' = \text{Bar}\{(D, 1), (C, 2)\} \quad \text{donc} \quad \vec{DG'} = \frac{2}{1+2}\vec{DC} = \frac{2}{3}\vec{DC}.$$

2. Soit O le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Il existe une homothétie h de centre O qui transforme A en D et B en C. h conserve le barycentre donc l'image de G par h est G' . Donc les points O, G, G' , sont alignés. Les droites (AD), (BC) et (GG') sont concourantes en O.

25 1.



$$G = \text{Bar}\{(A, 1), (D, -3)\} \quad \text{donc} \quad \vec{AG} = \frac{-3}{1-3} \vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AD}.$$

$$G' = \text{Bar}\{(B, 1), (C, -3)\} \quad \text{donc} \quad \vec{BG'} = \frac{-3}{1-3} \vec{BC} = \frac{3}{2} \vec{BC}.$$

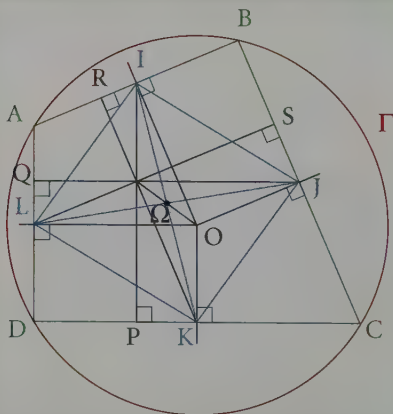
2. Soit $t_{\vec{AB}}$ la translation de vecteur \vec{AB} :

$$t_{\vec{AB}}(A) = B \quad \text{et} \quad t_{\vec{AB}}(D) = C.$$

$t_{\vec{AB}}$ conserve le barycentre donc l'image de G par $t_{\vec{AB}}$ est G'.

Donc $\vec{GG'} = \vec{AB}$. La droite (GG') est parallèle aux droites (AB) et (DC).

26



1. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC] donc :

$$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

L est le milieu de [AD] et K est le milieu de [DC]. On a de même :

$$\vec{LK} = \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

On en déduit que $\vec{LK} = \vec{IJ}$ et le quadrilatère IJKL est un parallélogramme. Les diagonales [IK] et [JL] se coupent en leur milieu Ω .

2. Soit P, Q, R, S les projetés orthogonaux respectivement de I, J, K, L sur (CD), (DA), (AB), (BC).

Dans la symétrie s de centre Ω : $I \mapsto K$; $J \mapsto L$; $K \mapsto I$; $L \mapsto J$.

Les droites (IP), (JQ), (KR), (LS) ont pour images les droites qui leur sont respectivement parallèles et qui passent par K, L, I, J. Ces images sont les médiatrices des côtés du quadrilatère ABCD, Elles passent par le centre O de Γ puisque ABCD est inscrit dans Γ .

Donc (IP), (JQ), (KR), (LS) sont concourantes au point $s(O)$ image de O par s .

27 1. $M(x; y)$ est invariant si et seulement si :

$$\begin{cases} x = 3x + 2 \\ y = 3y - 4 \end{cases}$$

La solution de ce système est $(-1; 2)$. Le point invariant par f est $I(-1; 2)$.

\vec{IM} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$$\vec{IM}'(x'+1) = \begin{pmatrix} 3x+2+1 \\ 3y-4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+3 \\ 3y-6 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{IM}' = 3\vec{IM}$,

f est l'homothétie de centre $I(-1; 2)$ et de rapport 3.

$$2. \begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' - 2) \\ y = \frac{1}{3}(y' + 4) \end{cases}$$

Une équation de l'image de \mathcal{D} est une équation vérifiée par x' et y' pour que M appartienne à \mathcal{D} .

$M(x; y)$ appartient à \mathcal{D} si et seulement si l'on a successivement :

$$x - y + 5 = 0$$

$$\frac{1}{3}(x' - 2) - \frac{1}{3}(y' + 4) + 5 = 0$$

$$x' - y' + 9 = 0.$$

c'est une équation de \mathcal{D}' image de \mathcal{D} .

$$28 \quad 1. \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -3 \\ y' - y = 1 \end{cases}$$

Pour tout point M , $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées -3 et 1 .

Donc f est la translation de vecteur $\vec{u}(-3; 1)$.

2. Raisonnons comme à l'exercice précédent :

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

$M(x; y)$ appartient à \mathcal{D} si et seulement si l'on a successivement :

$$\begin{aligned} 2x - y + 7 &= 0 \\ 2(x' + 3) - (y' - 1) + 7 &= 0 \\ 2x' + 6 - y' + 1 + 7 &= 0 \\ 2x' - y' + 14 &= 0 \end{aligned}$$

c'est une équation de l'image de la droite \mathcal{D} .

$$29 \quad 1. \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM}$$

$$\overrightarrow{IM'} \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' + 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} x' - 1 = -2(x - 1) \\ y' + 1 = -2(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$$

2. a) La parabole \mathcal{P} a pour équation : $y = x^2 + x - 1$.

Procédons comme dans les exercices 27 et 28 :

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' - 3}{-2} \\ y' = \frac{y' + 3}{-2} \end{cases}$$

$M(x; y)$ appartient à \mathcal{P} si et seulement si l'on a successivement :

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x - 1 \\ \frac{y' + 3}{-2} &= \frac{(x' - 3)^2}{4} - \frac{x' - 3}{2} - 1 \\ y' + 3 &= -\frac{1}{2}(x' - 3)^2 + x' - 3 + 2 \end{aligned}$$

$$y' = -\frac{1}{2}(x' - 3)^2 + x' - 4$$

$$y' = -\frac{1}{2}(x'^2 - 6x' + 9) + x' - 4$$

$$y' = -\frac{1}{2}x'^2 + 4x' - \frac{17}{2}$$

c'est une équation de l'image de \mathcal{P} qui est encore une parabole.

b) L'hyperbole \mathcal{H} a pour équation : $y = \frac{x-1}{x+1}$.

