CARGO

Collection de Mathématiques

1re C/S

S1

S3

E

Hachette
LIVRE INTERNATIONAL

Sommaire

1 Barycentre de points pondérés

Lorsque deux objets sont attirés par la force de gravité, ils tournent l'un autour de l'autre, autour d'un point fixe : leur barycentre ou centre de gravité.
Par exemple, comme une étoile est plus massive qu'une planète, le centre de gravité est très proche du centre de l'étoile et, par cet effet, il est possible de rechercher des exoplanètes, planètes situées en-dehors du système solaire.

Le terme de barycentre vient du mot grec *barus* qui signifie lourd.
Il désigne un point d'équilibre et provient du théorème des moments, découvert par Archimède au III^{e} siècle avant J.-C.

Les objectifs du chapitre

- Connaître la définition d'un barycentre.
- Construire le barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés.
- Connaître les barycentres particuliers.
- Maîtriser la propriété du barycentre partiel.
- Déterminer une ligne de niveau.

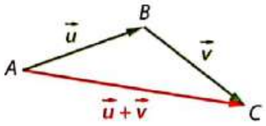
1 Cours

1 Rappels sur les vecteurs

a Généralités

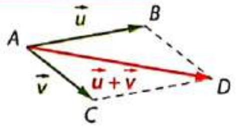
Relation de Chasles

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Propriété du paralélogramme

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Définition

Deux **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction.

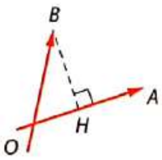
Propriétés

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0$.

b Produit scalaire

Définitions

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H désigne le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
Le **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$** est le nombre réel $\overline{OA} \times \overline{OH}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.



- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs du plan.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

2 Barycentre de deux points pondérés

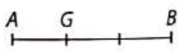
Propriétés Définitions

A et B désignent deux points du plan et a et b deux nombres réels.

- Un **point pondéré** est un couple (A, a) formé d'un point A et d'un nombre réel a, appelé **coefficient** du point A.
- Si $a + b \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Le point G est appelé **barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b)** et est noté $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\}$.
- Si $a + b = 0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.

Remarque Si a désigne un nombre réel non nul, le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, a) est appelé isobarycentre de A et B : c'est le milieu du segment $[AB]$.

Exemple Comme $2 + 1 \neq 0$, le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$ et $(A, 1)$ existe et vérifie $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

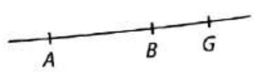


Propriété (homogénéité)

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel k non nul : pour tout nombre réel k non nul, $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\} \Leftrightarrow G = \text{bary}\,\{(A, ka), (B, kb)\}$.

Propriété

A et B désignent deux points distincts du plan.



Si $G = \text{bary}\,\{(A, a)$ et $(B, b)\}$, alors $G \in (AB)$.

Propriété

(A, a) et (B, b) désignent deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$.

Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB})$ où $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\}$.

Exemple

Si $G = \text{bary}\,\{(A, -3), (B, 1)\}$, alors tout point M du plan $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{-2}(-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$.

1 Construire le barycentre de deux points pondérés

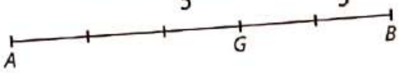
A et B désignent deux points et a et b deux nombres réels.
Construire, lorsque cela est possible, le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :
a. $a=2$ et $b=3$; **b.** $a=1$ et $b=-1{,}5$; **c.** $a=-3$ et $b=3$.

Solution commentée

a. • $a+b=5\neq 0$, donc les points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 3)$ admettent un unique barycentre noté G.

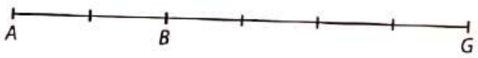
• Par définition, on a : $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :
$2\overrightarrow{GA}+3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$



b. • $a+b=-0{,}5\neq 0$, donc les points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -1{,}5)$ admettent un unique barycentre noté G.

• Par définition, on a : $\overrightarrow{GA}-1{,}5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles :
$\overrightarrow{GA}-1{,}5(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow -0{,}5\overrightarrow{GA}=-1{,}5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$.



c. Comme $a+b=0$, le barycentre des points pondérés $(A, -3)$ et $(B, 3)$ n'existe pas.

Méthode

(A, a) et (B, b) désignent deux points pondérés.

• Calculer $a+b$:
– si $a+b=0$, le barycentre n'existe pas ;
– si $a+b\neq 0$, le barycentre existe.

• Dans le cas $a+b\neq 0$, noter par exemple G le barycentre. Écrire la définition du barycentre $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ et utiliser la relation de Chasles pour arriver à une relation du type $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ (*).

• Placer alors sur la droite (AB) le point G vérifiant l'égalité (*).

2 Utiliser la définition et l'homogénéité d'un barycentre

E, F, N sont trois points tels que $\overrightarrow{EN}=5\overrightarrow{EF}$.
Déterminer deux couples de nombres réels (a, b) tels que N soit le barycentre des points pondérés (E, a) et (F, b).

Solution commentée

• D'après la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{EN}=5\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EN}=5(\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{NF}).$$
Donc $4\overrightarrow{NE}-5\overrightarrow{NF}=\vec{0}$.

• Comme $4+(-5)\neq 0$, N est le barycentre des points pondérés $(E, 4)$ et $(F, -5)$.

• Ainsi, $N=\text{bary}\{(E, 4), (F, -5)\}$.
(On peut aussi conclure que :
$N=\text{bary}\{(E, 8), (F, -10)\}$ ou $N=\text{bary}\{(E, -8), (F, 10)\}$ ou…).

Méthode

• Utiliser la relation de Chasles et les propriétés sur les vecteurs pour se ramener à une expression de la forme :
$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

• Si $a+b\neq 0$, alors :
$$G=\text{bary}\{(A, a), (B, b)\}.$$
Dès lors, pour tout $k\neq 0$,
$$G=\text{bary}\{(A, ka), (B, ka)\}.$$

S'exercer

3 A et B désignent deux points.
Construire le barycentre, lorsqu'il existe, des points pondérés (A, a) et (B, b).
a. $a=0{,}1$ et $b=-0{,}1$; **b.** $a=7$ et $b=-3$.

4 M, N, P désignent trois points tels que $\overrightarrow{MP}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN}$.
Déterminer deux couples de nombres réels a et b tels que $P=$ bary $\{(A, a), (B, b)\}$.

1 Cours

Coordonnées d'un barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
G désigne le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) avec $a+b\neq 0$.
$(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$ sont les coordonnées respectives des points A et B.

Les coordonnées de G sont $\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}\,;\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$.

Exemple

Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $A(1\,;-2)$ et $B(0{,}5\,;0)$.
Les coordonnées de $G=\text{bary}\,\{(A, 1), (B, 2)\}$ sont $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

3 Barycentre de plus de deux points pondérés

a Cas de trois points

Propriétés Définition

A, B, C désignent trois points du plan et a, b, c trois nombres réels.

- Si $a+b+c\neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- Le point G est appelé **barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c)** et est noté : $G=\text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.
- Si $a+b+c=0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M.

Coordonnées d'un barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. G désigne le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) avec $a+b+c\neq 0$. (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C) sont les coordonnées respectives des points A, B et C.
Les coordonnées de G sont $\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\,;\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$.

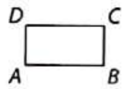
Propriété

Si $G=\text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right).$$

Remarque Si a désigne un nombre réel non nul, le barycentre des points pondérés (A, a), (B, a) et (C, a) est appelé isobarycentre des points A, B, C : c'est le centre de gravité du triangle ABC.

Exemple



Dans le rectangle $ABCD$, comme $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$, $A=\text{bary}\,\{(B, 1), (C, -1), (D, 1)\}$.

b Cas de quatre points

Propriétés Définitions

A, B, C, D désignent quatre points du plan et a, b, c, d quatre nombres réels.

- Si $a+b+c+d\neq 0$, alors il existe un unique point G tel que : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Le point G est appelé **barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d)** et est noté :
$G=\text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$.

- Si $a+b+c+d=0$, alors le vecteur $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}$ est indépendant du point M.

Propriété

Si $G=\text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{a+b+c+d}\left(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}\right).$$

Remarque Si a désigne un nombre réel non nul, le barycentre des points pondérés (A, a), (B, a), (C, a) et (D, a) est appelé isobarycentre des points A, B, C, D.

Coordonnées d'un barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. G désigne le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d) avec $a+b+c+d\neq 0$. (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) et (x_D, y_D) sont les coordonnées respectives des points A, B, C et D. Les coordonnées de G sont $\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d}\,;\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}\right)$.

c Homogénéité

Le barycentre de trois, ou plus, points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

1 Savoir-faire

5 Construire le barycentre de trois points pondérés

A, B et C et désignent trois points du plan non alignés.
Construire le point G, barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$.

Solution commentée

Par définition du barycentre $(3 + (-2) + 1 \neq 0)$, on a :

$$3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

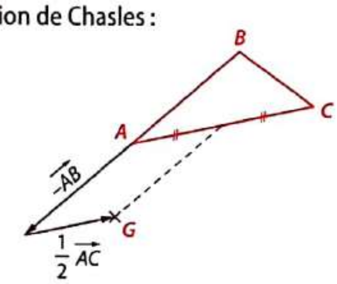
Ainsi, en utilisant deux fois la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$



Méthode

- Écrire l'égalité vectorielle $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ conséquence de la définition de $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.
- Utiliser la relation de Chasles pour exprimer l'un des trois vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BG}$ ou $\overrightarrow{CG}$ en fonction de A, B et C uniquement.
Par exemple : $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$ avec k et k' deux nombres réels.
- Construire le vecteur $\vec{u} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.
- Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u}$.

6 Déterminer les coordonnées d'un barycentre

On munit le plan du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
A, B, C et D sont quatre points de coordonnées respectives $(2 ; -3)$, $(1 ; 0)$, $(0 ; -1)$ et $\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$.
G désigne le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 3)$ et $(D, 2)$.
Déterminer les coordonnées du point G.

Solution commentée

$G = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, -1), (C, 3), (D, 2)\}$.

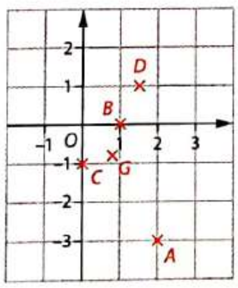
$(1 + (-1) + 3 + 2 = 5 \neq 0)$

Les coordonnées de G sont :

$$x_G = \frac{1\times 2 - 1\times 1 + 3\times 0 + 2\times\frac{3}{2}}{5} = \frac{4}{5}$$

et

$$y_G = \frac{1\times(-3) - 1\times 0 + 3\times(-1) + 2\times 1}{5} = -\frac{4}{5}.$$



Méthode

Si a, b, c, d désignent quatre nombres réels tels que :

$$a + b + c + d \neq 0$$

et $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$,

alors :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a + b + c + d}$$

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a + b + c + d}.$$

S'exercer

7 A, B, C désignent trois points du plan, non alignés.
Construire les points :

a. $G = \text{bary}\,\{(A, 2), (B, -4), (C, 1)\}$;

b. $G' = \text{bary}\,\{(A, 6), (B, 3), (C, 3)\}$.

8 G, H, K désignent trois points du plan, non alignés tels que :

$$3\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{HK}.$$

a. Écrire G comme le barycentre de (H, a) et (K, b).

b. Construire G.

9 Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne :

$$A(0 ; -1) ;\ B\left(5 ; \frac{4}{3}\right) \text{ et } C\left(-\frac{1}{5} ; 0\right).$$

a. Justifier l'existence du barycentre G des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(C, -2)$.

b. Déterminer les coordonnées du point G.

10 Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $E(1 ; -1)$ et $G(2 ; 0)$.
Déterminer les coordonnées du point F tel que le point G soit le barycentre des points $(E, 3)$ et $(F, 2)$.

4 Barycentres partiels

Propriété Définition

(A, a), (B, b) et (C, c) désignent trois points pondérés tels que $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$.
H est le barycentre des point pondérés (A, a) et (B, b). Le barycentre G des point pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) est le barycentre des point pondérés $(H, a+b)$ et (C, c). Le point H est appelé **barycentre partiel**.

Remarque
On peut schématiser la propriété de la façon suivante :
si $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$,
alors $G = \text{bary}\,\{(H, a+b), (C, c)\}$
avec $H = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\}$.

Exemple
$G = \text{bary}\,\{(A, 2), (B, 3), (C, -1)\}$.
$H = \text{bary}\,\{(B, 3), (C, -1)\}$.
D'après la propriété du barycentre partiel,
$G = \text{bary}\,\{(A, 2), (H, 3+(-1))\} = \text{bary}\,\{(A, 2), (H, 2)\}$
G est donc le milieu du segment $[AH]$.

5 Lignes de niveau

a Généralités

Définition

k désigne un nombre réel et f une application du plan dans les nombres réels.
On appelle ligne de niveau k l'ensemble, noté $(\mathscr{E}_k)$, des points M qui vérifient $f(M) = k$.

Exemple A et B désignent deux points distincts du plan et f l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f : (\mathscr{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M) = AB - 4AM.$$

La ligne de niveau 0 de f est l'ensemble noté $(\mathscr{E}_0)$, des points M du plan tels que $f(M) = 0$, c'est-à-dire tels que $AB - 4AM = 0$, soit $AM = \frac{1}{4}AB$. $(\mathscr{E}_0)$ est donc le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{4}AB$.

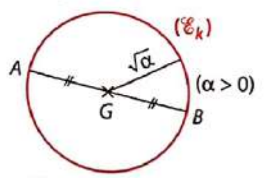
b La ligne de niveau $aMA^2 + bMB^2 = k$

Propriété

A et B désignent deux points distincts du plan et a, b deux nombres réels tels que $a+b \neq 0$.
k désigne un nombre réel. f est l'application du plan dans $\mathbb{R}$ telle que $f(M) = aMA^2 + bMB^2$. Pour $k \in \mathbb{R}$, on note $(\mathscr{E}_k)$ la ligne de niveau k, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que $aMA^2 + bMB^2 = k$.

On pose $\alpha = \dfrac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}$ où $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\}$.

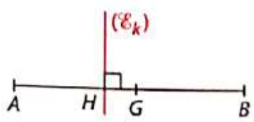
- Si $\alpha > 0$, l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\alpha}$.
- Si $\alpha = 0$, l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$ est réduit au point G.
- Si $\alpha < 0$, l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$ est vide.



c La ligne de niveau $MA^2 - MB^2 = k$

Propriété

A et B désignent deux points distincts du plan et k un nombre réel.
f est l'application du plan dans $\mathbb{R}$ telle que $f(M) = MA^2 - MB^2$.
On note $(\mathscr{E}_k)$ la ligne de niveau k, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$. G est le milieu de $[AB]$ et H le point de la droite (AB) tel que $\overline{GH} \times \overline{AB} = \frac{k}{2}$.
L'ensemble $(\mathscr{E}_k)$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point H.



11 Utiliser le barycentre partiel

A, B, C et D désignent quatre points non alignés et G le point défini par $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

a. **Justifier l'existence du point G.**

b. **Justifier l'existence des points H et H' définis par :**

$$H=\text{bary}\,\{(A,1),(B,2)\} \quad \text{et} \quad H'=\text{bary}\,\{(C,3),(D,-2)\}.$$

c. **Écrire G comme barycentre des points H et H'.**

d. **En déduire une construction du point G.**

Solution commentée

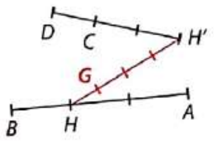
a. Comme $1+2+3+(-2)=4\neq 0$, le barycentre G existe et est unique :

$$G=\text{bary}\,\{(A,1),(B,2),(C,3),(D,-2)\}.$$

b. Comme $1+2\neq 0$ et $3+(-2)\neq 0$, les points H et H' existent et sont uniques :

$$H=\text{bary}\,\{(A,1),(B,2)\} \quad \text{et} \quad H'=\text{bary}\,\{(C,3),(D,-2)\}.$$

c. On utilise la propriété du barycentre partiel :



$$G=\text{bary}\,\{\underbrace{(A,1),(B,2)},\underbrace{(C,3),(D,-2)}\}.$$

$$G=\text{bary}\,\{\ (H,1+2)\ ,\ (H',3+(-2)\}.$$

$$G=\text{bary}\,\{(H,3),(H',1)\}.$$

d. On utilise le Savoir-faire 1 page 9 pour en déduire que $\overline{HG}=\dfrac{1}{4}\overline{HH'}$ et construire G.

Méthode

Si a, b et c désignent trois nombres réels tels que :

$$a+b\neq 0 \quad \text{et} \quad a+b+c\neq 0, \text{ et si}$$

$H=\text{bary}\,\{(A,a),(B,b)\}$ et

$G=\text{bary}\,\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$,

alors : $G=\text{bary}\,\{\underbrace{(A,a),(B,b)},(C,c)\}$,

$$G=\text{bary}\,\{\ (H,a+b)\ ,(C,c)\}.$$

12 Déterminer une ligne de niveau

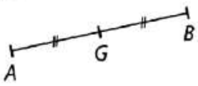
Déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2=1$, avec A et B deux points distincts tels que :

a. $AB=4$; **b.** $AB=\dfrac{1}{2}$.

Solution commentée

Dans ce cas, $a=b=1$. On note $G=\text{bary}\,\{(A,1),(B,1)\}$

G est le milieu du segment $[AB]$.



On calcule $\alpha=\dfrac{1-GA^2-GB^2}{2}$ $(k=1)$.

a. Si $AB=4$, alors $GA=GB=2$ et $\alpha=-\dfrac{7}{2}<0$.

Donc l'ensemble ($\mathscr{E}$) est vide.

b. Si $AB=\dfrac{1}{2}$, alors $GA=GB=\dfrac{1}{4}$ et $\alpha=\dfrac{1-2\times\dfrac{1}{16}}{2}=\dfrac{7}{16}>0$.

L'ensemble ($\mathscr{E}$) est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Méthode

Pour déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $aMA^2+bMB^2=k$ avec $a+b\neq 0$:

- Introduire $G=\text{bary}\,\{(A,a),(B,b)\}$.
- Évaluer le signe du nombre réel $\alpha=\dfrac{k-aGA^2-bGB^2}{a+b}$.
- Discuter suivant le signe de α en utilisant la propriété du paragraphe **5.b**.

S'exercer

Pour les exercices **13** et **14**, A, B, C et D désignent des points du plan. En utilisant le barycentre partiel, écrire G comme le barycentre de deux points.

13 $G=\text{bary}\,\{(A,5),(B,-0{,}5),(C,-0{,}5)\}$.

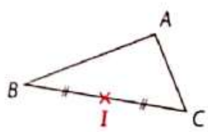
14 $G=\text{bary}\,\{(A,2),(B,-1),(C,2),(D,3)\}$.

15 A, B, G, I désignent des points tels que :

$G=\text{bary}\,\{(A,2),(I,1)\}$ et I milieu de $[BC]$.

Déterminer trois nombres réels tels que :

$G=\text{bary}\,\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$.



16 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2+MB^2=100 \quad \text{et} \quad AB=6.$$

Barycentre de deux points pondérés

Réponses rapides

17 A et B désignent deux points du plan.
Dire, dans chacun des cas si, le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) existe :

a. $a = 3{,}7$ et $b = -3$; **b.** $a = \frac{4}{3}$ et $b = -\frac{\sqrt{16}}{3}$;

c. $a = -5$ et $b = \sqrt{25}$; **d.** $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{5}{6}$.

18 A et B sont deux points du plan.
Le milieu I du segment $[AB]$ est le barycentre de :

a. $(A, -5)$ et $(B, 5)$; **b.** $(A, 5)$ et $(B, 5)$;
c. $(A, 5)$ et $(B, -5)$; **d.** $(A, -5)$ et $(B, -5)$.

19 Ci-dessous sont représentés un segment $[EF]$ et un point H.

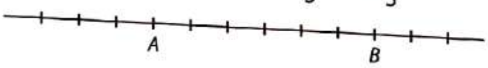
Le point H est barycentre de :

a. $(E, 1)$ et $(F, 3)$; **b.** $(E, 3)$ et $(F, 1)$.

20 Reproduire la droite (AB) ci-dessous, puis placer le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :

a. $a = 4$ et $b = 4$; **b.** $a = -1$ et $b = 2$;

c. $a = -1$ et $b = -2$; **d.** $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.



21 Déterminer deux nombres réels a et b tels que le point M soit le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) dans les cas suivants :

a. $\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$; **b.** $\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MA}$;

c. $\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$; **d.** $3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

22 A et B désignent deux points et a et b deux nombres réels. Construire, lorsque cela est possible, le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) dans chacun des cas suivants :

a. $a = 3$ et $b = -4$; **b.** $a = -1$ et $b = 5$;

c. $a = -7$ et $b = 7$; **d.** $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$;

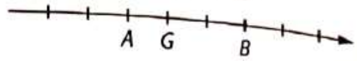
e. $a = -5$ et $b = -10$; **f.** $a = 0{,}5$ et $b = -3$.

Aide

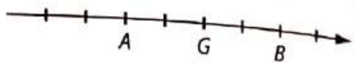
Lorsque $a + b \neq 0$, on écrit par exemple que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ en utilisant la relation de Chasles.

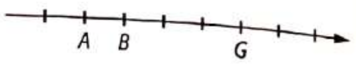
23 A et B désignent des points distincts et a et b deux nombres réels tels que $a + b = 0$.
Montrer que pour tout point M, du plan $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.

24 Dans chacun des cas, déterminer des valeurs possibles de a et b pour que $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b)\}$.

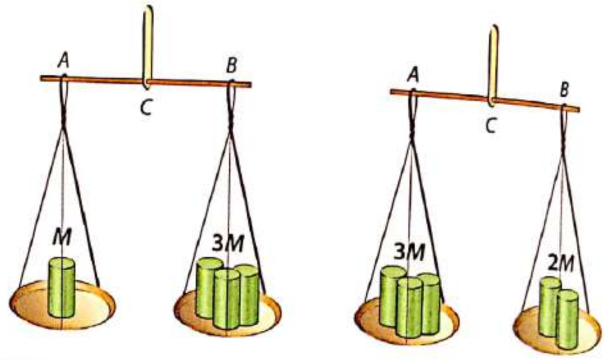
a.


b.

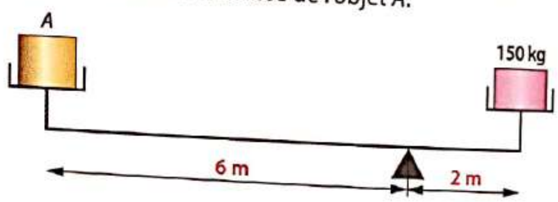

c.


d.


25 En quel point du segment $[AB]$ faut-il placer le point de suspension C pour que les deux dispositifs ci-dessous soient en équilibre ?
(M est une masse, $M > 0$.)



26 Sachant que la balance représentée ci-dessous, est en équilibre, déterminer la masse de l'objet A.



27 Le point G désigne le barycentre des points pondérés $(E ; 2)$ et $(F ; -3)$ et le point H désigne le barycentre des points pondérés $(E ; -3)$ et $(F ; 2)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FH} = 3\overrightarrow{FE}$.
b. Les points E, F, G, H sont-ils alignés ?

28 Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. A et B désignent les points de coordonnées respectives $(-1 ; 3)$ et $\left(\frac{4}{5} ; 2\right)$.
Le point G désigne le barycentre des points pondérés $(A, -1)$ et $(B, 5)$.

a. Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
b. Déterminer les coordonnées du point G.

29 Le point Q désigne le barycentre de deux points pondérés $(R, 3)$ et $(S, -2)$.

a. Construire le point Q.
b. R' et S' désignent les points définis par :
$$\overrightarrow{QR'} = 2\overrightarrow{QR} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QS'} = 2\overrightarrow{QS}.$$
Montrer que le point Q est le barycentre des points pondérés $(R', 3)$ et $(S', -2)$.

Barycentre de trois ou quatre points

Réponses rapides

30 A, B et C désignent trois points du plan non alignés.
Dire, dans chacun des cas, si le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) existe :

a. $a = 1, b = 3, c = -4$; b. $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{2}$;

c. $a = 0{,}2, b = a, c = -2a$; d. $a = \sqrt{7}, b = -\sqrt{3}, c = -\sqrt{4}$.

31 A, B, C et D désignent quatre points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

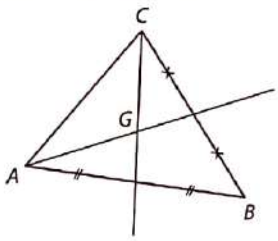
a. Déterminer trois nombres réels b, c, d tels que le point A soit le barycentre des points pondérés (B, b), (C, c) et (D, d).
b. Déterminer trois autres nombres réels b', c', d' tels que le point A soit le barycentre des points pondérés (B, b'), (C, c') et (D, d').

32 E, F, G, H désignent quatre points du plan tels que :

$$2\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{EH}.$$

Déterminer trois nombres réels x, y, z tels que le point E soit le barycentre des points pondérés (G, x), (F, y) et (H, z).

33 ABC désigne le triangle représenté ci-dessous.



Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c).

34 E, F, G, désignent trois points du plan non alignés.
a. Justifier l'existence et l'unicité d'un point P tel que :

$$3\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP} - 2\overrightarrow{GP} = \vec{0}.$$

b. Construire le barycentre Q des points pondérés $(E, 3)$, $(F, 1)$.
c. Exprimer $\overrightarrow{QP}$ en fonction de $\overrightarrow{QG}$.
d. En déduire la construction du point P.

Aide

Pour construire $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$, introduire $H = \text{bary}\{(A, a), (B, b)\}$ (si $a + b \neq 0$) puis utiliser la propriété du barycentre partiel.

35 A, B, C désignent trois points du plan non alignés.
En s'inspirant de l'exercice précédent, construire le point I tel que $3\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} = \vec{0}$.

36 **Démontrer une propriété**
G désigne le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) avec $a + b + c \neq 0$.
Montrer que, pour tout point M du plan

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}.$$

37 **Démontrer une propriété**
A, B et C désignent trois points distincts et a, b, c, trois nombres réels tels que $a + b + c = 0$.
Montrer que pour tout point M, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.

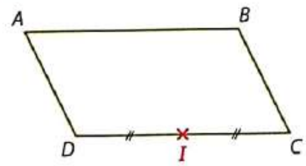
38 A, B, C, D désignent quatre points du plan non alignés.
a. Construire le point I tel que $I = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4)\}$.
b. Construire le point J tel que $J = \text{bary}\{(C, 2), (D, 1)\}$.
c. G désigne le point défini par :

$$G = \text{bary}\{(A, -1), (B, 4), (C, 2), (D, 1)\}$$

Montrer que $G = \text{bary}\{(I, 3), (J, 3)\}$; puis placer G.

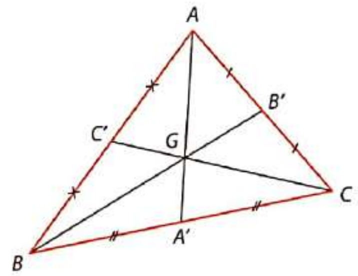
39 $ABCD$ désigne un parallélogramme et G le barycentre des points $(A, 3)$, $(B, -1)$, $(C, 3)$ et $(D, -1)$.
En associant les points judicieusement deux à deux et en utilisant la propriété du barycentre partiel, construire le point G.

40 $ABCD$ désigne un parallélogramme et le point I le milieu du segment $[DC]$.



a. Écrire le point D comme barycentre des points A, B, C.
b. Écrire le point I comme barycentre des points A, B, C.

41 ABC désigne un triangle et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Le point G est l'isobarycentre des points A, B, C.

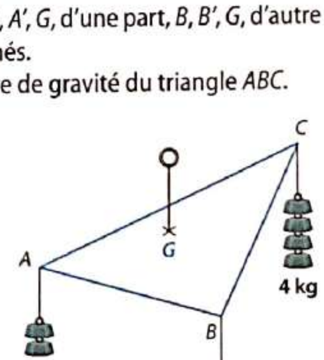


a. Montrer que :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0} \ ; \quad 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BB'} = \vec{0} \ ; \quad 3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

b. En déduire que les points A, A', G, d'une part, B, B', G, d'autre part et enfin C, C', G sont alignés.
c. Conclure que G est le centre de gravité du triangle ABC.

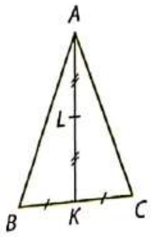
42 La suspension ci-contre est représentée par un triangle ABC de masse négligeable. Des masses sont fixées en chacun de ses sommets.
Construire le point G, en lequel il faut accrocher la suspension pour qu'elle soit en équilibre.



Ligne de niveau

Réponse rapide

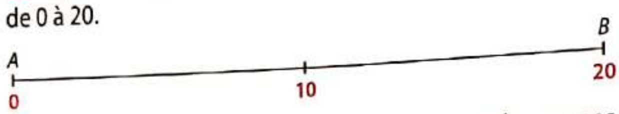
43 Observer la figure ci-contre.
Montrer que : $L = \text{bary}\,\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$.



44 Ali a obtenu en mathématiques : 15 sur 20 coefficient 2, 18 sur 20 coefficient 1 et 17 sur 20 coefficient 3.

a. Calculer la moyenne, notée m, d'Ali.

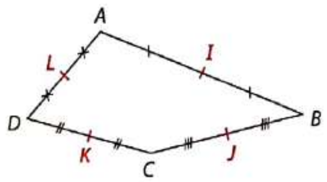
b. Reproduire le segment $[AB]$ ci-dessous représentant les notes de 0 à 20.



c. Placer le point M, sur le segment $[AB]$ représentant la moyenne d'Ali.

d. Montrer que $M = \text{bary}\,\{(C,a),(D,b),(E,c)\}$ où l'on placera les points C, D et E et l'on déterminera les nombres réels a, b, c.

45 $ABCD$ désigne un quadrilatère quelconque. I, J, K, L désignent les milieux respectivement des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Le point G désigne l'isobarycentre des points A, B, C, D.



a. En utilisant la propriété du barycentre partiel, montrer que :
$G = \text{bary}\,\{(I,2),(K,2)\}$ et $G = \text{bary}\,\{(J,2),(L,2)\}$.

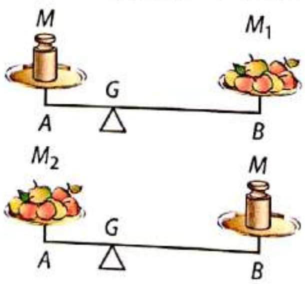
b. En déduire que les diagonales du quadrilatère $IJKL$ se coupent en leur milieu ; puis que $IJKL$ est un parallélogramme.

Info

Le résultat de cet exercice est dû à Pierre Varignon. Mathématicien français (1654-1722), Pierre Varignon est l'inventeur du manomètre et a découvert la théorie des moments.

46 Une marchande utilise une balance légèrement faussée.
Par honnêteté, elle pèse deux fois ses légumes :
- une fois dans le plateau de droite (masse M_1, $M_1 > 0$) ;
- une fois dans le plateau de gauche (masse M_2, $M_2 > 0$).

Elle facture alors la moyenne des masses M_1 et M_2.



a. Montrer que $M = \sqrt{M_1 M_2}$.

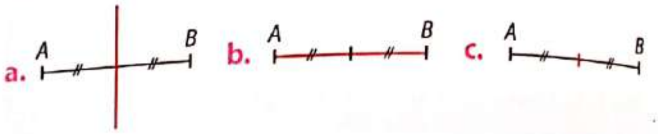
b. Comparer $\sqrt{M_1 M_2}$ et $\dfrac{M_1 + M_2}{2}$.

c. Le choix de la marchande est-il équitable ?

Aide

Pour comparer $\sqrt{M_1 M_2}$ et $\dfrac{M_1 + M_2}{2}$, on peut comparer leurs carrés.

47 Parmi les ensembles rouges ci-dessous, quel est celui qui représente la ligne de niveau $MA^2 + MB^2 = 2$ avec $AB = 2$?



48 $[AB]$ désigne un segment de longueur 4,5 cm.

a. Construire le point I défini par $I = \text{bary}\,\{(A,4),(B,-1)\}$.

b. Réduire l'expression du vecteur $4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}$ pour tout point M du plan à l'aide du point I.

c. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\| = 3AB.$$

49 $ABCD$ désigne un rectangle.

a. Construire le point K défini par $K = \text{bary}\,\{(A,1),(B,-2)\}$.

b. Construire le point $L = \text{bary}\,\{(C,-3),(D,2)\}$.

c. En déduire une autre expression de :
- $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}$ puis de • $-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM}$,

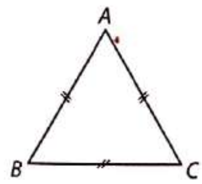
où M est un point quelconque du plan.

d. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}\| = \|-3\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM}\|.$$

Aide

Utiliser la définition d'un barycentre pour simplifier une expression vectorielle.

50 ABC désigne le triangle équilatéral représenté ci-dessous.



1. a. Construire le point I défini par $I = \text{bary}\,\{(A,1),(B,4),(C,-1)\}$.

b. Construire le point J défini par $J = \text{bary}\,\{(A,1),(B,3)\}$.

c. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|.$$

2. En s'inspirant de la question 1., déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|.$$

51 A et B désignent deux points du plan.
Déterminer, puis construire, s'il existe, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$, lorsque :

a. $k = 4$ et $AB = 4$ cm ;

b. $k = 20$ et $AB = 5$ cm.

52 A et B désignent deux points du plan tels que $AB = 2$ cm.
Déterminer, puis construire, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 1$.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

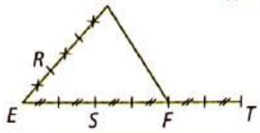
53 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Le barycentre des points pondérés $\left(A, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(B, -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$ existe.	☐	☐
2. Si $G = \text{bary}\,\{(A, 3), (B, -7)\}$, alors $G = \text{bary}\left\{\left(A, \frac{-3}{2}\right), \left(B, \frac{7}{2}\right)\right\}$.	☐	☐
3. Si $G = \text{bary}\,\{(E, -1), (F, 7)\}$, alors $6\overrightarrow{GE} = 7\overrightarrow{EF}$.	☐	☐
4. Si J est le milieu de $[MN]$, alors $J = \text{bary}\,\{(M, 4), (N, 4)\}$.	☐	☐
5. L'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 0$ est la médiatrice de $[AB]$.	☐	☐

Avec justification

54 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Si G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, alors $G = \text{bary}\,\{(A, 2), (C, -1)\}$.	☐	☐
2. Si A, B, C désignent trois points non alignés, $E = \text{bary}\,\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$ et F est le milieu de $[BC]$, alors E est aussi le milieu de $[AF]$.	☐	☐
3. D'après la figure ci-dessous : $R = \text{bary}\,\{(E, 1), (G, -3)\}$.	☐	☐



	vrai	faux
4. D'après la figure de la question **3**. $E = \text{bary}\,\{(F, 3), (T, -2)\}$.	☐	☐
5. L'ensemble des points M du plan tels que $ML^2 + MK^2 = 10$ avec $KL = 2$ est un cercle.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

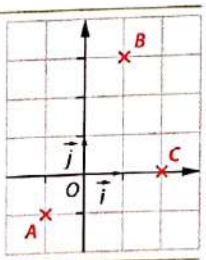
QCM

Top chrono *(sans justification)*

55 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Si A, B, C désignent trois points non alignés $G = \text{bary}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right), (B, 1), (C, 1)\right\}$, alors :
a. $\overrightarrow{AG} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; **b.** $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$;
c. Le milieu du segment $[BC]$ appartient à la droite (AG).

2. Le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, -1)$ a pour coordonnées :
a. $(-1\,;0)$; **b.** $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
c. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.



3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\| = 2$ est :
a. un cercle ; **b.** une droite ; **c.** l'ensemble vide.

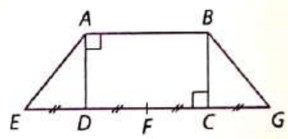
4. Si $G = \text{bary}\,\{(E, 3), (F, -4)\}$, alors :
a. $\overrightarrow{GE} = -4\overrightarrow{EF}$; **b.** $\overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{EF}$; **c.** $\overrightarrow{GF} = 4\overrightarrow{EF}$.

Avec justification

56 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. A, B, C désignent trois points non alignés.
Si $G = \text{bary}\,\{(A, -5), (B, 5), (C, 3)\}$ et si $H = \text{bary}\,\{(B, 5), (C, 3)\}$ alors $G = \text{bary}\,\{(A, 1), (H, \alpha)\}$ avec :
a. $\alpha = 8$; **b.** $\alpha = -\frac{8}{5}$; **c.** $\alpha = \frac{8}{5}$.

2. D'après la figure ci-contre :
a. $G = \text{bary}\,\{(C, 3), (D, 1)\}$;
b. $G = \text{bary}\,\{(C, 1), (D, -3)\}$;
c. $G = \text{bary}\,\{(C, 3), (D, -1)\}$.



3. D'après la figure du **3.**, si $H = \text{bary}\,\{(E, 5), (F, 6)\}$, alors :
a. $H = \text{bary}\,\{(E, 5), (D, 6), (C, 6)\}$;
b. $H = \text{bary}\,\{(E, 5), (D, 3), (C, 3)\}$;
c. $H = \text{bary}\left\{\left(E, \frac{1}{6}\right), \left(F, \frac{1}{5}\right)\right\}$.

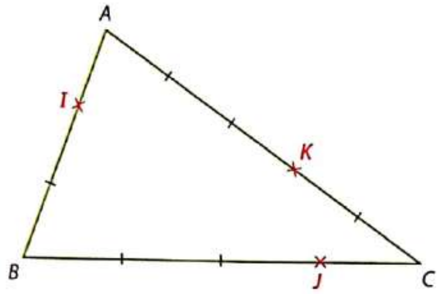
4. D'après la figure du **3.**, $D = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, -1), (C, \alpha)\}$ avec :
a. $\alpha = 1$; **b.** $\alpha = -1$; **c.** $\alpha = 2$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

57 Concours de droites

ABC désigne le triangle ci-dessous et I, J, K les points tels que :

- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$;
- $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$.



a. On note G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 3)$. Montrer que :

- $G = \text{bary}\,\{(I, 3), (C, 3)\}$,
- $G = \text{bary}\,\{(A, 2), (J, 4)\}$,
- $G = \text{bary}\,\{(B, 1), (K, 5)\}$;

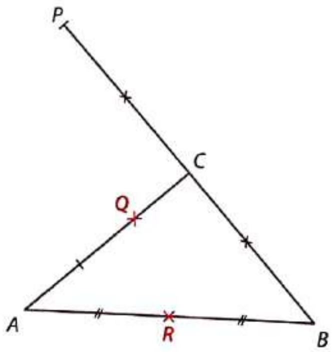
b. En déduire que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

58 Points alignés

ABC désigne le triangle ci-dessous.

Le point P est le symétrique du point B par rapport au point C.

R le milieu du segment $[AB]$ et Q le point tel que $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.



a. Montrer que $Q = \text{bary}\,\{(A, a), (C, b)\}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

b. Montrer que :

$$2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC}.$$

c. • En déduire que $Q = \text{bary}\,\{(P, 1), (R, 2)\}$,

• En déduire que les points P, Q et R sont alignés.

59 Lieu de points et paramètre

$[AB]$ désigne un segment de longueur 10 cm.

On note $(\mathscr{E}_m)$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| m^2\,\overrightarrow{MA} + (2m-3)\,\overrightarrow{MB} \right\| = AB$$

où m désigne un nombre réel.

1. a. Pour quelle(s) valeur(s) de m le barycentre G_m des points pondérés (A, m^2) et $(B, 2m-3)$ existe-t-il ?

b. Pour un tel m, montrer que :

$$M \in (\mathscr{E}_m) \Leftrightarrow \left| m^2 + (2m-3) \right| MG_m = AB.$$

c. En déduire l'ensemble $(\mathscr{E}_m)$.

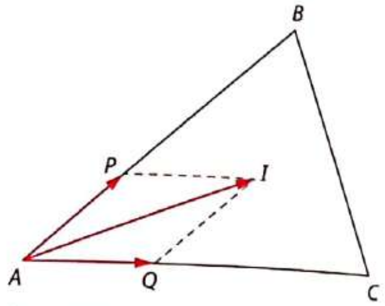
2. Construire $(\mathscr{E}_2)$; puis $(\mathscr{E}_3)$.

60 Centre du cercle inscrit dans un triangle

ABC désigne le triangle ci-dessous.

On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

I est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c).



1. P désigne le point de $[AB]$ et Q le point de $[AC]$ tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}.$$

a. Montrer que $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{AQ}\right\|$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $AQIP$?

En déduire que le point I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

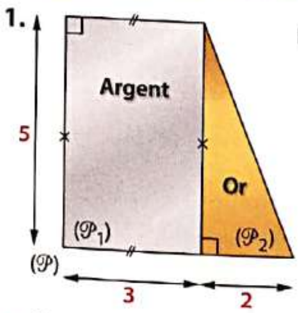
2. Montrer que le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

61 Centres d'inertie

Info

- Le centre d'inertie d'une plaque est le point où s'applique son poids, c'est-à-dire son point d'équilibre.
- Lorsqu'elle est de forme triangulaire, son centre d'inertie est son centre de gravité.
- Lorsqu'elle est de forme rectangulaire, son centre d'inertie est l'intersection de ses diagonales.
- Lorsque c'est un cercle, son centre d'inertie est son centre.
- Lorsque la plaque $(\mathscr{P})$ est la juxtaposition d'une plaque $(\mathscr{P}_1)$ de centre d'inertie I_1 et de masse m_1 et d'une plaque $(\mathscr{P}_2)$ de centre d'inertie I_2 et de masse m_2, alors le centre d'inertie de $(\mathscr{P})$ est le barycentre de (I_1, m_1) et (I_2, m_2).

1.



L'unité est le cm.

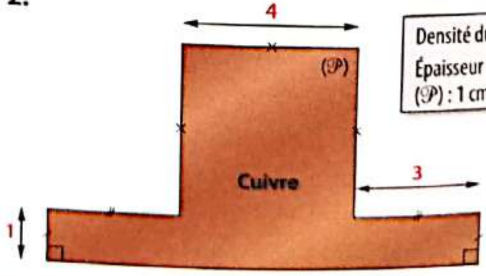
Densités :
- Argent : 10,5 kg/m³
- Or : 19,3 kg/m³

Épaisseur de la plaque $(\mathscr{P})$: 1 cm

a. Montrer que $(\mathscr{P})$ est la juxtaposition de deux plaques $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ dont on précisera le centre d'inertie et la masse.

b. En déduire le centre d'inertie de la plaque $(\mathscr{P})$.

2.



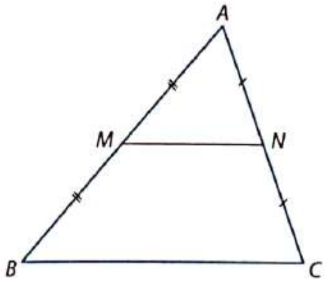
Densité du cuivre : 10 kg/m³

Épaisseur de la plaque $(\mathscr{P})$: 1 cm

En s'inspirant de la question 1., déterminer le centre d'inertie de la plaque $(\mathscr{P})$.

62 Centre d'inertie et isobarycentre

ABC désigne le triangle ci-dessous et M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.



a. Vérifier que le quadrilatère $MNCB$ est un trapèze.
b. Déterminer le centre d'inertie G de la plaque $MNCB$.
c. Déterminer l'isobarycentre I des points M, N, C, B.
d. Les points I et G sont-ils confondus ?

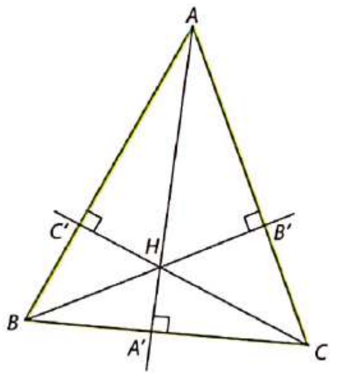
63 Position du barycentre

A et B désignent deux points distincts du plan.
G est le barycentre des points pondérés (A, a), et (B, b) avec a et b deux nombres réels non nuls tels que $a+b \neq 0$.
a. Montrer que :
- si $a=0$, alors $G=B$;
- si $b=0$, alors $G=A$.

b. Montrer que si a et b sont de même signe, alors G est un point du segment $[AB]$, différent de A et de B.
c. Montrer que si a et b sont de signes opposés, alors G est un point de la droite (AB) n'appartenant pas au segment $[AB]$.
d. Montrer que si $|a| > |b|$, alors G est plus près de A que de B.

64 Orthocentre

ABC désigne un triangle dont chaque angle est un angle aigu.
H est l'orthocentre du triangle ABC.



a. Montrer que :
- $A' = \text{bary}\left\{(B, \tan(\widehat{ABC})), (C, \tan(\widehat{ACB}))\right\}$;
- $B' = \text{bary}\left\{(A, \tan(\widehat{BAC})), (C, \tan(\widehat{ACB}))\right\}$;
- $C' = \text{bary}\left\{(A, \tan(\widehat{BAC})), (B, \tan(\widehat{ABC}))\right\}$.

b. Justifier l'existence du barycentre K des points pondérés :
$$(A, \tan(\widehat{BAC})), \quad (B, \tan(\widehat{ABC})) \quad \text{et} \quad (C, \tan(\widehat{ACB})).$$
c. Montrer que $K \in (AA')$, $K \in (BB')$ et $K \in (CC')$.
d. En déduire que :
$$H = \text{bary}\left\{(A, \tan(\widehat{BAC})), (B, \tan(\widehat{ABC})), (C, \tan(\widehat{ACB}))\right\}.$$

Aide
▶ Utiliser la trigonométrie dans certains triangles rectangles.

65 Des démonstrations

A et B désignent deux points distincts du plan.
1. Pour $k \in \mathbb{R}$, on note $(\mathscr{E}_k)$ la ligne de niveau :
$$aMA^2 + bMB^2 = k \text{ avec } a+b \neq 0.$$
a. Justifier l'existence de $G = \text{bary}\left\{(A, a), (B, b)\right\}$.
b. Montrer que $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k - aGA^2 - bGB^2}{a+b}$.
c. En déduire la nature de l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$.
2. Pour $k' \in \mathbb{R}$, on note $(\mathscr{E}_{k'})$ la ligne de niveau : $MA^2 - MB^2 = k'$.
G désigne le milieu du segment $[AB]$ et H est le point de la droite (AB) tel que : $2\overline{GH} \times \overline{AB} = k'$.
a. Montrer que, pour tout point M du plan :
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GM}.$$
b. Montrer que : $M \in (\mathscr{E}_{k'}) \Leftrightarrow \overline{GH} = \dfrac{k'}{2\overline{AB}}$.
c. En déduire la nature de l'ensemble $(\mathscr{E}_{k'})$.

66 Une ligne de niveau

A, B, C, D, E désignent cinq points distincts du plan.
L'objectif est de déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M tels que :
$$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}) = 12.$$

1. Avec les coordonnées
On se place dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On note $(x_A ; y_A)$, $(x_B ; y_B)$, $(x_C ; y_C)$ et $(x_D ; y_D)$, les coordonnées respectives de A, B, C et D.
On note $(x ; y)$ celles du point M.
a. Établir une équation satisfaite par x et y.
b. Montrer que $(\mathscr{E})$ est un cercle dont on précisera les coordonnées et le rayon en fonction des paramètres.

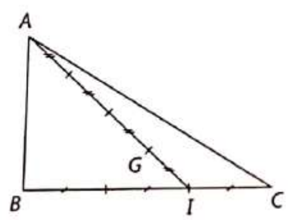
2. Avec le barycentre
a. Justifier l'existence de :
$G_1 = \text{bary}\left\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\right\}$ et $G_2 = \text{bary}\left\{(D, 1), (E, 2)\right\}$.
b. En déduire que $M \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 2$.
c. On note H le milieu du segment $[G_1G_2]$.
Montrer que H est le centre du cercle $(\mathscr{E})$.

67 Produit scalaire et ligne de niveau

k désigne un nombre réel.
On note $(\mathscr{E}_k)$ l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k.$$
I désigne le milieu du segment $[AB]$.
a. Montrer que $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} + k$.
b. En déduire $(\mathscr{E}_k)$ selon les valeurs de k.

68 Prise d'initiative

Observer la figure ci-dessous.



a. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B et C.
b. La droite (GC) coupe la droite (AB) en un point H.
Déterminer la position de H sur le segment $[AB]$.

69 Ligne de niveau : $\frac{MA}{MB} = k$

A et B désignent deux points distincts du plan.
L'objectif est de déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$ des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$ où k est un nombre réel.

1. Le cas $k < 0$
Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$.

2. Le cas $k = 0$
Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_0)$.

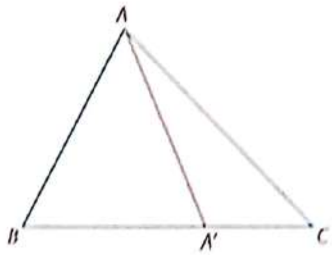
3. Le cas $k = 1$
Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_1)$.

4. Le cas $k > 0$ et $k \neq 1$

a. Montrer que, pour tout point M du plan,
$M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow MA^2 = k^2 MB^2$.
b. Justifier l'existence du point $G = \text{bary}\{(A, 1), (B, -k^2)\}$.
c. Montrer que $M \in (\mathscr{E}_k) \Leftrightarrow (1 - k^2)MG^2 = k^2 GB^2 - GA^2$.
d. En déduire la nature de l'ensemble $(\mathscr{E}_k)$.
e. Dans le cas où $AB = 4$ cm, déterminer chacun des ensembles suivants :
- $(\mathscr{E}_{0,5})$;
- $(\mathscr{E}_3)$.

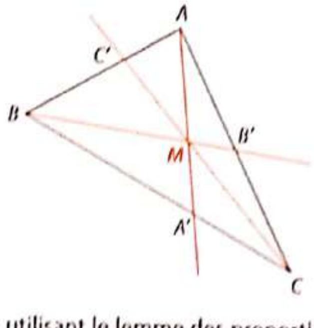
70 Barycentre et aires

1. ABC désigne un triangle et A' un point du segment $[BC]$.



a. Montrer que : $\frac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{A'B}{CB}$.
(Le résultat est appelé lemme des proportions.)
b. Montrer que $A' = \text{bary}\{(B, A'C), (C, A'B)\}$.
c. En déduire que $A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AA'C)), (C, \text{aire}(AA'B))\}$.

2. ABC désigne un triangle et M un point à l'intérieur de ABC. A', B', C' désignent respectivement l'intersection de $[AM]$ avec $[BC]$, $[BM]$ avec $[AC]$ et $[CM]$ avec $[AB]$.



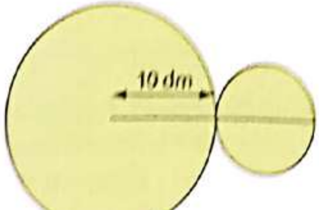
a. Montrer, en utilisant le lemme des proportions et la question 1., que :
- $A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(A'MC)), (C, \text{aire}(A'MB))\}$;
- puis que $A' = \text{bary}\{(B, \text{aire}(AMC)), (C, \text{aire}(MAB))\}$.

b. De la même manière, montrer que :
$B' = \text{bary}\{(A, \text{aire}(BMC)), (C, \text{aire}(MAB))\}$.

c. Déduire des questions précédentes que le point M est le barycentre des points pondérés $(A, \text{aire}(BMC))$, $(B, \text{aire}(AMC))$, $(C, \text{aire}(AMB))$.

71 Centre d'inertie et barycentre

1. Plaque pleine
Construire le centre d'inertie de la plaque $\mathscr{P}$ ci-dessous, dont l'épaisseur est 2 dm et la densité du métal le composant est 5 kg/m³.



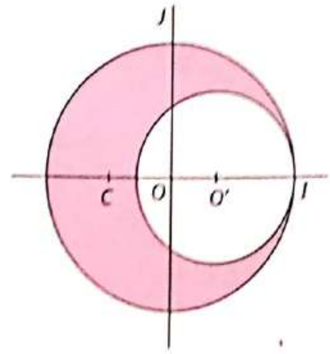
2. Plaque évidée
Lorsque l'on retire à une plaque $\mathscr{P}_1$, de centre d'inertie I_1 et de masse m_1, une plaque $\mathscr{P}_2$ de centre d'inertie I_2 et de masse m_2, le centre d'inertie de la plaque évidée obtenue est le barycentre des points pondérés (I_1, m_1), $(I_2, -m_2)$ lorsque $m_1 \neq m_2$.
Observer la plaque $\mathscr{P}$ en métal :

$O_1A = 3$ m
$O_1O_2 = 1$ m
épaisseur $= 1$ m
densité $= 8$ kg/m³

On note I son centre d'inertie.
a. Déterminer α et β tels que $I = \text{bary}\{(O_1, \alpha), (O_2, \beta)\}$.
Exprimer α et β à l'aide de π.
b. Reproduire le schéma ci-dessus en prenant $O_1O_2 = 2$ cm et construire le point I.

72 Le croissant d'or

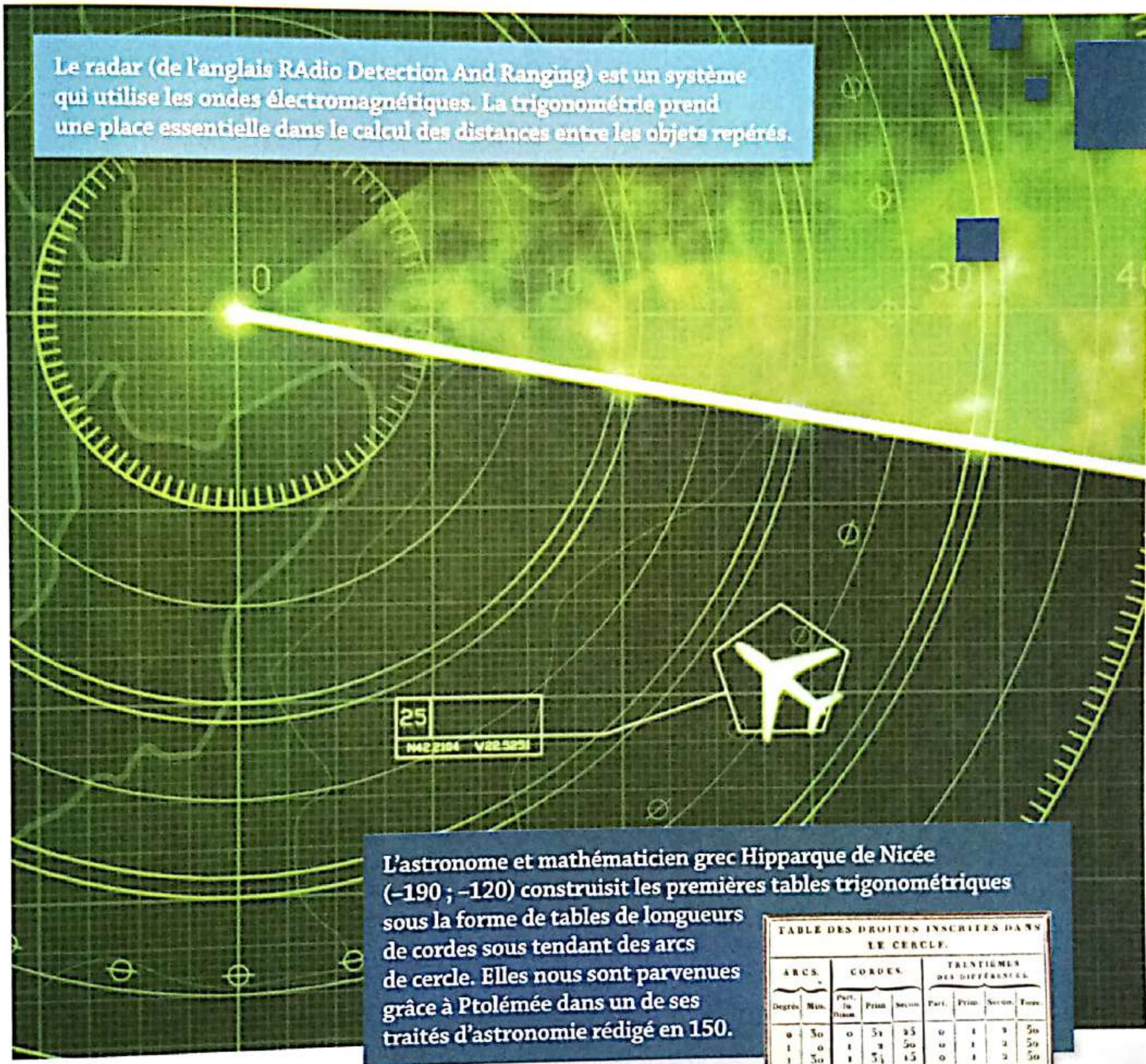
Le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère une plaque homogène d'épaisseur constante, formée du disque de centre O et de rayon 1, auquel on a enlevé un disque de rayon $r = O'I$ tangent intérieurement au précédent.



a. Déterminer, en fonction de r, la position du point G, centre de gravité de cette plaque.
b. Calculer r pour que le point G soit exactement sur la « frontière » entre les deux disques.

Remarque
La valeur de r trouvée est égale à l'inverse du Nombre d'or.

2 Trigonométrie



Le radar (de l'anglais RAdio Detection And Ranging) est un système qui utilise les ondes électromagnétiques. La trigonométrie prend une place essentielle dans le calcul des distances entre les objets repérés.

L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (–190 ; –120) construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de longueurs de cordes sous tendant des arcs de cercle. Elles nous sont parvenues grâce à Ptolémée dans un de ses traités d'astronomie rédigé en 150.

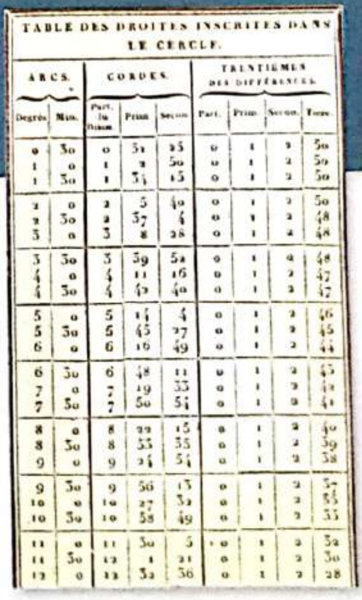


TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés.	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Terc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28

Les objectifs du chapitre

- Savoir faire des calculs sur les angles orientés et leurs mesures.
- Savoir utiliser les propriétés des angles orientés pour faire des démonstrations en géométrie plane.
- Connaître les lignes trigonométriques : sinus, cosinus et tangente.
- Connaître et utiliser les formules usuelles de transformation : addition, duplication et linéarisation.
- Savoir utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et des inéquations.

2 Cours

1 Angles orientés

a Rappels

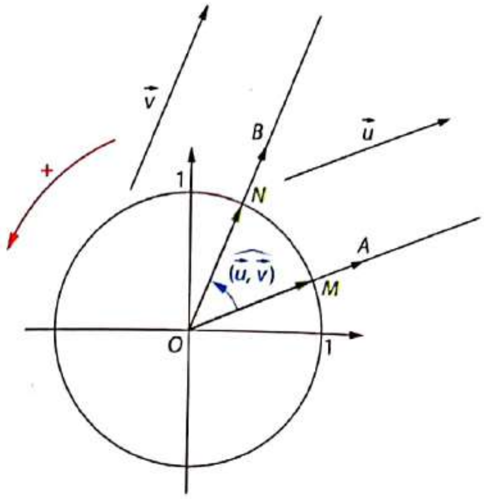
Définitions

- Un **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls. A et B sont les points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

L'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est égal à l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$.
M et N désignent les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique.

On appelle **mesure de l'angle orienté** $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ toute mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

- La **mesure principale** d'un angle orienté est celle qui appartient à $]-\pi\,;\pi]$.



b Mesures d'un angle orienté

Propriété

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ désigne un angle orienté de mesure principale α.
Tout nombre réel de la forme $\alpha + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Remarques
- Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure de l'un est égale à une mesure de l'autre.
- L'angle orienté nul est noté $\widehat{0}$ et l'angle orienté plat est noté $\widehat{\pi}$.
Ainsi $\text{mes}(\widehat{0}) = 0$ et $\text{mes}(\widehat{\pi}) = \pi$.

c Congruences

Définition

Deux nombres réels x et y sont **congrus** modulo 2π et on note $x \equiv y\,[2\pi]$ lorsqu'il existe un nombre entier relatif k tel que $x = y + k2\pi$.

Propriété

Deux mesures d'un même angle orienté sont congrues modulo 2π.

d Somme de deux angles orientés

Définition

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}})$ désignent deux angles orientés de mesures respectives α et β. On appelle **somme** des **deux angles orientés**, l'angle orienté dont une des mesures est $\alpha + \beta$.
Ainsi $\text{mes}((\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}})) = \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \text{mes}(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = \alpha + \beta$.

Remarques
- Deux angles orientés de somme nulle sont opposés.
- La différence de deux angles orientés est la somme du premier et de l'opposé du second.
Ainsi $\text{mes}((\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) - (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}})) = \text{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) - \text{mes}(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = \alpha - \beta$.

e Relation de Chasles

Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul.

1. $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
2. $(\widehat{k\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
3. $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ si $k > 0$;
4. $(\widehat{k\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \widehat{\pi}$ si $k < 0$.

Remarques
- $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$;
- $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \widehat{\pi}$.

Propriété (Relation de Chasles)

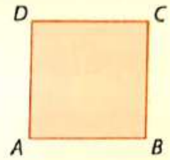
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs non nuls.

On a l'égalité : $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$.

2 Savoir-faire

1 Utiliser les angles orientés en géométrie

***ABCD* désigne le carré de sens direct ci-contre.**
Déterminer de deux manières différentes une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}})$:
a. par des considérations géométriques ;
b. en utilisant les propriétés des angles orientés.

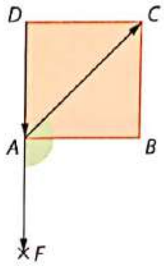


Solution commentée

a. 1. Du schéma, on déduit que $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}})$.

2. • Le sens est celui des aiguilles d'une montre donc le signe de la mesure de l'angle orienté sera négatif.
• (AC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.
Ainsi, mes $\widehat{CAB} = \dfrac{\pi}{4}$ et donc mes $\widehat{CAF} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$.

3. Finalement, mes$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}}) = -\dfrac{3\pi}{4}$.



b. $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}) + \widehat{\pi}$.

mes$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}}) = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$. Les deux mesures obtenues sont correctes car elles diffèrent de 2π. En effet, $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{4}$.

Méthode

a. 1. Construire le point F tel que les deux vecteurs de l'angle orienté aient la même origine.
2. Déterminer :
• le sens de l'angle orienté ;
• l'angle géométrique correspondant.
3. Conclure.

b. Utiliser les propriétés des angles orientés découlant de la relation de Chasles pour obtenir un angle orienté dont les vecteurs ont la même origine.

2 Vérifier une congruence

x et y désignent deux nombres réels. Dire si $x \equiv y\,[2\pi]$ dans chacun des cas suivants :
a. $x = \dfrac{\pi}{2}$ **et** $y = -\dfrac{3\pi}{2}$; **b.** $x = \dfrac{2\pi}{3}$ **et** $y = \dfrac{13\pi}{3}$;

Solution commentée

a. $\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{2} = k2\pi \Leftrightarrow 2\pi = k2\pi$.
Ainsi, on obtient $k = 1$, $1 \in \mathbb{Z}$ et donc $x \equiv y\,[2\pi]$.

b. $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{13\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{11\pi}{3} = k2\pi$.
Ainsi, on obtient $k = -\dfrac{11}{6}$, $-\dfrac{11}{6} \notin \mathbb{Z}$ et donc $x \not\equiv y\,[2\pi]$.

Méthode

Déterminer s'il existe un nombre entier relatif k tel que $x = y + k2\pi$.
x et y étant connus, cela revient à résoudre dans $\mathbb{Z}$, une équation du premier degré d'inconnue k.

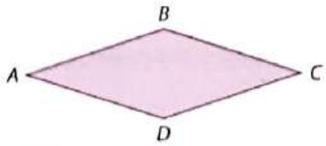
Remarque

Dans le cas du **a.**, puisque $x \equiv y\,[2\pi]$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{3\pi}{2}$ sont des mesures d'un même angle orienté.

S'exercer

3 *ABC* désigne un triangle.
Une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est égale à α.
Déterminer en fonction de α une mesure des angles orientés :
a. $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$; **b.** $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}})$; **c.** $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}})$.

4 *ABCD* désigne le losange ci-contre pour lequel mes $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{6}$.
Déterminer les mesures des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}})$.



5 Donner trois autres mesures d'un angle orienté dont $\dfrac{2\pi}{3}$ est une mesure.

6 x et y désignent deux nombres réels.
Dire si $x \equiv y\,[2\pi]$ dans chacun des cas suivants :
a. $x = \dfrac{3\pi}{4}$ et $y = -\dfrac{5\pi}{4}$; **b.** $x = \dfrac{7\pi}{3}$ et $y = \dfrac{5\pi}{3}$;
c. $x = \dfrac{37\pi}{12}$ et $y = -\dfrac{25\pi}{12}$; **d.** $x = \dfrac{37\pi}{3}$ et $y = \dfrac{19\pi}{3}$.

2 Lignes trigonométriques des angles orientés

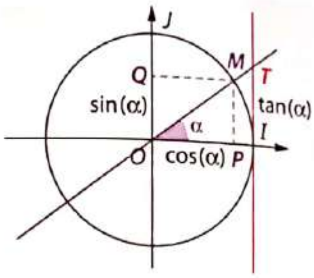
Dans tout ce paragraphe, (O, I, J) désigne un repère orthonormé et $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique.

a Rappels

Définitions

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ désigne un angle orienté de mesure α.

M est l'unique point de $(\mathscr{C})$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.



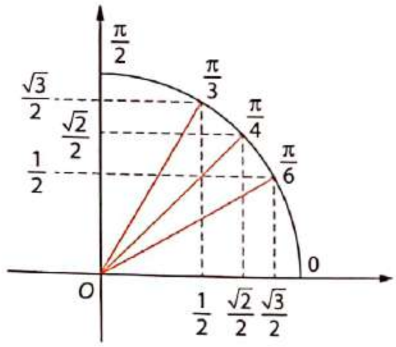
- Le **cosinus** de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α, noté $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou $\cos(\alpha)$, est l'abscisse du point M.
- Le **sinus** de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α, noté $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou $\sin(\alpha)$, est l'ordonnée du point M.
- Si de plus $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la **tangente** de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou de α est le nombre réel $\tan(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Remarques

- $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$; • $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$; • $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.
- Le cosinus, le sinus et la tangente sont souvent appelées lignes trigonométriques.

b Angles remarquables

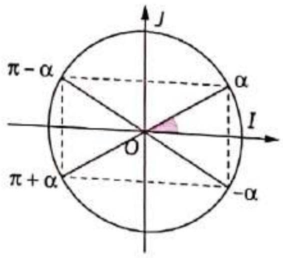
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	



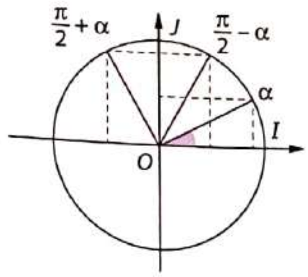
c Angles associés

Propriétés

Pour tout nombre réel α, on a :



- $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$;
- $-\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$;
- $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$;
- $-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha) = \sin(\pi + \alpha)$.



- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$; • $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$;
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$.

Exemple $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Les formules des angles associés permettent d'obtenir :

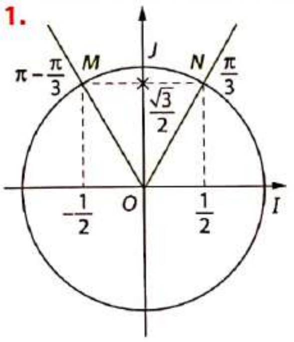
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

7 Déterminer un angle dont on connaît le sinus et le cosinus

Déterminer une mesure x d'un angle tel que : $\cos(x)=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution commentée

1.



2. L'abscisse de M est négative, donc on utilise une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir le point N.
3. Le tableau des angles remarquables donne : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}})=\dfrac{\pi}{3}$.
4. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})=\pi-\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}})$.
Ainsi on obtient : $x=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Méthode

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point M correspondant.
2. Suivant le quart de cercle où se situe M, utiliser la symétrie voulue pour obtenir le point N dont les coordonnées sont positives et qui a soit la même abscisse, soit la même ordonnée que M.
3. Utiliser les angles remarquables pour obtenir le nombre réel α tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}})=\alpha$.
4. Utiliser les propriétés des angles associés pour conclure.

8 Calculer avec des cosinus et sinus

Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{19\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Solution commentée

1. $\dfrac{19\pi}{3}=6\pi+\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}=\pi-\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{6}$.
2. $\sin\left(\dfrac{19\pi}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

Méthode

1. Déterminer la mesure principale de chacun des angles.
2. Utiliser les formules des angles associés.

9 Déterminer le sinus connaissant le cosinus et inversement

x désigne une mesure d'angle telle que $\sin x=-0{,}7$ et $\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$. Calculer $\cos(x)$.

Solution commentée

1. $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \Leftrightarrow \cos^2(x)+0{,}49=1 \Leftrightarrow \cos^2(x)=0{,}51$.
Ainsi, $\cos(x)=-\sqrt{0{,}51}$ ou $\cos(x)=\sqrt{0{,}51}$.
2. $\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ donc $\cos(x)<0$.
3. Ainsi, $\cos(x)=-\sqrt{0{,}51}$.

Méthode

1. Utiliser la formule : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
2. Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer le signe de la ligne trigonométrique cherchée.
3. Conclure.

S'exercer

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de x.

a. $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$, $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b. $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11 Calculer $A=\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+2\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

12 Déterminer la valeur de $\sin(x)$ si $\cos(x)=-0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$.

3 Formules de transformation

a Addition

Propriétés

a et b désignent deux nombres réels.
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

Remarque En remplaçant b par $-b$ dans les formules ci-dessus, on obtient :
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.

b Duplication

Propriétés

a désigne un nombre réel.
- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$ $=1-2\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$;
- $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$.

Remarque Ces formules se déduisent de celles d'addition en prenant $b=a$.

c Linéarisation

Propriétés

a désigne un nombre réel.
- $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$;
- $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

d Expressions en fonction de la tangente de l'angle moitié

Propriétés

a désigne un nombre réel tel que $t=\tan\dfrac{a}{2}$ est défini.
- $\cos(a)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;
- $\sin(a)=\dfrac{2t}{1+t^2}$;
- $\tan(a)=\dfrac{2t}{1-t^2}$ si $\tan(a)$ est défini.

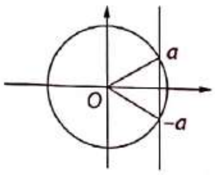
4 Équations trigonométriques

a Équation du type $\cos(x)=\cos(a)$

Propriété

x et a désignent deux nombres réels.

$$\cos(x)=\cos(a)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=-a+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



Remarque

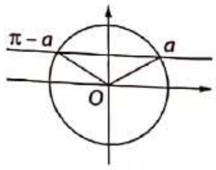
En utilisant les notations du **1. c.**, on peut aussi écrire :
$x\equiv a[2\pi]$ ou $x\equiv -a[2\pi]$.

b Équation du type $\sin(x)=\sin(a)$

Propriété

x et a désignent deux nombres réels.

$$\sin(x)=\sin(a)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=\pi-a+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



Remarque

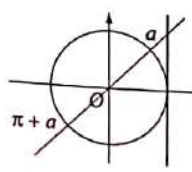
En utilisant les notations du **1. c.**, on peut aussi écrire :
$x\equiv a[2\pi]$ ou $x\equiv \pi-a[2\pi]$.

c Équation du type $\tan(x)=\tan(a)$

Propriété

x et a désignent deux nombres réels tels que :
$x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ et $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$$\tan(x)=\tan(a)\Leftrightarrow x=a+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$



Remarque

En utilisant les notations du **1. c.**, on peut aussi écrire :
$x\equiv a[\pi]$.

Remarque Les solutions de chacune des équations ci-dessus correspondent à deux points sur le cercle trigonométrique éventuellement confondus pour $a=0$ (cosinus) et $a=\pi/2$ (sinus).

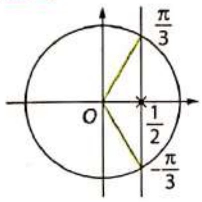
13 Résoudre une équation du type $\cos(x)=a$ / une inéquation du type $\cos(x)\geqslant a$

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos(x)=\frac{1}{2}$.

b. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation (I) : $\cos(x)\geqslant\frac{1}{2}$.

Solution commentée

a. 2.



3. Dans le tableau des valeurs usuelles, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

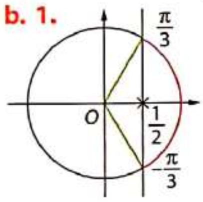
4. D'après la propriété du cours, on a :

$$\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S=\left\{-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,;\ \frac{\pi}{3}+k2\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b. 1.



2. L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est alors la réunion des intervalles $\left[-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,;\ \frac{\pi}{3}+k2\pi\right]$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Méthode

a. 1. Vérifier que le nombre a, ici $\frac{1}{2}$ appartient bien à l'intervalle $[-1\,;1]$. Sinon, l'équation n'a pas de solution.

2. Placer sur le cercle trigonométrique deux points dont le cosinus est égal à a.

3. Si l'un des points a ses deux coordonnées positives, utiliser les tables de valeurs usuelles pour déterminer une solution. Sinon, utiliser les angles associés pour se ramener à ce cas là.

4. Conclure.

b. 1. Déterminer sur le cercle l'arc correspondant aux solutions de l'inéquation.

2. Conclure en utilisant les résultats du a.

14 Résoudre une équation du type $a\cos(x)+b\sin(x)+c=0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution commentée

1. D'après le tableau des valeurs usuelles, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. $(E)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Les solutions de l'équation (E) sont les nombres x tels que :

$$\frac{\pi}{6}+x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \text{ ou } \frac{\pi}{6}+x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

C'est-à-dire $x=-\frac{5\pi}{12}+k2\pi$ ou $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Méthode

1. Déterminer le nombre réel a tel que

$$\cos(a)=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(a)=\frac{1}{2}.$$

2. Reconnaître une des formules de transformation, ici la formule d'addition $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

3. Appliquer la méthode du **13. a.** pour résoudre l'équation obtenue.

S'exercer

15 Démontrer que $\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $2\cos(x)=\sqrt{2}$; **b.** $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c.** $\tan(x)=1$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin(x)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)=-1$;

b. $\cos(x)-\sin(x)=-1$.

Angles orientés

Réponses rapides

19 Une des mesures d'un angle orienté est $\frac{\pi}{6}$.
Donner trois autres mesures de cet angle.

20 Parmi les cinq nombres réels suivants, quatre sont des mesures d'un même angle orienté. Lesquelles ?

a. $\frac{5\pi}{4}$; b. $\frac{13\pi}{4}$; c. $-\frac{3\pi}{4}$; d. $\frac{9\pi}{4}$; e. $\frac{21\pi}{4}$.

21 ABC désigne un triangle équilatéral de sens direct.
Faire une figure et lire graphiquement une mesure des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; b. $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$; c. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}})$; d. $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$.

22 Donner la mesure principale et trois autres mesures de l'angle orienté dont une mesure est $\frac{19\pi}{3}$.

23 x désigne un nombre réel tel que :

$$x \equiv \frac{7\pi}{4}\,[2\pi] \text{ et } x \in [11\pi\,;12\pi].$$

Déterminer x.

24 Déterminer tous les nombres réels x tels que :

$$x \equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \text{ et } x \in [-4\pi\,;4\pi].$$

25 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls tels que :

$$\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}.$$

1. Donner les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$.
2. a. Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{v},-\vec{v}})$.
b. En utilisant la relation de Chasles, donner les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}})$.

26 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs non nuls tels que :

$$\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6} \text{ et } \text{mes}(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}.$$

Donner la mesure principale des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$; b. $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$; c. $(\widehat{-\vec{u},\vec{v}})$;
d. $(\widehat{\vec{v},2\vec{u}})$; e. $(\widehat{\vec{u},3\vec{v}})$; f. $(\widehat{-3\vec{u},2\vec{v}})$.

27 **Démontrer une propriété**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.
Utiliser la relation de Chasles pour démontrer que :

a. $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$; b. $(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \widehat{\pi}$.

28 A, B et O désignent trois points tels que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \alpha$.
Exprimer en fonction de α une mesure des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\overrightarrow{OA},-\overrightarrow{OB}})$; b. $(\widehat{3\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}})$; c. $(\widehat{2\overrightarrow{AO},-\overrightarrow{BO}})$;
d. $(\widehat{-3\overrightarrow{OA},2\overrightarrow{BO}})$; e. $(\widehat{\overrightarrow{AO},2\overrightarrow{OB}})$; f. $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}})$.

29 ABC désigne un triangle équilatéral de centre S et tel que :

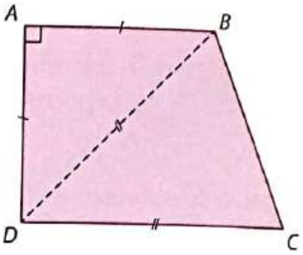
$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}.$$

Donner les mesures des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}})$; b. $(\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}})$;
c. $(\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{CA}})$; d. $(\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}})$.

Aide
Tracer, si besoin, des vecteurs ayant la même origine.

30 $ABCD$ désigne le trapèze rectangle en A représenté ci-dessous.



En utilisant les données de la figure, donner une mesure des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$; b. $(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}})$;
c. $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}})$; d. $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}})$.

31 A, B, C, D et E désignent cinq points du plan tels que :

$$AB = 2,\ AC = 3,\ AD = 1 \text{ et } AE = 4.$$

De plus, on sait que : $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$,

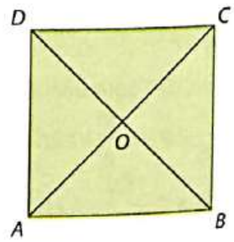
$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{\pi}{3} \text{ et } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = -\frac{\pi}{6}.$$

a. Faire une figure.
b. Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

$$(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}),\ (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}).$$

c. En déduire les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}})$.
d. Que peut-on en déduire pour les points A, D et E ?

32 $ABCD$ désigne le carré de centre O représenté ci-dessous.



Lire graphiquement une mesure des angles orientés suivants.

a. $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}})$; b. $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB}})$; c. $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AC}})$;
d. $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}})$; e. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}})$; f. $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{OB}})$.

33 Construire un triangle ABC tel que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} \text{ et } \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Que constate-t-on ?

Angles associés

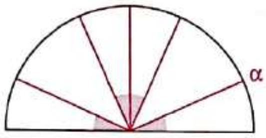
Réponses rapides

34 Utiliser le schéma ci-contre pour indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. $\cos(\pi-\alpha)=\cos(\alpha)$;

b. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$;

c. $\tan(\pi-\alpha)=\tan(\alpha)$.



35 En utilisant des angles associés bien choisis, déterminer les cosinus, sinus et tangente de :

a. $\dfrac{5\pi}{6}$; **b.** $\dfrac{7\pi}{6}$; **c.** $\dfrac{3\pi}{4}$; **d.** $\dfrac{5\pi}{4}$.

36 α désigne un nombre réel de $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin(\alpha)=0{,}4$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos(\alpha)$.

2. En déduire les valeurs exactes de :

a. $\cos(\pi-\alpha)$; **b.** $\sin(\pi+\alpha)$; **c.** $\cos(-\alpha)$;

d. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; **e.** $\tan(\alpha)$; **f.** $\tan(\pi+\alpha)$.

37 α désigne un nombre réel de $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :
$\cos(\alpha)=-\dfrac{1}{3}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$.

2. En déduire les valeurs exactes de :

a. $\sin(\pi-\alpha)$; **b.** $\cos(\pi+\alpha)$; **c.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

38 x désigne un nombre réel.
Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et/ou de $\sin(x)$ les expressions suivantes.

a. $A=\cos(x+5\pi)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\cos(4\pi-x)$;

b. $B=2\cos(x+\pi)+\cos(x-\pi)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$;

c. $C=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+2\sin(\pi+x)$;

d. $D=2\cos(x+\pi)+\sin(-x)+3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

39 Calculer sans utiliser la calculatrice :

$$E=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right);$$

$$F=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$G=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$

40 L'écran suivant a été obtenu avec GeoGebra :
Justifier les expressions simplifiées obtenues.

▸ Calcul formel	
1	cos(t+pi)+cos(pi-t)+sin(pi/2-t) → − cos(t)
2	sin(-t)+sin(pi-t)+cos(pi/2-t) → sin(t)
3	cos(5pi-t)+cos(t+4pi)+cos(pi+t) → − cos(t)

Formules de transformation

Réponses rapides

41 En remarquant que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

42 En remarquant que $\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\pi}{8}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

43 Dans chacun des cas suivants, écrire α comme somme ou différence de deux nombres réels dont on connaît les cosinus et sinus, puis déterminer les valeurs exactes de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

a. $\alpha=\dfrac{5\pi}{12}$; **b.** $\alpha=\dfrac{7\pi}{12}$; **c.** $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

Aide

▸ a. Par exemple : $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{8\pi}{12}-\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$.

44 **a.** Sachant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

b. En utilisant les formules de duplication, calculer :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

c. En déduire les valeurs exactes de :

- $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$;
- $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$;
- $\tan\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

45 a désigne un nombre réel.
Exprimer $\cos(3a)$ et $\sin(3a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Aide

▸ Remarquer que $3a=a+2a$ et utiliser les formules d'addition et de duplication.

46 α et β désignent deux nombres réels de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$\cos(\alpha)=0{,}4 \text{ et } \cos(\beta)=0{,}6.$$

a. Calculer $\sin(\alpha)$ et $\tan(\beta)$.

b. Calculer $\sin(2\alpha+\beta)$ et $\cos(\alpha+2\beta)$.

47 a désigne un nombre réel.
Calculer $\cos(a)$, $\sin(a)$ et $\tan(a)$ dans chacun des cas suivants :

a. $\cos(2a)=-\dfrac{1}{2}$ et $a\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; **b.** $\cos(2a)=0{,}2$ et $a\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

48 a désigne un nombre réel.
Calculer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ dans chacun des cas suivants :

a. $\cos(a)=-0{,}6$ et $a\in\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$; **b.** $\sin(a)=0{,}2$ et $a\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Équations trigonométriques

Réponses rapides

49 Donner deux solutions de chacune des équations suivantes.

a. $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; **b.** $\sin(x)=-\frac{1}{2}$; **c.** $\tan(x)=1$.

50 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$; **b.** $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$; **c.** $\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\cos(x)=-\frac{1}{2}$; **b.** $\sin(x)=\frac{1}{2}$;

c. $\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d.** $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\sin^2(x)=\frac{1}{4}$; **b.** $\cos^2(x)=\frac{3}{4}$.

Aide

$X^2=a \Leftrightarrow X=-\sqrt{a}$ ou $X=\sqrt{a}$.

53 Résoudre dans $[\pi ; 5\pi]$ l'équation :

$$\cos(2x)=-1.$$

54 Résoudre dans $[-2\pi ; 2\pi]$ l'équation :

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

55 Résoudre dans chacun des cas suivants les équations sur les intervalles I donnés.

a. $\cos(3x)=-\cos(x)$, $I=[-2\pi ; \pi]$;

b. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin(x)$, $I=[4\pi ; 6\pi]$;

c. $\sin(3x)=\cos(2x)$, $I=\mathbb{R}$.

Aide

Utiliser les angles associés pour transformer cosinus en sinus et inversement.

56 (E) désigne l'équation $2\cos^2(x)+9\cos(x)+4=0$.

a. Justifier que l'équation $2X^2+9X+4=0$ a deux solutions :

$$X_1=-\frac{1}{2} \text{ et } X_2=-4.$$

b. Résoudre les équations $\cos(x)=X_1$ et $\cos(x)=X_2$.

c. En déduire les solutions de l'équation (E).

57 Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équation :

$$(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)=0.$$

58 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2}$; **b.** $\cos(x)+\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

59 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante.

$$\cos(3x)-\sin(3x)=-1.$$

60 x et y désignent deux nombres réels tels que :

$$\cos(x-y)=\cos(x+y).$$

a. Utiliser les formules d'addition pour démontrer que :

$$\sin(x)\times\sin(y)=0 \quad (E).$$

b. Résoudre (E).

61 (E) désigne l'équation $\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Babila affirme que cette équation a pour ensemble de solutions

$$S=\left\{-\frac{\pi}{8}+k2\pi ; -\frac{\pi}{8}+k2\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Mambo lui rétorque que $\frac{7\pi}{8}$ est pourtant solution de (E).

a. Vérifier l'affirmation de Mambo.

b. Résoudre l'équation (E) pour trouver l'erreur commise par Babila.

Inéquations trigonométriques

Réponses rapides

62 Dans chacun des cas, représenter les images des solutions des inéquations sur le cercle trigonométrique.

a. $\sin(x)>-\frac{1}{2}$; **b.** $\cos(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

63 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

a. $\cos(x)\geqslant\frac{1}{2}$; **b.** $\sin(x)\geqslant\frac{1}{2}$;

c. $\cos(x)\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **d.** $1-2\sin(x)>0$;

e. $\sqrt{3}\tan(x)+1<0$; **f.** $\tan(x)-1>0$.

64 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\sin(x)-\cos(x)\leqslant 0.$$

Aide

Résoudre au préalable l'équation $\sin(x)-\cos(x)=0$.

65 (I) désigne l'inéquation $\sin^2(x)-\frac{1}{2}\leqslant 0$.

a. Factoriser le premier membre de (I).

b. Étudier le signe de chacun des facteurs.

c. En déduire les solutions de l'inéquation (I) dans $[0 ; 2\pi]$.

66 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1-2\cos(x)}{0{,}5+\cos(x)}<0.$$

67 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations ci-contre et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\begin{cases} \sin(x)<\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x)\leqslant-\frac{1}{2} \end{cases}$$

2 Se tester

Vrai-faux

Top chrono *(sans justification)*

68 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
x et y désignent deux nombres réels. A, B, C et D sont quatre points du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

	vrai	faux
1. Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ alors $\text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.	☐	☐
2. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$.	☐	☐
3. $\cos(3\pi - x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x+\pi) = 0$.	☐	☐
4. $\frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.	☐	☐
5. $\frac{\pi}{6}$ est solution de $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	☐	☐
6. Si $\cos(x) = 0{,}8$ alors $\tan(x) = 0{,}75$.	☐	☐

Avec justification

69 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
x désigne un nombre réel. A, B et C sont trois points du plan $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.

	vrai	faux
1. Si $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors les points A, B et C sont alignés.	☐	☐
2. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} + \cos(x)$.	☐	☐
3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ont le même ensemble de solutions.	☐	☐
4. Les solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sont les nombres $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

70 Pour chaque question indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. A, B et C désignent trois points alignés dans cet ordre.
a. $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi$; **b.** $\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (2k+1)\pi$;
c. $\text{mes}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -(2k+1)\pi$.

2. $\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$ est égal à :
a. 0 ; **b.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **c.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

3. Si $\cos(x) = 0{,}4$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$, alors $\sin(x)$ est égal à :
a. $0{,}6$; **b.** $\sqrt{0{,}84}$; **c.** $-\sqrt{0{,}84}$.

4. Une solution de l'équation $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ est :
a. $-\frac{\pi}{12}$; **b.** $-\frac{\pi}{6}$; **c.** $\frac{\pi}{12}$.

5. L'inéquation $\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour ensemble solution dans $]-\pi\,;\pi]$:
a. $\left]-\pi\,;\frac{\pi}{4}\right[$; **b.** $\left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right[$; **c.** $\left]-\pi\,;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}\,;\pi\right[$.

Avec justification

71 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. $ABCD$ désigne un carré indirect.
a. $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; **b.** $\text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$;
c. $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

2. On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. On en déduit que $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$ est égal à :
a. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; **b.** $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; **c.** $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. L'équation $\sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$ a pour solutions :
a. -2 et 1 ; **b.** celles de $\sin(x) = 1$; **c.** $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4. L'équation $\cos(x) + \cos(3x) = 2$:
a. n'a pas de solution ; **b.** a pour unique solution 0 ;
c. a une infinité de solutions dont 6π.

5. L'inéquation $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour ensemble solution dans $]-\pi\,;\pi]$:
a. $\left]-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\right[$; **b.** $\left]\frac{\pi}{6}\,;\pi\right[$; **c.** $\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}\,;\pi\right[$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

72 Droites parallèles, perpendiculaires

$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$ désignent des vecteurs directeurs respectifs de quatre droites notées (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4). On a de plus :
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}}) = \frac{\pi}{7}$, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}}) = -\frac{5\pi}{14}$ et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_4}}) = -\frac{6\pi}{7}$.

Parmi ces droites, déterminer celles qui sont parallèles et celles qui sont perpendiculaires.

73 Une formule de transformation

a. p et q désignent deux nombres réels.

Démontrer que : $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

b. x désigne un nombre réel.
Appliquer la formule précédente pour simplifier les sommes :
- $\sin(x)+\sin(3x)$;
- $\sin(2x)+\sin(4x)$.

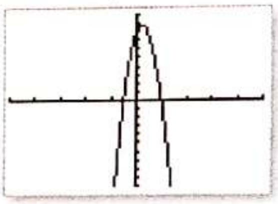
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)=0.$$

74 Une équation du troisième degré

(E) désigne l'équation :
$$2\sin^3(x)-17\sin^2(x)+7\sin(x)+8=0.$$

1. a. On pose $X=\sin(x)$.
Écrire l'équation (E') obtenue à partir de (E).

b. Sur l'écran ci-contre, on a représenté la fonction f :
$x \longmapsto 2x^3-17x^2+7x+8$.
Conjecturer une solution entière X_0 de (E'), puis vérifier cette conjecture.



c. Factoriser le premier membre de (E') par $X-X_0$; puis résoudre (E').

2. Résoudre (E).

75 Une égalité

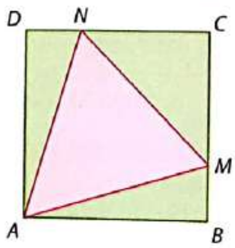
x désigne un nombre réel tel que $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

a. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b. Démontrer l'égalité : $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$.

76 Triangle équilatéral inscrit dans un carré

$ABCD$ désigne un carré. M et N sont deux points respectivement de $[BC]$ et $[CD]$ tels que $CM=CN$.



a. Construire la figure dans une feuille GeoGebra.
Déplacer le point M afin de conjecturer la position des points M et N pour que le triangle AMN soit équilatéral.

b. Déterminer par le calcul la longueur CM pour que le triangle AMN soit équilatéral.

c. En déduire les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$.

77 Équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
$$-2\sin^2(x)+\sin(x)+6=0.$$

78 Une suite de doubles

x désigne un nombre réel tel que $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

a. Démontrer que : $\cos(x)\cos(2x) = \frac{\sin(4x)}{4\sin(x)}$.

b. Démontrer que : $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$.

c. Conjecturer l'expression de $\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x)$.
Démontrer cette conjecture.

d. Donner une formule générale du produit de cosinus d'angles doublés à chaque étape.

79 Construction de points

ABC désigne un triangle isocèle de sommet principal A tel que :
$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Construire le point D tel que le triangle ACD soit équilatéral et que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}) = -\frac{19\pi}{3}$.

2. E désigne le point de la droite (AC) tel que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{5\pi}{12}$.

a. Démontrer que les droites (AB) et (BE) sont perpendiculaires.

b. En déduire la construction du point E.

80 Ensembles de points

A et B désignent deux points distincts du plan.
Déterminer et construire dans chacun des cas, l'ensemble des points M qui vérifient $\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ égale à :

a. $k2\pi$; **b.** $-\frac{\pi}{2}+k2\pi$; **c.** $\frac{\pi}{2}+k2\pi$; **d.** $\pi+k2\pi$.

81 Équation trigonométrique

(E) désigne l'équation : $\sin(x)+\cos(x)=1$.

1. Donner deux solutions évidentes de (E) dans $]-\pi ; \pi]$.

2. a. x désigne un nombre réel de $]0 ; \pi]$.
Exprimer $\sin(x)+\cos(x)$ en fonction de $\sin(x)$.

b. On pose $X=\sin(x)$. À quel intervalle appartient X ?
Démontrer qu'alors (E) s'écrit $\sqrt{1-X^2}=1-X$.

c. Résoudre l'équation d'inconnue X.

d. En déduire les solutions de (E) dans $]0 ; \pi]$.

3. Procéder de manière analogue au **1.** pour $x \in]-\pi ; 0]$.

4. Déduire des questions précédentes les solutions de (E).

5. Justifier que l'équation (E) est équivalente à (E') :
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
En utilisant une formule d'addition, exprimer le premier membre de (E') comme le cosinus ou le sinus d'un nombre réel et résoudre l'équation obtenue. Comparer les résultats avec ceux du 4.

82 Calcul formel

Voici ci-dessous une capture d'écran de la résolution par GeoGebra de l'équation (E) $2\sin^2(x)-3\sin(x)+1=0$.

▸ Calcul formel

1 Résoudre[2sin²(x)-3sin(x)+1=0]
$\rightarrow \left\{x = 2k_1\pi + \frac{1}{2}\pi, x = 2k_2\pi + \frac{1}{6}\pi, x = 2k_2\pi + \frac{5}{6}\pi\right\}$

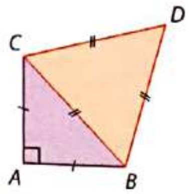
1. Quelles sont les solutions de l'équation (E) dans :

a. $]-\pi ; \pi]$? **b.** $]-3\pi ; 2\pi]$? **c.** $]\pi ; 3\pi]$?

2. Retrouver ces résultats par le calcul.

83 Mesures d'angles orientés

ABC désigne un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal *A*.
D est le point tel que *BDC* est un triangle équilatéral direct.
Déterminer les mesures principales des angles orientés suivants.



a. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$; **b.** $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA})$; **c.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$;
d. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$; **e.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB})$; **f.** $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$.

84 Plusieurs méthodes de résolution

(*E*) désigne l'équation $\cos(x) = \sin(2x)$ que l'on souhaite résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Méthode 1 : *Résolution approchée*
Utiliser la calculatrice pour tracer les courbes des fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(2x)$ et lire graphiquement les abscisses des points d'intersection.

Méthode 2 : *Utilisation des formules de duplication*
a. Démontrer que (*E*) est équivalente à (*E'*) :
$$\cos(x)(2\sin(x) - 1) = 0.$$
b. Résoudre (*E'*) et en déduire les solutions de (*E*).

Méthode 3 : *Transformation d'un sinus en cosinus*
a. Utiliser les angles associés pour transformer l'équation (*E*) en une équation (*E''*) du type $\cos(x) = \cos(y)$.
b. Résoudre (*E''*) et en déduire les solutions de (*E*).

85 Droites parallèles, perpendiculaires

ABCD désigne un parallélogramme tel que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6}$.
a. Faire une figure.
b. Construire le point *E* tel que le triangle *ADE* soit équilatéral direct.
c. Construire le point *F* tel que $\text{mes}(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$.
d. Déterminer les mesures des angles orientés :
• $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AE})$; • $(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AE})$.
Que peut-on en déduire ?

86 Une fraction de π

x désigne un nombre réel de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$
a. En utilisant la calculatrice, conjecturer la valeur d'un nombre entier *n* tel que $nx = \pi$.
b. Calculer $\cos(2x)$.
c. En déduire la valeur de *x*.

87 Une inéquation du second degré

(*E*) désigne l'inéquation : $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \leqslant 0$.
a. On pose $X = \cos(x)$. À quel intervalle *I* appartient *X* ?
Écrire l'inéquation (*E'*) vérifiée par *X*.
b. Résoudre (*E'*) dans *I*.
c. En déduire les solutions de (*E*).

88 Inéquation quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{1-\cos(x)}{0{,}5+\cos(x)} < 0$.

89 Une rotation

$M(x ; y)$ désigne un point du plan tel que :
$$OM = r \text{ et } \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \alpha.$$
a. Donner les coordonnées de *M* en fonction de *r* et α.
b. $M'(x' ; y')$ désigne le point du plan dont les coordonnées vérifient le système :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}.$$
Démontrer que l'on a :
$$\begin{cases} x' = r\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \\ y' = r\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}.$$
c. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'})$.

Aide
▸ Utiliser les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{3}$ et les formules d'addition.

90 Charge d'une batterie

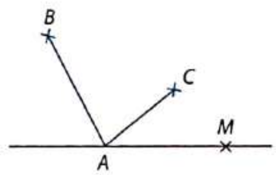
La charge d'une batterie dépend de la tension *U*, en Volts, qui lui est appliquée et qui est une fonction du temps *t*, en secondes. On admet que $U(t) = 12\sqrt{2}\sin(t)$ et que la charge n'a lieu que si la tension est supérieure à 12 V.
a. Démontrer que la charge n'a lieu que si $\sin(t) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
b. Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de l'inéquation obtenue au **a.**
c. En déduire l'intervalle de temps contenu dans $[0 ; 2\pi]$ durant lequel la charge s'effectue.

91 Une équation du second degré

(*E*) désigne l'équation d'inconnue *x* :
$$\cos(\alpha)x^2 - 2\sin(\alpha)x - \cos(\alpha) = 0.$$
1. *Étude de cas particuliers*
Résoudre (*E*) pour : **a.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; **b.** $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
2. *Étude du cas général*
Résoudre (*E*) dans le cas général.

92 Alignement ?

Un observateur *A* placé sur un rivage observe deux bateaux placés en *B* et *C*.
Il dispose des informations suivantes :



$AC = 1$ km ; $AB = 3$ km ; $\text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$.
En quel point *M* du rivage supposé rectiligne doit se placer l'observateur pour qu'il s'aligne avec les deux bateaux ?

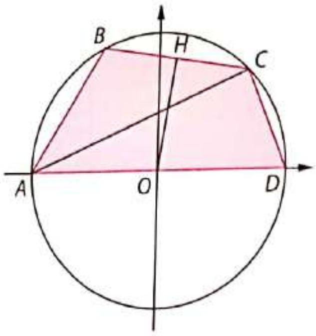
93 Logique

Un élève affirme que $\cos(2a) = 2\cos(a)$.
Cette formule est-elle :
• vraie pour tout nombre réel *a* ?
• fausse pour tout nombre réel *a* ?
• vraie pour quelques nombres réels *a* ? Si oui, lesquels ?

94 Théorème de Ptolémée

« Si le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle, alors on a : $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ ».

Le but de ce problème est de faire une démonstration de ce théorème dans le cas où $[AD]$ est un diamètre d'un cercle de centre O.



a. Reproduire la figure.

On notera :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$$

et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \beta$.

b. Dans le triangle ACD exprimer $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

En déduire les expressions de AC et CD en fonction de AD.

c. Procéder comme dans la question **b.** dans le triangle ABD.

d. Construire le point H milieu de $[BC]$.

e. Démontrer que mes $\widehat{HOC} = \beta - \alpha$.

f. En déduire que $\sin(\beta - \alpha) = \dfrac{BC}{AD}$.

g. En utilisant une formule d'addition, démontrer alors le théorème.

Info

Claude Ptolémée (90-168) est un astronome grec, auteur d'un traité intitulé *Almageste*, où il a notamment introduit les premières formules trigonométriques.

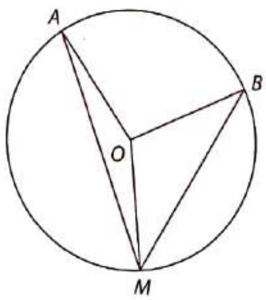
95 Distance maximale

A et B désignent deux points d'un cercle de centre O et de rayon R. Le point M est un point variable du grand arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$. On notera :

mes $\widehat{AMO} = \alpha$

et mes $\widehat{OMB} = \beta$.

Le but de ce problème est de déterminer la position du point M pour que la somme $MA + MB$ soit maximale.



Expérimentation

Ouvrir une feuille GeoGebra. Faire la figure.

Créer le nombre $d = MA + MB$; puis déplacer le point M afin de conjecturer sa position répondant au problème.

Démonstration

1. Démontrer que, pour tous nombres réels p et q,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2. a. Démontrer que :

$$MA = 2R\cos(\alpha) \text{ et que } MB = 2R\cos(\beta).$$

b. Utiliser la formule démontrée au **1.** pour exprimer $MA + MB$ sous forme de produit.

3. Justifier que $\alpha + \beta$ est indépendant de la position du point M.

4. Déduire des questions précédentes que $MA + MB$ est maximal lorsque $\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) = 1$.

5. Conclure.

96 36°

ABC désigne un triangle isocèle en A. On suppose que :

$$\text{mes}\,\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5} \text{ et } BC = x.$$

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en D.

a. Faire une figure.

b. Donner des mesures de tous les angles des trois triangles de la figure.

c. Quelle est la nature des triangles ADB et DCB ?

d. En se plaçant dans le triangle ADB, démontrer que :

$$AB = 2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

e. Démontrer de même que $CD = 2x\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

f. En déduire que :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

g. Démontrer que, pour tous nombres réels a et b,

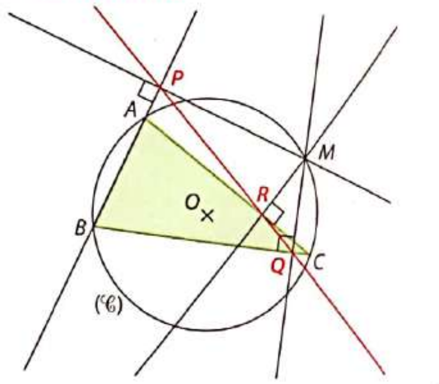
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Utiliser cette relation pour donner la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

h. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

97 Droite de Simson



ABC désigne un triangle quelconque de cercle circonscrit $(\mathscr{C})$. M est un point quelconque de $(\mathscr{C})$ et les points P, Q et R sont les projetés orthogonaux de M sur (AB), (BC) et (CA).

Le but de ce problème est de montrer que P, Q et R appartiennent à une même droite appelée droite de Simson.

1. Démontrer que quatre points A, B, C et D non alignés trois par trois sont cocycliques si et seulement si :

$$2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}).$$

2. a. Justifier que $2(\widehat{\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}})$.

b. Justifier que $2(\widehat{\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}})$.

c. Justifier que $2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}})$.

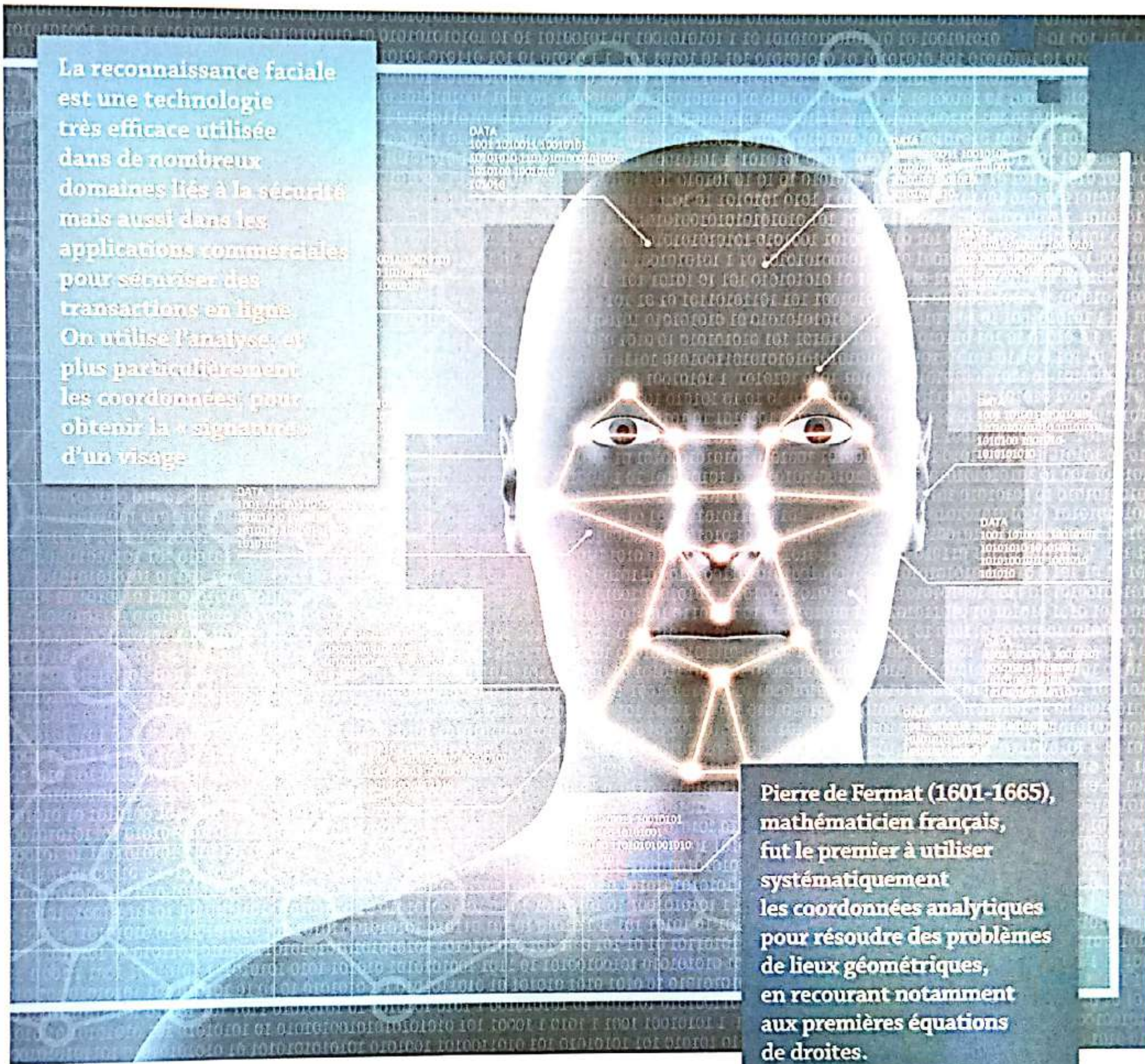
d. Utiliser les résultats précédents pour calculer $(\widehat{\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}})$.

Conclure.

Vocabulaire

Des points du plan sont dits **cocycliques** lorsqu'ils appartiennent à un même cercle.

3 Géométrie analytique du plan



La reconnaissance faciale est une technologie très efficace utilisée dans de nombreux domaines liés à la sécurité mais aussi dans les applications commerciales pour sécuriser des transactions en ligne. On utilise l'analyse, et plus particulièrement les coordonnées, pour obtenir la « signature » d'un visage.

Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français, fut le premier à utiliser systématiquement les coordonnées analytiques pour résoudre des problèmes de lieux géométriques, en recourant notamment aux premières équations de droites.

Les objectifs du chapitre

- Savoir déterminer un vecteur normal à une droite.
- Connaître l'expression de la distance d'un point à une droite et savoir l'utiliser.
- Savoir déterminer des représentations paramétriques de droites et de cercles.
- Savoir définir géométriquement une droite ou un cercle donnés par une représentation paramétrique.
- Savoir déterminer l'équation normale d'une droite.

3 Cours

Dans tout le cours, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

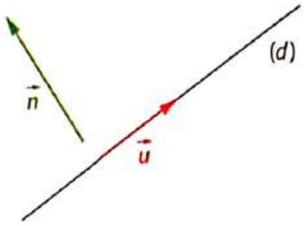
1 Orthogonalité et droites du plan

a Vecteur normal à une droite

Définition

Un **vecteur** non nul $\vec{n}$ est dit **normal** à une droite (d) lorsqu'il existe un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$



Remarque

Toute droite possède une infinité de vecteurs normaux.

En effet, si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d), alors tout vecteur non nul et colinéaire à $\vec{n}$ est aussi normal à (d).

b Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur normal

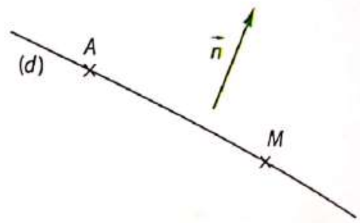
Propriété

A désigne un point du plan, $\vec{n}$ est un vecteur non nul.

(d) est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Pour tout point M du plan,

$M \in (d)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



c Équations cartésiennes d'une droite

Théorème

- Toute droite (d) du plan, de vecteur normal $\vec{n}\,(a ; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où c est un nombre réel.
- Si a, b et c sont des nombres réels tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, alors l'équation $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite ayant pour vecteur normal $\vec{n}\,(a ; b)$.

Exemples

La droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2 ; -3)$.

La droite (d) de vecteur normal $\vec{n}\,(-5 ; 4)$ admet une équation cartésienne de la forme $-5x + 4y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Remarque

Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes.

2 Positions relatives de deux droites

Droites parallèles, droites perpendiculaires

Propriétés

(d) et (d') désignent deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}\,(a ; b)$ et $\vec{n'}(a' ; b')$.

1. $(d) \,//\, (d')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, $\det(\vec{n}, \vec{n'}) = 0$, soit si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$.

2. $(d) \perp (d')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$, soit si, et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

Exemples

(d_1), (d_2) et (d_3) désignent trois droites de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\,(2 ; -5)$; $\overrightarrow{n_2}\,(-4 ; 10)$ et $\overrightarrow{n_3}\,(20 ; 8)$.

On a : $\det(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 2 \times 10 - (-5) \times (-4) = 20 - 20 = 0$. Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires, les droites (d_1) et (d_2) sont donc parallèles.

On a : $\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_3} = (-4) \times 20 + (10) \times 8 = -80 + 80 = 0$. Donc $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont orthogonaux, les droites (d_2) et (d_3) sont donc perpendiculaires.

(Puisque $(d_2) \perp (d_3)$ et que $(d_2) \,//\, (d_1)$, on en déduit que $(d_1) \perp (d_3)$. En effet : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0$.)

3 Savoir-faire

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(3;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;5)$.

Solution commentée

1. $M(x;y)$ désigne un point quelconque du plan, $\overrightarrow{AM}(x-3; y+2)$.

2. $M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-3) \times 2 + (y+2) \times 5 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 6 + 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + 4 = 0$

Une équation cartésienne de (d) est $2x + 5y + 4 = 0$.

Méthode

Utiliser la propriété **b.** du paragraphe 1.
$M \in (d)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

2 Déterminer la perpendiculaire à une droite passant par un point

$(\mathcal{D})$ désigne la droite d'équation $x - 5y + 2 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite $(\mathcal{D})$ et passant par $A(2;-3)$.

Solution commentée

1. $\vec{u}(5;1)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

2. $M(x;y)$ désigne un point quelconque du plan.
$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 5 \times (x-2) + 1 \times (y+3) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 10 + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 7 = 0$

Une équation cartésienne de (Δ) est $5x + y - 7 = 0$.

Méthode

1. Déterminer un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite $(\mathcal{D})$, $\vec{u}$ est alors un vecteur normal de (Δ).

2. Reprendre la méthode du Savoir-faire ci-dessus.

3 Déterminer la position relative de deux droites

(d_1), (d_2) et (d_3) désignent les droites d'équations cartésiennes respectives :
$$x - 5y + 2 = 0, \quad 5x + y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 5 = 0.$$

a. **Déterminer un vecteur normal pour chacune des droites (d_1), (d_2) et (d_3).**

b. **Déterminer si les droites sont perpendiculaires, parallèles, ou ni parallèles ni perpendiculaires.**

Solution commentée

1. $\overrightarrow{n_1}(1;-5)$ est un vecteur normal de (d_1).
$\overrightarrow{n_2}(5;1)$ est un vecteur normal de (d_2).
$\overrightarrow{n_3}(1;-1)$ est un vecteur normal de (d_3).

2. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1 \times 5 + (-5) \times 1 = 0$. Donc (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.
$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = 1 \times 1 + (-5) \times (-1) = 6 \neq 0$. Donc (d_1) et (d_3) ne sont pas perpendiculaires.
$\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_3} = 5 \times 1 + 1 \times (-1) = 4 \neq 0$. Donc (d_2) et (d_3) ne sont pas perpendiculaires.
$\det(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_3}) = 1 \times (-1) - 1 \times (-5) = 4 \neq 0$. Donc (d_1) et (d_3) ne sont pas parallèles.
$\det(\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}) = 5 \times (-1) - 1 \times 1 = -6 \neq 0$. Donc (d_2) et (d_3) ne sont pas parallèles.

Méthode

1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite à partir des coefficients de l'équation cartésienne.

2. Utiliser la propriété du paragraphe 2.

S'exercer

Pour les exercices **4** à **6**, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

4 $A(-1;5)$, $\vec{n}(3;-2)$.

5 $A(3;0)$, $\vec{n}\left(\frac{7}{3};\frac{4}{5}\right)$.

6 $A(1;-1)$, $\vec{n}(0;6)$.

7 On donne les points $A(1;4)$, $B(7;2)$ et $C(1;-2)$.
Déterminer les équations cartésiennes des trois hauteurs du triangle ABC.

8 $(\mathcal{D})$ désigne la droite d'équation $3x + y - 7 = 0$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite $(\mathcal{D})$ et passant par $A(0;1)$.

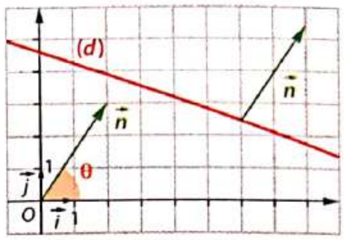
3 Équations normales d'une droite

Propriété Définition

On donne $\vec{n}$ un vecteur non nul, θ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}\,,\vec{n}})$, (d) désigne une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

La droite (d) admet une équation cartésienne de la forme $x\cos(\theta)+y\sin(\theta)+k=0$, avec k un nombre réel.

Cette équation est appelée **équation normale** de la droite (d).

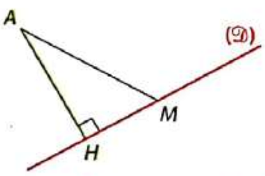


Remarque Toute droite (d) admet deux équations normales pouvant être obtenues avec les vecteurs $\vec{n}$ et $-\vec{n}$.
Cette propriété est une conséquence du théorème 1 du paragraphe **1. c.**, en effet, $\vec{n}\,(\|\vec{n}\|\cos(\theta)\,;\|\vec{n}\|\sin(\theta))$ et $\vec{n'}(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ sont colinéaires, donc si $\vec{n}$ est un vecteur normal de (d), alors $\vec{n'}$ aussi.

4 Distance d'un point à une droite

Définition

A désigne un point et $(\mathscr{D})$ une droite du plan. On note H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.



La **distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$** est le nombre, noté $d(A,(\mathscr{D}))$, égal à la distance AH.

Propriétés

On donne $A(x_0\,;y_0)$ un point du plan, $(\mathscr{D})$ désigne une droite du plan.

- Si $(\mathscr{D})$ a pour équation normale $x\cos(\theta)+y\sin(\theta)+k=0$, alors
$$d(A,(\mathscr{D}))=|x_0\cos(\theta)+y_0\sin(\theta)+k|.$$
- Si $(\mathscr{D})$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, alors
$$d(A,(\mathscr{D}))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemple $(\mathscr{D})$ désigne la droite d'équation cartésienne $x-y+2=0$.
On donne $A(3\,;-4)$, on en déduit que :
$$d(A,(\mathscr{D}))=\frac{|3-(-4)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|9|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

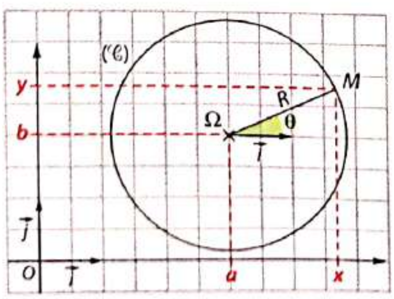
5 Représentations paramétriques

Définitions

- a, b et R désignent des nombres réels fixés tels que $R>0$.

Le système $\begin{cases}x=a+R\cos(\theta)\\ y=b+R\sin(\theta)\end{cases}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$

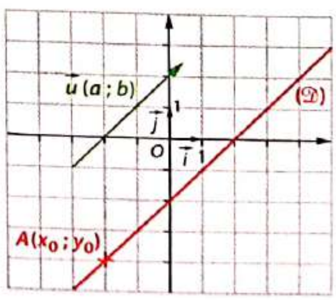
est appelé **représentation paramétrique** du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R.



- **Rappel** a, b, x_0 et y_0 désignent des nombres réels fixés tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

Le système $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

est appelé **représentation paramétrique** de la droite passant par $A(x_0\,;y_0)$ et dirigée par $\vec{u}\,(a\,;b)$.



9 Déterminer une équation normale de droite

Déterminer une équation normale de la droite (d) d'équation cartésienne $x + 2y - 3 = 0$.

Solution commentée

1. D'après l'équation cartésienne $\vec{n}\,(1\,;2)$ est un vecteur normal à (d).
   Le vecteur $\vec{v} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|}\,\vec{n}$ est alors unitaire et normal à (d).
   $\|\vec{n}\| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ et $\vec{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,;\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
2. L'équation normale est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{5}}x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y + k = 0$.
   (Elle est proportionnelle à l'équation de départ $x+2y-3=0$,
   avec le coefficient de proportionnalité égal à $\dfrac{1}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$).
3. Une équation normale de (d) est donc : $\dfrac{1}{\sqrt{5}}x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y - \dfrac{3}{\sqrt{5}} = 0$.

Méthode

1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à (d).
2. Déterminer un vecteur $\vec{v}$ unitaire normal à (d), ses coordonnées sont de la forme $(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$.
3. Utiliser la méthode de l'exercice résolu **1** page 41 pour obtenir une équation cartésienne de (d).

Rappel

Les vecteurs $\vec{n}\,(a\,;b)$ et $\vec{u}\,(-b\,;a)$ sont orthogonaux, pour tous nombres réels a et b.

Remarques

- Les différentes équations cartésiennes d'une droite sont proportionnelles.
- La méthode ci-dessus peut se résumer ainsi :
  Pour obtenir une équation normale d'une droite ayant pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, il suffit de diviser les deux membres de cette équation par la norme du vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b)$. On obtient : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$.

10 Déterminer une représentation paramétrique de cercle

Déterminer une représentation paramétrique du cercle d'équation cartésienne $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$.

Solution commentée

$2x^2+2y^2-x+3y+1=0 \Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{2}x+y^2+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}+\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{16}-\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{8}$.

Le centre du cercle est $\Omega\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{-3}{4}\right)$ et le rayon est $R=\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est donc :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta) \\ y=\dfrac{-3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Méthode

1. S'ils ne sont pas donnés, déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle, en utilisant le rappel ci-dessous.
2. Appliquer la formule du paragraphe **5.a.** du cours.

Rappel

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ est l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R, pour tous nombres réels a et b, et tout réel $R>0$.

S'exercer

11 Déterminer une équation normale de la droite (d) d'équation cartésienne $3x-4y+1=0$.

12 Déterminer une équation normale de la droite (d) d'équation cartésienne $x+6y-2=0$.

13 Déterminer une équation normale de la droite passant par $A(0\,;3)$ et $B(6\,;-2)$.

14 Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(5\,;1)$ et de rayon 2.

15 Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(-2\,;1)$ et passant par $A(3\,;0)$.

16 Déterminer une représentation paramétrique du cercle d'équation cartésienne $3x^2+3y^2-6x+6y-42=0$.

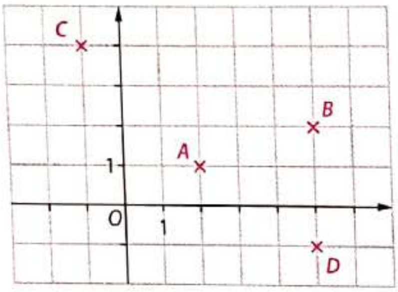
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Orthogonalité et droites

Réponses rapides

17 On donne $A(1\,;4)$, $B(-3\,;2)$ et $C(3\,;-1)$.
Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de chacune des droites (AB) et (AC).

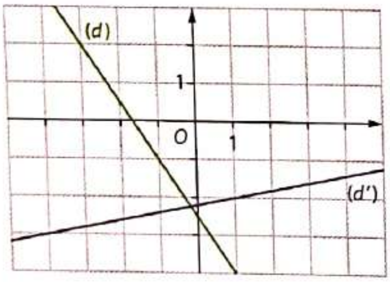
18 a. Reproduire la figure ci-dessous et tracer les droites (AB), (AC), (AD) et (BD).



b. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal des droites (AB), (AC), (AD) et (BD).

19 Donner deux vecteurs normaux et deux vecteurs directeurs de chacune des droites suivantes :
a. (d_1) d'équation $5x-2y+6=0$;
b. (d_2) d'équation $\frac{1}{2}x+3y+1=0$;
c. (d_3) d'équation $x=5$;
d. (d_4) d'équation $y=2$.

20 Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal :
a. de la droite (d) ;
b. de la droite (d').



21 (d) et (d') désignent les droites d'équations respectives :
$$4x+6y=0 \text{ et } 3x-2y+5=0.$$
Montrer que (d) et (d') sont perpendiculaires.

22 (d) et (d') désignent les droites d'équations respectives :
$$4x+6y-2=0 \text{ et } 2x+3y-7=0.$$
Montrer que (d) et (d') sont parallèles.
Sont-elles confondues ?

23 (d) et (d') désignent respectivement la droite d'équation cartésienne $x-3y+5=0$, et la droite passant par $A(1\,;-0)$ et $B(7\,;-18)$.
Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles, perpendiculaires ou ni l'un ni l'autre ? Justifier.

24 (d) désigne la droite d'équation cartésienne $3x-y+5=0$, (d') désigne la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x=-6+6t \\ y=2-2t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$
Déterminer si (d) et (d') sont parallèles ou perpendiculaires.

25 a désigne un nombre réel, on donne la droite (d) d'équation cartésienne $ax-y+4=0$.
a. Quelle valeur faut-il donner à a pour que la droite (d) soit perpendiculaire à la droite (d_1) d'équation cartésienne :
$$3x+2y+7=0\ ?$$
b. Quelle valeur faut-il donner à a pour que la droite (d) soit parallèle à la droite (d_2) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2-2t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}\ ?$$

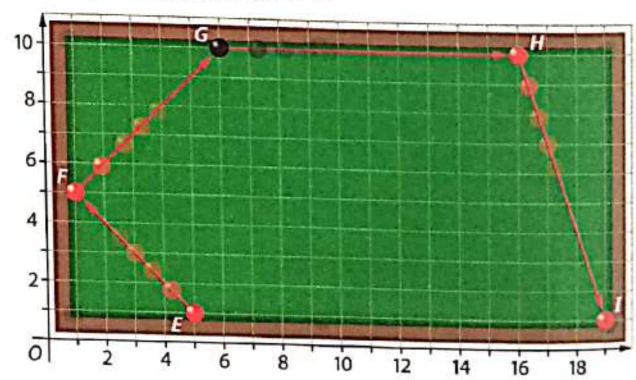
26 (d) désigne la droite d'équation $2x-y+6=0$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et passant par $A(1\,;4)$.

27 Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(3\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;-3)$.

28 On donne $A(3\,;0)$, $B(1\,;4)$, $C(-1\,;2)$ et $D(-3\,;-4)$.
a. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{CD}$.

29 $(\mathcal{D})$ désigne la droite d'équation $x-4y-1=0$.
Déterminer les deux vecteurs normaux à $(\mathcal{D})$ dont la norme est égale à 3.

30 Un joueur de billard a schématisé son prochain coup sur la figure ci-dessous : il va taper dans la boule rouge située au point E.
Cette boule va toucher la bande du billard au point F, et venir taper la boule noire située en G.
La boule noire ira alors taper la boule située en H qui ira tomber dans la poche (trou) située en I.



a. Déterminer les équations des droites (EF), (FG), (GH) et (HI).
Identifier les couples de droites perpendiculaires ou parallèles.
b. Le joueur rate son coup, la boule située en H suit une trajectoire parallèle à la droite (EF).
Déterminer les coordonnées du point de contact J entre la dernière boule et la bande de droite du billard.

31 On donne les points $A(3\,;5)$, $B(4\,;1)$ et $C(-2\,;-1)$.

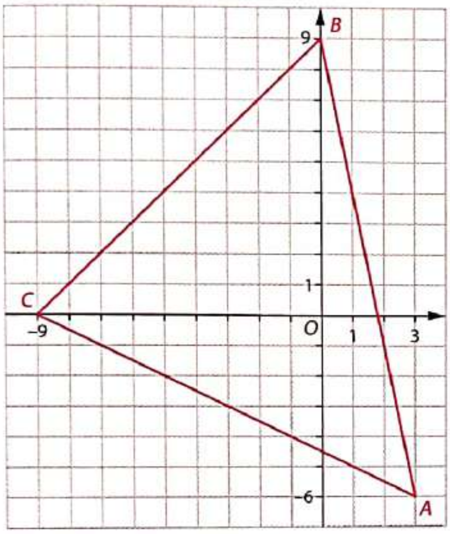
a. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Déterminer les équations cartésiennes des trois hauteurs du triangle ABC.

Aide

▶ Les hauteurs d'un triangle sont les droites passant par un sommet et orthogonales au côté opposé à ce sommet.

32



a. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

Aide

▶ L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses trois hauteurs.

33 En électricité, on modélise une pile par une force électromotrice E constante montée en série avec une résistance r constante. La tension aux bornes de la pile, notée U_1, exprimée en volts, vérifie la relation :

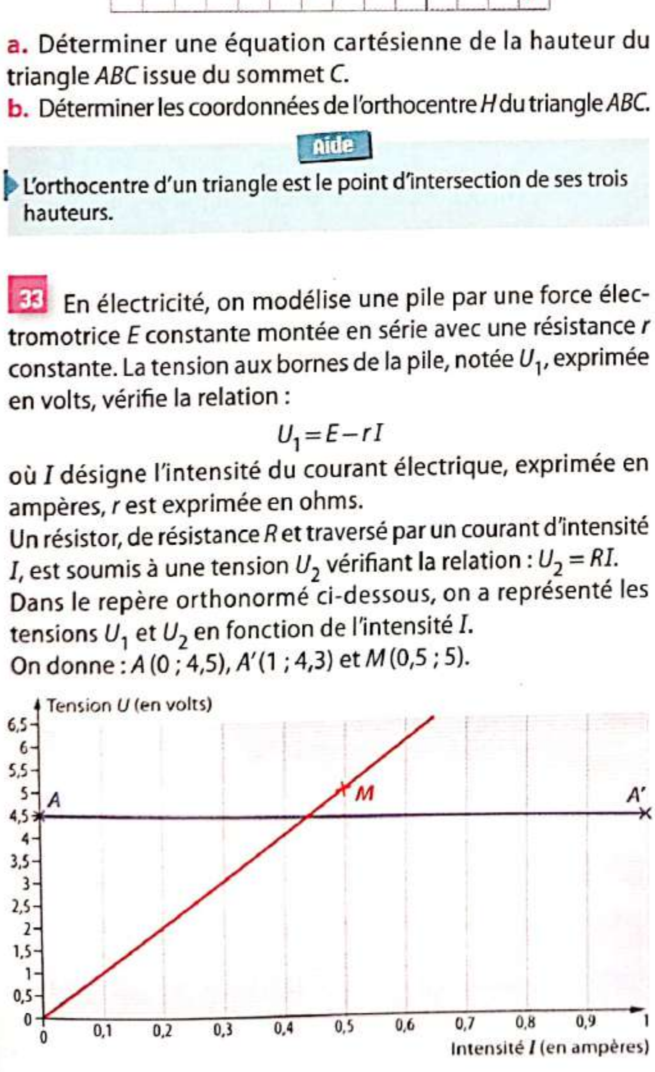
$$U_1 = E - rI$$

où I désigne l'intensité du courant électrique, exprimée en ampères, r est exprimée en ohms.

Un résistor, de résistance R et traversé par un courant d'intensité I, est soumis à une tension U_2 vérifiant la relation : $U_2 = RI$.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a représenté les tensions U_1 et U_2 en fonction de l'intensité I.

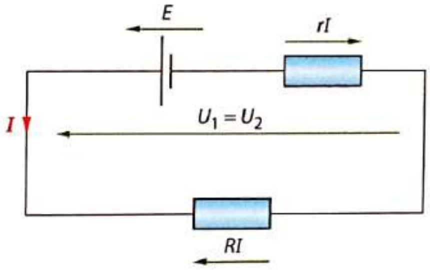
On donne : $A(0\,;4{,}5)$, $A'(1\,;4{,}3)$ et $M(0{,}5\,;5)$.



a. Associer à chaque droite la tension qui lui correspond.

b. Déterminer les valeurs des constantes E (en volts), r et R (en ohms).

c. Lorsqu'on branche le résistor aux bornes de la pile, on obtient le montage électrique schématisé de la façon suivante :



Un courant de même intensité I traverse la pile et le résistor, et les tensions U_1 et U_2 sont égales.

On appelle point de fonctionnement du circuit le couple (I_0, U_0) correspondant à cette situation.

Sur le graphique, comment peut-on déterminer le point de fonctionnement ?

d. Déterminer par le calcul les valeurs de I_0 et U_0.

Équation normale de droite

Réponses rapides

34 Les équations des droites ci-dessous peuvent-elles être des équations normales ? Justifier.

a. $2x - y + 4 = 0$;

b. $0{,}3x + 1{,}5y + 2 = 0$.

35 (d) désigne la droite d'équation normale :

$$\frac{1}{\sqrt{17}}x + \frac{4}{\sqrt{17}}y + \frac{5}{\sqrt{17}} = 0.$$

Déterminer une autre équation normale de (d).

36 (d) désigne la droite d'équation $2x - y + 4 = 0$.

a. Déterminer les vecteurs unitaires normaux à (d).

b. Déterminer les équations normales de (d).

37 Déterminer une équation normale des droites suivantes :

a. $(\mathcal{D}_1)$ passant par $A(5\,;-2)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(-1\,;2)$.

b. $(\mathcal{D}_2)$ d'équation cartésienne $3x - 4y + 1 = 0$.

38 Déterminer une équation normale des droites suivantes :

a. $(\mathcal{D}_3)$ passant par $A(3\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-5)$.

b. $(\mathcal{D}_4)$ passant par $A(-2\,;0)$ et $B(4\,;3)$.

39 Déterminer une équation normale de la droite $(\mathcal{D}_5)$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Distance d'un point à une droite

Réponses rapides

40 Calculer la distance du point A à la droite (d) dans les cas suivants.

a. $A(1\,;2)$ et $(d) : x+3y+1=0$.

b. $A(-1\,;1{,}5)$ et $(d) : 3x-2y=0$.

41 Calculer la distance du point A à la droite (d) dans les cas suivants.

a. $A(3\,;-2)$ et $(d) : \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-2=0$.

b. $A(1\,;4)$ et $(d) : \dfrac{2}{\sqrt{13}}x+\dfrac{3}{\sqrt{13}}y+\dfrac{6}{\sqrt{13}}=0$.

42 Calculer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ dans les cas suivants.

a. $(\mathscr{D})$ a pour équation $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+1=0$, et $A(1\,;-1)$.

b. $(\mathscr{D})$ a pour équation $2x-5y+11=0$, et $A(-2\,;1)$.

c. $(\mathscr{D})$ a pour équation $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y+1=0$, et $A(4\,;-2)$.

43 **a.** Déterminer une équation normale de la droite (d) passant par $A(1\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;-2)$.

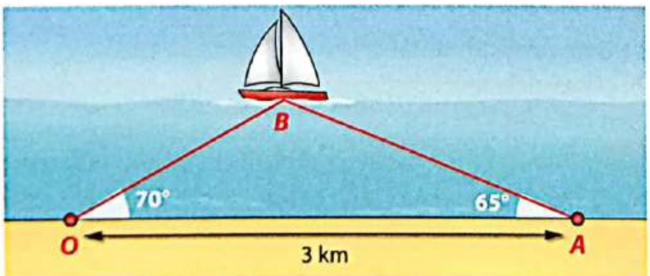
b. Calculer la distance du point $B(4\,;-3)$ à la droite (d).

44 Calculer la distance du point $A(1\,;-2)$ à la droite (BC) sachant que $B(-1\,;5)$ et $C(2\,;-3)$.

45 Calculer la distance du point $A(2\,;-2)$ à la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

46 On observe depuis la côte un bateau situé en mer.
On dispose des mesures suivantes :

$$OA = 3\text{ km},\quad \text{mes}\,\widehat{AOB} = 70° \quad \text{et} \quad \text{mes}\,\widehat{OAB} = 65°.$$



a. En considérant un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, d'origine O, avec $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$, déterminer un vecteur directeur unitaire de la droite (OB).

b. En déduire une équation normale de la droite (OB).

c. De même, déterminer un vecteur directeur unitaire de la droite (AB), puis une équation normale de la droite (AB).

d. Déterminer les coordonnées du point B.

e. En déduire la distance du bateau à la côte matérialisée par la droite (OA).

47 **Propriété du cours**

$(\mathscr{D})$ désigne une droite d'équation normale :

$$x\cos(\theta)+y\sin(\theta)+k=0,$$

avec θ et k deux nombres réels fixés.

On donne $A(x_0\,;y_0)$.

H est le projeté orthogonal de A sur la droite $(\mathscr{D})$.

a. Vérifier que $\vec{v}\,(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ est un vecteur unitaire normal à $(\mathscr{D})$.

b. $M(x\,;y)$ désigne un point de $(\mathscr{D})$.
Montrer que $AH = \left|(x-x_0)\cos(\theta)+(y-y_0)\sin(\theta)\right|$.

c. En utilisant l'équation normale de $(\mathscr{D})$, déduire du **b.** que :

$$d(A,(\mathscr{D})) = \left|x_0\cos(\theta)+y_0\sin(\theta)+k\right|.$$

Cercles

Réponses rapides

48 Déterminer le centre et le rayon du cercle de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=5+2\cos(\alpha) \\ y=-3+2\sin(\alpha) \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

49 Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(6\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

50 $(\mathscr{C})$ désigne le cercle d'équation cartésienne :

$$(x-4)^2+y^2=6,$$

Déterminer une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$.

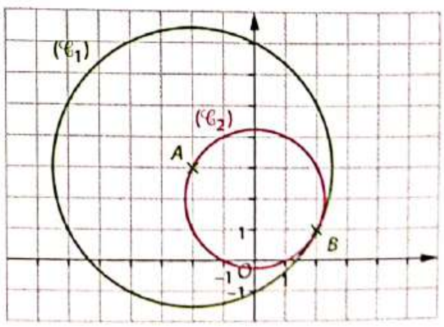
51 On donne les points $A(-1\,;1)$ et $B(5\,;-3)$.
Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre A et passant par B.

52 On donne les points $A(2\,;1)$ et $B(8\,;-5)$.
Déterminer une représentation paramétrique du cercle de diamètre $[AB]$.

53 Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+3\cos(\theta) \\ y=3\sin(\theta) \end{cases} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

54



a. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C}_1)$.

b. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C}_2)$.

55 Déterminer une représentation paramétrique des cercles d'équations cartésiennes :

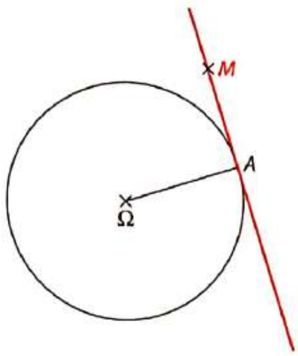
a. $x^2+y^2-6x-2y=7$;

b. $x^2+y^2+3x+8y+12=0$;

c. $x^2+y^2+8x+6y+17=0$.

56 $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon R, avec $R>0$.

t est un nombre réel fixé, et A le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ avec $\begin{cases} x=a+R\cos(t) \\ y=b+R\sin(t) \end{cases}$.

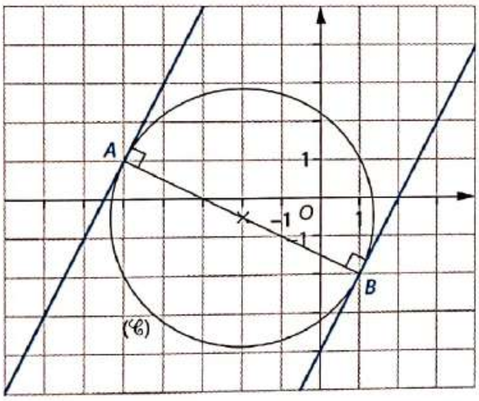


a. Montrer que $\vec{u}(\cos(t)\,;\,\sin(t))$ est un vecteur directeur de la droite (ΩA).

b. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ unitaire normal à la droite (ΩA).

c. (T) désigne la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A.
Déterminer une équation cartésienne de (T).

57 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de diamètre $[AB]$.



a. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$.

b. Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points A et B.

58 On donne le point $A(4\,;\,2)$ et (d) désigne la droite d'équation cartésienne :

$$3x+2y+10=0.$$

a. Calculer la distance du point A à la droite (d).

b. Déterminer une représentation paramétrique du cercle de centre A tangent à la droite (d).

59 On donne le point $A(2\,;\,1)$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation cartésienne :

$$2x-y+3=0.$$

a. Calculer la distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$.

b. Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$.

c. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et tangent en H à la droite $(\mathscr{D})$.

60 $(\mathscr{D})$ désigne la droite d'équation cartésienne :

$$x-y+1=0,$$

et $(\mathscr{C})$ désigne le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-12x+6y-5=0.$$

a. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

b. Montrer que $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$.

c. Calculer les coordonnées du point de contact I.

Aide

Quand une droite est tangente à un cercle, le point de contact est le projeté orthogonal du centre du cercle sur la droite.

61 $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre Ω et de rayon R, (d) désigne une droite.

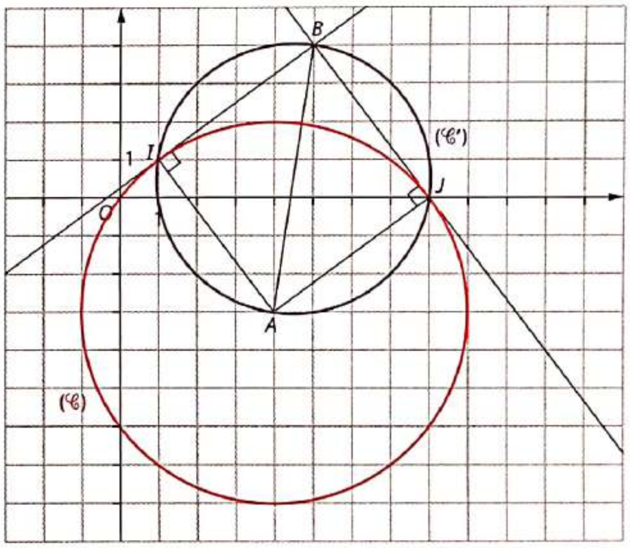
Dans chacun des cas, calculer la distance de Ω à (d) ; en déduire le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (d).

a. $\Omega(2\,;\,3)$, $R=4$ et $(d) : -4x+5y-31=0$.

b. $\Omega(2\,;\,3)$, $R=\sqrt{2}$ et $(d) : x+6y-31=0$.

c. $\Omega(-4\,;\,-3)$, $R=2$ et $(d) : 7x-8y-26=0$.

62 On donne les points $A(4\,;\,-3)$ et $B(5\,;\,4)$. $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre A et passant par l'origine O.



a. Déterminer le rayon de $(\mathscr{C})$ et une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.

b. Calculer la distance AB.

c. $(\mathscr{C}')$ désigne le cercle de diamètre $[AB]$, déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C}')$.

d. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection I et J de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

e. Sans calcul, démontrer :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BJ}=0.$$

f. Déterminer une équation cartésienne des deux tangentes à $(\mathscr{C})$ issues du point B.

63 $(\mathscr{D})$ désigne la droite d'équation :

$$x-y+1=0,$$

$(\mathscr{C})$ désigne le cercle d'équation :

$$x^2+y^2-4x+2y=3.$$

Montrer que $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$ et calculer les coordonnées du point d'intersection A.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

64 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(1 ; 0)$, $B(3 ; 1)$ et $C(0 ; 2)$.
$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, (d) est la droite d'équation cartésienne $2x+y-2=0$.

	vrai	faux
1. $\vec{n}(2 ; -1)$ est un vecteur directeur de (d).	☐	☐
2. $\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}=0$ est une équation normale de (d).	☐	☐
3. $A \in (d)$.	☐	☐
4. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.	☐	☐
5. La droite perpendiculaire à (d) et passant par B a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+2t \\ y=1+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.	☐	☐
6. Le cercle $(\mathscr{C})$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+5\cos(t) \\ y=1+5\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.	☐	☐

Avec justification

65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-2 ; 1)$, $B(-3 ; 4)$ et $\Omega(4 ; 3)$. $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre Ω et passant par A et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

	vrai	faux
1. $\overrightarrow{AO}$ est un vecteur normal de (d).	☐	☐
2. $B \in (\mathscr{C})$.	☐	☐
3. Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est $\begin{cases} x=-2+\sqrt{40}\cos(t) \\ y=1+\sqrt{40}\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.	☐	☐
4. Une équation normale de (d) est $\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y+\frac{5}{\sqrt{10}}=0$.	☐	☐
5. Une représentation paramétrique de la droite $(B\Omega)$ est $\begin{cases} x=-10+t \\ y=5-\frac{1}{7}t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

66 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=1+5\cos(t) \\ y=1+5\sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. Le centre de $(\mathscr{C})$ est :
a. $\Omega(1 ; 5)$; **b.** $\Omega(1 ; 1)$; **c.** $\Omega(\sqrt{5} ; \sqrt{5})$.

2. Le rayon de $(\mathscr{C})$ est égal à :
a. $\sqrt{5}$; **b.** 1 ; **c.** 5.

3. Le point $A(-3 ; 4)$ appartient à $(\mathscr{C})$:
a. vrai ; **b.** faux ; **c.** on ne peut pas savoir.

4. La tangente à $(\mathscr{C})$ au point $F(5 ; -2)$ a pour équation cartésienne : **a.** $4x-5y-20=0$;
b. $4x-3y-26=0$; **c.** $4x-y-16=0$.

5. Le point $G(3 ; 12)$ est situé à une distance de la droite (AF) égale à :
a. $10\sqrt{2}$; **b.** 10 ; **c.** $\frac{29}{3}$.

Avec justification

67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A(-1 ; -2)$, $B(5 ; -10)$ et $(\mathscr{C})$ désigne le cercle de diamètre $[AB]$.

1. Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est :

a. $\begin{cases} x=6+5\cos(t) \\ y=-8+5\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x=2+\sqrt{5}\cos(t) \\ y=-6+\sqrt{5}\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x=2+5\cos(t) \\ y=-6+5\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. (d) désigne la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $I(-2 ; -9)$.
Une équation de (d) est :
a. $4x+3y=0$; **b.** $4x-3y-35=0$; **c.** $4x+3y+35=0$.

3. On donne $J(2 ; 3)$. La distance de J à (d) est égale à :
a. 12 ; **b.** 10,4 ; **c.** 9,8.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

68 Droites parallèles

On donne les points $A(4 ; 0)$, $B(1 ; 3)$, $A'(7 ; 0)$.

a. Déterminer les coordonnées du point B' de la droite (OB) vérifiant $(AB') // (A'B)$.

b. Déterminer les coordonnées des points C et C' tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'}.$$

c. Déterminer les équations des droites (AB'), $(A'B)$ et (CC').

d. Montrer que (CC') est parallèle à (AB') et à $(A'B)$.

69 Droites concourantes

On donne les points $A(4 ; 0)$, $B(1 ; 3)$, $A'(9 ; 0)$ et $B'(-3 ; -9)$.

a. Vérifier que $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$.

b. Déterminer les coordonnées des points C et C' tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{B'C'}.$$

c. Déterminer les équations des droites (AB'), $(A'B)$ et (CC').

d. Montrer que (AB'), $(A'B)$ et (CC') sont concourantes.

70 Tangente à un cercle issue d'un point

$(\mathscr{C})$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1.

On donne le point $A(a ; 0)$ avec $a > 1$.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J des tangentes issues du point A, avec le cercle $(\mathscr{C})$.

b. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ issues de A.

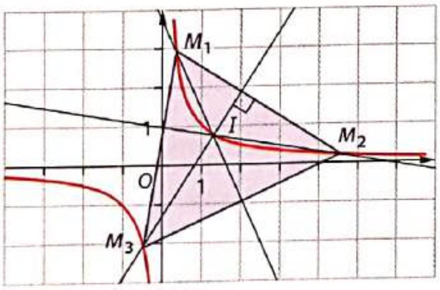
71 Orthocentre et hyperbole

$(\mathscr{H})$ désigne l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

On donne :

$$M_1\left(x_1 ; \frac{1}{x_1}\right) ; \; M_2\left(x_2 ; \frac{1}{x_2}\right) \; \text{et} \; M_3\left(x_3 ; \frac{1}{x_3}\right)$$

trois points distincts de $(\mathscr{H})$.



a. (h_3) désigne la hauteur issue de M_3 dans le triangle $M_1M_2M_3$.
Déterminer une équation cartésienne de (h_3).

b. Montrer que $(\mathscr{H})$ et (h_3) ont deux points d'intersection I et M_3.

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I.

d. Vérifier que I est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

Aide

Dans une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, admettant deux racines réelles x_1 et x_2, on a : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

72 Triangle délimité par trois droites

(d_1), (d_2) et (d_3) désignent les droites d'équations respectives :

$$(d_1) : x + y - 5 = 0 ;$$

$$(d_2) : 2x - y - 2 = 0 ; \qquad (d_3) : x - 2y - 4 = 0.$$

a. Calculer les coordonnées des points d'intersection suivants :

$$A \in (d_1) \cap (d_3), \;\; B \in (d_1) \cap (d_2) \;\; \text{et} \;\; C \in (d_2) \cap (d_3).$$

b. Calculer la distance BC.

c. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur $(\mathscr{D})$ issue du sommet C dans le triangle ABC.

d. Calculer les coordonnées de E, point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et de l'axe des abscisses.

e. Déterminer les coordonnées du point F, projeté orthogonal de E sur la droite (d_2).

f. Calculer la distance de F à (d_1).

Notation

L'écriture symbolique $(d) \cap (d')$ désigne l'intersection des droites (d) et (d').

73 Famille de droites

$(\mathscr{D})$ désigne la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

et (Δ_m) la droite d'équation cartésienne :

$$(2 - m)x + my + 1 = 0,$$

où m est un nombre réel.

a. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les droites $(\mathscr{D})$ et (Δ_m) sont parallèles.

b. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les droites $(\mathscr{D})$ et (Δ_m) sont perpendiculaires.

74 Représentation paramétrique de droites

On donne les points $A(0 ; 2)$ et $B(-1 ; 0)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d_1) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; -2)$.
Déterminer les coordonnées du point D de (d_1) d'abscisse égale à 2.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d_2) passant par B et de vecteur normal $\vec{n'}(1 ; 1)$.
Déterminer les coordonnées du point C de (d_2) d'abscisse égale à 1.

c. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites (AC) et (BD).

d. P désigne un point de (d_1) et Q un point de (d_2).
Déterminer les coordonnées de P et Q tels que I est le milieu du segment $[PQ]$.

75 Bissectrices de deux droites

$(\mathscr{D})$ désigne la droite d'équation $2x - y = 0$ et $(\mathscr{D}')$ désigne la droite passant par $A(-1 ; 1)$ et $B(-3 ; 0)$.

a. Déterminer le point d'intersection I de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

b. $M(x ; y)$ désigne un point quelconque du plan.
Donner l'expression donnant la distance d_1 de M à $(\mathscr{D})$, et l'expression donnant la distance d_2 de M à $(\mathscr{D}')$.

c. Montrer que les points M vérifiant $d_1 = d_2$ définissent deux droites (Δ) et (Δ'), dont on déterminera les équations.

Vocabulaire

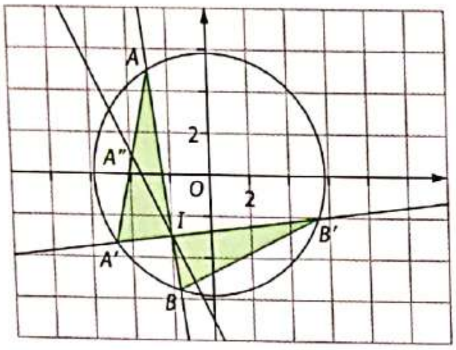
Les droites (Δ) et (Δ'), lieu des points M vérifiant :

$$d(M, (\mathscr{D})) = d(M, (\mathscr{D}'))$$

sont appelées bissectrices intérieure et extérieure de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

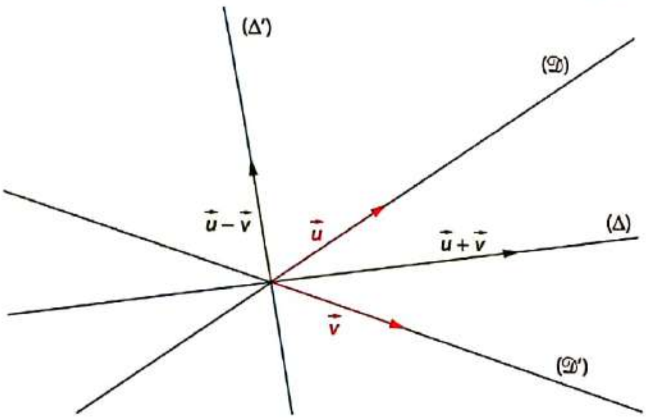
76 Triangles tracés dans un cercle

($\mathscr{C}$) désigne le cercle de centre O et passant par $A(-3\,;5)$.
On donne $I(-2\,;-3)$ un point intérieur au cercle.
La droite (IA) coupe ($\mathscr{C}$) en un second point B.
La perpendiculaire à (IA) en I coupe ($\mathscr{C}$) en A' et B'.



a. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et $(A'B')$.
b. Montrer que si $M(x\,;y)$ est un point d'intersection de ($\mathscr{C}$) et de (AB), alors x est solution d'une équation du second degré dont on connait au moins une racine.
En déduire les coordonnées de B.
c. Déterminer les coordonnées des points A' et B'.
d. On considère la médiane $(A''I)$ du côté $[AA']$ du triangle AIA'.
Montrer que la droite (IA'') est aussi la hauteur issue de I du triangle IBB'.

77 Vecteurs directeurs des bissectrices



($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) désignent deux droites sécantes d'équations respectives :

$$ax+by+c=0 \quad\text{et}\quad a'x+b'y+c'=0.$$

a. À quelle condition sur les coefficients a, b, a' et b' les droites ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) sont-elles sécantes ?
b. $M(x\,;y)$ désigne un point quelconque du plan.
Exprimer $d(M, (\mathscr{D}))$ et $d(M, (\mathscr{D}'))$ à l'aide des coefficients a, b, c, a', b' et c'.
c. (Δ) et (Δ') désignent les deux bissectrices des droites ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$).
En utilisant l'égalité $d(M, (\mathscr{D}))=d(M, (\mathscr{D}'))$, déterminer une équation cartésienne de chacune des bissectrices.
d. Montrer que (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.
e. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs unitaires directeurs respectivement de ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$), montrer que $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur directeur de l'une des bissectrices, et que $\vec{u}-\vec{v}$ est un vecteur directeur de l'autre bissectrice.

78 Bissectrices d'un triangle

On donne les points $A(4\,;7)$, $B(-12\,;-5)$ et $C(13\,;-5)$.
a. Faire une figure, puis déterminer une équation cartésienne des droites (AB), (AC) et (BC).
b. $M(x\,;y)$ désigne un point quelconque du plan.
Montrer que :

$$d(M,(AB))=d(M,(AC)) \Leftrightarrow 7x-y-21=0 \quad (1)$$
$$\text{ou } x+7y-53=0 \quad (2).$$

On obtient ainsi les équations des bissectrices des droites (AB) et (AC). En utilisant la figure, identifier l'équation de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.
c. De la même façon déterminer les équations des bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
d. Vérifier que les trois bissectrices intérieures sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
e. On sait alors que $d(I, (AB))=d(I, (AC))=d(I, (BC))$.
Calculer cette valeur commune.

Vocabulaire
Dans un triangle, le point d'intersection des trois bissectrices intérieures est le centre d'un cercle tangent à chaque côté du triangle, appelé **cercle inscrit** dans le triangle.

79 Cercle tangent à une droite donnée

($\mathscr{D}$) désigne la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1-3t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

A est le point de ($\mathscr{D}$) d'abscisse -1.
L'objectif de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique du cercle ($\mathscr{C}$) passant par l'origine O et tangent à ($\mathscr{D}$) en A.
a. On note Ω le centre de ($\mathscr{C}$).
Déterminer une équation cartésienne de la droite $(A\Omega)$.
b. Si $[AA']$ est un diamètre de ($\mathscr{C}$), que peut-on dire du triangle AOA' ? En déduire les coordonnées de A'.
c. Conclure.

80 Cercles tangents à deux droites données

($\mathscr{D}$) désigne la droite d'équation $4x-3y+2=0$, et ($\mathscr{D}'$) la droite d'équation $4x-3y-23=0$.
a. Quelle est la position relative de ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) ?
b. Quelle particularité ont les centres des cercles tangents simultanément à ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) ? Faire une figure.
c. $M(x\,;y)$ désigne un point du plan.
Montrer que $d(M, (\mathscr{D}))=d(M, (\mathscr{D}'))$ si, et seulement si, M appartient à une droite (Δ) déterminée par une équation cartésienne.

81 Tangentes à un cercle

($\mathscr{C}$) désigne le cercle de centre $\Omega(3\,;-2)$ et de rayon 4.
a. Déterminer les points A et A' de ($\mathscr{C}$) où la tangente au cercle admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;1)$.
b. Donner une équation normale des tangentes à ($\mathscr{C}$) aux points A et A'.
c. Déterminer les points B et B' de ($\mathscr{C}$) où la tangente au cercle admet pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;\sqrt{3})$.
d. Donner une équation cartésienne des tangentes à ($\mathscr{C}$) aux points B et B'.

82 Cercle tangent à deux droites

$(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ désignent respectivement la droite d'équation $-x+5y-4=0$ et la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=8+5t \\ y=-8+t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. Quelles sont les positions relatives de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$?
b. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ tangent à $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, et dont le centre a une ordonnée nulle.
c. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}')$ tangent à $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, et dont le centre a une abscisse égale à 2.

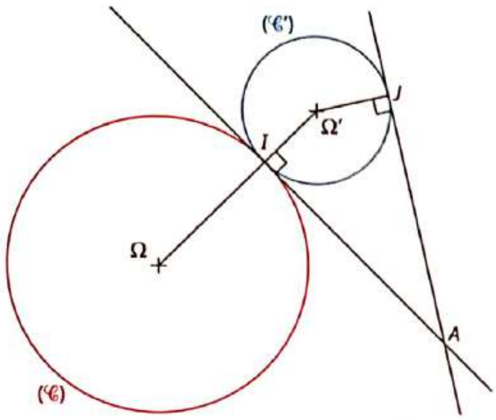
83 Cercles tangents

$(\mathcal{C})$ désigne le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2+2x+4y-27=0,$$

$(\mathcal{C}')$ est le cercle de représentation paramétrique :

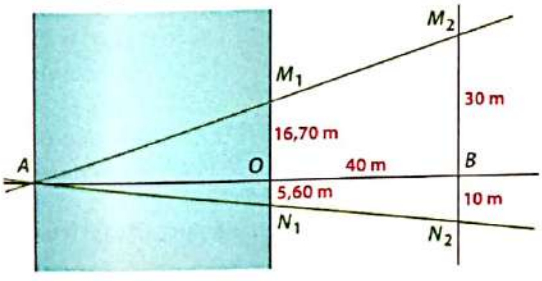
$$\begin{cases} x=5+\sqrt{8}\cos(\alpha) \\ y=4+\sqrt{8}\sin(\alpha) \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$



a. Déterminer les caractéristiques des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$: centres respectifs Ω et Ω', et rayons respectifs R et R'. En déduire que les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents.
b. Déterminer l'équation de (Δ) tangente commune à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
c. A désigne le point d'abscisse 10 appartenant à (Δ). La seconde tangente à $(\mathcal{C}')$ issue de A coupe $(\mathcal{C}')$ en J vérifiant $IA=IJ$. À l'aide d'une équation cartésienne de $(\mathcal{C}')$ et de la condition $IA^2=IJ^2$, déterminer les coordonnées de J.
Déterminer l'équation de la seconde tangente à $(\mathcal{C}')$ issue de A.

84 Calcul de distances non accessibles

On souhaite mesurer la largeur d'une rivière dont les bords sont supposés rectilignes et parallèles.
On repère un arbre situé sur la berge opposée de la rivière par le point A.
On identifie quatre points M_1, M_2, N_1 et N_2 tels que : les points A, M_1 et M_2 sont alignés, les points A, N_1 et N_2 sont alignés et les droites (M_1N_1) et (M_2N_2) sont parallèles.
On obtient la figure et les mesures suivantes :



a. On place les points O et B tels que A, O et B sont alignés, et les droites (OB) et (M_1N_1) sont perpendiculaires.
On considère un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'origine O, tel que :

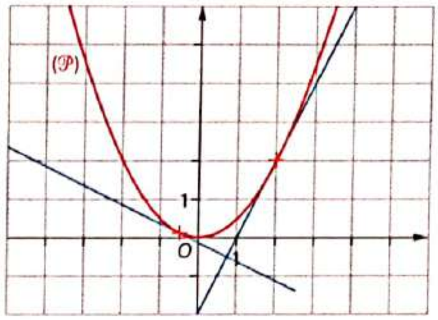
$$\vec{i}=\frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} \text{ et } \vec{j}=\frac{1}{OM_1}\overrightarrow{OM_1}.$$

Déterminer les coordonnées des points M_1, M_2, N_1 et N_2.
En déduire une équation cartésienne des droites (AM_1) et (AN_2).
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites (AM_1) et (AM_2), et en déduire la largeur de la rivière.

85 Tangentes à une parabole

$(\mathcal{P})$ désigne la parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{2}$.

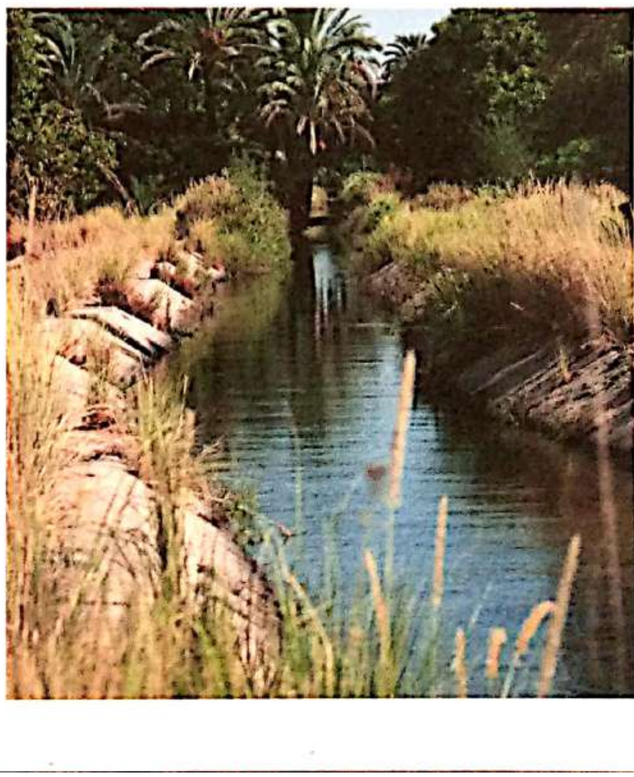
Pour tout nombre réel a non nul, M_a désigne le point de $(\mathcal{P})$ d'abscisse $x=a$ et (T_a) la tangente à $(\mathcal{P})$ au point M_a.



a. Montrer qu'il existe un unique nombre réel b tel que (T_a) et (T_b) soient perpendiculaires.
b. On note I_a le point d'intersection de (T_a) et (T_b).
Montrer que l'abscisse de I_a est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.
c. Déterminer les coordonnées du point I_a.
d. Déterminer le lieu géométrique des points I_a obtenus lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$.

Remarque

La notion de tangente à une courbe est développée au chapitre 11.



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

86 Collision de particules

On considère deux particules α et β, soumises respectivement aux vecteurs vitesse $\vec{v_1}(1\,;1)$ et $\vec{v_2}(2\,;-1)$.
On suppose qu'à l'instant $t=0$, la particule α se trouve en $A(3\,;1)$ et la particule β en $B(-1\,;6)$.

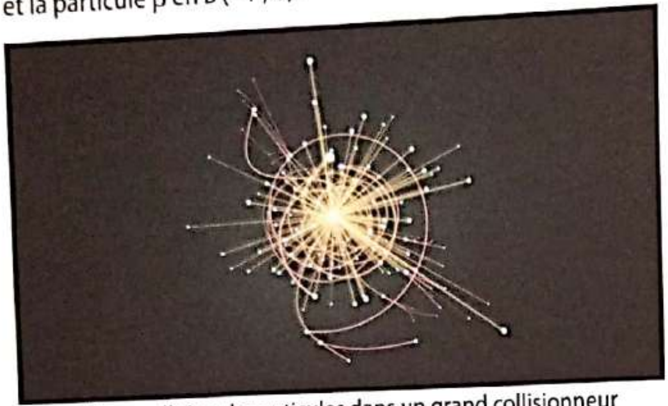


Image d'une collision de particules dans un grand collisionneur de Hadrons.

a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par A et de vecteur directeur $\vec{v_1}$.
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) passant par B et de vecteur directeur $\vec{v_2}$.
c. À l'instant $t \geqslant 0$, α se trouve en $M_1(t)$ vérifiant $\overrightarrow{AM_1(t)}=t\cdot\vec{v_1}$ et β en $M_2(t)$ vérifiant $\overrightarrow{BM_2(t)}=t\cdot\vec{v_2}$.
Donner une représentation paramétrique de la courbe (Γ_1) décrite par α, et de la courbe (Γ_2) décrite par β, pour $t \geqslant 0$.
d. Vérifier (Γ_1) et (Γ_2) sont respectivement tracées sur des parties de (d_1) et (d_2).
e. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des droites (d_1) et (d_2).
f. Déterminer les valeurs de t_1 et de t_2 telles que :

$$M_1(t_1)=I \quad \text{et} \quad M_2(t_2)=I.$$

En déduire que les particules α et β ne peuvent pas se trouver au même point au même instant t.
g. En supposant désormais qu'à l'instant $t=0$, la particule β se trouve en un point de (d_2) de coordonnées $(x_0\,;y_0)$, et est soumise à la même vitesse $\vec{v_2}$, déterminer les valeurs de x_0 et y_0 permettant d'obtenir la collision des particules α et β au point I à l'instant t_1.

87 Famille de droites

m désigne un nombre réel et $(\mathcal{D}_m)$ les droites d'équations :

$$(m-1)\,x+(2+m)y+3\,m-6=0.$$

1. Dans un repère orthonormé, tracer les droites $(\mathcal{D}_0)$ et $(\mathcal{D}_2)$. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

2. Montrer que les droites $(\mathcal{D}_m)$ passent toutes par un point fixe F dont on déterminera les coordonnées.

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une droite $(\mathcal{D}_m)$ passant par le point :
- $A(-5\,;0)$;
- $B(1\,;4)$;
- $C(2\,;-7)$.

4. On considère un point $M(x_M\,;y_M)$ du plan et on veut savoir s'il existe toujours une droite $(\mathcal{D}_m)$ passant par M.
a. En supposant que M vérifie l'équation cartésienne de $(\mathcal{D}_m)$, exprimer m en fonction de x_M et y_M lorsque c'est possible.
b. D'après le calcul précédent, montrer que les points M par lesquels ne passe aucune droite $(\mathcal{D}_m)$ sont situés sur une droite (Δ) dont on déterminera une équation cartésienne.

5. a. Donner un vecteur directeur de $(\mathcal{D}_m)$.
b. En déduire les valeurs de m pour lesquelles la droite $(\mathcal{D}_m)$ est parallèle à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées, à la droite d'équation $y=x+1$.

88 Famille de cercles

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent les cercles d'équations cartésiennes :

$$x^2+y^2+4x-8y-5=0 \quad \text{et} \quad x^2+y^2-16x+2y-35=0.$$

1. On note Ω et Ω' les centres respectifs de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, et R et R' les rayons respectifs de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
Déterminer les coordonnées des points Ω et Ω', ainsi que les rayons R et R'.

2. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants en deux points I et J dont on déterminera les coordonnées.

3. k désigne un nombre réel et (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\Omega M^2-R^2)+k\times(\Omega' M^2-(R')^2)=0.$$

a. Vérifier que les points I et J appartiennent à (E_k) quelle que soit la valeur du nombre réel k.
b. Montrer que $M(x\,;y)$ appartient à (E_k) si, et seulement si :

$$x^2+y^2+4x-8y-5+k(x^2+y^2-16x+2y-35)=0.$$

c. Montrer que pour $k=-1$, $(E_k)=(IJ)$.
d. Montrer que si $k\neq-1$, (E_k) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

avec α, β et γ trois nombres réels dépendant de k.
Déduire de la question **3. a.** que (E_k) est un cercle passant par I et J.

4. On suppose que $k\neq-1$.
a. Déterminer en fonction de k les coordonnées du centre Ω_k de (E_k).
b. Vérifier que Ω_k appartient à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=8-10t \\ y=-1+5t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

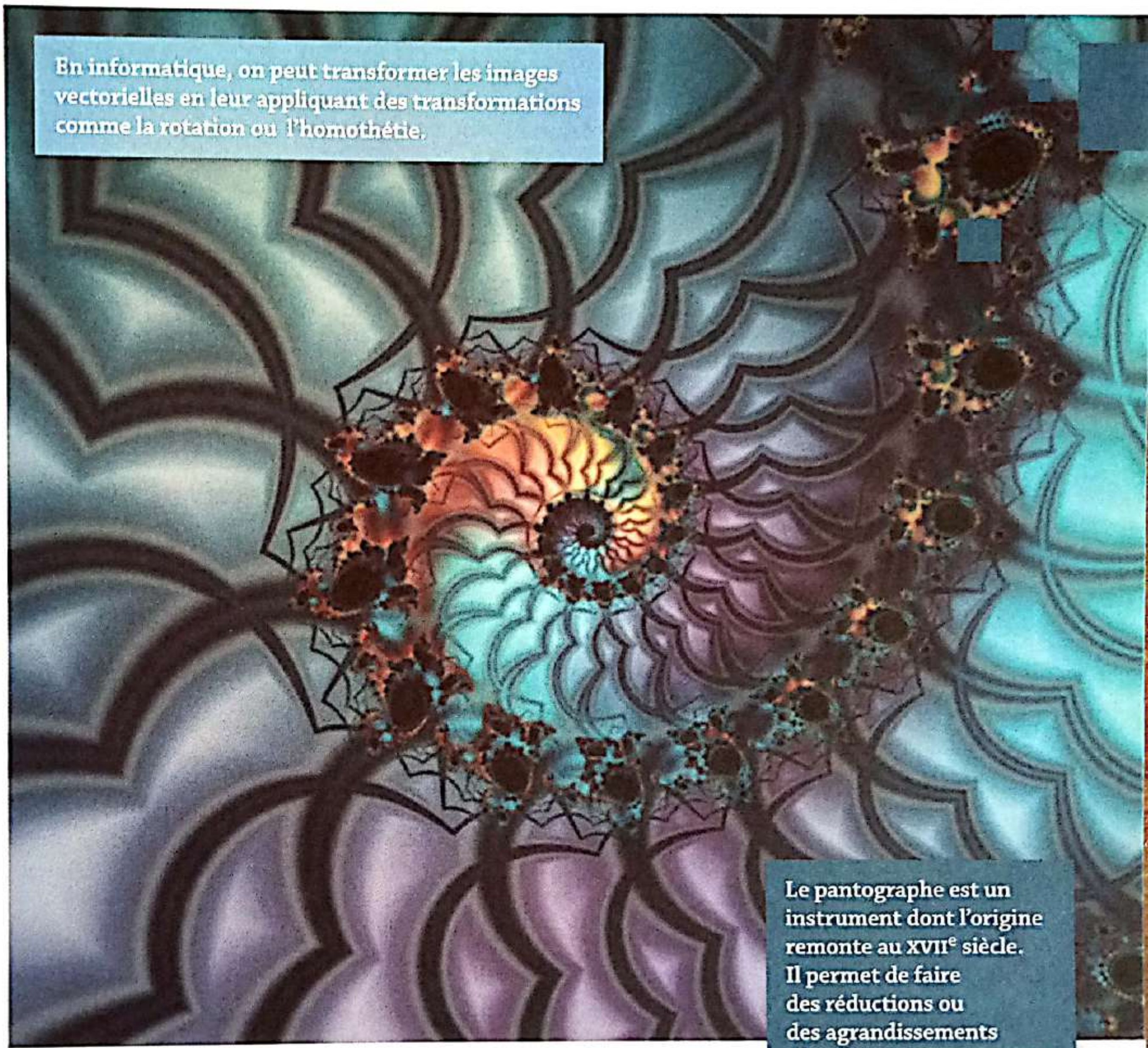
c. M est un point de (Δ) distinct de $A(8\,;-1)$.
Montrer qu'il existe $k\neq-1$ tel que $M=\Omega_k$.
d. Identifier l'ensemble des centres Ω_k pour k décrivant $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ en fonction des données géométriques du problème.

5. L'objectif de cette question est de prouver que tout cercle passant par I et J admet une équation de la forme :

$$\lambda(x^2+y^2+4x-8y-5)+\mu(x^2+y^2-16x+2y-35)=0$$

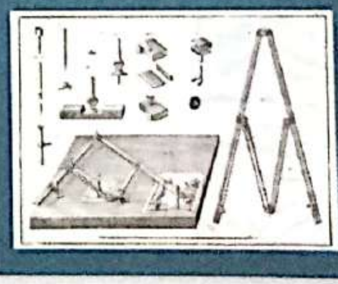
où λ et μ sont deux nombres réels tels que $(\lambda\,;\mu)\neq(0\,;0)$.
a. (Γ) désigne un cercle passant par I et J, de centre ω et de rayon r.
En utilisant la caractérisation $\omega I=\omega J=r$, montrer que $\omega\in(\Omega\Omega')$.
b. Si $\omega=\Omega'$, identifier le cercle (Γ), et en déduire les valeurs de λ et μ cherchées.
c. Si $\omega\neq\Omega'$, achever la démonstration en utilisant les résultats du **4. c.**

4 Transformations du plan



En informatique, on peut transformer les images vectorielles en leur appliquant des transformations comme la rotation ou l'homothétie.

Le pantographe est un instrument dont l'origine remonte au XVII^{e} siècle. Il permet de faire des réductions ou des agrandissements d'un dessin en respectant les proportions. Il utilise les propriétés de l'homothétie.



Les objectifs du chapitre

- Connaître les homothéties et leurs propriétés.
- Connaître les isométries et leurs propriétés.
- Savoir déterminer la transformation réciproque d'une homothétie, d'une isométrie.
- Savoir composer deux isométries, deux homothéties, une homothétie et une isométrie.
- Savoir différencier un déplacement, un antidéplacement.
- Savoir reconnaître des triangles semblables, isométriques.

4 Cours

1 Homothéties

a Rappels

Définition

O désigne un point du plan et k un nombre réel non nul.

L'**homothétie** de centre O et de rapport k est la transformation du plan notée $h(O\,;k)$ qui, à tout point M distinct de O, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Si $M = O$, alors $M' = O$.

Remarque

Les points O, M et M' sont alignés.

b Caractérisation

Propriété

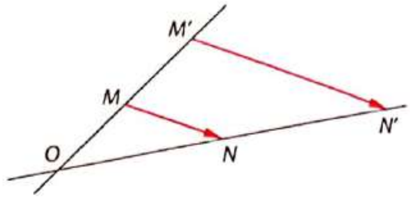
h désigne une transformation du plan et k un nombre réel différent de 0 et de 1.

h est une homothétie de rapport k si, et seulement si, pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N', on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

Remarques

- Le centre de h est le point d'intersection des droites (MM') et (NN').
- On a $|k| = \dfrac{M'N'}{MN}$.



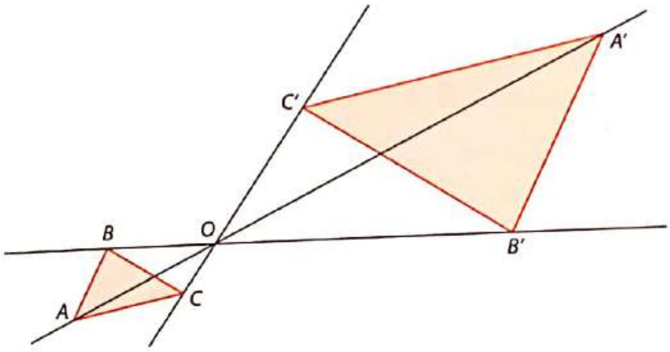
c Images de figures simples

Propriété

Les homothéties conservent l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et les angles orientés.

- L'image d'un segment, d'une demi-droite et d'une droite sont respectivement un segment, une demi-droite et une droite dont les supports sont parallèles.
- L'image d'un cercle de rayon r est un cercle de rayon $|k|\,r$.
- L'image d'un triangle est un triangle dont les angles ont même mesure et dont les mesures des côtés sont multipliées par $|k|$: le triangle et son image sont appelés **triangles homothétiques**.

Exemple



Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport -3.
$A'B'C'$ et ABC sont homothétiques

d Conservation du barycentre

Propriété

h désigne une homothétie de rapport k non nul. (A, a), (B, b) et (C, c) sont trois points pondérés d'images respectives A', B', et C' par h. G désigne un point d'image G' par h.
Le point G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) si, et seulement si, le point G' est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b) et (C', c).

On dit que l'homothétie conserve le barycentre.

Conséquence L'homothétie conserve le milieu d'un segment.

e Effets sur les grandeurs

Propriété

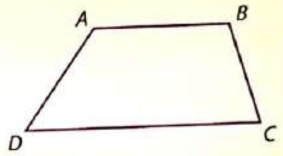
h désigne une homothétie de rapport k non nul.
h multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Remarque

Si $|k| > 1$, on parle d'agrandissement et si $|k| < 1$ de réduction.

1 Déterminer le centre et le rapport d'une homothétie

$ABCD$ désigne le trapèze, représenté ci-contre, tel que $AB = \frac{2}{3}CD$.

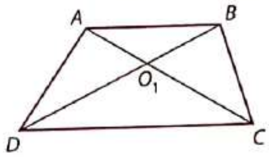


a. Déterminer le centre O_1 et le rapport k_1 de l'homothétie h_1 telle que les points A et B ont pour images respectives les points C et D.

b. Déterminer le centre O_2 de l'homothétie h_2 de rapport $k_2 = \frac{3}{2}$ qui transforme le point A en le point B.

Solution commentée

a. 1. Comme $h(A) = C$ et $h(B) = D$, le centre O_1 est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).



2. La propriété caractéristique de l'homothétie permet d'écrire $\overrightarrow{CD} = k_1\overrightarrow{AB}$.

Or on a $AB = \frac{2}{3}CD$. On en déduit que $|k_1| = \frac{3}{2}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant de sens contraire, on a finalement : $k_1 = -\frac{3}{2}$.

b. 1. $k_2 > 1$, le centre O_2 est sur la demi-droite $[BA)$ et extérieur au segment $[AB]$.

2. $h(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{O_2B} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O_2A} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O_2A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O_2A} - \overrightarrow{O_2A}$.

D'où $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_2A}$ qui donne $\overrightarrow{O_2A} = 2\overrightarrow{AB}$. (On peut alors placer O_2.)

Méthode

a. 1. Utiliser l'alignement des points et de leurs images avec le centre de l'homothétie pour construire ce centre.

2. Utiliser la propriété caractéristique pour déterminer le rapport de l'homothétie.

b. 1. Le signe et la valeur du rapport renseignent sur la position du centre :
- si $k < 0$, le centre appartient au segment $[AB]$;
- si $0 < k < 1$, le centre est extérieur au segment $[AB]$ sur la demi-droite $[AB)$;
- si $k > 1$, le centre est extérieur au segment $[AB]$ sur la demi-droite $[BA)$.

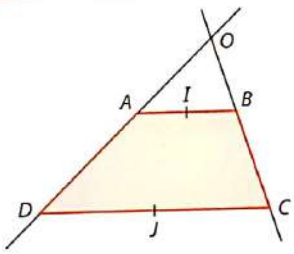
2. Utiliser la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Construire le point O.

2 Démontrer l'alignement de points

$ABCD$ désigne un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$. Le point O est le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$.
Démontrer que les points O, I et J sont alignés.

Solution commentée

1. h désigne l'homothétie de centre O qui transforme le point A en le point D. L'image de la droite (AB) par h est la droite (CD) car ces deux droites sont parallèles. L'image du point B par h appartient donc à la droite (CD) et comme, par construction, elle appartient à la droite (OB), on en déduit que C est cette image.



2. On a $h(A) = D$ et $h(B) = C$.
Une homothétie conserve les milieux. L'image du milieu du segment $[AB]$ est donc le milieu du segment $[CD]$, autrement dit $h(I) = J$.

3. $h(I) = J \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = k\overrightarrow{OI}$. Les points O, I et J sont donc alignés.

Méthode

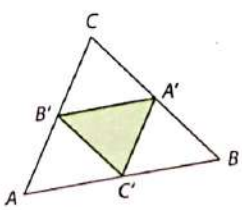
1. Définir une homothétie qui transforme une base du trapèze en l'autre. (Repérer une situation de Thalès dans la figure.)

2. Utiliser la conservation du barycentre (ici le milieu) pour obtenir l'image du point I par cette homothétie.

3. Utiliser la définition de l'homothétie pour conclure.

S'exercer

Pour les exercices 3 et 4, ABC désigne un triangle.
Les points A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



3 Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie telle que l'image du triangle ABC est le triangle $A'B'C'$.

4 La droite parallèle à la droite (BB') passant par C' et la droite parallèle à la droite (CC') passant par B se coupent en un point D. Démontrer que les points A, A' et D sont alignés.

2 Compléments sur les homothéties

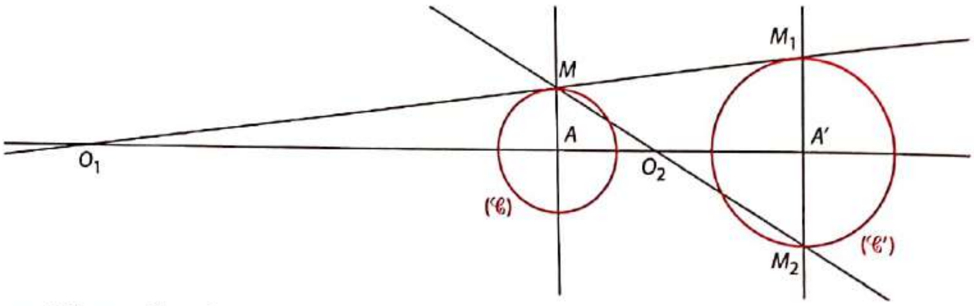
a Homothétie échangeant deux cercles donnés

Propriété

($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) désignent deux cercles de centres respectifs A et A'.
Il existe au moins une homothétie $h(O\,;k)$ telle que le cercle ($\mathscr{C}$) a pour image ($\mathscr{C}'$) :

- son centre O appartient à la droite (AA') ;
- $|k|$ est égal au quotient des rayons des cercles.

Exemple ($\mathscr{C}$) désigne un cercle de centre A et de rayon 2 et ($\mathscr{C}'$) un cercle de centre A' et de rayon 3.



Dans la figure ci-dessus, il y a deux homothéties qui échangent les deux cercles :
l'une de centre O_1 et de rapport $\frac{3}{2}$ et l'autre de centre O_2 et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Remarques

• Si les deux cercles sont de même rayon, il n'y a qu'une homothétie qui transforme ($\mathscr{C}$) en ($\mathscr{C}'$) : l'homothétie de centre I milieu des centres des cercles et de rapport -1 (autrement dit la symétrie de centre I).
• Si les deux cercles sont de même centre O, il n'y a qu'une homothétie qui transforme ($\mathscr{C}$) en ($\mathscr{C}'$) : l'homothétie de centre O et de rapport le quotient des rayons des cercles.

b Bijectivité et homothétie réciproque

Propriété

h désigne une homothétie de centre O et de rapport k non nul.
h est bijective et sa réciproque, notée h^{-1}, est l'homothétie de même centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

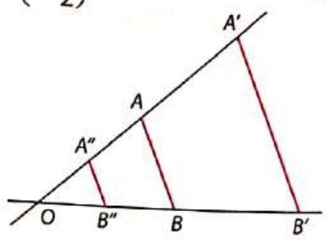
Remarques

• Si $k=1$, alors h est l'application identique du plan et $h=h^{-1}$.
• Si $k=-1$, alors h est la symétrie centrale de centre O et $h=h^{-1}$.

Exemple

$h=h(0\,;2)$, $h(A)=A'$ et $h(B)=B'$.

$h^{-1}=h\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$, $h^{-1}(A)=A''$ et $h^{-1}(B)=B''$.



c Composition de deux homothéties

Propriété 1

h_1 et h_2 désignent deux homothéties, de même centre O et de rapports respectifs k_1 et k_2.
$h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre O et de rapport k_1k_2.

Remarques

• Comme $k_1k_2=k_2k_1$, on a $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. On dit que la composition des homothéties de même centre est commutative.
• Si $k_1k_2=1$, les deux homothéties h_1 et h_2 sont réciproques, leur composée $h_1 \circ h_2$ est l'application identique du plan.
• Si $k_1k_2=-1$, $h_1 \circ h_2$ est la symétrie centrale de centre O.

Propriété 2

$h_1(O_1\,;k_1)$ et $h_2(O_2\,;k_2)$ désignent deux homothéties.

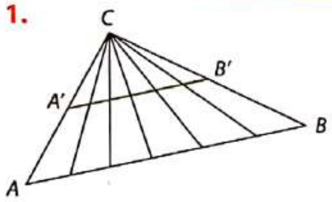
- Si $k_1k_2 \neq 1$, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de rapport k_1k_2 et dont le centre appartient à la droite (O_1O_2).
- Si $k_1k_2 = 1$, $h_1 \circ h_2$ est une translation dont le vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

5 Déterminer et construire un lieu géométrique

A, B et C désignent trois points non alignés.
À tout point M du segment $[AB]$, on associe le point M' milieu du segment $[CM]$.
Déterminer et construire le lieu géométrique des points M' lorsque M décrit le segment $[AB]$.

Solution commentée

a. 1.



2. On a $\overrightarrow{CM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$.
L'application qui transforme le point M en le point M' est donc l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

3. L'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle dont les extrémités sont les images des extrémités du segment initial.
Si $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$, le lieu géométrique cherché est le segment $[A'B']$.

Méthode

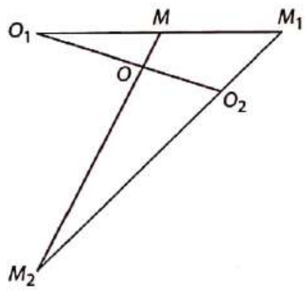
1. Faire une figure.
2. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme le point M en le point M'.
3. Utiliser les propriétés des homothéties pour conclure.

6 Composer deux homothéties de centres distincts

$h_1(O_1\,;k_1)$ et $h_2(O_2\,;k_2)$ désignent deux homothéties.
Déterminer : a. le centre O de l'homothétie $h_2 \circ h_1$ si $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$;
b. le vecteur $\vec{u}$ de la translation $h_2 \circ h_1$ si $k_1 = 2$ et $k_2 = \frac{1}{2}$.

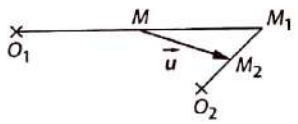
Solution commentée

a. 1., 2. et 3.



4. Le point M_2 est l'image du point M par l'homothétie $h_2 \circ h_1$, le centre O appartient donc à la droite (MM_2).
On sait de plus que le centre O appartient à la droite (O_1O_2).
Le centre O recherché est donc le point d'intersection des droites (MM_2) et (O_1O_2).

b. 1., 2. et 3.



4. Le vecteur recherché est le vecteur $\overrightarrow{MM_2}$.

Méthode

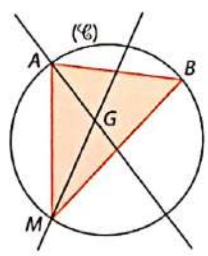
1. Faire une figure.
2. Placer un point M n'appartenant pas à la droite des centres des homothéties.
3. Construire les points M_1 et M_2 images respectives des points M et M_1 par les homothéties h_1 et h_2.
4. Conclure.

Remarque

La composition de deux homothéties de centres distincts n'est pas commutative en général, c'est-à-dire que $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.

S'exercer

7 $(\mathscr{C})$ désigne un cercle. A et B sont deux points distincts de $(\mathscr{C})$. M est un point du cercle distinct des points A et B. G est le centre de gravité du triangle ABM.
Déterminer le lieu géométrique du point G lorsque le point M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.



8 ABC désigne un triangle. h_1 et h_2 sont les homothéties de centres respectifs B et C et de rapports $\frac{1}{2}$ et -3.

a. Quel est le rapport de l'homothétie $h = h_2 \circ h_1$?
b. Faire une figure et construire l'image du point A par h.
En déduire la position du centre O de h.

9 ABC désigne un triangle. h_1 et h_2 sont les homothéties de centres respectifs B et C et de rapports $\frac{1}{2}$ et 2.
h désigne la transformation $h_2 \circ h_1$.
a. Justifier que h est une translation.
b. Faire une figure et construire l'image du point A par h.
En déduire le vecteur de la translation h.

3 Isométries

a Définition

Définition

Une **isométrie** est une transformation du plan qui conserve les longueurs, autrement dit si M et N sont deux points d'images respectives M' et N', on a $MN = M'N'$.

Remarques

• Les transformations usuelles étudiées en seconde, translations, symétries centrales, symétries orthogonales et rotations, sont des isométries.

• L'homothétie de rapport différent de 1 et de -1 n'est pas une isométrie.

b Images de figures simples

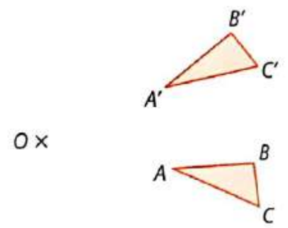
Propriété

Les isométries conservent l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles non orientés et les aires.

Ainsi : • L'image d'un segment, d'une demi-droite et d'une droite sont respectivement un segment, une demi-droite et une droite.

• L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

• L'image d'une figure géométrique est une figure de même aire : par exemple, un triangle a pour image un triangle de même aire par une rotation.



c Conservation du produit scalaire

Propriété

f désigne une isométrie.
A, B, C et D sont quatre points d'images respectives A', B', C' et D' par f.
On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

On dit que l'isométrie conserve le produit scalaire.

d Conservation du barycentre

Propriété

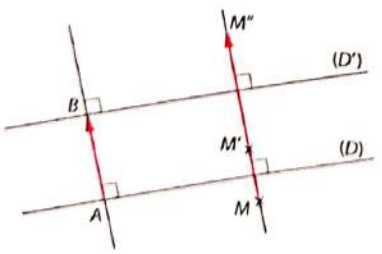
f désigne une isométrie. (A, a), (B, b) et (C, c) sont trois points pondérés d'images respectives A', B', et C' par f. G désigne un point d'image G' par f.
Le point G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) si, et seulement si, le point G' est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b) et (C', c).

On dit que l'isométrie conserve le barycentre.

e Composition de deux symétries orthogonales

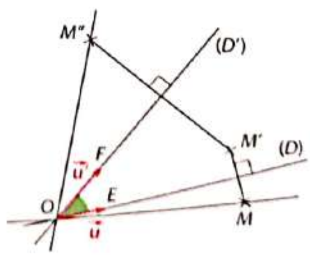
Propriété

(D) et (D') désignent deux droites parallèles.
La composée des deux symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est une translation.
Si A est un point de (D) et B son projeté orthogonal sur (D'), alors le vecteur de la translation est $2\overrightarrow{AB}$.



Propriété

(D) et (D') désignent deux droites sécantes en un point O.
La composée des deux symétries orthogonales d'axes respectifs (D) et (D') est une rotation de centre O.
Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont des vecteurs directeurs de (D) et (D'), alors l'angle de la rotation est alors $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

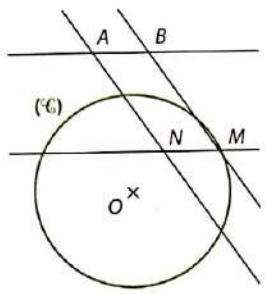


10 Rechercher un lieu géométrique

($\mathscr{C}$) désigne un cercle. A et B sont deux points tels que la droite (AB) ne coupe pas le cercle.
À tout point M du cercle ($\mathscr{C}$), on associe le point N tel que $ABMN$ soit un parallélogramme.
Déterminer le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle ($\mathscr{C}$).

Solution commentée

1.



2. $ABMN$ est un parallélogramme, donc :
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}.$$
Par conséquent, le point N est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

3. L'image d'un cercle de centre O par une translation est le cercle de même rayon et de centre le point O' image du point O par la translation.
Le lieu du point N est donc ce cercle.

Méthode

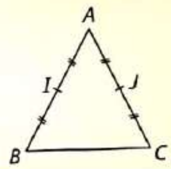
1. Faire une figure.
2. Reconnaître une isométrie qui transforme le point M en le point N.
3. Déterminer l'image du cercle par cette isométrie.

Remarque

On peut utiliser le logiciel GeoGebra pour conjecturer la solution en activant notamment la trace du point N.

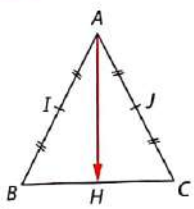
11 Composer des symétries orthogonales

ABC désigne un triangle isocèle en A.
I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :
a. $s_{(BC)} \circ s_{(IJ)}$;
b. $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.



Solution commentée

a. **1.** Les points I et J étant les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$, le théorème des milieux appliqué au triangle ABC assure que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. La composée des deux symétries est donc une translation.
2. Le théorème de Thalès assure que $s_{(IJ)}(A) = H$ où H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
3. Le vecteur de la translation est donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$.



b. **1.** Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. La composée des deux symétries est donc une rotation de centre A.
2. L'angle de la rotation est donc : $2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$.

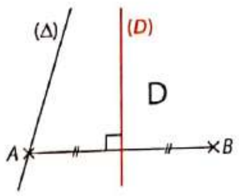
Méthode

a. **1.** Démontrer que les deux axes de symétrie sont parallèles. En déduire la nature de la transformation.
2. Déterminer l'image d'un point de la figure par la composée des deux symétries.
3. Conclure.

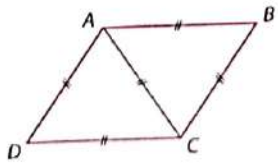
b. **1.** Démontrer que les deux axes de symétrie sont sécants. En déduire la nature de la transformation.
2. Conclure.

S'exercer

12 (D) désigne la médiatrice du segment $[AB]$. (Δ) est une droite passant par le point A.
Déterminer le lieu du point B extrémité du segment $[AB]$ lorsque le point A décrit la droite (Δ).



13 $ABCD$ désigne le parallélogramme ci-contre.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :



a. $s_{(AB)} \circ s_{(CD)}$; **b.** $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$; **c.** $s_{(AB)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(CB)}$.

14 $ABCD$ désigne un carré. (Δ) et (Δ') sont les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[BC]$.
Elles se coupent en un point O. Faire une figure
1. a. Déterminer les images par $s_{(\Delta')} \circ s_{(\Delta)}$:
• des points A, B, C, D et O ; • des segments $[AB]$ et $[CD]$;
• du carré $ABCD$.
b. Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation ?
2. a. Déterminer les images par $s_{(BC)} \circ s_{(\Delta)}$:
• des points A, B, C, D et O ; • des segments $[AB]$ et $[CD]$;
• du carré $ABCD$.
b. Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation ?

4 Compléments sur les isométries

a Isométrie réciproque

Propriété

Toute isométrie du plan dans lui-même est bijective et sa réciproque est une isométrie.

- La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- La réciproque de la symétrie centrale par rapport au point O est elle même.
- La réciproque de la symétrie orthogonale par rapport à une droite est elle même.
- La réciproque de la rotation de centre O et d'angle de mesure θ est la rotation de même centre et d'angle de mesure $-\theta$.

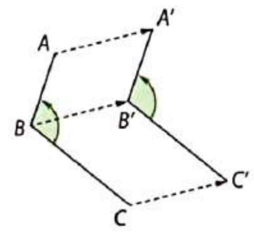
b Déplacements / Antidéplacements

Définitions

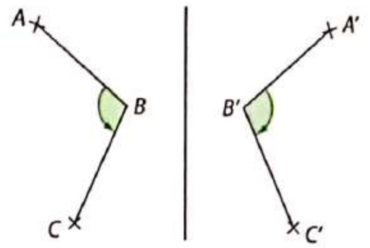
- Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un **antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemples

Déplacement



Antidéplacement



Propriétés

- Les translations, les symétries centrales et les rotations sont des déplacements.
- Les symétries orthogonales sont des antidéplacements.

c Triangles isométriques

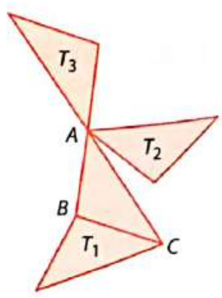
Définition

Deux triangles sont dits **isométriques** lorsqu'il existe une isométrie qui transforme l'un en l'autre.

Remarques • Si l'isométrie est un déplacement, les deux triangles sont directement superposables.
• Si l'isométrie est un antidéplacement, les deux triangles sont superposables après un retournement.

Propriété

ABC et $A'B'C'$ désignent deux triangles.
ABC et $A'B'C'$ sont isométriques si, et seulement si, $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $C'A' = CA$.



Exemples

Dans la figure ci-contre, les triangles ABC, T_1, T_2 et T_3 sont isométriques.
T_1 est l'image de ABC par la symétrie orthogonale d'axe (BC) ;
T_2 est l'image de ABC par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$;
T_3 est l'image de ABC par la symétrie centrale de centre A.

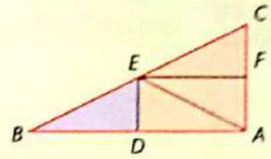
Propriété

Pour que deux triangles soient isométriques, il suffit qu'ils vérifient l'un des critères suivants.

- Leurs côtés sont deux à deux de mêmes longueurs.
- Ils ont un angle (non orienté) de même mesure et compris entre deux côtés de même longueur.
- Ils ont un côté de même longueur et compris entre deux angles (non orientés) de même mesure.

15 Savoir démontrer que des triangles sont isométriques

Dans la figure ci-contre, *ABC* désigne un triangle rectangle en *A*.
Les points *D*, *E* et *F* sont les milieux respectifs des segments [*AB*], [*BC*] et [*AC*].
a. Démontrer que les triangles *EBD*, *EDA*, *EFC* et *EAF* sont isométriques.
b. Quelle isométrie ou composée d'isométries permet de transformer le triangle *EBD* en : • le triangle *EDA* ? • le triangle *EFC* ? • le triangle *EAF* ?



Solution commentée

a. 1. Triangles *EBD* et *EDA*
[*ED*] est un côté commun aux deux triangles. *D* est le milieu de [*AB*] donc $BD = DA$.
Les angles $\widehat{BDE}$ et $\widehat{ADE}$ sont droits car le théorème des milieux assure le parallélisme des droites (*DE*) et (*AC*) et le triangle *ABC* est rectangle en *A*.
Ainsi les deux triangles *EBD* et *EDA* ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs. Ils sont donc isométriques.

2. Triangles *EBD* et *EFC*
E est le milieu du segment [*BC*], donc $BE = EC$.

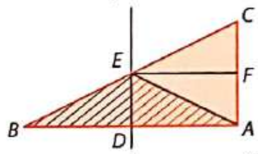
Le théorème des milieux assure que $DE = \frac{1}{2}AC = FC$ et que $EF = \frac{1}{2}AB = BD$.

Ainsi les deux triangles *EBD* et *EFC* ont les trois côtés de mêmes longueurs. Ils sont donc isométriques.

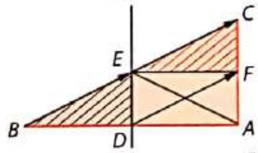
3. Triangles *EFC* et *EAF*
Le triangle *EAC* est isocèle car la droite (*EF*) est à la fois hauteur et médiane. Donc les angles $\widehat{EAF}$ et $\widehat{EFC}$ sont de même mesure. *F* est le milieu du segment [*AC*], donc $AF = FC$. De plus, $\text{mes}(\widehat{AFE}) = \text{mes}(\widehat{EFC}) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi les deux triangles *EFC* et *EAF* ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures. Ils sont donc isométriques.

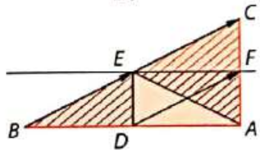
b. 1. Triangles *EBD* et *EDA*
La symétrie orthogonale d'axe (*DE*) transforme *EBD* en *EDA*.



2. Triangles *EBD* et *EFC*
La translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ transforme *EBD* en *EFC*.



3. Triangles *EBD* et *EAF*
Il y a retournement par la symétrie d'axe (*EF*).
La translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ suivie de la symétrie d'axe (*EF*) transforme *EBD* en *EAF*.



Méthode

a. Appliquer l'un des trois critères du cours pour démontrer l'isométrie. Souvent, les trois critères peuvent s'appliquer, mais l'un d'eux est plus simple à vérifier. Faire attention à bien démontrer les égalités en se méfiant des évidences !

b. Lorsque c'est possible, reconnaître une isométrie usuelle qui transforme le triangle *EBD*. Dans le cas contraire, il y a eu composition d'isométries. S'il y a retournement, c'est qu'une symétrie orthogonale a été appliquée. Il suffit alors de la reconnaître et de déterminer avec quelle autre isométrie elle a été composée.

Remarques

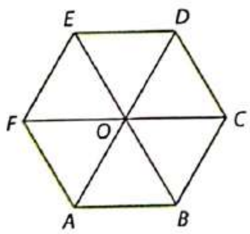
- La composée de deux translations est une translation.
- La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre.
- La composée de deux symétries centrales est une symétrie centrale.

Par contre,

- La composée de deux symétries orthogonales est soit une translation, soit une rotation.
- La composée de deux rotations de centres distincts est soit une translation, soit une rotation.

S'exercer

16 *ABCDEF* désigne le pentagone régulier de centre *O* représenté ci-contre.
a. Justifier que les six triangles de sommet *O* (*OAB*, *OAC*, …) sont isométriques.
b. Déterminer une isométrie qui transforme :
• *OAB* en *OBC* ; • *OAB* en *OED* ; • *OAB* en *OEF*.



17 *ABC* désigne un triangle rectangle en *A* tel que :
$AB = 1$ et $AC = 2$.
a. Faire une figure.
b. Construire l'image *A'B'C'* du triangle *ABC* par la rotation de centre *A* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
c. Construire l'image *A"B"C"* du triangle *A'B'C'* par la rotation de centre *C* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
d. Déterminer l'isométrie qui transforme le triangle *ABC* en le triangle *A"B"C"*.

5 Composition d'homothétie et d'isométrie

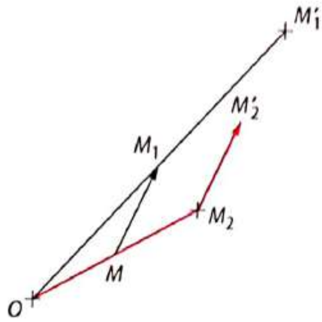
a Translation et homothétie

Propriété

h désigne une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation.
Les transformations composées $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k.

Exemple

h désigne une homothétie de centre O et de rapport 2 et t une translation.
Dans la figure ci-contre, on a construit en noir l'image M'_1 du point M par $h \circ t$ et en rouge l'image M'_2 du point M par $t \circ h$.
Les deux points images sont distincts, les deux homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$ sont donc différentes.
(Voir le Savoir-faire n° 18 pour la construction du centre.)



Remarque

En général, les deux homothéties $t \circ h$ et $h \circ t$ ne sont pas de même centre.

b Similitudes

Définition

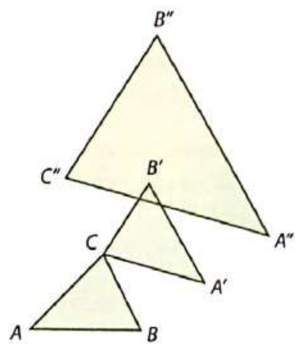
Une **similitude** est une transformation du plan composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Remarques

• L'identité étant une homothétie, mais aussi une isométrie, toutes les isométries et les homothéties sont des similitudes.
• La composée d'une rotation et d'une homothétie est une similitude qui conserve les angles orientés, on dit qu'elle est directe.

Exemple

Dans la figure ci-contre le triangle ABC a pour image le triangle $A'B'C$ par la rotation r de centre le point C et d'angle de mesure $\frac{4\pi}{3}$.
Le triangle $A''B''C''$ est l'image du triangle $A'B'C$ par l'homothétie h de centre B et de rapport 2.
Le triangle $A''B''C''$ est l'image du triangle ABC par la similitude $h \circ r$.



c Triangles semblables

Définition

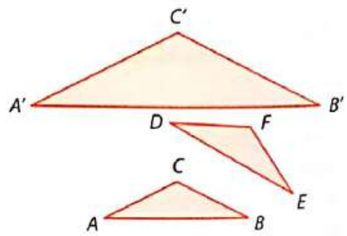
Deux triangles sont dits **semblables** lorsqu'il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre.

Remarque

Deux triangles isométriques sont semblables puisqu'une isométrie est une similitude.

Exemple

Dans la figure ci-contre, les triangles ABC, DEF et $A'B'C'$ sont semblables.
• ABC et DEF sont isométriques donc semblables.
• ABC et $A'B'C'$ sont semblables ($A'B'C'$ est « deux fois plus grand » que ABC).



Propriété

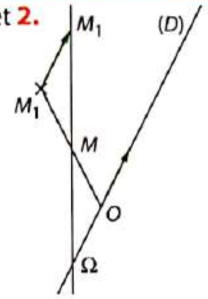
Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils vérifient l'un des critères suivants.
- Leurs côtés sont deux à deux proportionnels.
- Ils ont les angles deux à deux de même mesure.

18 Construire le centre de la composée d'une translation et d'une homothétie

Placer un point O et tracer un vecteur $\vec{u}$ non nul. Construire le centre Ω de l'homothétie $h \circ t$ composée de la translation t de vecteur $\vec{u}$ et de l'homothétie h de centre O et de rapport 2.

Solution commentée

1. et **2.**



3. Tout point A de la droite (D) a pour image un point B de (D) par la translation t.
L'image C de B par l'homothétie h appartient à la droite (OB), c'est-à-dire à la droite (D).
Ainsi le centre Ω appartient à la droite (D).
De plus, le point M' étant l'image du point M par $h \circ t$, le centre Ω appartient à la droite (MM').
Ω est donc le point d'intersection des droites (D) et (MM').

Méthode

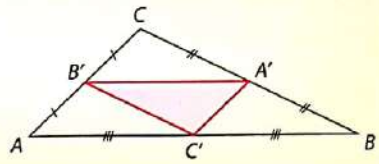
1. Tracer la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. Choisir un point M extérieur à la droite (D) et construire son image M' par $h \circ t$.

3. Le centre Ω est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (MM').

19 Déterminer une similitude

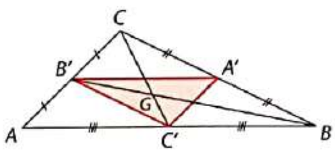
ABC désigne un triangle. A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
a. **Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.**
b. **Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même barycentre G.**
c. **Déterminer la similitude s qui transforme ABC en $A'B'C'$.**



Solution commentée

a. Le théorème des milieux appliqué au triangle ABC donne :
$A'B' = \frac{1}{2}AB$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$ et $A'C' = \frac{1}{2}AC$. Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc leurs côtés proportionnels.
Ils sont donc semblables.

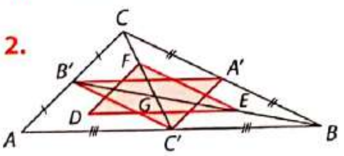
b. $BA'B'C'$ est un parallélogramme car $(BA') // (B'C')$ et $(A'B') // (BC')$ donc la médiane (BB') issue de B dans le triangle ABC est aussi la médiane issue de B' dans le triangle $A'B'C'$.



En procédant de même avec (AA') et (CC'), on prouve que ces deux triangles ont le même barycentre G.

c. **1.** Le rapport de l'homothétie h est égal à $\frac{1}{2}$.

2.



3. La rotation r de centre G et d'angle de mesure transforme le triangle DEF en le triangle $A'B'C'$.

4. Finalement, $s = r \circ h$.

Méthode

a. Démontrer que les côtés des deux triangles sont proportionnels.

b. **1.** Le rapport de proportionnalité est le rapport de l'homothétie.

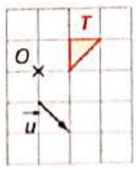
2. Utiliser le point G qui est sa propre image par la similitude s comme centre de l'homothétie et l'appliquer au triangle ABC. On obtient un triangle DEF.

3. Déterminer l'isométrie telle que l'image de DEF est $A'B'C'$.

4. Conclure.

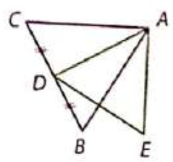
S'exercer

20 h désigne l'homothétie de centre O et rapport 3 et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Reproduire la figure ci-contre et utiliser le quadrillage pour construire pour chacune des transformations $h \circ t$ et $t \circ h$:



a. l'image du triangle T ;
b. le centre de la transformation.

21 Dans la figure ci-contre, les triangles ABC et ADE sont équilatéraux et le point D est le milieu du segment $[BC]$.

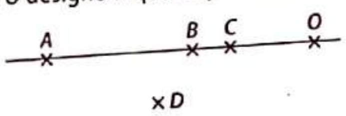


a. Démontrer que les triangles ABC et ADE sont semblables.
b. Déterminer la similitude s telle que les points A, B et C ont pour images respectives les points A, D et E.

Homothéties

Réponses rapides

22 A, B, C et O désignent quatre points distincts alignés.



Construire les images des points C et D par l'homothétie de centre O qui transforme A en B.

23 A et B désignent deux points distincts.

Construire le centre de l'homothétie de rapport k qui transforme le point A en B dans chacun des cas suivants :

a. $k=\frac{1}{2}$; **b.** $k=-\frac{2}{3}$; **c.** $k=2$; **d.** $k=-1$.

24 h_1, h_2, h_3 et h_4 désignent des homothéties de centres respectifs O, O, O' et O' et de rapports respectifs k_1, k_2, k_3 et k_4 tels que $k_1 k_3 = 1$ et $k_2 k_4 \neq 1$.
t est une translation de vecteur $\vec{u}$.
Déterminer si les transformations suivantes sont des homothéties ou des translations.

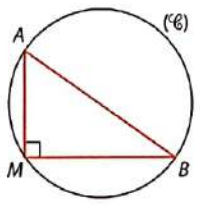
a. $h_1 \circ h_2$; **b.** $h_1 \circ h_3$; **c.** $h_2 \circ h_4$; **d.** $t \circ h_1$.

25 A, B et C désignent trois points tels que A est le barycentre des points pondérés $(B, 3)$ et $(C, 1)$. Justifier que :
- C est l'image de B par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport ;
- B est l'image de C par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport ;
- C est l'image de A par une homothétie de centre B dont on déterminera le rapport.

26 $ABCD$ désigne un parallélogramme. I est le milieu du segment $[CD]$. J est le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K est le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

a. Faire une figure.
b. Que représente le point J pour le triangle BCD ?
c. Déterminer une homothétie qui transforme la droite (JK) en la droite (AB).

27 La figure ci-contre représente un triangle rectangle AMB et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit.
Déterminer et construire le lieu géométrique du centre de gravité G du triangle AMB lorsque le point M décrit le cercle $(\mathscr{C})$.



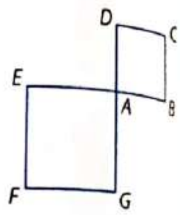
28 $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent deux cercles de centre respectifs O et O' et de rayons respectifs 1 et 2.
Faire une figure et construire, dans chacun des cas, les centres des homothéties qui échangent $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

a. $OO'=1$; **b.** $OO'=2$; **c.** $OO'=\frac{1}{2}$.