$M(x; y)$ appartient à \mathcal{H} si et seulement si l'on a successivement :

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{y'+3}{-2} = \frac{\frac{x'-3}{x'+1} - 1}{-2}, \text{ soit } \frac{y'+3}{-2} = \frac{x'-1}{x'-5}$$

$$y'+3 = \frac{-2x'+2}{x'-5}$$

$$y' = \frac{-2x'+2}{x'-5} - 3, \text{ soit } y' = \frac{-5x'+17}{x'-5}$$

c'est une équation de l'image de \mathcal{H} qui est encore une hyperbole.

30 1. $M(x; y; z) \xrightarrow{h} M_1(x_1; y_1; z_1) \xrightarrow{h'} M'(x'; y'; z')$.

$$\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'M_1}$$

$$\begin{cases} x_1 = kx \\ y_1 = ky \\ z_1 = kz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' - 1 = k'(x_1 - 1) \\ y' = k'y_1 \\ z' = k'z_1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x' = k'x_1 + 1 - k' \\ y' = k'y_1 \\ z' = k'z_1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$[1] \begin{cases} x' = kk'x + 1 - k' \\ y' = kk'y \\ z' = kk'z \end{cases}$$

2. Si $kk' = 1$:

$$\begin{cases} x' = x + 1 - k' \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(1 - k' ; 0 ; 0)$. L'application f est la translation de vecteur $(1 - k' ; 0 ; 0)$, c'est-à-dire de vecteur :

$$(1 - k')\overrightarrow{OO'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{OO'}$$

3. Si $kk' \neq 1$.

I est invariant par f si et seulement si l'on a successivement :

$$[2] \begin{cases} x_1 = kk'x_1 + 1 - k' \\ y_1 = kk'y_1 \\ z_1 = kk'z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - kk')x_1 = 1 - k' \\ (1 - kk')y_1 = 0 \\ (1 - kk')z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1 - k'}{1 - kk'} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1 - k'}{1 - kk'}\overrightarrow{OO'} \quad (\text{puisque } \overrightarrow{OO'} = \vec{i}).$$

Montrons que f est une homothétie de centre le point invariant I. Pour cela, cherchons une relation entre $\overrightarrow{IM'}$ et \overrightarrow{IM} .

En revanchant membre à membre les égalités des systèmes [1] et [2], on trouve immédiatement :

$$\begin{cases} x' - x_1 = kk'(x' - x_1) \\ y' - y_1 = kk'(y' - y_1) \quad \text{soit } \overrightarrow{IM'} = kk'\overrightarrow{IM} \\ z' - z_1 = kk'(z' - z_1) \end{cases}$$

L'application f est l'homothétie de centre I et de rapport kk' .

31 1. $M(x ; y ; z) \xrightarrow{h} M_1(x_1 ; y_1 ; z_1) \xrightarrow{\overrightarrow{OA}} M'(x' ; y' ; z')$

$$\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{OA} = \vec{i}$$

$$\begin{cases} x_1 = kx \\ y_1 = ky \\ z_1 = kz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' - x_1 = 1 \\ y' - y_1 = 0 \\ z' - z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x' = x_1 + 1 \\ y' = y_1 \\ z' = z_1 \end{cases}$$

On en déduit :

$$[1] \begin{cases} x' = kx + 1 \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$$

2. I est invariant par f si est seulement si :

$$[2] \begin{cases} x_1 = kx_1 + 1 \\ y_1 = ky_1 \\ z_1 = kz_1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} (1-k)x_1 = 1 \\ (1-k)y_1 = 0 \\ (1-k)z_1 = 0 \end{cases}$$

On a supposé $k \neq 1$ dans l'énoncé donc

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{1-k} \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

Puisque $\vec{OA} = \vec{i}$, le point I est défini par :

$$\vec{OI} = \frac{1}{1-k} \vec{OA}.$$

Montrons que f est une homothétie de centre le point invariant I. Pour cela, cherchons une relation entre \vec{IM}' et \vec{IM} .

En retranchant membre à membre les égalités des systèmes [1] et [2], on trouve immédiatement :

$$\begin{cases} x' - x_1 = k(x - x_1) \\ y' - y_1 = k(y - y_1) \\ z' - z_1 = k(z - z_1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \vec{IM}' = k \vec{IM}.$$

L'application f est l'homothétie de centre I et de rapport k .

N° d'éditeur 10147246 - Dépôt légal juin 2008
Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames



La première
imprimerie
en France
titulaire de :



Qualité d'Or
de l'Imprimerie
2008



- De très nombreux exercices pour vérifier ses connaissances et s'entraîner intensivement.
- Un classement par thèmes et par difficulté croissante.
- Tous les corrigés détaillés, avec toutes les étapes des calculs et des indications de méthode.
- Et en début de chapitre, l'essentiel du cours à connaître.

Les Guides ABC BAC en Première :
une gamme pour tous les besoins

Pour progresser avec méthode

le Guide RÉVISIONS

- Histoire-Géographie, L/ES/S, n°100
- Français toutes séries, n°110
- Sciences éco. et sociales, ES, n°120
- Mathématiques, S, n°130
- Mathématiques, ES, n°132
- Physique-Chimie, S, n°140
- SVT, S, n°150
- Enseignement scientifique, ES, n°151

Pour s'exercer intensivement

le Guide COURS & SUJETS

- Français, L/ES/S, n°111

le Guide ENTRAÎNEMENT

- Maths, S obl. et spé., n°134

ISBN : 978 209 187 445 6 **11,50€**



9 782091 874456