29 Dans la figure ci-contre sont représentés deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ tels que :

$$AE=\frac{3}{2}AB \quad \text{et} \quad E\in(AB).$$

Démontrer, en utilisant une homothétie, que les droites (AC), (BG) et (DE) sont concourantes.



Aide

▶ Déterminer une homothétie qui transforme le carré $ABCD$ en le carré $AEFG$.

30 ABC désigne un triangle.
h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
h' est l'homothétie de centre B et de rapport -1.

a. Justifier que $h' \circ h$ est une homothétie et donner son rapport.
b. Faire une figure et construire l'image du point C par l'homothétie $h' \circ h$.
c. En déduire la position du centre de $h' \circ h$.

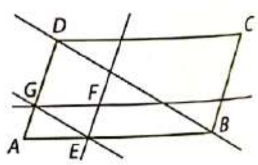
31 ABC désigne un triangle.
h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
h' est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

a. Justifier que $h' \circ h$ est une translation.
b. Faire une figure et construire l'image du point C par la translation $h' \circ h$.
c. En déduire le vecteur de la translation de $h' \circ h$.

32 ABC désigne un triangle.
h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
h' est l'homothétie de centre B et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a. Justifier que $h' \circ h$ est une symétrie centrale de centre un point I.
b. Faire une figure et construire l'image du point C par la symétrie $h' \circ h$.
c. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et en déduire la position du point I.

33 $ABCD$ désigne le parallélogramme ci-dessous.
E est le point tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
G est le point du segment $[AD]$ tel que les droites (GE) et (BD) sont parallèles. F est le point tel que $AEFG$ est un parallélogramme.



Démontrer que les points A, F et C sont alignés.

Aide

▶ Utiliser l'homothétie de centre A qui transforme G en D.

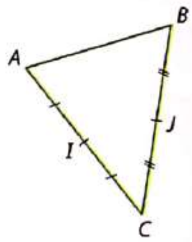
34 Un cercle est représenté sur un écran d'ordinateur dans une zone carrée de 400 pixels de côté.
On veut faire un zoom sur cette zone pour obtenir une image dans un carré de 1 000 pixels de côté.

Quelle transformation doit-on appliquer à l'image initiale ?
Préciser ses éléments caractéristiques.

Isométries

Réponses rapides

35 ABC désigne le triangle ci-contre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$.



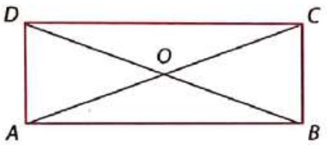
Déterminer les transformations suivantes :

a. $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; **b.** $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{CA}}$;
c. $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$; **d.** $s_{(AB)} \circ s_{(IJ)}$.

36 O, A et B désignent trois points non alignés.
r est une rotation de centre O, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, s la symétrie orthogonale d'axe la droite (OA) et s' la symétrie orthogonale d'axe la droite (OB).
Parmi les transformations suivantes, reconnaître les déplacements et les antidéplacements.

a. $s \circ s'$; **b.** $r \circ s$; **c.** $t \circ s \circ r$; **d.** $s \circ t \circ s'$.

37 $ABCD$ désigne un rectangle de centre O.



Citer les triangles isométriques à :

a. AOB ; **b.** AOD ; **c.** ABC.

38 (D) et (D') désignent deux droites perpendiculaires.
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D).
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t_{\vec{u}} \circ s_{(D')}$.

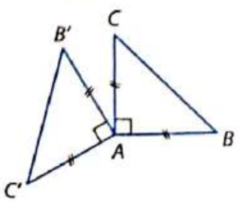
39 $ABCD$ désigne un rectangle.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations.

a. $f = s_{(AD)} \circ s_{(CD)}$; **b.** $g = s_{(BC)} \circ s_{(AB)}$; **c.** $f \circ g$.

40 ABC désigne un triangle équilatéral. A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
G est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Faire une figure et citer tous les triangles isométriques.
2. Déterminer les isométries telles que :
a. le triangle AGB' a pour image le triangle $B'GC$;
b. le triangle AGB' a pour image le triangle BGA' ;
c. le triangle AGB' a pour image le triangle BGC' ;
d. le triangle AGB' a pour image le triangle CGA'.

41 La figure ci-dessous représente deux triangles ABC et $AB'C'$ rectangles isocèles en A.

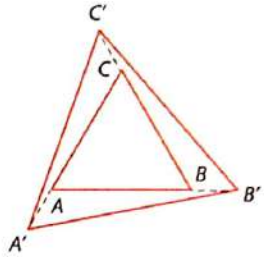


Aide
Utiliser une rotation de centre A.

Démontrer que $BB' = CC'$ et que les droites (BB') et (CC') sont perpendiculaires.

42 ABC désigne un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 3 cm. A', B' et C' sont trois points appartenant respectivement aux droites (AC), (AB) et (BC) et tels que :

$$AA' = BB' = CC' = 1 \text{ cm.}$$

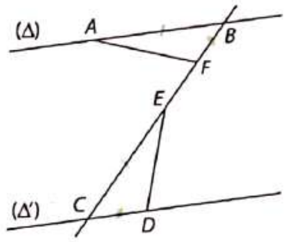


a. Démontrer que les triangles $A'AB'$, $A'CC'$ et $B'BC'$ sont isométriques.
b. En déduire la nature du triangle $A'B'C'$.

43 (Δ) et (Δ') désignent deux droites parallèles.
Dans la figure ci-contre, les points A, B, C, D, E et F sont six points tels que :

$$AB = CE \quad \text{et} \quad BF = CD.$$

Démontrer que $AF = DE$.

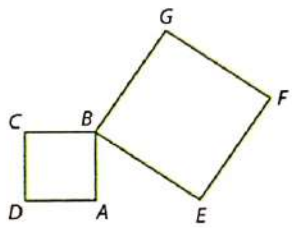


44 $ABCD$ désigne un parallélogramme de centre O.
Une droite (Δ) passant par O coupe le segment $[AB]$ en un point M et le segment $[CD]$ en un point N.

a. Faire une figure.
b. Démontrer que $AM = NC$.

Aide
Utiliser deux triangles isométriques.

45 Ci-contre ont été représentés deux carrés $ABCD$ et $BEFG$.



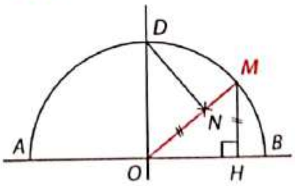
a. Démontrer que les triangles CBE et ABG sont isométriques.
b. Utiliser une rotation pour démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

46 ABC désigne un triangle rectangle en B.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en un point D.

a. Faire une figure.
b. Placer le point E sur le segment $[AD]$ tel que $AE = AB$ et le point F, intersection de la perpendiculaire à (AD) passant par E et du segment $[AC]$.
Démontrer que les triangles ABD et AEF sont isométriques.

47 Le point M représenté ci-dessous décrit le demi-cercle $\widehat{AB}$.
Le point H est son projeté orthogonal sur le diamètre $[AB]$.
Le point N appartient à la demi-droite $[OM)$ et $ON = MH$.

1. a. Utiliser GeoGebra pour réaliser cette figure.



b. Activer la trace du point N et faire décrire à M le demi-cercle $\widehat{AB}$.
c. Conjecturer le lieu des points N lorsque M décrit le demi-cercle $\widehat{ADB}$.

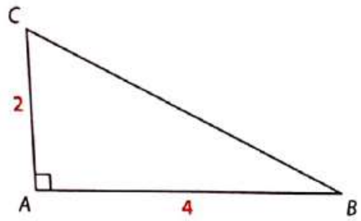
2. a. Démontrer que les triangles OMH et ODN sont isométriques.
b. En déduire que le point N appartient à un cercle dont on donnera le diamètre.
c. Conclure.

Composition d'homothéties et d'isométries

Réponses rapides

48 a. Construire l'image d'un parallélogramme $ABCD$ par la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de l'homothétie de centre B et de rapport 2.
b. Déterminer les éléments caractéristiques de cette transformation.

49 ABC désigne le triangle rectangle représenté ci-dessous.



$s = h \circ r$ est la transformation telle que $s(A) = A$ et $s(B) = C$; h est une homothétie et r une rotation.
Déterminer les éléments caractéristiques de chacune des transformations h et r.

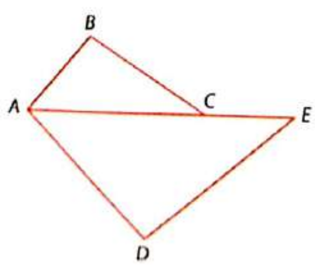
50 ABC désigne un triangle équilatéral.
h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).
t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
a. Faire une figure et construire :
- l'image du triangle ABC par la transformation $f = h \circ s$;
- l'image du triangle ABC par la transformation $g = t \circ h$.

b. Conjecturer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g \circ f$.

51 ABC désigne un triangle rectangle et isocèle en A.
s est la transformation telle que $s(A) = B$ et $s(B) = C$.
$s = h \circ r$ avec h homothétie de rapport k et r rotation d'angle θ.
a. Quelle est l'image du segment $[AB]$ par s ?
b. En déduire le rapport de h.
c. Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$.
d. En déduire une mesure de l'angle θ.

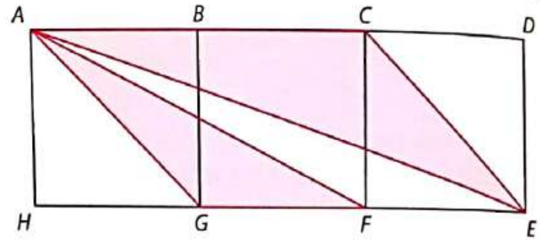
Info
La construction du centre d'une similitude dont on connaît l'image de deux points est un problème de géométrie plane dont une solution a été donnée par Leonhard Euler (1707-1783) mathématicien et physicien suisse qui est à la base des notations et de la terminologie des mathématiques dites « modernes ».

52 Dans la figure suivante :
$AB = 4$, $BC = 5$,
$AC = AD = 6$,
$AE = 9$ et $DE = 7{,}5$.
a. Démontrer que les triangles ABC et ADE sont semblables.
b. En déduire que la droite (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.



53 $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère du plan.
h est l'homothétie de centre $A(1 ; 2)$ et de rapport 3.
t est la translation de vecteur $\vec{u}\,(-1 ; 1)$.
Déterminer les coordonnées du point M' image du point $M(x ; y)$ par la transformation $t \circ h$.

54 $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ désignent trois carrés de côté 5.



a. Calculer les distances AG, AE et AF.
b. Démontrer que les triangles CEA et GFA sont semblables.
c. En déduire que les angles $\widehat{DAG}$ et $\widehat{EAF}$ ont la même bissectrice.

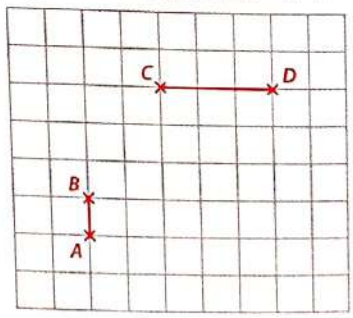
55 $ABCD$ désigne un carré. Les points I et H sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$.
La droite (AH) coupe la droite (BI) en un point K.
a. Faire une figure.
b. Démontrer que les triangles ABI et ADH sont isométriques.
c. Démontrer que les triangles AIK et ADH sont semblables.
d. En déduire que les droites (BI) et (AH) sont perpendiculaires.

56 ABC désigne un triangle rectangle et isocèle en A.
I est le milieu du segment $[BC]$. $AB = BC = 3$.
a. Démontrer que les triangles ABI et ABC sont semblables.
b. Déterminer le rapport de la similitude qui transforme ABI en ABC.

57 ABC et DBC sont deux triangles rectangles directs d'hypoténuse $[BC]$.
I est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
a. Faire une figure.
b. Démontrer que les triangles ADI et BCI sont semblables.

Aide
Utiliser les cercles circonscrits et les angles inscrits dans un cercle.

58 Dans la figure ci-dessous, le segment $[AB]$ a pour image le segment $[CD]$ par la transformation $s = h \circ r$.



a. Reproduire la figure sur une feuille quadrillée.
b. r est une rotation de centre A.
Déterminer une mesure de son angle.
c. h est une homothétie.
Construire son centre et donner son rapport.

Se tester

Vrai-Faux

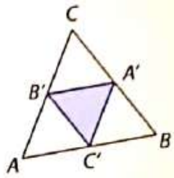
Top chrono *(sans justification)*

59 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
A et B désignent deux points du plan. I est le milieu du segment $[AB]$. h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$; h_3 est l'homothétie de centre A et de rapport 3 ; t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

	vrai	faux
1. $h_1(I) = B$.	☐	☐
2. $h_2 \circ h_1$ est l'application identique.	☐	☐
3. $h_3 \circ h_1$ est une homothétie de rapport 6.	☐	☐
4. Deux triangles rectangles isocèles sont semblables.	☐	☐
5. Toute homothétie est une isométrie.	☐	☐
6. $h_1 \circ t$ est une homothétie de rapport 2.	☐	☐
7. Si $h_3(A) = A'$ et $h_3(B) = B'$ alors $h_3(I)$ est le milieu de $[A'B']$.	☐	☐

Avec justification

60 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
ABC désigne un triangle équilatéral. Les points A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. G est le centre de gravité du triangle ABC.



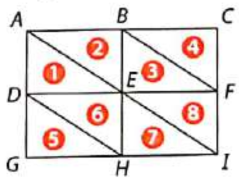
	vrai	faux
1. L'image du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point C.	☐	☐
2. $A'B' = \frac{1}{2}AB$.	☐	☐
3. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.	☐	☐
4. Le triangle $A'B'C'$ a pour image lui-même par la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.	☐	☐
5. Le triangle $AA'C$ et $BB'C$ sont isométriques.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

61 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
t' est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$;
s est la symétrie de centre E ;
h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.



1. La transformation $t \circ t'$ est une translation de vecteur :
a. $\overrightarrow{AE}$; **b.** $\overrightarrow{DB}$; **c.** $\overrightarrow{EA}$.

2. L'image du triangle ① par $s \circ t$ est :
a. le triangle ③ ; **b.** le triangle ⑥ ; **c.** le triangle ⑤.

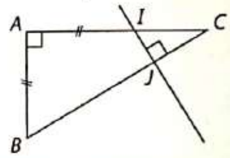
3. L'image du triangle ① par h est le triangle :
a. AGI ; **b.** ACI ; **c.** le triangle ④.

4. La transformation $t' \circ s \circ t$ est :
a. un déplacement ;
b. un antidéplacement ;
c. ni l'un, ni l'autre.

5. Le triangle ⑧ est l'image du triangle ③ par :
a. une symétrie axiale ;
b. une translation ;
c. une composée d'isométries.

Avec justification

62 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
ABC désigne un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 5$. I est le point de $[AC]$ tel que $AI = AB$. J est le projeté orthogonal de I sur $[BC]$.



1. Les triangles ABC et IJC sont : **a.** semblables ;
b. isométriques ; **c.** ni l'un, ni l'autre.

2. Les mesures des côtés du triangle ABC sont celles du triangle IJC : **a.** multipliées par 3 ;
b. divisées par un nombre inférieur à 3 ;
c. divisées par 3.

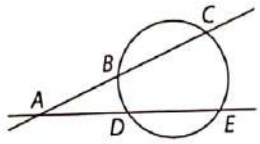
3. L'image du milieu de $[IC]$ par la transformation f telle que $f(IJC) = ABC$ est : **a.** le point A ;
b. le centre de gravité du triangle ABC ;
c. le milieu de $[BC]$.

4. L'homothétie qui intervient dans la transformation de la question **3.** a pour rapport :
a. 3 ; **b.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$; **c.** $\frac{1}{2}$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

63 Calcul d'une distance par rapport à un cercle

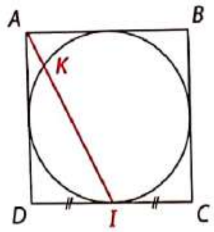
1. a. Démontrer que les triangles ABE et ADC de la figure ci-contre sont semblables.



b. En déduire l'égalité :

$$AB \times AC = AD \times AE.$$

2. Utiliser le résultat précédent pour calculer la distance AK de la figure ci-contre où $ABCD$ est un carré de côté 4 et I le milieu du segment $[CD]$.

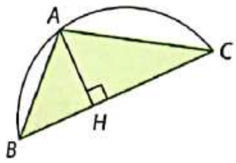


Aide

▸ Tracer la diagonale $[AC]$.

64 Usinage

Un ouvrier doit usiner une pièce qui a la forme d'une portion de disque dont il ne connaît pas le diamètre. Les distances $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $AH = 2{,}5$cm lui sont communiquées.

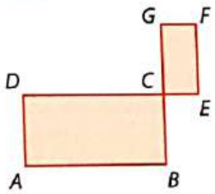


a. Reproduire la figure et construire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

b. A' est le point diamétralement opposé au point A. Démontrer que les triangles AHB et $AA'C$ sont semblables.

c. En déduire le diamètre recherché.

65 Centres de similitudes



Dans la figure ci-contre sont représentés deux rectangles tels que :

$G \in (BC)$, $AB = 2CG$ et $BC = 2CE$.

a. Faire une figure et construire le point Ω projeté orthogonal du point C sur la droite (BE).

b. Démontrer que les triangles $C\Omega E$ et $C\Omega B$ sont semblables.

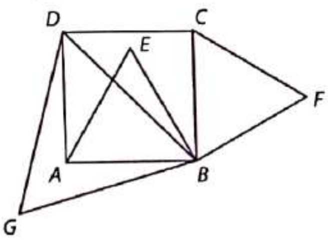
c. s est la similitude qui transforme $C\Omega E$ en $C\Omega B$.

Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre Ω et l'angle de la rotation r de centre Ω telles que $s = h \circ r$.

d. Déterminer une autre similitude qui « échange » les deux rectangles.

66 Alignement

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et les triangles ABE, BCF et BDG sont équilatéraux.



a. Démontrer que les points G, A et C sont alignés.

b. En déduire que les points D, E et F sont alignés.

67 Composées de symétries centrales

$ABCD$ désigne un carré. I est le milieu du segment $[AB]$.

a. Déterminer le vecteur de la translation $t = s_I \circ s_B$.

b. Déterminer et construire le point M tel que $s_I \circ s_B = s_M \circ s_C$.

68 Parallélisme

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ désignent deux cercles, de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs 3 et 2 tels que $OO' = 1$. I est le point d'intersection de la demi-droite $[OO')$ avec le cercle $(\mathscr{C})$.

a. Faire une figure.

b. Justifier que I appartient au cercle $(\mathscr{C}')$.

c. Tracer une droite (D_1) passant par le point I et qui coupe les deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ en deux points M et M'.

Tracer une deuxième droite (D_2) contenant le point I et qui coupe les deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ en deux points N et N'.

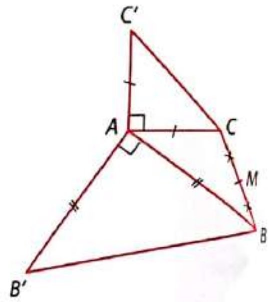
d. Déterminer la transformation qui transforme le cercle $(\mathscr{C})$ en le cercle $(\mathscr{C}')$.

e. Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

69 Perpendicularité

ABC désigne un triangle et M est le milieu du segment $[BC]$.

Les triangles BAB' et CAC' sont rectangles isocèles de sommet A.



a. Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre B qui transforme le point M en le point C.

b. h transforme A en A'.

Déterminer une rotation r telle que la transformation $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'.

c. En déduire que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

d. Justifier que $B'C' = 2AM$.

70 Centre d'une rotation

OAB désigne un triangle isocèle de sommet O.

P est un point du segment $[AB]$, distinct de A et de B.

La parallèle à la droite (OB) passant par P coupe la droite (OA) en un point A' et la parallèle à la droite (OA) passant par P coupe la droite (OB) en un point B'.

a. Faire une figure.

b. Démontrer que $OA' = BB'$.

c. r est la rotation telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$.

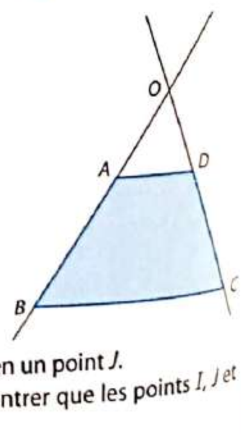
Démontrer que $r(A) = O$.

d. Déterminer le centre Ω de la rotation r.

71 Homothéties dans un trapèze

$ABCD$ désigne un trapèze dont les côtés non parallèles (AB) et (CD) se coupent en un point O.

h est l'homothétie de centre O qui transforme A en B.



a. Construire, en les justifiant, l'image (d_1) de la droite (AC) et l'image (d_2) de la droite (BD) par l'homothétie h.

b. Les droites (AC) et (BD) se coupent en un point I.

Les droites (d_1) et (d_2) se coupent en un point J.

Utiliser l'homothétie h pour démontrer que les points I, J et O sont alignés.

c. Déterminer les images des points B et C par h.

72 Barycentres et lieux de points

A et B désignent deux points distincts.

Pour tout point M du plan, I désigne le milieu de $[AM]$ et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$ et $(M, 1)$.

1. Faire une figure.

2. Démontrer que le point I est l'image du point M par une transformation du plan à déterminer

3. Démontrer que le point G est l'image du point I par une transformation du plan à déterminer.

4. En déduire :

a. le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;

b. le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;

c. le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B ;

d. le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

73 Une transformation du plan

ABC désigne un triangle. A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

À tout point M du plan, on associe le point $f(M) = M'$ défini par :

$\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ avec k nombre réel non nul.

1. Dans cette question : $k = \frac{1}{2}$.

a. Démontrer que l'application f est une homothétie dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC et dont on déterminera le rapport.

b. Quelle est l'image par cette homothétie du triangle ABC ?

2. Dans cette question : $k = -1$.

Démontrer que l'application f est une translation dont on donnera le vecteur.

3. Dans cette question : $k \neq -1$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

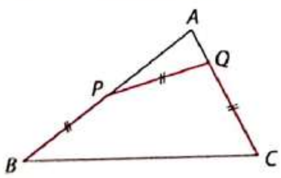
74 Un problème de construction

ABC désigne un triangle.

L'objectif de ce problème est de construire un point P du segment $[AB]$ et un point Q du segment $[AC]$ tels que $BP = PQ = QC$.

h désigne l'homothétie de centre B qui transforme le point P en le point A.

Q' et C' sont les images respectives des points Q et C par h.



a. Quelles sont les images des segments $[BP]$ et $[PQ]$ par h ?

En déduire que le point Q' appartient au cercle de centre A et de rayon AB.

b. Justifier que les droites (QC) et $(Q'C')$ sont parallèles.

R est le point tel que $CC'Q'R$ soit un parallélogramme.

Démontrer que $CR = AB$.

En déduire que le point Q' appartient à la droite parallèle à la droite (BC) passant par R.

c. Conclure en donnant la méthode de construction des points P et Q.

75 La droite d'Euler

ABC désigne un triangle.

A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

G est le centre de gravité, H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

h est l'homothétie de centre G et de rapport -2.

a. Déterminer les images par h des point A', B' et C'.

b. Déterminer les images par h des droites (OA'), (OB') et (OC').

c. En déduire l'image du point O par h.

d. Démontrer que les points O, G et H sont alignés.

La droite passant par les points O, G et H est appelée droite d'Euler.

76 La courbe du dragon

A et B désignent deux points distincts du plan.

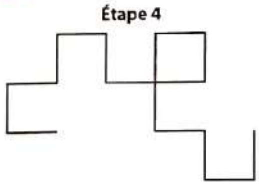
1. $s_1 = h_1 \circ r_1$ où h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Construire le segment $[AA_1]$ image du segment $[AB]$ par s_1.

$s_2 = h_2 \circ r_2$ où h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b. Construire le segment $[A_1B]$ image du segment $[AB]$ par s_2.

Étape 4



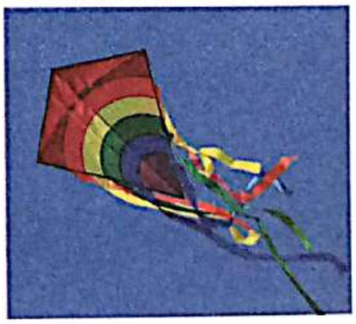
2. Reproduire le procédé précédent pour le segment $[AA_1]$ et inverser les rotations pour le segment $[A_1A]$.

3. Reproduire le procédé pour les quatre segments obtenus à l'étape précédente.

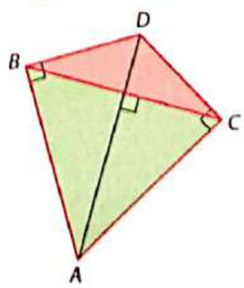
Info

La courbe du dragon est une fractale qui a été étudiée par un physicien de la NASA, John Heighway.

77 Cerf-volant



La figure ci-dessous représente un cerf-volant. Le triangle ABC est équilatéral et le point D est un point de la hauteur issue de A extérieur au triangle. Les triangles ABD et ACD sont respectivement rectangles en B et en C.



a. Démontrer que $s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$ est une rotation.

Préciser son centre I et son angle.

b. Démontrer de même que $s_{(CD)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation.

Préciser son centre J et son angle.

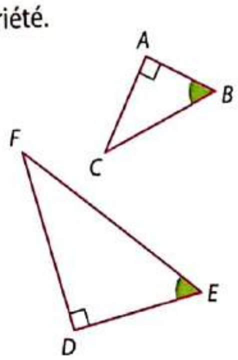
c. Démontrer que le triangle AIJ est équilatéral.

78 Règle de Dostor

Goerges Dostor, mathématicien du XIX^e siècle, a énoncé la propriété suivante : « *Lorsque deux triangles rectangles sont semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des autres côtés homologues.* »

On se propose de démontrer cette propriété.

ABC et DEF désignent deux triangles rectangles dans lesquels mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{E}$.



a. Justifier que ces deux triangles sont semblables.

b. Le rapport des longueurs des côtés homologues est le nombre réel $k=\dfrac{ED}{AB}$. Citer deux autres rapports égaux à k.

c. En déduire que $AB \times FD = AC \times ED$, puis que :

$$AB^2 \times FD^2 + AC^2 \times ED^2 = 2AB \times FD \times AC \times ED.$$

d. Écrire les égalités découlant du théorème de Pythagore appliqué aux deux triangles.

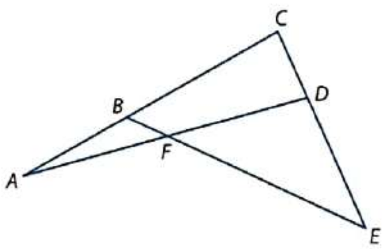
e. Effectuer le produit $BC^2 \times EF^2$ et utiliser l'égalité démontrée au **c.** pour conclure que :

$$BC \times EF = AB \times ED + AC \times FD.$$

f. Qu'entendait Georges Dostor par « côtés homologues » ?

79 Droite de Newton

A, B, C, D, E et F désignent six points représentés ci-dessous. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[BD]$ et $[CF]$.



1. Faire une figure et construire les points I' et J' tels que les quadrilatères $FECI'$ et $BEDJ'$ soient des parallélogrammes.

2. h et h' sont les homothéties de centre A telles que :

$$h(B) = C \quad \text{et} \quad h'(D) = F.$$

a. Démontrer que $h(BJ') = (CD)$ et en déduire que $h' \circ h(BJ') = (FI')$.

b. Démontrer de même que $h \circ h'(DJ') = (CI')$.

c. Justifier que $h' \circ h = h \circ h'$ et en déduire l'image du point J' par $h \circ h'$.

d. Démontrer que les points A, I' et J' sont alignés.

3. a. Démontrer que les droites (AI), $(J'J)$ et (KI') sont concourantes.

b. En déduire que les points I, J et K sont les images respectives des points A, I' et J' par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

c. Conclure.

Info

La figure représentée est un quadrilatère « complet » obtenu par les points d'intersection de quatre droites sécantes. On doit la démonstration de l'alignement des centres des diagonales à Isaac Newton.

80 Reconnaître des transformations

A et B désignent deux points distincts du plan.

1. f est la transformation qui à tout point M du plan associe le barycentre M' des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -2)$ et $(M, 3)$.

a. Faire une figure.

b. Construire les images respectives A' et B' des points A et B par f.

c. Démontrer qu'il existe un unique point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$. Construire Ω.

d. Pour tout point M du plan, exprimer $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega M}$.

e. Déduire des questions précédentes la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. g est la transformation qui à tout point M du plan associe le barycentre M' des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(M, 3)$.

a. Faire une figure.

b. Construire les images respectives A' et B' des points A et B par g.

c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant de M.

d. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

3. C et D désignent deux points tels que $ABCD$ soit un carré.
h est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a. Faire une figure.

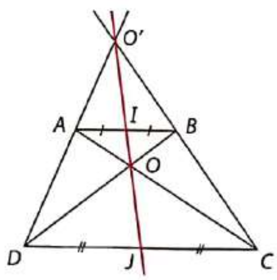
b. Construire l'image du carré $ABCD$ par h.

c. Démontrer qu'il existe un unique point O tel que $h(O) = O$. Construire O.

d. Démontrer que h est une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

81 Démonstration d'un théorème

$ABCD$ désigne le trapèze ci-dessous de bases $[AB]$ et $[CD]$. O est le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).



1. a. Justifier qu'il existe un nombre réel k ($k \neq 0$) tel que : $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.

b. h désigne l'homothétie de centre O et de rapport k. Déterminer $A' = h(A)$.

c. On note B' l'image de B par h. Justifier que $B' \in (CD)$. En déduire que $B' = D$.

d. I et J désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.
Utiliser l'homothétie h pour démontrer que les points O, I et J sont alignés.

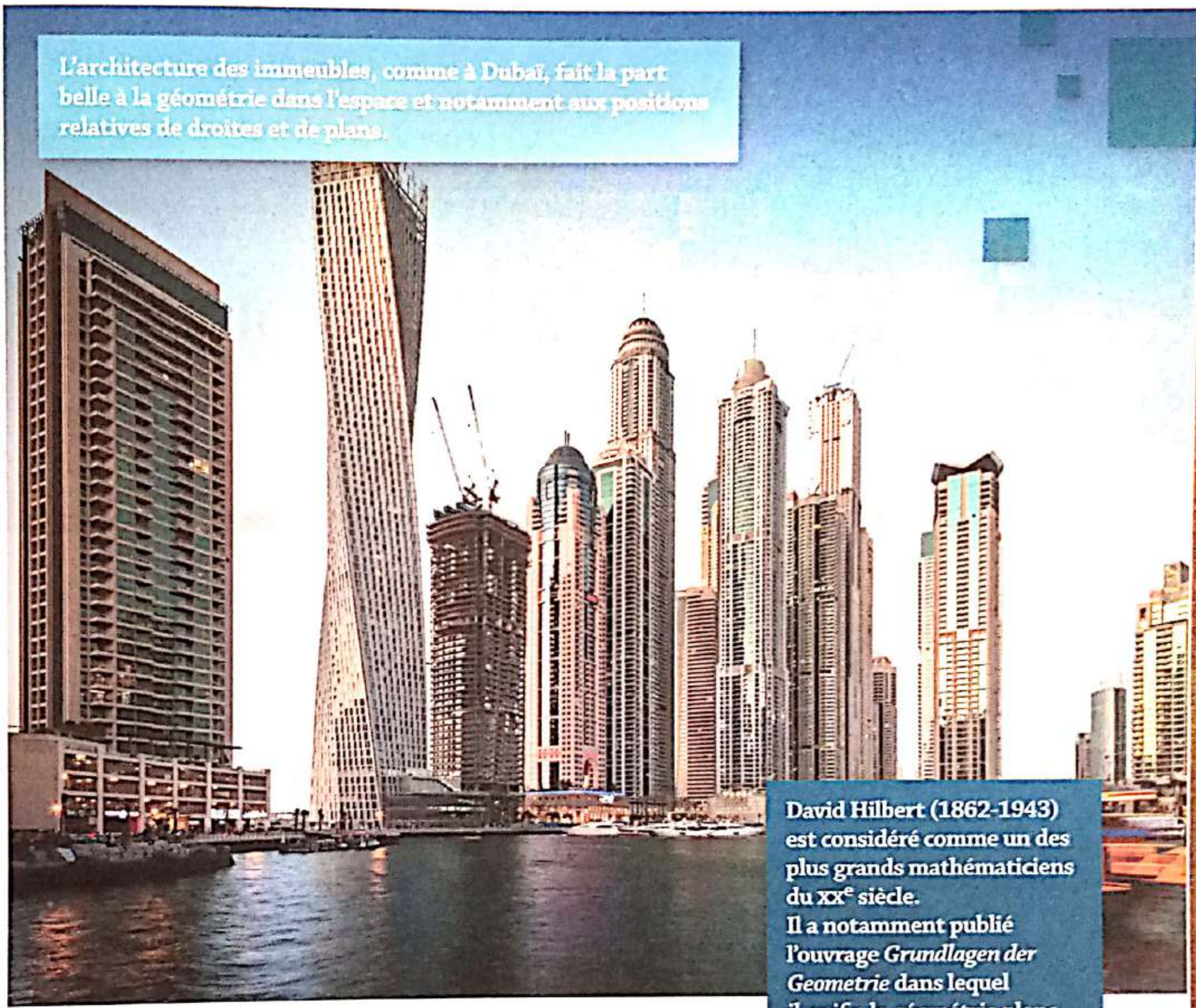
2. On suppose dans cette question que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.
O' est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

a. Démontrer que les points O', I et J sont alignés.

b. En déduire le théorème suivant :
« *Dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, les milieux des côtés parallèles, le point de concours des diagonales et le point de concours des côtés non parallèles sont alignés.* »

5 Droites et plans de l'espace

L'architecture des immeubles, comme à Dubaï, fait la part belle à la géométrie dans l'espace et notamment aux positions relatives de droites et de plans.



David Hilbert (1862-1943) est considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX^e siècle.
Il a notamment publié l'ouvrage *Grundlagen der Geometrie* dans lequel il unifie la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

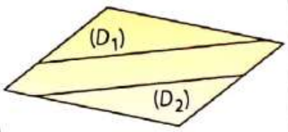
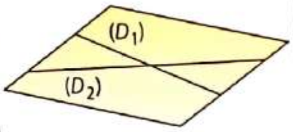
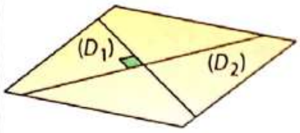
Les objectifs du chapitre

- Connaître et savoir déterminer les positions relatives de droites et plans de l'espace.
- Savoir démontrer le parallélisme :
  - de deux droites ;
  - d'une droite et d'un plan ;
  - de deux plans.
- Savoir démontrer l'orthogonalité :
  - de deux droites ;
  - d'une droite et d'un plan ;
  - de deux plans.

1 Droites de l'espace

(D_1) et (D_2) désignent deux droites distinctes de l'espace.

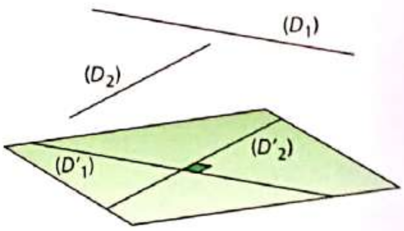
a Position relative de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
Parallèles	Sécantes		
	Quelconques	Perpendiculaires	
			
Aucun point d'intersection	Un point d'intersection	Un point d'intersection et un angle droit	Aucun point d'intersection

b Droites orthogonales

Définition

Deux droites de l'espace (D_1) et (D_2) sont **orthogonales** et on note $(D_1) \perp (D_2)$, lorsque les parallèles à ces droites passant par un point sont perpendiculaires.



Remarques

- Deux droites orthogonales peuvent être coplanaires ou non.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes (donc coplanaires).

c Parallélisme et orthogonalité

Propriété 1

Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l}(D_1) \perp (D_2)\\(D_3) /\!/ (D_1)\end{array}\right\} \Rightarrow (D_3) \perp (D_2).$$

Propriété 2

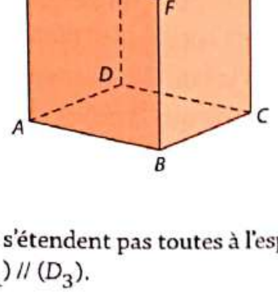
Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l}(D_1) /\!/ (D_2)\\(D_3) \perp (D_1)\end{array}\right\} \Rightarrow (D_3) \perp (D_2).$$

Exemple

$ABCDEFGH$ désigne un cube.

- Les droites (AD) et (FG) sont parallèles.
En effet, $(AD) /\!/ (BC)$ et $(BC) /\!/ (FG)$.
- Les droites (AB) et (HD) sont orthogonales.
En effet, $(AB) \perp (AE)$ et $(AE) /\!/ (HD)$.
- Les droites (AB) et (DG) sont non coplanaires.
- Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
En effet, elles appartiennent au même plan (ABC) et ce sont les diagonales d'un carré.



Remarque

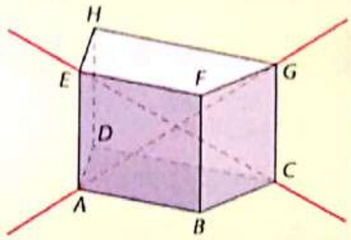
Les propriétés de géométrie plane liant orthogonalité et parallélisme ne s'étendent pas toutes à l'espace.
Par exemple, si $(D_1) \perp (D_2)$ et que $(D_2) \perp (D_3)$, on n'a pas forcément $(D_1) /\!/ (D_3)$.

1 Étudier la position relative de deux droites

$ABCDEFGH$ désigne le prisme droit représenté ci-contre et dont les bases sont des trapèzes.

a. Démontrer que les droites (EC) et (AG) sont sécantes.

b. Démontrer que les droites (AE) et (HG) ne sont pas coplanaires.



Solution commentée

a. 1. Les droites (AE) et (CG) sont parallèles car ce sont les arêtes verticales du prisme droit. Les points A, E, C et G sont donc dans un même plan. Ainsi les droites (EC) et (AG) sont coplanaires.

2. Dans le plan (ACG), le quadrilatère $ACGE$ est un rectangle. Donc ses diagonales (EC) et (AG) sont sécantes.

b. 1. Les points H, E, et G ne sont pas alignés donc ils définissent un plan (la face supérieure du prisme).

2. La droite (AE) est perpendiculaire au plan (HEG) car il s'agit d'un prisme droit. Le seul point d'intersection de (AE) et (HEG) est le point E. Si A était dans le plan (HEG), il serait alors le point d'intersection de (AE) et (HEG) et ainsi confondu avec le point E. C'est impossible, le prisme n'étant pas aplati. Donc les droites (AE) et (HG) ne sont pas coplanaires.

Méthode

a. 1. Démontrer que les deux droites sont coplanaires.

2. Se placer dans ce plan et démontrer que les deux droites sont sécantes.

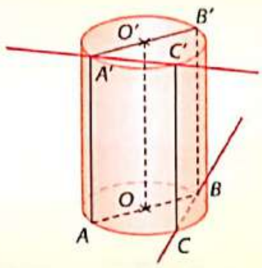
b. 1. Se placer dans le plan constitué de trois des points qui définissent les droites.

2. Démontrer que le quatrième point n'appartient pas à ce plan.

2 Démontrer que deux droites sont orthogonales

Dans le cylindre dessiné ci-contre, $[AB]$ désigne un diamètre de la base et C un point du cercle de base distinct de A et B.
A', B' et C' sont les points de la face supérieure situés sur les verticales passant par A, B et C.

Utiliser la définition de l'orthogonalité de deux droites pour démontrer que les droites (BC) et $(A'C')$ sont orthogonales.



Solution commentée

1. La parallèle à la droite $(A'C')$ dans le plan de base est la droite (AC).

2. Dans le plan de base, le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Il est donc rectangle en C. Ainsi, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires.

3. $\left.\begin{array}{l}(AC)\perp(BC)\\(AC)//(A'C')\end{array}\right\}\Rightarrow (BC)\perp(A'C')$.

Méthode

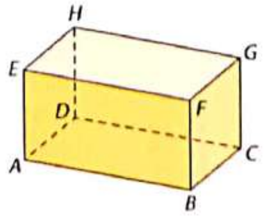
1. Tracer la parallèle à l'une des droites dans un plan contenant l'autre droite.

2. Démontrer que la droite tracée est perpendiculaire à la deuxième droite.

3. Conclure.

S'exercer

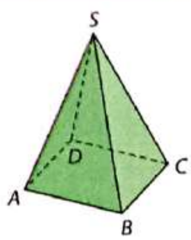
3 $ABCDEFGH$ désigne le pavé droit ci-contre.
Étudier les positions relatives des droites :
- (AB) et (HG) ;
- (HD) et (FB) ;
- (CA) et (GB) ;
- (AG) et (HD).



4 $SABCD$ désigne la pyramide à base carrée ci-contre.
O désigne le centre du carré $ABCD$.

a. Faire une figure à main levée.

b. Démontrer que les droites (SO) et (AC) sont orthogonales.

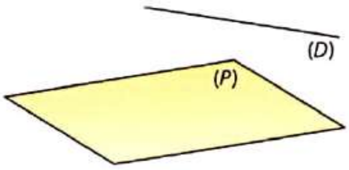


2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

(D) et (P) désignent respectivement une droite et un plan de l'espace, la droite n'étant pas incluse dans le plan.

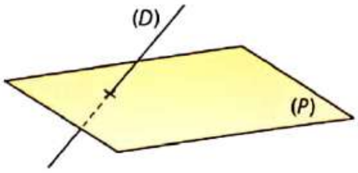
a Position relative d'une droite et d'un plan

(D) et (P) parallèles



Aucun point d'intersection

(D) et (P) sécants

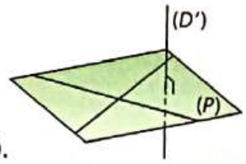


Un point d'intersection

b Droites et plan orthogonaux

Définition

Une droite (D) et un plan (P) de l'espace sont **orthogonaux** et on note $(D) \perp (P)$, lorsque la droite (D) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P).



Remarques

- Une droite orthogonale à un plan est sécante au plan en un point. On dit qu'elle est orthogonale au plan en ce point.
- Une droite peut être orthogonale à deux droites parallèles du plan sans être orthogonale au plan.

c Unicité

Propriété 1

A désigne un point et (P) un plan.
Il existe une unique droite (D) passant par le point A et orthogonale au plan (P).

Propriété 2

A désigne un point et (D) une droite.
Il existe un unique plan (P) passant par le point A et orthogonal à la droite (D).

Remarque La propriété 1 permet de définir la projection orthogonale du point A sur le plan (P) comme point d'intersection de (D) et (P).

d Propriété fondamentale

Propriété

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite du plan.

3 Droites et plans de l'espace

(D_1), (D_2) désignent deux droites et (P_1), (P_2) deux plans de l'espace .

a Orthogonalité

Propriétés

1. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l}(D_1)//(D_2)\\(P_1)\perp(D_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(P_1)\perp(D_2).$$

2. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l}(P_1)//(P_2)\\(D_1)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(D_1)\perp(P_2).$$

b Parallélisme

Propriétés

1. Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l}(D_1)\perp(P_1)\\(D_2)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(D_1)//(D_2).$$

2. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

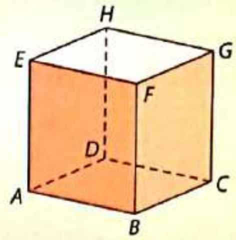
$$\left.\begin{array}{l}(P_1)\perp(D_1)\\(P_2)\perp(D_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(P_1)//(P_2).$$

5 Étudier la position relative d'une droite et d'un plan

ABCDEFGH désigne le cube représenté ci-contre.

a. Démontrer que la droite (AE) et (CG) sont orthogonales au plan (ABC).

b. En déduire la position relative des droites (AE) et (CG).



Solution commentée

1. ABFE est un carré donc $(AE) \perp (AB)$. De même, ADHE est un carré donc $(AE) \perp (AD)$. La droite (AE) est orthogonales à deux droites sécantes (AB) et (AD) du plan (ABC), elle est donc orthogonale à ce plan.
On démontrerait de manière analogue que $(CG) \perp (ABC)$.

2. (AE) et (CG) étant orthogonales au plan (ABC), elles sont parallèles.

Remarque

Il existe d'autres méthodes pour démontrer le parallélisme de ces deux droites.

Méthode

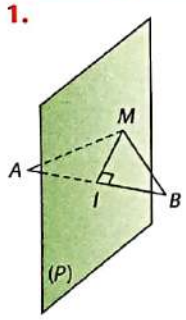
1. Démontrer que chacune des deux droites est orthogonale à deux droites sécantes du plan.
2. Utiliser la propriété **1** du paragraphe **3. b.** : « deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles » pour conclure.

6 Démontrer qu'une droite et un plan sont orthogonaux

A et B désignent deux points distincts de l'espace. I est le milieu du segment [AB].
Démontrer que l'ensemble des points équidistants des points A et B est un plan (P) orthogonal à la droite (AB) et contenant I.

Solution commentée

1.



2. Si M est équidistant de A et B, alors le triangle MAB est isocèle en M. Donc la droite (MI) médiane issue de M est aussi hauteur. Ainsi, les droites (MI) et (AB) sont perpendiculaires. Donc $(MI) \subset (P)$.

3. Si M est dans (P), alors la droite (MI) est orthogonale à la droite (AB), car toute droite d'un plan orthogonal à (AB) est orthogonale à (AB). (MI) est la médiatrice de [AB] et donc $MA = MB$.

4. $MA = MB \Leftrightarrow M \in (P)$.

Vocabulaire

Le plan orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu du segment [AB] s'appelle le plan **médiateur** du segment [AB].

Méthode

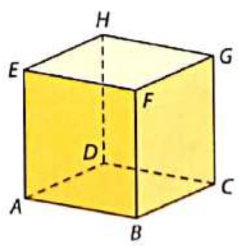
1. Faire une figure.
2. Démontrer que tout point M de l'espace équidistant de A et B est dans (P).
3. Réciproquement démontrer que tout point de (P) est équidistant de A et B.
4. Conclure.

Remarque

On peut travailler aussi par équivalence et faire d'un seul coup les points **2.** et **3.**

S'exercer

7 ABCDEFGH désigne le cube ci-contre. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BF], [AE] et [EH].



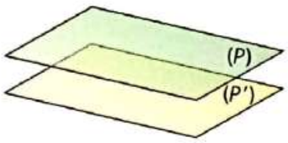
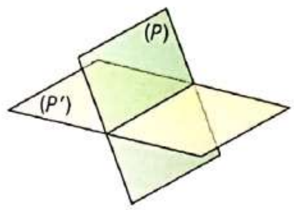
a. Faire une figure.
b. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ADE).
c. Démontrer que la droite (BE) est orthogonale au plan (ADG).
d. Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (IJK).

8 ABCD désigne un tétraèdre régulier, c'est-à-dire dont les arêtes sont de même longueur.
I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
a. Faire une figure.
b. Démontrer que les droites (CI) et (AB) sont perpendiculaires.
c. Démontrer que les droites (DI) et (AB) sont perpendiculaires.
d. En déduire que (ICD) est le plan médiateur du segment [AB].

3 Plans de l'espace

(P) et (P') désignent deux plans distincts de l'espace.

a Position relative de deux plans

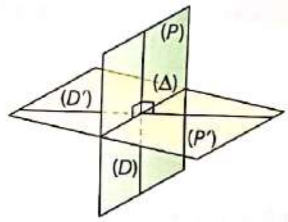
(P) et (P') strictement parallèles	(P) et (P') sécants
	
Aucun point d'intersection	Leur intersection est une droite

Remarque Deux plans confondus sont dits parallèles au sens large.

b Plans perpendiculaires

Définition

Deux plans (P) et (P') de l'espace sont **perpendiculaires** et on note $(P) \perp (P')$, si l'un d'entre eux contient une droite (D) orthogonale à l'autre.

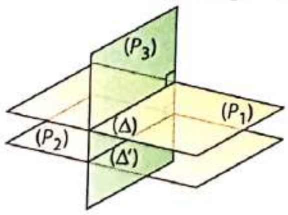


c Propriétés

(D) désigne une droite et (P_1), (P_2), (P_3) trois plans de l'espace.

Propriété 1

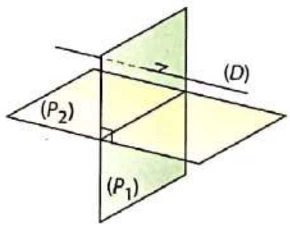
Si deux plans sont parallèles , alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



$$\left.\begin{array}{l}(P_1)//(P_2)\\(P_3)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(P_3)\perp(P_2) \quad \text{et} \quad (\Delta)//(\Delta').$$

Propriété 2

Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.



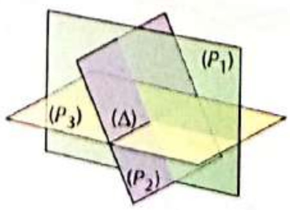
$$\left.\begin{array}{l}(P_1)\perp(P_2)\\(D)\perp(P_1)\end{array}\right\}\Rightarrow(D)//(P_2).$$

d Droite d'intersection

(P_1), (P_2) et (P_3) désignent trois plans de l'espace.

Propriété

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si, et seulement si, il est orthogonal à leur droite d'intersection.



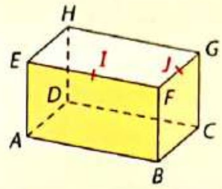
On note $(\Delta) = (P_2) \cap (P_3)$.

$$\left.\begin{array}{l}(P_1)\perp(P_2)\\(P_1)\perp(P_3)\end{array}\right\}\Leftrightarrow(P_1)\perp(\Delta).$$

5 Savoir-faire

9 Étudier la position relative de deux plans

ABCDEFGH désigne le pavé droit représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
a. Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
b. Démontrer que les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants.
c. Faire une figure et construire la section des plans (BIJ) et (ABC).



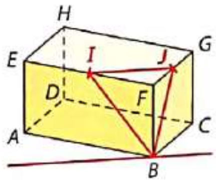
Solution commentée

a. Le théorème des milieux appliqué dans le triangle *EFG* assure que (*IJ*) // (*EG*). Comme (*AC*) // (*EG*), on en déduit que les droites (*IJ*) et (*AC*) sont parallèles.

b. Le point *B* est commun aux deux plans (*BIJ*) et (*ABC*). Ils ne sont donc pas parallèles. Le point *I* est sur la face supérieure du pavé et ne peut donc pas appartenir à la face inférieure c'est-à-dire au plan (*ABC*). Les deux plans (*BIJ*) et (*ABC*) ne sont donc pas confondus.

c. $(BIJ) \cap (EFG) = (IJ)$.

d. Les plans (*EFG*) et (*ABC*) sont parallèles.
Donc l'intersection de (*ABC*) et de (*BIJ*) est une droite parallèle à la droite (*IJ*).
Or, le point *B* est commun aux deux plans.
La section cherchée est donc la droite parallèle à la droite (*IJ*) passant par le point *B*.



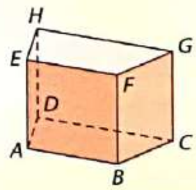
Méthode

a. et b. Pour démontrer que deux plans sont sécants, on démontre :
• qu'ils ne sont pas parallèles en démontrant qu'ils ont un point commun,
• qu'ils ne sont pas confondus en démontrant qu'un point appartient à l'un et pas à l'autre.

b. La section de deux plans non parallèles est une droite. Quand deux plans sont parallèles, les sections avec un troisième plan sont des droites parallèles :
voir propriété 1 du paragraphe **4. c.**

10 Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

ABCDEFGH désigne le prisme droit représenté ci-contre et dont la base est un quadrilatère ABCD.
Démontrer en utilisant une méthode différente à chaque fois, que les plans suivants sont perpendiculaires :
a. (ABF) et (ABC) ; **b. (ADE) et (ABD) ;**
c. (EFG) et (BCG).



Solution commentée

a. *BCFG* est un rectangle donc $(BF) \perp (BC)$. De même, *ABFE* est un rectangle donc $(BF) \perp (AC)$. La droite (*BF*) est orthogonale à deux droites sécantes (*AB*) et (*BC*) du plan (*ABC*), elle est donc orthogonale à ce plan. Le plan (*ABF*) contenant la droite (*BF*) orthogonale au plan (*ABC*), les deux plans (*ABC*) et (*ABF*) sont perpendiculaires.

b. *ADHE* est un rectangle donc $(EH) \perp (AE)$ et (*EH*) // (*AD*).
Les deux plans (*ADE*) et (*ABD*) sont donc perpendiculaires.

c. Le plan (*ADE*) est perpendiculaire au plan (*ABD*).
Le plan (*EFG*) est parallèle au plan (*ABD*).
Par conséquent, les plans (*ADE*) et (*EFG*) sont perpendiculaires.

Méthode

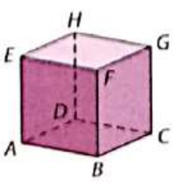
a. Démontrer qu'une droite de l'un des plans est orthogonale à l'autre plan.

b. Démontrer qu'une droite est parallèle à l'un des plans et perpendiculaire à l'autre plan.

c. Démontrer qu'un troisième plan est parallèle à l'un des plans et perpendiculaire à l'autre plan.

S'exercer

11 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.



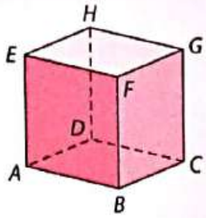
Démontrer que les plans suivants sont perpendiculaires.
a. (*ABC*) et (*EAC*) ;
b. (*EGC*) et (*BFH*) ;
c. (*ACE*) et (*AHF*).

Exercices d'entraînement

Droites et plans orthogonaux

Réponses rapides

12 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.



En utilisant les points de la figure,

a. nommer huit droites orthogonales à la droite (*AB*) ;

b. nommer les plans orthogonaux à la droite (*AB*) ;

c. nommer deux droites orthogonales à la droite (*AB*) et non coplanaires.

13 *ABC* désigne un triangle d'orthocentre *O*.
(*d*) désigne la droite orthogonale au plan (*ABC*) passant par *O*.
M est un point de la droite (*d*) distinct de *O*.

a. Faire une figure à main levée.

b. Justifier que :

- $(MO) \perp (BC)$;
- $(AB) \perp (MC)$.

14 *ABCDEFGH* désigne un cube.

a. Faire une figure.

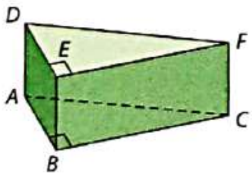
b. Déterminer, sans justifier, les positions relatives des droites :

- (*AB*) et (*HG*) ;
- (*AE*) et (*BC*) ;
- (*AG*) et (*HF*) ;
- (*HF*) et (*BG*).

c. Déterminer, sans justifier, les positions relatives des droites et des plans :

- (*AB*) et (*EFG*) ;
- (*AE*) et (*EFG*) ;
- (*HF*) et (*AGC*) ;
- (*CE*) et (*FGH*).

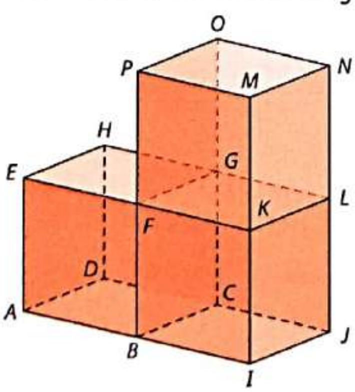
15 *ABCDEF* désigne le prisme de base *ABC* triangle rectangle en *B*.



a. Démontrer que les droites (*AB*) et (*EF*) sont orthogonales.

b. Démontrer que la droite (*FC*) est orthogonale au plan (*ABC*).

16 Trois cubes ont été empilés comme sur la figure ci-dessous.



a. Déterminer, en justifiant vos réponses, les positions relatives de la droite (*MI*) avec la droite :

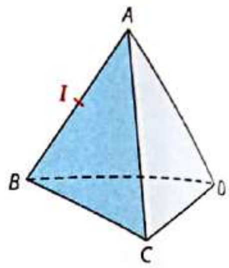
- (*EF*) ;
- (*AE*) ;
- (*FC*).

b. Déterminer, en justifiant vos réponses, les positions relatives de la droite (*MI*) avec le plan :

- (*ABF*) ;
- (*ABC*) ;
- (*EFG*).

17 *ABCD* désigne un tétraèdre tel que :

$$AC = BC \quad \text{et} \quad AD = BD.$$

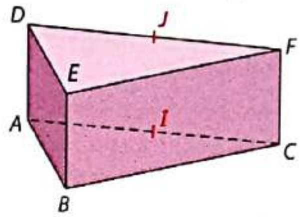


I est le milieu du segment [*AB*].

a. Démontrer que la droite (*AB*) est orthogonale au plan (*ICD*).

b. En déduire la position relative des droites (*AB*) et (*CD*).

18 *ABCDEF* désigne un prisme.
I et *J* sont les milieux respectifs des segments [*AC*] et [*DF*].



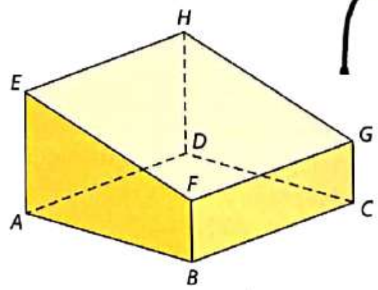
a. Démontrer que les droites (*IJ*) et (*AC*) sont perpendiculaires.

b. Justifier que la droite (*BE*) et le plan (*ABC*) sont orthogonaux.

c. Démontrer que la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*ABC*).

d. En déduire que les droites (*IJ*) et (*IB*) sont orthogonales.

19 Le pupitre d'écolier ci-contre a un écritoire de la forme d'un prisme droit à base trapézoïdale schématisé par la figure ci-dessous.

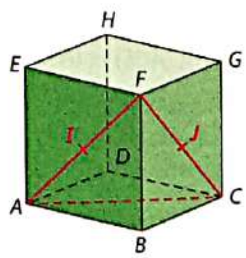


a. Démontrer que les droites (*CG*) et (*AB*) sont orthogonales à la droite (*EH*).

b. Étudier la position relative des droites (*EF*) et (*HD*).

c. Démontrer que la droite (*HD*) est orthogonale au plan (*ABC*).

20 *ABCDEFGH* désigne un cube.
Les points *I* et *J* sont les milieux respectifs des segments [*AF*] et [*CF*].



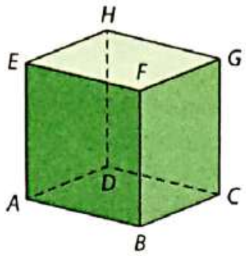
a. Démontrer que les droites (*CI*) et (*DG*) sont orthogonales.

b. Démontrer que les droites (*IJ*) et (*BD*) sont orthogonales.

Aide

Pour démontrer que deux droites sont orthogonales, démontrer qu'une parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

21 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.

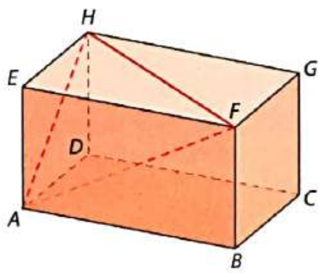


1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. a. Justifier que les droites (*HE*) et (*EB*) sont perpendiculaires.
b. Les droites (*GE*) et (*EB*) sont-elles perpendiculaires ?
c. Que peut-on dire des droites (*HE*) et (*FA*) ?
d. Justifier que la droite (*EG*) est parallèle au plan (*ABC*).
e. Justifier que la droite (*DB*) est perpendiculaire au plan (*EAG*).
f. Justifier que la droite (*HB*) est sécante au plan (*EGC*). Construire leur point d'intersection.
3. *I* et *J* désignent les milieux des segments [*AB*] et [*AE*].
a. Justifier que la droite (*IJ*) est parallèle au plan (*BCH*).
b. Justifier que les droites (*IJ*) et (*BF*) sont sécantes. Construire leur point d'intersection.
c. Justifier que la droite (*IJ*) est sécante au plan (*DBF*). Construire leur point d'intersection.

22 *ABCDEFGH* désigne un cube.
Les points *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs des segments [*FG*], [*AB*] et [*DH*].
a. Faire une figure.
b. Démontrer que la droite (*EC*) est orthogonale au plan (*IJK*).
c. Démontrer que le triangle *IJK* est équilatéral.

Aide
▸ Démontrer que les points *I*, *J* et *K* appartiennent au plan médiateur du segment [*CE*].

23 *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-contre.

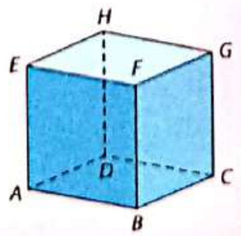


a. Reproduire la figure et la compléter au fur et à mesure.
b. Justifier que les plans (*HFA*) et (*ABC*) ne sont pas parallèles.
c. Construire la droite intersection de ces deux plans.
d. En déduire le point d'intersection de la droite (*BC*) avec le plan (*HFA*).

Plans perpendiculaires

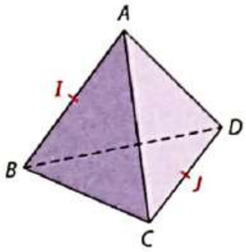
Réponses rapides

24 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.



a. En utilisant les points de la figure, nommer les plans perpendiculaires aux plans :
• (*ABC*) ; • (*AEG*) ; • (*EBC*).
b. Justifier que les plans (*ABC*) et (*HBC*) ne sont pas perpendiculaires.

25 *ABCD* désigne un tétraèdre régulier représenté ci-dessous. Les points *I* et *J* sont les milieux respectifs des segments [*AB*] et [*CD*].



1. a. Démontrer que la droite (*CD*) est perpendiculaire aux droites (*AJ*) et (*BJ*).
b. En déduire que les plans (*ABJ*) et (*ACD*) sont perpendiculaires.
2. Nommer les faces du tétraèdre qui sont perpendiculaires au plan (*CDI*).
3. a. Démontrer que les plans (*ABJ*) et (*CDI*) sont perpendiculaires.
b. Quelle est leur droite d'intersection ?

26 *ABC* désigne un triangle rectangle en *A*.
(*d*) est la droite orthogonale au plan (*ABC*) et passant par *B*.
M est un point de la droite (*d*) distinct de *B*.
1. Démontrer que les plans (*MAB*) et (*ABC*) sont perpendiculaires.
2. a. Justifier que la droite (*AC*) est orthogonale aux droites (*MB*) et (*AB*).
b. Démontrer que les plans (*MAB*) et (*MAC*) sont perpendiculaires.

27 Une planche d'équilibre peut être modélisée comme l'intersection d'un plan avec une sphère :

(*P*) désigne un plan et (*S*) une sphère de centre le point *O* et de rayon *r*.
H est le projeté orthogonal du point *O* sur le plan (*P*).
d désigne la distance du point *O* au plan (*P*).
M est un point du plan (*P*).
a. Faire une figure.
b. Démontrer que le point *M* appartient à la sphère (*S*) si :

$$HM=\sqrt{r^2-d^2}\ .$$

Aide
▸ Utiliser le théorème de Pythagore.

28 *ABCDEFGH* désigne un pavé droit.
1. a. Quelle est la position relative des plans (*ABC*) et (*BEH*) ?
b. Démontrer que les plans (*ABC*) et (*AEG*) sont perpendiculaires.
2. *M* et *N* désignent deux points des segments respectifs [*AB*] et [*CD*] et tels que les droites (*MN*) et (*BC*) ne sont pas parallèles.
(*P*) est le plan perpendiculaire au plan (*ABC*) contenant la droite (*MN*).
a. Faire une figure.
b. Justifier que les plans (*P*) et (*AEH*) sont sécants.
On note (Δ) leur droite intersection.
c. Justifier que les plans (*P*) et (*BCG*) sont sécants.
On note (Δ') leur droite intersection.
d. Démontrer que les droites (Δ) et (Δ')sont parallèles.

29 *ABCDEF* désigne un prisme droit à base triangulaire.

1. a. Faire une figure.

b. Construire le point *M* du segment [*AB*] tel que :

$$AM = \frac{1}{3}AB.$$

2. a. Justifier que les plans (*MDF*) et (*ABC*) sont sécants et construire la droite (Δ) intersection de ces deux plans.

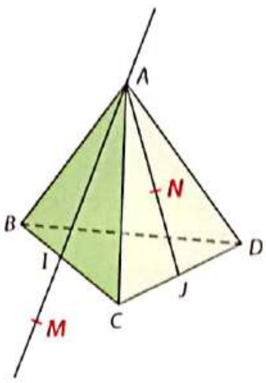
b. *N* désigne le point d'intersection des droites (Δ) et (*BC*). Exprimer *BN* en fonction de *BC*.

3. a. Construire le point *P* du segment [*ED*] tel que :

$$EP = \frac{2}{3}ED.$$

b. Démontrer que les plans (*MNP*) et (*ABC*) sont perpendiculaires.

30 *ABCD* désigne le tétraèdre ci-contre.
I et *J* sont deux points des arêtes respectives [*BC*] et [*CD*].
N est un point du segment [*AJ*] et *M* un point de la demi-droite [*AI*) extérieur au segment [*AI*].

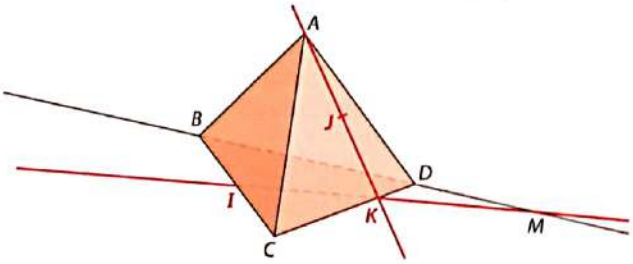


1. Nommer l'intersection des plans (*AIJ*) et (*BCD*).

2. a. Démontrer que les points *M*, *N*, *I* et *J* sont coplanaires.

b. *P* désigne le point d'intersection de la droite (*MN*) et du plan (*BCD*).
Démontrer que *P* appartient à la droite (*IJ*).

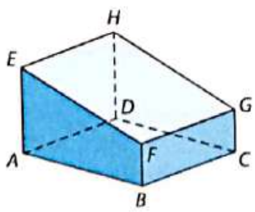
31 *ABCD* désigne le tétraèdre ci-dessous.
I est le milieu du segment [*BC*] et *J* un point de la face *ACD*.
K est le point d'intersection des droites (*AJ*) et (*CD*).



a. Démontrer que la droite (*IK*) est l'intersection des plans (*AIJ*) et (*BCD*).

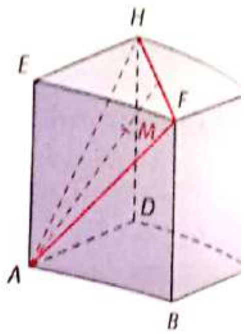
b. On suppose que les droites (*IK*) et (*BD*) sont sécantes en un point *M*.
Déterminer l'intersection des plans (*AIJ*) et (*ABD*).

32 *ABCDEFGH* désigne le prisme ci-dessous dans lequel *ABCD* est un carré.



Étudier les positions relatives des plans :
- (*ABF*) et (*AEH*) ;
- (*EFG*) et (*ABC*) ;
- (*EGC*) et (*BHD*).

33 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.
M est le centre de gravité du triangle *AFH*.



a. Démontrer que le triangle *AFH* est équilatéral.

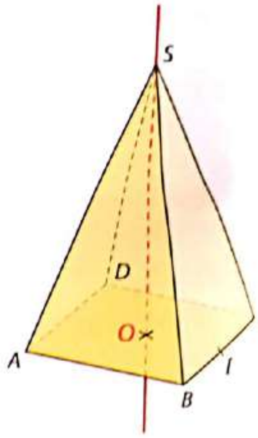
b. Démontrer que les points *A*, *G* et *M* appartiennent au plan médiateur du segment [*CF*] et au plan médiateur du segment [*CH*].

c. En déduire que la droite (*AG*) est orthogonale au plan (*C*
et qu'elle passe par le point *M*.

Vocabulaire

Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

34 *SABCD* désigne la pyramide régulière à base carrée *ABCD* ci-contre.
O est le centre de la face *ABCD*. (*SO*) est donc la hauteur de la pyramide.
I est le milieu de l'arête [*BC*].



a. Démontrer que la droite (*SO*) est orthogonale à la droite (*CB*).

b. En déduire que la droite (*CB*) est orthogonale au plan (*SOI*) ; puis que les deux plans (*SOI*) et (*ABC*) sont perpendiculaires.

c. (*P*) désigne un plan contenant la droite (*SO*).
Quelle est la position relative des plans (*P*) et (*ABC*) ?

35 *ABCD* désigne un tétraèdre.
I est un point de la face *ACD*. On souhaite déterminer la position relative des plans (*BAI*) et (*BCD*).

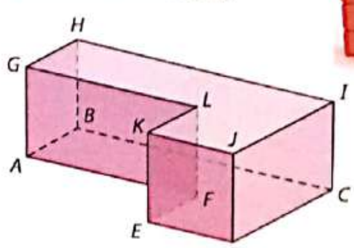
a. Nommer un point commun à ces deux plans et en déduire qu'ils sont sécants.

b. Nommer une droite du plan (*BAI*) et une droite du plan (*BCD*) coplanaires mais non parallèles.

c. Justifier que le point d'intersection *J* de ces droites est commun aux plans (*BAI*) et (*BCD*).

d. Conclure.

36 Dans le jeu de construction Tetris, une des pièces, constituée de quatre cubes, a la forme du prisme droit représenté ci-dessous.



Étudier les positions relatives des plans suivants.

a. (*FCI*) et (*ABC*) ;

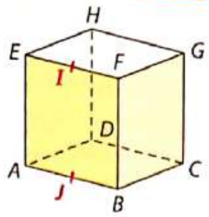
b. (*FCI*) et (*ABH*) ;

c. (*AGL*) et (*DCI*).

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

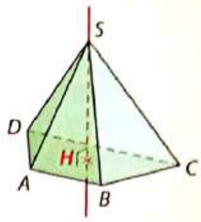
37 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
ABCDEFGH désigne le cube ci-contre.
I et *J* sont les milieux respectifs des segments [*EF*] et [*AB*].



	vrai	faux
1. $(BF) \perp (AD)$.	☐	☐
2. Les droites (*HB*) et (*AG*) ne sont pas coplanaires.	☐	☐
3. Les droites (*GC*) et (*AB*) ne sont pas coplanaires.	☐	☐
4. $(IJ) \perp (ADC)$.	☐	☐
5. $(AJ) \perp (FGC)$.	☐	☐
6. $(EHB) \perp (ADC)$.	☐	☐
7. $(GJI) \perp (ADC)$.	☐	☐

Avec justification

38 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
SABCD désigne la pyramide ci-contre de sommet *S* et de base un trapèze tel que (*AB*) // (*CD*).
H est le projeté orthogonal du point *S* sur la base.



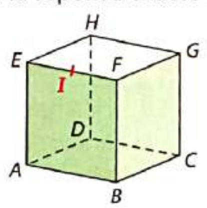
	vrai	faux
1. Les droites (*SH*) et (*HA*) sont perpendiculaires.	☐	☐
2. Les droites (*SH*) et (*BC*) ne sont pas orthogonales.	☐	☐
3. Les plans (*SHA*) et (*ABC*) sont perpendiculaires.	☐	☐
4. La droite d'intersection des plans (*SAD*) et (*SBC*) est parallèle au plan (*ABC*).	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

39 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
ABCDEFGH désigne le cube ci-contre.
I est le milieu du segment [*EF*].



1. Les droites (*EF*) et (*GD*) sont :
a. non coplanaires ; **b.** sécantes ;
c. parallèles.

2. Les droites (*FB*) et (*CD*) sont :
a. sécantes ; **b.** parallèles ;
c. orthogonales.

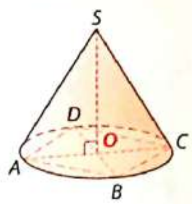
3. Les plans (*ADI*) et (*HGC*) sont :
a. parallèles ; **b.** perpendiculaires ;
c. confondus.

4. La droite (*FI*) et le plan (*AEH*) sont :
a. parallèles ; **b.** sécants en un point ;
c. sécants en une droite.

5. L'intersection des plans (*EHC*) et (*FGC*) est :
a. le point *C* ; **b.** le segment [*BC*] ;
c. la droite (*BC*).

Avec justification

40 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
La figure ci-contre représente un cône de révolution de sommet *S*.
O est le centre du cercle de base et *ABCD* est un carré inscrit dans ce cercle.



1. Les plans (*SOA*) et (*ABC*) sont :
a. sécants en *O* ;
b. sécants suivant la droite (*SO*) ;
c. sécants suivant la droite (*OA*).

2. Les plans (*SOA*) et (*ABC*) sont :
a. perpendiculaires ;
b. parallèles ;
c. sécants et non perpendiculaires.

3. Les plans (*SAC*) et (*SBD*) sont :
a. perpendiculaires ;
b. sécants suivant une droite parallèle à la droite (*AC*) ;
c. sécants suivant la droite (*SB*).

4. Les droites (*SO*) et (*CD*) sont :
a. sécantes ; **b.** parallèles ; **c.** orthogonales.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

41 Alignement de points

OABCD désigne une pyramide à base carrée de sommet *O*.
P, *Q* et *R* sont trois points de l'espace tels que :
- $(OP) \perp (AOC)$;
- $(OQ) \perp (BOD)$;
- $(OR) \perp (POQ)$;

I est le point d'intersection des diagonales (*AC*) et (*BD*) de la base.

a. Faire une figure.

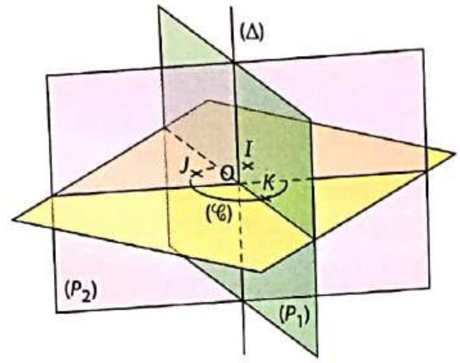
b. Démontrer que les droites (*OP*) et (*OQ*) sont orthogonales à la droite (*OI*).

c. En déduire la position relative de la droite (*OI*) par rapport au plan (*OPQ*).

d. Démontrer que les points *O*, *I* et *R* sont alignés.

42 Axe d'un cercle dans l'espace

($\mathscr{C}$) désigne le cercle de centre *O* ci-dessous.
I, *J* et *K* sont trois points distincts du cercle ($\mathscr{C}$).



a. Justifier que le point *O* appartient au plan (P_1) médiateur du segment [*IJ*] et au plan (P_2) médiateur du segment [*IK*].
Ces deux plans sont donc sécants suivant une droite.
On note (Δ) cette droite d'intersection.

b. *M* désigne un point de la droite (Δ).
Démontrer que $MI = MJ = MK$.

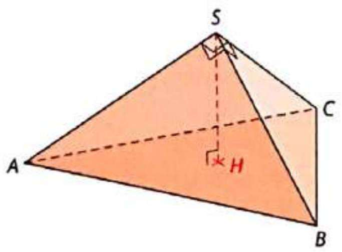
c. Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (*IJK*).

Vocabulaire

La droite (Δ) étudiée dans cet exercice, est appelée axe du cercle ($\mathscr{C}$).

43 Orthocentre de la base

SABC désigne le tétraèdre trirectangle ci-dessous, c'est-à-dire tel que les triangles *SAB*, *SAC* et *SBC* sont rectangles en *S*.
H est le projeté orthogonal du point *S* sur le plan (*ABC*).



a. Démontrer que tout plan contenant la droite (*SH*) est perpendiculaire au plan (*ABC*).

b. En déduire que les plans (*SAH*), (*SBH*) et (*SCH*) sont perpendiculaires au plan (*ABC*).

c. Démontrer que la droite (*SA*) est perpendiculaire au plan (*SBC*).

d. Démontrer que la droite (*BC*) est perpendiculaire au plan (*SAH*).

e. En déduire que le point *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.

44 Section d'un tétraèdre

ABCD désigne un tétraèdre.
I est le milieu du segment [*BD*].
J et *K* sont deux points des segments respectifs [*AC*] et [*AD*].

1. On suppose que (*JK*) // (*CD*).

a. Quel théorème permet de déterminer l'intersection des plans (*IJK*) et (*BCD*) ?

b. Faire une figure et tracer cette intersection.

2. On suppose les droites (*JK*) et (*CD*) sécantes en un point *L*.

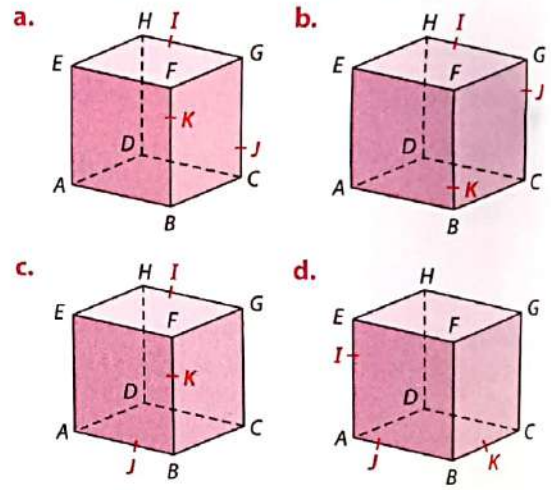
a. Faire une figure et tracer l'intersection des plans (*IJK*) et (*BCD*).

b. *M* est le point d'intersection des droites (*BC*) et (*LI*).
Déterminer l'intersection des plans (*IJK*) et (*ABC*).

3. Déduire de ce qui précède la section du tétraèdre par le plan (*IJK*).

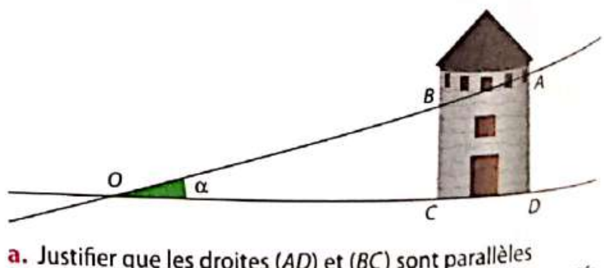
45 Section de cubes

Reproduire la figure et tracer la section du cube *ABCDEFGH* par le plan (*IJK*) dans chacun des cas suivants.



46 Dans un moulin

Le corps d'un moulin est un cylindre de rayon 5 m.
L'axe des ailes fait un angle α avec le sol.
Le point d'entrée de cet axe *A* et son point de sortie *B* sont situés dans un même plan vertical contenant un diamètre [*CD*] de la base.

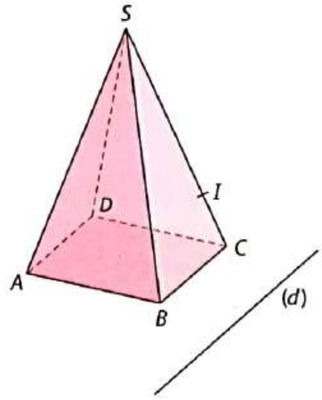


a. Justifier que les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles.

b. Les hauteurs des points *A* et *B* par rapport au sol sont respectivement de 10 m et 9 m.
Calculer une mesure en degrés de l'angle α.

47 Section d'une pyramide

SABCD désigne la pyramide à base carrée ci-contre.
(d) est une droite du plan (ABC) parallèle à la droite (BC). I est un point du segment $[SC]$. (P) est le plan contenant la droite (d) et le point I.



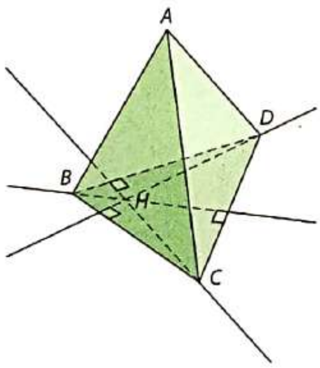
a. Faire la figure.
b. Déterminer, puis tracer l'intersection du plan (P) et du plan (SBC).
c. Tracer la section de la pyramide et du plan (P).

48 Intersection de plans dans un pavé droit

ABCDEFGH désigne un pavé droit.
I est le point du segment $[EF]$ tel que $EI = \frac{1}{5}EF$ et le point J est le milieu du segment $[FG]$.
a. Faire une figure.
b. Déterminer et tracer l'intersection des plans (AIJ) et (ABC).
c. Déterminer et tracer la section du pavé avec le plan (AIJ).
d. Quelle est la nature de cette section ?

49 Tétraèdre orthocentrique

ABCD désigne un tétraèdre tel que les droites (AB) et (BC) sont respectivement orthogonales aux droites (CD) et (AD). H est l'orthocentre du triangle BCD.



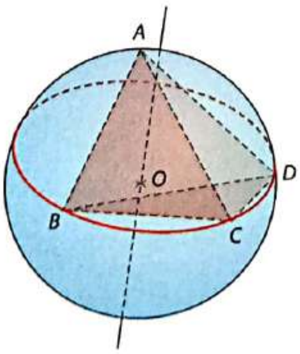
a. Démontrer que les plans (ABH) et (ADH) sont perpendiculaires au plan (BCD).
b. En déduire que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.

Vocabulaire

Un tétraèdre est orthocentrique lorsque ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

50 Sphère circonscrite à un tétraèdre

ABCD désigne un tétraèdre.
(d) désigne l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD.
(P) est le plan médiateur du segment $[AD]$.



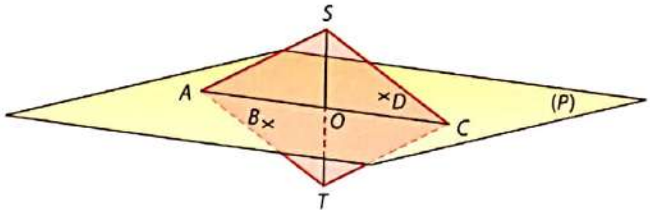
a. Démontrer que la droite (d) est sécante au plan (P) en un point O.
b. Démontrer que le point O est équidistant des points A, B, C et D.

Vocabulaire

Le point équidistant de quatre points formant un tétraèdre est le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

51 Losange et triangle

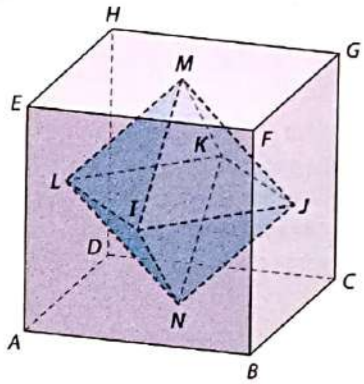
A, B, C et D désignent quatre points d'un même plan (P).
Les points S et T sont situés de part et d'autre du plan (P) et tels que le quadrilatère $ASCT$ est un losange de centre O et le triangle SBD est un triangle isocèle en S.



a. Démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (P).
b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

52 Solides de Platon

L'octaèdre régulier est un solide qui a pour sommets les centres des faces d'un cube. Ses faces sont des triangles équilatéraux.



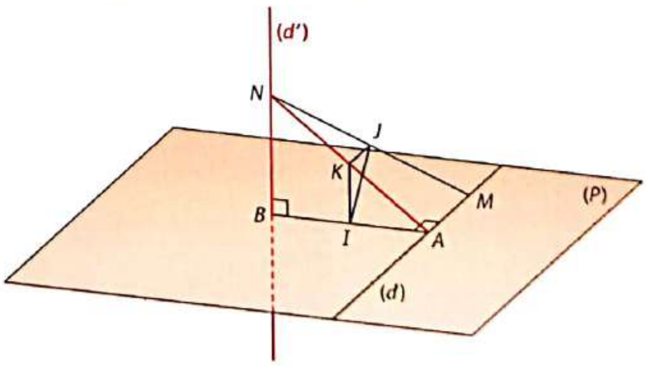
1. a. Démontrer que les droites (JM) et (CH) sont parallèles.
b. Démontrer que les droites (NL) et (CH) sont parallèles.
c. En déduire que les arêtes (JM) et (NL) sont parallèles.
2. Démontrer que les plans (IJM) et (NKL) sont parallèles.
3. Démontrer que les plans (IJK) et (MNK) sont orthogonaux.

Info

Platon (– 427 ; –348) est un philosophe grec élève de Pythagore pour qui un monde parfait est de nature géométrique avec la Terre au centre du système.

53 Lieu de points

A et B désignent deux points d'un plan (P).
I est le milieu du segment $[AB]$.
(d) est la droite du plan (P) perpendiculaire à la droite (AB) en A.
(d') est la droite orthogonale au plan (P) en B.
Pour tous points M et N respectivement des droites (d) et (d'), J et K désignent les milieux des segments $[MN]$ et $[AN]$.

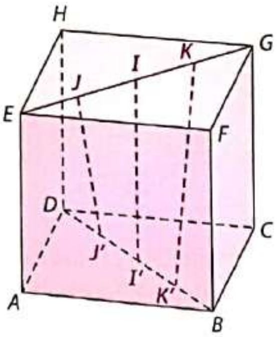


a. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en K.
b. On suppose que $MN = 3$.
Déterminer le lieu du point J lorsque les points M et N varient sur les droites (d) et (d').

Problèmes

54 Surface réglée

ABCDEFGH désigne le cube ci-dessous.
Les points I, J, K, I', J' et K' sont les milieux respectifs des segments $[EG]$, $[EI]$, $[IG]$, $[DB]$, $[DI']$ et $[I'B]$.



1. a. Justifier que la droite (DH) est orthogonale au plan (HGE).
b. En déduire la position relative des droites (HI) et (HD).
c. Démontrer que le quadrilatère $HII'D$ est un rectangle.
d. En déduire que la droite (II') est parallèle au plan (AHE).

2. M et M' sont les projetés orthogonaux respectifs des points J et J' sur les segments $[HE]$ et $[AD]$.
a. Démontrer que les distances JM et $J'M'$ sont égales.
b. Démontrer que le quadrilatère $JMM'J'$ est un rectangle.
c. En déduire que la droite (JJ') est parallèle au plan (AHE).

3. Démontrer de manière analogue à la question **2.** que la droite (KK') est parallèle au plan (AHE).

4. Les points P, Q, R, S et T sont les milieux respectifs des segments $[ED]$, $[JJ']$, $[II']$, $[KK']$ et $[BG]$.
a. Démontrer que le point P est le milieu du segment $[MM']$.
b. En déduire que le point Q se projette orthogonalement en P sur le plan (AHE).
c. Démontrer que les points P, Q, R, S et T sont alignés.

5. On construit de manière analogue la surface réglée à partir de la diagonale $[HF]$.
Justifier que la droite (II') appartient aux deux surfaces.
L'intersection des deux surfaces contient-elle d'autres points ?

Vocabulaire

Une surface réglée est une surface qui est la réunion de droites, appelées génératrices. Le cylindre et le cône en sont des exemples simples. Des surfaces réglées plus complexes sont notamment utilisées en architecture comme l'illustre la photo de cette tour située à Guangzhou (Canton), en Chine.

55 Perpendiculaire commune à deux droites

(d) et (d') désignent deux droites de l'espace.
Le but de ce problème est de déterminer, si elle existe, une droite perpendiculaire à ces deux droites.

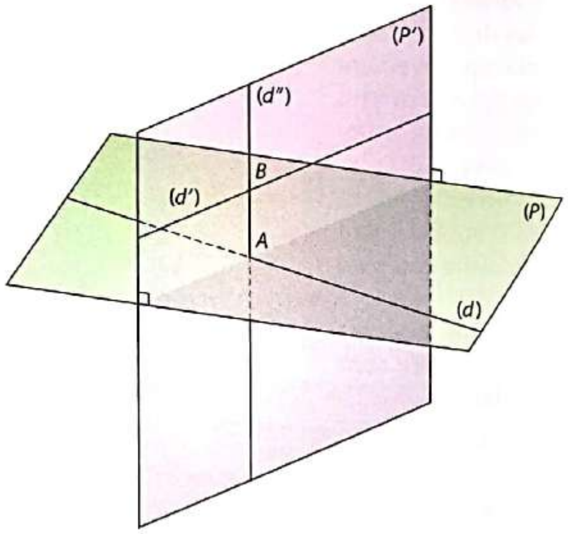
1^er cas : (d) et (d') sont coplanaires

1. On suppose que (d) et (d') sont parallèles.
a. Justifier l'existence d'une infinité de droites orthogonales aux deux droites.
b. Démontrer que la distance entre les deux droites est la même quelle que soit la perpendiculaire commune choisie.

2. On suppose que (d) et (d') sont perpendiculaires en un point A.
B est un point de (d) distinct de A.
a. Démontrer que la droite perpendiculaire à (d) en B est parallèle à (d').
b. Conclure.

3. On suppose que (d) et (d') sont sécantes en un point A, mais non perpendiculaires.
B est un point de (d) distinct de A.
(d'') est la droite perpendiculaire à (d) en B.
a. Justifier que (d') et (d'') sont sécantes en un point C.
b. Démontrer que l'angle $\widehat{ACB}$ ne peut être droit.
c. Conclure.

2^e cas : (d) et (d') ne sont pas coplanaires

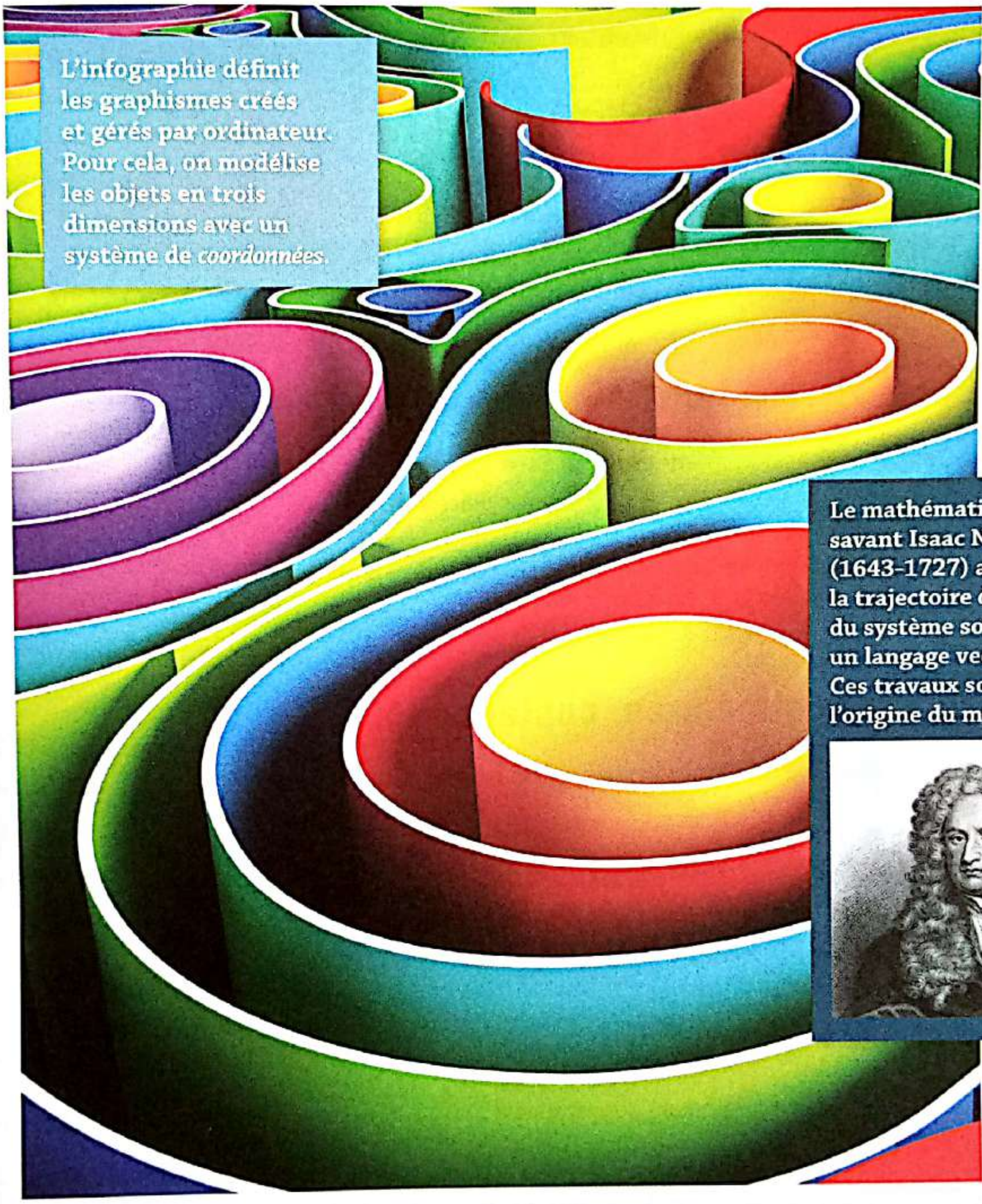


(P) désigne le plan parallèle à la droite (d') contenant la droite (d) et (P') le plan perpendiculaire au plan (P) contenant la droite (d').
a. Justifier l'existence des plans (P) et (P').
b. Démontrer que la droite (d) est sécante au plan (P') en un point A.
c. (d'') est la droite orthogonale au plan (P) et contenant A.
Démontrer que (d'') est orthogonale aux deux droites (d) et (d').
d. Démontrer l'unicité de la droite (d'').

Cas général

Donner une conclusion générale concernant l'existence de la perpendiculaire commune à deux droites de l'espace.

6 Vecteurs et produit scalaire dans l'espace



L'infographie définit les graphismes créés et gérés par ordinateur. Pour cela, on modélise les objets en trois dimensions avec un système de *coordonnées*.

Le mathématicien et savant Isaac Newton (1643-1727) a traduit la trajectoire des planètes du système solaire dans un langage vectoriel. Ces travaux sont à l'origine du mot *vecteur*.

Les objectifs du chapitre

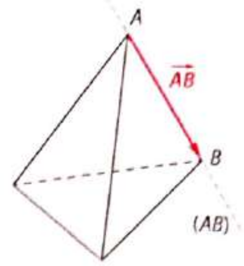
- Définir un vecteur de l'espace et les opérations sur les vecteurs.
- Définir base, repère et coordonnées de l'espace.
- Utiliser le barycentre pour le calcul vectoriel.
- Utiliser le produit scalaire dans l'espace.

1 Vecteurs de l'espace

a Extension de la notion de vecteurs à l'espace

Dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

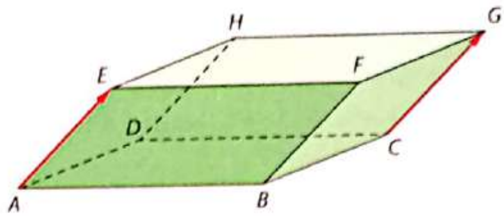
- son point d'origine (le point A) ;
- sa **direction** (la droite (AB)) ;
- son **sens** (du point A vers le point B) ;
- sa **norme** (la distance AB).



et un vecteur $\vec{u}$ est défini par sa direction, son sens et sa norme, notée $\|\vec{u}\|$.
Cette notation de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

Propriété

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ si, et seulement si, $AEGC$ est un paralélogramme.

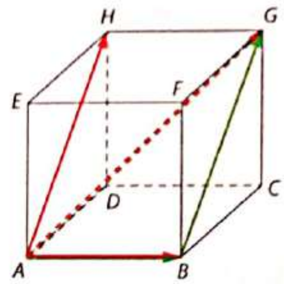


b Calcul vectoriel dans l'espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel se généralisent à l'espace.

Propriétés

- **Relation de Chasles :**
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$.
- **Règle du parallélogramme :**
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$ si, seulement si, le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme.



Propriétés

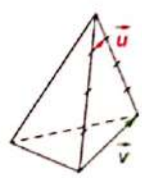
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$;
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

c Colinéarité

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.



$\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{v}$

Remarque Le vecteur nul, $\vec{0}$, est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

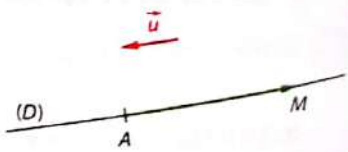
Propriété

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

d Caractérisation vectorielle d'une droite

Propriété

A désigne un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}$, est la droite (D) de repère $(A\,;\vec{u})$.

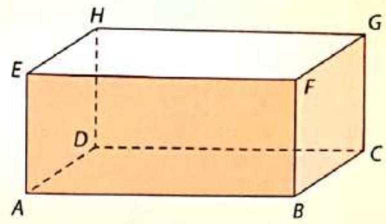


1 Utilisation du calcul vectoriel

$ABCDEFGH$ désigne le pavé droit ci-contre.
Placer les points I et J tels que :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$;

$\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.



Solution commentée

Pour I

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.

2. Ainsi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$. I est le centre de la face $BCGF$.

Pour J

1. $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$.

2. $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. J est le centre de la face $EFGH$.

Méthode

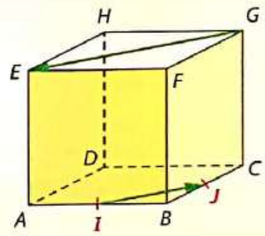
Procéder comme en géométrie plane.

1. Utiliser la propriété
$k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u} + \vec{v})$
puis la règle du parallélogramme ou la relation de Chasles.

2. Les faces sont des rectangles, donc certains vecteurs sont égaux.

2 Démontrer une colinéarité

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-contre.
I et J sont les milieux des arêtes $[AB]$ et $[BC]$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.



Solution commentée

1. Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$ donc :
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2. $[AE]$ et $[GC]$ sont deux arêtes du cube telles que $(EA) // (CG)$ et $EA = CG$, donc $EACG$ est un parallélogramme, cela signifie que $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA}$.

3. Ainsi, $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{IJ}$.

Cela signifie que $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

Méthode

1. Utiliser le théorème des milieux pour en déduire une égalité vectorielle.

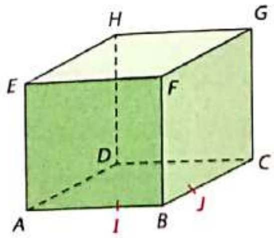
2. Utiliser la propriété du parallélogramme.

3. Le calcul vectoriel permet de déterminer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{GE} = k\overrightarrow{IJ}$.

S'exercer

Pour les exercices **3** à **5**, $ABCDEFGH$ désigne le cube ci-contre.

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



3 Reproduire la figure et placer le point K tel que :
$$\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

4 Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

5 Les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

2 Vecteurs coplanaires

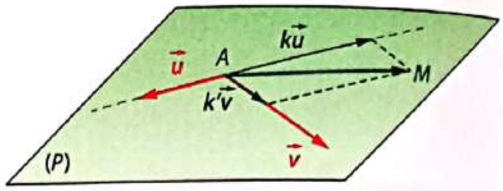
a Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété Définition

A désigne un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$, où k et k' sont deux nombres réels, est un plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés **vecteurs directeurs du plan**.



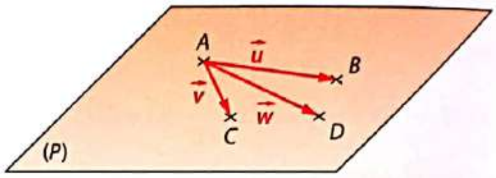
b Vecteurs coplanaires

Définitions

- Quatre **points** A, B, C et D de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'ils appartiennent à un même plan.
- Trois **vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD}$$

sont dits **coplanaires** lorsque A, B, C et D sont coplanaires.



Remarques

- Trois points ou deux vecteurs sont toujours coplanaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont toujours coplanaires.

Propriétés

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

- A, B, C et D désignent quatre points tels que A, B et C sont non alignés.
A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$

3 Barycentre dans l'espace

La notion de barycentre vue en géométrie plane se généralise à l'espace.
Ainsi, toutes les propriétés du barycentre dans le plan (homogénéité, propriété du barycentre partiel, etc.), vues au Chapitre 1, s'étendent à l'espace.

Propriété Définition

(A, a), (B, b) et (C, c) désignent trois points pondérés de l'espace.

Si $a + b + c \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

G est appelé **barycentre** des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) et on note :

$$G = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}.$$

Propriété

Pour tout point M de l'espace, si $G = \text{bary}\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

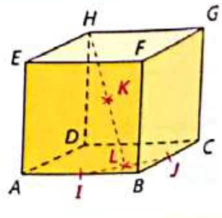
alors : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right)$.

Exemple

$I = \text{bary}\{(A, 1), (B, 1)\}$

$L = \text{bary}\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$

$K = \text{bary}\{(A, 1), (B, 2), (C, 1), (H, 1)\}$



6 Démontrer une coplanarité

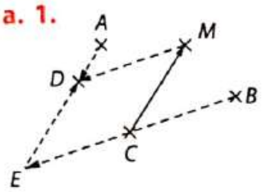
A, B, C, D et E désignent des points de l'espace tels que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AD}$.
M est le point qui vérifie $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}$.

a. Construire ces six points.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont-ils coplanaires ?

Solution commentée

a. 1.



2. $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CE}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{MC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{CM}$.

b. 3. $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$
$=-\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AD}$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Méthode

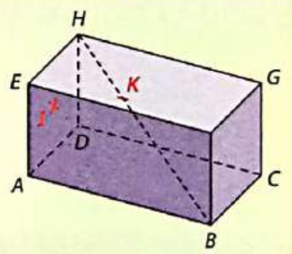
1. Utiliser les égalités vectorielles pour placer les points B, C et E puis les points A et D.
2. Pour placer le point M, utiliser la relation de Chasles afin d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{EM}$ en fonction de vecteurs déjà tracés.
3. Pour démontrer que des vecteurs sont coplanaires, on exprime l'un en fonction des deux autres (voir propriété paragraphe **2.b.**).

7 Réduire une somme vectorielle à l'aide d'un barycentre

$ABCDEFGH$ est le pavé droit ci-contre.
I est le centre de la face $AEHD$.
K est le barycentre des points pondérés $\{(B, 1), (H, 2)\}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IH}$.

b. En déduire que les points I, K et G sont alignés.



Solution commentée

a. 1. $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$.
$=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IH}$.

b. 2. K est le barycentre des points pondérés $\{(B, 1), (H, 2)\}$ donc pour tout point M, $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}(1\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MH})$.

3. En prenant $M=I$, on obtient $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{IH}$.

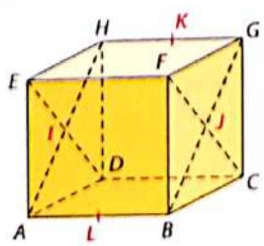
4. Ainsi, $\overrightarrow{IG}=3\overrightarrow{IK}$, cela signifie que $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que les points I, G et K sont alignés.

Méthode

1. Utiliser Chasles pour décomposer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IH}$.
2. Utiliser la propriété du barycentre (paragraphe 3).
3. Deux vecteurs colinéaires ayant une origine commune sont constitués de points alignés.

S'exercer

Dans les exercices de 8 à 10, $ABCDEFGH$ désigne le cube ci-contre, I et J sont les centres des faces, K et L sont les milieux des arêtes $[HE]$ et $[AB]$, M est le barycentre des points pondérés $\{(L, 1), (K, 1), (J, -4)\}$.



8 **a.** Démontrer que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HF}=2\overrightarrow{IJ}$.
b. En déduire que $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

9 **a.** Démontrer que $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.
b. En déduire que $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont coplanaires.

10 O est le centre du cube.
Montrer que O, K et L sont alignés.

4 Repérage dans l'espace

a Coordonnées

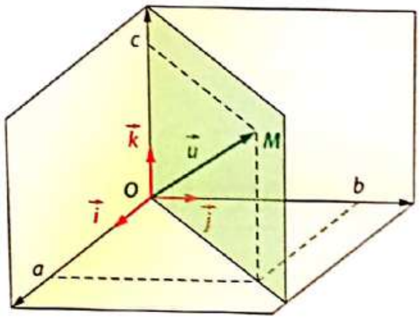
Définitions

$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ désignent trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.

- Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base de l'espace**.
- Le quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère de l'espace**.
- Lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, la **base** et le **repère** sont dits **orthogonaux**.
- Lorsque la base ou le repère sont orthogonaux et que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires (c'est-à-dire que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$), la **base** et le **repère** sont dits **orthonormés**.

Propriétés

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne un repère, M un point et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.



- Il existe un unique triplet $(a ; b ; c)$ tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
- Il existe un unique triplet $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
- Le triplet $(a ; b ; c)$ est respectivement appelé **coordonnées** du point M et **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$, et on note $M(a ; b ; c)$ et $\vec{u}\,(a ; b ; c)$.
- La première coordonnée est appelée **abscisse**, la deuxième **ordonnée** et la troisième **cote**.

b Calculs avec les coordonnées

Propriété 1

$A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$ désignent trois points dans un repère de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
- Si I est le milieu de $[AB]$, alors :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- Si $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ alors :

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} ; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} ; \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}\right).$$

- Lorsque le repère est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Propriété 2

$\vec{u}\,(x ; y ; z)$ et $\vec{v}\,(x' ; y' ; z')$ désignent deux vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

- $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x' ; y + y' ; z + z')$.
- $k\vec{u}\,(kx ; ky ; kz)$.
- Lorsque la base est orthonormée, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

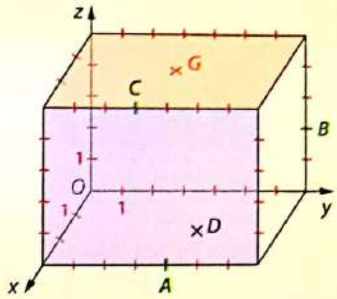
11 Lire des coordonnées

Dans le pavé droit de dimensions 3 ; 7 ; 5 ci-contre :

a. Lire les coordonnées des points *A*, *B* et *C*.

b. *D* appartient à la face de devant colorée en violet. Donner les coordonnées de *D*.

c. *G* est le centre de la face colorée en orange. Donner les coordonnées de *G*.



Solution commentée

a. 1. Le pavé a pour dimensions 3 en abscisse, 7 en ordonnée et 5 en cote.
A appartient au plan de base, $A(3\,;4\,;0)$.
B appartient au plan de derrière, $B(0\,;7\,;2)$.
C appartient au plan de dessus, $C(3\,;3\,;5)$.

b. $D(3\,;5\,;1)$.

c. 2. $G(1{,}5\,;3{,}5\,;2)$.

Méthode

1. Pour les points *A*, *B* et *C* qui sont sur les arêtes du pavé, on détermine les dimensions du pavé grâce aux axes.
2. On peut utiliser la formule du milieu pour *G*.

12 Déterminer des coordonnées

Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne $A(-5\,;1\,;2)$, $B(2\,;0\,;3)$ et $C(6\,;2\,;1)$.

a. Déterminer les coordonnées du point *M* défini par $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$.

b. Déterminer les coordonnées du point $G=\text{bary}\{(A,1),(B,2),(C,-1)\}$.

c. Que remarque-t-on ? Justifier.

Solution commentée

a. 1. $\overrightarrow{MA}+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$ soit $2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}$.

2. $\overrightarrow{CA}(-11\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{BA}(-7\,;+1\,;-1)$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}(1{,}5\,;-1{,}5\,;1{,}5)$.

On note $(x\,;y\,;z)$ les coordonnées du point *M* donc $\overrightarrow{AM}(x+5\,;y-1\,;z-2)$.

3. Ainsi $(x+5\,;y-1\,;z-2)=(1{,}5\,;-1{,}5\,;1{,}5)$ et donc $M(-3{,}5\,;-0{,}5\,;3{,}5)$.

b. 4. $G=\text{bary}\{(A,1),(B,2),(C,-1)\}$ donc $x_G=\dfrac{1x_A+2x_B-1x_C}{1+2-1}=-\dfrac{7}{2}=-3{,}5$.

De même $y_G=-0{,}5$ et $z_G=3{,}5$. $G(-3{,}5\,;-0{,}5\,;3{,}5)$.

c. 5. $M=G$. En effet, $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
Il existe un unique point *M* puisque $1+2-1\neq 0$ c'est le barycentre *G*.

Méthode

a. 1. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des autres vecteurs.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs grâce aux données de l'exercice.
3. Conclure en comparant les coordonnées.

b. 4. Utiliser la propriété 1 du paragraphe **4. b.**

c. 5. Utiliser la propriété du paragraphe **3.**

S'exercer

Pour les exercices **13** à **15**, $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.

13 On donne $\vec{u}(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}(-3\,;1\,;4)$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
- $\vec{u}-\vec{v}$;
- $2\vec{u}+\vec{v}$;
- $-3\vec{u}-\vec{v}$.

14 $A(2\,;3\,;4)$ et $B(-4\,;5\,;1)$.
Déterminer les coordonnées du point *C* défini par $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

15 On donne $A(1\,;-2\,;1)$, $B(4\,;3\,;-1)$ et $C(7\,;-12\,;5)$.
Déterminer les coordonnées des points :
a. G_1 isobarycentre de *A*, *B* et *C*.
b. G_2 barycentre de $\{(A,-1),(B,2),(C,4)\}$.

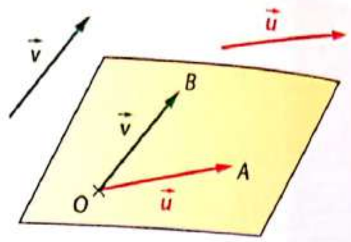
5 Produit scalaire

a Extension de la notion de produit scalaire à l'espace

Principe

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs de l'espace et O, A et B sont des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

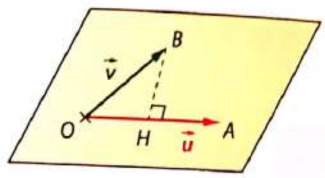
Les points O, A et B sont coplanaires, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans le plan (OAB).



b Différentes expressions du produit scalaire

Définition

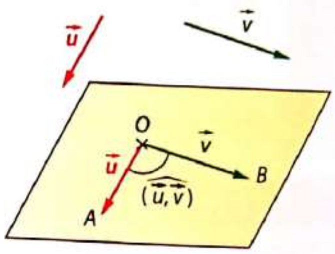
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls de l'espace et O, A et B sont des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
Le point H est le projeté orthogonal, dans le plan (OAB), de B sur la droite (OA).
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, égal à $\overline{OA}\times\overline{OH}$.
- Lorsque $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.



Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right]$;
- Dans une base orthonormée, $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}+z_{\vec{u}}\times z_{\vec{v}}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.



Remarque

$\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2=x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}+z_{\vec{u}}^{\,2}$, dans une base orthonormée.

c Règles de calculs avec le produit scalaire

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

- $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}$;
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$;
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$.

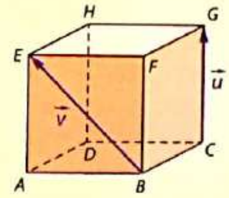
d Orthogonalité dans l'espace

Définition Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **orthogonaux**, si et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

16 Savoir calculer un produit scalaire

ABCDEFGH désigne le cube ci-contre d'arête 2 cm.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de trois façons différentes.



Solution commentée

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}$.

Ainsi $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{BF}\|^2+\|\overrightarrow{BE}\|^2-\|\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}\|^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[2^2+(2\sqrt{2})^2-\|\overrightarrow{EF}\|^2\right]=\frac{1}{2}[4+8-4]=4.$

2. Dans le repère orthonormé $\left(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$:

$\overrightarrow{CG}$ $(0;0;2)$ et $\overrightarrow{BE}$ $(0;-2;2)$. Donc $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BE}=0\times0+0\times(-2)+2\times2=4$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}=BF\times BE\times\cos\widehat{EBF}=2\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4.$

Méthode

Utiliser, suivant les données de l'énoncé :

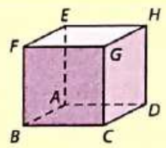
1. Soit la 1re propriété quand on connaît les normes des trois vecteurs.
2. Soit la 2e propriété quand on peut utiliser un repère orthonormé.
3. Soit la 3e propriété quand on connaît une mesure d'angle.
Soit la définition de produit scalaire quand on dispose du projeté orthogonal d'un point.

17 Savoir démontrer une orthogonalité

ABCDEFGH désigne le cube ci-contre d'arête 1 unité.

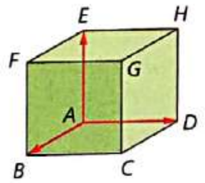
a. Justifier que le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans ce repère.

b. Calculer $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ et en déduire que $(AG)\perp(BDE)$.



Solution commentée

a. *ABCDEFGH* est un cube donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux et $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AD}\|=\|\overrightarrow{AE}\|=1$.



1. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ $(1;1;1)$.

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\overrightarrow{BE}$ $(-1;0;1)$.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Ainsi, $\overrightarrow{BD}$ $(-1;1;0)$.

b. 2. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times(-1)+1\times0+1\times1=0$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-1)+1\times1+1\times0=0$.

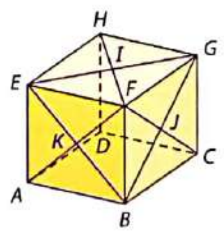
3. Ainsi $(AG)\perp(BE)$ et $(AG)\perp(BD)$. (BE) et (BD) sont deux droites sécantes du plan (BDE) donc $(AG)\perp(BDE)$.

Méthode

1. Exprimer chaque vecteur en fonction des vecteurs de la base.
2. Utiliser la formule du produit scalaire avec les coordonnées.
3. Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan.

S'exercer

Dans les exercices 18 et 19, *ABCDEFGH* désigne un cube d'arête *a*.
I, *J* et *K* sont les centres des faces *EFGH*, *BCGF* et *ABFE*.



18 Calculer les produits scalaires suivants :
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BH}$; b. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BH}$; c. $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BH}$; d. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$.

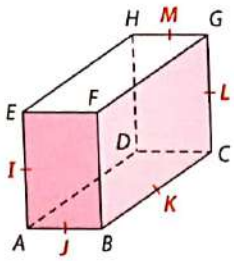
19 Dans le repère $\left(D;\frac{1}{a}\overrightarrow{DA},\frac{1}{a}\overrightarrow{DC},\frac{1}{a}\overrightarrow{DH}\right)$:

a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{GK}$.
b. Montrer que $(DF)\perp(IGK)$.

Vecteurs de l'espace

Réponses rapides

Pour les exercices **20** à **22**, *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-contre.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux des arêtes $[AE]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$ et $[GH]$.



20 **a.** Donner un vecteurs égal à :
- $\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{EH}$;
- $\overrightarrow{EG}$;
- $\overrightarrow{HC}$.

b. Donner une somme vectorielle égale à :
- $\overrightarrow{DG}$;
- $\overrightarrow{HF}$;
- $\overrightarrow{DC}$;
- $\overrightarrow{IK}$.

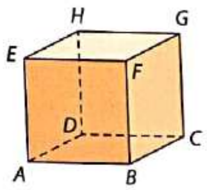
21 Simplifier les expressions suivantes :

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$;
b. $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{HG}$;
c. $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{CD}$;
d. $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}$.

22 Exprimer chacun des vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.

a. $\overrightarrow{HF}$; **b.** $\overrightarrow{BF}$; **c.** $\overrightarrow{EC}$; **d.** $\overrightarrow{JK}$.

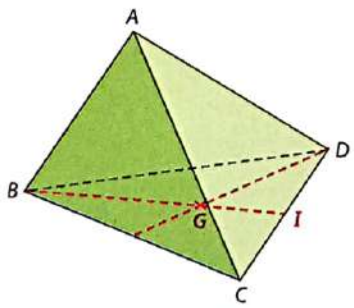
23 *ABCDEFGH* désigne le cube ci-dessous.



Démontrer les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{0}$;
b. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}$;
c. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$;
b. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EF}$.

24 *ABCD* désigne le tétraèdre ci-dessous. I est le milieu de $[CD]$ et G est le centre de gravité du triangle BCD.



a. Exprimer la somme vectorielle $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$ en fonction de $\overrightarrow{GI}$.
b. En déduire l'expression de $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GI}$.
c. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Aide

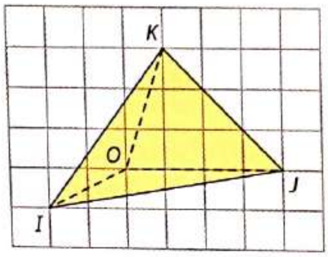
G est le centre de gravité d'un triangle ABC si, et seulement si, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

25 A, B, C et D désignent quatre points de l'espace.
a. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.
b. Démontrer l'équivalence :
ABCD est un parallélogramme
$\Leftrightarrow$ Pour tout point M de l'espace $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

26 A, B, C et D désignent quatre points non coplanaires de l'espace. I, J et G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[IJ]$.
M est un point quelconque.
a. Exprimer $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ puis $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MJ}$.
b. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

27 **a.** Reproduire le tétraèdre *OIJK* de la figure ci-dessous et construire les points A, B, C et S définis par :



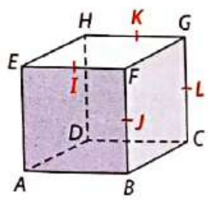
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$;
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OI}$;
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$
et $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}$.

b. Montrer que *OICJ*, *OJAK*, *OKBI*, *IBSC*, *JCSA* et *KASB* sont des parallélogrammes.
c. Quelle configuration de l'espace forment les huit points ?

Vecteurs colinéaires, coplanaires

Réponses rapides

Pour les exercices **28** à **31**, *ABCDEFGH* désigne le cube ci-contre.
I, J, K, et L sont les milieux des arêtes $[EF]$, $[BF]$, $[HG]$ et $[CG]$.



28 Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
- $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{HC}$;
- $\overrightarrow{LH}$ et $\overrightarrow{IJ}$;
- $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$;
- $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{LH}$.

29 Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?
- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{DG}$;
- $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IF}$;
- $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IB}$;
- $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CI}$.

30 Donner un vecteur coplanaire avec les vecteurs :
- $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GL}$;
- $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{KL}$;
- $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{HD}$.

31 Nommer la droite ou le plan défini par :
- $(E\,;\overrightarrow{BC})$;
- $(H\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$;
- $(F\,;\overrightarrow{DC})$;
- $(L\,;\overrightarrow{IK})$;
- $(K\,;\overrightarrow{EB},\overrightarrow{IL})$;
- $(A\,;\overrightarrow{EG},\overrightarrow{CL})$.

32 A, B et C désignent trois points de l'espace.
On donne : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

33 A, B, C, D et E désignent cinq points de l'espace tels que :

$$2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}.$$

Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

34 $ABCD$ désigne un tétraèdre.
I et J sont les milieux des arêtes $[AB]$ et $[AC]$.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont définis par :

$$\vec{i}=\overrightarrow{IJ},\quad \vec{j}=\overrightarrow{BD}\quad \text{et}\quad \vec{k}=\overrightarrow{AD}.$$

a. Déterminer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ un vecteur directeur des droites suivantes :
- (CB) ; • (AB) ; • (DC) ; • (AC).

b. Déterminer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ un couple de vecteurs directeurs des plans suivants :
- (ABC) ; • (BCD) ; • (ABD) ; • (ADC).

35 $ABCD$ désigne un tétraèdre.
Les points I, J, K, et L sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$ et $[CD]$.
a. Faire une figure à main levée.
b. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont-ils colinéaires ?
c. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont-ils coplanaires ?
d. Les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KA}$ sont-ils coplanaires ?

36 $ABCDEFGH$ désigne un cube.
On note $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$.
a. Représenter les vecteurs :

$$\vec{i}+\vec{k},\quad \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\quad \text{et}\quad \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}.$$

b. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?
Justifier.
c. Les vecteurs définis en **a.** sont-ils coplanaires ?
Justifier.
d. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?
Justifier.

37 $SABC$ désigne un tétraèdre et p est un nombre réel $\neq 0$.
1. E est le point défini par :

$$\overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}.$$

a. Que peut-on dire des points S, B, C et E ?
b. Démontrer que les points B, E et C sont alignés.
2. F est le point défini par :

$$\overrightarrow{SF}=\frac{p-1}{p}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{p}\overrightarrow{SC}.$$

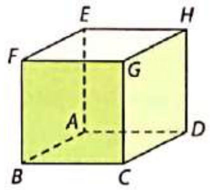
a. Que peut-on dire des points S, B, C et F ?
b. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, placer les points S, A, B et C puis construire le point F à l'aide d'un paramètre. Conjecturer la position des points B, F et C.
c. Démontrer cette conjecture.

Aide
Sur le logiciel GeoGebra, pour créer un paramètre, utiliser l'icône a=2.

Repérage

Réponses rapides

38 $ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous.



Lire dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées :
- du point C ;
- du point G ;
- du vecteur $\overrightarrow{AH}$;
- du vecteur $\overrightarrow{DG}$.

39 Dans le repère de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne :

$$A(2\,;-1\,;1),\quad B(-1\,;1\,;3)\quad \text{et}\quad C(3{,}5\,;-2\,;0).$$

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. Que peut-on en déduire ?

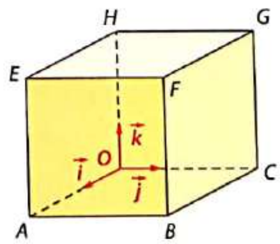
40 Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne :

$$\vec{u}(-2\,;1\,;0),\quad \vec{v}(2\,;0\,;-1)\quad \text{et}\quad \vec{w}(0\,;1\,;-2).$$

Calculer les coordonnées des vecteurs :
- $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$;
- $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$;
- $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$;
- $\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{4}\vec{v}+\vec{w}$.

41 Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne $A(-1\,;2\,;-3)$, $B(0\,;2\,;-1)$ et $C(-1\,;1\,;0)$.
a. Placer les points A, B et C dans un tel repère.
b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
c. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
d. Calculer les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

42 $ABCOEFGH$ désigne le cube d'arête 4 ci-dessous.



I est le centre de la face $BCGF$, L et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{HL}=\frac{5}{8}\overrightarrow{HE},\quad \overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.\quad \vec{i}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA},\quad \vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\quad \text{et}\quad \vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}.$$

a. Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est-il orthonormé ?
b. Construire les points I, L et K puis donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
c. Quelle est la nature du triangle IKL ? Justifier.

43 Démontrer que, dans un repère, les points $A(2\,;1\,;3)$, $B(-1\,;2\,;5)$, $C(-2\,;-3\,;1)$ et $D(-5\,;-2\,;3)$ sont les sommets d'un parallélogramme.

44 Dans un repère de l'espace, on donne :
$A(2\,;-1\,;4)$, $B(3\,;2\,;-5)$ et $C(-11\,;-40\,;121)$.
Ces trois points sont-ils alignés ?

45 Dans un repère de l'espace, on donne :
$A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;1)$ et $C(1\,;2\,;7)$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

b. Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ?

46 Dans un repère de l'espace, on donne :
$A(2\,;3\,;0)$, $B(1\,;3\,;5)$, $C(0\,;1\,;-2)$, $D(2\,;0\,;1)$ et $E(-2\,;-2\,;9)$.

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

b. Peut-on trouver deux réels x et y tels que :
$$\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\ ?$$

c. Que peut-on dire de la droite (DE) ?

47 $ABCD$ désigne un tétraèdre.
Les points I et K sont les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.

Les points J et L sont tels que $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

a. Utiliser un repère de l'espace approprié pour déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

b. Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

Barycentre

Réponses rapides

48 A, B, C, D, G désignent cinq points de l'espace tels que :
- $G = \text{bary}\,\{(A, 3), (B, -5), (C, 8)\}$;
- $D = \text{bary}\,\{(B, -5), (C, 8)\}$.

a. Reproduire et compléter :
$$G = \text{bary}\,\{(A, \ldots), (D, \ldots)\}.$$

b. Que peut-on en déduire pour le point G ?

49 Dans le repère de l'espace $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :
$A(1\,;1\,;1)$, $B(-1\,;1\,;0)$ et $C(2\,;0\,;3)$.
Calculer les coordonnées des points :

a. $G = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\}$.

b. $G' = \text{bary}\,\{(A, -2), (B, 3), (C, -2)\}$.

c. I milieu de $[AC]$.

d. H centre de gravité du triangle ABC.

Aide

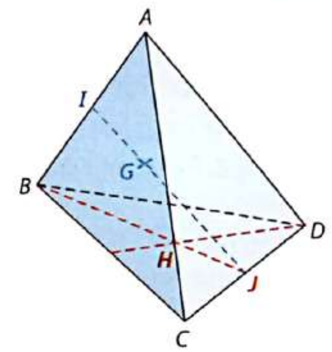
Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre des sommets du triangle.
Ainsi, $H = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.

50 $ABCDEFGH$ désigne un cube, I et J sont les milieux des arrêtes $[AB]$ et $[BC]$.
$K = \text{bary}\,\{(A, 1), (B, 2), (C, 1), (H, 1)\}$.

a. Exprimer I et J comme des barycentres de points pondérés.

b. Démontrer que les points I, J, H et K sont coplanaires.

51 $ABCD$ désigne le tétraèdre ci-dessous.



I et J sont les milieux des arêtes $[AB]$ et $[CD]$.
H est le centre de gravité du triangle BCD.
G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

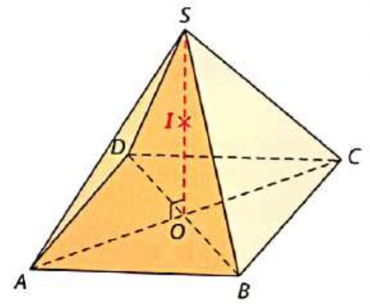
a. Écrire G comme barycentre des point A et H.

b. Écrire G comme barycentre des point I et J.

Aide

Utiliser la règle des barycentres partiels.

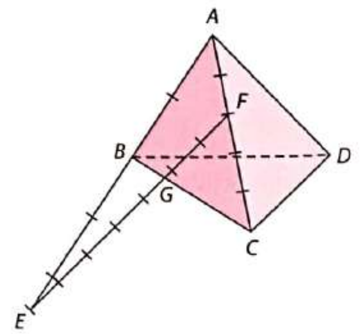
52 $SABCD$ désigne la pyramide régulière à base carrée représentée ci-dessous.
O est le centre du carré $ABCD$ et I est le milieu de $[SO]$.



a. Déterminer les nombres réels a, b, c, d et s pour que I soit barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d), (S, s)\}$.

b. Déterminer les coordonnées de I dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$.

53 $ABCD$ désigne le tétraèdre ci-dessous.



E est un point de la demi-droite $[AB)$, F est un point de l'arête $[AC]$, et G est un point de $[EF]$.

1. a. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis exprimer E comme barycentre des points A et B.

a. De même, exprimer F comme barycentre de A et C ; puis G comme barycentre de E et F.

2. M est un point de l'espace et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

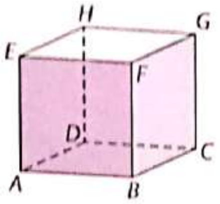
a. Démontrer que le vecteur $\vec{v}$ est indépendant de M.

b. En déduire que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Produit scalaire

Réponses rapides

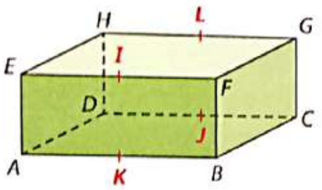
54 *ABCDEFGH* désigne le cube d'arête a ci-dessous.



Calculer les produits scalaires :
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HG}$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$.

55 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :
$\vec{u}\,(3\,;1\,;-5)$ et $\vec{v}\,(2\,;-1\,;0)$.
Calculer les produits scalaires suivants :
- $\vec{u}\cdot\vec{v}$;
- $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$;
- $-\vec{u}\cdot\frac{1}{2}\vec{v}$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$.

56 *ABCDEFGH* désigne le pavé droit ci-dessous dans lequel :
$AB=4$, $AD=2$ et $AE=1$.
I, J, K et L sont les milieux des arêtes.



a. Calculer, de deux façons différentes, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b. Calculer $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EJ}$.

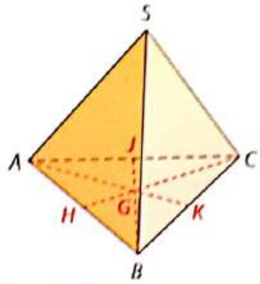
57 *ABCD* est un tétraèdre régulier d'arête 1.
I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
c. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
d. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}$.
Que peut-on en déduire ?

58 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne $A(-3\,;2\,;-2)$, $B(5\,;3\,;2)$ et $C(1\,;-5\,;-6)$.
a. Calculer AB, puis AC.
b. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
c. En déduire une valeur approchée de la mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

59 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée de l'espace.
Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$,
$$\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{k}.$$

60 Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne :
$\vec{u}\,(3\,;4\,;-5)$ et $\vec{v}\,(3\,;0\,;-3)$.
a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'angle géométrique entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

61 *SABC* désigne le tétraèdre régulier d'arête a ci-dessous. G est le centre de gravité du triangle ABC.



a. Calculer $\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{AJ}$.
b. En déduire la position relative de la droite (SG) et du plan (ABC).

Vocabulaire

Un tétraèdre régulier est constitué de quatre triangles équilatéraux.

62 Dans un repère orthonormé de l'espace :
$A(5\,;-3\,;2)$, $B(6\,;-1\,;1)$, $C(7\,;-4\,;2)$ et $D(6\,;-1\,;7)$.
Le tétraèdre *ABCD* est-il trirectangle en A ?
Si oui, calculer son volume.

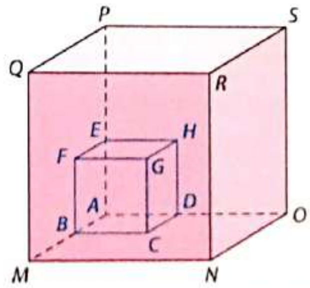
Vocabulaire

ABCD est un tétraèdre trirectangle en A lorsque les arêtes issues de A sont deux à deux orthogonales.

63 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée de l'espace.
1. On pose :
$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}),\quad \vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}),\quad \vec{w}=\vec{k}.$$
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
c. Calculer les produits scalaires suivants :
- $\vec{u}\cdot\vec{v}$;
- $\vec{v}\cdot\vec{w}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

d. Que peut-on en déduire pour la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?
2. On pose :
$$\vec{r}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}),\quad \vec{s}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}),\quad \vec{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{k}).$$
La base $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ est-elle orthonormée ? Justifier.

64 Sur la figure ci-dessous, *ABCDEFGH* est un cube d'arête a et *AMNOPQRS* est un cube d'arête b tel que $B\in[AM]$.



a. Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{BS}$ en fonction de a et b.
b. Les droites (CN) et (BS) peuvent-elles être orthogonales ? Justifier.

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

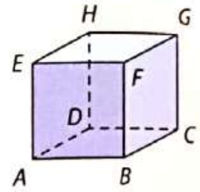
$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ désigne un repère orthonormé.
$A(1;1;0)$, $B(2;0;3)$, $C(0;-2;5)$ et $D(1;-5;5)$.

	vrai	faux
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=17$.	☐	☐
2. La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est d'environ 0,5 rad.	☐	☐
3. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont trois vecteurs coplanaires.	☐	☐
4. A, B, C et D sont quatre points coplanaires.	☐	☐
5. $G = \text{bary}\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$. $ABGC$ est un parallélogramme.	☐	☐

Avec justification

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

$ABCDEFGH$ désigne le cube d'arête a.



	vrai	faux
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.	☐	☐
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$.	☐	☐
3. $(AH)\perp(CF)$.	☐	☐
4. $(AG)\perp(DHF)$.	☐	☐
5. $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})=\dfrac{\pi}{4}$ rad.	☐	☐
6. $(AG)\perp(HB)$.	☐	☐

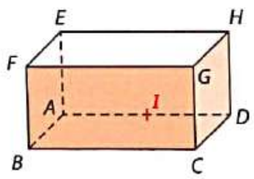
Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

$ABCDEFGH$ désigne le pavé droit ci-contre, dans lequel :
$AB=1$, $AD=2$ et $AE=1$.
I est le milieu de $[AD]$.



Dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE})$,

1. Le point F a pour coordonnées :
a. $(1;1;0)$; **b.** $(1;0;1)$; **c.** $(0;1;1)$.

2. Les droites (FI) et (IH) sont :
a. perpendiculaires ; **b.** parallèles ;
c. non coplonaires.

3. Le volume du tétraèdre $GFIH$ est :
a. $\dfrac{2}{3}$; **b.** $\dfrac{1}{6}$; **c.** $\dfrac{1}{3}$.

4. Si $\vec{n}(2;1;-1)$ alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FH}$ est égal à :
a. 1 ; **b.** 0 ; **c.** 2.

5. Le centre de ce pavé droit a pour coordonnées :
a. $(1;0{,}5;0)$; **b.** $(1;1;0)$; **c.** $(0{,}5;1;0{,}5)$.

Avec justification

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ désigne un repère orthonormé. On donne :
$A(0;1;-1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$,
$D(7;3;-1)$ et $E(-2;1;8)$.

1. Les droites (AB) et (AC) sont :
a. parallèles ; **b.** sécantes ; **c.** perpendiculaires.

2. Les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ sont :
a. $(6;4;-1)$; **b.** $(2;-1;-1)$; **c.** $(0;0;0)$.

3. Les points A, B, C et D sont :
a. alignés ; **b.** coplanaires ; **c.** non coplanaires.

4. Les points A, B, C et E sont :
a. alignés ; **b.** coplanaires ; **c.** non coplanaires.

5. I, J et K sont les milieux des segments $[AB]$, $[BE]$ et $[JC]$.
F est le point défini par $\overrightarrow{BF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont :
a. coplanaires ;
b. orthogonaux ;
c. colinéaires.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

69 Calcul vectoriel

$SABC$ désigne un tétraèdre et I est le milieu de l'arête $[AB]$.

1. a. Faire une figure.

b. Construire le point G tel que :

$$\overrightarrow{AG} = 1{,}5\overrightarrow{AC} + 0{,}5\overrightarrow{BD}.$$

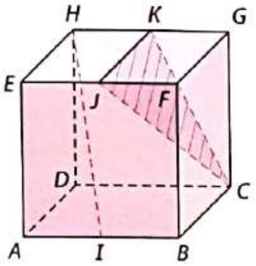
2. a. Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.
Que peut-on déduire ?

3. Construire, en justifiant, l'intersection de la droite (DG) et du plan (ABC).

70 Une droite et un plan

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous.
I, J et K sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[EF]$ et $[HG]$.



1. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{KJ}$ et de $\overrightarrow{KC}$.

2. En déduire la position relative de la droite (HI) et du plan (KJC).

71 Ensemble des barycentres de trois points

A, B et C désignent trois points non alignés et on note a, b et c les nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$.

1. M est le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $M \in (ABC)$.

c. Que vient-on de démontrer ?

2. N désigne un point du plan (ABC).

a. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une égalité vectorielle qui prouve que N est barycentre d'un système dans lequel A, B, et C sont les points pondérés.

c. Que vient-on de démontrer ?

3. Résumer les réponses aux questions **1. c.** et **2. c.** par une équivalence.

> **Info**
> L'ensemble des barycentres de trois points A, B et C caractérise le plan (ABC).

72 Colinéarité et base

$ABCD$ désigne un tétraèdre.

1. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires.

2. On note I et J les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$, K est le point tel que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CA}$ et L le point tel que $\overrightarrow{BL} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

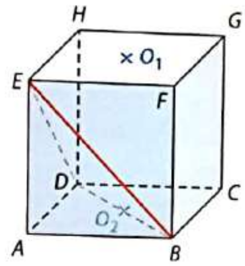
a. Exprimer $\overrightarrow{JL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de ces mêmes vecteurs.

c. Existe-t-il un nombre réel k pour lequel les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires ?

73 Avec un logiciel

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous.



O_1 et O_2 sont les centres des faces $ABCD$ et $EFGH$.
I est le centre de gravité du triangle EBD.
Pour m un nombre réel, on note :

$$G_m = \text{bary}\,\{(E, 1), (B, 1-m), (G, 2m-1), (D, 1-m)\}.$$

1. Justifier l'existence du point G_m pour tout $m \in \mathbb{R}$.

2. a. Représenter, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le cube, les points I et J et le triangle EBD.

b. Créer une variable m et créer le barycentre G_m.

c. Conjecturer le lieu décrit par G_m quand m décrit $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que $G_0 = A$.

b. En déduire que les points A, I et G_0 sont alignés.

4. Montrer que $G_1 = O_2$.

5. a. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

6. a. Vérifier que A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.

b. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $G_m \in (EI)$.

74 Repère fondamental

$ABCD$ désigne un tétraèdre.
I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[AC]$.

1. a. Faire une figure.

b. Démontrer que les segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[MN]$ ont le même milieu O.

c. En déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.

2. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, calculer les coordonnées du point O.

3. a. Exprimer les vecteurs ci-dessous en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:

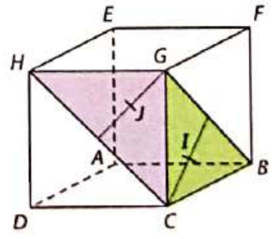
- $\overrightarrow{OI}$
- $\overrightarrow{OK}$;
- $\overrightarrow{OM}$.

b. Montrer que $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM})$ est un repère de l'espace.

c. Calculer les coordonnées des sommets du tétraèdre dans ce nouveau repère.

75 Analytique ou vectoriel

$ABCDEFGH$ désigne un cube d'arête 1.
I et J sont les centres de gravité des triangles GCB et GCH.



1. Dans le repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH})$:

a. Déterminer les coordonnées des points A, B, E, D, I et J.

b. Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (DG) et (FC).

2. a. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH})$.

b. Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GD}$, puis $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{FC}$.
Que peut-on en conclure ?

76 Surfaces de niveau

A et B désignent deux points de l'espace tels que $AB = 5$.

La surface de niveau k est l'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = k$ où f est une application.

f est l'application qui à tout point de l'espace M associe le nombre réel $a\,MA^2 + b\,MB^2$ où a et b sont deux nombres réels non nuls simultanément.

Partie A *Quelques exemples*

1. $a = b = 1$

a. Démontrer que :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

où I est le milieu de $[AB]$.

b. Décrire l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $MA^2 + MB^2$ est égal à :

- 44,5 ;
- 12,5 ;
- 2,5.

c. Démontrer que les surfaces de niveau de l'application :

$$f : M \mapsto MA^2 + MB^2,$$

quand elles ne sont pas vides, sont des sphères concentriques de centre I.

2. $a = 2$ et $b = 3$

a. Démontrer que :

$$2\,MA^2 + 3\,MB^2 = 5\,MG^2 + 2\,GA^2 + 3\,GB^2$$

où $G = \text{bary}\,\{(A, 2), (B, 3)\}$.

b. Décrire l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels $2\,MA^2 + 3\,MB^2$ est égal à :

- 75 ;
- 30 ;
- 10.

Partie B *Cas général*

1. $a + b \neq 0$

a. Démontrer que :

$$a\,MA^2 + b\,MB^2 = (a + b)\,MG^2 + a\,GA^2 + b\,GB^2$$

où $G = \text{bary}\,\{(A, a), (B, b)\}$.

b. Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble $(\mathcal{M}_k)$ des points de l'espace M tels que $a\,MA^2 + b\,MB^2 = k$.

2. $a + b = 0$

a. Démontrer l'équivalence :

$$a\,MA^2 + b\,MB^2 = k \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{a}.$$

b. Démontrer que :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

où I est le milieu de $[AB]$.

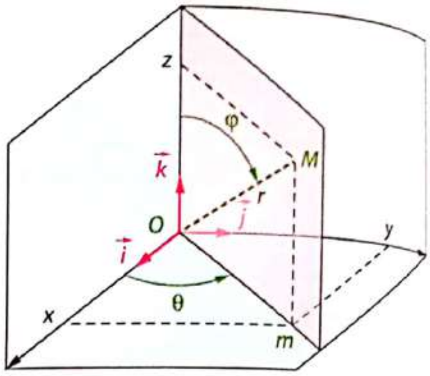
c. Montrer que l'ensemble $(\mathcal{M}_k)$ des points de l'espace M tels que $a\,MA^2 - b\,MB^2 = k$ est un plan perpendiculaire à (AB).

77 Coordonnées sphériques

Si les coordonnées cartésiennes dans un repère sont souvent utilisées, il est parfois plus pratique d'étudier la position d'objets à partir de leurs coordonnées sphériques.

Illustration

m est le projeté orthogonal du point M sur (Oxy).



Un point M peut donc être repéré par ses coordonnées :

- $(x\,;y\,;z)$ dans un repère cartésien ;
- $(r\,;\theta\,;\varphi)$ dans un repère sphérique.

Partie A *Liens entre ses deux types de coordonnées*

M désigne un point quelconque de l'espace différent de l'origine O.

1. a. Montrer que si $M\,(x\,;y\,;z)$, alors :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{z}{r} \quad \text{avec } r = OM.$$

b. Montrer que :

$$\text{si } M\,(x\,;y\,;z), \text{ alors : } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{r}\right) \end{cases}$$

où $\tan^{-1}$ et $\cos^{-1}$ sont les fonctions utilisées à la calculatrice pour trouver la mesure d'un angle dont on connaît la tangente ou le cosinus.

2. Montrer, réciproquement, que :

$$\text{si } M\,(r\,;\theta\,;\varphi), \text{ alors } \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\,. \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Partie B *En navigation : le sextant*

On se repère sur le globe terrestre à l'aide de cet instrument de navigation qui permet de donner les coordonnées sphériques du bateau. La Terre est assimilée à une boule de rayon 6 400 km.

1. Quelle est la valeur de r, arrondie au millier de km ?

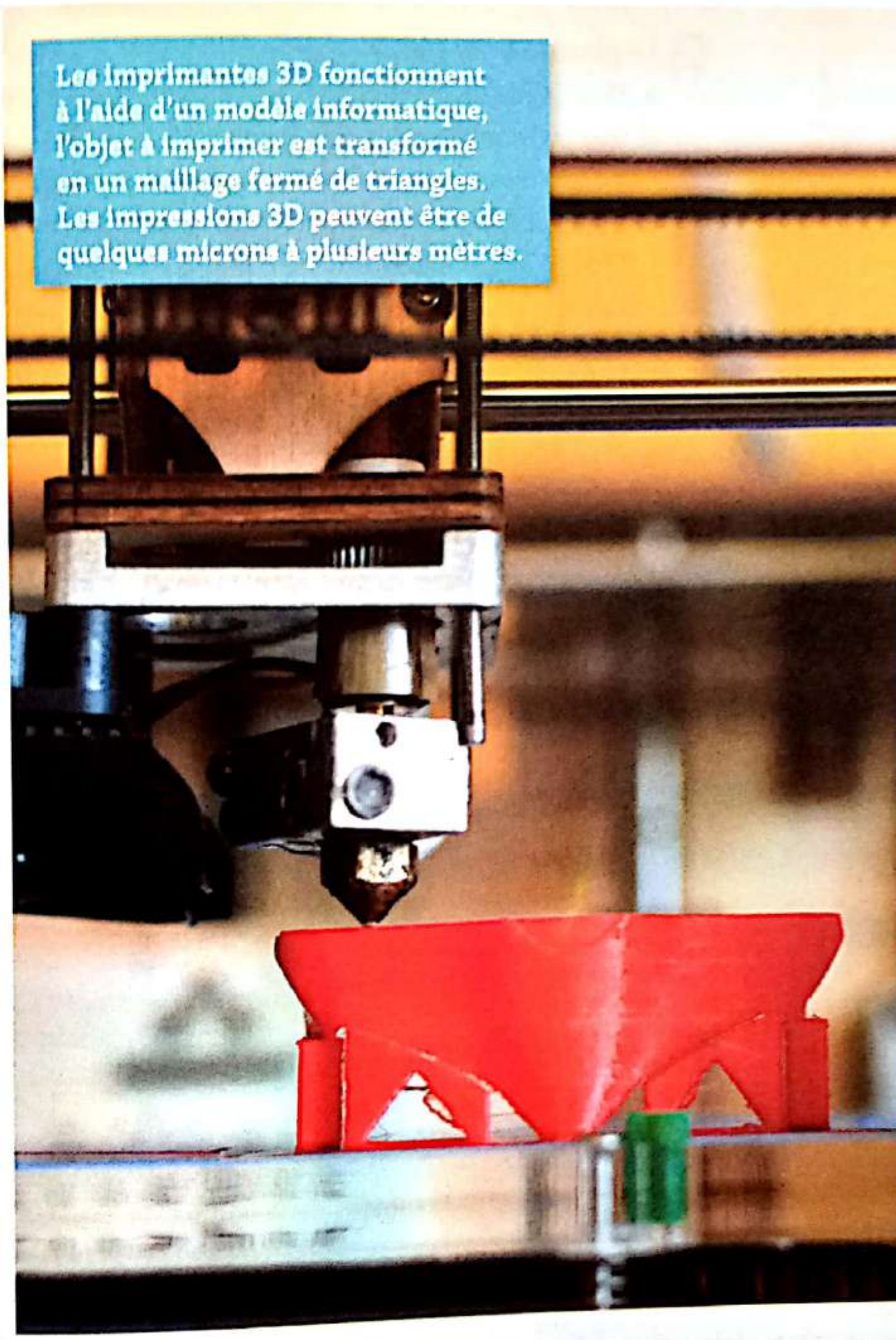
2. Le plan (xOz) est le plan contenant le méridien de Greenwich. Le plan (xOy) est le plan correspondant à l'équateur. Quelles notions de géographie correspondent à θ et φ.

3. Voici les coordonnées sphériques de la ville de Conakry :

$$(6\,400\,;9°\,;13°).$$

Calculer les coordonnées cartésiennes de cette ville.

7 Géométrie analytique de l'espace



Les imprimantes 3D fonctionnent à l'aide d'un modèle informatique, l'objet à imprimer est transformé en un maillage fermé de triangles. Les impressions 3D peuvent être de quelques microns à plusieurs mètres.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) mathématicien, mécanicien et astronome italien, établit autour des années 1770 les équations de la droite et du plan et inaugure l'utilisation systématique de trois axes de coordonnées.

Les objectifs du chapitre

- Utiliser un repère de l'espace.
- Déterminer des représentations paramétriques de droites et de plans.
- Déterminer des équations cartésiennes de plans et de sphères.
- Déterminer la position relative de droites et de plans.
- Déterminer la distance d'un point à un plan.

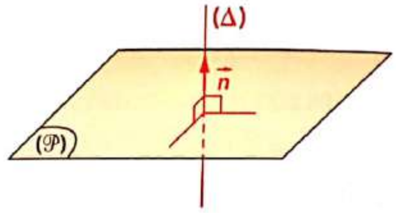
7 Cours

1 Équation cartésienne

a D'un plan

Définition

Le vecteur non nul, $\vec{n}$, est un **vecteur normal** à un plan $(\mathcal{P})$ si sa direction est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.



Remarque

Tout vecteur, non nul, colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$.
Ainsi, un plan possède une infinité de vecteurs normaux.

Propriété

Si un vecteur non nul $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non coplanaires d'un plan $(\mathcal{P})$ alors $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan $(\mathcal{P})$.

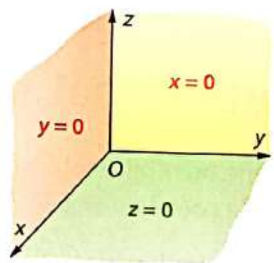
Propriété Définition

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé de l'espace,

- un plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ admet **une équation cartésienne** de la forme :
$$ax+by+cz+d=0 \text{ où } d\in\mathbb{R}.$$
- L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c trois nombres réels non tous nuls et d'un nombre réel, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$.

Remarques

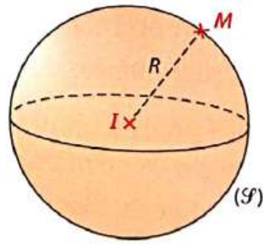
- Il existe une infinité d'équations cartésiennes d'un plan.
- Pour trouver une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'exprimer, pour $M(x\,;y\,;z)$ dans ce plan, l'égalité $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ à l'aide des coordonnées.
- Les équations $z=0$, $y=0$ et $x=0$ sont celles des plans de coordonnées (xOy), (xOz) et (yOz).



b D'une sphère

Définition

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé de l'espace.
La **sphère** $(\mathcal{S})$ de centre $I(a\,;b\,;c)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $IM=R$.



Propriété Définition

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé de l'espace,

- une sphère $(\mathcal{S})$ de centre $I(a\,;b\,;c)$ et de rayon $R>0$ admet **une équation cartésienne** de la forme :
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$
- L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ avec $R>0$ est la sphère de centre $I(a\,;b\,;c)$ et de rayon R.

1 Déterminer une équation cartésienne de plan (1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
($\mathcal{P}$) désigne le plan qui passe par le point $A(2\,;1\,;0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de ($\mathcal{P}$).

Solution commentée

1. Dans un repère orthonormé,
$$M(x\,;y\,;z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0.$$

2. $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y-1\,;z-0)$ et $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$
donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(x-2)\times 2+(y-1)\times(-1)+z\times 1$.
Ainsi $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2x-4-y+1+z=0$
$\Leftrightarrow 2x-y+z-3=0.$
Finalement, ($\mathcal{P}$) a pour équation cartésienne $2x-y+z-3=0$.

Méthode

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal :

1. Exprimer vectoriellement l'appartenance d'un point M à ce plan.
2. Exprimer le produit scalaire à l'aide des coordonnées des vecteurs.

2 Déterminer une équation cartésienne de plan (2)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(2\,;0\,;1)$ et $C(1\,;-3\,;-1)$.
1. **Justifier que A, B et C déterminent un plan.**
2. **Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).**

Solution commentée

1. $\overrightarrow{AC}(2\,;-4\,;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(3\,;-1\,;-1)$.
On a $y_{\overrightarrow{AB}}\times 4=y_{\overrightarrow{AC}}$, mais $x_{\overrightarrow{AB}}\times 4\neq x_{\overrightarrow{AC}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes ; les points A, B et C ne sont pas alignées et forment un plan.

2. On note $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ un vecteur normal du plan (ABC).
Donc $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}3a-b-c=0\\ 2a-4b-3c=0\end{cases}$.
Ce système n'a que deux équations pour trois inconnues donc on choisit, par exmple, $c=10$ et on obtient $\begin{cases}3a-b=10\\ 2a-4b=30\end{cases}$
qui a pour solution $a=1$ et $b=-7$
Ainsi $\vec{n}(1\,;-7\,;10)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
• Une équation cartésienne du plan (ABC) est du type $x-7y+10z+d=0$.
• De plus $B \in (ABC)$ donc $2-7\times 0+10+1+d=0$ soit $d=-12$.
Finalement, (ABC) a pour équation cartésienne : $x-7y+10z-12=0$.

Méthode

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.
2. Rechercher les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC).
3. Reprendre le Savoir-faire précédent ou procéder de la manière indiquée ici.
   • Donner l'équation type du plan $ax+by+cz+d=0$ dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.
   • Déterminer d en utilisant les coordonnées d'un point du plan.

S'exercer

$(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ désigne un repère orthonormé de l'espace.

3 a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(-2\,;0\,;0)$; $B(0\,;3\,;0)$ et $C(0\,;0\,;4)$.
b. Représenter ce plan dans un repère.

4 ($\mathcal{P}$) désigne le plan de repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ où :
$A(-1\,;3\,;-5)$, $\vec{u}(2\,;-5\,;2)$ et $\vec{v}(-3\,;5\,;2)$.
a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b. En déduire une équation de ($\mathcal{P}$).

2 Représentations paramétriques

a D'une droite

Définition

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, $(\mathscr{D})$ est une droite passant par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est appelé **représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$**.

Remarques

- Une représentation paramétrique d'une droite est parfois appelée système d'équations paramétriques.
- Cette représentation paramétrique est obtenue à partir de la traduction analytique de :

les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires	$\Leftrightarrow$	il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

- Un point N appartient à $(\mathscr{D})$ si, et seulement si, il existe un nombre réel t tel que les coordonnées de N vérifient la représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$.

b D'un plan

Définition

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, $(\mathscr{P})$ est un plan passant par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteurs directeurs :
$\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(a' ; b' ; c')$.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$,

est appelé **représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$**.

Remarques

- Une représentation paramétrique d'un plan est parfois appelé système d'équations paramétriques.
- Cette représentation paramétrique est obtenue à partir de la traduction analytique de :

les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires	$\Leftrightarrow$	il existe un couple de nombres réels t et t' tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$.

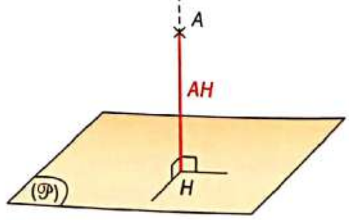
- Un point N appartient à $(\mathscr{P})$ si, et seulement si, il existe un couple de nombres réels t et t' tel que les coordonnées de N vérifient la représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

3 Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition

La **distance du point A au plan $(\mathscr{P})$** est la distance AH où H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$.



Propriété

$(\mathscr{P})$ est le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace,

la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$ se note $d(A ; (\mathscr{P}))$ et est égale à $\dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemple

$A(4 ; 1 ; -5)$ et $(\mathscr{P}) : 2x - 3y + 6z + 4 = 0$ donc $d(A ; (\mathscr{P})) = \dfrac{|2 \times 4 - 3 \times 1 + 6 \times (-5) + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}}$

soit $d(A ; (\mathscr{P})) = \dfrac{|-21|}{\sqrt{49}} = 3$.

5 Utiliser une représentation paramétrique de droite

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;2\,;3)$ et $B(1\,;-1\,;1)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Le point $C(3\,;0\,;2)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Solution commentée

a. 1. $\overrightarrow{AB}(1-(-1)\,;-1-2\,;1-3)$ soit $\overrightarrow{AB}(2\,;-3\,;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

2. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \\ z=3-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. 1. Si $C \in (AB)$, alors il existe un nombre réel t tel que, $(S)\ \begin{cases} 3=-1+2t \\ 0=2-3t \\ 2=3-2t \end{cases}$.

2. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4=2t \\ 3t=2 \\ 2t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Ce qui est impossible.

Un tel t n'existe pas donc $C \notin (AB)$.

Méthode

a. 1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de (AB).

2. $A \in (AB)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) donc, pour donner une représentation paramétrique de la droite (AB), il suffit d'utiliser la définition du paragraphe **2. a.** du cours.

b. 1. Écrire le système en supposant que $C \in (AB)$.

2. Vérifier s'il existe un nombre réel t vérifiant ce système.
Si c'est le cas, alors $C \in (AB)$; sinon, $C \notin (AB)$.

6 Utiliser la distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-6\,;2\,;1)$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $x+2y+2z-5=0$.

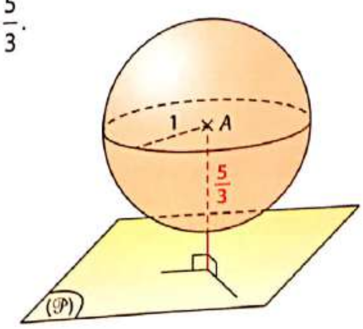
a. Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

b. Montrer que la sphère de centre A et de rayon 1 ne coupe pas le plan $(\mathcal{P})$.

Solution commentée

a. $d(A\,;(\mathcal{P})) = \dfrac{|-6+2\times 2+2\times 1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{5}{3}$.

b. Comme $d(A\,;(\mathcal{P})) > 1$, le plan $(\mathcal{P})$ ne coupe pas la sphère de centre A et de rayon 1.



Méthode

a. Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ en utilisant la propriété du paragraphe **3.**

b. Si cette distance est inférieure strictement au rayon de la sphère alors le plan coupe la sphère.
Si cette distance est égale au rayon, le plan est tangent à la sphère.
Sinon le plan $(\mathcal{P})$ ne coupe pas la sphère.

S'exercer

7 Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
$A(1\,;-3\,;2)$, $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=\vec{j}+2\vec{k}$.
Déterminer une représentation paramétrique :
a. de la droite de repère $(A\,;\vec{u})$;
b. du plan de repère $(A\,;\vec{v},\vec{w})$.

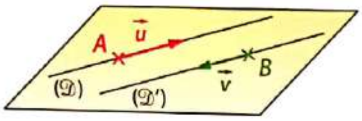
8 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
$A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$ et $C(0\,;0\,;1)$.
a. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :
$3x+2y+6z-6=0$.
b. Calculer la hauteur issue de O du tétraèdre $OABC$.

4 Positions relatives

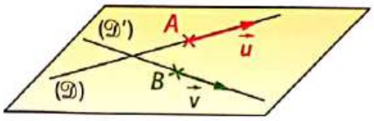
a De deux droites

$(\mathscr{D})$ (resp. $(\mathscr{D}')$) désigne une droite de l'espace définie par le point A (resp. B) et par le vecteur directeur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).

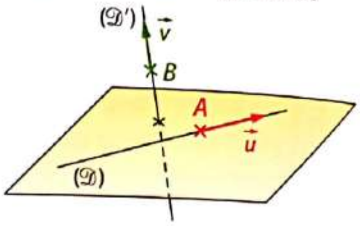
$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires



$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
et $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires.



$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
et $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires

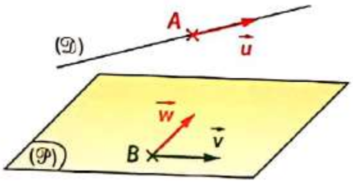


Si, de plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ orthogonales.

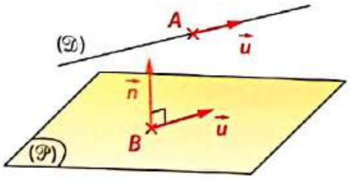
b D'une droite et d'un plan

$(\mathscr{D})$ désigne une droite de l'espace de repère $(A\,;\vec{u})$ et $(\mathscr{P})$ un plan de repère $(B\,;\vec{u}, \vec{v})$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

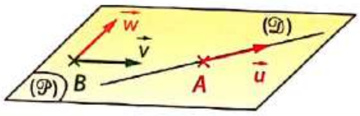
$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont strictement parallèles
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires
et $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires



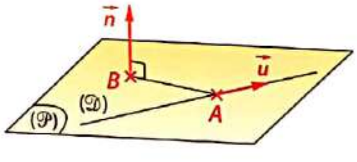
ou
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$



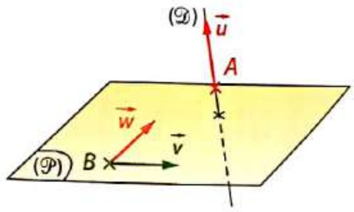
$(\mathscr{D})$ est incluse dans $(\mathscr{P})$
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires
et $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires.



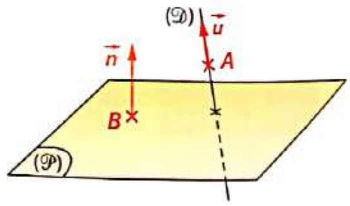
ou
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$



$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires.



ou
$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

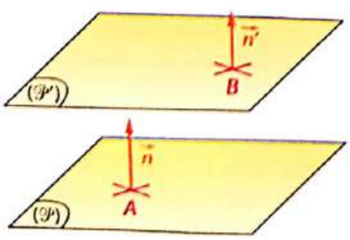


Si, de plus, $\vec{n}$ et $\vec{u}$ colinéaires alors $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

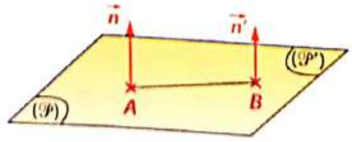
c De deux plans

$(\mathscr{P})$ (resp. $(\mathscr{P}')$) désigne un plan de l'espace défini par le point A (resp. A') et par le vecteur normal $\vec{n}$ (resp. $\vec{n'}$).

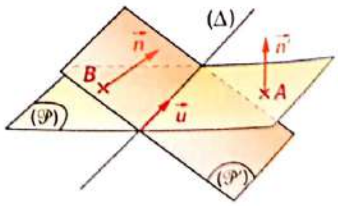
$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont strictement parallèles
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \neq 0$



$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont confondues
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires
et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n'} = 0$



$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants en (Δ)
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires



Si, de plus, $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires.

9 Déterminer la position relative de deux droites

Dans un repère orthonormé, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ désignent les droites de représentations paramétriques :

$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ $\quad (\mathcal{D}') : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\mathcal{D}'') : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$

Montrer que $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}'')$, puis que $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$.

Solution commentée

- 1. D'après la représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$, on déduit que $\vec{u}\,(0\,;1\,;-2)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.
  De même, $\vec{v}\,(0\,;-2\,;4)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D}'')$.
  2. On remarque que $-2\vec{u} = \vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{D}'')$.
- 1. $\vec{u}\,(0\,;1\,;-2)$ vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $\vec{w}\,(2\,;-4\,;-2)$ vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$.
  2. $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0\times2 + 1\times(-4) + (-2)\times(-2) = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ; donc $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$.

Méthode

1. Déterminer un vecteur directeur de chacune des droites.
2. Montrer qu'ils sont ;
   - colinéaires, en exprimant l'un en fonction de l'autre.
   - orthogonaux, en calculant le produit scalaire de ces deux vecteurs directeurs.

10 Déterminer la position relative de deux plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
$(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$ et $(\mathcal{P}'')$ désignent les plans d'équations cartésiennes :
$(\mathcal{P}) : 2x + y + 2z - 6 = 0$; $(\mathcal{P}') : 2x - 2y - z + 3 = 0$ et $(\mathcal{P}'') : 4x + 2y + 4z - 8 = 0$.

a. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants. Sont-ils perpendiculaires ?

b. Montrer que $(\mathcal{P})$ est parallèles à $(\mathcal{P}'')$.

Solution commentée

a. 1. D'après l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$, on déduit que $\vec{n}\,(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.
De même, $\vec{n'}\,(2\,;-2\,;-1)$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P}')$.

2. On remarque que $x_{\vec{n}} = x_{\vec{n'}}$ mais que $y_{\vec{n}} \neq y_{\vec{n'}}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sécants.

3. $\vec{n'}\cdot\vec{n} = 2\times2 + 1\times(-2) + (-2)\times(-1) = 4 \neq 0$. Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas orthogonaux, donc les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ne sont pas perpendiculaires.

b. 1. $\vec{n}\,(2\,;1\,;2)$ et $\vec{n''}\,(4\,;2\,;4)$ sont des vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}'')$.

2. On remarque que $\vec{n''} = 2\vec{n}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n''}$ colinéaires donc $(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}'')$.

Méthode

1. Déterminer un vecteur normal de chacun des plans.
2. Montrer qu'ils sont :
   - non colinéaires, en montrant que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
   - colinéaires, en exprimant l'un en fonction de l'autre.
3. Utiliser les produits scalaires avec les vecteurs normaux des plans.

S'exercer

11 $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$(\mathcal{D}') : \begin{cases} x = 4t' + 6 \\ y = -t' - \dfrac{13}{3} \\ z = 3t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Montrer que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

12 $(\mathcal{P}) : x + 3y + 2z - 4 = 0$ et $(\mathcal{P}') : 3x + y - 3z + 6 = 0$.
Montrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

13 $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{P}) : 2x + y + 2z - 4 = 0$.

Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants.

Dans tous les exercices, on travaille dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Équations cartésiennes

Réponses rapides

14 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$ dont une équation cartésienne est :

a. $2x-6y+2z-7=0$;

b. $-x+3y+2z=4$;

c. $z-1=0$.

15 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1;2;3)$ et perpendiculaire à la droite (BC) où $B(4;5;6)$ et $C(-1;1;1)$.

16 Déterminer le centre et le rayon de la sphère $(\mathscr{S})$ dont une équation cartésienne est :

a. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=16$;

b. $(x+1)^2+(y+5)^2+(z-3)^2-2=0$;

c. $x^2+y^2+z^2=1$.

17 Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $I(1;-4;-1)$ et de rayon 3.

18 On donne $\vec{u}(-2;3;6)$ et $\vec{v}(1;0;5)$.

a. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

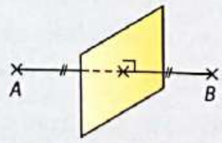
b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan de repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre du repère.

19 Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ où $A(-2;-4;3)$ et $B(1;-3;5)$.

Vocabulaire

- Le **plan médiateur** d'un segment est le plan orthogonal au segment qui passe par le milieu de ce segment.



- A et B sont deux points distincts de l'espace.
Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan formé des points équidistants de A et B.

20 Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ contenant le point $A(-2;-4;3)$ et parallèle au plan $(\mathscr{P}')$ d'équation cartésienne $2x-3y+7z-6=0$.

21 L'équation normale d'un plan $(\mathscr{P})$ est l'équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ telle que le vecteur normal défini par cette équation est de norme 1.
Déterminer une équation normale du plan $(\mathscr{P})$ qui a pour équation cartésienne $x-3y+2z+5=0$.

22 A et B désignent deux points de l'espace et I le milieu de $[AB]$.

a. Exprimer les normes des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction des longueurs MI et IA.

b. En déduire que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

c. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$ où $A(-3;2;5)$ et $B(1;0;-3)$.

23 Chacune des équations suivantes est-elle une équation cartésienne de sphère ?
Si oui, déterminer son centre et son rayon.

a. $x^2+y^2+z^2+x-3y-4z-\dfrac{5}{2}=0$;

b. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+14=0$;

c. $x^2+y^2+z^2-6x-y+z+10=0$.

Aide

$x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$; $y^2-3y=\ldots$

24 Déterminer le lieu des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant :

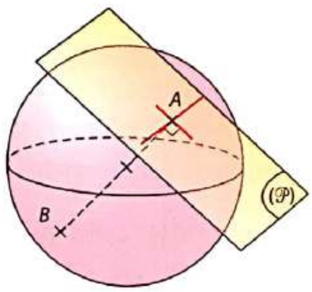
a. $2x+y=0$;

b. $x^2+y^2+z^2-8x+7y-6z=0$;

c. $9x^2=4z^2$;

d. $x^2+y^2+z^2+2x+3y+6z=k$ où k est un nombre réel.

25 $A(3;-5;1)$ et $B(1;-3;7)$.



a. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathscr{S})$ de diamètre $[AB]$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ tangent à la sphère $(\mathscr{S})$ en A.

26 $(\mathscr{P})$ un plan d'équation cartésienne est un plan tangent en $A(3;4;5)$ à la sphère $(\mathscr{S})$ de centre $I(1;2;3)$.
Déterminer le volume de cette sphère.

Aide

Le volume de la sphère $(\mathscr{S})$ de rayon R est égal à $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Représentations paramétriques

Réponses rapides

27 Donner un repère de chacune des droites suivantes :

a. $\begin{cases} x=2t \\ y=1-2t \\ z=3+4t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$;

b. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$;

c. $\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t-1 \\ z=2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$;

d. $\begin{cases} x+2=t \\ y=5t \\ z=3 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$;

28 Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chaque cas :

a. $A(1\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2\,;3\,;-1)$;

b. $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+\vec{k}$ et $B(3\,;5\,;2)$;

c. $A(3\,;-1\,;-2)$ et $B(1\,;0\,;1)$.

29 Donner une représentation paramétrique du plan (IJK) où $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$ et $K(0\,;0\,;1)$.

30 Calculer la distance du point $B(3\,;1\,;-3)$ au plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $x+2y+2z=0$.

31 On donne $A(-1\,;2\,;1)$ et $\vec{u}\,(1\,;-1\,;-2)$.

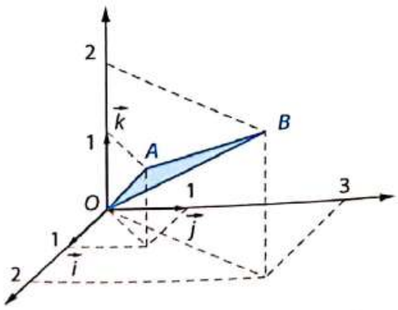
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b. Montrer que (d) passe par le point $B(0\,;1\,;-1)$.

c. Montrer que la droite (d) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2s \\ y=1-2s \\ z=-1-4s \end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R}.$$

32



a. Déterminer une représentation paramétrique des droites (OA), (OB) et (AB).

b. Déterminer une représentation paramétrique du plan (OAB).

33 $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ désignent deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x+2y+2z-4=0 \quad \text{et} \quad x-y+2z-1=0.$$

a. Déterminer un vecteur normal de chacun des plans. On les note respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

b. Vérifier que ces vecteurs sont non colinéaires.

c. Vérifier que $A(0\,;1\,;1)$ appartient à ces deux plans.

d. Vérifier que $\vec{u}\,(2\,;0\,;-1)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

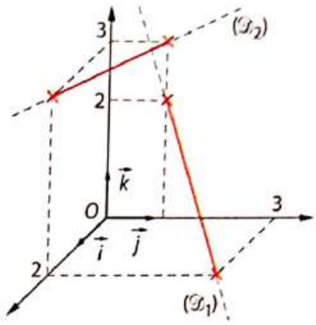
e. En déduire que l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x+2y+2z-4=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

est la droite de repère $(A\,;\vec{u})$.

f. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

34 Déterminer une représentation paramétrique des droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ représentées ci-contre.



35 Le système $\begin{cases} x=t+t' \\ y=1-t \\ z=1-t' \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique d'un plan $(\mathscr{P})$.

a. Déterminer une base de deux vecteurs non colinéaires de $(\mathscr{P})$.

b. Déterminer les coordonnées d'un point de $(\mathscr{P})$.

c. Donner un autre repère de ce plan $(\mathscr{P})$ et en déduire une autre représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

36 $(\mathscr{P})$ est le plan d'équation cartésienne $2x+y+2z-4=0$.

1. On pose $x=t$ et $z=t'$.

a. Exprimer y en fonction de t et t'.

b. Donner une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$.

2. a. Déterminer les coordonnées d'un point de $(\mathscr{P})$ à l'aide de son équation cartésienne.

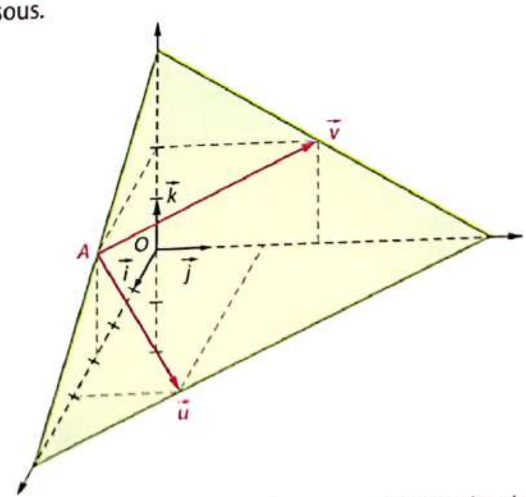
b. Donner un vecteur normal de $(\mathscr{P})$; en déduire un couple de vecteurs non colinéaires et orthogonaux à ce vecteur normal.

c. En déduire une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

3. a. Déterminer les coordonnées de trois points de $(\mathscr{P})$ à l'aide de son équation cartésienne.

b. En déduire une autre représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$.

37 a. Lire des coordonnées de A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la figure ci-dessous.



b. En déduire une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ de repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ dont les paramètres seront notés t et t'.

c. Exprimer t et t' en fonction de y et z.

d. En déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$.

Position relative

Réponses rapides

38 $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent les droites de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = t+3 \\ y = -t+2 \\ z = 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \; ; \; (\mathscr{D}') : \begin{cases} x = -2\lambda+1 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas parallèles.
b. Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont-elles sécantes ?

39 $(\mathscr{D})$ désigne la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -2+t \\ z = 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } (\mathscr{P}) : 2x - y - 3z + 10 = 0.$$

a. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ ne sont pas parallèles.
b. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants en $I(-1\,;-1\,;3)$.

40 $(\mathscr{P}) : x - 3y + 2z - 5 = 0$ et $(\mathscr{P}') : 2x + y + 7z - 1 = 0$.
a. Démontrer que ces deux plans sont sécants.
b. Sont-ils perpendiculaires ?

41 $(\mathscr{D})$ désigne la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t+2 \\ y = 2t \\ z = 3t-1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $3x - y + 2z - 1 = 0$.
a. Étudier la position relative de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan $(\mathscr{P})$.
b. Écrire un système qui traduit l'appartenance d'un point $M(x\,;y\,;z)$ à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{P})$.
c. Résoudre le système et donner les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$.

42 $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ désignent deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$4x - 2y + 2z - 6 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - z = 0.$$

a. Étudier la position relative de ces deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
b. Écrire un système qui traduit l'appartenance d'un point $M(x\,;y\,;z)$ à ces deux plans.
c. Résoudre ce système, en fixant une inconnue qui sera le paramètre.
d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ) d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

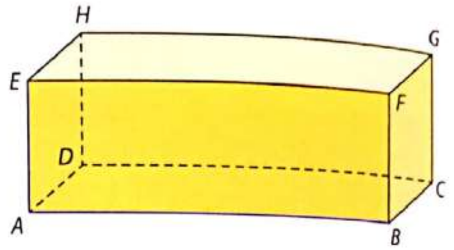
43 $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = 4t \\ z = -3t+5 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \begin{cases} x = \lambda+6 \\ y = 3\lambda-1 \\ z = -2\lambda+2 \end{cases} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier la position relative de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
b. Écrire un système d'inconnue t et λ qui traduit l'appartenance d'un point $M(x\,;y\,;z)$ aux deux droites.
c. Résoudre ce système.
d. En déduire les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

44 $ABCDEFGH$ désigne le pavé droit ci-dessous pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.



I, J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\,,\quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

a. Représenter, en perspective, $ABCDEFGH$ et placer I, J et K.
b. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé.
c. Dans ce repère, vérifier que $\vec{n}(2\,;2\,;-9)$ est normal au plan (IJG).
d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
e. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG).

45 On donne : $A(0\,;0\,;2)$, $B(0\,;4\,;0)$ et $C(2\,;0\,;0)$.
1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x + y + 2z = 4.$$

b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).
b. (Δ) est la droite d'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ). Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?
3. a. (Δ') est la médiane issue de B du triangle ABC. Montrer qu'une représentation paramétrique de (Δ') est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4-4t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
4. H est le point d'intersection de (Δ) et (Δ').
Déterminer les coordonnées de H.
Que représente ce point H pour le triangle ABC ?

46 $(O\,;\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ un repère orthonormé de l'espace.
a. G est l'isobarycentre de A, B et C.
Donner les coordonnées de G et montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).
b. On donne : $A'(2\,;0\,;0)$, $B'(0\,;2\,;0)$ et $C'(0\,;0\,;3)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}(3\,;3\,;2)$ est orthogonal au plan $(A'B'C')$ puis déterminer une équation du plan $(A'B'C')$.
c. Donner une représentation paramétrique de la droite (AC). Déterminer les coordonnées du point K commun à la droite (BC) et au plan $(A'B'C')$.
d. Vérifier que $L(0\,;4\,;-3)$ est un point commun à la droite (BC) et au plan $(A'B'C')$; puis montrer que les droites (AB), $(A'B')$ et (KL) sont parallèles.

Se tester

Dans tous les exercices, on travaille dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

Vrai-faux

Top chrono *(sans justification)*

47 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. $\vec{n}(1\,;2\,;3)$ est un vecteur normal du plan d'équation cartésienne $2x+4y+6z-3=0$.	☐	☐
2. La droite parallèle à (Oz) qui passe par le point $A(-2\,;0\,;1)$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-2\\y=t\\z=1+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.	☐	☐
3. La distance du point $A(2\,;1\,;-3)$ au plan $(\mathcal{P}): 2x-y+3z-2=0$ est $\frac{4}{7}$.	☐	☐
4. Les plans $(\mathcal{P}): x+2y-5z+7=0$ et $(\mathcal{P}'): x+2y+z-3=0$ sont perpendiculaires.	☐	☐
5. L'intersection du plan $(\mathcal{P})$: $5x+y-z+3=0$ et de la droite $(\mathcal{D})$: $\begin{cases}x=-5+2t\\y=-1-2t\\z=-2+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ est vide.	☐	☐

Avec justification

48 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. On donne $A(1\,;2\,;-1)$, $B(0\,;1\,;1)$ et $C(1\,;0\,;0)$. Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x+y-z-1=0$.	☐	☐
2. Une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;-2\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1\,;1\,;-1)$ est $x-2y+1=0$.	☐	☐
3. Le point $M(-1\,;3\,;2)$ appartient à la droite $(\mathcal{D})$ $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.	☐	☐
4. $x^2+y^2+z^2+x+y+z+1=0$ est une sphère de l'espace.	☐	☐
5. La sphère de centre $I(1\,;0\,;-2)$ et de rayon $\sqrt{5}$ a pour équation $x^2+y^2+z^2-2x+4z=0$.	☐	☐
6. Le projeté orthogonal du point $B(1\,;6\,;0)$ sur le plan d'équation cartésienne $-x+3y-z+5=0$ est $B'(3\,;1\,;5)$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

49 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Un vecteur normal au plan d'équation $2x+4z-5=0$ a pour coordonnées :
   a. $(2\,;4\,;-5)$; **b.** $(2\,;4\,;0)$;
   c. $(1\,;0\,;2)$.

2. $A(1\,;0\,;1)$, $B(3\,;-1\,;-1)$ et $C(1\,;-1\,;0)$.
   Le plan (ABC) a pour équation cartésienne :
   a. $x-2y+2z-3=0$;
   b. $3x-y=3$;
   c. $2x+4y+4z=6$.

3. Le plan d'équation $2x-3z+1=0$ est parallèle au plan d'équation :
   a. $4x-6y+1=0$;
   b. $4x-6z=-3$;
   c. $6x+9z=10$.

Avec justification

50 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions. On donne $A(1\,;-2\,;0)$ et $(\mathcal{P})$ désigne le plan d'équation cartésienne $x+y-3z=-4$.

1. La droite $(\mathcal{D})$ passant par A et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$ a pour représentation paramétrique :
   a. $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$. **b.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-2-t\\z=3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.
   c. $\begin{cases}x=t\\y=2+t\\z=3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. La distance de A à $(\mathcal{P})$ est égale à :
   a. $\frac{\sqrt{11}}{3}$; **b.** $\frac{3}{11}$; **c.** $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

3. La sphère de centre A et de rayon 3 a pour équation cartésienne :
   a. $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=3$;
   b. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=3$;
   c. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Dans tous les exercices, on travaille dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

51 Droites coplanaires

$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ désignent les droites de représentation paramétriques :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 5-2t \\ z = -3+3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} ;$$

$$(\mathscr{D}') : \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -6t+11 \\ z = t-4 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer qu'il existe un plan $(\mathscr{P})$, et un seul, dont on déterminera une équation cartésienne qui contient les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

52 Droites et barycentre

On donne :

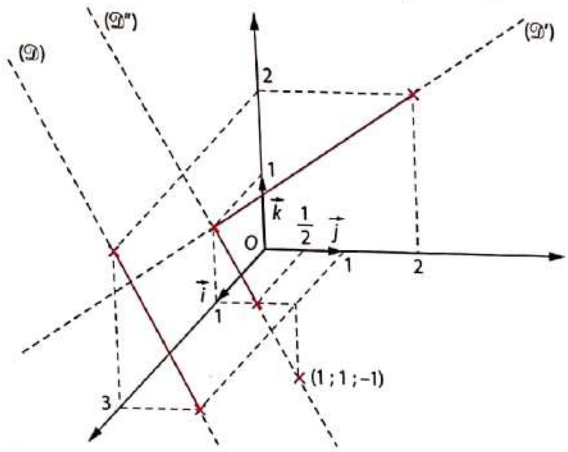
$$A(1;-1;2) \text{ et } (\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t+1 \\ z = -t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. Exprimer, en fonction de t, les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A, 1)$ et $(M, 2)$ où $M \in (\mathscr{D})$.

b. Déduire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points G lorsque M décrit la droite $(\mathscr{D})$.

53 Positions relatives de droites

a. Montrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont parallèles.



b. Montrer que les droites $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

c. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires ; puis qu'elles sont orthogonales.

54 Distance d'un point à une droite

On donne $A(1;2;2)$, $B(3;2;1)$ et $C(1;3;3)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan et déterminer une équation cartésienne de ce plan.

2. $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ désignent deux plans d'équations cartésiennes respectives $x-2y+2z-1=0$ et $x-3y+2z+2=0$.

a. Montrer que les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants.
On note (Δ) leur droite d'intersection.

b. Montrer que $C \in (\Delta)$.

c. Montrer que $\vec{u}(2;0;-1)$ est un vecteur directeur de (Δ).

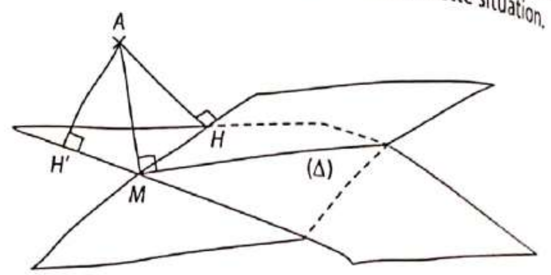
d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3. M est un point de (Δ) tel que $\overrightarrow{CM} = k\vec{u}$ où k désigne un nombre réel.

a. Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

b. En déduire la longueur AM pour le point M obtenu en 3.a.

4. Voici une représentation à main levée de cette situation.



H (respectivement (H')) désigne le point de $(\mathscr{P})$ tel que :

$d(A;(\mathscr{P})) = AH$ (respectivement $d(A;(\mathscr{P}')) = AH'$).

a. Calculer AH et AH'.

b. Justifier que les points H et H' appartiennent à la sphère de diamètre $[AM]$.

c. Calculer les coordonnées des points H et H'.

d. Les points A, H, H' et M sont-ils coplanaires ?

Vocabulaire

La longueur AM est appelée distance du point A à la droite (Δ).

55 Plans perpendiculaires et fonction

1. $(\mathscr{P})$ désigne le plan passant par le point $A(1;-2;1)$ de vecteur normal $\vec{n}(-2;1;5)$ et $(\mathscr{P}')$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-7=0$.

a. Démontrer que $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

b. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant la droite $(\mathscr{L})$ passant par $B(-1;4;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;1)$.

c. Calculer la distance du point $C(5;-2;-1)$ au plan $(\mathscr{P})$ puis au plan $(\mathscr{P}')$.

2. M est le point de coordonnées $(1+2t;3-t;t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Exprimer, en fonction de t, la longueur CM.
On note $f(t)$ cette expression.

b. Étudier les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$ et préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

56 Sphère circonscrite à un tétraèdre

On donne $A(0;0;4)$, $B(2;-2;0)$, $C(0;2;0)$ et $D(-4;0;0)$.

1. a. Placer ces quatre points dans un repère orthonormé.

b. Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre.

c. Placer les milieux I, J et K des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ et calculer leurs coordonnées.

d. Déterminer une équation cartésienne des plans $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{P}_3)$ médiateurs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

e. Démontrer que ces trois plans n'ont qu'un seul point commun Ω.

2. a. Démontrer que Ω est le centre d'une sphère qui passe par les sommets du tétraèdre.

b. Préciser le rayon de cette sphère puis trouver une équation cartésienne de cette sphère.

Rappel

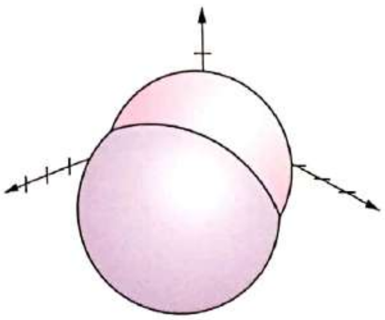
Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan formé des points équidistants de A et B. Ce plan passe par le milieu I de $[AB]$ et est orthogonal à la droite (AB).

57 Intersection de deux sphères

$(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ désignent deux sphères d'équations cartésiennes respectives :

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z=7$$
$$\text{et } x^2+y^2+z^2-8x-6y+2z=-13.$$

Elles sont représentées ci-dessous.



1. Déterminer les éléments caractéristiques de chaque sphère (centre et rayon).
Les centres seront notés Ω et Ω' et les rayons R et R'.
2. Justifier que les sphères sont sécantes.
3. M désigne un point de l'intersection entre $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$.
a. Démontrer que M appartient au plan médiateur de $[\Omega\Omega']$.
b. Démontrer que M appartient à un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon r.
c. Calculer $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.
4. a. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[\Omega\Omega']$.
b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Omega\Omega')$.

58 Plans bissecteurs

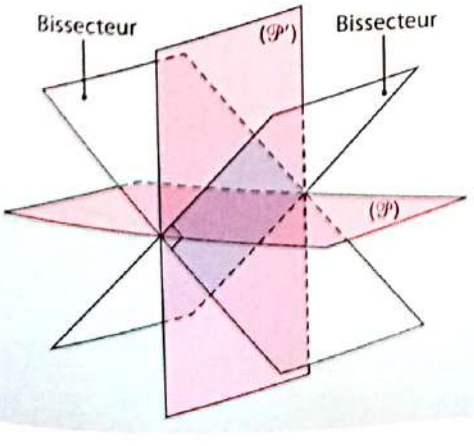
$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ désignent deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x+2y-2z-1=0 \quad \text{et} \quad 2x-y+2z+1=0.$$

a. Vérifier que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.
Sont-ils perpendiculaires ?
b. Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x\,;y\,;z)$ situés à égale distance des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
c. Démontrer que cet ensemble $(\mathcal{E})$ est la réunion de deux plans perpendiculaires.

Vocabulaire

Les plans bissecteurs de deux plans sécants sont des plans perpendiculaires entre eux.
Les points de ces plans bissecteurs sont à égale distance des deux plans sécants.



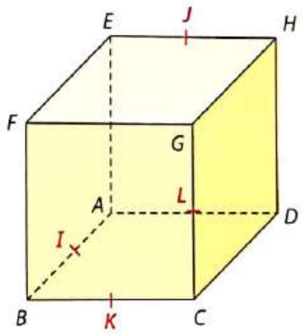
59 Ensembles de points

On donne $A(6\,;0\,;0)$, $B(0\,;6\,;0)$ et $C(0\,;0\,;4)$.
1. Représenter ces points dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
2. Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(O, 1)$, $(A, 2)$, $(B, 3)$.
Placer le point G.
3. $(\mathcal{S})$ désigne l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :
$$(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MC}=0.$$
Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{S})$.
Préciser ses éléments caractéristiques.
4. Décrire l'intersection de $(\mathcal{S})$ et du plan d'équation $x=0$.
Représenter cet ensemble.
5. $(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :
$$MO^2+2MA^2-3MB^2=24.$$
a. Démontrer que $G\in(\mathcal{P})$.
b. Démontrer que $M\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\vec{u}=0$ où $\vec{u}(2\,;-3\,;0)$.

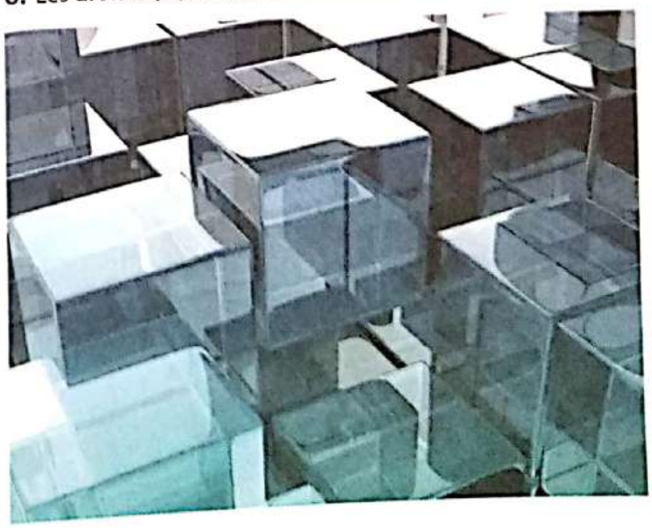
En déduire l'ensemble $(\mathcal{P})$.

60 Un tétraèdre dans un cercle

$ABCDEFGH$ désigne le cube ci-dessous.



I, J, K et L sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[EH]$, $[BC]$ et $[CG]$.
L'espace est muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. M est le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK).
Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ? Justifier.



Problèmes

Dans tous les problèmes, on travaille dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

61 Programmation linéaire

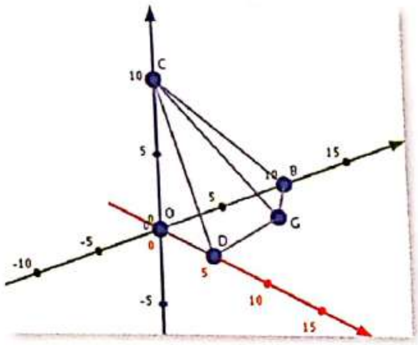
Un transporteur dispose d'un camion de 5 tonnes de charge utile avec une capacité maximale de 10 m^3.
Il doit transporter trois marchandises différentes M_1, M_2 et M_3.
1 m^3 de M_1 pèse 1 tonne, 1 m^3 de M_2 pèse 0,25 tonne et 1 m^3 de M_3 pèse 0,5 tonne.

Partie A Expliquer pourquoi les contraintes du transporteur se traduisent par : $\begin{cases} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ x+y+z \leqslant 10 \\ x+0{,}25y+0{,}5z \leqslant 5 \end{cases}$.

Partie B $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ désignent deux plans d'équation cartésiennes respectives : $x+y+z=10$ et $x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=5$.

1. a. Calculer les coordonnées, puis placer, les points d'intersection A, B et C de $(\mathcal{P}_1)$ avec les axes $(O ; \vec{i})$, $(O ; \vec{j})$ et $(O ; \vec{k})$.
b. Procéder de même pour les points D, E et F intersection de $(\mathcal{P}_2)$ avec les axes.
2. Déterminer les coordonnées et placer le point G intersection des plans (ABC), (DEF) et $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Que dire des points $M(x ; y ; z)$ qui appartiennent au polyèdre $ODGBC$?

Partie C *Avec le logiciel GeoGebra*
a. Placer les points O, D, G, B, C.
b. Construire le polyèdre $ODGBC$.



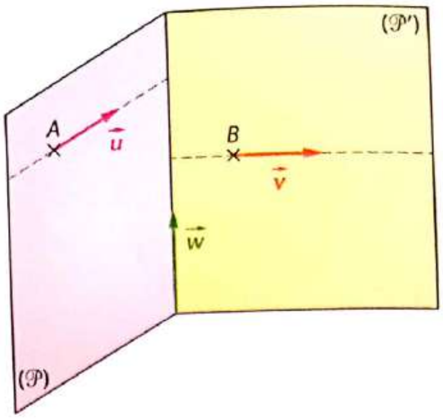
c. Créer le plan $(\mathcal{P}_3)$ d'équation cartésienne $x+y+2z=14$.
d. Créer le polyèdre intersection du polyèdre $ODGBC$ avec le demi-espace de frontière $(\mathcal{P}_3)$ contenant O.
e. En déduire l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ solution des inéquations :

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 10,$$
$$x+0{,}25y+0{,}5z \leqslant 5 \quad \text{et} \quad x+y+2z \leqslant 14.$$

62 Perpendiculaire commune à deux droites

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ désignent deux droites non coplanaires repérées respectivement par $(A ; \vec{u})$ et $(B ; \vec{v})$.

Partie A *Existence et unicité*



1. Justifier l'existence d'un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $(\mathcal{P})$ est le plan de repère $(A ; \vec{u}, \vec{w})$ et $(\mathcal{P}')$ le plan de repère $(B ; \vec{v}, \vec{w})$.
Démontrer que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.
3. (Δ) est la droite d'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
Démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire aux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.
4. Démontrer que (Δ) est l'unique droite perpendiculaire à la fois à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Partie B *Propriété*
H et H' désignent les points d'intersection de (Δ) respectivement avec $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.
$M \in (\mathcal{D})$ et $M' \in (\mathcal{D}')$.
1. Démontrer que $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{HH'} = HH'^2$.
2. En déduire que HH' est la plus courte distance entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Vocabulaire
Cette longueur HH' est la **distance entre les deux droites** non coplanaires $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

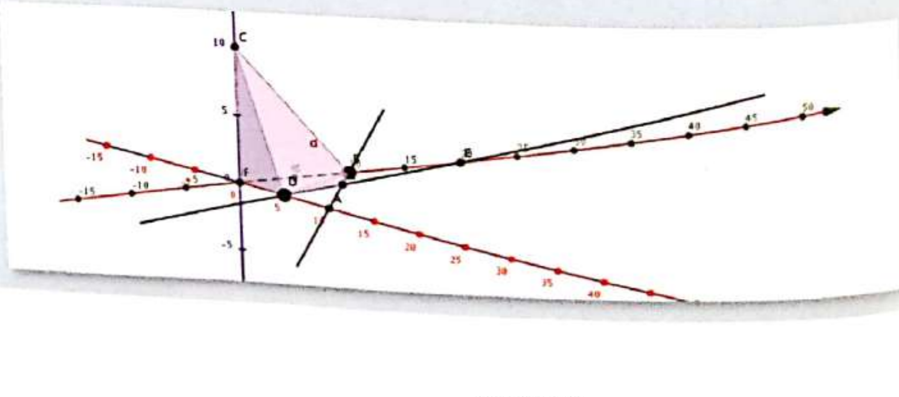
Partie C *Application*

$A(4 ; 3 ; 1)$, $B(-1 ; 1 ; 2)$, $\vec{u}\,(1 ; 2 ; -1)$ et $\vec{v}\,(2 ; 1 ; 0)$.

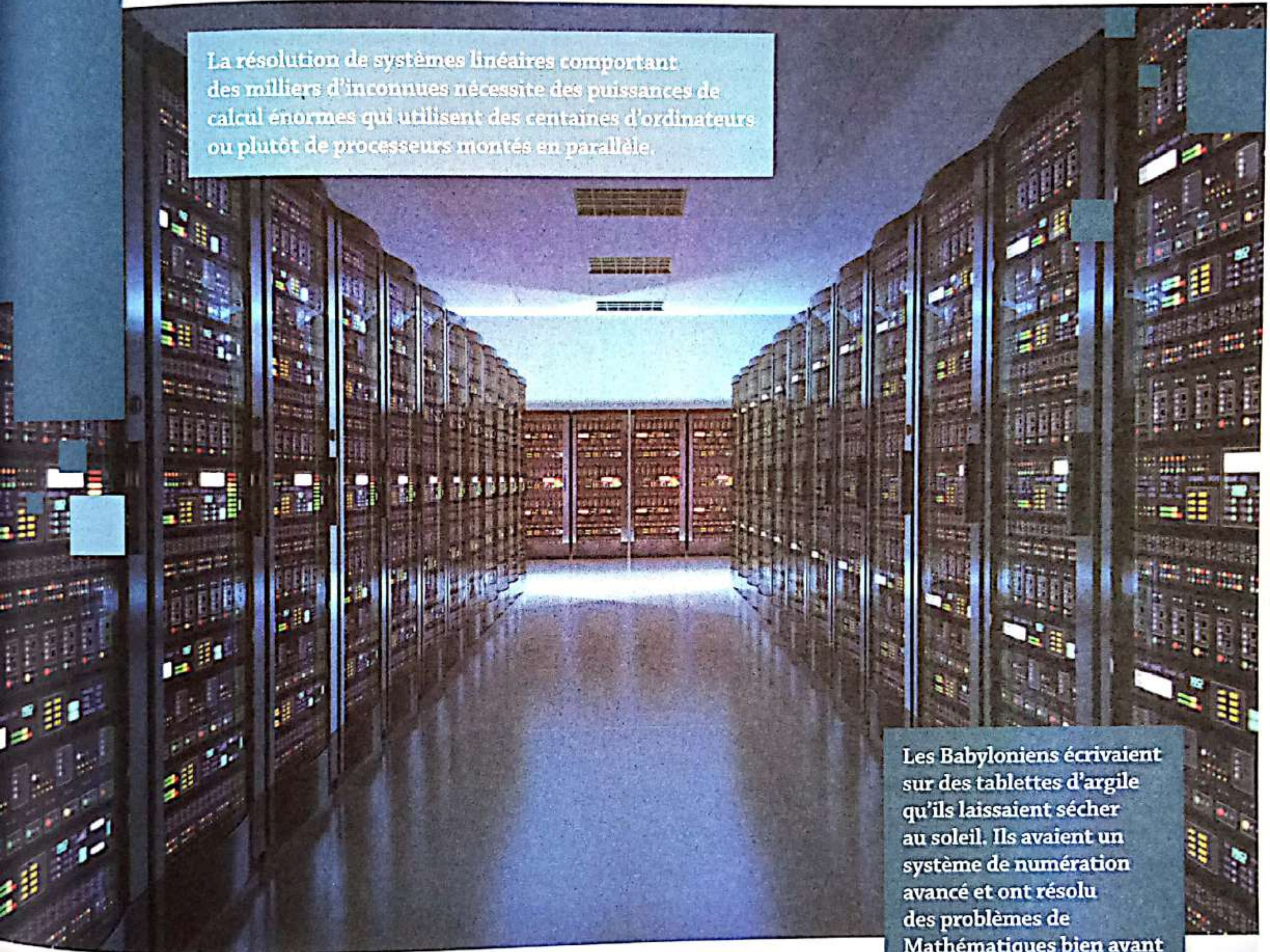
Les notations sont celles de la partie A.
1. Montrer que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$; puis une équation cartésienne de chacun des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de (Δ).
b. Calculer la distance de $(\mathcal{D})$ à $(\mathcal{D}')$.

Vocabulaire

$(x ; y ; z)$ est solution du système, si, et seulement si, $M(x ; y ; z)$ est situé à l'intérieur du polyèdre $ODGBC$.
Le polyèdre est nommé **polyèdre des contraintes.**



8 Équations, inéquations, systèmes



La résolution de systèmes linéaires comportant des milliers d'inconnues nécessite des puissances de calcul énormes qui utilisent des centaines d'ordinateurs ou plutôt de processeurs montés en parallèle.

Les objectifs du chapitre

- Déterminer les racines d'un polynôme et le factoriser.
- Résoudre une équation du second degré et interpréter graphiquement les solutions.
- Déterminer la somme et le produit des racines d'un polynôme du second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré.
- Résoudre un système d'équations linéaires en utilisant différentes méthodes.
- Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires : programmation linéaire.

Les Babyloniens écrivaient sur des tablettes d'argile qu'ils laissaient sécher au soleil. Ils avaient un système de numération avancé et ont résolu des problèmes de Mathématiques bien avant l'école Pythagoricienne. Ci-dessous la tablette Plimton 322, datée de 1800 av. J.-C. et conservée à l'Université de Columbia (États-Unis).

Cours

1 Polynôme et équation du second degré

a Rappels

Définitions

- Un **polynôme** est une expression de la forme

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{avec} \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \text{ des nombres réels, } a_n \neq 0.$$

Le nombre entier naturel n est le **degré** du polynôme.

- Un nombre réel a est une **racine** ou un **zéro** d'un polynôme P de degré n, $n \geqslant 1$ lorsque $P(a)=0$.

Remarque Un polynôme de degré 2 est souvent appelé **trinôme** du second degré.

Propriété Définition

P désigne un polynôme de degré n, $n \geqslant 1$ et a une racine de P.
On peut **factoriser** P par $(x-a)$ et on a, pour tout nombre réel x, $P(x)=(x-a)\,Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$.
On dit aussi que le polynôme P est **divisible** par $(x-a)$.

b Racines d'un polynôme du second degré

Définition

P désigne un polynôme du second degré tel que : $P(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$.
Le nombre b^2-4ac, noté Δ, est appelé **discriminant** de P.

Δ	Racines de P	Factorisation de $P(x)=ax^2+bx+c$
$\Delta<0$	aucune	aucune
$\Delta=0$	1 racine : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
$\Delta>0$	2 racines distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

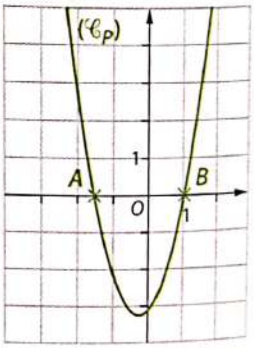
Remarques
- Si $\Delta=0$, l'unique racine est dite **double**. En effet, elle apparaît deux fois dans la factorisation : $a(x-x_0)^2=a(x-x_0)(x-x_0)$.
- Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta>0$ et P a deux racines distinctes.

Exemple
Pour le polynôme $P(x)=2x^2+x-3$, les coefficients sont : $a=2$; $b=1$; $c=-3$.
Ainsi, $\Delta=(1)^2-4\times(2)\times(-3)=1+24=25$.

$\Delta>0$ donc P a deux racines : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$.

P se factorise sous la forme $P(x)=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-1)$.

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction P a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses : $A(x_1\,;0)$ et $B(x_2\,;0)$.



c Résolution d'une équation du second degré

Définitions

P désigne un polynôme du second degré. L'équation $P(x)=0$ est appelée **équation du second degré** d'inconnue x.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, cette équation, équivaut à déterminer les nombres réels qui sont racines du polynôme P.

Remarques • On parle de racine du polynôme et de solution de l'équation.
• Utiliser la méthode du discriminant Δ n'est nécessaire que si b et c sont non nuls. Lorsque $b=0$ ou $c=0$, la recherche de solution et de la factorisation (si elle existe) est plus simple.

1 Factorisation d'un polynôme du second degré

Factoriser, lorsque c'est possible, les polynômes du second degré suivants :
a. $P_1(x)=2x^2-4x-6$; **b.** $P_2(x)=x^2+6x+9$; **c.** $P_3(x)=2x^2+3x+7$.

Solution commentée

a. 1. $a=2$, $b=-4$ et $c=-6$, ainsi $\Delta=(-4)^2-4\times2\times(-6)=64$.
$\Delta>0$, donc P_1 a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{4-\sqrt{64}}{4}=-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+\sqrt{64}}{4}=3.$$

2. Par conséquent : $P_1(x)=2(x+1)(x-3)$.

b. 1. $a=1$, $b=6$ et $c=9$, ainsi $\Delta=6^2-4\times1\times9=0$.
$\Delta=0$, donc P_2 a une racine double : $x_0=-\frac{6}{2}=-3$.
2. Par conséquent : $P_2(x)=(x+3)^2$.

c. 1. $a=2$, $b=3$ et $c=7$, ainsi $\Delta=3^2-4\times2\times7=-47$.
$\Delta<0$, donc P_3 n'a pas de racine.
2. Par conséquent, la factorisation de P_3 est impossible.

Méthode

1. Déterminer les racines éventuelles du polynôme en calculant son discriminant.
2. Utiliser la propriété du cours concernant les racines d'un polynôme du second degré pour obtenir la factorisation lorsqu'elle est possible.

Remarque

La factorisation n'est possible que si $\Delta\geqslant0$.

1) $x^2+2x-1=0$ 2) $-2x^2+2x-\frac{1}{2}=0$ 3) $-x^2+2\sqrt{3}x-3=0$; 4) $4x^2-x+12=0$
5) $2x^2-2x-3=0$

2 Équation se ramenant au second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$, avec $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$.

Solution commentée

1. 1 est racine de P car $P(1)=0$.

2. • On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-4x+3 & (x-1) \\ \hline 0+x^2-4x+3 & 2x^2+x-3 \\ 0-3x+3 & \\ 0+0 & \end{array}$$

Ainsi $P(x)=(x-1)Q(x)$, avec $Q(x)=2x^2+x-3$.

• On détermine les nombres réels a, b et c tels que : $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
$2x^3-x^2-4x+3=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Par identification, $\begin{cases} a=2 \\ b-a=-1 \\ c-b=-4 \\ -c=3 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$. Ainsi $P(x)=(x-1)Q(x)$, avec $Q(x)=2x^2+x-3$.

3. Le polynôme Q a deux racines $-\frac{3}{2}$ et 1 trouvées grâce à la méthode du discriminant.

4. Finalement, l'équation de départ a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et 1.

Méthode

1. Chercher une racine « évidente » x_0 de P, en essayant des nombres entiers comme -2, -1, 1, 2…
2. Pour mettre en facteur $(x-x_0)$, utiliser :
   • soit la division euclidienne des polynômes,
   • soit l'identification.
   Ainsi $P(x)=(x-x_0)Q(x)$.
3. Déterminer les racines de Q.
4. Conclure.

S'exercer

3 Dans chacun des cas suivants, P désigne un polynôme du second degré. Déterminer les racines éventuelles de P et le factoriser lorsque c'est possible.
a. $P(x)=x^2+x-2$; **b.** $P(x)=x^2-6x+9$;
c. $P(x)=2x^2+x+7$; **d.** $P(x)=3x^2+x-2$;

4 Q désigne la fraction rationnelle définie par :

$$Q(x)=\frac{2x^2+3x-2}{4x^2+10x-6}.$$

a. Factoriser le numérateur et le dénominateur de Q.
b. Simplifier la fraction Q.

5 (E) désigne l'équation $x^4-13x+42=0$.
On note :

$$P(x)=x^4-13x+42.$$

a. Démontrer que -2 et 3 sont solutions de (E).
b. Factoriser $P(x)$ et en déduire la résolution de (E).

6 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=x^4-13x^2+36.$$

a. Factoriser P par x^2-4.
b. Démontrer que P est le produit de quatre polynômes du premier degré.

1 Factorisation d'un polynôme du second degré

Factoriser, lorsque c'est possible, les polynômes du second degré suivants :
a. $P_1(x)=2x^2-4x-6$; **b.** $P_2(x)=x^2+6x+9$; **c.** $P_3(x)=2x^2+3x+7$.

Solution commentée

a. 1. $a=2, b=-4$ et $c=-6$, ainsi $\Delta=(-4)^2-4\times2\times(-6)=64$.
$\Delta>0$, donc P_1 a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{4-\sqrt{64}}{4}=-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+\sqrt{64}}{4}=3.$$

2. Par conséquent : $P_1(x)=2(x+1)(x-3)$.

b. 1. $a=1, b=6$ et $c=9$, ainsi $\Delta=6^2-4\times1\times9=0$.
$\Delta=0$, donc P_2 a une racine double : $x_0=-\frac{6}{2}=-3$.
2. Par conséquent : $P_2(x)=(x+3)^2$.

c. 1. $a=2, b=3$ et $c=7$, ainsi $\Delta=3^2-4\times2\times7=-47$.
$\Delta<0$, donc P_3 n'a pas de racine.
2. Par conséquent, la factorisation de P_3 est impossible.

Méthode

1. Déterminer les racines éventuelles du polynôme en calculant son discriminant.

2. Utiliser la propriété du cours concernant les racines d'un polynôme du second degré pour obtenir la factorisation lorsqu'elle est possible.

Remarque
La factorisation n'est possible que si $\Delta\geqslant0$.

1) $x^2+2x-1=0$ 2) $-2x^2+2x-\frac{1}{2}=0$ 3) $-x^2+2\sqrt{3}x-3=0$; 4) $4x^2-x+12=0$ 5) $2x^2-2x-3=0$

2 Équation se ramenant au second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x)=0$, avec $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$.

Solution commentée

1. 1 est racine de P car $P(1)=0$.

2. • On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$.

$2x^3-x^2-4x+3$	$(x-1)$
$0+x^2-4x+3$	$2x^2+x-3$
$0-3x+3$	
$0+0$	

Ainsi $P(x)=(x-1)Q(x)$, avec $Q(x)=2x^2+x-3$.

• On détermine les nombres réels a, b et c tels que : $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
$2x^3-x^2-4x+3=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Par identification, $\begin{cases}a=2\\b-a=-1\\c-b=-4\\-c=3\end{cases}$. Donc $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-3\end{cases}$. Ainsi $P(x)=(x-1)Q(x)$, avec $Q(x)=2x^2+x-3$.

3. Le polynôme Q a deux racines $-\frac{3}{2}$ et 1 trouvées grâce à la méthode du discriminant.

4. Finalement, l'équation de départ a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et 1.

Méthode

1. Chercher une racine « évidente » x_0 de P, en essayant des nombres entiers comme $-2, -1, 1, 2$…

2. Pour mettre en facteur $(x-x_0)$, utiliser :
• soit la division euclidienne des polynômes,
• soit l'identification.
Ainsi $P(x)=(x-x_0)Q(x)$.

3. Déterminer les racines de Q.

4. Conclure.

S'exercer

3 Dans chacun des cas suivants, P désigne un polynôme du second degré. Déterminer les racines éventuelles de P et le factoriser lorsque c'est possible.
a. $P(x)=x^2+x-2$; **b.** $P(x)=x^2-6x+9$;
c. $P(x)=2x^2+x+7$; **d.** $P(x)=3x^2+x-2$;

4 Q désigne la fraction rationnelle définie par :

$$Q(x)=\frac{2x^2+3x-2}{4x^2+10x-6}.$$

a. Factoriser le numérateur et le dénominateur de Q.
b. Simplifier la fraction Q.

5 (E) désigne l'équation $x^4-13x+42=0$.
On note :

$$P(x)=x^4-13x+42.$$

a. Démontrer que -2 et 3 sont solutions de (E).
b. Factoriser $P(x)$ et en déduire la résolution de (E).

6 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=x^4-13x^2+36.$$

a. Factoriser P par x^2-4.
b. Démontrer que P est le produit de quatre polynômes du premier degré.

d Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

Propriété 1

P désigne un polynôme du second degré tel que $\Delta \geqslant 0$.

- la **somme** des racines, notée S, vérifie :
$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,;$$
- le **produit** des racines, noté P, vérifie :
$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarques

• Lorsque $\Delta = 0$, $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$, puisque x_0 est racine double.

• Lorsqu'une racine du polynôme P est connue ou évidente, cette propriété permet de calculer la deuxième racine (éventuellement identique à la première).

Exemple

P désigne le polynôme défini par : $P(x) = 2x^2 + 7x + 3$.
-3 est une racine du polynôme P car $P(-3) = 0$.

Le produit des racines est égal à $\frac{3}{2}$.

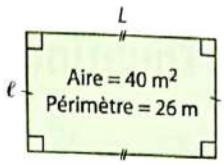
Ainsi $x_1 \times x_2 = (-3)x_2 = \frac{3}{2}$. On en déduit que : $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Propriété 2

x_1 et x_2 désignent deux nombres réels de somme S et de produit P.
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple

La longueur L et la largeur ℓ du rectangle ci-contre, s'il existe, sont les solutions de l'équation du second degré : $x^2 - 13x + 40 = 0$.
On a : $\Delta = 9$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = 5$ et $x_2 = 8$.
Le rectangle solution du problème a pour largeur 5 m et pour longueur 8 m.



e Signe d'un polynôme du second degré

Définition

P désigne un polynôme du second degré tel que : $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

$\Delta < 0$	x	$-\infty$		$+\infty$
	$P(x)$		signe de a	

$\Delta = 0$	x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
	$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

$\Delta > 0$	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
	$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

f Résolution d'une inéquation du second degré

Définition

P désigne un polynôme du second degré.
L'inéquation $P(x) > 0$ est appelée **inéquation du second degré** d'inconnue x.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation équivaut à étudier le signe du polynôme P.

Exemple

Résoudre l'inéquation (I) : $x^2 - 3x + 2 > 0$.
Le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 3x + 2$ a deux racines 1 et 2. (On dit que P est du signe de a, c'est-à-dire positif, « à l'extérieur des racines »).

L'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$]-\infty\,;1[\,\cup\,]2\,;+\infty[.$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

7 Somme et produit des racines

Après avoir trouvé une solution évidente, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^2+x-2=0$.

Solution commentée

1. 1 est solution car $1^2+1-2=0$.
2. La somme des racines $S=-\dfrac{b}{a}=-1$ donne alors $1+x_2=-1$.
   Ainsi $x_2=-2$.
   L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\{-2 ; 1\}$.

Méthode

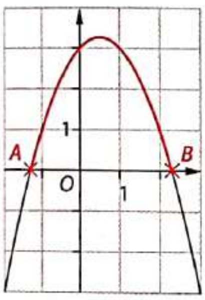
1. Chercher si un nombre entier « simple » $(-2, -1, 0, 1, 2\ldots)$ est solution de l'équation (E).
2. Utiliser la somme ou le produit des racines pour déterminer la deuxième solution.

8 Résolution graphique

Résoudre graphiquement l'inéquation $(I) : -x^2+x+3>0$, puis vérifier par le calcul.

Solution commentée

1.



2. Les deux points d'intersection ont pour abscisses : environ $-1{,}3$ et $2{,}3$.
   L'ensemble des solutions de (I) semble être $]-1{,}3 ; 2{,}3[$.
3. Le discriminant du polynôme $-x^2+x+3$ est égal à 13. Ce polynôme a ainsi deux racines :
   $$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$
   L'inéquation (I) a donc pour ensemble de solutions :
   $$\left]\frac{1-\sqrt{13}}{2} ; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right[.$$

Méthode

1. Tracer dans un repère la fonction polynôme du second degré correspondant à l'inéquation.
2. Lire les abscisses des points d'intersection éventuels de la parabole obtenue avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer le(s) intervalle(s) sur le(s)quel(s) la parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses et conclure.

9 Équation irrationnelle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \sqrt{x-1}=2-x$.

Solution commentée

1. Il faut que $x-1 \geqslant 0$:, donc que $x \in]1 ; +\infty[$.
2. $\sqrt{x-1}=2-x \Rightarrow x-1=(2-x)^2 \Rightarrow x^2-5x+5=0$ (E').
3. $\Delta=5$, l'équation (E') a donc deux solutions :
   $$x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$
4. $x_1 \in]1 ; +\infty[$ et $x_2 \in]1 ; +\infty[$.
5. L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\{x_1 ; x_2\}$.

Méthode

1. Déterminer le domaine de définition de l'équation (E).
2. Élever au carré pour éliminer les radicaux.
3. Résoudre l'équation (E') obtenue.
4. Déterminer parmi les solutions obtenues celles qui sont dans le domaine de définition de (E).
5. Conclure.

S'exercer

10 Après avoir trouvé une solution évidente, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $3x^2+2x-1=0$; b. $x^2+3x-10=0$.

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

a. $3x^2+2x-1>0$; b. $-3x^2+x-1<0$.

12 Résoudre graphiquement chacune des équations ou inéquations suivantes.

a. $-2x^2+x-1=0$; b. $x^2-3x-1=0$;
c. $-2x^2+2x+3>0$; d. $x^2+x+2<0$.

13 a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+1}=x$.
b. En déduire les solutions de l'inéquation $\sqrt{x+1}<x$.

2 Système d'équations linéaires

Deux méthodes, par substitution et combinaisons linéaires, ont déjà été étudiées et sont rappelées sur la page de Savoir-faire ci-contre. D'autres méthodes sont présentées ci-dessous.

a Système de deux équations à deux inconnues. Méthode de Cramer

Définitions

- Un système linéaire est dit de **Cramer** lorsqu'il a autant d'équations que d'inconnues et lorsqu'il a une solution unique.
- a, b, c, a', b' et c' désignent des nombres réels fixés(non tous nuls).

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ désigne un système de Cramer à deux inconnues x et y.

Les **déterminants** du système, en x et en y sont les nombres réels notés respectivement :

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \text{ ; } D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \text{ et } D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c.$$

Remarque Un système de Cramer a un déterminant D non nul.

Propriété

Un système de Cramer a pour solution unique le couple : $\left(\dfrac{D_x}{D} ; \dfrac{D_y}{D}\right)$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système (S) : $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

Le déterminant du système (S) est égal à : $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times2=-5$.

$D\neq 0$, donc le système (S) est bien un système de Cramer.
Calcul des déterminants en x et en y :

$$D_x=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(-3)\times(-1)-1\times2=1 \text{ et } D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-2\times(-3)=7.$$

Ainsi la solution du système (S) est le couple : $\left(-\dfrac{1}{5} ; -\dfrac{7}{5}\right)$.

b Système de trois équations à trois inconnues. Méthode du pivot de Gauss (sur un exemple)

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $\begin{cases} x+2y+z=-3 & (1) \\ 2x-y-2z=1 & (2) \\ 3x+2y+2z=1 & (3) \end{cases}$.

• On élimine x dans les équations (2) et (3), par combinaisons linéaires avec l'équation (1) :

comme $(S)\Leftrightarrow(S')$ $\begin{cases} x+2y+z=-3 & (1')=(1) \\ -5y-4z=7 & (2')=(2)-2\times(1) \\ -4y-z=10 & (3')=(3)-3\times(1) \end{cases}$.

• On élimine y dans l'équation (3'), par combinaison linéaire avec l'équation (2') :

$(S')\Leftrightarrow(S'')$ $\begin{cases} x+2y+z=-3 & (1'')=(1') \\ -5y-4z=7 & (2'')=(2') \\ 11z=22 & (3'')=5\times(3')-4\times(2') \end{cases}$.

• On calcule z dans la dernière équation, puis y dans la deuxième et enfin x dans la première.
Ainsi (S) a pour solution : $(1 ; -3 ; 2)$.

Méthode

• On choisit une inconnue dans la première équation et on l'élimine dans les autres par combinaisons linéaires.

• On réitère le procédé avec les équations obtenues (sans la première) jusqu'à obtenir un système « triangulaire » dans lequel la dernière équation n'a plus qu'une seule inconnue.

• On résout le système par substitution en le « remontant » de la dernière équation à la première.

14 Résolution par combinaisons linéaires

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases} 2x-y=4 & (1) \\ -x-2y=3 & (2) \end{cases}$.

Solution commentée

1. $(S) \underset{(2)\times 2}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 2x-y=4 \\ -2x-4y=6 \end{cases}$.

On choisit d'éliminer x.

2. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ 2x-2x-y-4y=4+6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ -5y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ y=-2 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations puisque les coefficients de x sont opposés.

3. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-(-2)=4 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=-2 \end{cases}$.

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2).

4. La solution est le couple $(1\,;-2)$.

Remarque

Lorsqu'on a trouvé la solution, il est bon de vérifier en remplaçant dans les équations de départ les inconnues par leurs valeurs.

Méthode

1. Éliminer l'une des deux inconnues par soustraction ou addition membre à membre des deux équations. Pour cela, multiplier chaque équation par des nombres tels que les coefficients de l'une des inconnues deviennent soit égaux soit opposés.
2. Additionner les deux équations obtenues. Résoudre ensuite pour obtenir la valeur de l'inconnue restante.
3. Substituer dans l'une des équations du système la valeur trouvée et calculer la valeur de la deuxième inconnue.
4. Conclure.

15 Résolution par substitution

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) : $\begin{cases} x+2y+3z=4 & (1) \\ 2x-y+z=-1 & (2) \\ x+3y=5 & (3) \end{cases}$.

Solution commentée

1. L'équation (3) s'écrit : $x=-3y+5$.

2. $\begin{cases} -3y+5+2y+3z=12 \\ -6y+10-y+z=-1 \\ x=-3y+5 \end{cases}$. Remplacer x dans les équations (1) et (2), puis réduire. $\begin{cases} -y+3z+5=12 \\ -7y+z+10=-1 \\ x=-3y+5 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} -y=3z-7 \\ -7y+z+10=-1 \\ x=-3y+5 \end{cases}$. Isoler y dans la première équation, puis remplacer y dans la deuxième. $\begin{cases} y=3z-7 \\ -21z+49+z+10=-1 \\ x=-3y+5 \end{cases}$.

$\begin{cases} y=3z-7 \\ z=3 \\ x=-3y+5 \end{cases}$. Calculer z.

4. Remplacer z, puis y par leurs valeurs dans les équation (1) et (3). Ainsi la solution est le triplet $(-1\,;2\,;3)$.

Méthode

1. Isoler une inconnue dans une des équations du système (le choix se porte sur l'inconnue la plus facile à isoler notamment si son coefficient est égal à 1 ou à -1).
2. Substituer (c'est à dire remplacer) l'inconnue isolée dans les autres équations.
3. Recommencer les opérations 1. et 2. pour les deux nouvelles équations.
4. Remplacer dans les équations où les inconnues ont été isolées les valeurs trouvées au fur et à mesure et conclure.

S'exercer

16 a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par combinaisons linéaires le système $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y=7 \end{cases}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par substitution le système $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de Cramer.

a. $\begin{cases} 5x-y=17 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$; b. $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$.

18 Résoudre en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

a. $\begin{cases} x+y+3z=11 \\ 2x-y+z=4 \\ -x+y-z=-3 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=-3 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$.

c Modéliser un problème (sur un exemple)

Énoncé

Au marché, les bananes, les mangues et les ananas sont vendus à l'unité respectivement 25 F CFA, 60 F CFA et 80 F CFA.
Pour un total de 12 fruits, une cliente a payé 640 F CFA.
Déterminer les quantités de fruits de chaque sorte achetés.

- **Choix des inconnues**

x, y et z désignent les quantités respectives de bananes, mangues et ananas achetés.
Ces trois nombres sont des nombres entiers naturels qui appartiennent à l'intervalle $[0\,;12]$.

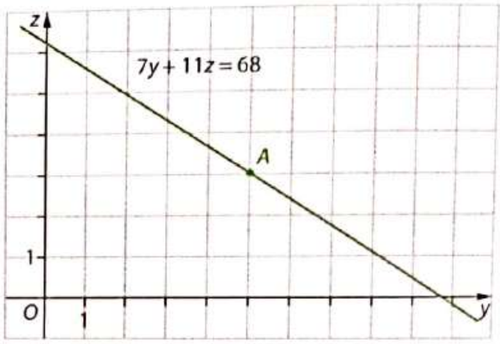
- **Mise en équation**

Total des fruits achetés : $x+y+z=12$.
Prix total payé par la cliente : $25x+60y+80z=640$.
On obtient le système :

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=12 \\ 25x+60y+80z=640 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y-z \\ 7y+11z=68 \end{cases}.$$

- **Résolution**

On détermine le(s) point(s) à coordonnées entières de la droite d'équation $7y+11z=68$ tels que y et z appartiennent à l'intervalle $[0\,;12]$.
Ici seul le point $A\,(5\,;3)$ convient.
On calcule x grâce à la première équation : $x=4$.



- **Conclusion**

La cliente a acheté quatre bananes, cinq mangues et trois ananas.

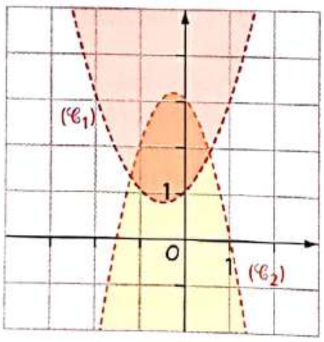
d Systèmes d'inéquations (sur un exemple)

Principe

Pour résoudre un système d'inéquations, on utilise une **méthode graphique**.

Exemple

(S) désigne le système : $\begin{cases} y>x^2+x+1 & (1) \\ y<-2x^2-x+3 & (2) \end{cases}$.



On trace les deux courbes frontières $(\mathscr{C}_1)$ d'équation $y=x^2+x+1$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équation $y=-2x^2-x+3$, puis on détermine pour chaque inéquation la partie du plan solution.

L'ensemble des solutions est le domaine ouvert commun aux deux zones solutions déterminées précédemment.

Remarque

Les méthodes de substitution et de combinaisons linéaires ne s'appliquent pas aux systèmes d'inéquations.
En effet, si l'on travaille par implication, il est difficile de vérifier les solutions trouvées du fait de leur infinité !

Exemple

(S) désigne le système : $\begin{cases} x>2 \\ x+y>3 \end{cases}$.

Si $x>2$, alors $x+y>2+y$. Il suffit donc que $2+y>3$ pour avoir une solution du système.
L'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que $x>2$ et $y>1$ sont donc solutions.
La réciproque est fausse. Le couple $(4\,;-0{,}5)$ est solution et ne vérifie pas les deux conditions précédentes.
Le seul moyen pour trouver toutes les solutions du système est d'utiliser la méthode graphique ci-dessus.

19 Programmation linéaire

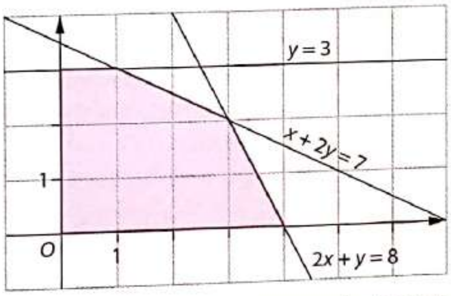
Ali fait pousser des navets et des courgettes. Il dispose de deux types d'engrais *A* et *B*, ainsi que d'un anti-parasite AP.
Les besoins en engrais et en anti-parasite exprimés en L/m^2 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Engrais A	Engrais B	Anti-parasite AP
Courgettes	2	1	0
Navets	1	2	1

Ali a en réserve 8 L d'engrais A, 7 L d'engrais B et 3 L d'anti-parasite AP.
La productivité au m^2 est de 4 kg pour les courgettes et de 5 kg pour les navets.
Déterminer les surfaces de culture à attribuer à chacun des deux légumes pour avoir une production maximale.

Solution commentée

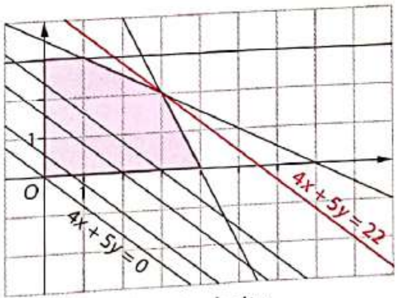
1. x désigne la surface attribuée aux courgettes et y la surface attribuée aux navets. x et y sont donc positifs.
La contrainte sur l'engrais *A* se traduit par l'inéquation : $2x+y \leqslant 8$.
La contrainte sur l'engrais *B* se traduit par l'inéquation : $x+2y \leqslant 7$.
La contrainte sur l'anti-parasite AP se traduit par l'inéquation : $y \leqslant 3$.

2. 

Les surfaces de culture possibles correspondent aux coordonnées des points intérieurs au polygone coloré.

3. La productivité totale est : $P=4x+5y$.

4. On trace la droite d'équation $4x+5y=0$.
On trace ensuite les parallèles à cette droite ayant une intersection non vide avec le polygone solution.
On détermine la droite dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande.



Le point cherché est alors le point commun à cette droite et au polygone.
On trouve graphiquement : $x=3$ et $y=2$.
Pour une production maximale, les surfaces doivent être de 3 m^2 pour les courgettes et 2 m^2 pour les navets.

Méthode

1. Mettre en équation le problème en choisissant deux inconnues.

2. Résoudre le système obtenu graphiquement, c'est-à-dire déterminer la région du plan contenant les points dont les coordonnées vérifient toutes les inéquations du système.

3. Écrire l'équation de la droite associée à la fonction à optimiser.

4. Représenter sur le même graphique la fonction en faisant varier l'ordonnée à l'origine.
Déterminer sur le graphique le (ou les) point(s) qui appartiennent à la fois à la droite d'ordonnée à l'origine maximale et à l'intérieur du polygone.

Info

La dénomination de programmation linéaire a tendance à être abandonnée au profit d'optimisation linéaire pour éviter la confusion avec la programmation informatique.
Le but reste de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction répondant à des contraintes traduites par un polygone convexe.

S'exercer

20 Deux nombres ont une somme est égale à 21 et la différence de leurs carrés est égale à 105.
a. Modéliser le problème en écrivant un système de deux équations à deux inconnues.
b. Résoudre ce système.

21 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x-3y>5 \\ 2x+y \leqslant 2. \\ 3x+y>2 \end{cases}$$

19 Programmation linéaire

Ali fait pousser des navets et des courgettes. Il dispose de deux types d'engrais *A* et *B*, ainsi que d'un anti-parasite AP.
Les besoins en engrais et en anti-parasite exprimés en L/m² sont donnés dans le tableau ci-dessous :

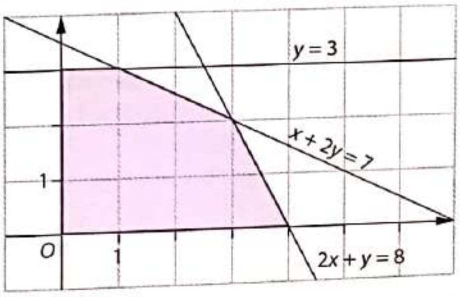
	Engrais A	Engrais B	Anti-parasite AP
Courgettes	2	1	0
Navets	1	2	1

Ali a en réserve 8 L d'engrais A, 7 L d'engrais B et 3 L d'anti-parasite AP.
La productivité au m² est de 4 kg pour les courgettes et de 5 kg pour les navets.
Déterminer les surfaces de culture à attribuer à chacun des deux légumes pour avoir une production maximale.

Solution commentée

1. x désigne la surface attribuée aux courgettes et y la surface attribuée aux navets. x et y sont donc positifs.
La contrainte sur l'engrais *A* se traduit par l'inéquation : $2x+y \leqslant 8$.
La contrainte sur l'engrais *B* se traduit par l'inéquation : $x+2y \leqslant 7$.
La contrainte sur l'anti-parasite AP se traduit par l'inéquation : $y \leqslant 3$.

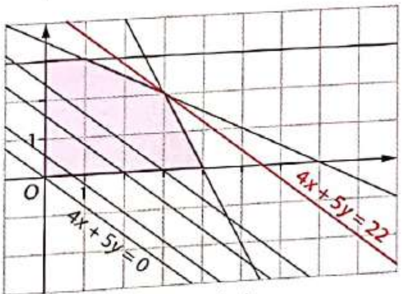
2.



Les surfaces de culture possibles correspondent aux coordonnées des points intérieurs au polygone coloré.

3. La productivité totale est : $P=4x+5y$.

4. On trace la droite d'équation $4x+5y=0$.
On trace ensuite les parallèles à cette droite ayant une intersection non vide avec le polygone solution.
On détermine la droite dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande.



Le point cherché est alors le point commun à cette droite et au polygone.
On trouve graphiquement : $x=3$ et $y=2$.
Pour une production maximale, les surfaces doivent être de 3 m² pour les courgettes et 2 m² pour les navets.

Méthode

1. Mettre en équation le problème en choisissant deux inconnues.

2. Résoudre le système obtenu graphiquement, c'est-à-dire déterminer la région du plan contenant les points dont les coordonnées vérifient toutes les inéquations du système.

3. Écrire l'équation de la droite associée à la fonction à optimiser.

4. Représenter sur le même graphique la fonction en faisant varier l'ordonnée à l'origine.
Déterminer sur le graphique le (ou les) point(s) qui appartiennent à la fois à la droite d'ordonnée à l'origine maximale et à l'intérieur du polygone.

Info

La dénomination de programmation linéaire a tendance à être abandonnée au profit d'optimisation linéaire pour éviter la confusion avec la programmation informatique.
Le but reste de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction répondant à des contraintes traduites par un polygone convexe.

S'exercer

20 Deux nombres ont une somme est égale à 21 et la différence de leurs carrés est égale à 105.
a. Modéliser le problème en écrivant un système de deux équations à deux inconnues.
b. Résoudre ce système.

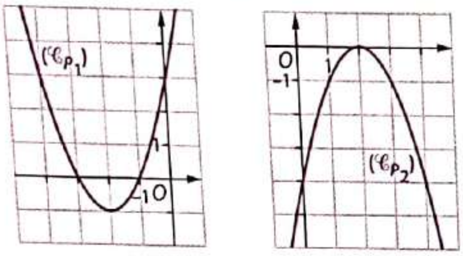
21 Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x-3y>5 \\ 2x+y \leqslant 2. \\ 3x+y>2 \end{cases}$$

Équations du second degré

Réponses rapides

22 Déterminer les racines et la factorisation des fonctions polynômes représentées ci-dessous :



23 Calculer le discriminant et donner le nombre de solutions des équations suivantes :

a. $x^2+3x-1=0$; **b.** $x^2+3x-1=0$;
c. $2x^2+3x+4=0$; **d.** $x^2+2x+1=0$.

24 Factoriser les polynômes suivants :

a. $P(x)=x^2+3x+2$; **b.** $P(x)=4x^2+4x+1$.

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^2+x-2=0$; **b.** $3x^2-3x+1=0$;
c. $2x^2+3x-4=0$; **d.** $x^2-6x+9=0$.

26 Dans chaque cas, utiliser la calculatrice pour représenter chacun des polynômes P et en déduire le nombre de solutions de l'équation $P(x)=0$.

a. $P(x)=2x^2+x-6$; **b.** $P(x)=x^2+x+6$;
c. $P(x)=-2x^2+x-6$; **d.** $P(x)=-2x^2-4x-2$.

27 Associer à chaque polynôme ses racines lorsqu'il en a.

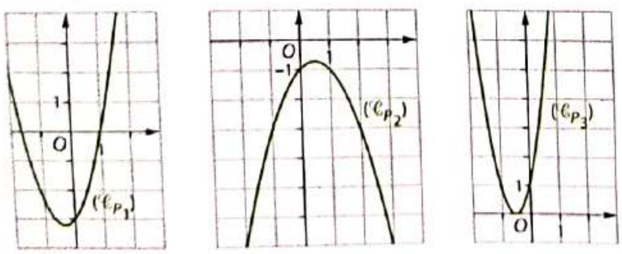
$P(x)=x^2+x+5$ •	• $-\frac{3}{2}$ et 1
$P(x)=2x^2+x-3$ •	• pas de racine
$P(x)=5x^2+x+1$ •	• -1 et 3
$P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3$ •	• -2 et 1
$P(x)=x^2-2x-3$ •	• pas de racine
$P(x)=-x^2-x+2$ •	• -3 et 2

28 Les figures suivantes sont les représentations graphiques de polynômes P du second degré définis par :

$$P(x)=ax^2+bx+c, \text{ avec } a\neq 0.$$

Déterminer dans chaque cas :

a. le signe de a ; **b.** le signe de Δ ; **c.** le nombre de racines de P.



29 P désigne un polynôme de degré 2 et a un nombre réel. Dans chacun des cas, démontrer que a est racine de P, factoriser P et en déduire son autre racine.

a. $P(x)=x^2+x-6$ et $a=2$;
b. $P(x)=-2x^2+x+3$ et $a=-1$;
c. $P(x)=2x^2-3x+1$ et $a=\frac{1}{2}$;
d. $P(x)=x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$ et $a=\sqrt{3}$.

Aide

▶ Utiliser la division euclidienne par $(x-a)$ pour factoriser $P(x)$.

30 Déterminer, sans utiliser le discriminant, les racines des polynômes suivants.

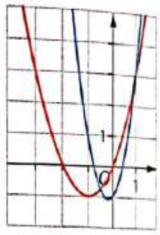
a. $P(x)=x^2+x$; **b.** $P(x)=3x^2-4$;
c. $P(x)=-4x^2+8x-4$; **d.** $P(x)=x^2-9x$.

31 Résoudre $\mathbb{R}$ dans les équations suivantes :

a. $15x^2+x-6=0$; **b.** $x^2-2x-15=0$;
c. $5x^2-7x+6=0$; **d.** $4x^2-7x-2=0$.

32 Ci-contre sont tracées les courbes représentatives des deux polynômes du second degré :

$P_1(x)=x^2+2x$ et $P_2(x)=3x^2+x-1$.



a. Déterminer par lecture graphique les solutions de l'équation $P_1(x)=P_2(x)$.
b. Déterminer par le calcul ces solutions.

33 Une boîte de conserve a une forme cylindrique.

Son aire totale est égale à 600 cm^2 et elle mesure 15 cm de hauteur.

a. Démontrer que le rayon R de la base vérifie l'équation : $R^2+15R-100=0$.
b. Résoudre cette équation et en déduire le volume V de la boîte.
(Dans tous les calculs, on prendra $\pi=3$.)

Somme et produit des racines

Réponses rapides

34 Pour chacun des polynômes suivants, trouver une racine évidente, puis déterminer l'autre en utilisant la somme ou le produit des racines.

a. $P_1(x)=2x^2-3x+1$; **b.** $P_2(x)=-3x^2+5x+2$;
c. $P_3(x)=x^2-4x+4$; **d.** $P_4(x)=x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$.

35 Déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme S et le produit P dans chacun des cas suivants :

a. $S=10$ et $P=24$; **b.** $S=-3$ et $P=-10$.

36 Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 18 cm et d'aire 20 cm^2.

37 x et y désignent deux nombres réels qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{4} \\ xy=-3 \end{cases}.$$

a. Démontrer que $(x+y)^2=\dfrac{1}{4}$.

b. En déduire les valeurs possibles de la somme $S=x+y$ et les équations du second degré correspondantes vérifiées par x et y.

c. Résoudre les équations précédentes et conclure.

Inéquations du second degré

Réponses rapides

38 Déterminer le signe de chacun des trinômes du second degré suivants :

a. $P_1(x)=2x^2-3x+1$; b. $P_2(x)=-x^2-2x-1$;
c. $P_3(x)=-x^2-3x+4$; d. $P_4(x)=2x^2-3x+5$.

39 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $-2x^2+5x-3<0$; b. $-2x^2+x-3>0$;
c. $-3x^2+5x+7\geqslant 0$; d. $-2x^2+5x+10<0$.

40 Utiliser la calculatrice graphique pour représenter les polynômes suivants, puis conjecturer leur signe suivant les valeurs de x.

a. $P_1(x)=x^2-x+1$; b. $P_2(x)=-x^2-x-6$;
c. $P_3(x)=-2x^2+5x-3$; d. $P_4(x)=x^2-3x+5$.

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $(x-3)^2-16<0$; b. $-7x^2+x<1$;
c. $12>x^2+11x$; d. $2x^2+9x-14\geqslant x-4$;
e. $x(x-2)<9-2x$; f. $(x+1)(x-5)\leqslant(2x+1)(x+2)$.

42 P_1 et P_2 désignent les polynômes définis par :

$$P_1(x)=x^2-5x+1 \quad \text{et} \quad P_2(x)=-x^2-x-\frac{1}{2}$$

dont les courbes représentatives dans un même repère sont notées $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

a. Résoudre l'inéquation $P_1(x)>P_2(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour les positions relatives des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$?

c. Contrôler graphiquement le résultat précédent en utilisant un logiciel de géométrie dynamique ou la calculatrice.

43 Un artisan commercialise des produits au prix de 1 250 F CFA l'unité.

x désigne la production journalière de l'artisan et on suppose qu'il vend tout ce qu'il fabrique.

Le coût de production est la fonction C définie par :

$$C(x)=2x^2+500x+50\,000.$$

a. Exprimer en fonction de x la recette journalière $R(x)$.

b. Exprimer en fonction de x le bénéfice journalier $B(x)$.

c. Calculer $B(x)$ pour $x=50$, $x=100$ et $x=300$.
Interpréter ces résultats.

d. Déterminer quelle quantité doit produire l'artisan pour réaliser un bénéfice. (Arrondir les résultats à l'unité.)

44 (E) désigne l'inéquation : $mx^2+3x-4\geqslant 0$ où m est un nombre réel non nul.

Donner dans chaque cas une valeur de m pour laquelle l'ensemble de solutions de (E) est :

a. vide ;

b. un intervalle ;

c. est une réunion d'intervalles.

> **Aide**
> Pour répondre à la question, on peut utiliser GeoGebra en créant un curseur m que l'on fera varier.

Équations se ramenant au second degré

Réponses rapides

45 (E) désigne l'équation : $P(x)=0$
avec $P(x)=x^3-x^2+2x+4$.

a. Démontrer que -1 est solution de (E).

b. Vérifier que $P(x)=(x+1)(x^2-2x+4)$, puis trouver toutes les solutions de (E).

46 Trouver une solution évidente, puis résoudre l'équation :

$$4x^3-3x^2-5x-10=0.$$

47 P et Q désignent les polynômes définis par :

$$P(x)=x^4-x^3+4x^2-x+3 \quad \text{et} \quad Q(x)=x^2-x+3.$$

a. Utiliser la division euclidienne pour démontrer que le polynôme Q divise le polynôme P.

b. Résoudre l'équation $P(x)=0$.

48 (E) désigne l'équation $x^4-2x^3-5x^2+6x+9=0$.

a. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') :

$$(x^2-x-2)^2-2(x^2-x-2)+1=0.$$

b. Poser $X=x^2-x-2$ et déterminer la solution X_0 de l'équation (E'') d'inconnue X obtenue.

c. Résoudre enfin l'équation $x^2-x-2=X_0$ et en déduire les solutions de l'équation (E).

49 a. Déterminer les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $2x^2-3x-2=0$.

b. Résoudre les équations $x^2=x_1$ et $x^2=x_2$.

c. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2x^4-3x^2-2=0 \text{ en posant } X=x^2.$$

> **Info**
> Une équation du quatrième degré qui ne comporte que des puissances paires de x est appelée équation bicarrée.

50 P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=x^4-10x^2+9.$$

a. Factoriser le polynôme $x^2-10x+9$.

b. En déduire l'écriture de P comme produit de deux polynômes du second degré.

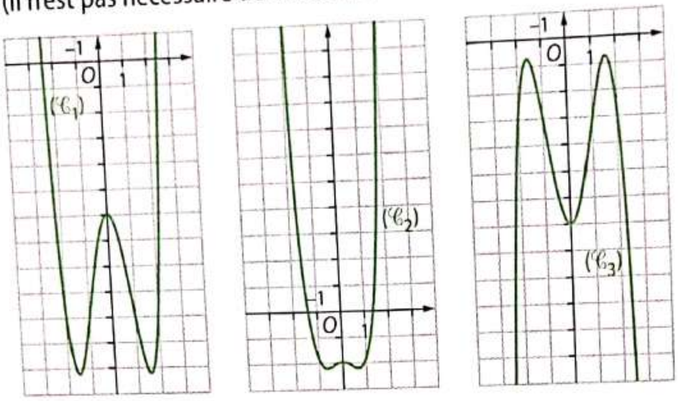
c. Écrire P comme produit de quatre polynômes du premier degré.

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante

$$x+\frac{1}{x}-2=0.$$

> **Aide**
> Utiliser le fait que 0 ne peut être solution et multiplier (E) par x.
> Résoudre l'équation obtenue.

52 Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de polynômes du quatrième degré. Attribuer à chaque expression sa courbe en se référant au nombre de racines des polynômes. (Il n'est pas nécessaire de calculer ces racines.)



$P_1(x)=x^4-x^2-2$;
$P_2(x)=-x^4+5x^2-7$; $P_3(x)=x^4-5x^2-6$.

Équations / Inéquations irrationnelles

Réponses rapides

53 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.
a. $\sqrt{x+1}=-3$; **b.** $\sqrt{x+1}=0$; **c.** $\sqrt{x+1}=3$.

54 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$$\sqrt{x+1}\geqslant 3.$$

55 Déterminer l'ensemble de définition, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.
a. $\sqrt{1-x}=\sqrt{2x-3}$; **b.** $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$.

56 Déterminer l'ensemble de définition, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.
a. $\sqrt{x^2+x+5}<5$; **b.** $\sqrt{x}<\sqrt{2x-3}$.

57 (E) désigne l'équation irrationnelle suivante :
$$\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{4x^2+4x+1}.$$
a. Déterminer l'ensemble de définition de (E).
b. Résoudre (E).

Systèmes linéaires

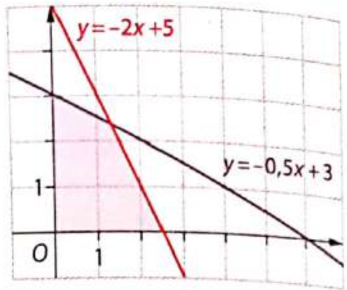
Réponses rapides

58 Déterminer parmi les systèmes suivants ceux qui ont une solution unique.
a. $\begin{cases}2x-y=1\\x+3y=-5\end{cases}$; **b.** $\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=2\end{cases}$; **c.** $\begin{cases}x-y=1\\x+y=-2\end{cases}$.

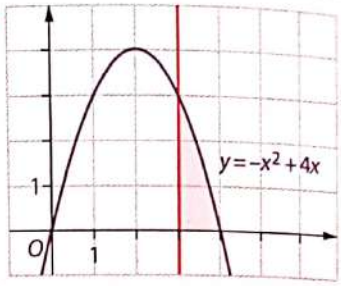
59 Résoudre par la méthode de Cramer le système suivant :
$$\begin{cases}2x+y=3\\x+3y=-1\end{cases}.$$

60 Écrire le système dont l'ensemble de solutions est la partie colorée dans chacun des cas suivants.

a.



b.



61 Calculer le déterminant et résoudre, lorsque c'est possible, par la méthode de Cramer chacun des systèmes suivants.
a. $\begin{cases}x+y=1\\x+3y=-1\end{cases}$; **b.** $\begin{cases}2x+y=7\\-4x-2y=-14\end{cases}$.

62 m désigne un nombre réel et (S) désigne le système :
$$\begin{cases}(m-1)x-(m-5)y=m\\2x+(m-1)y=-m+4\end{cases}.$$
1. a. Écrire le système (S) lorsque $m=3$ et démontrer qu'il n'a pas de solution.
b. Écrire le système (S) lorsque $m=1$ et le résoudre.
2. a. Calculer le déterminant de (S) et déterminer les valeurs de m pour lesquelles il a une solution unique.
b. En utilisant la méthode de Cramer, déterminer alors le couple solution en fonction de m.
c. Utiliser le résultat précédent pour donner la solution du système (S) lorsque $m=2$.

63 Appliquer la méthode du pivot de Gauss pour résoudre chacun des systèmes suivants.
a. $\begin{cases}2x+3y-5z=-11\\4x+y-2z=-8\\x-2y+z=-2\end{cases}$;
b. $\begin{cases}x-2y+z=-5\\-x+y+2z=-4\\2x-y-z=5\end{cases}$.

64 Résoudre graphiquement le système d'inéquations ci-contre.
$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 5\\0\leqslant y\leqslant 5\\x+2y\geqslant 3\\x-y<2\end{cases}.$$

65 $n=\overline{abc}$ désigne un nombre à trois chiffres.
On a alors $n=100a+10b+c$.
Déterminer le nombre n sachant que :
- la somme de ses chiffres est égale à 10 ;
- $\overline{cba}=\overline{abc}+297$; • $n=\overline{bca}-117$.

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
P_1, P_2, P_3 et P_4 désignent les polynômes :
$P_1(x)=2x^2+x-3$; $P_2(x)=x^2-x+2$;
$P_3(x)=x^2+2x-1$; $P_4(x)=x^3-2x^2+x-2$.

	vrai	faux
1. Le discriminant de P_1 est égal à 25.	☐	☐
2. P_2 n'a pas de racine.	☐	☐
3. P_3 a une racine double.	☐	☐
4. La somme des racines de P_1 est égale à $-\frac{3}{2}$.	☐	☐
5. 2 est une racine de P_4.	☐	☐
6. $P_4(x)=(x-2)(x^2+x+1)$.	☐	☐
7. $P_2(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.	☐	☐

Avec justification

67 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
(E) désigne l'équation $2x^2-3x+1=0$;
(I) désigne l'inéquation $x^2+x-6<0$;
(S) désigne le système : $\begin{cases} 13x+7y=-5 \\ 5x+y=-7 \end{cases}$.

	vrai	faux
1. (E) a deux solutions $\frac{1}{2}$ et 1.	☐	☐
2. $2x^2-3x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.	☐	☐
3. $x^2+x-6=(x+2)(x-3)$.	☐	☐
4. L'ensemble des solutions de (I) est $]-3;2[$.	☐	☐
5. Le déterminant de (S) est égal à -22.	☐	☐
6. La solution de (S) est le couple $(2;3)$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
(E) désigne l'équation $x^2-5x-7=0$.

1. a. (E) n'a pas de solution ;
 b. (E) a deux solutions distinctes ;
 c. (E) a une seule solution.

2. Une solution de (E) est :
 a. $\frac{5-\sqrt{53}}{2}$; b. $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$; c. $\frac{-5-\sqrt{53}}{2}$.

3. Le produit des racines de (E) est égal à :
 a. -5 ; b. -7 ; c. 5.

4. (I) désigne l'inéquation $3x^2-x-2<0$.
 L'ensemble de solutions de (I) est :
 a. un intervalle ; b. réduit à un couple ; c. vide.

5. (S) désigne le système : $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.
 Le déterminant de (S) est égal à :
 a. 3 ; b. 1 ; c. -3.

6. La solution de (S) est le couple :
 a. $(-1;-2)$; b. $(1;2)$; c. $(2;1)$.

Avec justification

69 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
P désigne le polynôme défini par $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

1. Une racine de P est :
 a. -1 ; b. 0 ; c. 1.

2. Une forme factorisée de $P(x)$ est :
 a. $(x-1)(x^2-5x+6)$; b. $(x+1)(x^2-6)$;
 c. $(x-1)(x^2+5x+6)$.

3. L'ensemble des racines de P est :
 a. $\{-1\}$; b. $\{1;2;3\}$; c. $\{-1;-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

4. L'inéquation $x^2-5x+6<0$ a pour ensemble de solutions :
 a. $]-\infty;3[$; b. $]2;3[$; c. $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$.

5. Sur $]1;3[$:
 a. $P(x)>0$; b. $P(x)<0$; c. $P(x)$ change de signe.

6. Sur $]2;3[$, l'inégalité $P(x)<11x-6$:
 a. est vraie ; b. est fausse ; c. ni l'un, ni l'autre.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

Exercices d'approfondissement

70 Danger : inéquations

1. (I) désigne l'inéquation :

$$\frac{5}{x-6} \leqslant 3x-2.$$

a. Étudier le signe du trinôme :

$$3x^2-20x+7.$$

b. Donner le domaine de définition de (I).

c. Utiliser le résultat précédent pour résoudre (I).

2. (I') désigne l'inéquation $\frac{1}{x^2-4} \leqslant 1$.

a. Donner le domaine de définition de (I').

b. Étudier le signe du trinôme x^2-4.

c. Résoudre (I') en distinguant deux cas.

> **Rappel**
> Lorsqu'on multiplie une inéquation par un nombre négatif, le symbole d'inégalité change de sens.

71 Somme = produit

x et y désignent deux nombres réels, s'ils existent, dont la somme et le produit sont égaux à un nombre réel m.

a. Donner un exemple de deux nombres entiers x et y solution de ce problème.

b. Écrire l'équation (E) du second degré dont x et y sont solution.

c. Discuter suivant les valeurs de m de l'existence des solutions et les calculer en fonction de m.

72 Signe d'un polynôme du troisième degré

P désigne le polynôme du troisième degré défini par :

$$P(x)=x^3+5x^2-12x+6.$$

a. Utiliser la calculatrice pour conjecturer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Trouver une racine évidente x_0 de P.

c. Utiliser la division euclidienne pour factoriser P.

d. Étudier le signe de $P(x)$ et (in)valider la conjecture du **a.**

73 Paramètre et intersection

f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^2+5x+1 \quad \text{et} \quad g(x)=-2x+k$$

où k est un nombre réel.

$(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont les représentations graphiques de ces fonctions dans un repère.

a. Conjecturer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de la calculatrice, le nombre de points d'intersection de ces deux courbes en fonction des valeurs du nombre k.

b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=g(x)$ et comparer les résultats avec la conjecture du **a.**

74 Inéquation

P et Q désignent les polynômes définis par :

$$P(x)=x^2+10x+25 \quad \text{et} \quad Q(x)=-2x^2-7x-3.$$

a. Déterminer les racines de Q.

b. Étudier les signes de $P(x)$ et $Q(x)$ suivant les valeurs de x.

c. En déduire les solutions de l'inéquation :

$$\frac{x^2+10x+25}{-2x^2-7x-3} \leqslant 0.$$

75 Deux nombres inconnus

Deux nombres réels sont inverses l'un de l'autre.

Déterminer ces deux nombres sachant que la somme du carré de leur somme et de la somme de leurs carrés est égale à 7.

76 Équation inconnue

m désigne un nombre réel non nul.

(E) désigne l'équation : $mx^2+(m-1)x-m+3=0$.

1. Calculer en fonction de m le discriminant Δ de (E).

2. On suppose que $\Delta=1$.

a. Quelle est alors la valeur de m ?

b. Résoudre l'équation (E).

3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\Delta<0$.

4. On suppose que $\Delta>0$.

a. Calculer les solutions de (E) en fonction de m.

b. Appliquer ce résultat pour $m=4$.

77 Vitesse d'un avion

Un avion de ligne fait un aller retour entre deux villes A et B, distantes de 630 km, en 1 h 36 mn.

Un vent violent souffle constamment dans le sens de A vers B à une vitesse de 100 km/h.

On veut déterminer la vitesse V supposée constante à laquelle volerait l'avion sans le vent.

a. Écrire deux égalités concernant les temps de trajet aller et retour en fonction de V.

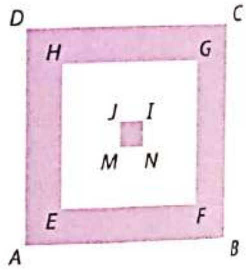
b. En déduire que la vitesse V est solution de l'équation (E)

$$1{,}6V^2-1\,260V-16\,000=0.$$

c. Résoudre (E) et conclure.

78 Un carreau

Le carreau ci-contre est un carré de 10 cm de côté. On a coloré une bande de x cm de large autour. Ainsi qu'un carré au centre de côté x cm. Pour quelles valeurs de x l'aire de la partie colorée est-elle inférieure à l'aire de la partie blanche ?



79 Carrés et cubes des racines

P désigne le polynôme défini par $P(x)=x^2-3x-5$.

1. a. Justifier que P a deux racines distinctes x_1 et x_2. (On ne demande pas de les calculer.)

b. Donner les valeurs de $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$.

2. a. Développer $(x_1+x_2)^2$.

b. Utiliser les résultats du **1. b.** pour calculer $x_1^2+x_2^2$.

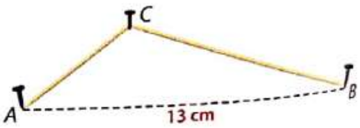
3. a. Développer $(x_1+x_2)^3$.

b. Utiliser les résultats du **1. b.** pour calculer $x_1^3+x_2^3$.

4. Calculer x_1 et x_2 et vérifier les résultats précédents.

80 Une ficelle

Une ficelle de longueur 20 cm est fixée à ces extrémités à deux clous A et B distants de 13 cm.



a. Démontrer qu'il n'est pas possible de tendre la ficelle en utilisant un troisième clou C de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle.

b. Quelle longueur minimale de ficelle est nécessaire pour que le problème ait une solution ?

81 Un pavé

Un pavé droit de dimensions a, b et c, a un volume V de 420 cm^3, une aire totale A de 568 cm^2 et une longueur totale de ses arêtes L égale à 156 cm.

1. Exprimer V, A et L en fonction de a, b et c.

2. P désigne le polynôme défini par :

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c).$$

a. Développer $P(x)$.

b. Exprimer $P(x)$ en fonction de V, A et L et utiliser les résultats du 1. pour obtenir une équation (E) d'inconnue x.

c. Justifier que résoudre (E) permet de trouver les dimensions du pavé.

3. a. Déterminer une solution évidente x_0 de (E) ;

b. Factoriser le premier membre de l'équation (E) par x_0, puis achever la factorisation.

c. Conclure.

82 Des équations irrationnelles

1. (E) désigne l'équation $x+\sqrt{x}-6=0$.

a. Poser $X=\sqrt{x}$.

Écrire l'équation (E') d'inconnue X obtenue à partir de (E).

b. Résoudre (E').

c. En déduire les solutions de (E).

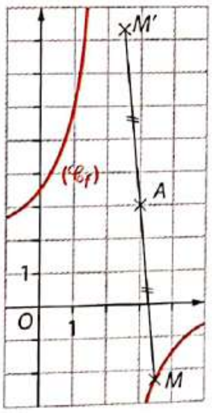
2. (F) désigne l'équation $x+\sqrt{x-1}-3=0$.

Poser $X=\sqrt{x-1}$ et résoudre en utilisant une méthode analogue à celle utilisée au **1**.

83 Point sur la courbe

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x-7}{x-2}$ de courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$.

$A(3\,;3)$ est un point fixé du plan, M est un point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x et M' son symétrique par rapport à A.



a. Exprimer les coordonnées de M' en fonction de x.

b. Démontrer que :

$M'\in(\mathscr{C}_f)\Leftrightarrow 2x^2-12x+11=0$.

c. Résoudre l'équation ci-dessus.

d. Calculer les coordonnées de M et M' correspondantes.

84 Une histoire de boules

Un récipient cylindrique a un rayon intérieur de 10 cm et une hauteur intérieure de 25 cm.

1. a. On place une boule de rayon 6 cm au fond et on la recouvre exactement d'eau. (La boule est suffisamment dense et reste au fond.)

Exprimer en fonction de π le volume d'eau nécessaire.

b. On change la boule par une autre boule de rayon différent R. À nouveau, l'eau recouvre exactement la boule.

Exprimer en fonction de π et R le volume d'eau.

2. a. Déduire des questions précédentes que R est solution de l'équation (E) $R^3-150R+684=0$.

b. Vérifier que 6 est solution de (E).

c. Écrire (E) sous la forme $(R-6)Q(R)=0$ où Q est un polynôme de degré 2.

d. Achever la résolution de (E) et conclure.

85 Système 2 × 3

(S) désigne le système suivant.

$$\begin{cases}x+2y+z=5\\-2x+y-2z=-3\end{cases}.$$

a. Écrire le système (S') aux deux inconnues x et y équivalent à (S).

b. Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre (S').

c. En déduire que (S) a une infinité de solutions que l'on précisera.

86 Bassin

Un bassin peut être rempli à l'aide de trois robinets R_1, R_2 et R_3. Les durées de remplissage en minutes dépendant des robinets utilisés sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Robinets utilisés	Temps de remplissage
R_1 et R_2	20 min
R_2 et R_3	15 min
R_1 et R_3	12 min

a. Écrire un système de trois équations dont les inconnues sont les débits respectifs des trois robinets.

b. Résoudre ce système.

c. Calculer les temps de remplissage du bassin par chacun des robinets utilisé seul.

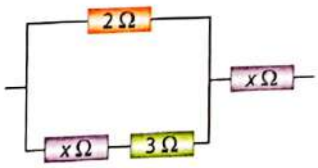
d. Calculer le temps de remplissage du bassin par les trois robinets ensemble.

Aide

Le débit est égal au volume divisé par le temps.

87 Un circuit électrique

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous.



Aide

Si deux résistances R et R' sont montées en série, alors la résistance équivalente est $R+R'$ et si elles sont montées en parallèle, alors la résistance équivalente vérifie $\dfrac{1}{R_{eq}}=\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}$.

Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 4,5 Ω.

88 Système 4 × 4

Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss le système ci-contre.

$$(S)\begin{cases}x+y+z+t=6\\2x-y+3z-t=5\\x-3y+z+2t=-1\\3x+2y-z-t=4\end{cases}.$$

89 Réservoir

Un réservoir de récupération d'eau a une contenance de 1 400 litres. Il est alimenté par deux tuyaux d'écoulement. Le premier débite 15 litres par minute. En ouvrant seulement le deuxième tuyau, le remplissage du réservoir prend 30 minutes de plus qu'avec les deux tuyaux.

Calculer le débit du deuxième tuyau d'écoulement.

90 Une méthode de résolution babylonienne

(E) désigne l'équation $x-\dfrac{1}{x}=c$.

1. On pose $c=2$.

a. Calculer la suite de nombres suivants :

$$u_1=\frac{c}{2},\ u_2=u_1^2,\ u_3=1+u_2 \text{ et } u_4=\sqrt{u_3}.$$

b. Vérifier que $x_1=u_1+u_4$ est solution de (E).

c. Écrire une équation du second degré (E') équivalente à (E) et la résoudre. Vérifier que l'une des solutions est le nombre x_1 trouvé au **b.**

2. Appliquer la méthode précédente pour $c=-3$ et $c=0$.

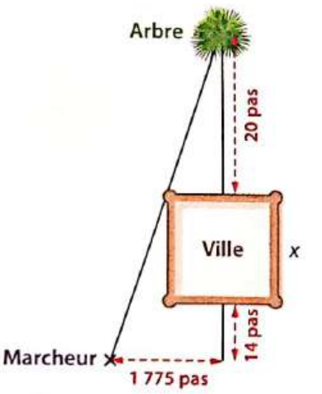
3. Appliquer la méthode précédente pour résoudre les équations :

a. $x^2-\dfrac{1}{x^2}=3$; **b.** $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$.

Info

La tablette Plimpton 322 (voir page 123) est une tablette d'argile babylonienne découverte en Irak. Elle comporte un tableau de nombres cunéiformes et pourrait décrire une méthode de résolution d'équations.

91 Un problème chinois



« À l'extérieur de la ville carrée, vingt pas après la sortie Nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte Sud, marche quatorze pas vers le Sud puis 1 775 vers l'Ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre. Trouve les dimensions de la ville. »

1. *Modélisation*

a. Reproduire la figure ci-contre.

b. Ouvrir une feuille de calcul et la compléter pour obtenir un tableau comme ci-contre. Justifier les calculs des colonnes B et C.

Conjecturer la réponse au problème posé.

	A	B	C
1	Côté x	x/40	1775/(x+34)
2	1	0,025	50,71428571
3	2	0,05	49,30555556
4	3	0,075	47,97297297
5	4	0,1	46,71052632
6	5	0,125	45,51282051
7	6	0,15	44,375
8	7	0,175	43,29268293
9	8	0,2	42,26190476
10	9	0,225	41,27906977
11	10	0,25	40,34090909
12	11	0,275	39,44444444

2. *Résolution algébrique*

x désigne la longueur du côté du carré exprimée en nombre de pas.

a. Démontrer que le problème se ramène à la résolution de l'équation (E) du second degré :

$$x^2+34x-71\,000=0.$$

b. Résoudre (E) et donner la solution au problème.

Info

Les « neuf chapitres sur l'art du calcul » (Jiuzhang suanshu) est un ouvrage chinois datant de 200 avant J.-C. qui traite de méthodes de résolution de problèmes quotidiens.

92 Système avec paramètre

L'objectif de ce problème est de résoudre le système :

$$(S)\begin{cases} ax+(1-a)y+(1-a)z=a^2 & (1)\\ ax+(1+a)y+(1+a)z=a-a^2 & (2)\\ x+y+z=1-a & (3)\end{cases}$$

où x, y et z sont les inconnues et a est un nombre réel.

1. *Un premier cas particulier :* $a=0$.

a. Écrire (S).

b. Résoudre (S) et démontrer qu'il possède une infinité de solutions qui sont de la forme : $\{(1\,;y\,;-y),\ y\in\mathbb{R}\}$.

2. *Un deuxième cas particulier :* $a=\dfrac{1}{2}$.

a. Écrire (S).

b. Résoudre (S) et démontrer qu'il possède une infinité de solutions qui sont de la forme : $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\,;y\,;-y\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

3. *Un troisième cas particulier :* $a=-1$.

a. Écrire (S).

b. Résoudre (S) et démontrer qu'il n'a pas de solution.

4. *Le cas général :* $a\notin\left\{-1\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right\}$

a. • Écrire l'équation $(1')=(1+a)\times(1)-(1-a)\times(2)$.

• En déduire une expression de x en fonction de a.

b. • Écrire l'équation $(2')=(1+a)\times(3)-(2)$.

• En déduire une autre expression de x en fonction de a.

c. • Utiliser les deux expressions de x pour obtenir une équation du second degré d'inconnue a.

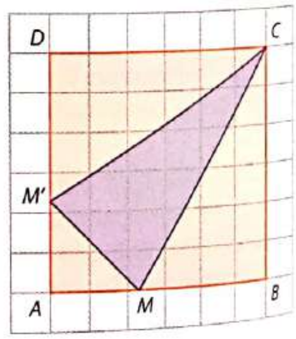
• Résoudre cette équation et en déduire les seules valeurs possibles du paramètre a.

5. *Conclusion*

Récapituler les solutions du système en fonction des valeurs du paramètre a.

93 Triangle dans un carré

$ABCD$ désigne un carré de côté 6 cm. Les points M et M' respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AD]$ sont tels que $AM=AM'$.



1. *Modélisation et conjecture*

a. Ouvrir une feuille sur Geogebra et reproduire la figure. Utiliser un curseur pour rendre les points M et M' mobiles.

b. Conjecturer la position du point M pour que l'aire du triangle $MM'C$:

• soit égale à 9 ;

• soit supérieure au quart de l'aire du carré.

2. *Résolution algébrique*

On pose $x=AM$.

a. À quel intervalle appartient x ?

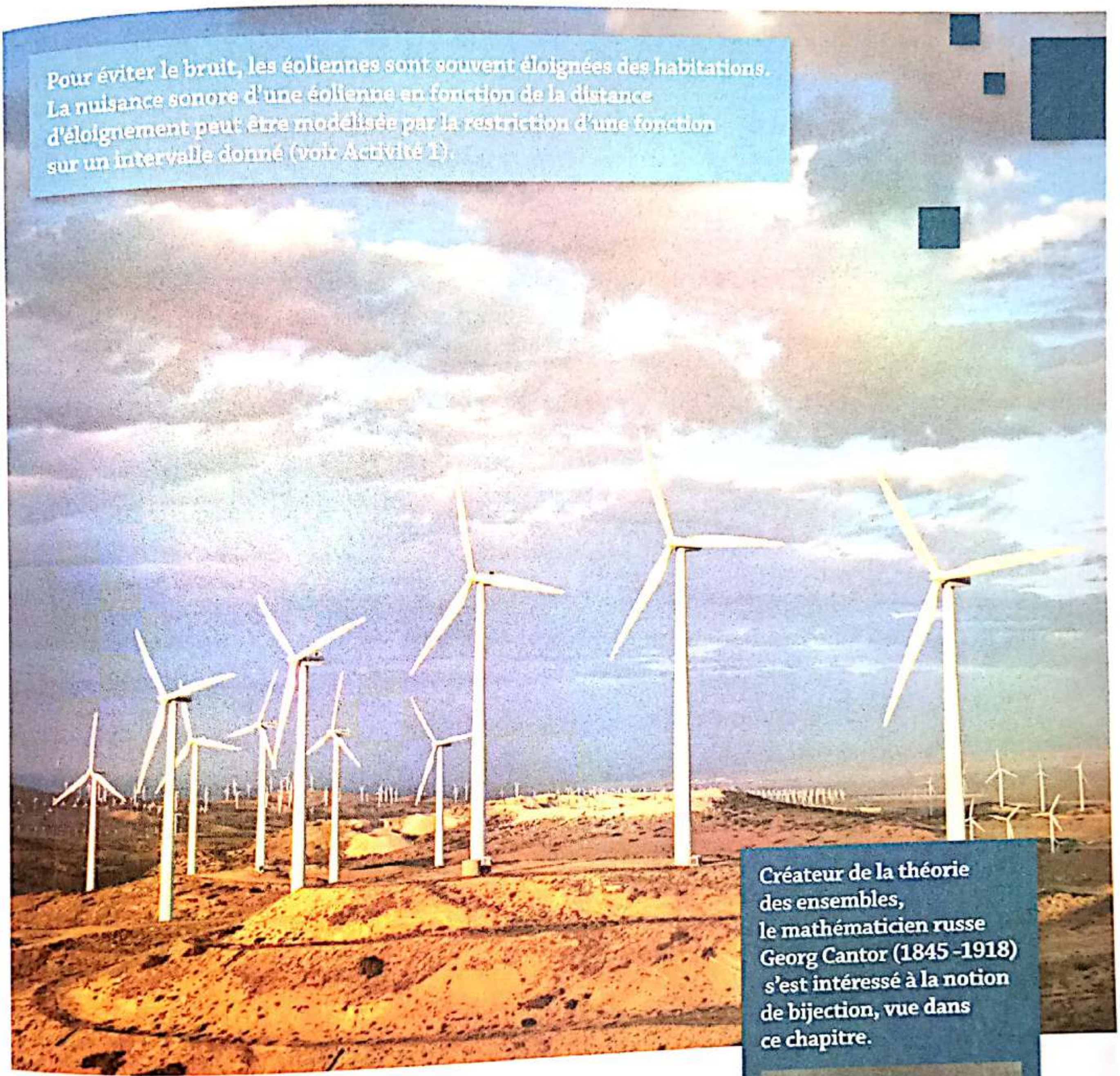
b. Exprimer l'aire $A(x)$ du triangle $MM'C$ en fonction de x.

c. Résoudre l'équation $A(x)=9$.

d. Résoudre l'inéquation $A(x)\geqslant 9$.

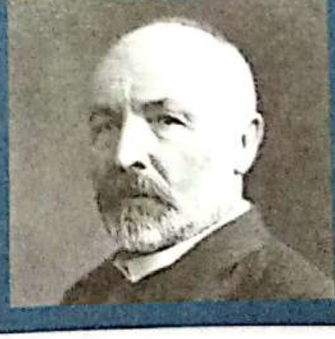
e. Comparer les résultats obtenus avec les conjectures du 1.

9 Généralités sur les applications



Pour éviter le bruit, les éoliennes sont souvent éloignées des habitations. La nuisance sonore d'une éolienne en fonction de la distance d'éloignement peut être modélisée par la restriction d'une fonction sur un intervalle donné (voir Activité 1).

Créateur de la théorie des ensembles, le mathématicien russe Georg Cantor (1845 -1918) s'est intéressé à la notion de bijection, vue dans ce chapitre.



Les objectifs du chapitre

- Comprendre les notions d'application, de surjection, d'injection, de bijection au travers d'exemples vus au Lycée.
- Comprendre les notions de restriction et de prolongement d'une application.
- Savoir composer deux applications.
- Savoir représenter facilement une fonction associée à une fonction usuelle.

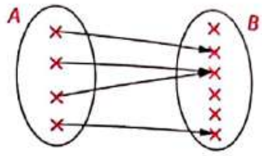
Cours

1 Notion d'application

a Définitions et propriétés

Définitions

- Une **application** d'un ensemble A vers un ensemble B est une relation dans laquelle chaque élément de A est relié à un élément de B.
- A est appelé **ensemble de départ** et B **ensemble d'arrivée**.



Propriétés

Toute fonction est une application de son domaine de définition vers $\mathbb{R}$.
Toute transformation du plan est une application du plan vers lui-même.

Exemple

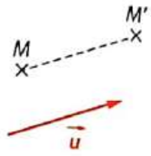
f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est une application de $A = [0\,;+\infty[$ (ensemble de départ) vers $B = \mathbb{R}$ (ensemble d'arrivée).

Exemple

t désigne la translation de vecteur $\vec{u}$.

t est une application de $A = \mathcal{P}$ (l'ensemble des points du plan) vers $\mathcal{P}$ lui-même.

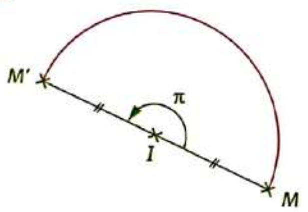


Définition

Deux **applications** f et g sont **égales** lorsque :

- elles ont le même ensemble de départ A et le même ensemble d'arrivée B ;
- et elles coïncident sur A, c'est-à-dire, que pour tout a de A, $f(a) = g(a)$.

Exemple



I désigne un point du plan.

S_I est la symétrie centrale de centre I, c'est une application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même.

r est la rotation de centre I et d'angle π, c'est une application du plan dans lui-même.

Pour tout point M du plan, $S_I(M) = r(M)$, donc S_I et r sont égales.

b Restriction, prolongement d'une application

Définitions

f désigne une application de A vers B et E un sous-ensemble de A.

La **restriction** de f à E est l'application $g : \begin{array}{l} E \to B \\ a \mapsto f(a) \end{array}$

On dit alors que f est un **prolongement** de g à A.

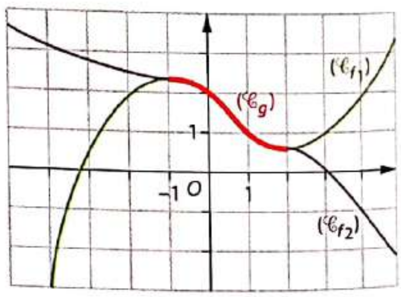
Exemple

g désigne la fonction définie sur $[-1\,;2]$ et représentée en rouge dans le repère ci-contre.

Les fonctions f_1 et f_2, définies sur $\mathbb{R}$ sont également représentées. Elles coïncident avec g sur $[-1\,;2]$.

g est alors une restriction de f_1 et de f_2 à $[-1\,;2]$.

f_1 et f_2 sont donc des prolongements de g à $\mathbb{R}$.



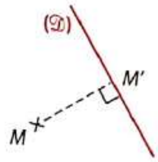
1 Comprendre la notion d'application

Dans chacun des cas, dire si u est une application.
a. **u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(x)=-3+2\sqrt{x}$;**
b. **$(\mathcal{D})$ est une droite du plan et u la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$;**
c. **u est la relation qui, à un point M associe l'ensemble des points du cercle de centre M et de rayon 3.**

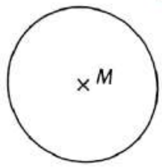
Solution commentée

a. f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, c'est donc une application de l'ensemble de départ $A=[0\,;+\infty[$ sur l'ensemble d'arrivée $B=\mathbb{R}$.

b. On note $(\mathcal{P})$ l'ensemble des points du plan.
Tout point M du plan $(\mathcal{P})$ est relié à un unique point M' de $(\mathcal{D})$ (son projeté orthogonal).
u est donc une application de $A=(\mathcal{P})$ sur $B=(\mathcal{D})$.



c. On note $(\mathcal{P})$ l'ensemble des points du plan.
Tout point M du plan est relié à une infinité de points (chaque point du cercle de centre M et de rayon 3).
Donc u n'est pas une application.



Méthode

a. Utiliser la propriété du paragraphe 1.a. du cours.

b. et c. Dans le cas où il ne s'agit pas d'une fonction, vérifier que la définition du paragraphe 1.a. s'applique : c'est-à-dire que chaque élément de l'ensemble de départ A est relié à un unique élément de l'ensemble d'arrivée B.

2 Savoir dire si deux applications sont égales

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+2$.
Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle qui est égale à f.

- $g : x \mapsto g(x)=\dfrac{2(x^3+x)}{x}$;
- $h : x \mapsto h(x)=2\,|x^2+1|$.

Solution commentée

1. L'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, or $\mathcal{D}_g\neq\mathcal{D}_f$, donc f et g ne sont pas égales (même si, pour tout $x\neq 0$,
$$g(x)=\frac{2x(x^2+1)}{x}=2(x^2+1)=f(x).)$$
L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}$.
Donc $\mathcal{D}_h=\mathcal{D}_f$.
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $2|x^2+1|=2(x^2+1)$, ainsi $f(x)=h(x)$.
3. Puisque ce sont des fonctions qui coïncident sur leur ensemble de définition, elles sont égales.

Méthode

Pour vérifier si deux applications sont égales, il faut :
1. s'assurer qu'elles ont le même ensemble de départ (ou de définition) ;
2. s'assurer que, sur cet ensemble de départ, elles coïncident ;
3. s'assurer qu'elles ont le même ensemble d'arrivée.

S'exercer

3 Dans chacun des cas, dire si u est une application. Préciser alors son ensemble de départ et celui d'arrivée.
a. u est la relation, qui à un nombre entier naturel, associe son triple.
b. u est la fonction $x \mapsto u(x)=3x-1$.
c. I est un point du plan et u est la symétrie centrale de centre I.

4 Sur quel ensemble les fonctions ci-dessous sont-elles égales ? Justifier.
a. • $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x+1}$; • $g : x \mapsto \sqrt{(x-1)^2}$.
b. • $h : x \mapsto \dfrac{3x-5}{|x|+1}$; • $i : x \mapsto \dfrac{3x-5}{x+1}$.

C Image et antécédent (rappels)

Définitions

f désigne une application de A vers B. $a \in A$ et $b \in B$ sont tels que $f(a) = b$.

- b est appelé **image de a** par f ;
- a est appelé **antécédent de b** par f ;

On note E un sous-ensemble de A et F un sous-ensemble de B.

- L'**image de E** par f est l'ensemble, noté $f(E)$, des images par f de tous les éléments de E.
- L'**image réciproque de F** par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(F)$, des antécédents par f de tous les éléments de F.

Exemple

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

$$f(4) = 2 \times 4 - 3 = 5.$$

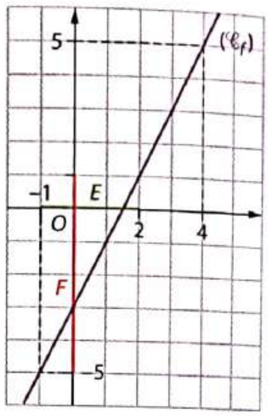
Donc 5 est l'image de 4 par f et 4 est l'antécédent de 5 par f.

On pose $E = [-1 ; 2]$, on observe sur le graphique que l'image de E par f est :

$$f(E) = f([-1 ; 2]) = [-5 ; 1].$$

On peut dire également que l'image réciproque de $F = [-5 ; 1]$ par f est :

$$f^{-1}([-5 ; 1]) = [-1 ; 2].$$



2 Composition de deux applications

Définition

A, B et C désignent trois ensembles.

f est une application de A sur B et g une application de B sur C.

La **composée de f par g** est l'application de A vers C, notée $g \circ f$, qui, à tout élément a de A associe l'élément $g(f(a))$ de C.

Schéma illustratif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ a \arrow[r, mapsto] & f(a) = b \arrow[r, mapsto] & g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) \end{tikzcd}$$

Remarques

- Pour pouvoir effectuer la composition $g \circ f$ des deux applications f et g, il faut s'assurer que l'ensemble d'arrivée de f est contenu dans l'ensemble de départ g.
- Attention, en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple

f désigne la fonction définie sur $A = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. L'ensemble d'arrivée de f (c'est-à-dire l'image de $\mathbb{R}$ par f) est $B = [0 ; +\infty[$.

g est la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$. L'ensemble de départ g contient l'ensemble d'arrivée de $f(\mathbb{R}) \subset]-1 ; +\infty[$.

$$\begin{array}{lccccl} g \circ f : \mathbb{R} & \xrightarrow{f} &]-1 ; +\infty[& \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = x^2 & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \dfrac{2}{x^2+1}. \end{array}$$

5 Déterminer l'image et l'image réciproque d'un ensemble

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

a. Déterminer l'image de $[-1\,;2]$ par f.

b. Déterminer l'image réciproque de $[4\,;12]$ par f.

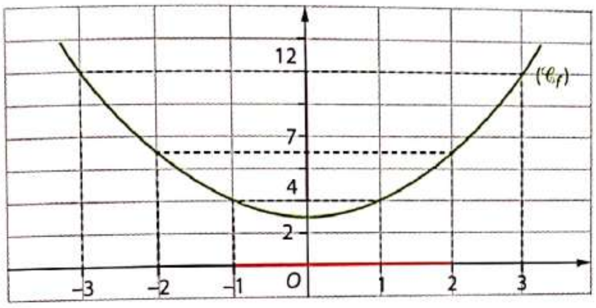
Solution commentée

a. $x \in [-1\,;2] \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$
$\Leftrightarrow 3 \leqslant x^2 + 3 \leqslant 7 \Leftrightarrow 3 \leqslant f(x) \leqslant 7$.

Donc $f([-1\,;2]) = [3\,;7]$: l'image de $[-1\,;2]$ par f est $[3\,;7]$.

b. $4 \leqslant f(x) \leqslant 12 \Leftrightarrow 4 \leqslant x^2 + 3 \leqslant 12 \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \leqslant 9$
$\Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Donc $f^{-1}([4\,;12]) = [-3\,;-1] \cup [1\,;3]$: l'image réciproque de $[4\,;12]$ par f est $[-3\,;-1] \cup [1\,;3]$.



Méthode

Pour déterminer l'image (ou l'image réciproque) d'un intervalle par une fonction f ;

- penser à utiliser des inégalités ;
- penser à vérifier la cohérence sur un graphique (obtenu, par exemple, à la calculatrice).

6 Déterminer la composée de deux fonctions

f désigne la fonction définie $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{5}{x-1}$.

Déterminer : a. $g \circ f$; b. $f \circ g$.

Solution commentée

a. L'image de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par f est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. D'où le schéma :

$$g \circ f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\setminus\{1\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3x^2 + 1 \longmapsto g(3x^2+1) = \frac{5}{3x^2+1-1} = \frac{5}{3x^2}.$$

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g \circ f(x) = \dfrac{5}{3x^2}$.

b. L'image de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par g est $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. D'où le schéma :

$$f \circ g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{5}{x-1} \longmapsto f\left(\frac{5}{x-1}\right) = 3\left(\frac{5}{x-1}\right)^2 + 1 = \frac{75}{(x-1)^2} + 1.$$

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f \circ g(x) = \dfrac{75}{(x-1)^2} + 1$.

Méthode

Pour déterminer $g \circ f$:

- vérifier que l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble départ de g ;
- utiliser le schéma illustratif du cours, paragraphe 2.

Remarque

Dans cet exercice, on observe que $g \circ f \neq f \circ g$.

S'exercer

7 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 5.$$

a. Déterminer l'image de $[2\,;7]$ par f.

b. Déterminer l'image réciproque de $[0\,;1]$ par f.

8 f désigne la fonction définie sur $]-3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x+3}$$

et g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}$.

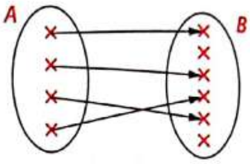
Déterminer : a. $g \circ f$; b. $f \circ g$.

3 Applications particulières

a Application injective

Définition

f désigne une application d'un ensemble A sur un ensemble B.
L'**application** f est dite **injective** (ou f est appelée **injection**) lorsque tout élément de B a **au plus** un antécédent par f.



Exemple

f désigne la fonction : $\begin{array}{l} [0\,;2] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Tout élément y de $\mathbb{R}$ possède au plus un antécédent par f :
- si $y < 0$ ou si $y > 4$, alors, il n'en possède pas ;
- si $0 \leqslant y \leqslant 4$, alors, il en possède un : $x = \sqrt{y}$.

Donc f est une application injective.

Contre-exemple

g désigne la fonction : $\begin{array}{l} [-2\,;2] \to [0\,;4] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Il existe un élément de $\mathbb{R}$ qui possède plus d'un antécédent par g :
par exemple, $y = 4$ possède deux antécédents par g ($x = 2$ et $x = -2$).
Donc g n'est pas une application injective.

Propriété

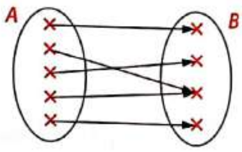
Une application f d'un ensemble A sur un ensemble B est injective si, et seulement si, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Remarque La condition : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ peut également s'énoncer (contraposée) : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

b Application surjective

Définition

f désigne une application d'un ensemble A sur un ensemble B.
L'**application** f est dite **surjective** (ou f est appelée **surjection**) lorsque tout élément de B a **au moins** un antécédent par f.



Exemple

h désigne la fonction : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0\,;4] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Tout élément y de $[0\,;4]$ possède au moins un antécédent par h.
Donc h est une application surjective.

Contre-exemple :

i désigne la fonction : $\begin{array}{l} [-2\,;2] \to [0\,;5] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Il existe un élément y de $[0\,;5]$ qui ne possède pas d'antécédent par i (par exemple $y = 5$).
Donc i n'est pas une application surjective.

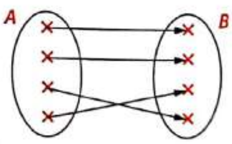
Propriété

Une application f d'un ensemble A sur un ensemble B est surjective si, et seulement si, $f(A) = B$.

c Application bijective

Définition

f désigne une application d'un ensemble A sur un ensemble B.
L'**application** f est dite **bijective** (ou f est appelée **bijection**) lorsque f est injective et surjective.



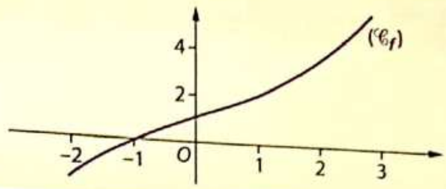
Remarque Ainsi $f : A \to B$ est bijective lorsque tout élément de B admet un unique antécédent par f.

Définition

f désigne une application bijective de A sur B et g une application de B sur A.
g est appelée **bijection réciproque** de f, et notée $g = f^{-1}$, lorsque, pour tout a de A, $g \circ f(a) = a$ (que l'on note $g \circ f = \mathrm{Id}_A$) ou pour tout b de B, $f \circ g(b) = b$ (que l'on note $f \circ g = \mathrm{Id}_B$).

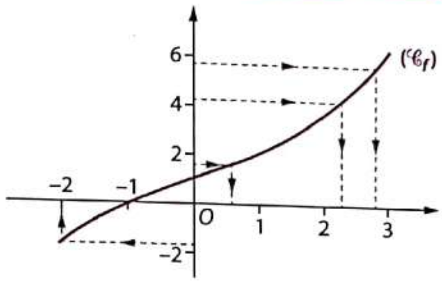
9 Savoir reconnaître une application injective

a. **f désigne la fonction définie sur $[-2\,;3]$ et représentée dans le repère ci-contre.**
f est-elle une application injective ?
b. **g désigne l'application qui, a tout nombre entier relatif associe son carré.**
g est-elle une application injective ?



Solution commentée

a. f est une fonction de $A=[-2\,;3]$ dans $B=\mathbb{R}$, donc c'est une application.
Toute droite d'équation $y=b$, avec $b\in\mathbb{R}$ rencontre $(\mathscr{C}_f)$ au plus une fois, ce qui signifie que, tout élément de b de $\mathbb{R}$ a au plus un antécédent par f : f est donc injective.



b. Pour tout n de $A=\mathbb{Z}$, $g(n)=n^2$.
Or, $g(-3)=g(3)$ $(=9)$ et $3\neq-3$, donc la condition $g(a)=g(b)\Rightarrow a=b$ n'est pas vérifiée : g n'est donc pas injective.

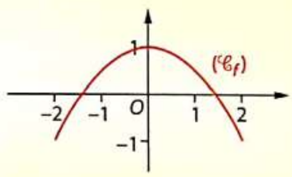
Méthode

a. Graphiquement, pour reconnaître une fonction injective, il faut s'assurer que, pour tout b de $\mathbb{R}$, les droites d'équation $y=b$ coupent $(\mathscr{C}_f)$ au plus une fois (ainsi, chaque b de $\mathbb{R}$ a au plus un antécédent par f).

b. Utiliser la propriété du paragraphe **3.a.** ou la remarque.

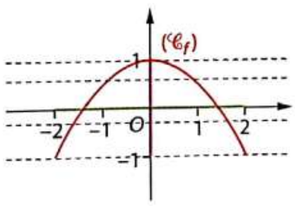
10 Savoir reconnaître une application surjective

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;2]$ et à valeurs dans $[-1\,;1]$ d'expression $f(x)=-0{,}5\,x^2+1$.
Elle est représentée dans le repère ci-contre.
a. **Utiliser le graphique pour dire si f est une application surjective.**
b. **Justifier par un calcul la réponse du a.**



Solution commentée

a. f est une fonction de $A=[-2\,;2]$ dans $B=[-1\,;1]$, donc c'est une application.
Toute droite d'équation $y=b$ avec $b\in[-1\,;1]$ rencontre $(\mathscr{C}_f)$ au moins une fois, ce qui signifie que tout élément b de $B=[-1\,;1]$ a au moins un antécédent par f : f est donc surjective.



b. $-2\leqslant x\leqslant 2 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 4 \Leftrightarrow -2\leqslant -0{,}5\,x^2\leqslant 0 \Leftrightarrow -1\leqslant -0{,}5\,x^2+1\leqslant 1$
$\Leftrightarrow -1\leqslant f(x)\leqslant 1 \Leftrightarrow f(x)\in[-1\,;1]$.
Ainsi, $f([-2\,;2])=[-1\,;1]$, donc f est surjective.

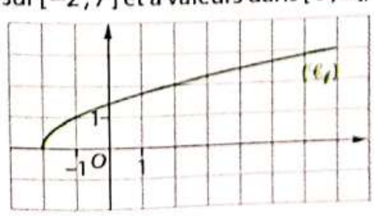
Méthode

a. Graphiquement, pour reconnaître une fonction surjective, il faut s'assurer que, pour tout b de B, les droites d'équation $y=b$ coupent $(\mathscr{C}_f)$ au moins une fois (ainsi, chaque b de B a au moins un antécédent par f).

b. Utiliser la propriété du paragraphe **3.b.**

S'exercer

11 La fonction f définie sur $[-2\,;7]$ et à valeurs dans $[0\,;3]$, représentée ci-contre, est-elle :
a. injective ?
b. surjective ?
c. bijective ?



12 $(\mathscr{D})$ désigne une droite du plan. L'application p est la projection orthogonale sur la droite $(\mathscr{D})$.
Cette application est-elle :
a. injective ?
b. surjective ?
c. bijective ?

4 Fonctions associées

a Opérations sur les fonctions

f et g désignent deux fonctions dont les ensembles de définition sont notés $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

Le tableau indique comment, à partir de f et g, obtenir de nouvelles fonctions grâce aux opérations usuelles.

	Notation	Expression	Ensemble de définition
Somme	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
Produit	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$
Quotient	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)\setminus\{x\in\mathcal{D}_g / g(x)=0\}$
Racine carrée	$\sqrt{f}$	$\sqrt{f}(x)=\sqrt{f(x)}$	$\mathcal{D}_f\setminus\{x\in\mathcal{D}_f / f(x)<0\}$

Remarques

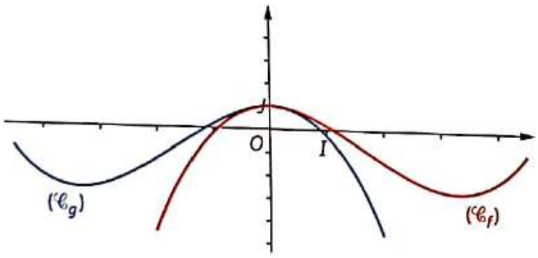
- Lorsque f est la fonction constante égale à k, le produit $f\times g$ est $k\times g$ et l'expression de cette fonction est $(k\times g)(x)=k\times g(x)$.
- Lorsque f est la fonction constante égale à 1, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est $\dfrac{1}{g}$ (appelé inverse de g) et l'expression de cette fonction est $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{g(x)}$.

b Courbes représentatives et transformations du plan

f désigne une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J)

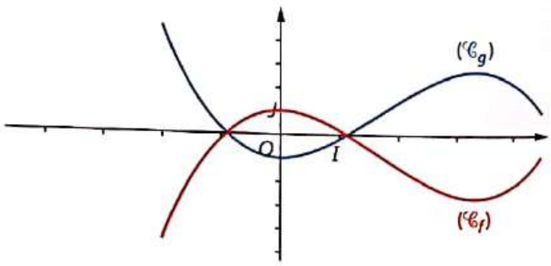
Propriété 1

La courbe représentative de la fonction $g : x \to f(-x)$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$ par symétrie orthogonale d'axe (OJ).



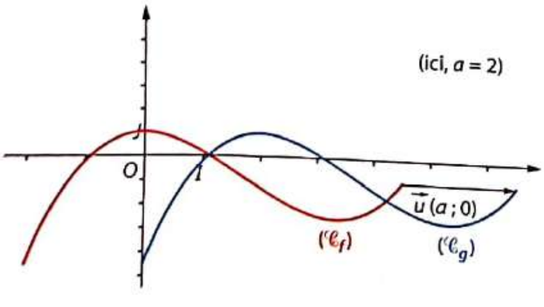
Propriété 2

La courbe représentative de la fonction $g : x \to -f(x)$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$ par symétrie orthogonale d'axe (OI).



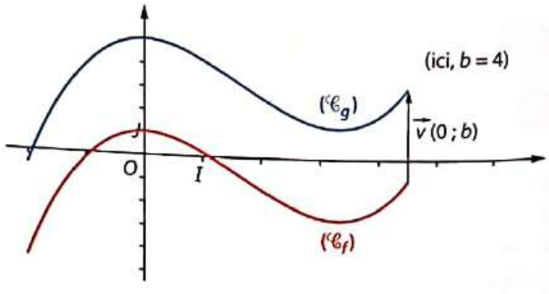
Propriété 3

a désigne un nombre réel.
La courbe représentative de la fonction $g : x \to f(x-a)$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\,(a\,;0)$.



Propriété 4

b désigne un nombre réel.
La courbe représentative de la fonction $g : x \to f(x)+b$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{v}\,(0\,;b)$.



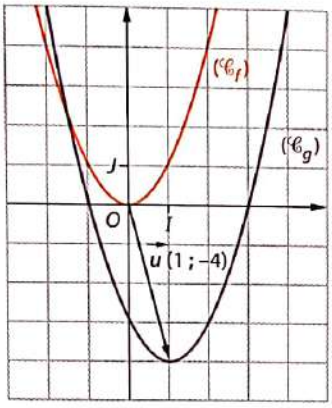
13 Déduire une courbe de la courbe d'une fonction usuelle

g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)(x-3)$.
On note $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).
a. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = (x-1)^2 - 4$.
b. En déduire la courbe $(\mathscr{C}_g)$ à partir de la courbe d'une fonction usuelle.

Solution commentée

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)(x-3) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$.
D'où l'égalité demandée :
$g(x) = (x-1)^2 - 4$.

b. On note f la fonction carré : $x \mapsto x^2$.
En utilisant le résultat de **a.**, on en déduit que $g : x \mapsto f(x-1) - 4$.
Donc, d'après les propriétés **3** et **4**, $(\mathscr{C}_g)$ se déduit de la courbe représentative de la fonction carré par translation de vecteur $\vec{u}\,(1\,;-4)$.



Méthode

La question **a.** sert à modifier l'expression de $g(x)$ afin de l'écrire sous la forme de l'une (ou des) propriété(s) du paragraphe **4. b.**

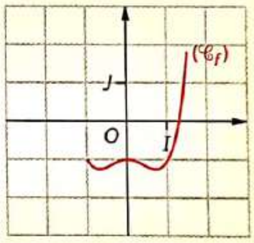
Utiliser ensuite cette (ou ces) propriété(s) pour en déduire la courbe $(\mathscr{C}_g)$ à partir de celle d'une fonction usuelle f.

Remarque

La translation de vecteur $\vec{u}\,(a\,;0)$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}\,(0\,;b)$ revient à la translation de vecteur $\vec{w}\,(a\,;b)$.

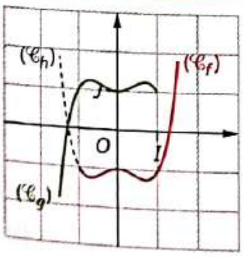
14 Savoir interpréter certaines symétries dans un repère

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;3]$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ est tracée dans le repère (O, I, J) ci-contre.
a. Représenter $(\mathscr{C}_f)$ à main levée ; puis tracer la courbe $(\mathscr{C}_g)$ symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport au point O.
b. Exprimer $g(x)$ en utilisant la fonction f.



Solution commentée

a.



b. Si on note $(\mathscr{C}_h)$ la courbe symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OJ), alors on a : $h : x \mapsto f(-x)$ d'après la propriété **1**.
$(\mathscr{C}_g)$ est la courbe symétrique de $(\mathscr{C}_h)$ par rapport à (OI), on a donc $g : x \mapsto -h(x)$ d'après la propriété **2**.
Ainsi, $g : x \mapsto g(x) = -f(-x)$.

Méthode

a. Utiliser les propriétés des transformations vues au chapitre **4** pour tracer la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

b. Appliquer les propriétés **1** et **2** du paragraphe **4. b.**

S'exercer

15 g désigne la fonction définie sur $[4\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \sqrt{x-4} + 3.$$
Comment tracer rapidement, dans un repère, la courbe représentative de la fonction g à partir de la courbe d'une fonction usuelle ?

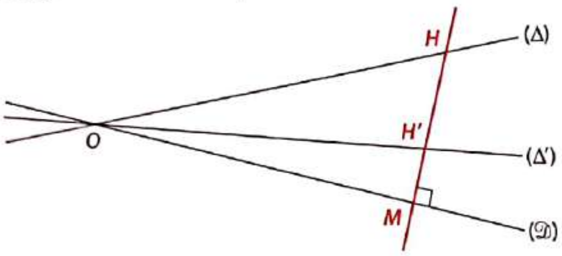
16 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).
Les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ sont obtenues respectivement par translation de $(\mathscr{C}_f)$ par le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;-2)$ et par symétrie orthogonale d'axe (OJ).
Exprimer $g(x)$ et $h(x)$ en utilisant f.

Exercices d'entraînement

Notion d'application

Réponses rapides

17 $(\mathscr{D})$, (Δ) et (Δ') désignent trois droites sécantes en O.
Par un point M de $(\mathscr{D})$, on trace la perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par M, elle coupe (Δ) en H et (Δ') en H'.
$(\mathscr{P})$ désigne l'ensemble des points du plan.

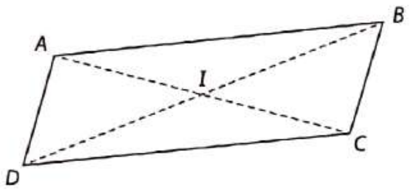


L'une des deux relations suivantes n'est pas une application. Dire laquelle et expliquer.

a. f est la relation qui, à tout point M de $(\mathscr{D})$, associe le point H de (Δ).

b. g est la relation qui, à tout point M de $(\mathscr{D})$, associe les points H et H'.

18 $ABCD$ désigne le parallélogramme de centre I ci-dessous.

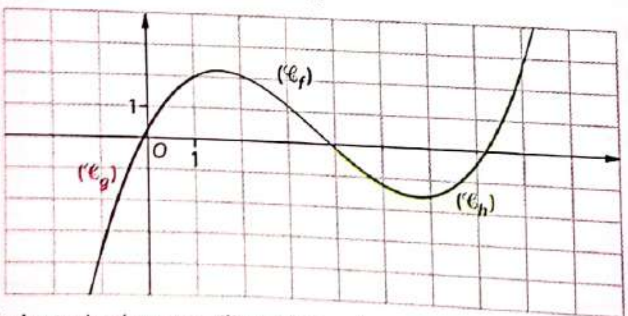


f est une application dont l'ensemble de départ est le segment $[AB]$.
Déterminer l'ensemble d'arrivée de f :

a. lorsque f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$;

b. lorsque f est la symétrie centrale de centre I.

19 Les courbes représentées dans le repère ci-dessous sont celles de trois fonctions f, g, h définies respectivement sur $\mathbb{R}$, sur $[-1 ; 1]$ et sur $[4 ; 8]$.
Pour tout x de $[-1 ; 1]$, $g(x) = f(x)$ et,
pour tout x de $[4 ; 8]$, $h(x) = f(x)$.



Écrire trois phrases utilisant les mots :
« prolongement » et « restriction ».

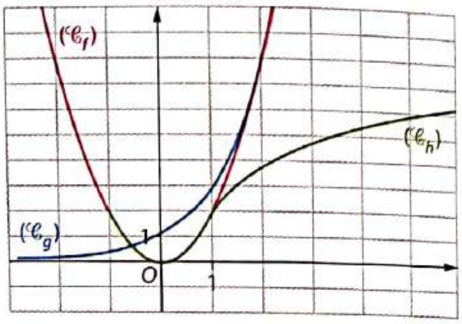
20 La relation qui, à tout point M d'un repère, associe son abscisse est-elle une application ?
Si oui, préciser son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

21 $(\mathscr{D})$ et (Δ) désignent deux droites sécantes. Par un point M de $(\mathscr{D})$, on trace la perpendiculaire, notée (Δ_M), à (Δ) passant par M.

a. Faire une figure.

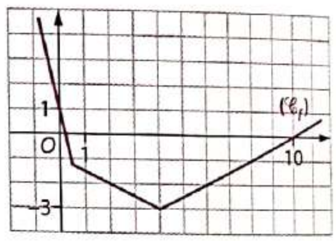
b. $(\mathscr{P})$ désigne l'ensemble des points du plan. On note u la relation qui, à tout point M de $(\mathscr{D})$, associe la droite (Δ_M).
u est-elle une application de $(\mathscr{P})$ dans $(\mathscr{P})$?
Justifier.

22 Les courbes représentatives dans le repère ci-dessous sont celles de trois fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$, sur $]-\infty ; 3]$ et sur $[-1 ; +\infty[$.



Peut-on conjecturer que, sur des intervalles à préciser, ces fonctions sont deux à deux égales ?

23 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ représentée dans le repère ci-contre. Déterminer l'application affine g qui est égale à f sur l'inter-valle $\left[-\frac{1}{2} ; 4\right]$.



24 f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = |x-1| + 2|3-x|.$$
Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

Aide
Commencer par écrire $f(x)$ sans valeurs absolues en utilisant un tableau de signes.

25 **a.** Développer les expressions :
- $g(x) = (2x+3)^2 - 16$;
- $h(x) = (2x-1)(2x+7)$.

b. Les fonctions ci-dessous sont-elles égales ? Justifier.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto f(x) = 4x^2 + 12x - 7$;
- $g : \mathbb{R} \to [-16 ; +\infty[$
  $x \mapsto g(x)$;
- $h : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$
  $x \mapsto h(x)$.

26 f désigne la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = |x-2|.$$
Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer celles qui sont égales à f.

a. $g(x) = \dfrac{|6x-12|}{6}$;

b. $h(x) = \dfrac{(x-2)^2}{|x-2|}$;

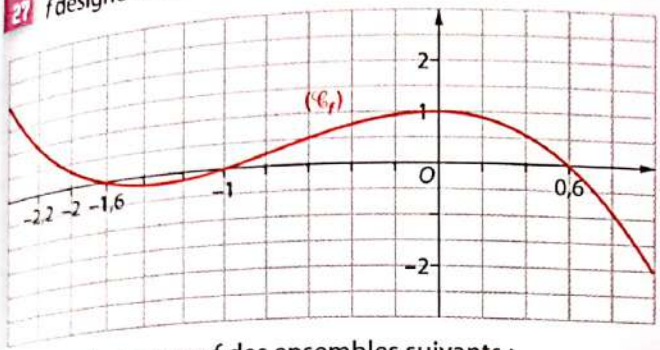
c. $k(x) = \left|\dfrac{x^2+x-6}{x+3}\right|$;

d. $\ell(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$.

Image, image réciproque

Réponses rapides

27 f désigne la fonction représentée dans le repère ci-dessous.



a. Lire les images par f des ensembles suivants :
- $[0;0{,}6]$;
- $[-1;0]$;
- $[0;1]$.

b. Lire les images réciproques par f des ensembles suivants :
- $[1;2]$;
- $[0;1]$;
- $[-2;2]$.

28 A, B, C et I désignent quatre points du plan et s_I est la symétrie centrale de centre I.

a. Représenter l'image de $[AB]$ par I.

b. Représenter l'image réciproque de (AC) par I.

c. Représenter $s_I^{-1}([BC])$ et $s_I((BC))$.

29 Déterminer par le calcul l'image de $[-3;4]$ par f dans chacun des cas suivants :

a. $f : x \mapsto -5x+1$;

b. $f : x \mapsto 2(x-1)^2$;

c. $f : x \mapsto \dfrac{-4}{x+5}$;

d. $f : x \mapsto -2(x+1)^3$.

Aide

Raisonner en utilisant les règles de calcul sur les inégalités :
$x \in [-3;4] \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 4 \Leftrightarrow -20 \leqslant -5x \leqslant 15 \ldots$

30 Déterminer par calcul l'image réciproque de $[1;2]$ par f dans chacun des cas suivants :

a. $f : x \mapsto 3x-4$;

b. $f : x \mapsto 3(x+2)$;

c. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$;

d. $f : x \mapsto \dfrac{5}{x-3}$.

31 a. f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 - 1.$$
Déterminer : • $f([-5;5])$; • $f^{-1}([0;4])$.

b. g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2|x-5|.$$
Déterminer : • $g([2;+\infty[)$; • $g^{-1}([0;4])$.

32 $(\mathscr{D})$ désigne une droite du plan $(\mathscr{P})$ et p est l'application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même, qui, à tout point M associe son projeté orthogonal sur $(\mathscr{D})$.

a. Déterminer $p((\mathscr{P}))$.

b. (Δ) désigne une droite perpendiculaire à $(\mathscr{D})$. Déterminer $p((\Delta))$.

c. A et B sont deux points de $(\mathscr{D})$. Représenter $p^{-1}([AB])$.

Composition d'applications

Réponses rapides

33 Utiliser le schéma ci-dessous pour déterminer $g \circ f(x)$ dans chacun des cas suivants.
(On ne demande pas de préciser les ensembles A, B et C.)

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g \circ f(x) = g(f(x)).$$

a. $f(x) = 2x+3$; $g(x) = x^2$.

b. $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x+3$.

c. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = 2x^3+5$.

d. $f(x) = \sqrt{3x+5}$; $g(x) = 5x^2-5$

34 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x-1$.

a. Déterminer $f(\mathbb{R})$.

b. Exprimer $f \circ f(x)$.

c. Reprendre les questions précédentes avec $f(x) = -3x+4$.

35 a et b désignent deux nombres réels.
f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$f(x) = -2x+3 \quad \text{et} \quad g(x) = ax+b.$$

a. Pour tout nombre réel x, calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

b. Déterminer un couple $(a;b)$ de nombres réels tel que :
$$g \circ f = f \circ g.$$

36 f et g désignent les fonctions d'expressions :
$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3x^2 - 1.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition A de f ; puis l'image de A par f. On note B cette image.

b. Déterminer l'image de B par g.

c. Reproduire et compléter le schéma suivant.

$$g \circ f : \ldots \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$$
$$x \longmapsto f(x) = \ldots \longmapsto g \circ f(x) = \ldots .$$

37 f et g désignent les fonctions d'expressions :
$$f(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+2} + 5.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition A de f ; puis l'image de A par f. On note B cette image.

b. Déterminer l'image de B par g.

c. Reproduire et compléter le schéma suivant :

$$g \circ f : \ldots \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{g} \ldots$$
$$x \longmapsto f(x) = \ldots \longmapsto g \circ f(x) = \ldots .$$

38 a. Reproduire la figure ci-contre.

b. On note s_I la symétrie centrale de centre I et p la projection orthogonale sur la droite $(\mathscr{D})$.
- Placer un point M_1 quelconque.
- Construire $s_I \circ p(M_1)$.
- Recommencer avec d'autres points M_2, M_3 et M_4.

c. Placer un point N_1 quelconque.
- Construire $p \circ s_I(N_1)$.
- Recommencer avec d'autres points N_2, N_3 et N_4.

39 A et B désignent deux points du plan.

a. On note $s_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB).
Déterminer $s_{(AB)} \circ s_{(AB)}$.

b. On note $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

c. On note s_A la symétrie centrale de centre A.
Déterminer $s_A \circ s_A$.

40 f, g et h sont les fonctions d'expressions :

- $f(x) = -2x + 1$;
- $g(x) = 1 + 4x^2$;
- $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

a. Calculer $h \circ f(x)$; puis déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g$;

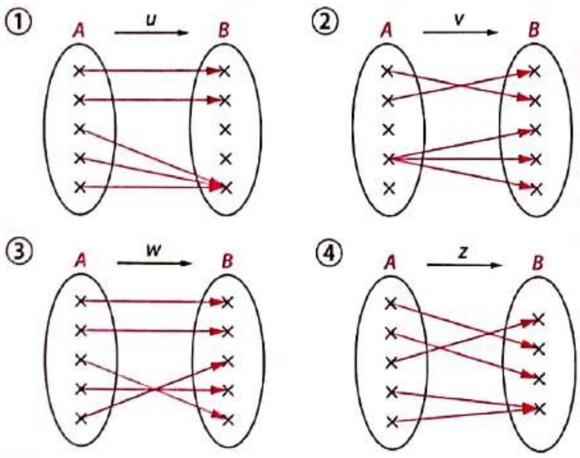
b. Calculer $h \circ f(x)$; puis déterminer l'ensemble de définition de $h \circ f$;

c. Calculer $h \circ g \circ f$; puis déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$.

Injection – Surjection – Bijection

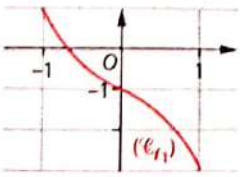
Réponses rapides

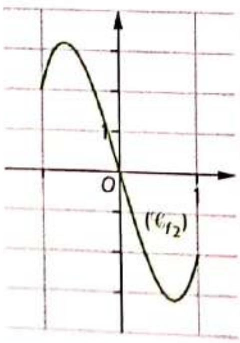
41 Pour les diagrammes ci-dessous, lorsqu'il s'agit d'une application, indiquer ceux qui correspondent à une injection, à une surjection, à une bijection.



42 I designe l'ensemble des nombres entiers impairs.
p désigne l'application qui, à n de $\mathbb{N}$ associe le nombre impair $2n + 1$ de I.
L'application p est-elle injective ? Est-elle surjective ?

43 Les fonctions
$f_1 : [-1\,;1] \to [-3\,;1]$ et
$f_2 : [-1\,;1] \to [-4{,}2\,;2{,}2]$ sont représentées dans un repère.





L'une d'elles est-elle bijective ? Laquelle ? Expliquer par des considérations graphiques.

44 f désigne la fonction représentée sur l'écran de calculatrice ci-dessous.

Déterminer un ensemble de départ A et un ensemble d'arrivée B pour que f soit :

a. une injection de A sur B, mais par une surjection ;

b. une surjection de A sur B, mais par une injection ;

c. une bijection de A sur B.

45 g désigne la fonction d'expression :
$$g(x) = 3x^2 + 1.$$
Déterminer un ensemble de départ A et un ensemble d'arrivée B pour que g soit :

a. une injection de A sur B, mais pas une surjection ;

b. une surjection de A sur B, mais pas une injection ;

c. une bijection de A sur B.

46 h désigne la fonction d'expression :
$$h(x) = |2x - 3|.$$
Déterminer un ensemble de départ A et un ensemble d'arrivée B pour que h soit :

a. une injection de A sur B, mais pas une surjection ;

b. une surjection de A sur B, mais pas une injection ;

c. une bijection de A sur B.

47 1. f désigne une fonction strictement décroissante sur un intervalle $[a\,;b]$.

a. Déterminer $B = f([a\,;b])$.

b. Démontrer que f est une bijection de $[a\,;b]$ sur B.

2. Reprendre les questions précédentes avec une fonction f strictement croissante sur $[a\,;b]$.

48 u désigne l'application de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$u(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} + 1, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
L'application u est-elle injective ? Est-elle surjective ?

49 On note $E = \{0\,;1\}$. À tout couple $(a\,;b)$ d'éléments de E, on associe le nombre $a + b - ab$.

a. Vérifier qu'on établit ainsi une application de $E \times E$ dans E.

b. Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

50 f désigne une application d'un ensemble A dans lui-même telle que : $f \circ f = f$.
Démontrer que si f est bijective, alors $f = \mathrm{Id}_A$.

Notation

Id_A est l'application identité de A sur A, c'est-à-dire l'application telle que, pour tout a de A, $\mathrm{Id}_A(a) = a$.

Fonctions associées

Réponses rapides

51 f et g désignent des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

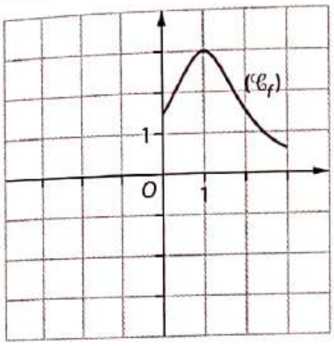
$$f(x)=2x+3 \quad \text{et} \quad g(x)=-5x+10.$$

Déterminer les ensembles de définition ; puis les expressions des fonctions suivantes :

a. $f+g$; b. $f\times g$; c. $f-g$;

d. $\dfrac{f}{g}$; e. $\sqrt{f}$; f. $\sqrt{g}$.

52 La courbe représentative d'une fonction f est représentée dans le repère ci-dessous.



a. Reproduire cette courbe à main levée.

b. Représenter par des couleurs différentes, les courbes $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ associées aux fonctions :

- $f_1 : x \mapsto f(-x)$; • $f_2 : x \mapsto -f(x)$;
- $f_3 : x \mapsto f(x-2)$; • $f_4 : x \mapsto f(x)-1$.

53 f et g désignent les fonctions définies par les expressions :

$$f(x)=2x+\sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x)=x-\sqrt{3x}.$$

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g.
2. Déterminer l'ensemble de définition ; puis l'expression des fonctions :

a. $f+g$; b. $f\times g$; c. $3f+\sqrt{3}g$.

54 Déterminer l'ensemble de définition ; puis l'expression des fonctions $\dfrac{f}{g}$, lorsque :

a. $f(x)=2x^2+1$ et $g(x)=3x^2-4x+1$;

b. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ et $g(x)=\sqrt{2x-1}$.

55 f et g désignent les fonctions définies par les expressions :

$$f(x)=(x+1)^3 \quad \text{et} \quad g(x)=(x-2)^2.$$

a. Trouver les nombres réels a et b tels que :

$$(af+bg)(x)=x^3+15x-11.$$

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\dfrac{af}{bg}$; puis son expression.

56 f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-5 \quad \text{et} \quad f(x)=x^3.$$

a. Représenter ces fonctions dans un repère.

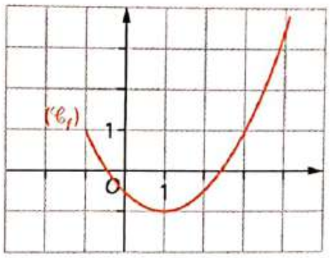
b. En déduire les représentations graphiques des fonctions :

$$h : x \mapsto |f(x)| \quad \text{et} \quad i : x \mapsto |g(x)|.$$

57 1. f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x$.

a. Déterminer $g\circ f(x)$.

b. Dans un repère, représenter une allure de la fonction $g\circ f$ dans le cas où la courbe représentative de f est celle ci-dessous.



2. Reprendre les questions précédents avec $f\circ g$.
3. Reprendre les questions précédentes avec $g\circ f\circ g$.

Aide

Penser à utiliser le schéma illustratif de la composition de deux applications : cours paragraphe 2.

58 Le tableau de variation d'un fonction f est dressé ci-dessous.

x	-3	1	2	5
$f(x)$	0 ↗	4 ↘	-3 ↗	8

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

a. $g : x \mapsto f(-x)$; b. $h : x \mapsto -f(x)$; c. $i : x \mapsto -f(-x)$.

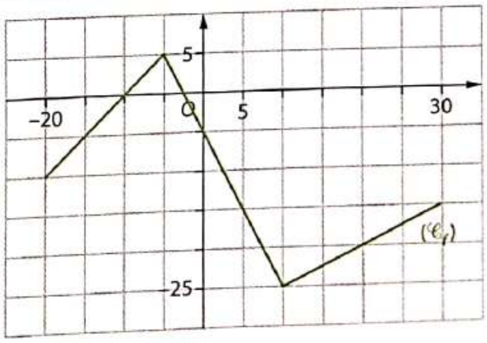
59 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x+c,$$

avec c un nombre réel fixé.

a. Déterminer $g\circ f(x)$; puis $f\circ g(x)$ et enfin $g\circ f\circ g(x)$.

b. Dans un repère, représenter chacune des fonctions du **a.** dans le cas où la courbe représentative de f est celle ci-dessous et pour $c=10$.



60 Le tableau de variation d'une fonction f est dressé ci-dessous.

x	-2	0	3	4
$f(x)$	1 ↘	-1 ↗	2 ↘	-3

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

a. $g : x \mapsto f(x-1)$;

b. $h : x \mapsto f(x)+2$;

c. $i : x \mapsto f(x-3)+4$.

Vrai-faux

Top chrono *(sans justification)*

61 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x-5|$.

	vrai	faux
1. La restriction de f sur l'intervalle $[-3\,;0]$ est la fonction définie sur $[-3\,;0]$ par $g(x)=5-2x$.	☐	☐
2. $f([-3\,;3])=[1\,;11]$.	☐	☐
3. $f^{-1}([0\,;1])=[2\,;3]$.	☐	☐
4. La fonction f est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
5. Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, alors $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g\circ f(x)=\dfrac{1}{(2x-5)^2+1}$.	☐	☐
6. Si h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x)=\sqrt{x}$, alors $h\times f$ est définie sur $\mathbb{R}$.	☐	☐

Avec justification

62 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
f, g et h désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x+2,\quad g(x)=x-3 \quad\text{et}\quad h(x)=x^2.$$
$(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ sont leurs courbes représentatives dans un repère (O, I, J).

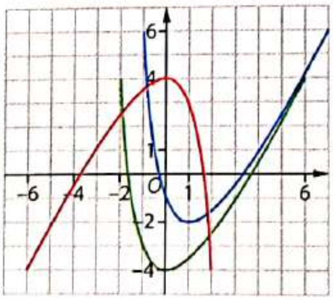
	vrai	faux
1. L'image de $\mathbb{R}$ par h est $\mathbb{R}^*$.	☐	☐
2. $h^{-1}([-5\,;4])=[-\sqrt{5}\,;2]$.	☐	☐
3. h est une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
4. La fonction $\dfrac{h}{g}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$.	☐	☐
5. Dans un repère, la courbe représentative de la fonction $f\circ h\circ g$ se déduit de $(\mathscr{C}_h)$ par translation de vecteur $\vec{u}\,(2\,;-3)$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

63 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Une fonction f définie sur $[-2\,;6]$ est représentée par la courbe verte dessinée dans le repère ci-contre.



1. L'image réciproque de $[-4\,;4]$ par f est :
a. $[-2\,;6]$; **b.** $[0\,;6]$; **c.** $[-2\,;0]$.

2. La courbe rouge est la courbe représentative de la fonction :
a. $x\mapsto f(-x)$; **b.** $x\mapsto -f(-x)$; **c.** $x\mapsto -f(x)$.

3. La courbe bleue est la courbe représentative de la fonction :
a. $x\mapsto f(x+2)+1$; **b.** $x\mapsto f(x-1)+2$;
c. $x\mapsto f(x-2)+1$.

4. La fonction f est une bijection de A sur B avec :
a. $A=[-2\,;6]$ et $B=[-4\,;4]$. **b.** $A=[0\,;6]$ et $B=[-4\,;4]$. **c.** $A=[-2\,;0]$ et $B=[-4\,;0]$.

Avec justification

64 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. u désigne l'application qui, à tout nombre entier naturel associe le chiffre de ses unités. L'application u est :
a. injective ; **b.** surjective ;
c. ni l'une, ni l'autre.

2. f désigne la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x)=2+\sqrt{x+1}$, $f([-1\,;8[)$ est égal à :
a. $[0\,;8[$; **b.** $[2\,;5[$; **c.** $\mathbb{R}$.

3. Dans un repère, la courbe représentative de f se déduit de la courbe représentative de la fonction racine carrée :
a. par symétrie centrale de centre l'origine du repère ;
b. par translation de vecteur $\vec{u}\,(1\,;2)$;
c. par translation de vecteur $\vec{v}\,(-1\,;2)$.

4. g et h sont les fonctions affines d'expressions :
$$g(x)=x+1 \quad\text{et}\quad h(x)=x+2.$$
i est la fonction racine carrée.
Sur $[-1\,;+\infty[$ la fonction f est égale à :
a. $g\circ i\circ h$; **b.** $h\circ i\circ g$; **c.** $g\circ h\circ i$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

65 À l'aide de fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous, déterminer trois fonctions usuelles u, v et w telles que :

$$f = u \circ v \circ w.$$

(On ne demande pas de s'intéresser aux ensembles de définition.)

a. $f : x \mapsto \dfrac{5}{x^2} + 7$; b. $f : x \mapsto 3(x+1)^2 - 5$;

c. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+4} - 10$; d. $f : x \mapsto 7\sqrt{x-2} + 3$.

66 Retrouver une expression

f, g et h désignent trois fonctions.

a. Retrouver l'expression $f(x)$ en utilisant l'écran de calcul formel ci-dessous.

2 g(x):=1/(x+1)

$x \to \dfrac{1}{x+1}$

3 f(g(x))

$\dfrac{2}{x+1} + 1$

4 g(f(x))

$\dfrac{1}{2 \times x + 1 + 1}$

b. Retrouver l'expression $h(x)$ en utilisant l'écran de calcul formel ci-dessous.

2 g(x):=1/(x+1)

$x \to \dfrac{1}{x+1}$

3 g(h(x))

$\dfrac{1}{5 \times (\sqrt{x}) - 2 + 1}$

4 h(g(x))

$\dfrac{5}{\sqrt{x+1}} - 2$

c. Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ f$; puis l'expression $h \circ f(x)$.

67 Résolution graphique

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 4x.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = a(x-b)^2 + c$.

b. En déduire la courbe $(\mathscr{C})$ à partir de la courbe représentative d'une fonction usuelle.

c. Représenter $(\mathscr{C})$.

2. a. Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction :

$$g : x \mapsto |f(x)|.$$

b. Résoudre graphiquement :
- l'équation $g(x) = 5$;
- l'inéquation $g(x) > 5$.

c. Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = 5$.

3. Résoudre graphiquement, puis par le calcul les équations suivantes :

a. $f(x) = 3$;

b. $g(x) = 3$.

68 Composées

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 désignent les fonctions définies de $\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\}$ par :

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = 1 - x$; $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$;

$f_4(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$; $f_6(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

a. Démontrer que ces six applications sont bijectives.

b. Compléter le tableau suivant.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

L'application $f_5 \circ f_1$, par exemple, apparaît à la cinquième ligne de la première colonne.

69 Involution

1. A désigne un ensemble.

Montrer que si f est une application de A vers A telle que : $f \circ f = \mathrm{Id}_A$, alors f est bijective ; en déduire f^{-1}.

Une telle fonction f est appelée involution.

2. g désigne la fonction de $[0\,;1]$ vers $[0\,;1]$ définie par :

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

a. Démontrer que g est une involution.

b. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g.

c. Justifier que $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Reprendre la question **2.** avec la fonction définie de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

70 Opérations sur les fonctions

f et g désignent les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2, \text{ si } x \leqslant 2 \\ f(x) = -2x, \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = x^2 + 2x, \text{ si } x \leqslant 0 \\ g(x) = 2x, \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

Déterminer les expressions des fonctions suivantes :
- $f + g$;
- $-2f + 3g$;
- $f \times g$;
- $f \circ g$.

Aide

Compléter le tableau ci-dessous dans chacun des cas.

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$(f+g)(x)$	

Problèmes

71 Un résultat surprenant

1. Ensembles finis

E et F désignent deux ensembles finis et f une application de E vers F.

n et p sont les nombres respectifs d'éléments de E et F.

Démontrer que :

a. si f est injective, alors on a : $n \leqslant p$;

b. si f est surjective, alors on a : $n \geqslant p$;

c. si f est bijective, alors on a : $n = p$;

d. si f est injective et si $n = p$, alors f est bijective ;

e. si f est surjective et si $n = p$, alors f est bijective.

2. Ensembles infinis

p désigne l'application de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des nombres entiers pairs, noté P, qui, à tout nombre entier naturel n associe $2n$.

a. Démontrer que p est une bijection.

b. En déduire qu'il existe autant de nombres entiers naturels que de nombres entiers naturel pairs.

Info

Le mathématicien allemand Georg Cantor a établi au XIX^{e} siècle qu'il existe plusieurs sortes d'ensembles infinis : les ensembles infinis dénombrables (qui peuvent être mis en bijection avec $\mathbb{N}$) et les ensembles infinis non dénombrables (tels que $\mathbb{R}$).

72 Fonction réciproque

1. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormé du plan.

On note (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Pour tout point $M(x ; y)$ du plan, déterminer les coordonnées du point M' symétrique de M par rapport à (Δ).

2. f désigne une fonction bijective.

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto y$$

La fonction, notée f^{-1}, de B vers A qui à y associe x tel que $y = f(x)$ est appelée fonction réciproque de f.

a. Justifier que chacune des fonctions suivantes est bijective ; puis déterminer sa fonction réciproque.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 5$
- $g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, $x \mapsto x^{2}$

b. Représenter ces quatre fonctions dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Que constate-t-on ? Justifier.

c. Démontrer que cette propriété, mise en évidence pour les fonctions f et g, est valable pour toute fonction bijective et sa réciproque.

3. a. Déterminer l'ensemble B pour que h soit bijective.

$$h : \left[\frac{1}{5} ; 5\right] \to B$$
$$x \mapsto \frac{2}{x} - 1 .$$

b. Déterminer h^{-1}.

c. Représenter h et h^{-1} dans un repère orthonormé.

73 Bijection réciproque

f désigne une application de E vers F qui, à tout x de E, associe y de F.

1. Démontrer que l'application, notée f^{-1}, qui à tout y de F associe l'antécédent x de y par f est une application bijective. Cette application f^{-1} est appelée bijection réciproque de f.

2. g désigne une application de F vers E telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ ou telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_F$.

Démontrer que $g = f^{-1}$.

3. Quelques exemples

A, B désignent deux points distincts du plan, (Δ) une droite du plan et k un nombre réel non nul.

Déterminer les bijections réciproques de chacune des applications suivantes :

- r est la rotation de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$ rad ;
- t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- s_A est la symétrie centrale de centre A ;
- $s_{(\Delta)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ) ;
- h est l'homothétie de centre B et de rapport $k \neq 0$.

4. Pour aller plus loin

a. Première propriété

f, g et h désignent trois applications :

$$f : E \to F, \quad g : F \to G \quad \text{et} \quad h : G \to H.$$

Démontrer que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b. Deuxième propriété

f désigne une application bijective de E vers F et g une application bijective de F vers G.

- Démontrer que $g \circ f$ est une application injective de E vers G.
- Démontrer que $g \circ f$ est une application surjective de E vers G.
- Que peut-on en déduire pour $g \circ f$?
- Démontrer que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c. O désigne un point du plan, k_1 et k_2 sont deux nombres réels non nuls.

h_1 (resp. h_2) est l'homothétie de centre O et de rapport k_1 (resp. k_2).

- Déterminer $h_2 \circ h_1$; h_1^{-1} ; h_2^{-1}.
- En déduire $(h_2 \circ h_1)^{-1}$.

d. f et g sont les fonctions ci-dessous :

$$f :]-1{,}8 : 0] \to [0 ; 9[$$
$$x \mapsto \frac{2}{x+2} - 1$$

et $g : [0 ; 9[\to [1 ; 10[$

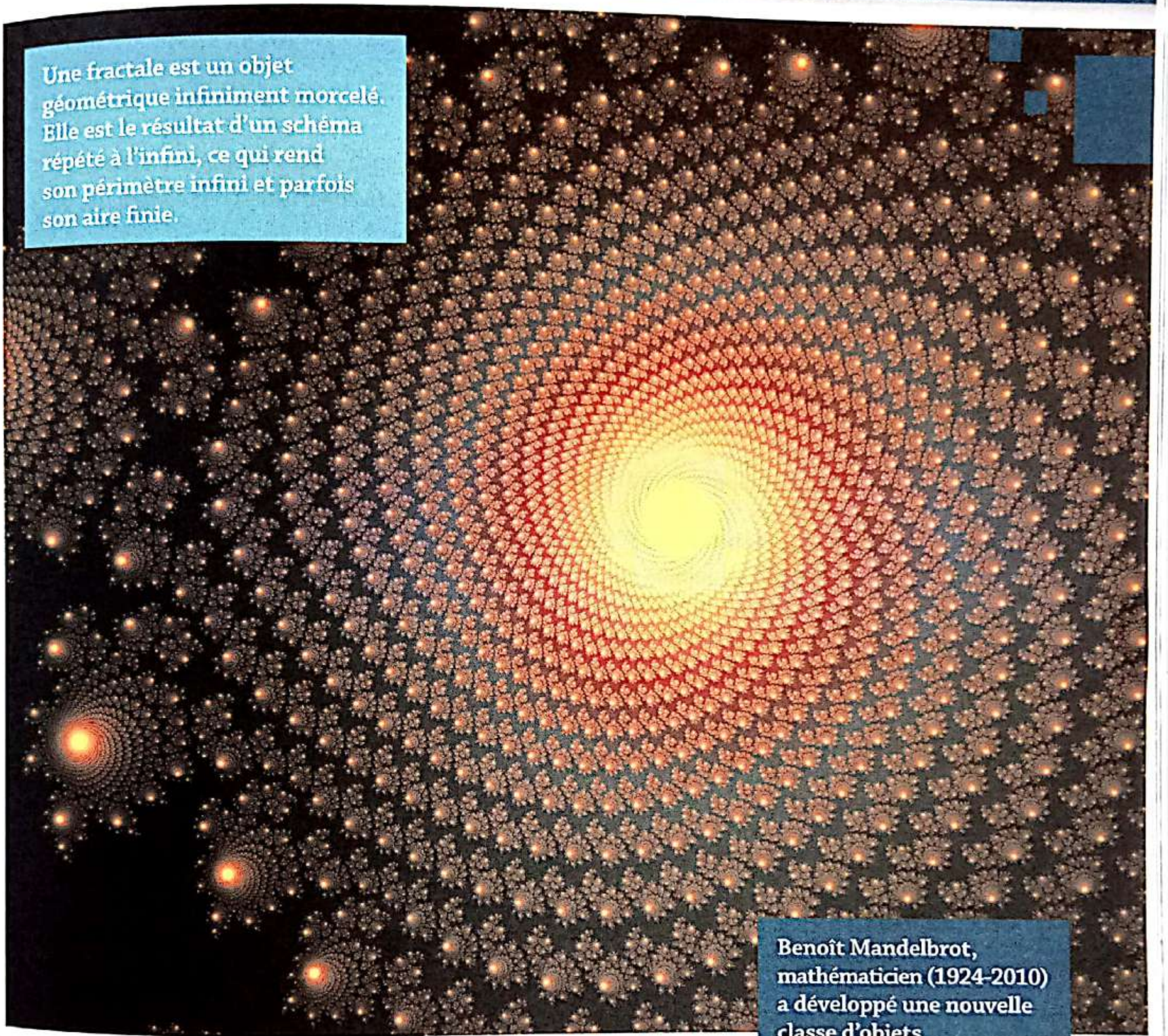
$$x \mapsto 1 + 3\sqrt{x}$$

- Montrer que f et g sont deux fonctions bijectives.
- Déterminer les ensembles de départ, d'arrivée et les expressions des fonctions :

$$f^{-1} ; \quad g^{-1} ; \quad g \circ f.$$

- En déduire l'ensemble de départ, d'arrivée et l'expression de $(g \circ f)^{-1}$.

10 Limites et continuité



Une fractale est un objet géométrique infiniment morcelé. Elle est le résultat d'un schéma répété à l'infini, ce qui rend son périmètre infini et parfois son aire finie.

Benoît Mandelbrot, mathématicien (1924-2010) a développé une nouvelle classe d'objets mathématiques : les objets fractals.

Les objectifs du chapitre

- Maîtriser la définition de la limite en un point.
- Maîtriser la définition de la limite à l'infini.
- Calculer une limite. Lever une forme indéterminée.
- Connaître les propriétés relatives aux limites (somme, produit, inverse, composée…).
- Faire le lien entre limites et représentation graphique.
- Maîtriser la notion de continuité.

0 Cours

1 Limite en un point

Définition

Une fonction f est dite **définie au voisinage d'un nombre réel a** lorsque son ensemble de définition contient un intervalle ouvert contenant a.

a Limite finie

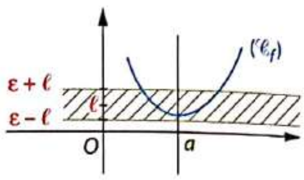
Définition Notation

ℓ et a désignent deux nombres réels et f une fonction définie au voisinage de a.

On dit que f admet une **limite ℓ lorsque x tend vers a** lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon+\ell, \ell+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Illustration



Propriétés

ℓ et a désignent deux nombres réels.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} |f(a+h) - \ell| = 0.$
- Si f est définie en a et si f admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

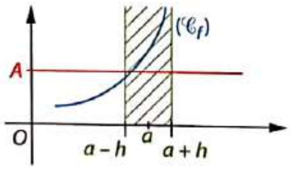
b Limite infinie

Définition Notation

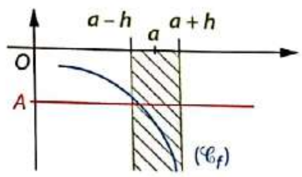
a désigne un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a.
On dit que f admet comme **limite $+\infty$** (respectivement $-\infty$) **lorsque x tend vers a** lorsque pour tout nombre réel A, l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ (respectivement $]-\infty\ ; A[$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respectivement) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Illustration



Illustration



c Limite à gauche et à droite

Définitions

a désigne un nombre réel et ℓ un nombre réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

- Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$, on dit que f admet ℓ comme **limite à gauche quand x tend vers a par valeurs inférieures.**
- Lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$, on dit que f admet ℓ comme **limite à droite quand x tend vers a par valeurs supérieures.**

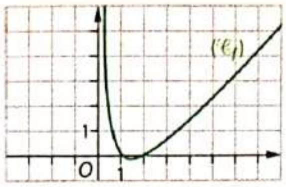
Remarque

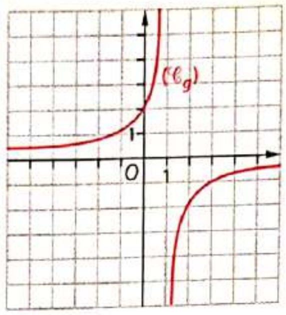
a désigne un nombre réel.

Si f admet une limite à gauche et à droite en a et si ces deux limites sont égales, alors f admet une limite en a.

1 Conjecturer une limite à partir d'une lecture graphique

Dans un repère, on a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
f est définie sur $]0\,;+\infty[$ et g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.





Conjecturer :

a. la limite de f lorsque x tend vers 0 ;

b. les limites de g lorsque x tend vers 1, à gauche ; puis à droite.

Solution commentée

a. On observe que, lorsque x devient proche de 0, $f(x)$ prend des valeurs très grandes, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

b. On observe que, lorsque x devient proche de 1, « par la gauche » $(x<1)$, $g(x)$ prend des valeurs très grandes, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)=+\infty$.

On observe que, lorsque x devient proche de 1, « par la droite » $(x>1)$, $g(x)$ prend des valeurs très petites, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x)=-\infty$.

Méthode

- Observer le comportement de la courbe lorsque x tend vers des valeurs très proches de 0.
- Lire la réponse sur l'axe des ordonnées.
- Selon les cas, penser à distinguer la limite à gauche de la limite à droite.

2 Utiliser le cours pour démontrer

f désigne la fonction définie pour tout $x>1$ par $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$; montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$.

Solution commentée

Soit $A>0$,

$f(x)\in\,]A\,;+\infty[\;\Leftrightarrow f(x)>A \Leftrightarrow \dfrac{5}{x-1}>A \Leftrightarrow 5>A(x-1)$,

car $x>1 \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{5+A}{A}$.

Ainsi, dès que x est suffisamment proche de 1, $f(x)\in\,]A\,;+\infty[$ (avec A, aussi grand que l'on veut), donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$.

Méthode

Utiliser le cours pour vérifier que :

$$f(x)\in\,]A\,;+\infty[$$

(avec A un nombre réel quelconque, aussi grand que l'on veut), pour x suffisamment proche de 1.

S'exercer

3 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par :

$$f(x)=\frac{3}{x^2-4}.$$

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=+\infty$.

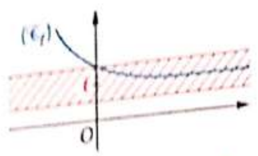
4 Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{7}{x+2}=-\infty$.

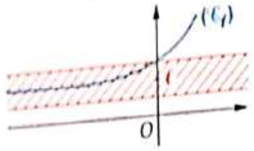
2 Limite à l'infini

a Limite finie à l'infini

Définition Notation

ℓ désigne un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a]$ avec a un nombre réel).
On dit que f admet comme **limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** (respectivement $-\infty$) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (respectivement petit). On note :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$).





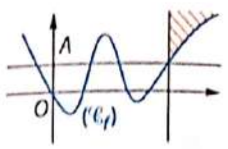
b Limite infinie à l'infini

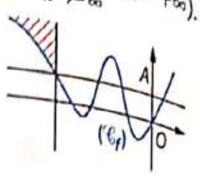
Définition Notation

f désigne une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;a]$) avec a un nombre réel.
On dit que f admet **comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** (resp. $-\infty$) si pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;A]$) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (respectivement petit).

On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).





Remarque On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

3 Limites de fonctions de référence

n désigne un nombre entier naturel non nul.

a Limite en 0

$f(x)$	x	$\sqrt{x}$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^n}$
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$	0	non définie	0	$-\infty$	non définie	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

b Limite en l'infini

$f(x)$	x	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	0	non définie	non définie
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	0

4 Calcul de limites

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. « FI » signifie « Forme indéterminée ».

a Somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b Produit et quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	ℓ' ($\ell'\neq0$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$\ell\ell'$	∞	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$ ($\ell'\neq0$)	∞	FI	FI	FI	0

5 Connaître la définition d'une limite

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+2$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Solution commentée

Soit $\varepsilon>0$. On cherche $M>0$ tel que $\forall x \geqslant M, |f(x)-2| \leqslant \varepsilon$.

- On remarque que pour tout $x>0$, $\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}>x$, donc $0<\dfrac{x}{x^2+1}<\dfrac{1}{x}$. Ainsi, pour tout $x>0$, $|f(x)-2|=\dfrac{x}{x^2+x}<\dfrac{1}{x}$.
- Posons $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $x>M$, $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{M}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{x}<\varepsilon$.
- En résumé : $\forall x \geqslant M, |f(x)-2| \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Méthode

- Par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ ($\ell\in\mathbb{R}$) signifie que $\forall\varepsilon>0$, l'intervalle $]-\varepsilon+\ell, \varepsilon+\ell[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de $+\infty$.
- On détermine $M>0$ tel que :
$$\forall x \geqslant M,\ |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Rappel

« $\forall$ » est un qualificateur logique qui signifie « pour tout » ou « quelque soit ».

6 Calculer une limite en utilisant les propriétés du cours

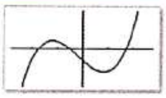
Calculer les limites suivantes ; puis vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)(x^2-3)$; **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Solution commentée

a.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)(x^2-3)=-\infty$



b.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^2=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-\infty$

Méthode

- Identifier la forme de l'expression donnée (somme, produit, quotient…)
- Appliquer les propriétés du cours.
- Même lorsque cela n'est pas demandé, penser à utiliser la calculatrice pour vérifier (voir pages calculatrices p. 264 à 267).

7 Lever une déterminée dans le calcul d'une limite

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4-x+1$.

Solution commentée

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x+1=-\infty\end{array}\right\}$$
La limite de la somme donne une FI. On ne peut conclure directement (voir paragraphe 4).

On factorise : pour tout $x\neq 0$: $5x^4-x+1=5x^4\left[1-\dfrac{1}{5x^3}+\dfrac{1}{5x^4}\right]$.

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{1}{5x^3}+\dfrac{1}{5x^4}\right]=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=+\infty$, par produit, on conclut que : $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4-x+1=+\infty$.

Méthode

Lorsque les règles de sommation, produit, quotient aboutissent à une forme indéterminée (FI), il est souvent utile de :
- factoriser (polynômes, fractions rationnelles) ;
- utiliser la forme conjuguée ($a-b\sqrt{c}$ a pour forme conjuguée $a+b\sqrt{c}$).

S'exercer

8 Déterminer la limite de f en $a=-\infty$.

a. $f(x)=x(-4x^2+1)$; **b.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

9 Déterminer la limite de f en a.

a. $f(x)=\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}$, $a=0$; **b.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2+1}$, $a=+\infty$.

Propriétés sur les limites

5 Propriétés sur les limites

a Limite à l'infini de fonctions polynômes et de fractions rationnelles

Propriétés

P désigne une fonction : $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$.

Remarques

- Cette propriété est démontrée à l'exercice 37.
- On dit qu'à l'infini (en $-\infty$ et en $+\infty$), une fonction polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

b Limites et comparaisons

Propriétés

f et g désignent deux fonctions et a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On suppose que x est suffisamment proche de a.

- Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,
  alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$,
  alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$,
  alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

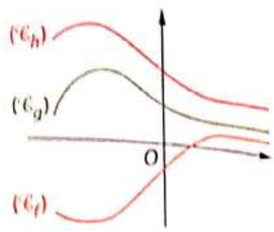
Propriété (Théorème des gendarmes)

f, g et h désignent trois fonctions, a et ℓ deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si pour x suffisamment proche de a,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ et } \lim_{x \to a} f(x) = \ell = \lim_{x \to a} h(x),$$

alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.



6 Continuité

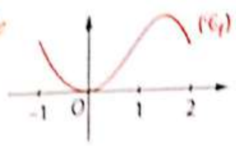
a Fonction continue

Définition

f désigne une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

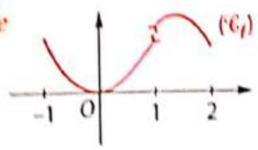
- La fonction f est dite **continue en a**, lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est dite **continue sur l'intervalle I**, lorsque f est continue en tout point de I.

Exemple



f est continue sur $[-1\,;2]$.

Contre-exemple



f n'est pas continue sur $[-1\,;2]$.

Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau ».

b Continuité de fonctions usuelles

Propriétés

- Les fonctions usuelles sont continues là où elles sont définies.
- Si f et g sont deux fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ (avec $g(a) \neq 0$) le sont aussi.

c Prolongement par continuité

Définition

f désigne une fonction non continue en a et ℓ un nombre réel tel que $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

On appelle **prolongement par continuité de f en a**, la fonction $\tilde{f}$ définie par : $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ \tilde{f}(a) = \ell. \end{cases}$

Savoir-faire

10 Déduire une limite d'une comparaison

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} (3x^2\cos(2x) - x)$.

Solution commentée

Pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$. Ainsi, en multipliant membre à membre l'inégalité par $3x^2$ (positif) ; on obtient pour tout nombre réel x : $-3x^2 \leqslant 3x^2\cos(2x) \leqslant 3x^2$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} -3x^2 = \lim\limits_{x \to 0} 3x^2 = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2\cos(2x) = 0$. Puis $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2\cos(2x) - x = 0$.

Méthode

Lorsque l'expression contient des cosinus et des sinus, penser aux comparaisons pour conclure.

11 Connaître la définition de la continuité en un point

a désigne un nombre réel. f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 1 & \text{si } x \geqslant 2 \\ x + 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$.
Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution commentée

1. f est continue sur $]-\infty\,; 2[$ et sur $]2\,; +\infty[$ comme fonction polynômiale.
2. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x)$ existent, sont finies et sont égales.
3. Or, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (x+3) = 5$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (ax^2 + x - 1) = 4a + 1$

   f est donc continue en 2 si, et seulement si, $4a + 1 = 5$ si, et seulement si, $a = 1$.

Méthode

1. Déterminer les valeurs de x en lesquelles la fonction f n'est pas, à priori, continue.
2. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'une de ces valeurs.
3. Conclure.

12 Prolonger par continuité une fonction

f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{5x+1}{x}$.
f et g sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

Solution commentée

- Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|f(x)| \leqslant |x|$ (car pour tout a de $\mathbb{R}$, $|\cos(a)| \leqslant 1$.
- Comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$.

  Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

  On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0} 5x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) \notin \mathbb{R}$.

  g n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction f est continue en a :

- soit f est définie en a et on démontre alors que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- soit f est définie pour $x \neq a$ et on vérifie que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On prolonge alors f en a en posant :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

S'exercer

13 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sin(x)}{x}$.

14 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + \sin x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 1 - \cos x \text{ si } x < 0. \end{cases}$

a. Calculer $f(0)$.
b. La fonction f est-elle continue en 0 ? sur $\mathbb{R}$?

15 g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-1}.$$

La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Limite en un point

Réponses rapides

16 Donner la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans chacun des cas suivants.

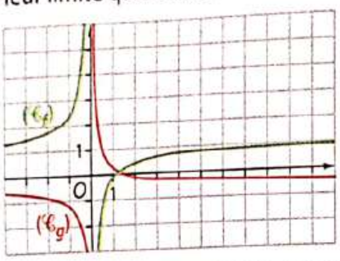
a. $f(x)=5x^2-3x+1$, $a=0$;

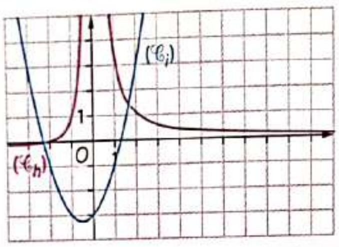
b. $f(x)=10x-\frac{1}{x}$, $a=0{,}5$;

c. $f(x)=4\sin(x)-x$, $a=\pi$;

d. $f(x)=\sqrt{x^2+\frac{8}{9}}$, $a=\frac{1}{3}$.

17 Observer les courbes représentatives des fonctions f, g, h et i et donner leur limite quand x tend vers 0.





18 f désigne la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{5}{x-1}$.

a. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 100$.

b. A désigne un nombre réel strictement positif.
Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant A$.

c. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 avec $x>1$.

19 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{(x-3)^2}$;

b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{|x-1|}$;

c. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(x)$;

d. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}}$.

20 Justifier l'affichage ci-dessous obtenu avec le logiciel Xcas.

```
1 limit((x+3)/(x-1),x,1)
                                  ∞
```

21 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+3)}.$$

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)$ et $\lim\limits_{x\to -3}(x-2)$.

b. Déterminer la limite de $(x-2)$ quand x tend vers 2 à gauche puis à droite.

c. Déterminer la limite de $(x+3)$ quand x tend vers -3 à gauche puis à droite.

d. Dresser le tableau de signes de f.

e. En déduire les limites, à gauche et à droite, de $f(x)$ quand x tend vers 2 ; puis vers -3.

22 Déterminer les limites à gauche et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a dans chacun des cas suivants.

a. $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$, $a=-1$;

b. $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$, $a=2$

c. $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+4)}$, $a=0$;

d. $f(x)=\frac{x^2}{x-0{,}5}$, $a=$

Aide
Attention au signe de l'expression $x-a$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures ($x>a$) ou inférieures ($x<a$).

23 h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$ par :

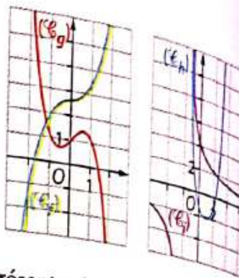
$$h(x)=\frac{4x^2-5}{2x-5}.$$

Déterminer les limites à gauche puis à droite de $f(x)$ quand x tend vers $\frac{5}{2}$.

Limite à l'infini

Réponses rapides

24 Voici les courbes représentatives des fonctions f, g, h et i.
Lire leur limite quand x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.



25 a. Dans un repère représenter, à main levée, une fonc[tion] définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. Sur le même graphique, représenter, à main levée, [une] fonction g telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant f(x)$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

26 h désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$h(x)=1+\frac{1}{x}.$$

a. ε désigne un nombre réel strictement positif.
On pose $I=]1-\varepsilon\,;1+\varepsilon[$.

Montrer que si $x>\frac{1}{\varepsilon}$, alors $h(x)\in I$.

b. En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

27 f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+4}.$$

a. Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)-1=\frac{-5}{x+4}$.

b. ε désigne un nombre réel strictement positif.
Résoudre l'inéquation $|f(x)-1|<\varepsilon$.

c. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

28 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-3$; b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x+5$; c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2$;

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} |7x-1|$; e. $\lim\limits_{x\to+\infty} 7+\dfrac{4}{x}$; f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}$.

29 Justifier l'affichage ci-dessous obtenu avec le logiciel Xcas.

```
1 limit(3/(x-5),x,-infinity)
                                0
```

Calcul de limites et comparaisons

Réponses rapides

30 Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans chacun des cas suivants.

a. $f(x)=x+\dfrac{7}{x}$, $a=+\infty$; b. $f(x)=\sqrt{x+1}$, $a=+\infty$;

c. $f(x)=\cos(3x+\pi)$, $a=0$; d. $f(x)=\dfrac{5-4x}{x+1}$, $a=-\infty$;

31 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3-x \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2}{x^2}.$$

Déterminer les limites suivantes lorsque ce ne sont pas des formes indéterminées.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$; b. $\lim\limits_{x\to0} (f\times g)(x)$;

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\times g)(x)$; d. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f}{g}(x)$.

32 h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{x-\cos x}{2+\cos x}$.

a. Montrer que pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)\geqslant\dfrac{x-1}{3}$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{3}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Aide

Utiliser une propriété du paragraphe **5. b.**

33 g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{\sin(3x)}{x^2+1}$.

a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $|g(x)|\leqslant\dfrac{1}{x^2+1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

34 Justifier les affichages ci-dessous obtenus avec le logiciel Xcas.

```
1 limit((5*x^3-1)/(x+2),x,0)
                               -1
                               --
                                2
2 limit((x-2)*x^2,x,-infinity)
                               -∞
```

35 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^2+x+3.$$

1. a. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$f(x)=4x^2\left(1+\frac{1}{4x}+\frac{3}{4x^2}\right).$$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{3}{4x^2}\right)$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Procéder de la même manière pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

36 f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{5x^2+1}{3x+2}.$$

a. • Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+2$.

• Peut-on déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

b. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=x\times\dfrac{5+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

37 **Démontrer une propriété**

1. P désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 \quad \text{avec } a_n\neq0.$$

a. • Justifier que, pour tout $x\neq0$,

$$P(x)=a_nx^n\left[1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right].$$

• Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\dfrac{a_0}{a_nx^n}\right]$.

• En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$.

b. De la même manière, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$.

2. Q désigne la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_m \text{ avec } b_m\neq0.$$

a. • Justifier que pour tout $x\neq0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\times\frac{1+\dfrac{a_{n-1}}{a_nx}+\ldots+\dfrac{a_0}{a_nx_n}}{1+\dfrac{b_{m-1}}{b_mx}+\ldots+\dfrac{b_0}{b_mx^m}}.$$

• En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

b. De la même manière, montrer que :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

38 Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

a. $f(x)=-4x^3+\dfrac{x}{2}$; b. $f(x)=\dfrac{7}{2}x^4+x^2-x$;

c. $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2x^3+x}$; d. $f(x)=-x+\dfrac{5x^4+1}{2-x^3}$.

39 Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f(x)=\dfrac{5x^7-1}{x^6+2}$, $a=-\infty$;

b. $f(x)=7-3x^5-x$, $a=+\infty$;

c. $f(x)=\dfrac{3-x}{5-x}$, $a=+\infty$;

d. $f(x)=\dfrac{x}{3+x}-7x^5$, $a=-\infty$.

40 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}$.

Aide

Utiliser la propriété sur les limites et les comparaisons.

41 L'objectif est de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}$.

- Peut-on en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$?

b. Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$:

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}=\frac{-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}.$$

c. En déduire la limite cherchée.

Aide

L'expression conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

42 a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}\right|\leqslant\frac{5+3|x|}{2x^2+1}.$$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$; puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+3|x|}{2x^2+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}$; puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\cos(x)+3x}{2x^2+1}$, en utilisant un résultat de comparaison.

43 f désigne la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{x-1},$$

où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer a et b pour que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

44 g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=ax+b+\frac{cx^2}{x^2+2},$$

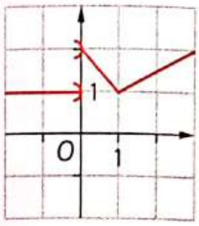
où a, b et c sont trois nombres réels.

Déterminer a, b et c pour que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ et $g(0)=-1$.

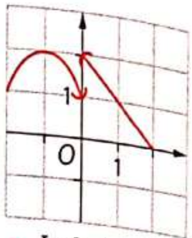
Continuité

Réponses rapides

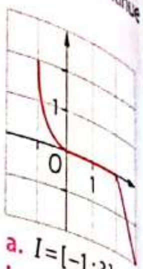
45 Dire dans chacun des cas suivants si la fonction est continue sur l'intervalle I.



a. $I=[1\,;3]$
b. $I=[-2\,;3]$



a. $I=[-1\,;1]$
b. $I=[-1\,;0[$



a. $I=[-1\,;3]$
b. $I=[0\,;3]$

46 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x\geqslant 0\\ -3 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

f est-elle continue : • en 0 ? • sur $\mathbb{R}$?

47 g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\geqslant 1\\ 2-x & \text{si } 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x<0.\end{cases}$$

La fonction g est-elle continue :
• en 1 ? ; • en 0 ? ; • sur $\mathbb{R}$? ; • sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$?

48 h désigne la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par :

$$h(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\in[-1\,;1[\\ x+p & \text{si } x\in[1\,;3]\end{cases}$$

où p est un nombre réel.

a. • Dans un repère, tracer les courbes représentatives de h pour $p=2$, $p=1$, $p=-2$.

• h est-elle continue en 1 ?

b. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles h est continue en 1.

49 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

a. Montrer que pour tout $x\neq 0$, $|f(x)|\leqslant x^2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

c. • Peut-on prolonger f en 0 par continuité ?

• Si oui, donner ce prolongement.

50 g désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[\setminus\{1\}$,

$$g(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

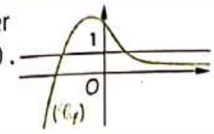
b. En déduire que g est prolongeable par continuité en 1 ; préciser ce prolongement.

Se tester

Vrai-Faux

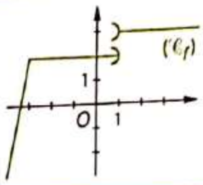
Top chrono (sans justification)

51 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. On peut conjecturer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. 	☐	☐
2. f est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 0{,}5$. f est continue en 2.	☐	☐
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} -7x^3 + x^4 - 50 = -\infty$.	☐	☐
4. Si f et g désignent deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.	☐	☐
5. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x-5}{x-1} = +\infty$.	☐	☐

Avec justification

52 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-4}{x-5} = \dfrac{3}{5}$.	☐	☐
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\sin(x)}{x^2+3} = 0$.	☐	☐
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 3x + \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$.	☐	☐
4. La fonction f est continue sur $[1\,;3]$. 	☐	☐
5. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 3 \\ 6-x & \text{si } -2 < x \leqslant 3 \\ -x^3 & \text{si } x \leqslant -2 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

53 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

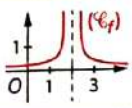
1. La limite de $-7x + \dfrac{4}{x}$ quand x tend vers $-\infty$ est :

a. $+\infty$; **b.** $-\infty$; **c.** 0.

2. f, g, h désignent trois fonctions telles que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 10$.

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10$; **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -3$;
c. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \in [-3\,;10]$, si elle existe.

3. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures est :



a. 0 ; **b.** $+\infty$; **c.** 2.

4. Le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est :

a. continu sur $\mathbb{R}$; **b.** non continu sur $\mathbb{R}$;
c. on ne peut pas savoir.

Avec justification

54 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Si f et g désignent deux fonctions telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \dfrac{5x+1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Alors, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ est égale à :

a. 1 ; **b.** 0 ; **c.** n'existe pas.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4}$ est égal à :

a. -1 ; **b.** $-\dfrac{1}{3}$; **c.** $\dfrac{1}{3}$.

3. h désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > \pi/4 \\ \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} & \text{si } 0 < x \leqslant \pi/4 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

a. h est continue sur $\mathbb{R}$;
b. h n'est pas continue en $\pi/4$;
c. h est continue sur $[1\,;+\infty[$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

55 Fonction polynôme et fonction inverse

f désigne une fonction polynôme du second degré :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

g désigne la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ en tout x tel que $f(x) \neq 0$.

Déterminer, en discutant suivant le signe de a, les limites de $f(x)$ et de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$; puis vers $-\infty$.

56 Formes indéterminées

1. f et g désignent les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 + x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b. Peut-on déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \times g)(x)$?

c. Justifier que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$(f \times g)(x) = \frac{3x \times \sqrt{x} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}.$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \times g)(x)$.

2. Déterminer les limites suivantes après avoir remarqué une forme indéterminée :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x} + 1}$;

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x^2} + 3x^2 - 1$.

Aide

Pour lever une indéterminée, penser à factoriser l'expression.

57 Étude d'une fonction rationnelle

f désigne la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 10}$.

a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;5\}$.

b. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;5\}$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-5}$$

où a, b, c désignent trois nombres réels à déterminer.

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

d. Déterminer $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

e. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

f. Représenter la fonction g dans un repère et vérifier les résultats du **e.**

58 Le théorème des gendarmes

a. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\frac{-1}{1 + 2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1 + 2\sin(4x)}{1 + 2\sqrt{x}} \leqslant \frac{3}{1 + 2\sqrt{x}}.$$

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 2\sin(4x)}{1 + 2\sqrt{x}}$.

59 Limite ou pas de limite ?

f et g désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = 3x\cos\left(\frac{5}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|f(x)| \leqslant 3|x|$.
En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b. • Calculer $g(2k\pi)$ et $g\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

• Que peut-on en déduire pour la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

60 Expression conjuguée

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x > 0\,; \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

a. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$.

c. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

61 De drôles de limites

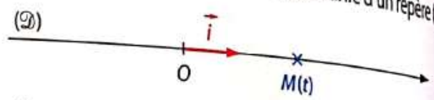
a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{x}$; puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{x}$, en utilisant la définition de la valeur absolue.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$ en utilisant l'expression conjuguée.

c. Représenter les courbes de ces fonctions à la calculatrice afin de vérifier les résultats précédents.

62 Vitesse instantanée

Un point M se déplace sur une droite $(\mathcal{D})$ munie d'un repère $(O\,;\vec{i})$.



Sa position, en mètres, en fonction du temps t, exprimé en secondes, est définie par son abscisse $x(t) = t^2 + t + 1$.
La vitesse instantanée du point M à l'instant t_0 est :

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}.$$

1. Déterminer la vitesse instantanée du point mobile :

a. à l'instant 2 ; **b.** à l'instant 5.

2. Déterminer l'instant en lequel la vitesse instantanée est égale à :

a. $13\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; **b.** $1{,}05\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

63 À partir de la définition

f désigne une fonction définie et décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

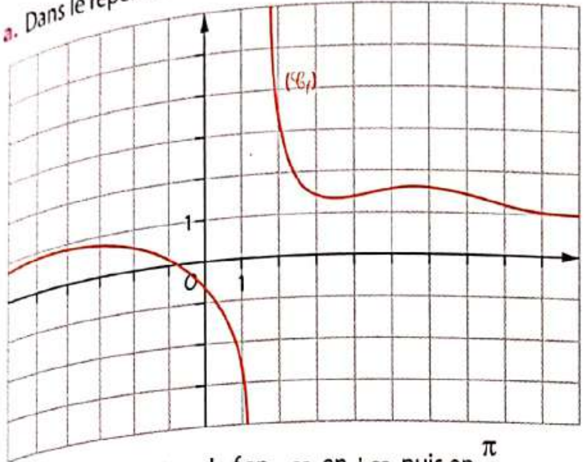
Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

64 Conjecturer, puis démontrer

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ par :

$$f(x)=\frac{x+\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

a. Dans le repère ci-dessous, on a représenté la fonction f.



Conjecturer les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, puis en $\frac{\pi}{2}$.

b. Déterminer les limites à l'infini à l'aide d'un encadrement.

c. Déterminer les limites à gauche, puis à droite de f en $\frac{\pi}{2}$.

65 Encadrements

1. f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

a. Montrer que $\forall x>0, \frac{x}{3}\leqslant f(x)\leqslant x$.

b. Montrer que $\forall x<0, x\leqslant f(x)\leqslant \frac{x}{3}$.

c. En déduire les limites de f en 0 ; en $+\infty$; puis en $-\infty$.

2. Tenir le même raisonnement pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$g(x)=\frac{x}{2-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

66 Fonction partie entière

E désigne la fonction partie entière :

$$\forall x\in\mathbb{R}, E(x)\in\mathbb{Z} \text{ et } x\leqslant E(x)<x+1.$$

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$.

1. La fonction E est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. a. • Montrer que $\forall x\in\,]0\,;1[, f(x)=0$.

• Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

• Peut-on prolonger f en 0 par continuité ?

b. • Montrer que $\forall x\geqslant 1,\ 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}$.

• En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x>0}} f(x)$.

Rappel

La notation $\mathbb{R}_+^*$ signifie $]0\,;+\infty[$.

67 Prolongement par continuité

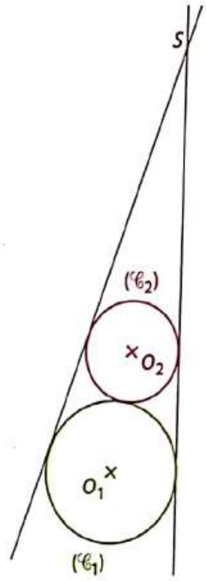
a et b désignent deux nombres réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}5x-1 & \text{si } x\geqslant 2\\ x^2+bx & \text{si } 0\leqslant x<2\\ a\sqrt{1+x^2}+x-1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

68 Les deux cercles

$(\mathscr{C}_1)$ désigne un cercle de centre O_1 et de rayon 6 cm.
Il est tangent à un cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre O_2 et de rayon r tel que $0<r<6$.
Les tangentes communes aux deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont sécantes en S.



a. Montrer que : $O_1S=\dfrac{6r+36}{6-r}$.

b. • En déduire la limite de O_1S lorsque r tend vers 6.

• Représenter cette situation par un schéma.

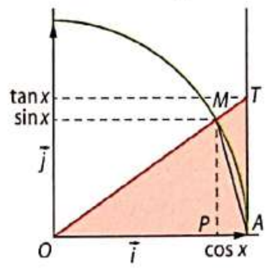
c. • Calculer la limite de O_1S lorsque r tend vers 0.

• Représenter cette situation par un schéma.

69 Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0

1. x désigne un nombre réel appartenant à $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1\,;0)$, $M(\cos(x)\,;\sin(x))$, $P(\cos(x)\,;0)$ et $T(1\,;\tan(x))$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du triangle OAM, $\mathscr{A}_2$ l'aire du secteur de disque délimité par l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ et $\mathscr{A}_3$ l'aire du triangle OAT.



a. En comparant ces trois aires, montrer que :

$$\sin(x)\leqslant x\leqslant\tan(x)$$

b. En déduire que : $\cos(x)\leqslant\dfrac{\sin(x)}{x}\leqslant 1$.

c. Déterminer la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

2. En utilisant la question 1., calculer les limites suivantes lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\sin(3x)}{2x}$;

b. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x}{\sin(5x)}$;

c. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\tan(x)}{x}$;

d. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x\cos(x)}{\sin(4x)}$.

70 Un algorithme

f et g désignent les fonctions définies sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-3x-6}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2.$$

1. Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives de f et g.
Qu'observe-t-on pour des grandes valeurs de x ?

2. a. Montrer $\forall\, x>2,\ g(x)-f(x)=\dfrac{4}{x+2}$.

b. En déduire la limite de $g(x)-f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. On considère l'algorithme ci-dessous.

> **Entrées. Initialisation**
> • Choisir un nombre réel positif a assez proche de 0.
> • Le nombre x prend la valeur -1.
>
> **Traitement**
> Tant que $\dfrac{4}{x+2}>a$, x prend la valeur $x+1$.
>
> **Sortie**
> Afficher le nombre x.

a. Expliquer le rôle de cet algorithme.

b. Quelle valeur de x, l'algorithme affiche-t-il lorsque :
- $a=-0{,}01$?
- $a=0{,}001$?
- $a=10^{-5}$?

Info

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$, on dit que les courbes représentatives de f et g sont asymptotes l'une de l'autre à l'infini.

71 Majoration et minoration

f désigne la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+x-\frac{2}{x}.$$

1. Limites de f

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

2. Encadrements

a. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{(x-1)P(x)}{x}$$

où P désigne une fonction polynôme que l'on déterminera.

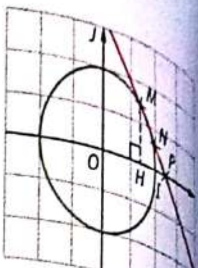
b. • Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$;
puis en déduire que, pour tout x de $]0\,;1]$, $f(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{x}$.

• Déterminer un nombre réel α tel que, pour tout $x\in\,]0\,;\alpha]$; $f(x)\leqslant -10^4$.

c. • Montrer que, pour tout x de $[2\,;+\infty[$, $x-\dfrac{2}{x}\geqslant 1$;
puis en déduire que pour tout x de $[2\,;+\infty[$, $f(x)\geqslant x^2$.

• Déterminer un nombre réel β tel que, pour tout $x\in[\beta\,;+\infty[$, $f(x)\geqslant 10^4$.

72 Histoire d'aires



Ci-contre est représenté le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O, I, J).
M est un point situé sur le quart du cercle compris entre I et J exclus.
La tangente en M coupe la droite (OI) en P.
La tangente en I coupe la droite (MP) en N.
Le point H est projeté orthogonal de M sur la droite (OI).

On pose $x=\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$, $x\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Exprimer l'aire $S_1(x)$ du triangle HMP en fonction de x.

b. Exprimer l'aire $S_2(x)$ du triangle NIP en fonction de x.

c. Calculer, puis interpréter les limites suivantes :
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} S_1(x)$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} S_1(x)$.

d. • Montrer que, pour tout $x\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{S_1(x)}{S_2(x)}=(1+\cos(x))^2.$$

• En déduire les limites suivantes :
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

e. Déduire des questions précédentes les limites :
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} S_2(x)$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} S_2(x)$.

Interpréter les résultats obtenus.

73 Position relative

f désigne la fonction d'expression :

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-4x+5}{x^2+x-2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

b. Reproduire et compléter le tableau de signes.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
x^2+x-2	

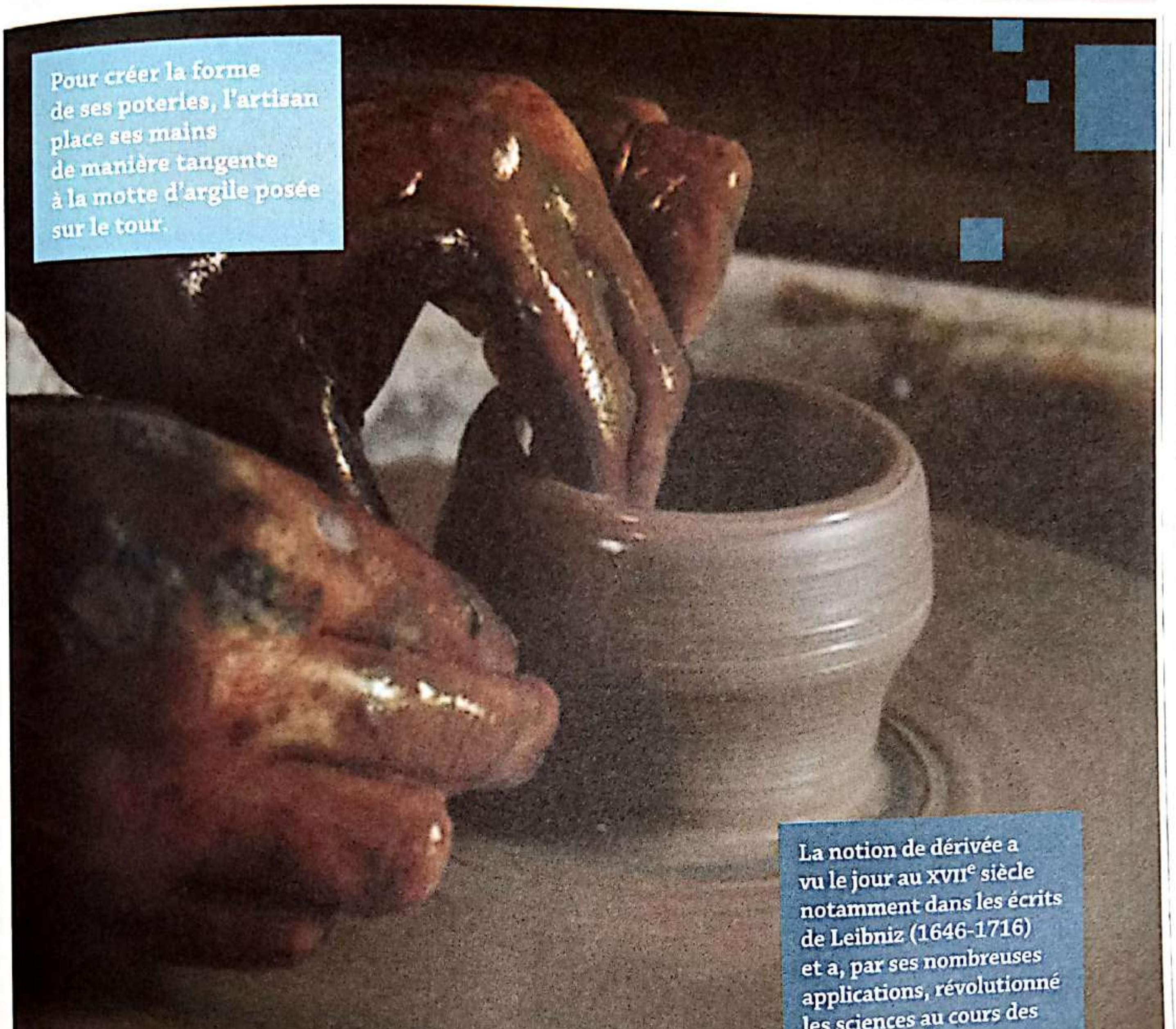
c. En déduire les limites de f en -2 ; puis en 1.

3. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$,

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+x-2}.$$

b. On note $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y=ax+b$ et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère.
- Représenter $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$ à la calculatrice.
- Conjecturer la position relative de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$.
- Étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ suivant les valeurs de x.
- Valider ou invalider la conjecture précédente.

11 Dérivée d'une fonction



Pour créer la forme de ses poteries, l'artisan place ses mains de manière tangente à la motte d'argile posée sur le tour.

La notion de dérivée a vu le jour au XVIIe siècle notamment dans les écrits de Leibniz (1646-1716) et a, par ses nombreuses applications, révolutionné les sciences au cours des siècles suivants.

Les objectifs du chapitre

- Étudier et interpréter la dérivabilité d'une fonction en un point.
- Exprimer la dérivée d'une fonction.
- Déterminer une équation d'une tangente à une courbe.
- Utiliser la dérivée pour résoudre des problèmes d'optimisation.
- Approcher une fonction par une fonction affine au voisinage d'un point.

1 Nombre dérivé et tangente

a Nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel a

Définitions

f désigne une fonction définie sur un intervalle I. a et h sont deux nombres réels tels que $h \neq 0$, $a \in I$ et $a+h \in I$.

- La fonction f est **dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro.
- Cette limite, notée **$f'(a)$**, est appelée **nombre dérivé de f en a**.

Autrement dit, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque cette limite existe.

Exemple

f désigne la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Calcul du taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$, avec $1+h \in]0\,;+\infty[$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h} = \frac{1-(1+h)}{(1+h)h} = \frac{-h}{(1+h)h} = \frac{-1}{1+h}.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{1+h} = -1$. Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = -1$.

Remarques

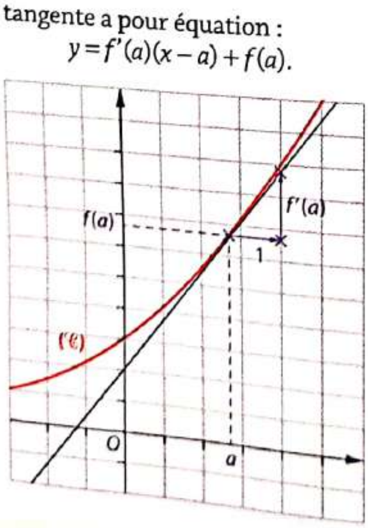
- Dans certains cas, seule la limite à gauche (respectivement à droite) en a existe ; on parle alors de dérivabilité à gauche (respectivement à droite) en a.
- Si une fonction est dérivable en a, alors elle est dérivable à droite et à gauche en a et les deux nombres dérivés sont égaux.

b Tangente à une courbe en un point

Propriétés

f désigne une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en a, $a \in I$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.

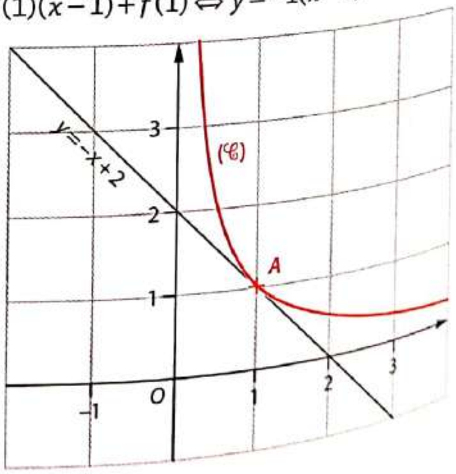
- $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a.
- Cette tangente a pour équation :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Exemple

f désigne la fonction inverse. f est dérivable en 1. Sa courbe représentative admet donc au point $A(1\,;1)$ une tangente d'équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = -1(x-1)+1 \Leftrightarrow y = -x+2.$$



Remarque

Lorsque f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a, sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ admet une demi-tangente à gauche (respectivement à droite) au point $A(a\,;f(a))$.

1 Étudier la dérivabilité d'une fonction en a

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Solution commentée

1. Pour tout $h>0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
2. Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$.
3. Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 à droite.

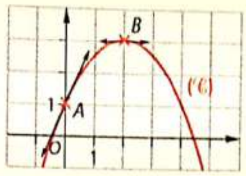
Méthode

1. Calculer le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ où a est le nombre réel donné et h un nombre réel tel que $a+h\in\mathcal{D}_f$.
2. Étudier si ce taux admet une limite finie ℓ, lorsque h tend vers 0.
3. Si oui, f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Si non, f n'est pas dérivable en a.

2 Lire graphiquement un nombre dérivé

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative d'une fonction f tracée dans le repère ci-contre.

Déterminer graphiquement les nombres dérivés :
a. $f'(0)$; **b.** $f'(2)$.



Solution commentée

a. Le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 0 est égal à 2. Ainsi $f'(0)=2$.
b. Le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point B d'abscisse 2 est égal à 0. Ainsi $f'(2)=0$.

Méthode

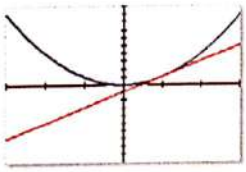
Pour lire graphiquement $f'(a)$:
1. Repérer sur la courbe $(\mathscr{C})$ le point A d'abscisse a.
2. Lire le coefficient directeur de la tangente en A.

3 Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

f désigne la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

Solution commentée

1. • $f(1)=1^2=1$.
   • Calcul du taux d'accroissement.
   $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)=2$.
   Donc, $f'(1)=2$.
2. La tangente (T) a pour équation :
   $y=2(x-1)+1 \Leftrightarrow y=2x-1$.



Méthode

Pour déterminer une équation de la tangente (T_a) au point d'abscisse a.
1. Calculer $f(a)$, puis $f'(a)$.
2. Appliquer la propriété du cours :
$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

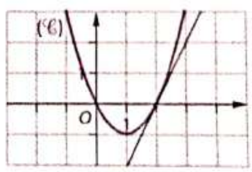
Remarque

Penser à vérifier graphiquement « à la calculatrice » que la droite dont on a obtenu l'équation est bien tangente à la courbe $(\mathscr{C})$.
Voir les pages 264 à 267 à la fin du manuel.

S'exercer

4 f désigne la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.
a. Démontrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=12$.
b. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

5 $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-contre.
Déterminer graphiquement :
a. $f'(1)$; **b.** $f'(2)$.



2 Fonction dérivée et règles de dérivation

a Fonction dérivée

Définitions

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel de I.
- La **fonction dérivée** de f, notée f', est la fonction qui à tout nombre réel x de I associe le nombre réel $f'(x)$.

Exemple

f désigne la fonction carrée. a est un nombre réel.
Pour tout a de $\mathbb{R}$, f est dérivable en a.

En effet, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2ah+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2a+h)=2a$.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x)=2x$.

b Dérivées des fonctions usuelles

Domaine de définition	Fonction : $f(x)$	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée : $f'(x)$
$\mathbb{R}$	$k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$ax+b,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$x^n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

c Dérivées des formes usuelles

u et v désignent des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction de la forme (condition)	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku\ (k\in\mathbb{R})$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$u^n\ (n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2)$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{v}\ (v\neq 0)$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}\ (v\neq 0)$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}\ (u>0)$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

6 Déterminer la dérivée de fonctions usuelles

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}$; **b.** $g(x)=x^5$.

Solution commentée

a. 1. Pour tout a de $\mathbb{R}$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\left(-\frac{1}{4}(a+h)+\frac{1}{7}\right)-\left(-\frac{1}{4}a+\frac{1}{7}\right)}{h}=\frac{-\frac{1}{4}h}{h}=-\frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$.

3. f est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}$ et $f'(a)=-\frac{1}{4}$. Ainsi la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=-\frac{1}{4}$.

b. 1. Pour tout a de $\mathbb{R}$,

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{(a+h)^5-a^5}{h}=\frac{h^5+5ah^4+10a^2h^3+10a^3h^2+5a^4h}{h}=\frac{(a+h)^5-a^5}{h}=h^4+5ah^3+10a^2h^2+10a^3h+5a^4.$$

2. $\lim\limits_{h\to 0}(-h^4+5ah^3+10a^2h^2+10a^3h+5a^4)=5a^4$.

3. g est dérivable en a pour tout a de $\mathbb{R}$ et $g'(a)=5a^4$.
Ainsi la fonction dérivée de g est la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x)=5x^4$.

Méthode

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction pour un nombre réel a quelconque de l'ensemble de définition de f. Ne pas oublier de simplifier quand c'est possible.
2. Déterminer la limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers zéro.
3. Conclure.

7 Déterminer la dérivée de formes usuelles

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans se préoccuper de leur domaine de dérivabilité.

a. $f(x)=x^3+x^2-24x+1$; **b.** $g(x)=\sqrt{x}(x^2-x)$; **c.** $h(x)=\frac{3x}{1-x}$.

Solution commentée

a. 1. La fonction f est la somme de trois fonctions :

$u_1(x)=x^3$, $u_2(x)=x^2$ et $u_3(x)=-24x+1$.

2. $f'(x)=u'_1(x)+u'_2(x)+u'_3(x)=3x^2+2x-24$.

b. 1. La fonction g est le produit de deux fonctions : $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^2-x$.

2. $g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-x)+\sqrt{x}(2x-1)$.

c. 1. La fonction h est le quotient de deux fonctions :

$u(x)=3x$ et $v(x)=1-x$.

2. $h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=\frac{3(1-x)-3x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{3}{(1-x)^2}$.

Méthode

1. Reconnaître la forme de la fonction (somme, produit, quotient…).
2. Utiliser les tableaux des paragraphes **b.** et **c.** du cours.

Remarque

Il est indispensable de connaître ces deux tableaux par cœur.

S'exercer

8 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x)=x^3$, sur $\mathbb{R}$; **b.** $g(x)=\sqrt{x}$, sur $]0\,;+\infty[$.

9 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Démontrer que la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-\frac{2}{x^3}$.

10 Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans se préoccuper de leur domaine de dérivabilité.

a. $f_1(x)=7x^2-3x+1$; **b.** $f_2(x)=\frac{1}{x^2+1}$;

c. $f_3(x)=x\sqrt{x}$; **d.** $f_4(x)=\frac{3x-1}{5-2x}$;

e. $f_5(x)=(2x-1)^5$; **f.** $f_6(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

3 Applications

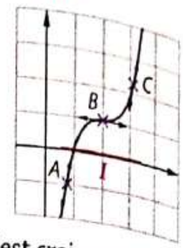
a Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction

Théorème fondamental

f désigne une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa fonction dérivée.
- f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$;
- f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$;
- f est constante sur I si, et seulement si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.

Remarque Dans le cas où I n'est pas un intervalle, ce théorème est faux. Par exemple, la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, $-2 < 2$, mais $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

Exemple



f est croissante sur I et pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

b Extremum

Définitions

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. a est un nombre réel appartenant à I.
- f admet un **maximum local** M sur I lorsque pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leqslant M$;
- f admet un **minimum local** m sur I lorsque pour tout nombre réel x de I, $f(x) \geqslant m$.

Remarques • Un extremum est soit un maximum, soit un minimum.
• Ces définitions s'étendent à l'ensemble de définition de f. Dans ce cas, on parle d'extremum global.

Propriétés

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. a est un nombre réel appartenant à I.
1. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
2. f admet un extremum local en a si, et seulement si, f' s'annule en a en changeant de signe.

Remarques • La réciproque de la propriété **1** est fausse. Par exemple, la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle n'a pas d'extremum et pourtant sa dérivée s'annule en zéro.
• La propriété **2** peut être décrite par l'un des tableaux de variation ci-dessous :

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

← Dans ces cas, → f admet un extremum $f(a)$ atteint lorsque $x = a$.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

c Approximation d'une fonction par une fonction affine

Définition Propriétés

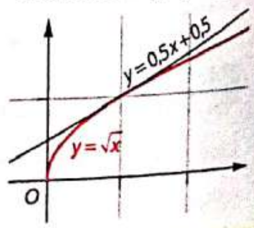
f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. a est un nombre réel appartenant à I.
La fonction définie par $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ est une **approximation affine** de la fonction f au voisinage de a. Autrement dit : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ lorsque x est proche de a.

Exemple L'approximation affine de la fonction racine carrée au voisinage de 1 se traduit par :
$f(x) \approx f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. Ainsi : $\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ pour x proche de 1.

Illustration algébrique (calculs à 0,001 près)

x	0,5	0,8	0,99	1	1,01	1,2	1,5
$\sqrt{x}$	0,707	0,894	0,995	1	1,005	1,095	1,225
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	0,75	0,9	0,995	1	1,005	1,1	1,25

Illustration graphique



11 Étudier le sens de variation d'une fonction

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Étudier le sens de variation de f.

Solution commentée

1. • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables.
Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
• $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$ puisque $(x^2+1)^2$ est un carré donc est toujours positif. Donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in[-1\,;1]$.
2. La fonction f est donc croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

Méthode

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante.
1. Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
2. Appliquer le théorème fondamental du paragraphe **3. a.**

12 Rechercher un extremum d'une fonction

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-8x^2+2$.
Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $[-3\,;3]$.

Solution commentée

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
Ainsi $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2)$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	↘	-14	↗	2	↘	-14	↗	11

2. f' s'annule et change de signe trois fois : en -2, 0 et 2. Il y a donc trois extrema locaux : un maximum égal à 2 en 0 et deux minima égaux à -14 en -2 et en 2.
3. Les valeurs de f en -3 et 3 étant supérieures au maximum local, le maximum global est égal à 11. Le minimum global est égal à -14.

Méthode

1. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles f' s'annule et change de signe.
En déduire les extrema locaux.
3. Comparer les valeurs des extrema avec les bornes de la fonction et en déduire les extrema globaux.

13 Utiliser une approximation affine

Sans utiliser la calculatrice, donner une valeur approchée de $1{,}005^2$.

Solution commentée

1. La fonction utilisée est la fonction carrée :
$f: x\rightarrow x^2$.
2. 1,005 est proche de 1.
3. L'approximation affine au voisinage de 1 s'écrit :
$f(x)\approx f'(1)(x-1)+f(1)\approx 2(x-1)+1\approx 2x-1$.
Ainsi $1{,}005^2\approx 2\times 1{,}005-1\approx 1{,}01$.

Méthode

1. Déterminer la fonction qui est utilisée dans l'expression numérique à calculer.
2. Déterminer au voisinage de quel nombre a « simple » se trouve la valeur numérique présente dans l'expression.
3. Appliquer l'approximation affine du paragraphe **3. c.** à la fonction déterminée au voisinage de a.

S'exercer

14 Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :
a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x+3$;
b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x^2-4}{2+x^2}$.

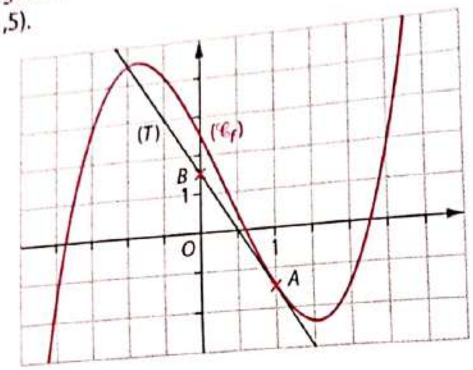
15 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$.
Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur $[-3\,;3]$.

16 Sans la calculatrice, donner une valeur approchée de $2{,}03^3$.

Nombre dérivé et tangente

Réponses rapides

17 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ est tracée dans le repère ci-dessous. La tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(1\,;-1{,}5)$ passe par le point $B(0\,;1{,}5)$.



Déterminer, par lecture graphique :

a. $f'(1)$;

b. une équation de la tangente (T).

18 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+1$.
Utiliser la définition du nombre dérivé pour démontrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

19 f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative dans un repère est notée $(\mathscr{C}_f)$.
On dispose des informations suivantes :
$f(1)=3$ et $f'(1)=2$; $f(3)=6$ et $f'(3)=1$;
$f(6)=7$ et $f'(6)=0$; $f(8)=4$ et $f'(8)=-4$.

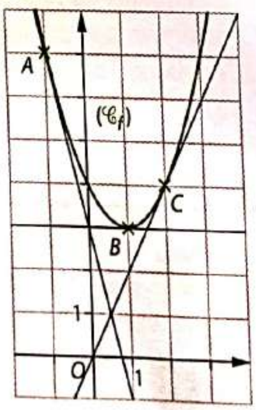
a. Dans un repère orthonormé, placer les points A, B, C et D de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisses respectives 1, 3, 6 et 8.

b. Construire les tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ en ces points.

c. Dessiner une allure possible de $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[0\,;9]$.

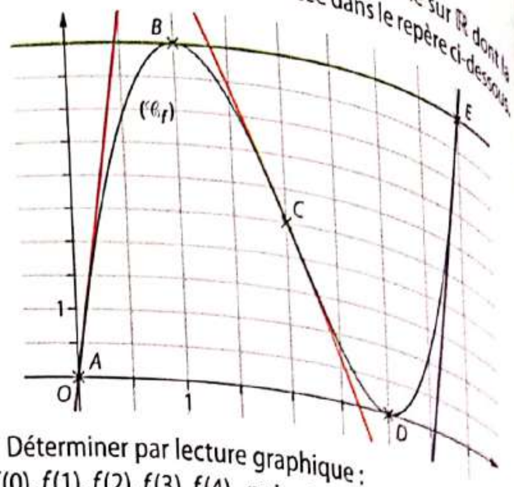
20 f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On dispose des informations suivantes :
$f(-4)=1$ et $f'(-4)=-1$;
$f(0)=0$ et $f'(0)=2$;
$f(6)=1$ et $f'(6)=-0{,}5$;
f admet en 3 un maximum égal à 2 et f est décroissante sur $[-4\,;-1]$.
Tracer dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, une courbe susceptible de représenter la fonction f.

21 La courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ d'une fonction f donnée ci-contre passe par trois points A, B et C.
Déterminer pour chacun de ces points, une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$.



Aide
Lire pour chaque point son abscisse a, puis $f(a)$ et enfin $f'(a)$.

22 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ est tracée dans le repère ci-dessous.



a. Déterminer par lecture graphique :
$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, puis $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et $f'(4)$.

b. $x\in[0\,;4]$. Pour quelles valeurs de x a-t-on :
- $f'(a)=0$?
- $f'(a)>0$?

23 Pour chacune des fonctions suivantes, utiliser la définition du nombre dérivé pour démontrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

a. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $a=2$; **b.** $f(x)=\sqrt{2+x}$; $a=1$;

c. $f(x)=(2x+1)^2$; $a=0$.

24 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-5$.
On note $(\mathscr{C}_f)$ la parabole représentative de f dans un repère.

a. Préciser les coordonnées de son sommet.

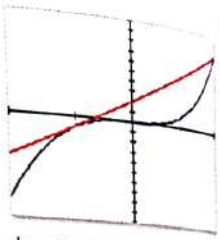
b. Calculer $f'(1)$ en utilisant la définition du nombre dérivé.

c. En déduire l'équation de la tangente (T_1) à $(\mathscr{C}_f)$ en 1.

d. Déterminer de même $f'(2)$ et l'équation de la tangente (T_2) à $(\mathscr{C}_f)$ en 2.

e. Utiliser la calculatrice pour vérifier graphiquement les résultats précédents.

25 Babila a tracé sur sa calculatrice la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et la tangente (T) en un point.



a. Utiliser la figure ci-contre pour conjecturer une équation de cette tangente.

b. Déterminer par le calcul une équation de (T).

26 f désigne la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2, \text{ si } x\geqslant 1 \\ ax^2+b, \text{ si } x<1 \end{cases}.$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

Aide
Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de 1.

27 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^3$.

a. Démontrer que pour $h\neq 0$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=h^2-9h+27$.

b. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Fonction dérivée

Réponses rapides

Pour les exercices 28 à 32, déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g, sans se préoccuper de leur domaine de dérivabilité.

28 • $f(x)=x^3-2x^2+3x-7$; • $g(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^2$.

29 • $f(x)=x^2+\sqrt{x}$; • $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

30 • $f(x)=(2-x)\sqrt{x}$; • $g(x)=(x-2)(2x+5)$.

31 • $f(x)=\frac{2x+1}{x-5}$; • $g(x)=\frac{x+1}{x}$.

32 • $f(x)=(2x+1)^4$; • $g(x)=\sqrt{1-3x}$.

33 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$.

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f au point d'abscisse 1.

c. Démontrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet deux tangentes horizontales en des points dont on précisera les coordonnées.

34 Démontrer qu'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=mx+p \text{ avec } m\in\mathbb{R} \text{ et } p\in\mathbb{R}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=m$.

35 L'écran suivant a été obtenu avec GeoGebra. Justifier les expressions obtenues.

▸ Calcul formel	
1	Dérivée[x^3-2x+3] → $3x^2-2$
2	Simplifier[Dérivée[(1+x)/(1-x)]] → $\left\{\frac{2}{x^2-2x+1}\right\}$

36 f désigne la fonction définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{1+x}.$$

a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (T).

c. Dans un repère, dessiner une représentation à main levée de $(\mathscr{C}_f)$ et (T) sur l'intervalle $[-0{,}5\,;0{,}5]$ illustrant les résultats précédents.

Aide

▸ Les positions relatives des courbes représentatives de deux fonctions f et g sont données par le signe de $f-g$.

37 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

a. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f au point d'abscisse 2.

c. $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

38 1. Associer à chaque fonction sa fonction dérivée.

• $f_1(x)=\frac{1}{3-x}$; • $f'_1(x)=\frac{4}{(3-x)^2}$;

• $f_2(x)=\frac{1+x}{3-x}$; • $f'_2(x)=\frac{3}{(3-x)^2}$;

• $f_3(x)=\frac{x}{3-x}$; • $f'_3(x)=\frac{1}{(3-x)^2}$.

2. f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{a+bx}{3-x},\ a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}.$$

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

b. En déduire $f'(x)$ lorsque $a=3$ et $b=-2$.

c. Vérifier les résultats de la question 1.

39 **Démontrer une propriété**

u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Démontrer que la fonction $u+v$ est dérivable sur I et que sa fonction dérivée $(u+v)'$ est la fonction $u'+v'$.

40 **Démontrer une propriété**

u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

On souhaite démontrer que la fonction uv est dérivable sur I de fonction dérivée $u'v+uv'$.

a et h sont deux nombres réels tels que $a\in I$ et $a+h\in I$.

a. Exprimer le taux de variation T de la fonction uv entre a et $a+h$.

b. Justifier que :

$$T=v(a+h)\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$

c. En déduire le nombre dérivé de la fonction uv en a. Conclure.

41 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;2\}$ par $f(x)=\frac{3}{x^2-x-2}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. a. Trouver les nombres réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;2\}$: $f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$.

b. Utiliser l'expression du a. pour déterminer $f'(x)$.

c. Démontrer que les deux expressions de $f'(x)$ obtenues au 1. et au 2. b. sont égales.

Aide

▸ Utiliser l'égalité $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

42 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-3x^2+x+1.$$

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de f au point d'abscisse 2.

c. Utiliser l'écran obtenu avec GeoGebra pour étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (T).

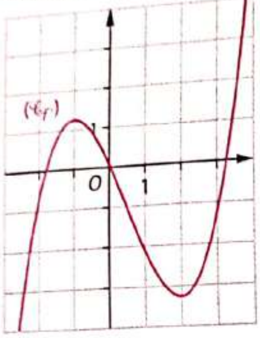
5	Factoriser[f(x)-(x-3)] → $(x-2)^2\,(x+1)$

Sens de variation d'une fonction

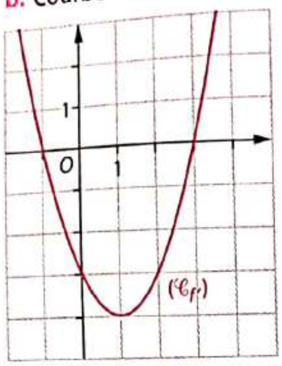
Réponses rapides

43 f désigne une fonction dérivable de dérivée f'.
Dans chaque cas, déterminer par lecture graphique le signe de f' et en déduire les variations de f.

a. Courbe de f' ;



b. Courbe de f'.

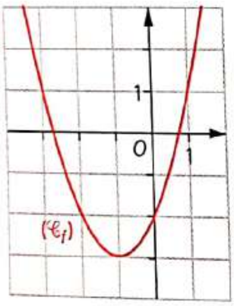


44 f désigne une fonction dérivable de dérivée f'.
Dans chaque cas, utiliser l'expression de $f'(x)$ pour déterminer les variations de f.

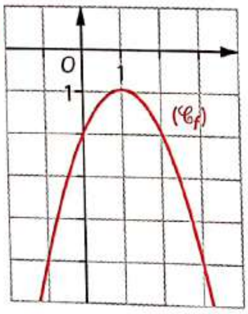
a. $f'(x)=x^2+1$; b. $f'(x)=2x-1$.

Pour les exercices **45** à **48**, utiliser le graphique pour déterminer le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

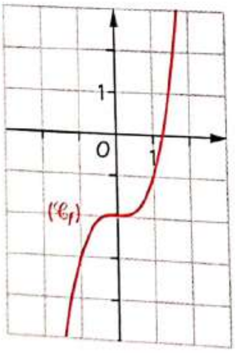
45



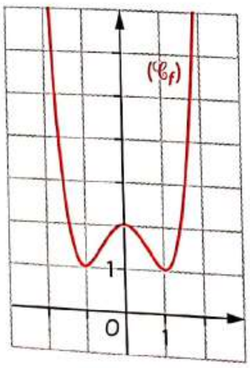
46



47



48



Pour les exercices **49** à **51**, étudier le signe de $f'(x)$ afin d'en déduire les variations de f sur l'intervalle I proposé.

49 $f(x)=x^2+x-5$; $I=\mathbb{R}$.

50 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; $I=]-1\,;+\infty[$.

51 $f(x)=x\sqrt{x}$; $I=[0\,;+\infty[$.

52 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^3+3x^2-1.$$
On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère.

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Étudier les variations de f.

c. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

d. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

e. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, utiliser les résultats précédents pour tracer avec soin $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[-2\,;1{,}5]$.

53 f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^4-x^3.$$

a. Déterminer $f'(x)$, puis l'écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs.

b. En déduire le tableau de variation de f.

54 f désigne la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

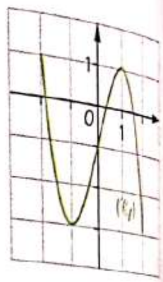
a. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

Extrema d'une fonction

Réponses rapides

55 Lire les extrema locaux de la fonction f définie sur $[-2\,;2]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



56 Utiliser le tableau de signes ci-dessous pour dresser le tableau de variation de f et préciser les valeurs pour lesquelles f présente un extremum local.

x	-3		-2		0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

57 Utiliser le tableau de variation ci-dessous pour déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f sur $[-5\,;3]$.

x	-5		-1		0		2		3
$f(x)$	11	$\searrow$	-14	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	15

58 f et g désignent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2-2x+5 \quad \text{et} \quad g(x)=x^3-3x.$$
Pour chaque fonction,

a. Dresser le tableau de variation.

b. En déduire les extrema locaux.

59 f désigne la fonction définie et dérivable sur $]-1\,;1[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Aide Dresser le tableau de variation de f.

Démontrer que f admet sur $]-1\,;1[$ un maximum en 0.

60 Un industriel lance sur le marché des chargeurs sans fil pour téléphone portable.

x désigne le nombre de chargeurs produits et vendus en milliers.

La fabrication journalière est comprise entre 0 et 50 000 chargeurs, ainsi $x\in[0\,;50]$.

La recette, exprimée en milliers de F CFA, est donnée par la fonction $R(x)=-2x^3+15x^2+400x$.

Les coûts de production, exprimés en milliers de F CFA, sont donnés par la fonction $C(x)=100x+100$.

a. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

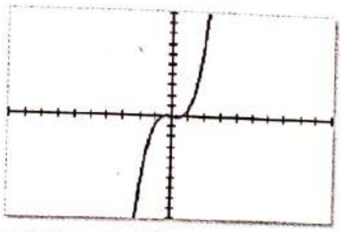
b. Calculer $B'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de B sur $[0\,;50]$.

d. Déterminer le nombre de chargeurs à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum. Quel est alors ce bénéfice ?

61 L'écran de calculatrice ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-10\,;10]$ par :

$f(x)=x^3-0{,}03x$.



1. Quel semble être le sens de variation de f ?

2. a. Étudier les variations de f sur $[-10\,;10]$.

b. Valider ou invalider la conjecture du **1.**

3. a. Déterminer les extrema de f sur $[-10\,;10]$.

b. Utiliser le zoom ou un changement de la fenêtre graphique de la calculatrice pour vérifier les résultats du **a.**

62 f désigne la fonction définie et dérivable sur $[-4\,;4]$ par :

$$f(x)=\frac{4x+1}{x^2+3}.$$

a. Étudier le sens de variation de f sur $[-4\,;4]$.

b. Déterminer le maximum global de f sur $[-4\,;4]$. En quel point est-il atteint ?

c. Déterminer le minimum global de f sur $[-4\,;4]$. En quel point est-il atteint ?

63 f désigne la fonction définie et dérivable sur $[-4\,;4]$ par :

$$f(x)=x^3-1{,}5x^2-18x.$$

a. Utiliser la calculatrice graphique pour conjecturer le minimum de f sur $[-4\,;4]$ et en quel point il est atteint.

b. Déterminer $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;4]$.

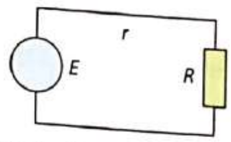
d. Valider ou invalider le conjecture émise en **a.**

64 f désigne la fonction définie et dérivable sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x+2}.$$

Déterminer les extrema de f sur $[-1\,;1]$.

65 Le schéma ci-dessous est celui d'un circuit électrique. La tension E, exprimée en volts, et la résistance du fil r, exprimée en ohms sont constants.



L'intensité qui traverse le circuit est donnée par $i(R)=\dfrac{E}{r+R}$.

La puissance P dissipée par la résistance R vérifie la relation :

$$P(R)=Ri^2.$$

On suppose que $E=230$ V et que $r=10\ \Omega$.

a. Exprimer l'intensité i, puis la puissance P en fonction de R.

b. Étudier les variations de P sur $[0\,;+\infty[$.

c. En déduire la valeur de R pour que P soit maximale. Préciser la valeur de P.

66 f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2-2x-3$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs de a et b pour que f admette 2 pour maximum local en -1.

Approximation affine d'une fonction

Réponses rapides

67 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

a. Déterminer une approximation affine au voisinage de zéro de f.

b. En déduire une valeur approchée de $\dfrac{1}{0{,}992}$.

c. Comparer le résultat précédent avec celui donné par la calculatrice.

68 a. Justifier, pour x nombre réel proche de zéro, les approximations affines suivantes :

- $(1+x)^2\approx 1+2x$;
- $(1+x)^3\approx 1+3x$;
- $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$;
- $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$.

b. En déduire, sans utiliser la calculatrice, une valeur approchée de chacun des nombres :

- $A=1{,}005^2$;
- $B=0{,}997^3$;
- $C=\sqrt{0{,}996}$;
- $D=\dfrac{1}{1{,}007}$.

69 Utiliser une approximation affine pour déterminer une valeur approchée du nombre $N=\dfrac{2{,}0001}{1{,}0001^2}$.

70 f désigne la fonction définie et dérivable sur $[25\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{25+x}.$$

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{25{,}02}$.

Comparer ce résultat avec la valeur donnée par la calculatrice.

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

71 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $[-4\,;3]$ est donné ci-dessous.

x	-4		0		1		3
$f(x)$	1	↗	5	↘	-4	↗	6

	vrai	faux
1. f' est négative sur $[0\,;1]$.	☐	☐
2. $f'(1)=0$.	☐	☐
3. f' est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.	☐	☐
4. Le maximum de f sur $[-4\,;3]$ est 6.	☐	☐
5. $f'(3)=0$.	☐	☐
6. $f'(2)>0$.	☐	☐
7. $f(-2)>f(-1)$.	☐	☐

Avec justification

72 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Le tableau de variation de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;3]$ est donné ci-dessous.

x	0		1		3
$f'(x)$	5	↘	0	↗	2

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère.

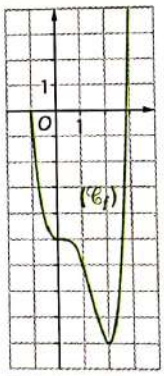
	vrai	faux
1. f est croissante sur $[1\,;3]$.	☐	☐
2. f est décroissante sur $[0\,;1]$.	☐	☐
3. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 2.	☐	☐
4. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-x+4$.	☐	☐
5. f admet un extremum relatif en 1.	☐	☐
6. $f(3)$ est le maximum de f sur $[0\,;3]$.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

73 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions. f désigne une fonction définie sur $[-1\,;3]$ dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ est tracée dans le repère ci-contre.



1. f admet au point d'abscisse 0 :
- **a.** une tangente horizontale ;
- **b.** un minimum local ;
- **c.** un maximum local.

2. $f'(1)$ est :
a. positif ; **b.** égal à 0 ; **c.** négatif.

3. Sur $[1\,;3]$, f' :
a. est négative ; **b.** change de signe ; **c.** est positive.

4. f admet sur $[-1\,;3]$:
- **a.** un maximum égal à 4 ;
- **b.** un minimum égal à 2 ;
- **c.** un maximum égal à 0.

5. f admet au point d'abscisse 2 :
- **a.** deux demi-tangentes ;
- **b.** une tangente de coefficient directeur positif ;
- **c.** une tangente de coefficient directeur nul.

Avec justification

74 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Si $f(x)=(2x-5)(3x-4)$, alors $f'(x)$ est égale à :
a. 6 ; **b.** $6x^2-23x+20$; **c.** $12x-23$.

2. Si $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, alors $f'(x)$ est égale à :
a. $\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$; **b.** $\dfrac{3}{2x}$; **c.** $\dfrac{9x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2$ admet un minimum en :
a. 0 ; **b.** -2 ; **c.** 1.

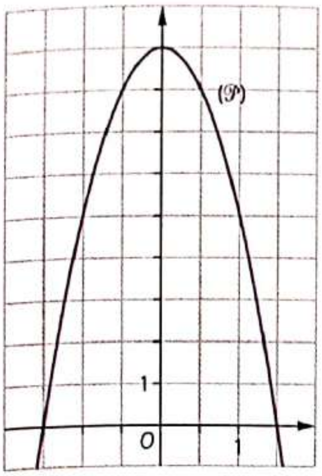
4. Au voisinage de zéro, on peut approcher le nombre réel $(1+x)^2$ par :
a. $1-2x$; **b.** $1+2x$; **c.** $1+\dfrac{x}{2}$.

5. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x+5$ est croissante sur :
a. $]1\,;+\infty[$; **b.** $\mathbb{R}$; **c.** $\left]-\dfrac{1}{3};1\right[$.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

75 Parabole

Le graphique ci-contre représente une parabole $(\mathscr{P})$.



a. Par lecture graphique, déterminer l'expression de la fonction f dont la représentation graphique est $(\mathscr{P})$.

b. Déterminer l'abscisse x du point de la parabole $(\mathscr{P})$ dont la somme des coordonnées est minimale.

76 Une inégalité

n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
f est la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(1+x)^n-1-nx\,.$$

a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x positif,

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

c. Utiliser le résultat précédent pour déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse zéro.

77 Deux manières de dériver

f désigne la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=(x-1)^3(2x+3)^2$.

L'écran ci-contre a été obtenu en utilisant le calcul formel de GeoGebra.

1	Développer[f(x)] → $4x^5-15x^3+5x^2+15x-9$
2	Dérivée[Développer[f(x)]] → $20x^4-45x^2+10x+15$
3	Factoriser[Dérivée[Développer[f(x)]]] → $5(x-1)^2(2x+1)(2x+3)$
4	Dérivée[f(x)] → $3(x-1)^2(2x+3)^2+4(x-1)^3(2x+3)$
5	Factoriser[Dérivée[f(x)]] → $5(x-1)^2(2x+1)(2x+3)$

a. Vérifier par le calcul les étapes 1 et 2.

b. Vérifier par le calcul les étapes 4 et 5.

c. À quoi peut servir l'étape 3 ?

78 Coût marginal

Une entreprise fabrique des ustensiles de cuisine. x désigne le nombre d'ustensiles fabriqués par jour. Le coût de fabrication de ces x ustensiles est égal à :

$$C(x)=2\,000+100x-0{,}001x^2\,.$$

1. Un cas particulier $x=100$

a. Calculer $C(100)$ et $C(101)$.

b. En déduire l'augmentation de coût entraînée par la fabrication d'un ustensile supplémentaire à partir du centième.

2. Cas général

On note C_m le coût marginal de fabrication, il est donné par la formule : $C_m(x)=C(x+1)-C(x)$.
Exprimer $C_m(x)$, puis $C'(x)$ en fonction de x.

3. Erreur commise

On note $C'(x)-C_m(x)$ l'erreur commise.

a. Exprimer l'erreur commise en fonction de x.

b. Calculer la valeur de cette erreur pour $x=100$.

Vocabulaire

On appelle **coût marginal** le coût entraîné par la fabrication d'un objet supplémentaire. Une valeur approchée de ce coût marginal peut être trouvée par la dérivée du coût.

79 Rectangle ou carré ?

On souhaite démontrer que parmi tous les rectangles d'aire 100 cm^2, c'est le carré dont le périmètre est minimal.

a. Exprimer le périmètre $\mathscr{P}$ en fonction de la longueur x du rectangle.

b. Étudier les variations de $\mathscr{P}$. Conclure.

80 Minimum global

m désigne un nombre réel strictement positif. f est la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=mx+1-\dfrac{2x}{x+1}$.

1. $m=1$

a. Étudier les variations de f.

b. En déduire que f admet un minimum global en un point à préciser.

2. a. Ouvrir une feuille graphique dans GeoGebra et y représenter $(\mathscr{C}_f)$ courbe représentative de f en utilisant un curseur pour le nombre réel m.

b. Faire varier m et constater la présence d'un minimum quelle que soit la valeur de m.

3. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de m.

b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle f admet un minimum global atteint en 1 ?

81 Une fonction bornée

f désigne la fonction d'expression $f(x)=\dfrac{-4x-4}{x^2+2x+5}$.

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis utiliser la calculatrice pour conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c. Déterminer les minimum et maximum globaux de f.

d. En déduire que pour tout nombre réel x, on a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

e. Utiliser la calculatrice pour vérifier le résultat précédent.

Vocabulaire

Une fonction est **bornée** s'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

82 Tangente de direction donnée

m désigne un nombre réel. f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+mx-7}{x+3}$.

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de m.

b. Déterminer la valeur de m pour laquelle la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse -1 est parallèle à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{4}x$.

c. Déterminer la valeur de m pour laquelle la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0 est perpendiculaire à la droite d'équation $y=3x$.

83 Tangente perpendiculaire

m désigne un nombre réel.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x-1}$.

Dans un repère orthonormé, $(\mathcal{D}_1)$ est la droite d'équation $x+y-2=0$ et $(\mathcal{D}_2)$ la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
Pour quelle valeur de m $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont-elles perpendiculaires ?

Rappel

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

84 Vitesse moyenne

Un bus fait un aller-retour entre deux villes.
À l'aller, il roule à une vitesse moyenne de 50 km/h et au retour, à une vitesse moyenne x exprimée en km/h.

1. Démontrer que la vitesse moyenne v de l'aller-retour vérifie :

$$v(x)=\frac{100x}{x+50}.$$

2. a. Étudier les variations de v sur $[0\,;90]$ et dresser son tableau de variation.

b. La vitesse de l'aller-retour peut-elle atteindre 75 km/h ?

c. Quelle est la vitesse moyenne maximale pour l'aller-retour ? Quelle est alors la vitesse moyenne maximale du retour ?

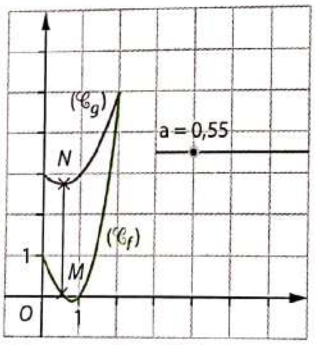
85 Distance entre deux courbes

f et g désignent deux fonctions définies sur $[0\,;2]$ par :

$f(x)=x^3-2x+1$

et $g(x)=x^2-x+3$.

M et N sont deux points de même abscisse appartenant respectivement à $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.



1. a. Utiliser le logiciel GeoGebra pour reproduire la figure ci-contre.

b. Conjecturer la valeur de l'abscisse pour laquelle la distance MN est maximale.

2. h désigne la fonction d'expression $h(x)=g(x)-f(x)$.

a. Étudier les variations de h sur $[0\,;2]$.

b. En déduire la valeur de x pour laquelle $h(x)$ est maximale.

c. Conclure en validant ou invalidant la conjecture émise à la question 1.b.

86 Étude d'un signe

P désigne la fonction définie sur $[0\,;4]$ par $P(x)=x^3-2x^2+x-5$.

1. Utiliser la calculatrice pour conjecturer le signe de P sur $[0\,;4]$.

2. a. Étudier les variations de P sur $[0\,;4]$ et dresser son tableau de variation.

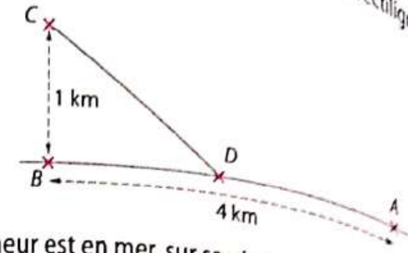
b. En déduire que $P(x)$ change de signe pour une valeur α de x appartenant à $[1\,;4]$.

c. Utiliser la calculatrice pour donner un encadrement de α à 0,1 près.

d. Conclure en donnant le signe de P sur $[0\,;4]$.

87 Un problème d'optimisation

Deux villages A et B sont situés sur une côte rectiligne, à 4 km l'un de l'autre.



Un pêcheur est en mer, sur sa pirogue, au point C situé à 1 km au large de B ; il veut se rendre en A le plus rapidement possible. Il se déplace en mer à une vitesse de 4 km/h et sur terre à une vitesse de 8 km/h.
On se propose de déterminer le point D du segment $[AB]$ où le pêcheur doit débarquer.
x désigne la distance, exprimée en km, entre B et D.

a. Déterminer, en fonction de x, le temps t, en heures, mis par le pêcheur pour effectuer le trajet C-D-A.

b. Étudier les variations de la fonction ainsi obtenue.

c. En déduire la position du point D et le temps du parcours C-D-A.

88 Fonction polynôme du quatrième degré

P désigne la fonction polynôme définie sur $[-5\,;5]$ par :

$$P(x)=x^4+2x^3-12x^2+14x-1.$$

a. Utiliser la calculatrice pour conjecturer le sens de variation de P.

b. Calculer $P'(x)$, puis $P''(x)$.

c. Étudier le signe de $P''(x)$ et en déduire le tableau de variation de P'.

d. Utiliser les résultats précédents pour déterminer le sens de variation de P.

89 Tangente passant par l'origine

f désigne une fonction définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$f(x)=\frac{-x-1}{x-2}.$$

$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans un repère.
On se propose de chercher s'il existe une tangente à $(\mathscr{C}_f)$ passant par l'origine du repère O.

a. Conjecturer avec GeoGebra ou à la calculatrice le nombre de solutions de ce problème.

b. Déterminer $f'(x)$.

c. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse m, $m\in\mathbb{R}$, $m<2$.

d. Déterminer alors les valeurs de m pour lesquelles la tangente passe par l'origine du repère.
Donner les équations des tangentes correspondantes.

90 Approximation affine

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^2+3$.

a. Déterminer l'approximation affine g au voisinage de 20 de f.

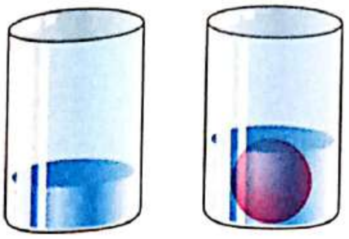
b. Démontrer que l'erreur commise e vérifie :

$$e(x)=|f(x)-g(x)|=4(x-20)^2.$$

c. Calculer $f(20{,}001)$, $g(20{,}001)$ et $e(20{,}001)$.

d. Calculer $f(20{,}000001)$, $g(20{,}000001)$ et $e(20{,}000001)$.
Quelle est l'erreur commise par la calculatrice ?

91 Diamètre d'une bille



Un verre de forme cylindrique de rayon 5 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 2 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d, exprimé en cm. L'eau recouvre alors exactement la bille.

1. Justifier que le diamètre d vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leq d \leq 10 \\ d^3 - 150d + 300 = 0 \end{cases}.$$

2. f désigne la fonction définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 150x + 300.$$

a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $[0\,;10]$.

b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0\,;10]$.

c. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Conclure.

92 Tangentes parallèles

f et g désignent deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 - 6x + 3.$$

On souhaite déterminer s'il existe des valeurs de x pour lesquelles les tangentes aux courbes représentatives de f et g sont parallèles.

a. Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0 \quad (E).$$

b. Justifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation (E).

c. Après avoir factorisé le premier membre, achever la résolution de (E). Conclure.

93 Tangentes communes à deux courbes

f et g désignent deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

On souhaite déterminer s'il existe des valeurs de x pour lesquelles les courbes représentatives $(\mathscr{C}_f)$ de f et $(\mathscr{C}_g)$ de g ont la même tangente.

1. • Dans une feuille graphique GeoGebra, tracer les deux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

• Placer un point variable M sur $(\mathscr{C}_f)$ et tracer la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ correspondante.

• En déplaçant le point M, conjecturer les solutions au problème posé.

2. a. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse a.

b. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point d'abscisse b.

c. Déduire de l'égalité de ces deux équations que les nombres réels a et b sont solutions du système :

$$(S)\begin{cases} 2a - 4 = -2b + 2 \\ -a^2 + 3 = -b^2 - 3 \end{cases}.$$

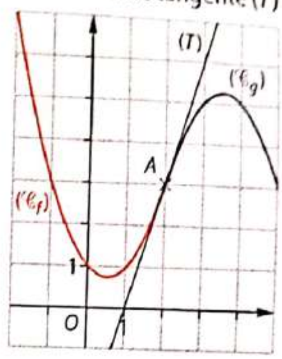
d. Résoudre (S) et donner une équation de chaque tangente correspondant à une solution.

94 Prolongement par continuité

f désigne la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

On souhaite la prolonger sur $[2\,;5]$ par une fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx - 7$, a et b étant des nombres réels de manière à ce que les deux courbes aient la même tangente (T) au point de jonction A.



On note $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ les courbes représentatives respectives de f et de g dans un repère.

a. Traduire par une équation d'inconnues a et b que $A \in (\mathscr{C}_g)$.

b. Traduire par une équation d'inconnues a et b que les deux tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ au point A ont le même coefficient directeur.

c. Résoudre le système ainsi obtenu.

d. Vérifier avec la calculatrice la solution trouvée.

95 Deux points, une même tangente

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Cas particulier

a. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse -1.

b. Démontrer que (T) est également tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en un autre point dont on donnera l'abscisse.

2. Cas général : m désigne un nombre réel.

a. Déterminer $f'(x)$ et démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) - f'(m) = -4(x - m)(x^2 + mx + m^2 - 1).$$

b. Justifier que si la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse m est également tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en un autre point, alors l'équation $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ doit avoir au moins une solution.

c. En déduire un encadrement du nombre réel m.

96 Relativité

f désigne la fonction définie sur $]-\infty\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. a. Utiliser la définition du nombre dérivé pour démontrer que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire une approximation affine de f au voisinage de zéro.

2. Dans la mécanique classique, l'énergie cinétique d'un corps de masse m en mouvement avec une vitesse v est donnée par l'égalité : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$.

Dans la mécanique relativiste d'Einstein, cette même énergie cinétique d'un corps se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière, est donnée par la formule :

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2 \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière.}$$

On pose $x = \dfrac{v^2}{c^2}$.

Démontrer que l'énergie cinétique classique est une bonne approximation de l'énergie cinétique relativiste pour des vitesses très inférieures à la vitesse de la lumière.

97 La « sorcière d'Agnesi »

1. Construction d'une courbe

Ouvrir une feuille graphique GeoGebra.

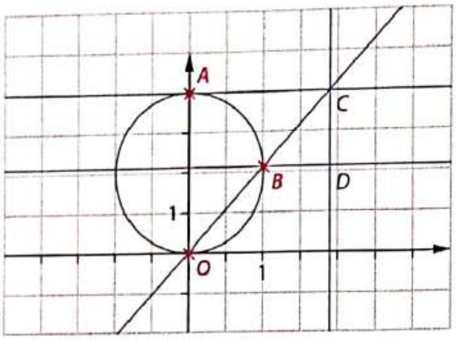
a. Placer les points $O(0\,;0)$ et $A(0\,;4)$.

b. Construire le cercle de diamètre $[OA]$ et placer un point quelconque B sur ce cercle.

c. Construire la droite perpendiculaire à (OA) en A.
Cette droite coupe la droite (OB) en un point C.

d. Construire la droite perpendiculaire à (AC) passant par C et la droite parallèle à (AC) passant par B.
Ces deux droites se coupent en un point D.

e. Activer la trace du point D afin d'obtenir la figure ci-dessous :



2. Équation de la courbe

On suppose que B a pour abscisse le nombre réel m.

a. Démontrer que l'ordonnée de B est égale à :

$$2+\sqrt{4-m^2} \quad \text{ou} \quad 2-\sqrt{4-m^2}\,.$$

On suppose que $y_B=2+\sqrt{4-m^2}$ pour la suite de cette partie.

b. Déterminer une équation de la droite (OB) et en déduire les coordonnées du point C.

c. Démontrer que les coordonnées du point D sont :

$$D\left(\frac{4m}{2+\sqrt{4-m^2}}\,;\ 2+\sqrt{4-m^2}\right).$$

3. Étude de la courbe

On admet que la courbe obtenue est la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{64}{x^2+16}.$$

a. Étudier les variations de f et construire son tableau de variation.

b. En déduire que f admet un maximum global.

c. Tracer dans la feuille GeoGebra la courbe de cette fonction et constater la coïncidence avec la trace du point D.

Info

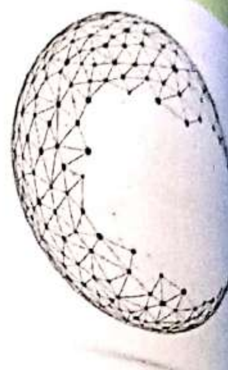
Maria Gaetana Agnesi (1718-1790) est une mathématicienne italienne à qui l'on doit cette courbe dans son ouvrage *Institutions analytiques* publié en 1748.
Le nom de sorcière proviendrait d'une erreur de traduction de l'italien *La versiera*.

98 Méthode d'Euler

Info

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse qui a notamment contribué à la formalisation des mathématiques *modernes*.

En sciences, il arrive qu'une fonction soit seulement connue par sa dérivée et une valeur en un point.



La méthode d'Euler consiste à construire une approximation de la courbe représentative par une ligne brisée obtenue par des approximations affines.

f désigne une fonction telle que :

$$f'(x)=3x^2-x-2 \quad \text{et} \quad f(0)=1.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère.
h est un nombre réel strictement positif.

Partie A *À la main avec* $h=0{,}5$

1. a. Placer dans un repère le point M_0 de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse 0.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C}_f)$ en M_0 et la tracer.

2. a. Déterminer l'ordonnée du point M_1 de (T_0) d'abscisse h et le placer.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à $(\mathscr{C}_f)$ en M_1 et la tracer.

3. a. Recommencer les opérations du **2.** pour les points M_2, M_3 et M_4 d'abscisses respectives $2h$, $3h$ et $4h$.

b. Tracer les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}-2x+1.$$

Tracer cette fonction dans le repère précédent.
Que constate-t-on ?
Que faudrait-il faire pour avoir une meilleure approximation ?

Partie B *Avec un tableur et* $h=0{,}1$

a. Reproduire dans un tableur la feuille de calcul ci-dessous.

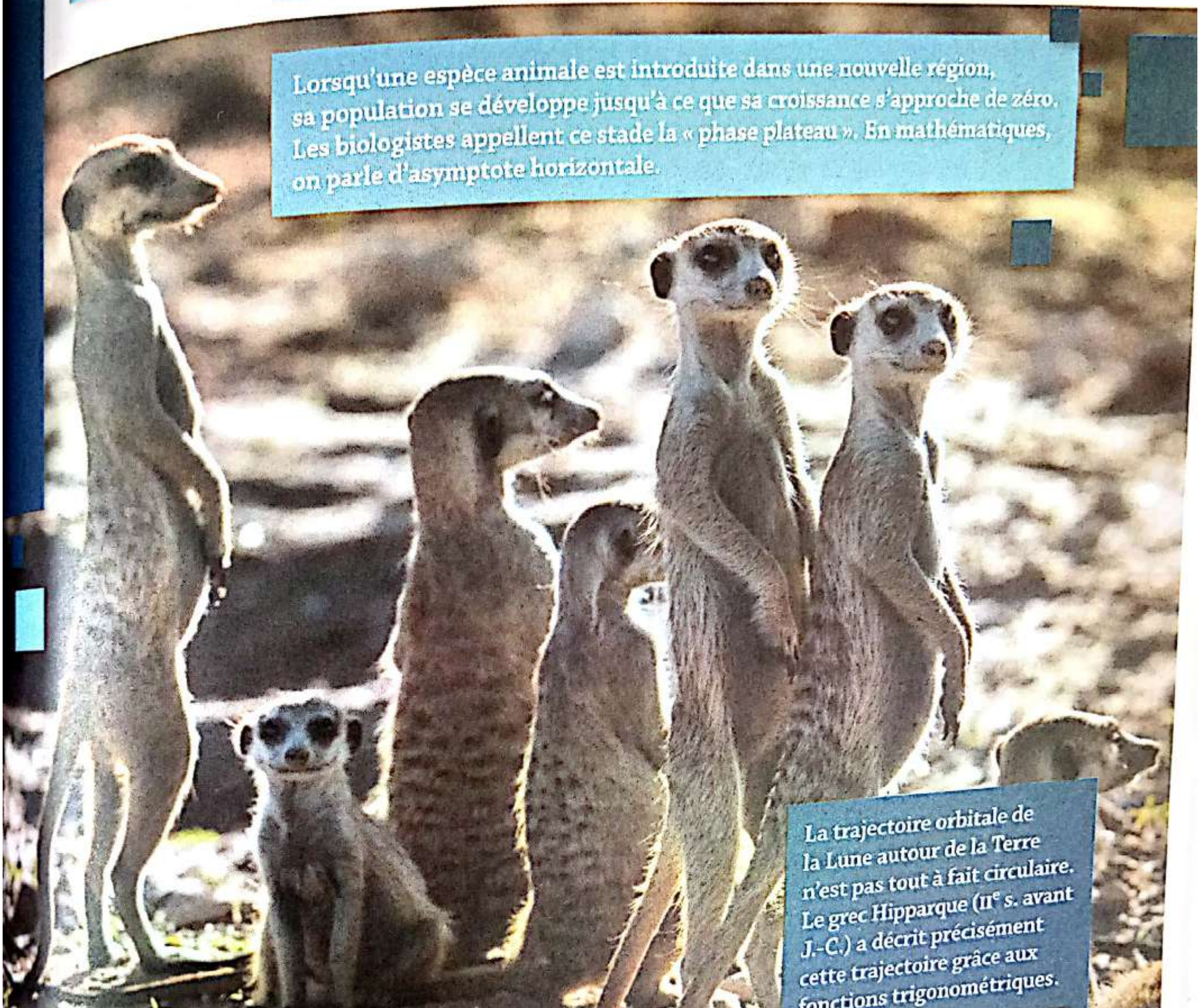
	A	B	C
1	Pour h=	0,1	
2	i	x	y
3	0	0	1
4	1	0,1	0,793
5	2	0,2	
6	3	0,3	
7	4	0,4	
8	5	0,5	
9	6	0,6	

b. Quelles formules ont été entrée en cellules A4 et B4, puis recopiées vers le bas ?

c. Quelle formule a été entrée en cellule C4 ?

d. Visualiser la courbe obtenue avec l'assistant graphique.

12 Étude de fonctions usuelles



Lorsqu'une espèce animale est introduite dans une nouvelle région, sa population se développe jusqu'à ce que sa croissance s'approche de zéro. Les biologistes appellent ce stade la « phase plateau ». En mathématiques, on parle d'asymptote horizontale.

La trajectoire orbitale de la Lune autour de la Terre n'est pas tout à fait circulaire. Le grec Hipparque (II^{e} s. avant J.-C.) a décrit précisément cette trajectoire grâce aux fonctions trigonométriques.

Les objectifs du chapitre

- Étudier la parité, la périodicité d'une fonction.
- Étudier la symétrie d'une courbe : centre et axe de symétrie.
- Rechercher des asymptotes à une courbe.
- Utiliser les fonctions usuelles (fonctions polynômes, fonctions homographiques, fonctions trigonométriques) pour faire le point sur ses connaissances.

12 Cours

1 Éléments de symétrie d'une courbe

a Parité d'une fonction

Définitions

f désigne une fonction et $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

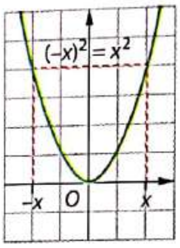
- La **fonction** f est dite **paire** lorsque :
$\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à zéro et,
pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.

- La **fonction** f est dite **impaire** lorsque :
$\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à zéro et,
pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence

Dans un repère orthogonal, une fonction est paire si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

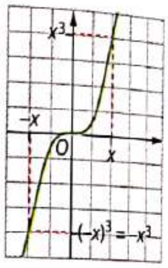
Exemple
La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est paire.
En effet, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.



Conséquence

Dans un repère orthogonal, une fonction est impaire si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple
La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est impaire.
En effet, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $(-x)^3 = -x^3$.

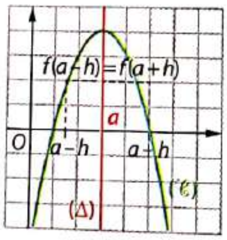


b Cas général

f désigne une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Propriété 1

$(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = a$ si, et seulement si, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $a + h \in \mathcal{D}$, on a :
$a - h \in \mathcal{D}$ et $f(a+h) = f(a-h)$.

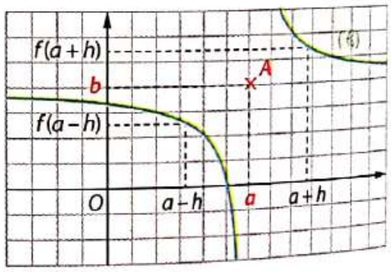


Remarque Dans le cas où $a = 0$, on retrouve la notion de fonction paire.

Propriété 2

$(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport au point $A\,(a\,;b)$ si, et seulement si, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $a + h \in \mathcal{D}$, on a :
$a - h \in \mathcal{D}$ et

$$\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2} = b.$$



Remarque Dans le cas où $a = b = 0$, on retrouve la notion de fonction impaire.

2 Périodicité d'une fonction

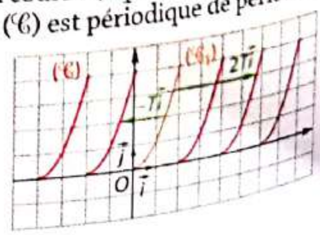
Définition

f désigne une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et T un nombre réel non nul. La **fonction** f est dite **périodique**, de période T lorsque pour tout x de $\mathcal{D}$, $x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x+T) = f(x)$.

Conséquence

Dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, une fonction est périodique de période T si, et seulement si, sa courbe représentative est globalement invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple
La courbe $(\mathscr{C})$ suivante est obtenue par translations de vecteurs $T\vec{i}$, $2T\vec{i}$, $-T\vec{i}$, $-2T\vec{i}$... à partir de la courbe $(\mathscr{C}_1)$. La fonction associée à $(\mathscr{C})$ est périodique de période T.



1 Étudier la parité d'une fonction

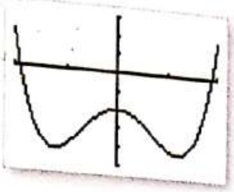
f désigne la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x)=x^4-3x^2-2$.
Étudier la parité de f.

Solution commentée

1. L'ensemble de définition de f : $[-2\,;2]$ est centré en zéro.
2. Pour tout x de $[-2\,;2]$,
$f(-x)=(-x)^4-3(-x^2)-2=x^4-3x^2-2$.
3. Ainsi, pour tout x de $[-2\,;2]$, $f(-x)=f(x)$.
On en déduit que f est paire.

Remarque

Même lorsque cela n'est pas demandé, penser à vérifier la symétrie de la courbe à la calculatrice.



Méthode

Étudier la parité d'une fonction, c'est vérifier si elle est paire ou impaire ou ni l'un, ni l'autre (on dit alors qu'elle est quelconque).

1. S'assurer que l'ensemble de définition est centré en zéro.
2. Exprimer $f(-x)$ et simplifier.
3. Comparer $f(-x)$:
   - à $-f(x)$ pour savoir si f est impaire ;
   - à $f(x)$ pour savoir si f est paire.

2 Étudier la symétrie d'une courbe

f désigne la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

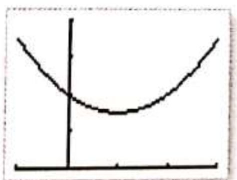
Démontrer que, dans un repère orthogonal, la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f, est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x=1$.

Solution commentée

1. $a=1$ et l'ensemble de définition de f : $[-1\,;3]$ est centré en 1.
(En effet, si $a+h\in[-1\,;3]$, c'est-à-dire si $-1\leqslant 1+h\leqslant 3$, alors $-2\leqslant h\leqslant 2$ donc $-2\leqslant -h\leqslant 2$ et $-1\leqslant 1-h\leqslant 3$, donc $a-h\in[-1\,;3]$).

2. • $f(1+h)=\frac{1}{2}(1+h)^2-(1+h)+2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h^2+1$.
• $f(1-h)=\frac{1}{2}(1-h)^2-(1-h)+2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h^2+1$.

3. Ainsi, $f(1-h)=f(1+h)$, donc $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x=1$.



Méthode

Pour démontrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x=a$ ou par rapport à $A\,(a\,;b)$:

1. Vérifier que l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est symétrique par rapport à a (on peut pour cela, montrer que, si $a+h\in\mathscr{D}$ alors $a-h\in\mathscr{D}$).
2. Exprimer, puis simplifier $f(a+h)$ et $f(a-h)$.
3. • Pour la symétrie par rapport à (Δ) d'équation $x=a$: comparer $f(a+h)$ à $f(a-h)$.
• Pour la symétrie par rapport à $A\,(a\,;b)$: comparer $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{2}$ à b.

S'exercer

Pour les exercices 3 à 6, étudier la parité des fonctions proposées sur leur ensemble de définition $\mathscr{D}$.

3 $f(x)=2x^3+1$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

4 $g(x)=x^4-3$, $\mathscr{D}=[-1\,;1]$.

5 $h(x)=5x^2-x$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

6 $i(x)=3x-\frac{1}{x}$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

7 f désigne la fonction définie sur $[-2\,;6]$ par :
$$f(x)=(x-2)^3+5.$$
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère.
Démontrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport au point $A\,(2\,;5)$.

8 g désigne la fonction définie sur $[-6\,;0]$ par :
$$g(x)=\frac{3}{(x+3)^2}.$$
$(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Démontrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x=-3$.

3 Asymptotes à une courbe

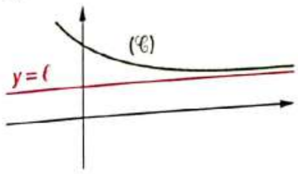
f désigne une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.

a Asymptotes parallèles aux axes du repère

Définition

La droite d'équation $y=\ell$ est dite **asymptote** à la courbe $(\mathscr{C})$ **en $-\infty$** (resp. **en $+\infty$**) lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$).

Illustration



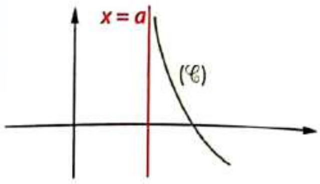
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ donc la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

Remarque Dans ces cas, on parle parfois d'**asymptote horizontale**.

Définition

La droite d'équation $x=a$ est dite **asymptote** à la courbe $(\mathscr{C})$ **en a** lorsque la limite en a de $f(x)$ est infinie.

Illustration



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=a$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en a.

Remarque Dans ces cas, on parle parfois d'**asymptote verticale**.

b Asymptote oblique

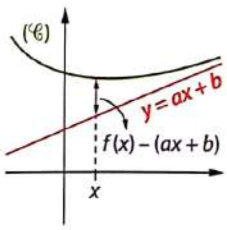
a et b désignent deux nombres réels.

Définition

La droite d'équation $y=ax+b$ est dite **asymptote oblique** à la courbe $(\mathscr{C})$ **en $-\infty$** (resp. **en $+\infty$**) lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$

(resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$).

Illustration



À l'infini, la courbe $(\mathscr{C})$ devient extrêmement proche de la droite rouge $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$, donc la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c L'exemple des fonctions homographiques

Définition

a, b, c, d désignent des nombres réels tels que $c\neq 0$.
Les **fonctions homographiques** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Remarque On montre, avec les outils usuels, que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Propriété

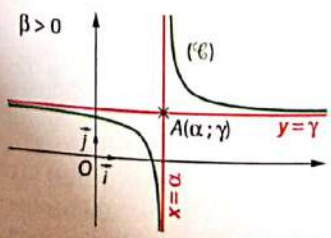
Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x-\gamma}$ avec $\alpha=\dfrac{a}{c}$ et $\gamma=-\dfrac{d}{c}$ (avec les notations de la définition).

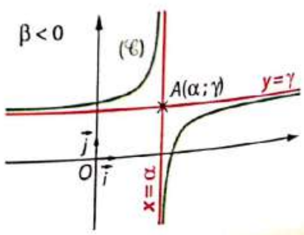
Remarque
De cette propriété, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$ et que la limite en γ de $f(x)$ est infinie.

Ainsi, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=\gamma$ et une asymptote verticale d'équation $x=\alpha$.

Illustrations

Remarque
Le point $A(\alpha\,;\gamma)$ est centre de symétrie de ces courbes.





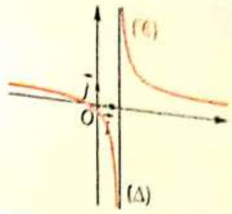
9 Étudier des asymptotes parallèles aux axes

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-4}$.

Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de f et la droite (Δ) d'équation $x=1$, asymptote verticale à ($\mathscr{C}$).

a. Déduire du graphique les limites de f en 1.

b. Démontrer que ($\mathscr{C}$) possède une asymptote horizontale à l'infini.



Solution commentée

a. Puisque (Δ) est asymptote verticale à ($\mathscr{C}$), on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty.$$

b. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$, donc la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ est asymptote horizontale à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$, donc cette même droite est également asymptote horizontale à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

Méthode

Il faut bien comprendre le lien entre la notion d'asymptote, les conséquences graphiques et les limites de la fonction.

Les asymptotes d'une courbe s'étudient aux bornes de l'ensemble de définition.

Ici $\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, ainsi, il faut distinguer les cas :

- limites à gauche et à droite en 1 ;
- limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

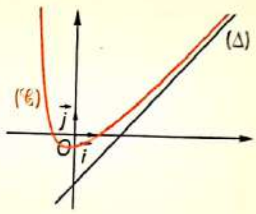
10 Démontrer qu'une droite est asymptote oblique

f désigne la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$.

Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de f et la droite (Δ) d'équation $y=x-2$.

a. Que peut-on conjecturer à propos de (Δ) ?

b. Démontrer la conjecture précédente par le calcul.



Solution commentée

a. À l'infini, il semble que la distance entre la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite (Δ) s'approche de zéro. On conjecture que la droite (Δ) est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

b. **1.** Pour tout x de $]-2\,;+\infty[$,

$$f(x)-(x-2)=\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\frac{(x^2-1)-(x^2-4)}{x+2}=\frac{3}{x+2}.$$

2. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+2}=0.$

3. Ce qui prouve que la droite (Δ) d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

Méthode

Pour savoir si une droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote oblique en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) à la courbe représentative d'une fonction f :

1. Exprimer, puis simplifier $f(x)-(ax+b)$.
2. Calculer la limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) de l'expression obtenue.
3. Conclure suivant les cas :
   - si la limite est nulle, alors la droite est asymptote oblique ;
   - sinon, elle ne l'est pas.

S'exercer

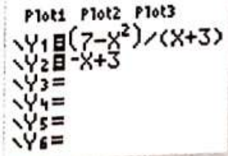
Pour les exercices 11 à 13, f désigne une fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ et ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère. Démontrer que (Δ) est asymptote à ($\mathscr{C}$).

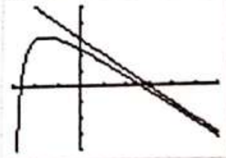
11 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, (Δ) d'équation $x=3$.

12 $f(x)=\dfrac{7x}{x-2}$, (Δ) d'équation $y=7$.

13 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, (Δ) d'équation $y=-1$.

14 La courbe représentative d'une fonction f et une droite (Δ) sont représentées sur l'écran de calculatrice.





a. Que peut-on conjecturer à propos de (Δ) ?

b. Démontrer cette conjecture par le calcul.

4 Les fonctions trigonométriques usuelles

a La fonction sinus

Définition

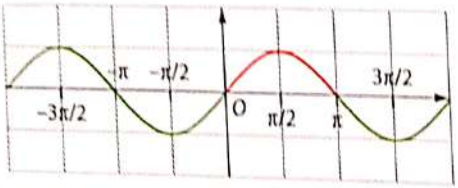
La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

Propriétés

- La fonction sinus est périodique de période 2π.
- La fonction sinus est impaire.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : pour tout x de $\mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$.

Remarque En conséquence, on peut restreindre le domaine d'étude de la fonction sinus à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

x	0		$\pi/2$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Remarques

- Tous les points de coordonnées $(k\pi ; 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont centres de symétrie de la courbe.
- Toutes les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont axes de symétrie de la courbe.

b La fonction cosinus

Définition

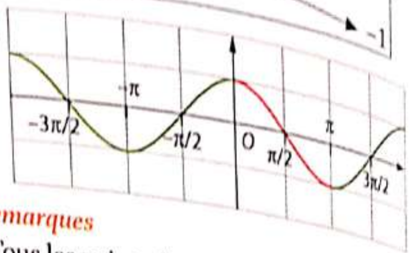
La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.

Propriétés

- La fonction cosinus est périodique de période 2π.
- La fonction cosinus est paire.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : pour tout x de $\mathbb{R}$, $(\cos x)' = -\sin x$.

Remarque En conséquence, on peut restreindre le domaine d'étude de la fonction cosinus à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

x	0		π
$-\sin x$		$-$	
$\cos x$	1	$\searrow$	-1



Remarques

- Tous les points de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; 0\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont centres de symétrie de la courbe.
- Toutes les droites d'équations $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont axes de symétrie de la courbe.

c La fonction tangente

Définition

La **fonction tangente** est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $f(x) = \tan x$.

Propriétés

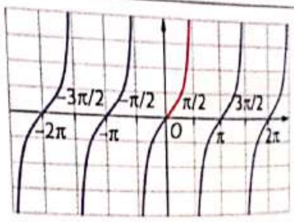
- La fonction tangente est périodique de période π.
- La fonction tangente est impaire.
- La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$, et on a :

pour tout x de $\mathcal{D}$, $(\tan x)' = 1 + \cos^2 x$.

Remarque

En conséquence, on peut restreindre le domaine d'étude de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

x	0		$\pi/2$
$1 + \cos^2 x$		$+$	
$\tan x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Remarques

- Tous les points de coordonnées $\left(k\dfrac{\pi}{2} ; 0\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont centres de symétrie de la courbe.
- Toutes les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont asymptotes verticales à la courbe.

15 Étudier une fonction trigonométrique

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a. Démontrer que f est périodique de période 4π.

b. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$, puis tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Solution commentée

a. 1. Si $x\in\mathbb{R}$, alors $x+4\pi\in\mathbb{R}$.

2. $f(x+4\pi)=2\sin\left(\dfrac{x+4\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ car la fonction sinus est périodique de période 2π.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+4\pi)=f(x)$.

f est donc périodique de période 4π.

b. • Puisque la période de f est 4π, on restreint le domaine d'étude à $[-2\pi\,;2\pi]$. (On aurait pu prendre $[0\,;4\pi]$ ou $[-\pi\,;3\pi]$…)

• Pour tout x de $[-2\pi\,;2\pi]$, $f'(x)=2\times\dfrac{1}{2}\times\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

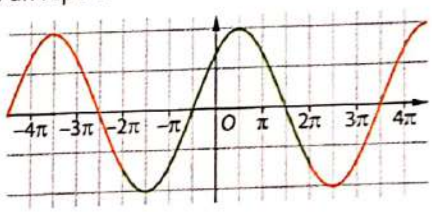
• Or, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\pi}{2}$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$.

De plus, pour $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)\geqslant 0$, donc f est croissante et pour tout $x\in\left[-2\pi\,;-\dfrac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $f'(x)\leqslant 0$, donc f est décroissante.

• On en déduit le tableau de variation de f et sa courbe représentative dans un repère.

x	-2π		$-3\pi/2$		$\pi/2$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	↘	-2	↗	2	↘	$-\sqrt{2}$



Par exemple, $f(-2\pi)=2\sin\left(-\dfrac{2\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$.

Méthode

a. Pour montrer qu'une fonction est périodique de période T :

1. s'assurer que, si $x\in\mathcal{D}$, alors $x+T\in\mathcal{D}$ (où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f) ;
2. exprimer et simplifier $f(x+T)$;
3. comparer $f(x+T)$ à $f(x)$:
   - s'il y a égalité, alors f est périodique de période T ;
   - sinon, elle ne l'est pas.

b. La périodicité (et parfois la parité de f ou la symétrie de sa courbe) permet de restreindre le domaine d'étude à un intervalle plus petit. On utilise ensuite les outils vus aux chapitres précédents (dérivation…).

Remarque

Étudier une fonction, c'est indiquer certaines informations sur cette fonction : ensemble de définition ; parité ; périodicité ou symétrie éventuelles ; limites lorsque c'est utile (ce n'est pas le cas ici) ; asymptote(s) éventuelle(s) ; dérivée et variations (souvent sous forme de tableau de variation) et courbe représentative.

S'exercer

16 Démontrer que les fonctions suivantes sont périodiques de période T.

a. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T=\pi$.

b. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=5\cos(3x-\pi)$; $T=\dfrac{2\pi}{3}\pi$.

c. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-\sin\left(\dfrac{x}{5}+3\right)$; $T=10\pi$.

17 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right).$$

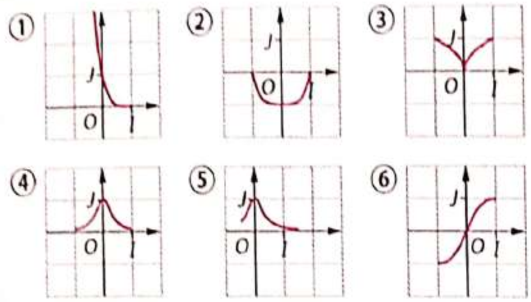
a. Démontrer que f est périodique de période π.

b. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ et tracer la courbe représentative de f dans un repère.

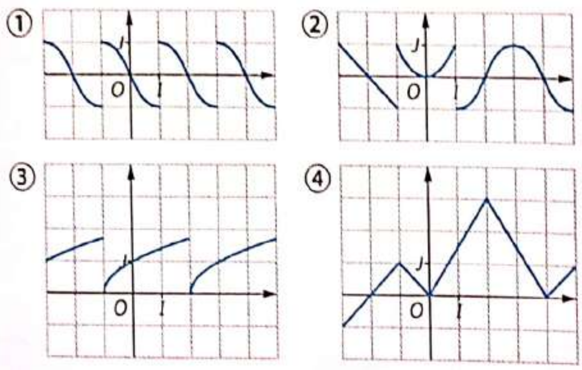
Parité, périodicité

Réponses rapides

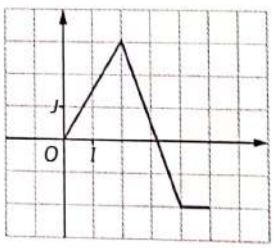
18 Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.
Dans chaque cas, indiquer si f est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.



19 Chacune des courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g.
Dans chaque cas, indiquer si g est périodique.
Si la réponse est oui, donner la plus petite période de g.



20 f désigne une fonction définie sur $[-5\,;5]$ dont une partie de la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



1. a. Reproduire et compléter le graphique ci-dessus dans le cas où f est paire.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $[-5\,;5]$.
2. a. Reproduire et compléter le graphique ci-dessus dans le cas où f est impaire.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $[-5\,;5]$.

21 f désigne une fonction définie sur $[-10\,;10]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{pour } x \geqslant 0 \\ \dots & \text{pour } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Reproduire et compléter les pointillés :
a. dans le cas où f est paire ;
b. dans le cas où f est impaire.

22 f désigne une fonction définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dots & \text{si } x \in [-3\,;-1] \\ 3 & \text{si } x \in [-1\,;0] \\ \dots & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 4x-5 & \text{si } x \in [1\,;3] \end{cases}$$

Reproduire et compléter les pointillés :
a. dans le cas où f est paire ;
b. dans le cas où f est impaire.

23 Étudier la parité des fonctions usuelles suivantes :
- la fonction carré $x \mapsto x^2$;
- la fonction cube $x \mapsto x^3$;
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$;
- la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.

Aide
Pour étudier la parité d'une fonction, il faut commencer par s'assurer que le domaine de définition est centré en zéro.

24 Dans chacun des cas, étudier la parité de f sur son ensemble de définition.

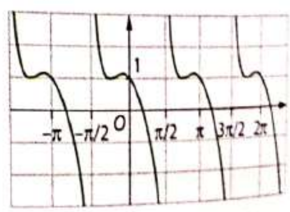
a. $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$; **b.** $f(x)=-4x^3+x$;
c. $f(x)=3x^2+1$; **d.** $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-1}$;
e. $f(x)=5x^3-x+1$; **f.** $f(x)=\dfrac{3x+1}{x}$;
g. $f(x)=x|x|$; **h.** $f(x)=\dfrac{2|x|}{x^2+1}$;

25 Étudier la parité des fonctions usuelles suivantes :
- la fonction cosinus $x \mapsto \cos x$;
- la fonction sinus $x \mapsto \sin x$;
- la fonction tangente $x \mapsto \tan x$.

26 Dans chacun des cas, étudier la parité de f sur son ensemble de définition.

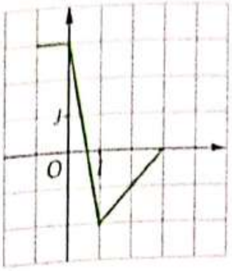
a. $f(x)=x\sin x$; **b.** $f(x)=x\cos x$;
c. $f(x)=x\tan x$; **d.** $f(x)=(x+1)\sin x$;
e. $f(x)=\cos x+\sin x$; **f.** $f(x)=\cos x \sin x$;
g. $f(x)=\dfrac{|x|}{\cos x}$; **h.** $f(x)=\tan^2 x$.

27 La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction périodique.



a. Déterminer la plus petite période T de f.
b. Existe-t-il une autre période pour f ? Si oui, l'indiquer.

28 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 4. Une partie de la courbe de f est représentée ci-contre.
Représenter f sur l'intervalle $[-5\,;5]$.



29 Démontrer que :
- la fonction cosinus est périodique de période 2π ;
- la fonction sinus est périodique de période 2π ;
- la fonction tangente est périodique de période π.

30 Dans chacun des cas, dire si la fonction proposée est périodique de période T.

a. $f(x)=\sin^2 x$, $T=\pi$;
b. $f(x)=x+\cos x$, $T=2\pi$;
c. $f(x)=1+\tan^2 x$, $T=\dfrac{\pi}{2}$;
d. $f(x)=\cos^2 x$, $T=\pi$;
e. $f(x)=1-\sin 3x$, $T=\dfrac{\pi}{3}$;
f. $f(x)=x^2-4\cos 4x$, $T=\dfrac{\pi}{4}$;
g. $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$, $T=4\pi$;
h. $f(x)=\sin 2x+\tan x$, $T=\pi$.

31 Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.
1. Si f est périodique de période π, alors f est périodique de période 2π.
2. Si f est périodique de période 2π, alors f est périodique de période π.
3. Si f est périodique de période 2π et impaire, alors f est périodique de période π.

Logique

Pour justifier qu'une affirmation est vraie, il faut utiliser une démonstration ; pour justifier qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

32 Dans chaque cas, la fonction proposée est périodique.
Déterminer sa période.

a. $f(x)=5\cos(3x)$;
b. $g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)$;
c. $h(x)=\tan\left(\dfrac{2}{\pi}x\right)$;
d. $i(x)=2\cos\left(\dfrac{x}{6}\right)$.

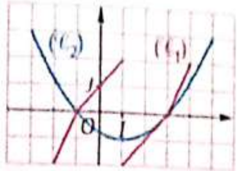
33 a. Donner un exemple de fonction paire et périodique de période π.
b. Donner un exemple de fonction impaire et périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

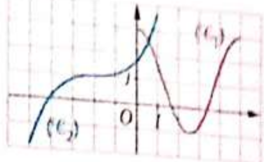
Symétrie d'une courbe

Réponses rapides

34 Dans un repère orthogonal (O, I, J), on donne :
$A(-1\,;3)$, $B(4\,;5)$ et $M(x\,;y)$.
Déterminer les coordonnées des symétriques de A, B et M :
a. par la symétrie centrale de centre O ;
b. par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées ;
c. par la symétrie centrale de centre $I(1\,;2)$;
d. par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) d'équation $x=3$.

35 Dans chaque cas, indiquer les éléments de symétrie des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

① 

② 

36 Une partie du tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-2\,;8]$ est donné ci-dessous.

x	-2		-1		3		8
$f(x)$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0		

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Reproduire et compléter ce tableau :
a. dans le cas où $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à $A(3\,;0)$;
b. dans le cas où $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à (Δ) d'équation $x=3$.

Aide

Dans chacun des cas, s'aider d'un graphique à main levée.

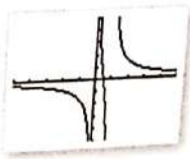
37 f désigne une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Dans chacun des cas, justifier que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à Ω.

a. $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\Omega(2\,;3)$.
b. $f(x)=(x+2)^3+1$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, $\Omega(-2\,;1)$.
c. $f(x)=3\sin(x)-5$, $\mathscr{D}=[0\,;2\pi]$, $\Omega(\pi\,;-5)$.

38 f désigne une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Dans chacun des cas, justifier que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à la droite (Δ).

a. $f(x)=5(x-1)^2+3$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, (Δ) d'équation $x=1$.
b. $f(x)=|2x+6|$, $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, (Δ) d'équation $x=-3$.
c. $f(x)=5\cos(2x)-1$, $\mathscr{D}=\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, (Δ) d'équation $x=\pi$.

39 La courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ est représentée sur l'écran ci-contre.



a. Conjecturer un élément de symétrie de cette courbe.
b. Démontrer cette conjecture.

40 Utiliser la calculatrice pour conjecturer un élément de symétrie des courbes d'équations suivantes ; puis démontrer ces conjectures.

a. $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$;
b. $y=0{,}1x^2+0{,}6x+14$;
c. $y=|x+1|+|x+5|$;
d. $y=1+\sqrt{4-(x-1)^2}$.

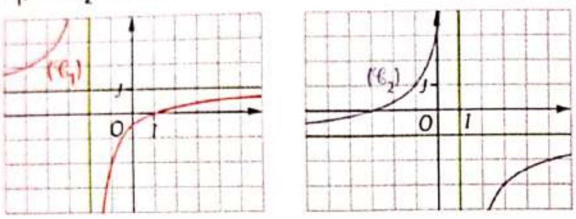
Aide

Pour l'utilisation de la calculatrice, se reporter aux pages 264 à 267 du manuel.

Asymptote à une courbe

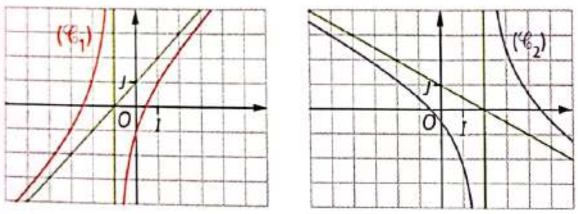
Réponses rapides

41 Déterminer les équations des asymptotes aux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ci-dessous.



42 $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative d'une fonction f.
On sait que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$.
Que peut-on en déduire ?

43 Déterminer les équations des asymptotes aux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ci-dessous.



44 $(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative d'une fonction f.
On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (2x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x - 4 = 0$.
Que peut-on en déduire ?

45 Dans un repère orthogonal, représenter à main levée une courbe qui possède :
- une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ en $-\infty$;
- une asymptote d'équation $x = 1$;
- une asymptote d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

46 f désigne la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}.$$
Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition afin d'en déduire d'éventuelles asymptotes.

47 Les courbes dont les équations sont données ci-dessous possèdent-elles des asymptotes parallèles aux axes de coordonnées ? Justifier.

a. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$; **b.** $y = \dfrac{1}{|x+1|}$; **c.** $y = \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$.

48 Montrer que la droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe d'équation $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$.

Aide

Pour montrer que (Δ) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ d'équation $y = f(x)$ en $-\infty$, il faut montrer que :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0.$$

49 f désigne une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représent[...] dans un repère.
Dans chaque cas, indiquer si la droite (Δ) est ou non asymp[...] oblique à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ ou en $+\infty$.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 5$, (Δ) d'équation $y = -3x + 5$.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 7}{x+1}$, (Δ) d'équation $y = x + 1$.

c. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 13x - 10}{x+2}$, (Δ) d'équation $y = 3x - 7$.

50 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe re[...] sentative dans un repère.
La droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à [...] en $+\infty$.
Justifier l'existence d'une autre asymptote à $(\mathscr{C})$, dont on don[...] l'équation, dans le cas où :

a. f est paire ; **b.** f est impaire.

Fonctions polynômes

Réponses rapides

51 Dans chacun des cas, dresser, sans justifier, le tableau [...] variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = x^2 + 1$; **b.** $f(x) = -(x-1)^2 + 3$;

c. $f(x) = -2x^3$; **d.** $f(x) = 2(x+2)^3 + 2$.

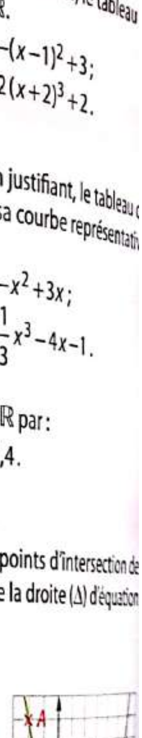
52 Dans chacun des cas, dresser, en justifiant, le tableau [...] variation de la fonction f, puis tracer sa courbe représentati[...] dans un repère.

a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; **b.** $f(x) = -x^2 + 3x$;

c. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x + 2$; **d.** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x - 1$.

53 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}4.$$
a. Étudier la parité de f.
b. Déterminer les variations de f.
c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f et de la droite (Δ) d'équation $y = 0{,}1x + 1$.
d. Dans un repère, tracer $(\mathscr{C})$ et (Δ).

54 La courbe d'équation
$$y = ax^2 + bx + c,$$
avec a, b et c des nombres réels, est représentée ci-contre. Utiliser les informations en rouge sur le graphique pour déterminer a, b et c.

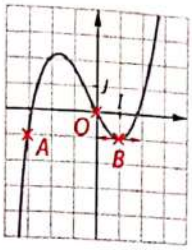


55 Dans chacun des cas, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ; puis en déduire la courbe représentative de g.

a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$; **b.** $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$;

c. $f(x) = -x^2 + 2x$; **d.** $g(x) = -x^2 + 2|x|$.

56 La courbe d'équation
$$y=ax^3+bx^2+cx+d,$$
avec a, b, c et d des nombres réels, est représentée ci-contre.
Utiliser les informations en rouge sur le graphique pour déterminer a, b, c et d.



57 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+1.$$
a. Justifier l'affichage de calcul formel ci-dessous.

Factoriser(x^3-2x^2-5x+6)	
$(x-3)*(x-1)*(x+2)$	M

b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Représenter f dans un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées.

Fonctions rationnelles

Réponses rapides

58 Dans chacun des cas, dresser, sans justifier, le tableau de variation de la fonction f, puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. $f(x)=\frac{1}{x}+1$;
b. $f(x)=-\frac{4}{x}+3$;
c. $f(x)=\frac{3}{|x|}$;
d. $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

59 Dans chacun des cas, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. $f(x)=2-\frac{3}{x-1}$;
b. $f(x)=-5+\frac{2}{x+3}$;
c. $f(x)=\frac{7-x}{3-x}$;
d. $f(x)=\frac{4x+1}{2x-1}$.

60 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.
a. Trouver a, b, tels que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=a+\frac{b}{x-2}$.
b. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes.
c. Montrer que le point d'intersection des deux asymptotes de $(\mathscr{C})$ est le centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

61 Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions :
a. g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x)=\frac{2x-5}{x-1}$;
b. h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $h(x)=\frac{x+4}{2x+6}$.

62 Dans chacun des cas, étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère.
a. $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{x-2}$;
b. $f(x)=\frac{9x^2-1}{x-3}$.

63 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par :
$$f(x)=\frac{x^2+x+3}{x+2}.$$
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.
a. Trouver a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$,
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}.$$
b. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes, dont on précisera les équations.

Fonctions trigonométriques

Réponses rapides

64 Dans un repère, tracer distinctement les courbes des fonctions usuelles ci-dessous en utilisant, pour chaque courbe, au moins huits points.
a. La fonction cosinus sur $[0\,;2\pi]$.
b. La fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.
c. La fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

65 a. Construire les courbes représentatives des fonctions f et g suivantes : • $f(x)=\cos 2x$; • $g(x)=\sin 3x$.
b. Déduire des courbes précédentes, les courbes des fonctions :
• $f_1: x\mapsto \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$; • $g_1: x\mapsto 2+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

66 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
a. Démontrer que f est impaire et périodique, de période 2π.
b. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\pi]$.
d. Tracer $(\mathscr{C})$ sur $\left[-\frac{7\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$.

67 Le mouvement d'un objet accroché à un ressort peut être décrit (lorsqu'il n'y a pas d'amortissement) par la fonction X définie par $X(t)=A\sin(\omega t+\gamma)$ où t est le temps, en s ; $X(t)$ est l'abscisse de l'objet sur un axe gradué et A, ω et γ sont des nombres réels fixés par l'expérience.
Les mouvements de deux ressorts fixés côte à côte sont décrits par les fonctions X_1 et X_2 : $X_1(t)=0{,}2\sin(3t)$
et $X_2(t)=0{,}15\sin\left[4t-\frac{\pi}{2}\right]$.

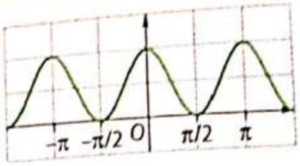
a. Montrer que X_1 et X_2 sont périodiques et préciser leurs périodes.
b. Dresser le tableau de variation de X_1 et X_2 sur $[0\,;\pi]$ et tracer leur courbe représentative dans un repère.

Info
A est appelé **amplitude** du mouvement, ω est la **pulsation** et γ est la **constante de phase**.

Vrai-Faux

Top chrono (sans justification)

68 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.



	vrai	faux
1. La fonction représentée ci-dessus est paire.	☐	☐
2. La fonction représentée ci-dessus est périodique, de période π.	☐	☐
3. Le point $A\,(0\,;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentée ci-dessus.	☐	☐
4. La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire.	☐	☐
5. La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique, de période π.	☐	☐
6. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est paire.	☐	☐
7. La fonction $x \mapsto x\,\lvert x \rvert$ est impaire.	☐	☐

Avec justification

69 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
f désigne la fonction définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

	vrai	faux
1. La fonction f est paire.	☐	☐
2. La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2[$.	☐	☐
3. Pour tout x de $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$, $f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}$.	☐	☐
4. La tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-\dfrac{15}{16}x+\dfrac{19}{8}$.	☐	☐
5. Le point $A\,(-2\,;3)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.	☐	☐
6. La courbe $(\mathscr{C})$ possède deux asymptotes.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono (sans justification)

70 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
f désigne la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. La fonction f est :
a. paire ; **b.** impaire ; **c.** ni l'un, ni l'autre.

2. $(\mathscr{C})$ possède un centre de symétrie, de coordonnées :
a. $(1\,;1)$; **b.** $(1\,;2)$; **c.** $(2\,;1)$.

3. Pour tout x de $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$,

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1},\ \text{avec :}$$

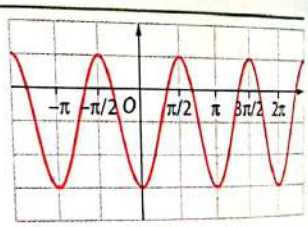
a. $a=2,\ b=1,\ c=1$; **b.** $a=1,\ b=2,\ c=1$;
c. $a=1,\ b=1,\ c=2$.

4. $(\mathscr{C})$ admet pour asymtote la droite d'équation :
a. $x=1$; **b.** $y=1$; **c.** $x=-1$.

5. $(\mathscr{C})$ admet pour asymtote la droite d'équation :
a. $y=x+1$; **b.** $y=x+2$; **c.** $y=2x+1$.

Avec justification

71 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.



1. La courbe ci-dessus représente l'une des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, proposées. Laquelle ?
a. $f : x \mapsto -1+2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; **b.** $f : x \mapsto -1+2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$;
c. $f : x \mapsto -1+2\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. la fonction f est :
a. paire ; **b.** impaire ; **c.** ni l'un, ni l'autre.

3. La courbe représentée admet :
a. la droite (Δ) d'équation $x=1$ pour axe de symétrie ;
b. la droite (Δ) d'équation $x=1$ pour asymptote ;
c. le point $\left(\dfrac{\pi}{4}\,;-1\right)$ pour centre de symétrie ;

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

72 Centre de symétrie

f désigne la fonction définie sur $[-4\,;6]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{5}{3}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.

a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Déterminer le minimum et le maximum de f, ainsi que les abscisses en lesquelles ils sont atteints.

d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère et placer les points m et M qui correspondent aux extremums de f.

e. Calculer les coordonnées du milieu I de $[mM]$.

Placer I dans le repère précédent.

Justifier que I est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

73 Rentabilité d'un article

Une entreprise fabrique n articles, par mois, où $n \in \mathbb{N}$.

Les charges se répartissent en charges fixes d'un montant de 750 000 F par mois et en charges variables d'un montant de 1 200 F par article et par mois.

1. Exprimer la fonction de n le prix de revient r d'un article.

2. a. Étudier la fonction $x \mapsto 1200+\dfrac{750\,000}{x}$.

b. Le repère du plan étant orthogonal, tracer sa courbe représentative sur $[500\,;1\,500]$.

c. Construire, sur le même graphique, la droite d'équation $y=2\,000$.

3. Chaque article est vendu 2 000 F.

Déterminer le nombre minimum d'articles à produire, pour que l'entreprise soit rentable.

4. Retrouver graphiquement ce résultat.

74 Périmètre minimal

1. $\mathscr{P}$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\mathscr{P}(x)=\dfrac{1}{x}+x$.

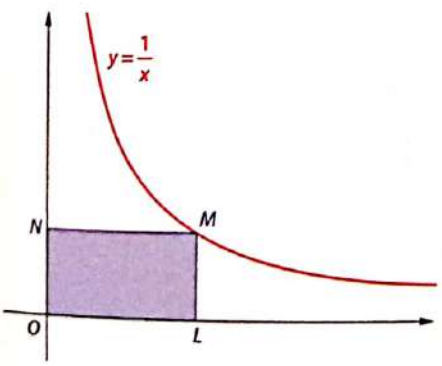
a. Étudier la parité de $\mathscr{P}$.

b. Démontrer que la courbe représentative de $\mathscr{P}$ possède une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées et une asymptote oblique d'équation $y=x$.

c. Dresser le tableau de variation de $\mathscr{P}$ sur $]0\,;+\infty[$.

d. En déduire l'existence d'un minimum de $\mathscr{P}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Le point M du rectangle $OLMN$ ci-dessous a pour abscisse x, $x>0$.



a. Montrer que l'aire du rectangle $OLMN$ est constante.

b. Pour quelle valeur de x le périmètre du rectangle $OLMN$ est-il minimal ? Que vaut alors ce périmètre ?

75 Même dénominateur

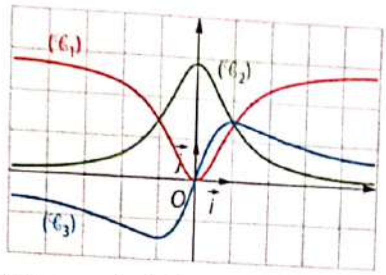
f, g et h désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\quad g(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad h(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

1. a. Étudier la parité de chacune de ces fonctions.

b. Montrer que les courbes associées à ces fonctions possèdent une asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Les courbes associées à ces fonctions sont représentées dans le repère orthogonal ci-dessous.



Associer à chaque courbe la fonction qui lui correspond.

d. Dresser, en justifiant, les tableaux de variations de ces fonctions.

2. Montrer que les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont symétriques :

a. par rapport à un point I dont on donnera les coordonnées ;

b. par rapport à une droite (Δ) dont on donnera l'équation.

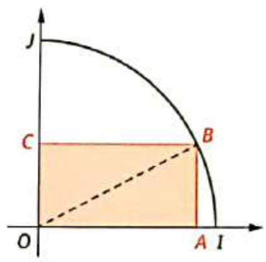
76 Aire et périmètre

x désigne un nombre réel de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et B le point du cercle trigonométrique tel que mes $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})=x$.

$OABC$ est le rectangle dessiné ci-contre.

On travaille dans un repère orthonormé.

On note $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{P}$) l'aire (resp. le périmètre) de ce rectangle.



1. a. Exprimer $\mathscr{A}$; puis $\mathscr{P}$, en fonction de x.

b. Justifier que la droite (Δ) d'équation $x=\dfrac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie des courbes $(\mathscr{C}_{\mathscr{A}})$ et $(\mathscr{C}_{\mathscr{P}})$ représentatives des fonctions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{P}$ dans un repère orthogonal.

2. Démontrer que l'aire et le périmètre atteignent leur maximum en une même valeur de x. (Penser à étudier les variations de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{P}$).

77 Une fonction trigonométrique

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2\sin x+\sin 2x.$$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.

b. Démontrer que f est impaire et périodique de période 2π.

2. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1).$$

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;\pi]$.

3. Tracer la courbe représentative de f à la calculatrice afin de vérifier les résultat précédents.

78 Les boîtes de lait

1. f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-60x^2+450x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

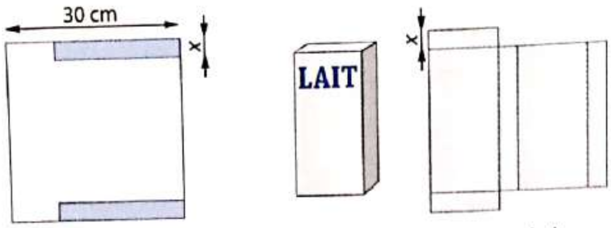
a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Déterminer une équation de la tangente (Δ) en 0 à $(\mathscr{C})$.

c. Calculer $f(5)$, $f(10)$, $f(15)$ et $f(20)$. Tracer $(\mathscr{C})$ et (Δ). (Prendre 1 cm pour représenter 2 unités sur l'axe des abscisses et 100 unités sur l'axe des ordonnées.)

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=500$.

2. Un fabricant envisage la production de boîtes en cartons obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée, comme l'indique la figure ci-dessous.



Le côté de la feuille mesure 30 cm et on désigne par x la largeur en cm des bandes découpées.

a. Calculer les dimensions de la boîte et son volume lorsque $x=10$.

b. On suppose maintenant que : $0<x<15$.
Exprimer, en fonction de x et en cm^3, le volume $\mathscr{V}(x)$ de la boîte.
Vérifier que :
$\mathscr{V}(x)=2x^3-60x^2+450x$

c. Pour quelle valeur de x le volume $\mathscr{V}(x)$ est-il maximal ?
Calculer ce volume.

d. Le fabricant veut obtenir des boîtes de 500 cm^3. Quelle valeur doit-il donner à x ?

79 Résolution d'équations

1. (E) désigne l'équation $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}=0$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}=0$.

b. En déduire des solutions dans $[-\pi\,;\pi]$ de l'équation (E).

2. Résoudre, dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$, par une méthode analogue, l'équation (F) : $2\sin^2 x+(4-\sqrt{3})\sin x-2\sqrt{3}=0$.

80 La bonne fonction homographique

f désigne une fonction d'expression $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$, avec a, b, c des nombres réels.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère.

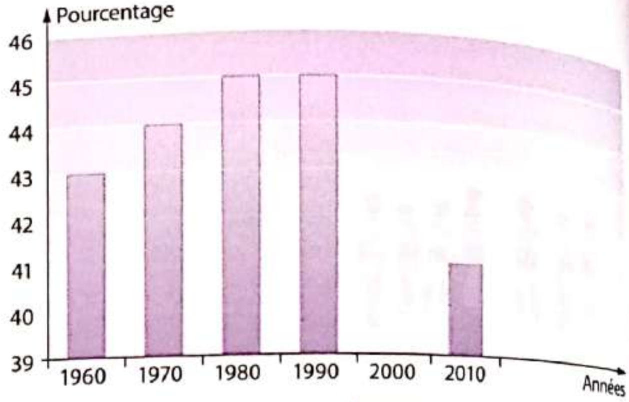
a. Déterminer a, b, c pour que :
- $(\mathscr{C})$ admette pour asymptotes les droites d'équations $x=3$ et $y=2$;
- la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 5 soit parallèle à la droite d'équation $y=-2x+1$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Représenter $(\mathscr{C})$, ses asymptotes et la tangente dans un repère.

81 Modéliser grâce aux fonctions

Le graphique ci-dessous présente, depuis 1960, le pourcentage d'habitants ayant 14 ans et moins en Afrique.
Les données de l'an 2000 ont été perdues.



Source : Université de Sherbrooke.

Afin de retrouver les données manquantes et de faire des prévisions, on a modélisé cette série statistique par deux fonctions définies sur $[60\,;120]$ par :

Modèle 1 : $f(x)=45{,}2\cos(0{,}02x-1{,}7)$.

Modèle 2 : $g(x)=0{,}00035x^3-0{,}1076x^2+10{,}70554x-301{,}5$.

1. Dresser le tableau de variation de ces fonctions (arrondir, si nécessaire, à l'unité).

2. Répondre aux questions ci-dessous pour chacun des modèles.

a. En quelle année le pourcentage a-t-il été maximal ?

b. Quel était le pourcentage en l'an 2000 ?

3. a. Sachant qu'en 2013, 40 % de la population africaine avait 14 ans et moins.
Quel modèle semble le mieux adapté ?

b. Prévoir, grâce à ce modèle, le pourcentage qui pourrait être atteint en 2020.

82 Centre et axe, fonction et dérivée

f désigne une fonction dont l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de sa fonction dérivée dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que si le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors la droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

2. Démontrer que si la droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors le point $\Omega(a\,;0)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

83 La bonne fonction cubique

g désigne une fonction d'expression :
$$g(x)=x^3+ax^2+bx+c,$$
avec a, b, c des nombres réels.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g dans un repère.

a. Déterminer a, b, c pour que :
- $A(2\,;10)\in(\mathscr{C})$;
- la dérivée de g s'annule en 2 ;
- la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 3 passe par le point $B(0\,;2)$.

b. Montrer que le point A est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

c. Dresser le tableau de variation de g.

d. Représenter $(\mathscr{C})$ et sa tangente au point d'abscisse 3 dans un repère.

84 Différentes écritures

Partie A *Les fonctions homographiques*

1. f désigne une fonction homographique d'expression :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$

avec a, b, c, d des nombres réels et $b \neq 0, c \neq 0$.

a. Montrer que, pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$,
il existe des nombres réels α, β, γ tels que :

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}.$$

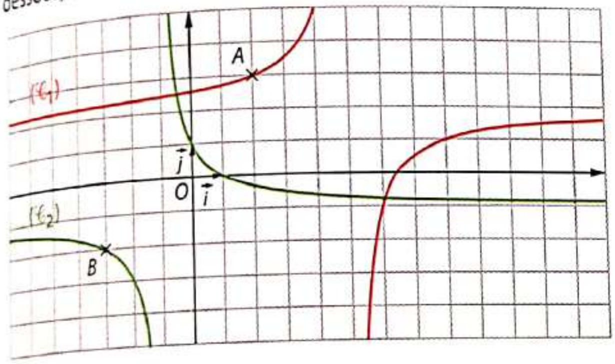
(Exprimer α, β et γ en fonction de a, b, et c.)

b. Montrer que, dans un repère, la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f possède deux asymptotes parallèles aux axes.
Préciser leurs équations.

c. Justifier que $(\mathscr{C})$ possède un centre de symétrie I dont on donnera les coordonnées à l'aide de α, β, γ ; puis à l'aide de a, b, c, d.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition. (Distinguer deux cas.)

2. Les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentées dans le repère ci-dessous, sont celles des fonctions homographiques f_1 et f_2.



En effectuant le moins de calculs possibles :

a. déterminer l'équation de $(\mathscr{C}_1)$ en utilisant ses asymptotes et le point A ;

b. déterminer l'équation $(\mathscr{C}_2)$ en utilisant son centre de symétrie et le point B.

Partie B *D'autres fonctions rationnelles*

1. f désigne une fonction d'expression :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e},$$

avec a, b, c, d, e des nombres réels, $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

a. Montrer que, pour tout $x \neq -\frac{e}{d}$, il existe des nombres réels a', b', c', d' tels que :

$$f(x)=\frac{a'x^2+b'x+c'}{x-d'}.$$

(Exprimer a', b', c' et d' en fonction de a, b, c, d, e.)

b. Montrer que, pour tout $x \neq d'$, il existe des nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

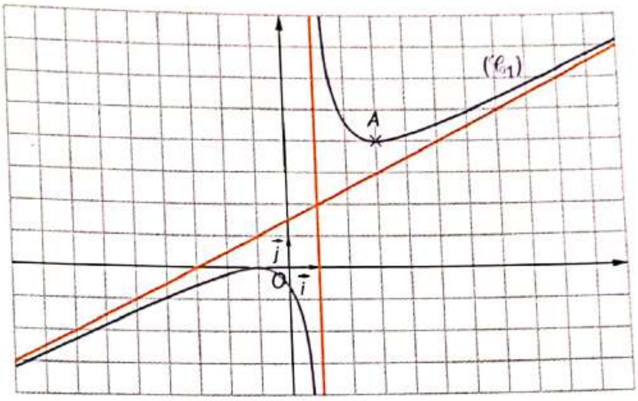
$$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-\delta}.$$

(Exprimer α, β, γ, et δ en fonction de a', b', c', d'.)

c. Montrer que, dans un repère, la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f possède deux asymptotes. Préciser leurs équations.

d. Déterminer, en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les coordonnées du point d'intersection I de ces deux asymptotes.
Justifier que I est le centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

2. Dans le repère ci-dessous, la courbe $(\mathscr{C})$ représentative d'une telle fonction f et ses deux asymptotes ont été tracées.



En effectuant le moins de calculs possibles, déterminer l'équation de $(\mathscr{C})$.

85 Coincée entre deux droites

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+\cos^2 x.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère.

Partie A *Une propriété de* $(\mathscr{C})$

1. Étudier la parité de $(\mathscr{C})$.

2. La fonction f est-elle périodique ? Justifier.

3. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+\pi)=f(x)+\pi$.
b. On note (Γ_1) la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ et (Γ_2) la représentation de f sur l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$.
Comment déduit-on (Γ_2) de (Γ_1) ?

Partie B *Étude de f*

1. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.
b. En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
c. Interpréter graphiquement l'encadrement démontré à la question **a.**

2. $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}_1)$ désignent les droites d'équations respectives $y=x$ et $y=x+1$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec les droites $(\mathscr{D}_0)$ et $(\mathscr{D}_1)$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$									

5. a. Utiliser les questions précédentes pour tracer, avec soin, la courbe (Γ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
b. Compléter, à main levée, la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-\pi\,;2\pi]$.

86 Fonctions polynômes de degré 3

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines propriétés de fonctions polynômes de degré 3 qui s'écrivent sous forme $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ avec a, b, c des nombres réels.

Partie A *Conjecturer à partir d'exemples*

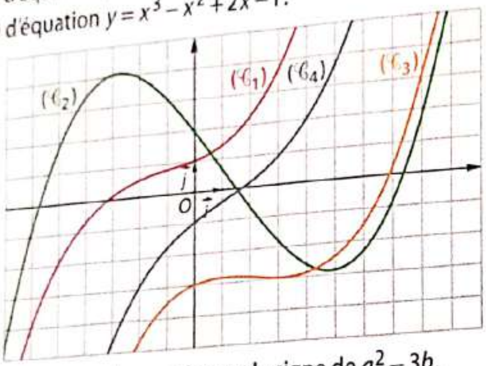
1. Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes :

$(\mathscr{C}_1)$ d'équation $y=x^3+x^2+x+1$;

$(\mathscr{C}_2)$ d'équation $y=x^3-x^2-4x+2$;

$(\mathscr{C}_3)$ d'équation $y=x^3-2x^2+x-3$;

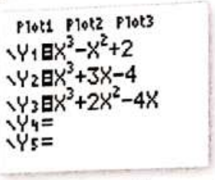
$(\mathscr{C}_4)$ d'équation $y=x^3-x^2+2x-1$.



a. Dans chacun des cas, donner le signe de a^2-3b.

b. Conjecturer les variations des fonctions à l'aide du signe de a^2-3b. (On ne demande pas de préciser les intervalles.)

2. a. Représenter à l'écran de la calculatrice chacune des courbes dont l'équation est donnée ci-dessous.



b. Ces représentations semblent-elles confirmer la conjecture émise au **1.b.** ?

Partie B *Étude des fonctions f*

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. (Distinguer trois cas.)

3. Justifier que le point $I\left(-\dfrac{a}{3} ; f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f dans un repère.

Partie C *Une propriété de tangente*

(Δ_α) désigne la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse α.

1. Déterminer une équation de (Δ_α).

2. g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=f(x)-\left[f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)\right].$$

a. Déterminer les expressions de $g'(x)$ et de $g''(x)$.
En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que α est solution de l'équation $g'(x)=0$.
En déduire l'autre solution, notée β, de l'équation $g'(x)=0$ en fonction de α et de a.

Montrer que $g(\beta)=4\left(\alpha+\dfrac{a}{3}\right)^3$.

c. En déduire le signe de $g'(x)$.

d. Dresser le tableau de variation de g en distinguant trois cas :

$$\alpha<-\frac{a}{3} ;\quad \alpha=-\frac{a}{3} ;\quad \alpha>-\frac{a}{3}.$$

e. En déduire le signe de $g(x)$ pour « x autour de α ».

3. Déduire des résultats précédents la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ_α) autour du point d'abscisse α.

87 Distances d'un point à des tangentes

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-2x}{2+x^2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A *Étude de f*

1. Étudier la parité de f.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2+8X-4=0$.

b. En déduire les solutions de l'équation $x^4+8x^2-4=0$.

3. a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

b. Justifier par un calcul, l'écran de calcul formel.

```
1 simplifier(developper((x-sqrt(2*sqrt(5)-4))*(x+sqrt(2*sqrt(5)-4))*(x^2+4+2*sqrt(5))))
  x^4+8*x^2-4
```

(La notation sqrt () signifie « square root » : racine carrée.)

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x)=x\left(1-\frac{4}{2+x^2}\right).$$

En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$, dont on précisera l'équation.
On note (Δ) cette asymptote.

e. Représenter $(\mathscr{C})$ et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Partie B *Quelques tangentes à $(\mathscr{C})$*

1. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ suivantes :
- (T) et (T') parallèles à l'axe des abscisses ;
- (S) et (S') parallèles à (Δ).

2. Représenter ces tangentes dans le repère précédent et placer le point $A(2 ; 4)$.

Partie C *Distances d'un point à des tangentes*

1. Calculer la distance du point A à (Δ).

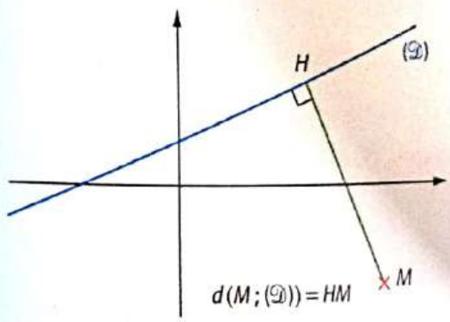
2. a. Calculer la distance du point A à (S) ; puis à (S').

b. En déduire la distance entre (S) et (S').

Rappel

Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $M(x_0 ; y_0)$ à une droite $(\mathscr{D})$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est égale à :

$$d(M ; (\mathscr{D}))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



13 Suites numériques

Les premiers termes de la suite de Fibonacci sont les nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55… Ces termes se retrouvent dans le nombre de pétales de certaines fleurs : iris : 3 pétales, primevère : 5 pétales, aster : 55 pétales…

Philosophe du V^e siècle avant J.-C., Zénon D'Élée est notamment connu pour ses paradoxes. Le paradoxe *Achille et la tortue* peut être résolu grâce à la convergence des suites.

Les objectifs du chapitre

- Représenter une suite.
- Étudier le sens de variation d'une suite.
- Rechercher les minorants et majorants éventuels d'une suite.
- Étudier la convergence d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

13 Cours

1 Généralités

a Suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, u :
$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est appelé **terme général** ou **terme d'indice n** ou encore **terme de rang n** de la suite u.

Notation
Une suite u peut aussi être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement, (u_n).

b Diverses façons de définir une suite et de la représenter

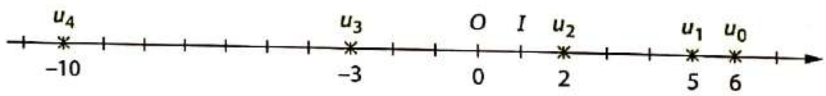
Suites définies par une formule explicite

Définition

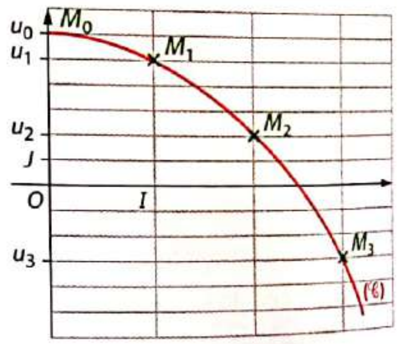
Une suite u est définie par une **formule explicite** lorsque u_n est exprimé uniquement en fonction de n.

Exemple
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 6 - n^2$. Cette suite est définie par une formule explicite.

Représentation sur un axe
On a : $u_0 = 6$; $u_1 = 5$; $u_2 = 2$; $u_3 = -3$; $u_4 = -10$; ...
On en déduit une représentation graphique de cette suite sur un axe.



Représentation dans le plan
Le plan est muni du repère (O, I, J)
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 6 - x^2$.
Pour tout nombre entier naturel n, on désigne M_n le point de coordonnées $(n\,;f(n))$.
L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (u_n) dans le plan.
Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).



Suites définies par récurrence

Définition

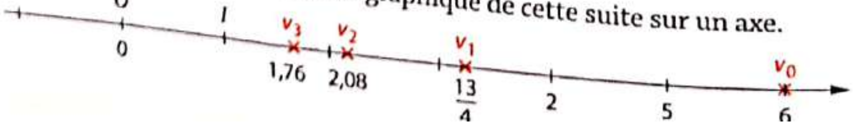
Une suite est **définie par récurrence** lorqu'on connaît son (ou ses) premier(s) terme(s) et que son terme général est exprimé en fonction du (ou des) terme(s) précédent(s).

Exemple

(v_n) désigne la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_n + 1 = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{3}{v_n}\right) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette suite v est définie par récurrence.

Représentation sur un axe
On a : $v_0 = 6$; $v_1 = \dfrac{13}{4}$; $v_2 = \dfrac{217}{104} \approx 2{,}08$; $v_3 \approx 1{,}76$.
On en déduit une représentation graphique de cette suite sur un axe.



Représentation dans le plan
Voir l'exercice résolu 2 page 215.

1 Savoir calculer ou exprimer des termes d'une suite

1. (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n+2}$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

2. (v_n) désigne la suite définie par $v_0 = 4$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n - 5$.

a. Calculer v_1, v_2.

b. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1}.

Solution commentée

1. a. $u_0 = \dfrac{0^2+1}{3\times 0+2} = \dfrac{1}{2}$; $u_1 = \dfrac{1^2+1}{3\times 1+2} = \dfrac{2}{5}$; $u_2 = \dfrac{5}{8}$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{3(n+1)+2} = \dfrac{n^2+2n+2}{3n+5}$.

2. a. $v_1 = 3v_0 - 5 = 3\times 4 - 5 = 7$; $v_2 = 3v_1 - 5 = 3\times 7 - 5 = 16$.

b. $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 5$.

Méthode

1. b. Remplacer n par $n+1$ dans l'expression de u_n.

2. b. Remplacer n par $n+1$ dans l'expression reliant v_{n+1} à v_n.

Remarque

Pour saisir une suite à la calculatrice ou avec un tableur, voir les pages 264 à 269 à la fin du manuel.

2 Savoir représenter une suite

(u_n) désigne la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$

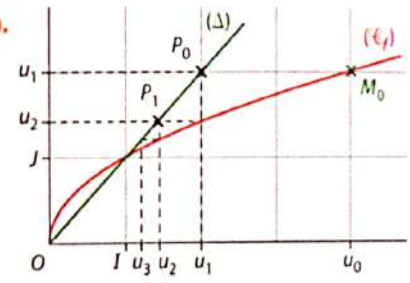
a. Calculer u_1 et u_2.

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, tracer la droite (Δ) d'équation $y = x$ et la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Placer les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

Solution commentée

a. $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$.
$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{2}$.

b.



Méthode

b. Construction de u_1 :
M_0 désigne le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse $u_0 = 4$.
L'ordonnée de M_0 est $u_1 = f(u_0)$.
P_0 désigne le point de (Δ) d'ordonnée u_1 et donc d'abscisse u_1.
On procède de même pour construire les termes suivants.

S'exercer

3 Calculer u_0, u_1 et u_2 ; puis exprimer u_{n+1} en fonction de n pour chacune des suites :

a. $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$;

b. $u_n = \sqrt{n^2+3n+4}$;

c. $u_n = \dfrac{2n-4}{1+n}$;

d. $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$.

4 Calculer u_1 et u_2 ; puis, exprimer u_{n+1} en fonction de n pour chacune des suites :

a. $u_n = (-2)^{n+1}$;

b. $u_n = \sqrt{1+\sqrt{n-1}}$;

c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$

5 (u_n) désigne la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Dans un repère, tracer les droites d'équations :

$$y = x \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

c. Placer les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

2 Étude d'une suite numérique

a Minorant, majorant d'une suite

Définition

(u_n) désigne une suite définie sur une partie D de $\mathbb{N}$.

- La suite (u_n) est dite **minorée** sur D lorsqu'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in D$, on a $u_n \geqslant m$. Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de la suite.
- La suite (u_n) est dite **majorée** sur D lorsqu'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in D$, on a $u_n \leqslant M$. Dans ce cas, on dit que M est **majorant** de la suite.
- La suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée.

b Sens de variation d'une suite

Définitions

(u_n) désigne une suite définie sur une partie D de $\mathbb{N}$.

- La suite (u_n) est dite **croissante** sur D lorsque, pour tout n de D (avec $n+1 \in D$), on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite (u_n) est dite **décroissante** sur D lorsque, pour tout n de D (avec $n+1 \in D$), on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite (u_n) est dite **constante** sur D lorsque, pour tout n de D (avec $n+1 \in D$), on a $u_{n+1} = u_n$.
- La suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Définitions

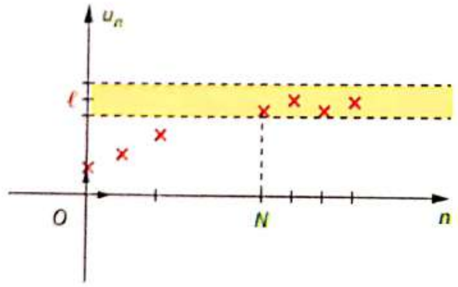
ℓ désigne un nombre réel.

- Une suite (u_n) est dite **convergente vers ℓ** lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Remarque

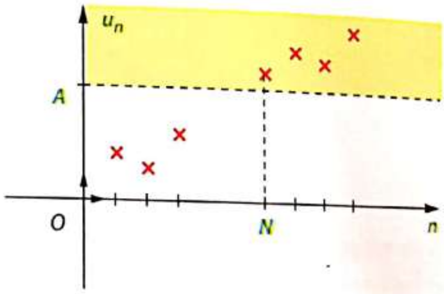
Une suite divergente peut donc tendre vers $-\infty$, tendre vers $+\infty$ ou ne pas avoir de limite.

Interprétation graphique de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$



Dire que la limite de (u_n) est égale à ℓ signifie qu'à partir d'un certain rang N, tous les termes u_n sont infiniment proches de ℓ.

Interprétation graphique de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



Dire que la limite de (u_n) est égale à $+\infty$ signifie qu'à partir d'un certain rang N, tous les termes u_n sont supérieurs à une valeur A aussi grande que l'on veut.

Remarque

On peut, de manière analogue parler d'une suite (u_n) qui a pour limite $-\infty$.

Propriété

(u_n) désigne une suite définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ où ℓ désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

6 Savoir démontrer qu'une suite est bornée

Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3+2\cos(n)$ est bornée.

Solution commentée

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos(n) \leqslant 2$ donc $3-2 \leqslant 3+2\cos(n) \leqslant 3+2$, d'où $1 \leqslant u_n \leqslant 5$ et (u_n) est bornée. ((u_n) est minorée par 1 et majorée par 5.)

Méthode

Remarquer que la fonction cosinus est bornée ($-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$).
Utiliser les opérations usuelles sur les inégalités.

7 Savoir étudier le sens de variation

Étudier le sens de variation de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$; **b.** $u_n = n^3+n-1$; **c.** $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1{,}2u_n \end{cases}$ **pour tout n de $\mathbb{N}$.** **(On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.)**

Solution commentée

a. Méthode 1 : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+1)}{(n+2)(n+1)}$

$= \dfrac{n^2+2n+1-n^2-n}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{n+1}{(n+2)(n+1)}$

or pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ donc $n+1>0$ et donc $n+2>0$.
Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ et donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

b. **Méthode 2 :** f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^3+x-1$.
On a $f'(x) = 3x^2+1$ donc $f'(x)>0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$,
par conséquent $f(n+1) > f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$;
donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

c. **Méthode 3 :** $u_{n+1} = 1{,}2u_n$ d'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}2$ car $u_n > 0$

par conséquent $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Méthode

a. Pour comparer deux nombres (u_n et u_{n+1}) il suffit de comparer leur différence ($u_{n+1} - u_n$) à zéro. Ce qui ramène la comparaison des deux nombres à une étude du signe de leur différence.

b. Pour une suite définie explicitement si la fonction associée est monotone alors la suite l'est aussi et elle a les mêmes variations que la fonction.

c. Pour une suite de signe constant, pour comparer u_{n+1} et u_n, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

8 Savoir étudier la convergence d'une suite

La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est-elle convergente ou divergente ?

Solution commentée

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$.

Méthode

Remarquer que $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ puis utiliser la propriété du paragraphe **2. b.**

S'exercer

9 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est bornée par -1 et 1.
b. Étudier de trois façons différentes le sens de variation de (u_n).
c. Étudier la convergence de (u_n).

10 Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2\sin(n) - 3$ est bornée.

11 (u_n) désigne la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$. (On admet que $u_n < 0$).
Étudier le sens de variation de (u_n).

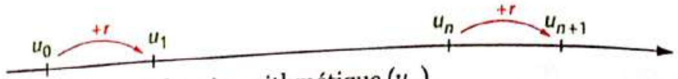
3 Suites arithmétiques, suites géométriques

D désigne une partie non vide de $\mathbb{N}$.

a Suites arithmétiques

Définitions

Une **suite** (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout n de D, on a $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n).

Propriété (Formule explicite)

(u_n) désigne une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r.
Pour tout n de D, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Propriété (Somme de termes consécutifs)

(u_n) désigne une suite arithmétique de premier terme u_p.
Pour tout n de D tel que $n \geqslant p$,

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n-p+1).$$

Remarques • $(n-p+1)$ est le nombre de termes de la somme.
• La somme ci-dessus est donc égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes.
• Lorsque $p = 0$, $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$.

Propriété

(u_n) désigne une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante et diverge vers $-\infty$.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante et converge vers u_p.

b Suites géométriques

Définitions

Une **suite** (u_n) est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n de D, on a $u_{n+1} = qu_n$.

Le nombre réel q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n).

Propriété (Formule explicite)

(u_n) désigne une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q.
Pour tout n de D, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Propriété (Somme de termes consécutifs)

(u_n) désigne une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q. Pour tout n de D tel que $n \geqslant p$,

• si $q \neq 1$, $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$;

• si $q = 1$, $S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)u_p$.

Remarques • $(n-p+1)$ est le nombre de termes de la somme S.
• Si $q \neq 1$ et $p = 0$, $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété

q désigne un nombre réel fixé.

- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

12 Savoir étudier la nature d'une suite

Étudier la nature des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = 3n-1$; b. $u_n = 5^n$; c. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2^n u_n \text{, pour tout n de N.} \end{cases}$

Solution commentée

a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3$.
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 3\times 0 - 1 = -1$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5$ d'où $u_{n+1} = 5u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 5^0 = 1$.

c. • $u_1 = 2^0 u_0 = 2$, $u_2 = 2^1 u_1 = 4$
d'où $u_1 - u_2 = 2$ et $u_1 - u_0 = 0$
ainsi $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

• Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2^n$ et 2^n n'est pas une constante donc (u_n) n'est pas géométrique.

• La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Méthode

(Étudier la nature d'une suite, c'est rechercher si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'un, ni l'autre.)

a. Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$:
- si le résultat est une constante, la suite (u_n) est arithmétique ;
- sinon la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

b. Pour montrer qu'une suite est géométrique (avec $u_n \neq 0$), on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:
- si le résultat est une constante, la suite (u_n) est géométrique ;
- sinon la suite (u_n) n'est pas géométrique.

13 Savoir calculer la somme de termes consécutifs

(u_n) désigne la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$.
(v_n) désigne la suite géométique de premier terme $v_4 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_{23} et v_{10}.
2. Calculer les sommes suivantes :
a. $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{23}$; b. $S' = v_4 + v_5 + \ldots + v_{10}$.

Solution commentée

1. • $u_{23} = u_0 + (23-0)\times r = 1 + 23\times 4 = 93$;
• $v_{10} = v_4 \times q^{10-4} = 3\times 2^6 = 192$.

2. a. $S = \dfrac{u_0 + u_{23}}{2} \times (23 - 0 + 1) = \dfrac{1+93}{2} \times 24 = 1104$.

b. $S' = v_4 \times \dfrac{1 - q^{10-4+1}}{1-q} = 3\times \dfrac{1-2^7}{1-2} = 3\times\dfrac{-127}{-1} = 381$.

Méthode

On utilise les propriétés sur les sommes des termes.

1. $u_n = u_0 + nr$ et on remplace u_0 par 1, n par 23 et r par 4 pour calculer u_{23}.

2. a. $S = \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$ et on remplace n par 23.

b. $S' = v_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$ et on remplace p par 4, n par 10 et q par 2.

S'exercer

14 Étudier la nature des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = -n + 5$; b. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$; c. $u_n = 5^n - 2n$; d. $u_n = \dfrac{5^{n+1}}{3^n}$

e. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

f. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-1)^n u_n \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

15 (u_n) désigne la suite arithmétique de premier terme $u_2 = 1$ et de raison $r = -2$.
(v_n) désigne la suite géométique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer u_{50} et v_{12}.
2. Calculer les sommes suivantes :
a. $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{50}$; b. $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_{12}$.

Suites : représentation et propriétés

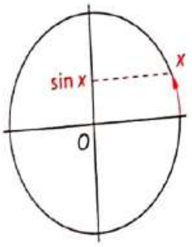
Réponses rapides

16 Calculer les termes u_1, u_2, u_3 des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$; b. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$;

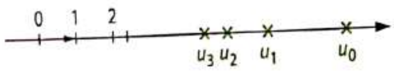
c. $u_n = (-1)^{2n}$; d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^n \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$

17 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.



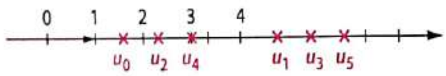
a. Démontrer que (u_n) est bornée.
b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+8} = u_n$.

18 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ et représentée ci-dessous.



Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

19 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ et représentée ci-dessous.



Conjecturer par vrai ou faux :
- cette suite est croissante ;
- cette suite converge vers 4 ;
- cette suite est majorée par u_5.

20 (u_n) et (v_n) désignent les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

- $u_n = \dfrac{3}{n+5}$; - $v_n = -3n+2$.

Montrer que (u_n) est convergente et que (v_n) est divergente.

21 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.

22 Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 de la suite (u_n) définie par :

a. $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
b. $u_n = f(n)$ où f et la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

23 Dans chaque cas, utiliser la calculatrice pour donner u_{15}.

a. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 3u_n + 1$ pour tout $n \geq 0$.
b. $u_0 = 2$ et $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

24 Déterminer, s'ils existent, un minorant et un majorant des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = 5 - n^2$; b. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$;

c. $u_n = (-1)^n + 3$; d. $u_n = 2\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

25 Étudier le sens de variation des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = -3n + 5$; b. $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$;

c. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - 3$; d. $u_n = \sqrt{n+1}$.

26 Dire si la suite (u_n) est convergente ou divergente.

a. $u_n = -3n + 7, n \in \mathbb{N}$; b. $u_n = \dfrac{2n-5}{3n+2}, n \in \mathbb{N}$;

c. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$; d. $u_n = \sqrt{n+3}, n \in \mathbb{N}$.

27 a. (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3n+2}{n+1}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq 3$.

b. (v_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = 3\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + 2.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 \leq v_n \leq 5$.

28 a. Démontrer que toute suite croissante est minorée.
b. Démontrer que toute suite décroissante est majorée.

29 f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

et (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 3}.$$

a. Démontrer que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b. En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est minorée par $\sqrt{3}$.

30 (u_n) désigne une suite à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a. Étudier son sens de variation.
b. Reprendre la question avec une suite à termes strictement négatifs.

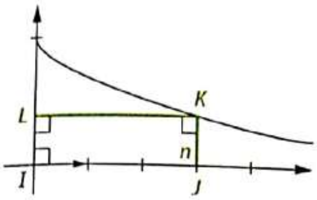
Aide

Pour comparer u_n et u_{n+1}, on multiplie chacun des deux membres de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ par u_n.

31 On donne, ci-dessous, la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ et K désigne le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse n.

On note $\ell_n = IL$, $L_n = IJ$ et a_n l'aire du rectangle $IJKL$.

Conjecturer le sens de variation et la limite de chacune des suites (ℓ_n), (L_n) et (a_n).



Suites arithmétiques

Réponses rapides

32 Dire si la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique. Si la réponse est oui, donner sa raison.

a. $u_n = \dfrac{2}{3}n - 1$; b. $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$;

c. $u_n = n^2 - 5n + 2$; d. $u_n = \dfrac{3-n}{5}$;

e. $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout n de $\mathbb{N}$;

f. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - u_n = -3 \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

33 Les nombres suivants sont-ils trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

a. $2\,;6$ et 10 ; b. $n-3\,;n$ et $n+4$ avec $n \in \mathbb{N}$;

c. $x+1\,;2x+1$ et $3x+1$ avec $x \in \mathbb{R}$.

34 (u_n) désigne la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

a. Calculer u_{20}.

b. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

35 (u_n) désigne la suite arithmétique telle que $u_4 = 2$ et $u_9 = 10$.

a. Calculer la raison de la suite (u_n).

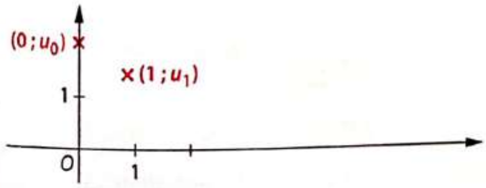
b. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$.

36 (u_n) désigne la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$.

Sachant que $u_n = 124$, déterminer n.

37 (u_n) désigne la suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

a. Reproduire et compléter le graphique ci-après en y plaçant les points de coordonnées $(2\,;u_2)$, $(3\,;u_3)$ et $(4\,;u_4)$.



b. Que peut-on dire sur ces points ? Justifier en étudiant la colinéarité de vecteurs.

Suites géométriques

Réponses rapides

38 Dire si la suite (u_n) est géométrique. Si la réponse est oui, donner sa raison.

a. $u_n = 3^n$; b. $u_n = \dfrac{1}{5^n}$; c. $u_n = 2^n + 3^n$;

d. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$; e. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} + u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

39 Les nombres suivants sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

a. $3\,;-6$ et 12 ; b. $5n\,;n^2$ et $\dfrac{n^3}{5}$ avec $n \in \mathbb{N}$;

c. $x\,;1$ et $\dfrac{1}{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

40 (u_n) désigne la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

a. Calculer u_6.

b. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$.

41 (u_n) désigne la suite géométrique telle que $u_4 = 6$ et $u_6 = 12$ avec $u_5 < 0$.

a. Calculer la raison de (u_n).

b. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

42 (u_n) désigne la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Sachant que $u_n = 256$, déterminer n.

43 Déterminer la limite des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$; b. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$; c. $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$; d. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{4^n}$.

44 (u_n) et (v_n) désignent les suites définies par :

- $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} \end{cases}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 1$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n ; puis u_n en fonction de n.

c. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Complément sur les suites arithmétiques et géométriques

Réponses rapides

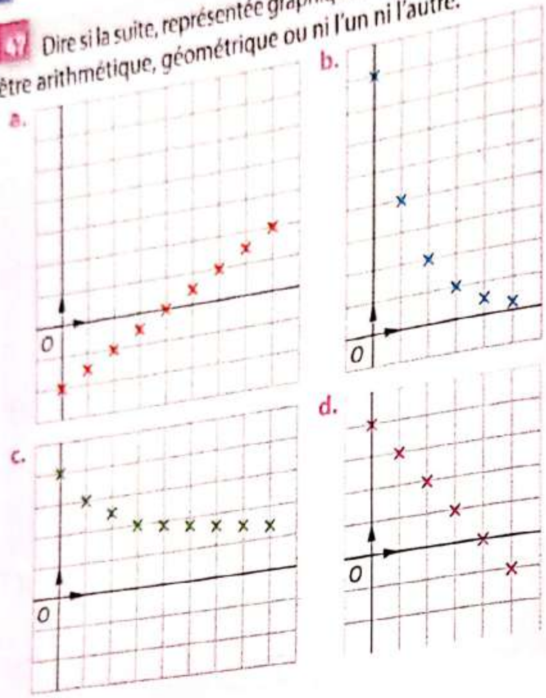
45 (u_n) désigne la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Étudier le sens de variation de (u_n) suivant les valeurs du nombre réel r.

46 (u_n) désigne une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

Étudier le sens de variation de (u_n) suivant les valeurs du nombre réel positif q.

47 Dire si la suite, représentée graphiquement ci-après, semble être arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre.



48 (u_n) désigne la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 5$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Montrer que (T_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

49 (u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 5, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Dire si la suite (u_n) est arithmétique.

3. (v_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire u_{n+1} en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de n.

50 (u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Étudier la nature de la suite (u_n).

3. On pose $v_n = u_n - \frac{3}{2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

b. Exprimer v_n ; puis u_n en fonction de n.

c. Exprimer $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

d. En déduire $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

51 Un employé est engagé pour 10 ans au salaire annuel de 1 320 000 F CFA.

Il a le choix entre deux modes de revalorisation du salaire :

Choix 1 : une augmentation du salaire de 70 000 F CFA par an.

Choix 2 : Au début de chaque année une augmentation de 5 % du salaire de l'année d'avant.

1. Calculer le salaire de cet employé au bout d'une année avec chacun des deux modes de revalorisation.

2. On note a_n et b_n respectivement les salaires au bout de n $(1 \leqslant n \leqslant 9)$ années d'ancienneté avec les choix 1 et 2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3. a. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer la somme totale des salaires avec chacun des deux choix durant ces 10 ans dans cette entreprise ?

b. Quel est le choix le plus avantageux si l'employé reste 10 ans dans cette entreprise ?

c. Conjecturer le choix le plus avantageux en fonction du nombre d'années d'engagement.

52 (u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b. Étudier la nature de la suite (u_n).

2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Étudier la nature de la suite (v_n).

b. Calculer $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

53 p, q, p' et q' désignent quatre nombres entiers naturels tels que $p + q = p' + q'$.

1. Démontrer que pour toute suite arithmétique (u_n), on a :

$$u_p + u_q = u_{p'} + u_{q'}.$$

2. Démontrer que pour toute suite géométrique (v_n), on a :

$$v_p \times v_q = v_{p'} \times v_{q'}.$$

54 x, y et z désignent dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 9 et la somme de leurs carrés est 59.

55 (u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On admet que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

c. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

56 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

b. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
Exprimer S_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (S_n).

57 f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

(u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Placer u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé.
2. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire v_n ; puis u_n en fonction de n.

c. Démontrer les conjectures émises à la question 2.

58 (u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2^n, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire u_{n+1} ; puis u_n en fonction de n.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

59 Calculer les sommes suivantes :

a. $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$;

b. $S_2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99$;

c. $S_3 = 14 + 9 + 4 - 1 - 6 - \ldots - 66$.

Aide

Ce sont des sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques. Pour déterminer le nombre de termes on peut commencer par noter u_0 le premier terme et u_n le dernier, puis déterminer n.

60 Calculer les sommes suivantes :

a. $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$;

b. $S_2 = 1 - 3 + 9 - 27 + (-3)^4 + \ldots + (-3)^{10}$;

c. $S_3 = 3^5 + 3^6 + 3^7 + \ldots + 3^{20}$.

Aide

Ce sont des sommes de termes consécutifs de suites géométriques. Déterminer le premier terme et la raison, puis utiliser le cours.

61 (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -3$.

On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

c. Vérifier que $u_n \neq -3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

62 **Démontrer une propriété**

q désigne un nombre réel avec $q \neq 1$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, désigne une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donné.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \text{ et } S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

1. a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $s_n - qs_n = 1 - q^{n+1}$.

b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

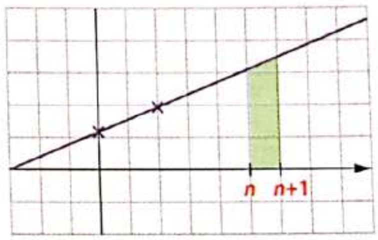
2. a. Exprimer u_1, u_2 et u_n en fonction de u_0 et de q.

b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $s_n = u_0 S_n$.

c. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $s_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

3. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Exprimer $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n.

63 u_n désigne l'aire du trapèze coloré pour $n \in \mathbb{N}$.



Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

Aide

L'aire d'un trapèze est égale à :

$$\frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur}.$$

64 Dans un pays imaginaire, une personne répand une information en la transmettant à deux personnes.
La minute suivante, ces deux personnes la transmettent chacune à deux nouvelles personnes.
La minute suivante, ces quatre personnes la transmettent chacune à deux nouvelles personnes et ainsi de suite.

a. Combien de personnes connaissent l'information au bout de :
- 2 min ?
- 3 min ?
- 6 min ?

b. Exprimer en fonction de n, le nombre de personnes connaissant l'information au bout de n minutes.

c. Peut-on espérer mettre au courant les huit millions de personnes de ce pays en une demi-heure ?

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

65 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Une suite qui n'est pas croissante est décroissante.	☐	☐
2. Une suite croissante est minorée.	☐	☐
3. Une suite qui n'est pas bornée tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.	☐	☐
4. Une suite croissante tend vers $+\infty$.	☐	☐
5. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=5-2n$ est arithmétique.	☐	☐
6. Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.	☐	☐
7. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=3^n+2^n$ est géométrique.	☐	☐
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.	☐	☐

Avec justification

66 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

f désigne une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+7}{x+2}$.

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f(n)$.

(v_n) est la suite définie par $v_0=3$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)$.

(w_n) est la suite définie par $w_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

	vrai	faux
1. La suite (u_n) est croissante.	☐	☐
2. La suite (u_n) converge vers 2.	☐	☐
3. La suite (w_n) est arithmétique.	☐	☐
4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n=n+3$.	☐	☐
5. La suite (v_n) est croissante.	☐	☐
6. La suite (w_n) est convergente.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

67 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=-5n$ est :
   a. arithmétique ; **b.** géométrique ;
   c. ni l'un, ni l'autre.

2. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=3^n+1$ est :
   a. arithmétique ; **b.** géométrique ;
   c. ni l'un, ni l'autre.

3. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n-n \text{, pour tout } n \end{cases}$ de $\mathbb{N}$ est :
   a. croissante ; **b.** décroissante ; **c.** minorée.

4. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   a. admet une limite finie ;
   b. vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$; **c.** vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

5. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=-\dfrac{1}{2}\sqrt{n}+1$.
   a. est convergente.
   b. vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$; **c.** vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

Avec justification

68 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{2}{-n^2-2}$ est :
   a. croissante ; **b.** décroissante ;
   c. ni l'un, ni l'autre.

2. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n+(-1)^n$ est :
   a. divergente vers $+\infty$; **b.** divergente vers $-\infty$;
   c. convergente.

3. (u_n) désigne la suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0=5$.
   On pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. (S_n) tend vers $+\infty$; **b.** (S_n) converge vers 15 ;
   c. (S_n) n'est pas majorée.

4. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{3}{2+\sin n}$ est :
   a. minorée par $\dfrac{3}{2}$; **b.** majorée par $\dfrac{3}{2}$; **c.** bornée.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

69 Somme et produit de suites

(u_n), (v_n) et (w_n) désignent trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que $w_n = u_n + v_n$.

1. a. Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors (w_n) est croissante.

b. Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont arithmétiques, alors (w_n) est arithmétique.

2. On pose $t_n = u_n v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que si (u_n) et (v_n) sont géométriques, alors la suite (t_n) est géométrique.

70 Encadrement du terme général

(u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Déterminer le plus petit nombre entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0{,}99 < u_n < 1{,}01$.

Aide

D'abord, on résout les inéquations $0{,}99 < u_n$ et $u_n < 1{,}01$ en remarquant que $n+2 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

71 Suite et calculatrice

(u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+2}{n^3+n^2}$.

a. Montrer que (u_n) est décroissante.

b. Déterminer la limite de (u_n).

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice, le plus petit nombre entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < u_n < 10^{-3}$.

Rappel

L'utilisation de la calculatrice et du tableur pour les suites est détaillée en pages 264 à 269 du manuel.

72 Suites arithmétiques et géométriques

a, b désignent deux nombres réels et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

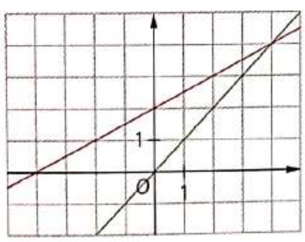
1. Étudier les variations et la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas : $a = 0$ et $a = 1$.

Dans toute la suite, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

2. Montrer que l'équation $ax + b = x$ admet une solution unique $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

3. On donne ci-après les tracés des droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = x$.

Interpréter graphiquement la valeur de α.



4. Étudier les variations et la convergence de la suite (u_n) lorsque $u_0 = \alpha$.

5. Dans toute la suite, on suppose $u_0 \neq \alpha$.

On pose $v_n = u_n - \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

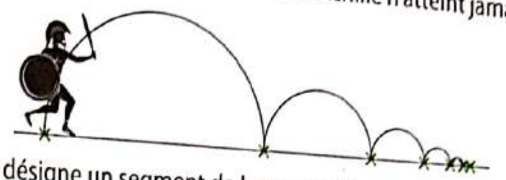
c. Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est-elle convergente ? Quelle est alors sa limite ?

73 Un paradoxe de Zénon

Achille part d'un point A vers un point B.

Pour atteindre le point B, il doit d'abord parcourir la moitié de la distance, puis la moitié de la distance restante, et encore la moitié de la distance restante, ainsi de suite.

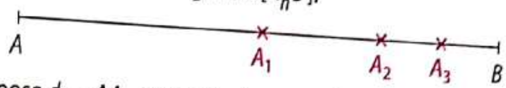
Puisque la distance est infiniment divisible, il reste toujours une moitié de distance à parcourir et Achille n'atteint jamais B.



$[AB]$ désigne un segment de longueur 16.

A_1 désigne le milieu de $[AB]$, A_2 celui de $[A_1B]$.

On construit ainsi une suite de points A_n tels que pour $n \geqslant 1$, A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB]$.



On pose $d_1 = AA_1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $d_{n+1} = A_n A_{n+1}$.

1. Calculer d_1, d_2 et d_3.

2. Montrer que (d_n) est une suite géométrique et exprimer d_n en fonction de n.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.

a. Conjecturer la limite de la suite (S_n).

b. Démontrer la conjecture du **a**.

4. Résoudre l'équation $S_n = 16$.

Info

Les distances successives séparant Achille du point B forment une suite de nombres dont l'étude mathématique permet de résoudre ce paradoxe.

74 Suite arithmético-géométrique

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

(u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}.$$

1. Construire les 5 premiers termes de cette suite sur l'axe des abscisses.

2. a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}).$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + 6 = \frac{1}{2}(u_{n-1} + 6).$$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + 6 = (u_0 + 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Logique

La notation $\forall$ signifie « pour tout ».
La notation $\exists$ signifie « il existe ».
Ces deux notations sont appelées quantificateurs.

75 Conjecture et démonstration

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 0{,}19$

$u_2 = 0{,}199$

…

$u_n = 0{,}199\ldots99$ (n fois le chiffre 9).

a. Conjecturer une formule de récurrence exprimant u_n en fonction de u_{n-1}.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0{,}2 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).

76 Suites emmêlées

(u_n) et (v_n) désignent deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$$

1. a. Calculer les cinq premiers termes de chaque suite et les représenter sur la droite réelle.

b. Quelles conjectures peut-on faire sur les suites (u_n) et (v_n) ?

2. On pose $S_n = u_n + v_n$ et $D_n = u_n - v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Étudier le sens de variation des suites (S_n) et (D_n) ; puis montrer que (S_n) est une suite constante et que (D_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer u_n et v_n en fonction de S_n et D_n puis en fonction de n.

3. Démontrer les conjectures émises à la question **1.b.**

77 Suite auxiliaire

(u_n) désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.

b. Que peut-on conjecturer sur la suite (v_n) ? Démontrer cette conjecture.

c. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

78 Avec paramètre

α désigne un nombre réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = (\cos \alpha)^n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n lorsque :

a. $\alpha \equiv 0\,[2\pi]$; **b.** $\alpha \equiv \pi\,[2\pi]$; **c.** $\alpha \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.

2. On suppose α différent des valeurs précédentes. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Aide

Pour α différent de 0 et de π modulo 2π, on a : $-1 < \cos \alpha < 1$.

79 Nombres entiers impairs

Déterminer 100 nombres entiers impairs consécutifs tels que leur somme soit égale à 17 600.

80 Le meilleur choix

Un joueur d'échec a le choix entre deux récompenses :

- 101 F sur la première case d'un échiquier, 102 F sur la 2e, 103 F sur la 3e, ainsi de suite.
- 1 F sur la première case, 2 F sur la 2e, 4 F sur la 3e, 8 F sur la 4e, etc. en doublant à chaque case le nombre de F.

Quel est le choix le plus intéressant ?

Info

Selon la légende, en récompense d'avoir inventé le jeu d'échec, le sage Sissa demanda au prince de déposer un grain de blé sur la 1re case, 2 sur la 2e, 4 sur la 3e, 8 sur la 4e, etc. Le prince ne put jamais le payer, car sa dette en blé représentait 1 600 fois la production annuelle mondiale.

81 Suites extraites

f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 5 + \dfrac{3}{x+1}$

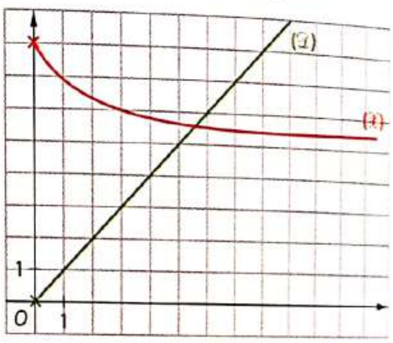
et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) & \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera α.

b. Montrer que f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

c. Montrer que si $x \in [0\,;\alpha]$ alors $f(f(x)) \geqslant \alpha$ et que si $x \in [\alpha\,;+\infty[$ alors $f(f(x)) \leqslant \alpha$.

2. Ci-après on a représenté les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{H})$ d'équations :
$y = x$ et $y = f(x)$.



Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

a. Conjecturer le sens de variation des suites (v_n) et (w_n).

b. Conjecturer leur limite éventuelle.

Vocabulaire

Deux suites telles que l'une est croissante, l'autre est décroissante et dont la différence tend vers zéro sont appelées suites adjacentes.

82 Le meilleur placement

Un homme veut placer la somme de 1 000 000 F au taux annuel de 6,5 %.

Il peut le faire de deux façons :

- placement à intérêts simples (chaque fin d'année, le capital produit le même intérêt) ;
- placement à intérêts composés (chaque fin d'année, l'intérêt est capitalisé).

On désigne respectivement par C_n et D_n les valeurs acquises par le capital au bout de n années dans chacun des cas.

1. a. Calculer C_1, C_2 et C_3.

b. Exprimer C_n en fonction de C_{n-1}.

En déduire que (C_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison.

2. a. Calculer D_1, D_2 et D_3.

b. Exprimer D_n en fonction de D_{n-1}.

En déduire que (D_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

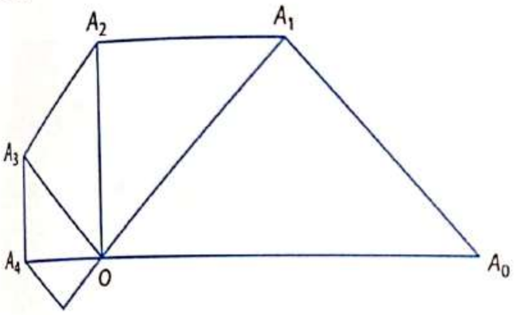
3. Calculer, dans chacun des cas, la valeur acquise par le capital :

- au bout de 10 ans ;
- au bout de 15 ans.

83 Les points sur une spirale

On construit une suite de points A_n, $n \in \mathbb{N}$, tels que :

- O et A_0 sont donnés, avec $OA_0 = 16$;
- pour tout nombre entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}.



1. (u_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = OA_n$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

b. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

Exprimer u_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (u_n).

2. Pour tout nombre entier naturel n non nul, on pose :

$$s_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

a. Exprimer s_n en fonction de n.

b. Calculer la limite de la suite (s_n).

3. (a_n) désigne la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = \text{aire}\,(OA_nA_{n+1})$.

a. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3.

b. Démontrer que (a_n) est une suite géométrique.

Exprimer a_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (a_n).

c. Exprimer, en fonction de n, la somme σ_n des n premiers termes de cette suite et calculer la limite de la suite (σ_n).

Aide

- Pour montrer que (u_n) est géométrique, exprimer $\cos(OA_nA_{n+1})$ à l'aide de OA_n et OA_{n+1}.
- Pour étudier la limite de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ utiliser la propriété du paragraphe **3. b.** du cours.

84 Un paradoxe de Zénon

Zénon d'Élée, philosophe grec (V[e] siècle av. J.-C.), imagina le paradoxe suivant mettant en scène Achille et une tortue.

« Achille veut rattraper une tortue qui est 100 m devant lui en courant 10 fois plus vite que n'avance la tortue. Lorsqu'Achille a parcouru 100 m, la tortue en a parcouru 10 ; lorsqu'Achille a parcouru ces 10 m, la tortue en a parcouru 1, … »

Achille arrivera-t-il à rattraper la tortue ? Si oui, quelle distance aura-t-il alors parcouru ?

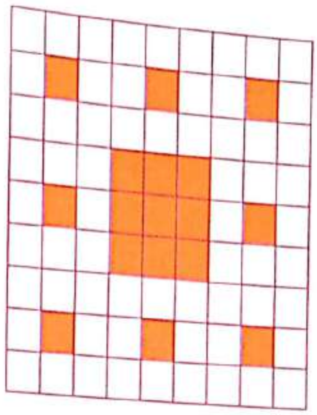
85 Carrés coloriés

On donne un carré de côté 1.

On partage ce carré en 9 petits carrés de même côté, puis on colorie le petit carré central.

On fait la même opération avec chacun des 8 carrés restants (voir figure ci-contre).

On répète cette opération n fois.



1. Déterminer, en fonction de n, le nombre de carrés non coloriés de côté $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. On désigne par a_n l'aire totale des carrés coloriés après n opérations.

a. Calculer a_1, a_2, a_3.

b. Exprimer a_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de la suite (a_n).

86 Bassins et fuites

Deux bassins identiques, notés B_1 et B_2 fuient.

Le jour j_0, ces deux bassins sont pleins et d'une contenance de $C_0 = 50\ \text{m}^3$.

Chaque jour, B_1 fuit de 20 cL et B_2 fuit de 10 % de sa contenance.

a. Quelle est la contenance de chaque bassin à la fin du 30[e] jour ?

b. Quel bassin sera vidé le premier ?

87 Étude d'une épidémie

Une épidémie est en phase de baisse et le nombre de personnes atteintes diminue de 30 % chaque semaine, il y avait 5 000 personnes atteintes au pic de l'épidémie.

On note $C_0 = 5\,000$ et C_n le nombre de cas déclarés n semaines après le pic épidémique avec $n \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b. En déduire la limite de la suite (C_n) et interpréter le résultat.

88 Évolution du nombre d'abonnés

a. Chez un opérateur de téléphonie mobile, une étude a montré que 80 % des clients du mois précédent restent fidèles et 2 000 nouveaux clients se présentent.

On note C_0 le nombre de clients à la fin d'un mois de référence noté m_0 et C_n le nombre de clients à la fin du $n$ième mois après m_0.

On donne $C_0 = 25\,000$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Montrer que l'équation $0{,}8x + 2\,000 = x$ admet une solution unique que l'on donnera.

3. On pose $v_n = u_n - 10\,000$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

c. Interpréter concrètement la limite de la suite (u_n).

89 Suites adjacentes

f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

1. Étudier le sens de variation de f.

2. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.

Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que $0 < \alpha < 1$.

3. On construit deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$,

si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

sinon $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.

Par construction, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. Exprimer w_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (w_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

5. On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.

a. Montrer que $\ell \leqslant \alpha$, $\alpha \leqslant \ell'$ et $\ell' - \ell = 0$.

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers α.

6. Application

Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{1}{128}$.

Aide

La somme de deux suites qui convergent respectivement vers α et α' est une suite qui converge vers $\alpha + \alpha'$.

90 Demi-vie de l'iode 131

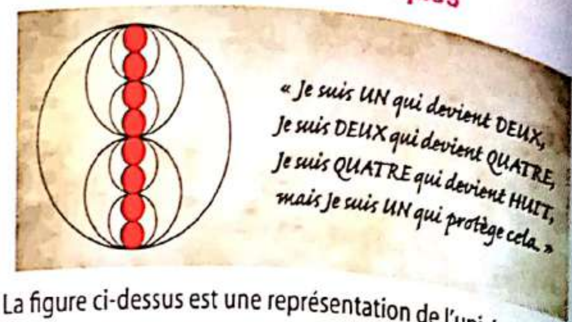
L'iode 131 est un noyau radioactif (c'est-à-dire qu'il se désintègre spontanément). On souhaite étudier l'évolution de 1 000 000 noyaux d'iode. On note $u_0 = 1\,000\,000$ le nombre de noyaux d'iode présents à l'instant $t = 0$ et u_n le nombre de noyaux d'iode au bout de n jours.

Chaque jour, 8,3 % des noyaux restants se désintègrent.

a. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter concrètement la limite obtenue.

b. La demi-vie d'un noyau est le temps au bout duquel subsiste la moitié des noyaux existants à $t = 0$. Donner, à un jour près, la demi-vie de l'iode 131 à l'aide d'une calculatrice.

91 Mythologie et mathématiques



La figure ci-dessus est une représentation de l'unicité de Dieu dans la mythologie égyptienne.

On suppose que le cercle initial a pour rayon 1.

1. a. Combien y a-t-il de cercles coloriés après n divisions ?

Exprimer, en fonction de n, le rayon r_n de chacun de ces cercles.

b. Démontrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Calculer la limite de la suite (r_n).

2. On désigne par a_n l'aire totale coloriée après n divisions.

a. Exprimer a_n en fonction de n et démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. Calculer la limite de la suite (a_n).

92 Point fixe

f désigne la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 7 - \frac{6}{x+2}.$$

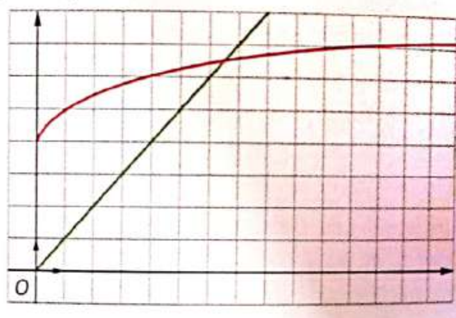
et (u_n) est la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera α.

b. Montrer que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Dans la suite, on admet que si $x \in [0\,;\alpha[$ alors $f(x) \geqslant x$ et que si $x \in [\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x) \leqslant x$.

2. Dans le repère ci-dessous, on a représenté les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.



Reproduire ces courbes et conjecturer le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants : • $u_0 \in [0\,;\alpha[$; • $u_0 \in]\alpha\,;+\infty[$.

3. a. On admet que lorsque $u_0 \in [0\,;\alpha[$, $u_n \in [0\,;\alpha[$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

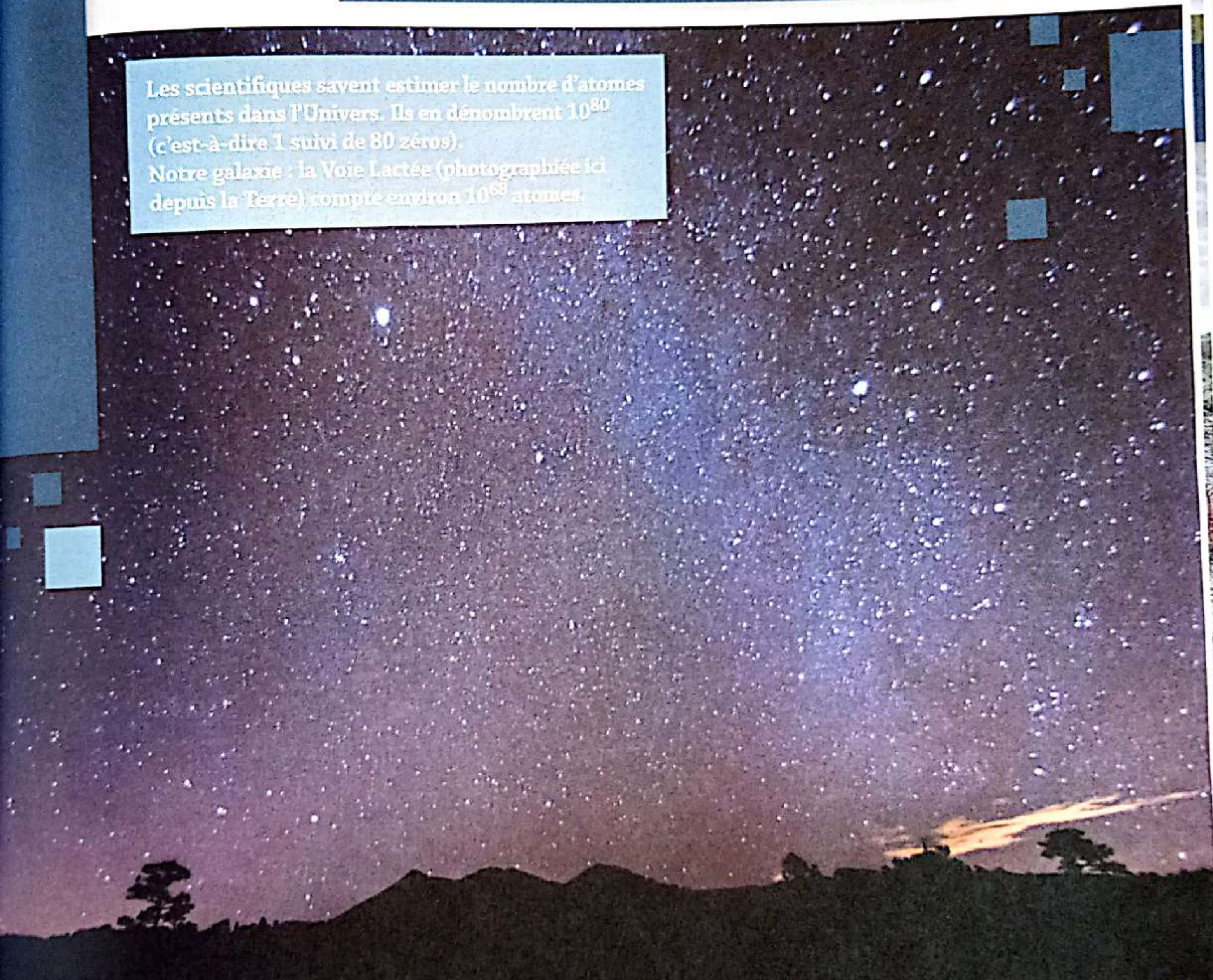
Montrer que lorsque $u_0 \in [0\,;\alpha[$, (u_n) est une suite croissante.

b. On admet aussi que lorsque $u_0 \in]\alpha\,;+\infty[$, $u_n \in]\alpha\,;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que lorsque $u_0 \in]\alpha\,;+\infty[$, (u_n) est une suite décroissante.

14 Dénombrement

Les scientifiques savent estimer le nombre d'atomes présents dans l'Univers. Ils en dénombrent 10^{80} (c'est-à-dire 1 suivi de 80 zéros).
Notre galaxie : la Voie Lactée (photographiée ici depuis la Terre) compte environ 10^{68} atomes.



Les objectifs du chapitre

- Dénombrer des parties d'un ensemble fini.
- Dénombrer des listes, des permutations, des arrangements, des combinaisons.
- Utiliser les méthodes de dénombrement pour résoudre des problèmes concrets.

Dans l'Égypte antique, des hiéroglyphes étaient utilisés pour compter :
- 𓏤 pour 1,
- 𓎆 pour 10 ;
- 𓍢 pour 100…

Certains murs du temple de Karnak (vieux de plus de 4 000 ans) sont illustrés par ces hiéroglyphes.

14 Cours

1 Cardinal d'un ensemble

a Parties d'un ensemble

Définitions

- Un **ensemble fini** est un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments.
- Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E. On le note $\text{Card}(E)$.

Remarque Dénombrer, c'est compter. Résoudre un problème de dénombrement consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini E, c'est-à-dire à trouver son cardinal.

Notation

Une partie d'un ensemble E est un ensemble, inclus dans E, formé d'éléments de E.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble constitué de toutes les parties de E.

Exemple E désigne l'ensemble formé par les chiffres de 2 à 4.
On note $E=\{2;3;4\}$ et $\text{Card}(E)=3$. $\mathcal{P}(E)$ est constitué de :
$\varnothing$: la partie vide ; $\{2\},\{3\},\{4\}$: les parties formées par un seul élément de E, appelées singletons ;
$\{2;3\},\{2;4\},\{3;4\}$: les parties formées par deux éléments de E ; $\{2;3;4\}=E$.
Ainsi $\mathcal{P}(E)=\{\varnothing;\{2\};\{3\};\{4\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};E\}$ et $\text{Card}(\mathcal{P}(E))=8$.

Propriété

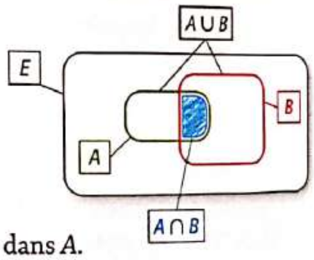
n désigne un nombre entier naturel non nul et E un ensemble. Si $\text{Card}(E)=n$, alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E))=2^n$.

b Réunion, intersection

Définitions Notation

A et B désignent deux parties d'un ensemble E.

- La **réunion** de A et B, notée $A\cup B$ (on lit « A union B »), est la partie de E formée par les éléments qui sont dans A **ou** dans B.
- L'**intersection** de A et B, notée $A\cap B$ (on lit « A inter B »), est la partie de E formée par les éléments qui sont dans A **et** dans B.
- On note $E\setminus A$ la partie de E formée par les éléments de E qui ne sont pas dans A.



Propriétés

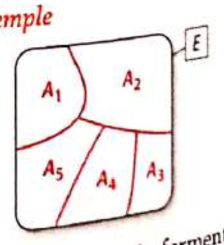
Pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E, on a :
- $\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$;
- $\text{Card}(E\setminus A)=\text{Card}(E)-\text{Card}(A)$.

c Partition d'un ensemble

Définition

Des parties $A_1, A_2, \ldots, A_k$ d'un ensemble fini E forment une **partition** de E lorsque :
- ces parties sont non vides ($A_1\neq\varnothing$; $A_2\neq\varnothing$; …) ;
- ces parties sont deux à deux disjointes ($A_1\cap A_2=\varnothing$; $A_1\cap A_3=\varnothing$; …) ;
- la réunion de ces parties est égale à E ($A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k=E$).

Exemple



A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 forment une partition de E.

Propriété

Avec les notations ci-dessus, on a : $\text{Card}(E)=\text{Card}(A_1)+\text{Card}(A_2)+\ldots+\text{Card}(A_k)$.

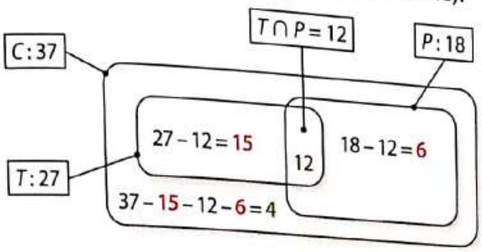
1 Utiliser un diagramme ou un tableau

Le patron d'un bar-restaurant a relevé les consommations de ses clients sur la journée.
37 clients sont venus aujourd'hui.
Parmi eux, 27 ont pris un thé, 18 ont pris un plat cuisiné et 12 ont pris un thé et un plat cuisiné.
Répondre aux questions ci-dessous en utilisant un diagramme ou un tableau.
a. Combien de clients ont consommé uniquement un thé ?
b. Combien de clients n'ont consommé ni thé, ni plat cuisiné ?

Solution commentée

On note C l'ensemble des clients de la journée et T (resp. P) l'ensemble des clients ayant pris un thé (resp. un plat cuisiné).

Diagramme



Tableau

P \ T	Oui	Non	Total
Oui	12	$18-12=6$	18
Non	$27-12=15$	$10-6=4$	$37-18=19$
Total	27	$37-27=10$	37

On déduit les réponses aux questions :
a. 15 clients ont consommé uniquement du thé ;
b. 4 clients n'ont consommé ni thé, ni plat cuisiné.

Méthode

Pour répondre à ce type de problème, on utilise un diagramme ou un tableau comme dans l'**Activité 1** p. 230.

Il faut penser à nommer les ensembles et à bien dénombrer toutes les parties.

Remarque

Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, alors, lorsque $A \cap B \neq \varnothing$, certains éléments de A sont aussi des éléments de B.

Notation

Lorsque A est une partie d'un ensemble E, l'ensemble $E \backslash A$ des éléments de E qui ne sont pas dans A est aussi noté $\overline{A}$.

2 Reconnaître une partition d'un ensemble

E désigne l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 2 et 15.
$A_0, A_1, \ldots$ et A_9 sont les sous-ensembles de E dont les éléments ont pour chiffre des unités 0, 1, … et 9.
Démontrer que les $A_0, A_1, \ldots, A_9$ forment une partition de E.

Solution commentée

$E=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$,

$A_0=\{10\}$, $A_1=\{11\}$, $A_2=\{2;12\}$, $A_3=\{3;13\}$, $A_4=\{4;14\}$,

$A_5=\{5;15\}$, $A_6=\{6\}$, $A_7=\{7\}$, $A_8=\{8\}$, $A_9=\{9\}$.

Les A_i sont non vides, deux à deux disjoints et chaque élément de E est dans l'un des A_i, donc $A_0, A_1, \ldots, A_9$ forment une partition de E.

Méthode

- Décrire l'ensemble E.
- Décrire chacun des sous-ensembles de E et s'assurer qu'ils sont non vides.
- S'assurer que ces ensembles sont disjoints deux à deux.
- S'assurer que chaque élément de E appartient à l'un des sous-ensembles.

S'exercer

3 84 élèves sont interrogés. 53 déclarent pratiquer un sport collectif, 25 déclarent pratiquer un sport individuel et 17 déclarent pratiquer un sport collectif et un sport individuel. Combien d'élèves interrogés ne pratiquent ni sport individuel, ni sport collectif ?

4 E désigne l'ensemble des nombres entiers naturels compris entre 2 et 15.
B_2, B_3, B_5 et B_7 sont les sous-ensembles de E dont les éléments sont des multiples de 2, 3, 5, et 7.
B_2, B_3, B_5 et B_7 forment-ils une partition de E ?

2 Produit cartésien d'ensembles

Définition

E et F désignent deux ensembles finis non vides.
Le **produit cartésien** de E par F est l'ensemble, noté $E \times F$ (on lit « E croix F »), constitué des couples $(e\,;f)$ avec $e \in E$ et $f \in F$.

Propriété

Avec les notations ci-dessus, on a : $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

Exemple Si $E = \{a\,;b\,;c\}$ et $F = \{10\,;15\}$ alors $E \times F = \{(a\,;10)\,;(b\,;10)\,;(c\,;10)\,;(a\,;15)\,;(b\,;15)\,;(c\,;15)\}$ et on a bien $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F) = 3 \times 2 = 6$.

Remarque La définition et la propriété se généralisent à p ensembles :
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_p) \text{ avec } e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_p \in E_p\}$
et $\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_p)$.

3 p-uplets

Définition Notation

E désigne un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul.

- Le produit cartésien de E par lui-même p fois : $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p.
- Un **p-uplet** de E est un élément de E^p.

Propriété

Avec les notations ci-dessus, si $\mathrm{Card}(E) = n$, alors $\mathrm{Card}(E^p) = n^p$.
Autrement dit, le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exemple Si $E = \{A\,;B\}$, alors $E \times E \times E = E^3$ est constitué des 3-uplets : $\{A\,;A\,;A\}$, $\{A\,;A\,;B\}$, $\{A\,;B\,;A\}$, $\{A\,;A\,;B\}$, $\{A\,;B\,;B\}$, $\{B\,;A\,;B\}$, $\{B\,;B\,;A\}$, $\{B\,;B\,;B\}$. On a bien $\mathrm{Card}(E^3) = 2^3 = 8$.

4 Permutations

a La notation factorielle

Notation

n désigne un nombre entier naturel non nul. La notation $n\,!$ (on lit « n factorielle » ou « factorielle n ») désigne le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Ainsi : $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. Par convention : $0\,! = 1$.

Exemples

$1\,! = 1$;
$2\,! = 1 \times 2 = 2$;
$3\,! = 1 \times 2 \times 3 = 6$;
$4\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

b Permutations

Définition

E désigne un ensemble à n éléments. Une **permutation** de E est un n-uplet de E dans lequel tous les éléments sont distincts.

Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n\,!$.

Exemple Si $E = \{a\,;b\,;c\}$, alors les permutations de E sont : $(a\,;b\,;c)$, $(a\,;c\,;b)$; $(b\,;a\,;c)$; $(b\,;c\,;a)$; $(c\,;a\,;b)$; $(c\,;b\,;a)$. Le nombre de permutations de E est bien : $3\,! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

5 Dénombrer des p-uplets

On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie (dont les faces sont notées Pile et Face). Dénombrer tous les résultats possibles.

Solution commentée

On complète le schéma ci-dessous avec le nombre de choix.

2 choix (Pile ou Face)	2 choix (Pile ou Face)	2 choix (Pile ou Face)	2 choix (Pile ou Face)
1er lancer	2e lancer	3e lancer	4e lancer

Or, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$, il y a donc 16 résultats possibles.

Remarques

- Dans un p-uplet, il peut y avoir répétition d'un même élément (par exemple (Pile ; Pile ; Face ; Pile).
- Dans un p-uplet, il faut tenir compte de l'ordre (Pile ; Pile ; Face ; Pile) ≠ (Pile ; Pile ; Pile ; Face.)

Méthode

Pour dénombrer des p-uplets, on peut utiliser la propriété du paragraphe 3 (ici $E = \{\text{Pile} ; \text{Face}\}$ et $p = 4$) ; un arbre ; ou un schéma.

6 Utiliser la calculatrice

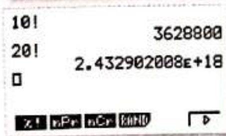
À l'aide de la calculatrice, calculer, si possible : $A = 10!$; $B = 20!$; $C = 70!$

Solution commentée

Calculatrice CASIO

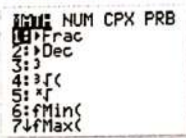
- Choisir le MENU 1 RUN-MAT
- Taper 10 ; puis OPTN.

- Taper F6 (▷) ; puis F3 (PROB) ; choisir F1 (x!) ; puis EXE.

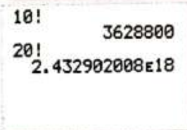


Calculatrice Texas Instruments

- Choisir le menu de calcul.
- Taper 10 ; puis MATH.



- Sélectionner PRB à l'aide de la flèche ▷ ; choisir 4 : ! ; puis ENTER.



Remarque

Ces nombres qui deviennent vite « très grands ». La calculatrice donne parfois des valeurs approchées ($20! \approx 2{,}43 \times 10^{18}$) et parfois, lorsque le nombre excède 10^{99}, la calculatrice ne peut plus faire les calculs (comme 70!).

7 Dénombrer des permutations

Quatre élèves entrent dans une classe dans laquelle il reste quatre places vides. De combien de façons différentes peuvent-ils se placer ?

Solution commentée

On complète le schéma ci-dessous avec le nombre de choix.

4 choix (Chaise 1, 2, 3 ou 4)	3 choix	2 choix	1 choix
1er lancer	2e élève	3e élève	4e élève

Or, $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$, il y a donc 24 placements possibles.

Méthode

Pour dénombrer des permutations, on peut utiliser : la propriété du paragraphe **4.b.** du cours ; un arbre ; ou un schéma comme ci-contre.

Remarque

Dans une permutation, il ne peut pas y avoir de répétition (un même élève ne peut pas choisir deux chaises). Dans une permutation, il faut tenir compte de l'ordre : $((4;2;3;1) \neq (4;3;2;1))$.

S'exercer

8 La combinaison d'un coffre-fort est un code à quatre chiffres compris entre 0 et 9.
Combien y a-t-il de codes possibles ?

9 Calculer, sans calculatrice, $A = 6!$ et $B = 7!$

10 Cinq livres vont être rangés dans une bibliothèque qui contient cinq emplacements vides.
De combien de façons la bibliothécaire peut-elle ranger ces livres ?

5 Arrangements

Définition

E désigne un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tel que $p \leqslant n$.

Un **arrangement** à p éléments de E est un p-uplet de E dans lequel tous les éléments sont distincts.

Propriété | Notation

n et p désignent deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
On note A_n^p (et on lit « Arrangement n, p » ou « A, n, p ») le nombre

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments est A_n^p.

Exemple Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$, alors les arrangements à 2 éléments de E sont :
$(a\,;b)$, $(b\,;a)$, $(a\,;c)$, $(c\,;a)$, $(a\,;d)$, $(d\,;a)$, $(b\,;c)$, $(c\,;b)$, $(b\,;d)$, $(d\,;b)$, $(c\,;d)$, $(d\,;c)$. Card(E) $= n = 4$ et $p = 2$.
Le nombre d'arrangements à 2 éléments de E est bien : $A_4^2 = 4 \times (4-2+1) = 4 \times 3 = 12$.

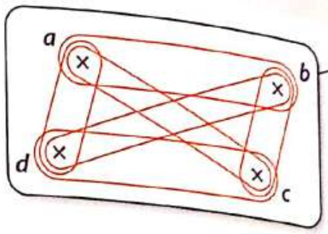
6 Combinaisons

a Nombre de combinaisons

Définition

E désigne un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tel que $p \leqslant n$.
Une **combinaison** à p éléments de E est un sous-ensemble de E contenant p éléments.

Remarque Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts.
Exemple Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$, alors les combinaisons à 2 éléments de E sont $\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\,;d\}$, $\{b\,;c\}$, $\{b\,;d\}$, $\{c\,;d\}$.
Attention, contrairement aux arrangements $\{a\,;b\}$ et $\{b\,;a\}$ désignent le même ensemble donc une seule et même combinaison.
Il y a 6 combinaisons à 2 éléments de E.



Propriété | Notation

n et p désignent deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ (et on lit « combinaison n, p ») le nombre

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Le nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments est C_n^p.

b Propriétés des combinaisons

Propriétés

n et p désignent deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On a :

- $C_n^0 = C_n^n = 1$;
- $C_n^{n-p} = C_n^p$;
- si, de plus $0 < p < n$, alors $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Formule du binôme

n désigne un nombre entier naturel et a, b deux nombres réels. On a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Le triangle de Pascal contient les C_n^p. On y retrouve les propriétés ci-dessus, par exemple :

- $C_1^0 = 1$ et $C_2^2 = C_2^0 = 1$.
- $C_3^1 = C_3^{3-1} (= C_3^2)$.
- $C_{4-1}^{2-1} + C_{4-1}^2 = C_3^1 + C_3^2 = C_4^2$.

Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	…
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
⋮						

On y observe les coefficients des binômes

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

11 Dénombrer des arrangements

C'est la finale du 100 m aux Jeux Olympiques. Huit coureurs sont au départ.
Combien y a-t-il de podiums possibles (1^{re}, 2^e et 3^e place) ? (Il n'y a pas d'ex-aequo.)

Solution commentée

On complète le schéma ci-dessous avec le nombre de choix.

8 choix (8 sprinters)	7 choix (7 sprinters)	6 choix (6 sprinters)
1^{er} place	2^e place	3^e place

Or, $8\times7\times6=336=A_8^3$, il y a donc 336 podiums possibles.

Méthode

Pour dénombrer des arrangements, on peut utiliser :
- la propriété du paragraphe **5** ;
- ou un arbre ;
- ou un schéma comme ci-contre.

Remarques

Dans un arrangement, il ne peut pas y avoir de répétition (un même sprinter ne peut pas être arrivé à deux places).
Dans un arrangement, il faut tenir compte de l'ordre (le podium (2 ; 6 ; 3) est différent du podium (6 ; 3 ; 2)).

12 Dénombrer des combinaisons

Dans un magasin d'alimentation, il reste cinq boîtes de conserve d'un même produit (notées *A*, *B*, *C*, *D* et *E*).
Un client entre et choisit deux de ces boîtes.
Combien de choix différents ce client pouvait-il faire ?

Solution commentée

Les combinaisons possibles sont : $(A;B)$, $(A;C)$, $(A;D)$, $(A;E)$, $(B;C)$, $(B;D)$, $(B;E)$, $(C;D)$, $(C;E)$, $(D;E)$.
Ainsi, ce client pouvait faire 10 choix différents de deux boîtes.

Méthode

Pour dénombrer des combinaisons, on peut :
- utiliser la propriété du paragraphe **6. a.** ;
- ou lister toutes les combinaisons.

Remarques

Dans une combinaison, il ne peut y avoir de répétition (le client ne peut pas choisir deux fois la même boîte).
Dans une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance (le choix $(A;B)$ est le même que le choix $(B;A)$).

13 Utiliser la calculatrice

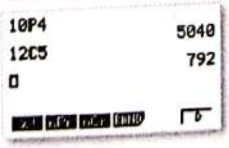
À l'aide de la calculatrice, calculer : $D=A_{10}^4$ et $E=C_{12}^5$.

Solution commentée

Calculatrice CASIO

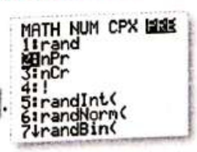
- Choisir le MENU 1 RUN-MAT
- Taper 10 ; puis OPTN.

- Taper F6 (▷) ; puis F3 (PROB) ; Choisir F2 (nPr) ; taper 4 ; puis EXE.

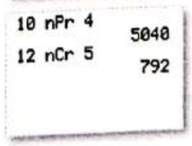


Calculatrice Texas Instruments

- Choisir le menu de calcul.
- Taper 10 ; puis MATH.



- Sélectionner PRB à l'aide de la flèche ▷ ; choisir 2 : nPr ; taper 4 ; puis ENTER.



Méthode

Pour calculer A_n^p ou C_n^p :
- taper *n* d'abord ;
- dans le menu PROBABILITÉS choisir nPr ou nAr (pour les arrangements) ou nCr (pour les combinaisons) ;
- enfin taper *p*.

S'exercer

14 Cinq voitures arrivent dans un parking dans lequel il reste trois places libres (notées *A*, *B* et *C*).
Combien y a-t-il de rangements possibles de trois de ces voitures ?

15 Combien peut-on former d'équipes différentes de cinq personnes choisies parmi huit ?

16 Calculer, sans calculatrice, A_6^2 ; puis C_{10}^4.

Cardinal d'un ensemble, partition

Réponses rapides

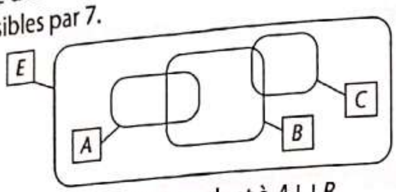
17 Donner le cardinal des ensembles suivants :

a. E est l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 10.

b. E est l'ensemble des lettres de l'alphabet.

c. E est l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 50 et divisibles par 7.

18 Reproduire le diagramme ci-contre.



a. Colorer en vert le domaine correspondant à $A \cup B$.

b. Hachurer en rouge le domaine correspondant à $B \cap C$.

c. Hachurer en bleu le domaine correspondant à $E \setminus B$.

19 E désigne l'ensemble : $\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$.
Donner une partition de E :

a. qui comporte deux sous-ensembles ;

b. qui comporte trois sous-ensembles ;

c. qui comporte sept sous-ensembles.

20 Lors d'une enquête, on a interrogé 50 personnes dans la rue pour savoir si elles parlent l'anglais et si elles parlent l'espagnol.

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Anglais / Espagnol	Oui	Non	Total
Oui			
Non		3	28
Total	40		

b. Illustrer ce tableau par un diagramme.

21 Une station de radio diffuse la même publicité à 15 h et à 16 h. On estime qu'à 15 h, 21 400 auditeurs écoutent cette radio et qu'à 16 h, il y en a 24 800.
Déterminer le nombre d'auditeurs ayant entendu cette publicité à 15 h ou à 16 h sachant que 4 600 personnes écoutent cette radio à 15 h et à 16 h.

Aide

Penser à utiliser une formule du cours.

22 E désigne l'ensemble $\{0;1;2\}$.
Lister les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et donner son cardinal.

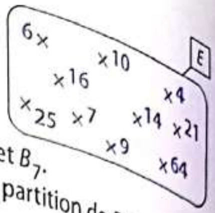
23 E désigne l'ensemble $\{A;B;C;D\}$.
Lister les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ et donner son cardinal.

24 E désigne l'ensemble $\{2;3;\ldots;12\}$.
A_2, A_3, A_5 et A_7 sont les sous-ensembles de E constitués des éléments divisibles par 2, par 3, par 5 et par 7.

a. Écrire les ensembles A_2, A_3, A_5 et A_7.

b. A_2, A_3, A_5, A_7 forment-ils une partition de E ?

25 E désigne l'ensemble de nombres dessiné ci-contre.
B_3, B_4, B_5 et B_7 sont les sous-ensembles de E constitués des multiples de 3, 4, 5 et 7.



a. Écrire les ensembles B_3, B_4, B_5 et B_7.

b. B_3, B_4, B_5 et B_7 forment-ils une partition de E ?

Produit cartésien, p-uplets

Réponses rapides

26 E et F désignent les ensembles $\{A;B\}$ et $\{1;2;3\}$.
Déterminer tous les éléments de :

a. $E \times F$; b $E \times F \times E$; c. $F \times E$.

27 E et F désignent les ensembles de l'exercice précédent.
Donner le cardinal de chacun des ensembles suivants :

- $E \times F$;
- $E \times F \times E$;
- E^5 ;
- F^4 ;
- $E^2 \times F^3$;
- $E^3 \times F^2$.

28 E, F et G désignent les ensembles :
$\{A;B\}$, $\{1;2;3\}$ et $\{a;b\}$.
On note $\mathscr{E}$ le produit cartésien $E \times F \times G$.

a. Combien $\mathscr{E}$ possède-t-il d'éléments ?

b. Déterminer tous les éléments de $\mathscr{E}$.

29 On lance une pièce de monnaie, dont les faces sont notées P : pile et F : face ; puis un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4 et à nouveau la pièce.

a. Donner trois exemples de résultats possibles.

b. Combien existe-t-il de résultats possibles ?

30 E désigne l'ensemble $\{A;B;C;D\}$.
Dans chacun des cas, donner deux exemples d'éléments de $\mathscr{E}$; le nom donné à un élément de $\mathscr{E}$, ainsi que Card $\mathscr{E}$.

- $\mathscr{E} = E^2$;
- $\mathscr{E} = E^4$;
- $\mathscr{E} = E^{10}$.

31 Dans un pays, les numéros de téléphone comportent huit chiffres tous pris entre 0 et 9.
Combien y a-t-il de numéros de téléphones possibles ?

Aide

On peut : • soit identifier E, p et E^p afin de dénombrer les p-uplets ;
• soit compléter le schéma :

… choix	…	… choix	→ Nombre de choix : …
1^{er} chiffre		8^e chiffre	

32 Combien de mots de cinq lettres, distinctes ou non, peut-on former avec les lettres :

a. A, B, C, D ? b. A, B, C, D, E, F, G, H ?

33 Un enfant dispose des crayons de couleur ci-contre pour colorier le drapeau.
De combien de façons différentes peut-il le colorier ?

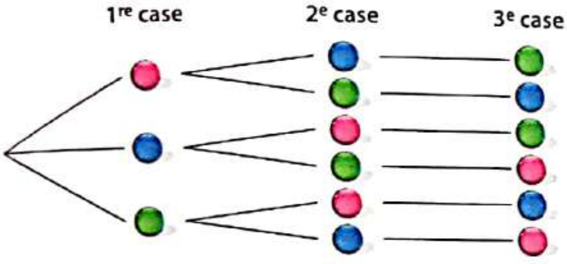
Notation factorielle, permutations

Réponses rapides

34 Calculer mentalement : • $3!$; • $5!$; • $6!$

35 Utiliser la calculatrice pour donner :
• $9!$; • $12!$; • $13!$

36 a. On dispose de trois balles : rose, bleue et verte à placer dans trois cases (chaque case ne peut contenir qu'une seule balle).
Utiliser l'arbre ci-dessous pour dénombrer les cas possibles.



b. Qu'en est-il avec :
• quatre balles de couleurs différentes et quatre cases ?
• six balles de couleurs différentes et six cases ?

37 a. Sans utiliser la calculatrice, simplifier :

$$A=\frac{12!}{10!}\ ;\quad B=\frac{15!}{14!}\ ;\quad C=\frac{20!}{18!}.$$

b. n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 2$.
Recopier et compléter les égalités :
• $n!=\ldots\times(n-1)!$; • $n!=\ldots\times\ldots\times(n-2)!$

38 Utiliser un contre-exemple pour montrer que les affirmations ci-dessous sont fausses :
Affirmation 1 : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2n!=(2n)!$;
Affirmation 2 : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^2!=n!\times n!$;
Affirmation 3 : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $2n+1!=(2n+1)!$

39 Dans chacun des cas ci-dessous, donner deux exemples de permutations de E et dénombrer toutes les permutations.
a. $E=\{A;B;C;D\}$;
b. E est l'ensemble des nombres entiers compris entre -3 et 2.

40 Huit athlètes prennent le départ d'un 110 m haies. Chacune d'elles choisit au hasard l'un des huit couloirs de la piste.
Combien y a-t-il de positions de départ possibles ?

41 a. De combien de façons peut-on garer huit voitures sur huit places de parking ?
b. De combien de façons peut-on garer huit voitures sur neuf places de parking ?

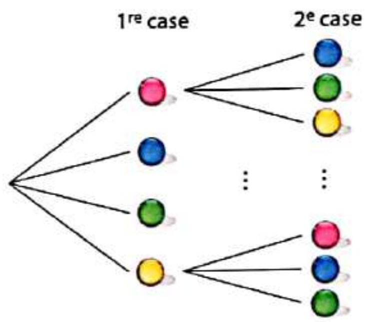
Arrangements, combinaisons

Réponses rapides

42 Sans utiliser la calculatrice, calculer :
a. • A_3^1 ; • A_4^2 ; • A_5^3.
b. • C_3^1 ; • C_4^2 ; • C_5^3.

43 Utiliser la calculatrice, pour donner :
a. • A_{12}^5 ; • A_{14}^7 ; • A_7^3.
b. • C_8^3 ; • C_{10}^4 ; • C_{20}^{12}.

44 a. On dispose de quatre balles : rose, bleue, verte et jaune à placer dans deux cases (chaque case ne peut contenir qu'une seule balle).
Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous pour dénombrer les cas possibles.



b. Qu'en est-il avec :
• quatre balles de couleurs différentes et trois cases ?
• cinq balles de couleurs différentes et deux cases ?

45 Dans une ville, vingt-cinq classes participent à un concours. Les six meilleures seront classées et obtiendront une récompense. Combien y a-t-il de classements possibles ?

46 **Démontrer des propriétés**
n et p désignent des nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
Démontrer que :
• $C_n^0=C_n^n=1$; • $C_n^{n-p}=C_n^p$;
• $n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

47 a. Reproduire et compléter le « Triangle de Pascal » du paragraphe **6. b.** du cours jusqu'à $n=6$ et $p=6$.
b. En déduire le développement de :
• $(a+b)^5$; • $(a+b)^6$.

48 Un entraîneur de football choisit au hasard trois de ses joueurs pour faire un exercice.
Sachant qu'il dispose de 15 joueurs, combien de choix différents peut-il faire pour cet exercice ?

Aide
▸ Ce ne sont pas des arrangements car le choix (joueur 4 ; joueur 7 ; joueur 12) est identique au choix (joueur 7 ; joueur 4 ; joueur 12).

49 Une usine fabrique 100 objets chaque jour.
Afin de vérifier leur bon fonctionnement, un contrôleur en choisit quatre au hasard pour les tester.
Combien de choix différents peut-il faire ?

Se tester

Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

50 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

	vrai	faux
1. Si E désigne un ensemble tel que $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 32$, alors $\text{Card}\,(E) = 4$.	☐	☐
2. Si $\text{Card}\,(A) = 124$, $\text{Card}\,(B) = 67$ et $A \cap B$ contient 52 éléments alors, $A \cup B$ contient 139 éléments.	☐	☐
3. M_2 (resp. M_3 ; resp M_6) désigne l'ensemble des multiples de 2 (resp. de 3 ; resp. de 6) inférieurs à 31. M_2, M_3 forment une partition de M_6.	☐	☐
4. On donne $E = \{2;3;4\}$ et $F = \{5;6;7;8\}$. Le produit cartésien $E \times F$ contient 32 éléments.	☐	☐
5. Avec les lettres a, b, c, d, e, on peut former 4^5 mots de quatre lettres.	☐	☐
6. Avec les lettres a, b, c, d, e, on peut former 120 mots de cinq lettres distinctes.	☐	☐

Avec justification

51 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Une classe compte 32 élèves dont 15 filles. On souhaite constituer une seule équipe en choisissant six élèves.

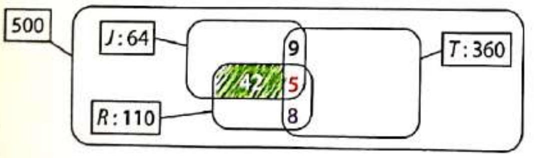
	vrai	faux
1. Le nombre de choix possibles pour cette équipe est 906 192.	☐	☐
2. Si on souhaite constituer l'équipe uniquement avec des filles, alors le nombre de choix est $\text{Card}\,(F^6)$ avec F l'ensemble des filles.	☐	☐
3. Si on souhaite constituer l'équipe uniquement avec des garçons, alors le nombre de choix est une combinaison à six éléments d'un ensemble à 17 éléments.	☐	☐
4. Si on souhaite que cette équipe compte autant de filles que de garçons, alors, le nombre de choix possibles est 309 400.	☐	☐

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

52 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions. Dans une ville, une enquête à porté sur l'utilisation des médias : télévision (T), radio (R), journaux (J), chez 500 jeunes. Les résultats sont indiqués dans le diagramme ci-dessous.



1. Le nombre de jeunes n'utilisant que la radio est :
a. 42 ; **b.** 63 ; **c.** 55.

2. Le nombre de jeunes qui utilisent la radio ou les journaux est :
a. 117 ; **b.** 47 ; **c.** 174.

3. Le nombre de jeunes qui utilisent deux de ces trois médias est :
a. 64 ; **b.** 59 ; **c.** 5.

4. Le nombre de jeunes qui n'utilisent aucun de ces trois médias est :
a. 35 ; **b.** 34 ; **c.** 495.

Avec justification

53 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, on peut former :
a. 5^5 nombres à cinq chiffres ;
b. $5!$ nombres à cinq chiffres ;
c. A_5^5 nombres à cinq chiffres.

2. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, on peut former :
a. 5^5 nombres à cinq chiffres distincts ;
b. $5!$ nombres à cinq chiffres distincts ;
c. A_5^5 nombres à cinq chiffres distincts.

3. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on peut former :
a. 5^8 nombres à cinq chiffres distincts ;
b. A_8^5 nombres à cinq chiffres distincts ;
c. C_8^5 nombres à cinq chiffres distincts.

4. En choisissant, au hasard, trois fruits parmi 1 mangue, 1 ananas, 1 banane, 1 pomme, 1 kaki, 1 orange, 1 citron, 1 pamplemousse, on souhaite faire une salade de fruits. Le nombre de salades de fruits possibles est :
a. 56 ; **b.** 366 ; **c.** 512.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

54 Nombre d'atomes dans l'Univers

Le but de cet exercice est d'estimer le nombre d'atomes dans l'Univers. Tous les résultats seront arrondis et présentés sous la forme $a \times 10^b$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

1. On sait que, dans l'Univers, la matière est essentiellement constituée d'atomes d'hydrogène et que dans un atome d'hydrogène, la masse est concentrée dans le proton : son noyau.

a. Sachant que la masse d'un proton est d'environ 2×10^{-24} g, en déduire le nombre de protons (et donc d'atomes) dans un gramme de matière.

b. Notre Soleil a une masse de 2×10^{33} g.
Combien contient-il d'atomes ?

c. Le Soleil est une étoile de masse moyenne. On estime que notre galaxie, la Voie lactée, contient environ 100 milliards d'étoiles.
Combien contient-elle d'atomes ?

2. Notre galaxie est une galaxie de taille moyenne. Les astrophysiciens estiment que l'Univers contiendrait environ un millier de milliards de galaxies.
Combien l'Univers contient-il d'atomes ?

55 Distinguer les cas

E désigne un ensemble de cardinal *n*, avec $n \in \mathbb{N}$ et *p* est un nombre entier naturel.
Reproduire et compléter le tableau ci-dessous par Oui ou Non (lorsque la réponse est Oui pour la condition sur *n* et *p*, préciser cette condition).

	Condition sur *n* et *p*	Tenir compte de l'ordre dans une liste	Dans une liste des répétitions sont possibles
p-uplet de *E*			
permutation de *E*			
arrangement à *p* éléments de *E*			
combinaison à *p* éléments de *E*			

56 Démontrer une propriété

n et *p* désignent deux nombres entiers naturels tels que $0 < p < n$.
Démontrer que : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

57 Art

Lors d'une exposition d'art, 50 œuvres sont présentées au public. 28 ont été créées par des femmes.

1. On souhaite récompenser les quatre plus belles œuvres sans les classer.

a. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b. Combien y a-t-il de résultats possibles dans lesquels deux des quatre œuvres sont celles de femmes ?

c. Combien y a-t-il de résultats possibles dans lesquels au moins une des quatre œuvres est celle d'une femme ?

2. Reprendre les questions précédentes si l'on souhaite classer les quatre œuvres choisies.

58 Répartition des élèves

Dans une classe de 40 élèves, il y a 16 filles, parmi lesquelles 12 apprennent l'anglais et 6 l'arabe. On sait que 26 élèves suivent les cours d'anglais, 17 suivent les cours d'arabe et 7 suivent les deux cours. 2 garçons ne suivent aucun des deux cours.

a. Combien de filles suivent les deux cours de langue ?

b. Combien de filles ne suivent aucun de ces deux cours ?

59 Plus grand que l'Univers

80 personnes entrent dans une salle contenant 80 sièges vides. De combien de façons différentes peuvent-elles prendre place ?

Aide

Pour comprendre le titre de cet exercice, se reporter à la page 229 ou à l'exercice 54.

60 Binôme de Newton

a. Utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire la forme développée de $(a+b)^7$. (On pourra utiliser le « Triangle de Pascal ».)

b. En déduire la forme développée :
- de $(1+x)^7$;
- de $(1-x)^7$.

61 Distribution de cahiers

Calculer le nombre de façons de distribuer trois cahiers différents à trois enfants :

a. si chaque enfant reçoit un cahier ;

b. si chaque enfant peut recevoir entre 0 et 3 cahiers.

62 Déplacement d'un pion

Sur l'échiquier ci-dessous, le pion ne peut se déplacer que dans le sens des flèches.

Combien y a-t-il de trajets possibles :

a. pour aller de la case *A* à la case *B* ?

b. pour aller de la case *B* à la case *C* ?

63 Courses de chevaux

1. Il existe différents types de paris pour les courses de chevaux. Deux d'entre eux, appelés Tiercé dans l'ordre et Tiercé dans le désordre, consistent à trouver les trois premiers chevaux, dans l'ordre exact d'arrivée pour le premier et peu importe l'ordre d'arrivée pour le second.

a. Au départ d'une course, 18 chevaux s'élancent.
Combien y a-t-il de Tiercés possibles :
• dans l'ordre ? • dans le désordre ?

b. Au départ d'une course, n chevaux s'élancent ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$).
Exprimer en fonction de n, le nombre de Tiercés possibles :
• dans l'ordre ; • dans le désordre.

2. D'autres types de paris fonctionnent de la même façon : le Quarté, qui consiste à trouver les quatre premiers chevaux arrivés et le Quinté, qui consiste à trouver les cinq premiers chevaux arrivés.
Reprendre les questions précédentes pour le Quarté et le Quinté :
a. avec 20 chevaux au départ ;
b. avec n chevaux au départ ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 5$).

64 Dénombrement d'anagrammes

Pour obtenir un anagramme d'un mot, on permute ses lettres afin d'obtenir un autre mot, ayant un sens ou non.
Par exemple : « beau » et « aueb » sont deux anagrammes du mot « aube ».

1. a. Dénombrer les anagrammes des mots suivants :
• mari ; • sortie ; • afrique.

b. n désigne un nombre entier naturel non nul.
Exprimer en fonction de n le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres distinctes.

2. a. Combien un mot de 4 lettres distinctes a-t-il d'anagrammes ?

b. • lister les anagrammes du mot aida ;
• montrer que ce mot possède $\dfrac{4!}{2!}$ anagrammes.

c. Lister et dénombrer les anagrammes des mots suivants :
• mere ; • epee.

3. a. • Lister les anagrammes du mot bebes.
• montrer que ce mot possède $\dfrac{5!}{2!2!}$ anagrammes.

b. Lister et dénombrer les anagrammes des mots suivants :
• semee ; • creee.

4. a. Dénombrer les anagrammes des mots :
• partirait ; • engendree ; • parallele.

b. n, k_1, k_2 désignent des nombres entiers naturels tels que :
$$k_1 + k_2 \leqslant n.$$
Exprimer en fonction de n, k_1 et k_2 le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres contenant k_1 fois une lettre et k_2 fois une autre lettre.

c. Quelle condition faut-il sur les nombres k_1, k_2, k_3 et n pour qu'un mot de n lettres :
• contienne k_1 fois une lettre, k_2 fois une autre lettre et k_3 fois encore une autre lettre ?
• Combien un tel mot possède-t-il d'anagrammes ?

Info

Autrefois utilisées pour dissimuler un message ou une formule, quelques anagrammes réservent de belles surprises.
Ainsi : « la théorie de la relativité restreinte » a pour anagramme « vérité théâtrale et loi intersidérale ».

65 Les dates d'anniversaire

Le but de ce problème est de démontrer que, dans un groupe de 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins deux personnes soient nées le même jour (jour et mois d'anniversaire, mais pas l'année), par exemple le 3 mars.
(Dans tout le problème, on ne tient pas compte des années bissextiles.)

1. a. Justifier que, lorsque 23 personnes sont présentes, il y a 365^{23} listes de leurs 23 dates d'anniversaires possibles.

b. Justifier que, lorsque dans un groupe de 23 personnes, aucune n'est née le même jour qu'une autre, il y a A_{365}^{23} listes de leurs 23 dates d'anniversaires possibles.

c. Exprimer par une phrase le contraire de : « Au moins deux personnes sont nées le même jour ».

d. En déduire qu'il y a environ 50,73 % de chance que, dans un groupe de 23 personnes, au moins deux sont nées le même jour.

2. n désigne un nombre entier naturel, $n \geqslant 5$.

a. Reprendre les questions **a.** et **b.** précédentes en remplaçant 23 par n.

b. En déduire que, dans un groupe de n personnes, le pourcentage de chance qu'au moins deux personnes soient nées le même jour est :
$$\left(1 - \frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}\right) \times 100.$$

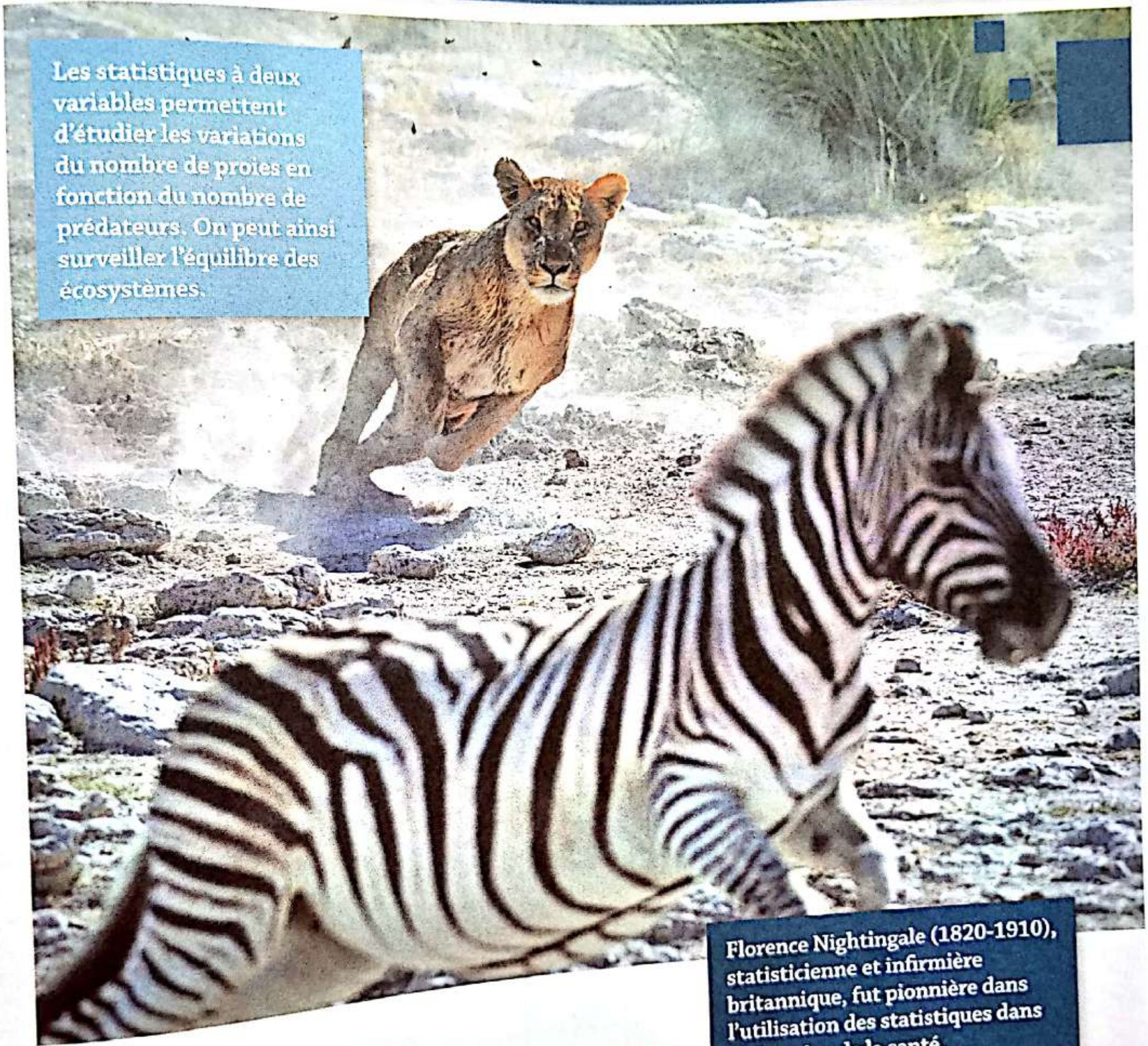
c. Reproduire et compléter la feuille de calcul ci-dessous avec les pourcentages.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Nombre de personnes du groupe	5	10	15	20	23	25	30	35
2	Pourcentage de chance qu'au moins deux personnes soient nées le même jour					50,73			

d. Grâce à la fonction graphique du tableur, afficher le graphique qui donne le nombre de personnes du groupe en abscisses et le pourcentage en ordonnées.

3. Pour chacun des groupes ci-dessous, indiquer le pourcentage de chances qu'au moins deux personnes du groupe soient nées le même jour.
Groupe 1 : Deux équipes de football qui s'affrontent (chaque équipe compte 11 joueurs).
Groupe 2 : Deux équipes de football qui s'affrontent et leurs deux entraîneurs.
Groupe 3 : Une classe de 32 élèves et leur professeur.

15 Statistiques



Les statistiques à deux variables permettent d'étudier les variations du nombre de proies en fonction du nombre de prédateurs. On peut ainsi surveiller l'équilibre des écosystèmes.

Florence Nightingale (1820-1910), statisticienne et infirmière britannique, fut pionnière dans l'utilisation des statistiques dans le domaine de la santé.

En 1858, elle fut la première femme élue membre de la Royal Statistical Society.

Les objectifs du chapitre

- Savoir déterminer les caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique présentant un regroupement en classes.
- Savoir construire un histogramme d'une série statistique présentant un regroupement en classes.
- Savoir construire une courbe des fréquences cumulées d'une série statistique présentant un regroupement en classes.
- Savoir effectuer et justifier un ajustement linéaire pour une série statistique à deux variables.

15 Cours

1 Série statistique présentée sous forme de classes

On s'intéresse à une série statistique présentée sous forme de p classes $[a_i\,;a_{i+1}[$, d'effectifs respectifs n_i, avec $1 \leqslant i \leqslant p$.

a Représentation par un histogramme

Définition

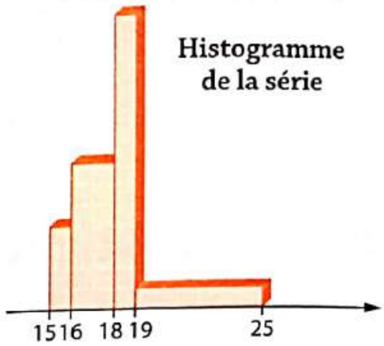
Une série statistique est donnée sous forme de classes.

- Le **centre de la classe** $[a_i\,;a_{i+1}[$ est le nombre $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$.
- L'**amplitude de la classe** $[a_i\,;a_{i+1}[$ est le nombre $a_{i+1} - a_i$.
- On appelle **histogramme** une représentation graphique des classes et des effectifs réalisée à l'aide de rectangles. Chaque classe est représentée par un rectangle de largeur $a_{i+1} - a_i$, la hauteur est calculée de telle sorte que l'aire soit proportionnelle à l'effectif.

Exemple

Classe	[15 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 19[	[19 ; 25[
Centre	15,5	17	18,5	22
Effectif	2	7	7	3

Remarque Si toutes les classes ont la même amplitude, la hauteur des rectangles est proportionnelle à l'effectif de la classe considérée.



b Mode, classe modale

Définitions

La **classe modale** d'une série statistique présentée sous forme de classes, est la classe ayant le plus grand effectif. Le centre d'une classe modale est appelé **mode** de la série statistique.

Remarque
Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales, et plusieurs modes.

Exemple
Avec la série précédente, l'effectif maximal est 7, il y a deux classes modales [16 ; 18[et [18 ; 19[.
Il y a deux modes : 17 et 18,5.

c Médiane

Définition

La **médiane** d'une série statistique est le nombre M tel qu'au moins 50 % de la population a une modalité inférieure ou égale à M, et au moins 50 % de la population a une modalité supérieure ou égale à M.

d Moyenne

Définition

La **moyenne** de la série statistique quantitative, de modalités $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$, (centre de la classe $[a_i\,;a_{i+1}[$) et d'effectifs n_i, est le nombre noté $\bar{x}$, égal à $\bar{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.

Exemple Pour la série précédente, la moyenne de la série est :

$$\frac{2\times 15{,}5 + 7\times 17 + 7\times 18{,}5 + 3\times 22}{2+7+7+3} \approx 18{,}18.$$

e Écart moyen, variance, écart-type

Définition

On considère une série statistique de modalités x_i, d'effectifs n_i avec $1 \leqslant i \leqslant p$, et de moyenne $\bar{x}$.

- L'**écart moyen** de la série est le nombre $e_m = \dfrac{n_1 \times |x_1 - \bar{x}| + n_2 \times |x_2 - \bar{x}| + \ldots + n_p \times |x_p - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.
- L'**écart-type** de la série est le nombre réel $\sigma = \sqrt{\dfrac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}}$.
- La **variance** de la série est le nombre réel $V = \sigma^2$.

1 Construire la courbe de fréquences cumulées croissantes, déterminer la médiane

Les moyennes des notes obtenues par les 60 candidats à un concours se répartissent selon les classes suivantes :

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	24	9	5
Fréquence (en %)					
Fréquence cumulée croissante (en %)					

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

b. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.

c. Déterminer par lecture graphique la médiane de la série statistique.

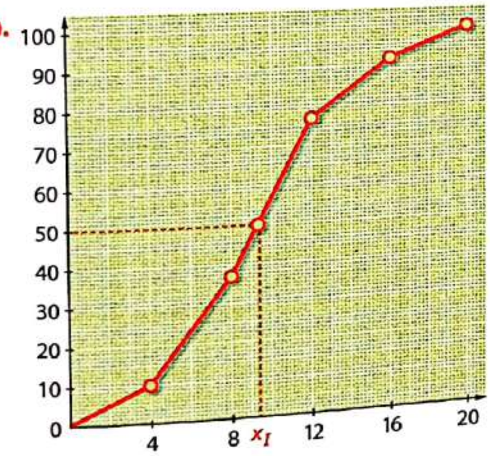
Solution commentée

a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	6	16	24	9	5
Fréquence (en %)	10	27	40	15	8
FCC (en %)	10	37	77	92	100

La fréquence cumulée croissante de la classe [8 ; 12[se calcule en additionnant la fréquence de la classe (40 %), à la fréquence cumulée croissante obtenue pour la classe précédente [4 ; 8[(37 %).
On obtient 40 + 37 = 77.

b.



c. I a pour abscisse $x_I \approx 9{,}3$.
Donc la médiane est environ égale à 9,3.

Méthode

a. Calculer les fréquences en divisant chaque effectif par l'effectif total 60. Exprimer le résultat directement en pourcentage.
Calculer les fréquences cumulées croissantes en ajoutant la fréquence de la classe considérée et la fréquence cumulée croissante obtenue pour la classe précédente.

b. Placer le premier point $M_0\,(0\,;0)$, correspondant à la borne de gauche 0 de la classe [0 ; 4[, et à l'effectif initial 0.
Pour chaque classe $[a_i\,;a_{i+1}[$ de fréquence cumulée croissante f_{ci}, placer le point $M_i(a_{i+1}, f_{ci})$.
Joindre les points au fur et à mesure de la construction.

c. Tracer la droite horizontale correspondant à $y = 50$ %, le point d'intersection I avec la courbe des fréquences cumulées croissantes a pour coordonnées $I\,(x_I\,;50)$.
La médiane est égale à l'abscisse x_I.

S'exercer

2 Voici une série statistique :

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[
Effectif	7	8	4	6

1. a. Compléter le tableau avec les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.

b. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.

c. Déterminer graphiquement la médiane de la série.

2. a. Déterminer le centre de chacune des classes.

b. Calculer la moyenne de cette série.

3 Voici une série statistique :

Classe	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 7[
Centre des classes	...	...	...	...
Effectif	15	12	6	2

a. Reproduire et compléter le tableau.

b. Déterminer le mode et calculer la moyenne.

c. Calculer V, en déduire une valeur approchée de σ.
Arrondir les résultats au centième.

Aide

Pour effectuer (ou vérifier) les calculs de la moyenne et de l'écart-type, on pourra utiliser les pages calculatrices, (pages 264 à 267) à la fin du manuel.

2 Ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères

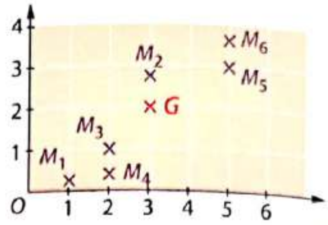
Série X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_N
Série Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_N

Une série statistique à deux caractères, notés X et Y, est donnée par le tableau ci-contre.
L'effectif de chaque modalité est égal à 1.

a Nuage de points et point moyen

Définitions

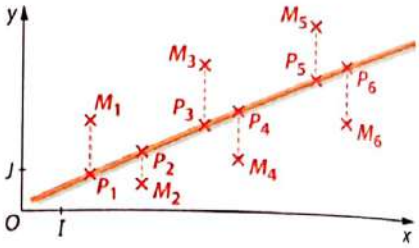
- Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points $M_i(x_i\,;y_i)$ est appelé **nuage de points** de la série statistique.
- Le **point moyen** d'un nuage de points est le point $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ où $\overline{x}$ est la moyenne de la série statistique de modalités x_i et $\overline{y}$ est la moyenne de la série statistique de modalités y_i.



b Droite de régression linéaire de y en x

Principe

(d) désigne une droite d'équation $y = ax + b$.
Pour tout nombre entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, on appelle P_i le point de (d) d'abscisse x_i.
La somme des carrés des distances M_iP_i est égale à :
$(y_1-(a\times x_1+b))^2+(y_2-(a\times x_2+b))^2+\ldots+(y_N-(a\times x_N+b))^2$.
La méthode des moindres carrés a pour objectif de déterminer les coefficients a et b pour lesquels cette somme est la plus petite possible.



Propriétés (admises) **Définitions**

On note $\text{Cov}(X\,;Y)$ le nombre, appelé **covariance**, égal à :

$$\text{Cov}(X,Y)=\frac{x_1\times y_1+x_2\times y_2+\ldots+x_N\times y_N}{N}-\overline{x}\times\overline{y},$$

et $V(X)$ la variance de la série de modalités x_i.

- La **droite de régression linéaire** de y en x, déterminée par la méthode des moindres carrés, a pour équation : $y = ax + b$, avec $a=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b=\overline{y}-a\overline{x}$.
- $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ est un point de la droite de régression linéaire.

Remarque
On peut aussi déterminer la valeur de b en utilisant la propriété :
$G(\overline{x}\,;\overline{y})$ est un point de la droite de régression linéaire.

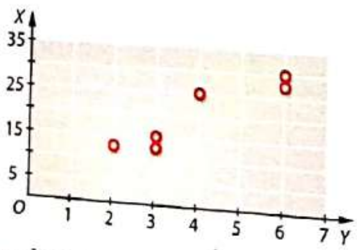
Définition

Le **coefficient de corrélation linéaire** de la série statistique à deux caractères X et Y, est le nombre, noté r, égal à : $\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\times\sigma(Y)}$, où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types des séries de modalités x_i et y_i.

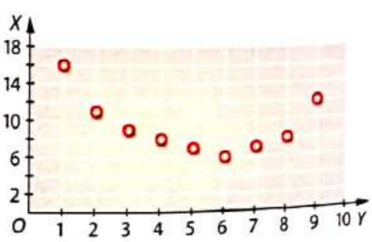
Remarque Ce coefficient permet d'apprécier la qualité d'un ajustement affine, plus il est proche de 1 en valeur absolue, plus l'ajustement linéaire est bon.

Exemples

$r \approx 0{,}94$
r est proche de 1 : un ajustement linéaire est possible.



$r \approx 0{,}45$
r n'est pas proche de 1 : un ajustement linéaire n'est pas approprié.



Lorsqu'un ajustement linéaire semble possible, on essaye de déterminer l'équation $y = ax + b$ d'une droite d'approximation du nuage de points.

4 Déterminer l'équation d'une droite de régression linéaire

Un groupe de 10 élèves a obtenu les notes suivantes en mathématiques et en physique à un examen :

Maths (X)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Physique (Y)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

a. Déterminer les coordonnées du point moyen de la série statistique.
b. Déterminer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression linéaire de y en x.
c. Représenter la droite (d) et le nuage de points.

Solution commentée

a. On forme le tableau de calcul :

											Somme
x_i	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14	90
y_i	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16	116
x_i^2	81	144	25	36	81	196	9	36	144	196	948
$x_i \times y_i$	90	156	40	60	117	238	15	48	192	224	1 180

La dernière colonne contient les sommes des éléments de chaque ligne. Tous ses éléments vont intervenir dans les calculs des coordonnées de G, de Cov (x, y) et de $V(x)$.

$$\overline{x} = \frac{90}{10} = 9 \text{ et } \overline{y} = \frac{116}{10} = 11{,}6.$$

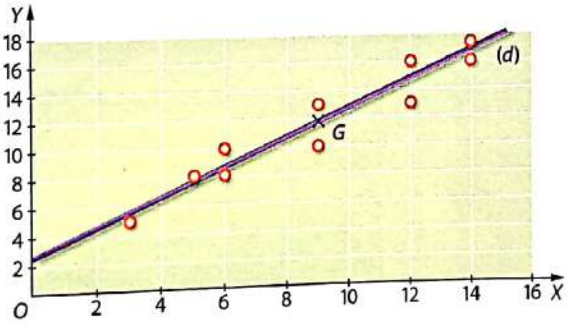
G a pour coordonnées (9 ; 11,6).
Remarque : G est un point de la droite de régression linéaire.

b. $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1180}{10} - 9 \times 11{,}6 = 13{,}6$ et $V(X) = \frac{948}{10} - 9^2 = 13{,}8$.

La droite de régression linéaire de y en x a pour équation :

$y - 11{,}6 = \frac{13{,}6}{13{,}8}(x - 9)$, c'est-à-dire : $y = 0{,}986x + 2{,}730$.

c.



Méthode

- Présenter tous les éléments nécessaires dans un tableau de calcul, ayant 4 lignes : x_i, y_i, x_iy_i et x_i^2.
- En dernière colonne, calculer les sommes des éléments de chaque ligne.

a. Utiliser les formules donnant les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

b. Calculer Cov (X, Y) et $V(X)$ avec les formules et les éléments du tableau.

c. Placer G et un autre point de (d), puis tracer (d).

Rappel

Il existe une autre formule pour calculer la variance de X :

$$V(x) = \frac{x_1^2 + \ldots + x_N^2}{N} - \overline{x}^2.$$

Aide

Pour effectuer (ou vérifier) les calculs de $\overline{x}$, $\overline{y}$, Cov (X, Y) et $V(X)$, a, b et r, on pourra utiliser les pages calculatrices et tableur de la fin du manuel.

S'exercer

5 On donne la série statistique à deux caractères :

X	−3	−1	0	5
Y	1	−1	4	2

a. Représenter le nuage de points associé à cette série.
b. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer G sur le graphique.
c. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.
d. La calculatrice donne $r \approx 0{,}31$.
Un ajustement linéaire est-il approprié ?

6 Le tableau suivant donne la masse Y en kg d'un nourrisson X jours après sa naissance.

X	5	7	10	14	18	22	26
Y	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

a. Représenter le nuage de points associé à cette série.
b. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer G sur le graphique.
c. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice.
d. Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

Séries statistiques présentées sous forme de classes

Réponses rapides

7 Déterminer l'effectif total, l'amplitude de chaque classe, la ou les classe(s) modale(s) et la classe médiane de chaque série.

a.

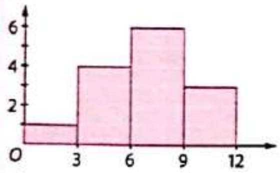
Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[
Effectif	3	5	10	4	1

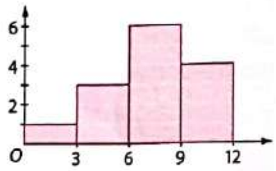
b.

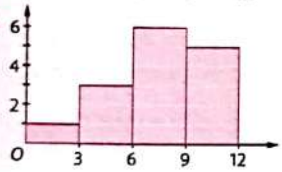
Classe	[0;2[	[2;5[	[5;7[	[7;8[	[8;10[
Effectif	3	10	10	3	1

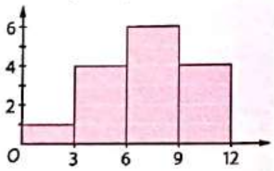
8 Identifier l'histogramme de la série ci-dessous :

Classe	[0;3[	[3;6[	[6;9[	[9;12[
Effectif	1	3	6	4

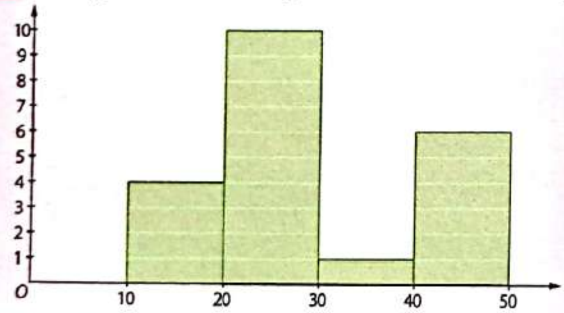
a.


b.


c.


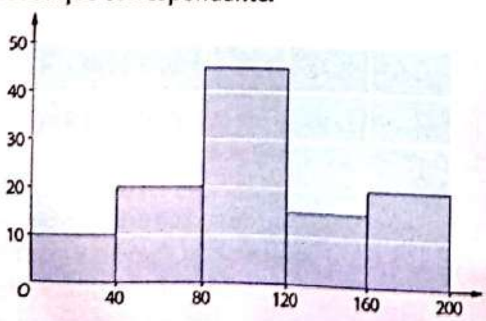
d.


9 Ce diagramme est l'histogramme d'une série statistique.



a. Identifier les classes et les effectifs correspondants.
b. Déterminer la classe médiane et la moyenne de cette série statistique.

10 À partir de l'histogramme ci-dessous, identifier les classes et les effectifs associés, la classe modale et l'effectif total de la série statistique correspondante.



11 Déterminer la classe médiane et la moyenne des séries statistiques suivantes.

a.

Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;10[	[10;12[
Centre	1	3	5	7	9
Effectif	10	4	12	8	6

b.

Classe	[0;1[	[1;3[	[3;6[	[6;8[	[8;12[
Centre	0,5	2	4,5	7	10
Effectif	4	10	12	8	3

Vocabulaire

Les indicateurs mode, classe modale, moyenne et médiane d'une série statistique, sont appelés **paramètres de position** de la série.

12 Pour chaque série déterminer la classe médiane et la moyenne.

a.

Classe	[0;1[	[1;2[	[3;5[	[5;7[	[7;8[
Fréquence	0,2	0,5	0,1	0,05	0,15

b.

Classe	[3;5[	[5;8[	[8;10[	[10;11[	[11;15[
Fréquence (en %)	5	15	22	28	30

Aide

Lorsque la série est donnée avec des fréquences, on peut calculer directement la moyenne avec la formule :

$$\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots + f_n \times x_n$$

avec $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs de centres des n classes, et $f_1, \ldots, f_n$ les fréquences associées.

13 Les tableaux suivants donnent les effectifs cumulés croissants (ECC) de séries statistiques.
Dans chaque cas, identifier la classe médiane et calculer la moyenne de la série statistique.

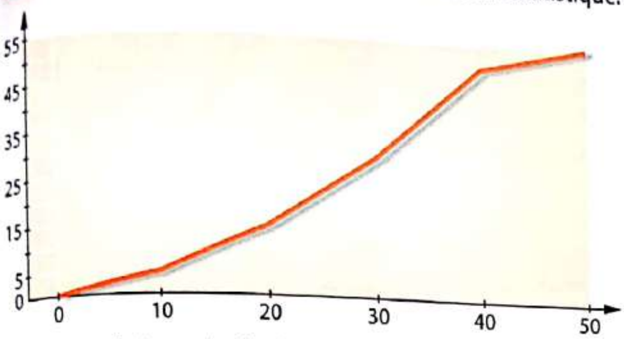
a.

Classe	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;10[	[10;12[
ECC	3	7	12	18	20

b.

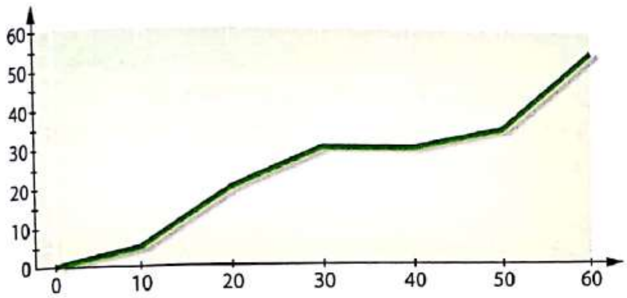
Classe	[0;1[	[1;2[	[3;5[	[5;7[	[7;8[
ECC	2	15	23	37	40

14 Voici la courbe des effectifs cumulés d'une série statistique.



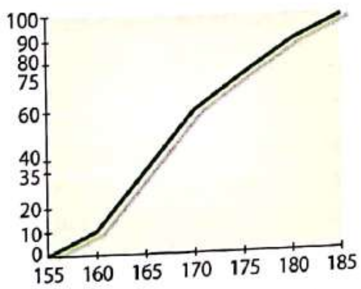
a. Déduire de la courbe la répartition en classes et les effectifs correspondants.
b. Calculer la moyenne de la série statistique.

15 La courbe d'effectifs cumulés d'une série statistique est représentée ci-dessous.



a. Déduire de la courbe la répartition en classes et les effectifs correspondants.
b. Calculer la moyenne de la série statistique.

16 Le graphique ci-dessous représente le polygone des fréquences cumulées croissantes (en %) d'une série statistique.



a. Sachant que l'effectif total de la population est $N = 40$ et que l'amplitude de chaque classe est égale à 5, compléter le tableau ci-dessous.

Classe	...	...
Effectifs	...	...
Effectifs cumulés croissants	...	...
Fréquences cumulées croissantes	...	...

b. Déterminer la médiane. c. Calculer la moyenne.

Aide

Pour une série statistique de caractère X, et d'effectif total N, le point d'intersection I de la courbe des effectifs cumulés croissants avec la droite d'équation $y = n$, a pour coordonnées $(x_I\,;n)$.

Pour le cas particulier $n = \frac{N}{2}$, on peut déterminer une valeur approchée de la médiane.

17 Les temps de trajet domicile-lycée des élèves de Première se répartissent selon la série statistique suivante :

Temps (en min)	[10 ; 15[	[15 ; 20[	20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35]
Effectif	24	48	72	84	12

a. Quel est l'effectif total de la population étudiée ?
b. Construire l'histogramme des effectifs associé à cette série.
c. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.
d. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane de la série.

18 On a relevé les notes de 600 candidats à un concours. Elles se répartissent selon les classes suivantes.

Moyenne	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Effectif	50	102	84

Moyenne	[8 ; 10[	[10 ; 14[	[14 ; 20[
Effectif	204	110	50

a. Déterminer la classe médiane et la moyenne de la série.
b. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.
c. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane de la série.
d. Un étudiant a obtenu une note de 12,3/20. Peut-il affirmer que 75 % des candidats ont une note inférieure à la sienne ?

19 Un grand nombre de valeurs statistiques regroupées par classes ont été relevées dans un tableur, et traitées pour obtenir les résultats suivants.

Classe	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i \times x_i$	$n_i \times x_i^2$
[0,24[	12	6	72	864
...	...	...	...	...
Somme	–	6 000	126 040	2 685 520

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

Rappel

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}\ ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - \overline{x}^2}$$

20 Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart-type des séries suivantes.

a.

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[
Effectif	6	12	17	15

b.

Classe	[10 ; 14[	[14 ; 18[	[18 ; 20[	[20 ; 22[
Effectif	11	20	32	15

Vocabulaire

Les indicateurs étendue, écart moyen, variance et écart-type d'une série statistique sont appelés **paramètres de dispersion** de la série.

21 Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart-type des séries statistiques suivantes.

a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 7[	[7 ; 10[	[10 ; 13[	[13; 17[
Effectif	334	96	51	12	7

b.

Classe	[25 ; 28[	[28 ; 31[	[31 ; 34[	[34 ; 37[
Effectif	8	20	57	99

Classe	[37 ; 40[	[40 ; 43[	[43 ; 46[
Effectif	81	27	8

22 On a relevé les temps de parcours, en min, d'un marathon. Ces valeurs, regroupées par classes, ont été relevées dans un tableur, et traitées pour obtenir les résultats suivants.

Classe	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i \times x_i$	$n_i \times x_i^2$
[0 ; 150[	75	31	2 325	174 375
...	...	...	...	...
Somme	–	39 115	$9{,}9 \times 10^6$	$2{,}6 \times 10^9$

a. Calculer le temps moyen en minutes, puis en heures décimales, de parcours du marathon.
b. Calculer l'écart-type en minutes, puis en heures décimales.

Info

Un marathon est une épreuve de course à pied d'endurance sur une distance de 42,195 km. Le record actuel de 2 h 02 57 s est détenu depuis 2014 par le Kényan Dennis Kimeto.

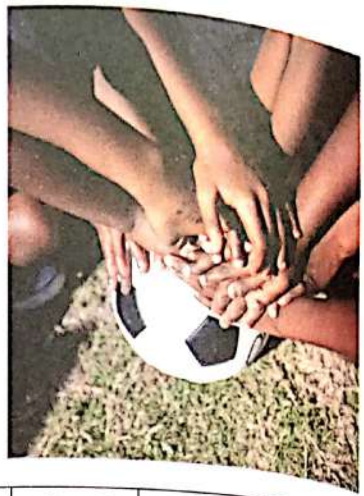
23 On a relevé les pourcentages de la population totale de 52 pays d'Afrique, âgée de 15 à 64 ans.
Ces valeurs, regroupées par classes, ont été relevées dans un tableur, et traitées pour obtenir les résultats suivants.

Classe	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i \times x_i$	$n_i \times x_i^2$
[47 ; 49[	48	1	48	2 304
...	...	...	...	...
Somme	–	52	2 926	166 148

Source : Université de Sherbrooke.

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

24 On a relevé les records de moyennes de buts marqués en coupe d'Afrique de football de 1957 à 2015.
Les résultats sont regroupés en classes, les effectifs indiquent le nombre de pays ayant réalisé un record compris dans la classe donnée.



Classe	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[
Effectif	7	13	8	2

a. Construire l'histogramme des effectifs.
b. Déterminer la (ou les) classe(s) modale(s) de la série.
c. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série.
d. Construire la courbe des effectifs cumulés croissants, et déterminer la médiane de la série.

25 La série suivante donne la répartition des tailles en cm de 36 élèves d'une classe de première.

Taille	Effectif
[145 ; 155[	3
[155 ; 160[	5
[160 ; 165[	6
[165 ; 170[	8
[170 ; 175[	8
[175 ; 185[	6

a. Construire l'histogramme des effectifs.
b. Déterminer la (ou les) classe(s) modale(s) de la série.
c. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série.
d. Construire la courbe des effectifs cumulés croissants, et déterminer la médiane de la série.

Ajustement linéaire d'une série statistique à deux caractères

Réponses rapides

26 Voici une série statistique à deux caractères :

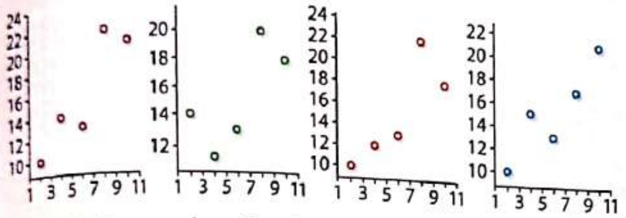
X	5	20	27	40	52
Y	3	4	7	10	8

a. Construire le nuage de points associé à la série.
b. Calculer les coordonnées du point moyen.

27 Voici une série statistique à deux caractères X et Y.

X	2	4	6	8	10
Y	10	14	13	22	21

a. Identifier le nuage de points associé à cette série.



b. Calculer les coordonnées du point moyen.

28 Voici une série statistique à deux caractères X et Y, les données numériques sont disposées dans le tableau suivant.

	x_i	y_i	$x_i \times y_i$	x_i^2
	8	54	432	64
	10	46	460	100
	12	34	408	144
	14	19	266	196
	16	12	192	256
	18	7	126	324
	20	2	40	400
Total	98	174	1 924	1 484

a. Calculer les coordonnées du point moyen G.

b. Calculer Cov(X, Y) et $V(X)$.

c. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x, de la forme $y = ax + b$.

On donnera des valeurs de a et b arrondies à 10^{-2}.

29 Voici une série statistique à deux caractères X et Y.

	x_i	y_i	$x_i \times y_i$	x_i^2	y_i^2
	80	538	43 040	6 400	289 444
	100	452	45 200	10 000	
	122	333	40 626	14 884	
	139	190	26 410	19 321	
	158	117	18 486	24 964	
	180	65	11 700	32 400	
	196	21	4 116	38 416	
Total	975	1 716	189 578	146 385	

a. Calculer les coordonnées du point moyen G.

b. Calculer Cov(X, Y) et $V(X)$.

c. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x, de la forme $y = ax + b$.

On donnera des valeurs de a et b arrondies à 10^{-2}.

d. Compléter le dernière colonne du tableau, et calculer le coefficient de corrélation r. Que peut-on penser de la pertinence de l'ajustement affine réalisé ?

30 Une bille tombe dans le vide de différentes hauteurs. En mesurant à chaque fois le temps t (en secondes) de la chute et la vitesse v (en mètres par seconde) de la bille en fin de chute, on obtient le tableau de données suivant.

t_i	0,20	0,28	0,35	0,40	0,45
v_i	2	2,7	3,2	4	4,5

a. Représenter le nuage de points associé à cette série.

b. Calculer les coordonnées du point moyen G.

c. Déterminer une équation de la forme $v = at + b$ de la droite de régression linéaire de v en t. Tracer cette droite.

d. Dans une chute libre, la vitesse et le temps sont liés par la relation : $v = gt$, où g désigne l'accélération de la pesanteur. Déduire des calculs précédents une valeur approchée de g.

31 Le tableau suivant donne l'évolution de 2005 à 2014 du pourcentage de population urbaine en Côte d'Ivoire.

On peut considérer qu'on a obtenu une série statistique à deux caractères X (rang de l'année dans la série) et Y (pourcentage de population urbaine).

Année	2005	2006	2007	2008	2009
X	1	2	3	4	5
Y (en %)	46,8	47,5	48,3	49,0	49,8
Année	2010	2011	2012	2013	2014
X	6	7	8	9	10
Y (en %)	50,6	51,3	52,0	52,8	53,5

a. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.

b. Le nuage de points laisse supposer qu'il existe une relation linéaire liant X et Y.

Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de régression linéaire de y en x.

c. En utilisant l'équation obtenue en **b.** donner une estimation du pourcentage de population urbaine en 2020 si la tendance observée se maintient.

32 Le tableau suivant donne l'évolution des dépenses de consommation des ménages, caractère Y, comptées en millions de dollars US, au Bénin de 2005 à 2014.

Le caractère X désigne le rang de l'année dans la série.

Année	2005	2006	2007	2008	2009
Rang : X	1	2	3	4	5
Cons. : Y	3,35	3,60	4,18	4,98	5,01
Année	2010	2011	2012	2013	2014
Rang : X	6	7	8	9	10
Cons. : Y	5,03	5,58	5,80	6,37	6,71

Source : Université de Sherbrooke.

a. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.

b. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de y en x.

c. En utilisant l'équation obtenue en **b.** donner une estimation des dépenses de consommation en 2016 et en 2020 si la tendance observée se maintient.

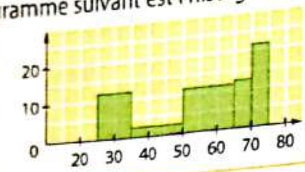
Vrai-Faux

Top chrono *(sans justification)*

33 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On a relevé les masses, en kg, des impalas d'un parc national.

Masse	[25 ; 35[	[35 ; 50[	[50 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[
Effectif	12	3	12	13	22

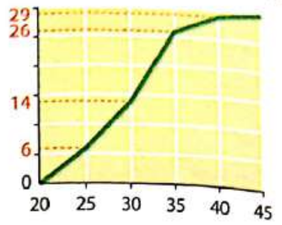
	vrai	faux
1. Le diagramme suivant est l'histogramme de la série.	☐	☐



	vrai	faux
2. La moyenne de cette série, arrondie à 10^{-1} est 58,9.	☐	☐
3. 47 % des impalas ont une masse inférieure ou égale à 65 kg.	☐	☐
4. Plus de 70 % des impalas ont une masse inférieure ou égale à 70 kg.	☐	☐
5. L'écart-type de cette série, arrondi à 10^{-1} est 16,2.	☐	☐

Avec justification

34 Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. On donne la courbe des effectifs cumulés croissants d'une série statistique.



	vrai	faux
1. La classe modale de la série est [35 ; 40 [.	☐	☐
2. La moyenne de cette série est égale à 30.	☐	☐
3. La médiane de la série est égale à la moyenne.	☐	☐
4. L'écart-type de cette série, arrondi à 10^{-1} est 5,1.	☐	☐

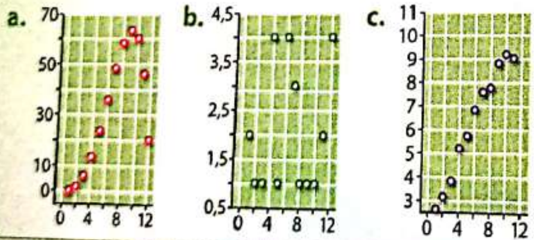
Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

QCM

Top chrono *(sans justification)*

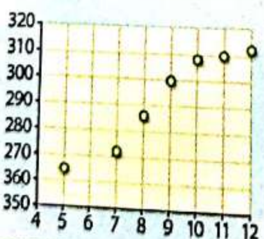
35 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Un ajustement linéaire est adapté à la série statistique à deux caractères associée au nuage de points suivants.



2. Le point moyen du nuage ci-contre est le point G de coordonnées.

a. $G(12 ; 290)$;
b. $G(8 ; 286)$;
c. $G(6 ; 300)$.



3. Pour le nuage de points ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 49{,}67 \quad \text{et} \quad V(X) = 6{,}67.$$

La droite de régression de y en x a pour équation :
a. $y = 7{,}4x - 227$; **b.** $y = 49{,}7x - 226$;
c. $y = 7{,}4x + 227$.

Avec justification

36 Pour chaque question, indiquer la réponse exacte parmi les trois propositions.
Voici une série statistique à deux caractères.

X	50	100	150	200	250	300
Y	2,8	2,5	2,2	2	1,6	1,5

1. Le point moyen du nuage de points de la série est le point :
a. $G(170 ; 2{,}5)$;
b. $G(165 ; 3{,}4)$;
c. $G(175 ; 2{,}1)$.

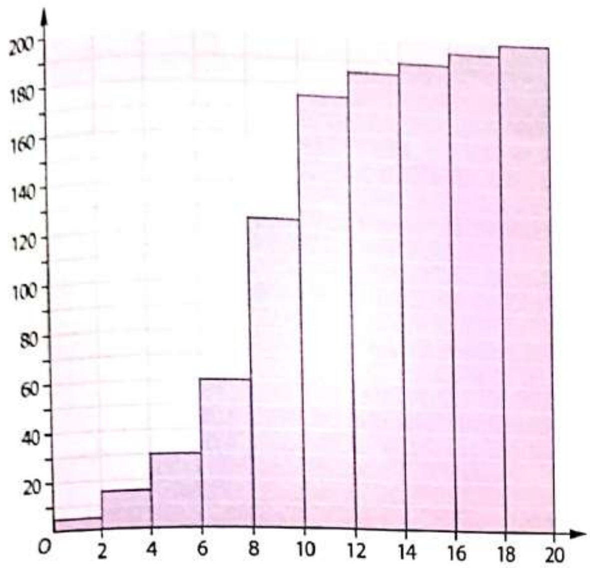
2. On a calculé $\mathrm{Cov}(X, Y) = -39{,}17$ et $\sigma(X) = 85{,}39$.
Une équation de la droite de régression linéaire de y en x est :
a. $y = -6{,}76 \times 10^{-3}x + 3{,}14$;
b. $y = -5{,}37 \times 10^{-3}x - 3{,}24$;
c. $y = -5{,}37 \times 10^{-3}x + 3{,}04$;

3. On peut estimer que pour $x = 500$, la valeur correspondante de y sera :
a. 0,36 ; **b.** 0,8 ; **c.** 1,1.

Les réponses à ces exercices sont indiquées en fin de manuel.

37 Exploiter un histogramme

On a relevé les notes de 200 candidats à un examen.
Le graphique suivant représente le diagramme des effectifs cumulés croissants en fonction des notes obtenues.



a. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant le graphique.

Note	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	...	[18 ; 20[
Effectif	...	...	...	...	...

b. Construire l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

c. Quel est le pourcentage de candidats ayant obtenu :
- une note supérieure ou égale à 10 ?
- une note entre 12 compris et 16 exclu ?

d. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

38 Population féminine au Sénégal

Les perspectives pour 2020 de la répartition par classes d'âge de la population féminine au Sénégal sont les suivantes.

Âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Effectif	2 194	1 825	1 404	1 059

Âge	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[
Effectif	715	486	278	124

Âge	[80 ; 90[	[90 ; 110[
Effectif	34	3

Source : Université de Sherbrooke.

Les effectifs sont donnés en milliers de personnes.

a. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

b. Déterminer la médiane.

c. Au vu des indicateurs, les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- En 2020, la moitié des femmes au Sénégal auront un âge inférieur à l'âge moyen de la population féminine.
- En 2020, environ un cinquième des femmes au Sénégal seront âgées d'au moins 50 ans.

39 Classes d'amplitudes différentes

On a relevé les données statistiques suivantes.

Classe	[28 ; 30[	[30 ; 32[	[32 ; 34[	[34 ; 36[	[36 ; 38[
Effectif	3	3	23	45	98

Classe	[38 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 46[	[46 ; 48[
Effectif	137	155	158	91	51

Classe	[48 ; 50[	[50 ; 52[	[52 ; 54[
Effectif	24	10	2

a. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

b. On effectue un nouveau regroupement par classes d'amplitude 4, [28 ; 32[, [32 ; 36[, …, [48 ; 52[et on garde la dernière classe [52 ; 54[.
Calculer la moyenne et l'écart-type de la nouvelle série.

c. Que peut-on conclure de la comparaison des valeurs trouvées en a. et en b. ?

40 Fréquences cumulées croissantes

Voici une série statistique.

Classe	[1 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 9[
Effectif	28	14	16	12	34

1. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.
2. Déterminer la médiane de la série.
3. Déterminer le pourcentage d'individus dont la modalité est :

a. inférieure à 3 ;

b. comprise entre 3 et 5,3 ;

c. supérieure à 5,3.

4. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série.

41 Ajustement non linéaire

On considère la série statistique à deux caractères présentée dans le tableau suivant.

X	4	20	1	10	9	5
Y	3,3	0,6	10,5	1,3	1,3	2,2

X	2	2	6	5	11	15
Y	5	8	1,8	2	1,2	0,9

a. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement linéaire ?

b. On pose $Z = \frac{1}{Y}$.

Représenter le nuage de points associé à la série statistique à deux caractères X et Z.

c. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de z en x.

d. Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_{XY} et r_{XZ}.
Peut-on confirmer la pertinence de l'étude conjointe des caractères X et Z ?

42 Contrôle de qualité

Dans une chaîne de production de matériel électronique, on a mesuré le temps mis par les ouvriers pour assembler un même produit.

On a obtenu les résultats suivants, rassemblés en classes.

Temps	[88 ; 92[	[92 ; 94[	[94 ; 96[
Effectif	6	27	87

Temps	[96 ; 98[	[98 ; 100[	[100 ; 102[
Effectif	168	216	168

Temps	[102 ; 104[	[104 ; 106[	[106 ; 108[
Effectif	84	37	7

Les temps sont exprimés en secondes.

a. Déterminer le temps moyen d'assemblage et l'écart-type.

b. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes.

c. À l'aide de la courbe déterminer graphiquement le pourcentage d'ouvriers réalisant le montage dans un temps compris dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma ; \overline{x}+\sigma]$.

d. On considère que la chaîne d'assemblage fonctionne correctement si au moins 68 % des ouvriers réalisent l'assemblage en un temps compris dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma ; \overline{x}+\sigma]$.

Est-ce le cas de cette chaîne d'assemblage ?

Aide

Pour un segment de droite de la courbe des effectifs cumulés croissants, d'extrémités $A_i(x_i ; n_i)$ et $A_{i+1}(x_{i+1} ; n_{i+1})$, on peut déterminer une équation de la droite (A_iA_{i+1}), de la forme :

$$n=\frac{n_{i+1}-n_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+n_i .$$

On peut utiliser cette équation pour déterminer les effectifs cumulés croissants correspondant aux valeurs $\overline{x}-\sigma$ et $\overline{x}+\sigma$ du caractère étudié. Avec des fréquences cumulées croissantes, il suffit de remplacer les n_i par des f_i.

43 Tests à 1, 2 ou 3 sigmas

Une coopérative de production de mangues emballe sa production dans des cartons de 6 kg destinés à l'exportation.

Elle procède à une vérification de la masse de ses emballages, et fait procéder au test de 800 cartons.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Masse (en kg)	[5,2 ; 5,3[	[5,3 ; 5,4[	[5,4 ; 5,5[	[5,5 ; 5,6[
Effectif	1	2	8	16

Masse (en kg)	[5,6 ; 5,7[	[5,7 ; 5,8[	[5,8 ; 5,9[	[5,9 ; 6,0[
Effectif	48	81	123	140

Masse (en kg)	[6,0 ; 6,1[	[6,1 ; 6,2[	[6,2 ; 6,3[	[6,3 ; 6,4[
Effectif	126	109	72	40

Masse (en kg)	[6,4 ; 6,5[	[6,5 ; 6,6[	[6,6 ; 6,7[	[6,7 ; 6,8[
Effectif	25	7	1	1

a. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

b. Les exigences de qualité sont les suivantes :

- la moyenne $\overline{x}$ doit vérifier $5{,}94 \leqslant \overline{x} \leqslant 6{,}06$;
- l'écart-type σ appartient à $[0{,}22 ; 0{,}24]$;
- 68 % au moins des cartons ont une masse dans l'intervalle : $[\overline{x}-\sigma ; \overline{x}+\sigma]$;
- 95 % au moins des cartons ont une masse dans l'intervalle : $[\overline{x}-2\sigma ; \overline{x}+2\sigma]$;
- 99 % au moins des cartons ont une masse dans l'intervalle : $[\overline{x}-3\sigma ; \overline{x}+3\sigma]$.

Les exigences de qualité sont-elles satisfaites ?

44 Interpolation et prévisions

Le tableau suivant donne l'évolution au Cameroun de 2004 à 2013 du nombre d'utilisateurs d'internet (caractère Y) et du nombre d'abonnés à internet ayant un accès haute vitesse (caractère Z).

On note X le rang de l'année dans la série statistique.

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Rang : X	1	2	3	4	5
Y (en %)	0,98	1,4	2,03	2,93	3,4
Z	0	202	421	640	860

Année	2009	2010	2011	2012	2013
Rang : X	6	7	8	9	10
Y (en %)	3,84	4,3	5	5,7	6,4
Z	900	5 954	10 713	13 846	16 900

Le caractère Y est donné en pourcentage de la population.

Source : Université de Sherbrooke.

1. Sur deux figures différentes, représenter le nuage de points donnant le caractère Y en fonction de l'année, et celui donnant le caractère Z en fonction de l'année.

2. a. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de y en x.

b. En déduire une estimation prévisionnelle du nombre d'utilisateurs d'internet en 2020.

3. a. Le nuage de points $(x_i ; z_i)$ semble suggérer une augmentation forte des abonnés ayant accès à internet haute vitesse à partir de 2009.

Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de z en x pour les données correspondant aux années 2009 à 2013.

b. En déduire une estimation prévisionnelle du nombre d'abonnés ayant un accès internet haute vitesse en 2020.

4. a. Construire le nuage de points donnant le caractère Z en fonction du caractère Y, pour les années 2009 à 2013.

b. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de z en y.

c. Estimer le nombre d'abonnés ayant un accès internet haute vitesse lorsque 10 % de la population utilisera internet.

5. a. Calculer les coefficients de corrélation linéaire associés aux trois séries à deux caractères r_{XY}, r_{XZ} et r_{YZ}.

b. Que peut-on en déduire pour la pertinence des réponses données aux questions **2. b.**, **3. b.** et **4. c.** ?

Chapitre 1

Barycentre de points pondérés

53 1. **Faux** ; 2. **Vrai** ; 3. **Faux** ; 4. **Vrai** ; 5. **Vrai**.

54 1. **Faux**. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC}$.

D'après la relation de Chasles :

$3\overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow G = \text{bary}\,\{(A, 2), (C, 1)\}$.

2. **Vrai**. • F est le milieu de $[BC]$ donc $F = \text{bary}\,\{(B, 1), (C, 1)\}$.
• Ainsi, d'après le barycentre partiel,
$E = \text{bary}\,\{(A, 2), \underbrace{(B, 1), (C, 1)}\}$

$E = \text{bary}\,\{(A, 1), \quad (F, 2)\}$
et E est le milieu de $[AF]$.

3. **Faux**. $3\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{GE}$, d'après la relation de Chasles
$3\overrightarrow{RE} - (\overrightarrow{GR} + \overrightarrow{RE}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} - \overrightarrow{GR} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow R = \text{bary}\,\{(E, 2), (G, 1)\}$

4. **Vrai**. $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{FT}$
D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{EF} - 2(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ET}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{ET} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow E = \text{bary}\,\{(F, 3), (T, -2)\}$.

5. **Vrai**. Dans ce cas $a = b = 1$ et $k = 10$. On note G le milieu de $[LK]$.
On pose $\alpha = \dfrac{k - GK^2 - GL^2}{1+1}$,
soit $\alpha = \dfrac{10 - 1^2 - 1^2}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
Comme $\alpha > 0$, l'ensemble des points M du plan tels que $MK^2 + ML^2 = 10$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

55 1. c. ; 2. b. ; 3. a. ; 4. a.

56 1. b. • D'après le barycentre partiel, on a :
$G = \text{bary}\,\{(A, -5), (B, 5), (C, 3)\}$.
$G = \text{bary}\,\{(A, -5), (H, 5 + 3)\}$.
$G = \text{bary}\,\{(A, -5), (H, 8)\}$.
car $H = \text{bary}\,\{(B, 5), (C, 3)\}$.
• Ainsi, $G = \text{bary}\,\left\{(A, 1), \left(H, -\frac{8}{5}\right)\right\}$
par multiplication par $k = -\frac{1}{5}$ (homogénéité du barycentre).

2. c. On observe que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
D'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow G = \text{bary}\,\{(C, 3), (D, -1)\}$.

3. b. • F étant le milieu de $[DC]$, $F = \text{bary}\,\{(D, 3), (C, 3)\}$.
• Ainsi, par la propriété du barycentre partiel :
$H = \text{bary}\,\{(E, 5), \quad (F, 6)\}$.
$H = \text{bary}\,\{(E, 5), \overbrace{(D, 3), (C, 3)}\}$.

4. a. On cherche un nombre réel α
tel que $1 + (-1) + \alpha \neq 0$
et $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \alpha\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Or, comme $ABCD$ est un rectangle, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.
Ainsi, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ et $\alpha = 1$.

Chapitre 2

Trigonométrie

68 1. **Vrai** ; 2. **Vrai** ; 3. **Faux** ; 4. **Vrai** ; 5. **Vrai** ; 6. **Faux**.

69 1. **Vrai**. Les points sont alignés et A est entre B et C.

2. **Faux**. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)$
$= \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

3. **Vrai**. L'ensemble solution est $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. **Faux**. L'ensemble solution est $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

70 1. b. ; 2. b. ; 3. c. ; 4. c. ; 5. b.

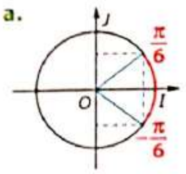
71 1. c. En effet, le triangle ABC est rectangle isocèle et $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est de sens indirect.

2. b. $\frac{7\pi}{5} = \pi + \frac{2\pi}{5}$. Ainsi, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) = +\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. b. $X = \sin(x)$. L'équation s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$.
Elle a deux solutions -2 et 1.
Ainsi on a $\sin(x) = -2$ qui est impossible ou $\sin(x) = 1$.

4. c. Le maximum de la fonction cosinus étant égal à 1, l'équation donnée implique que $\cos(x) = 1$ et $\cos(3x) = 1$.
Donc, l'ensemble solution est :
$S = \{0 + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

5. a.



Chapitre 3

Géométrie analytique du plan

64 1. **Faux** ; 2. **Vrai** ; 3. **Vrai** ; 4. **Vrai** ; 5. **Vrai** ; 6. **Faux**.

65 1. **Faux**. (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;-3)$
$\overrightarrow{AO}\,(2\,;-1)$
$\overrightarrow{AO}\cdot\vec{u} = 2\times 1 + (-3)\times(-1) = 5 \neq 0$.
$\overrightarrow{AO}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux.

2. **Faux**. Rayon de $(\mathscr{C})$: $R = \Omega A = \sqrt{(4+2)^2 + (3-1)^2}$
$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$\Omega B = \sqrt{(-3-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$ donc $\Omega B \neq R$.

3. **Faux**. Le centre est $\Omega(4\,;3)$.
Représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$: $\begin{cases} x = 4 + \sqrt{40}\cos(t) \\ y = 3 + \sqrt{40}\sin(t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4. **Vrai**. Un point de (d) est $A(-2\,;1)$.
Soit $M(x\,;y)$, $M \in (d) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$
$\Leftrightarrow -3(x+2) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow -3x - y - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y + 5 = 0$.
Une équation normale de (d) est $\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y + \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$.

5. **Vrai**. $\overrightarrow{B\Omega}(7\,;-1)$ donc $\vec{v}\left(1\,;-\frac{1}{7}\right)$ est un vecteur directeur de $(B\Omega)$.
Si on pose $E(-10\,;5)$ alors $\overrightarrow{BE}\,(-7\,;1)$ et $\det(\overrightarrow{BE}, \vec{v}) = -\frac{1}{7}\times(-7) - 1 = 0$.
$\overrightarrow{BE}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. E appartient à $(B\Omega)$.
Donc cette représentation paramétrique est celle de $(B\Omega)$.

66 1. b. ; 2. c. ; 3. a. ; 4. b. ; 5. b.

67 1. c. Le centre de $(\mathscr{C})$ est Ω milieu de $[AB]$, donc $\Omega(2\,;-6)$.
Le rayon de $(\mathscr{C})$ est $R=\frac{1}{2}AB$
$AB=\sqrt{(5+1)^2+(-10+2)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ donc $R=5$.
2. c. La tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en I a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega I}\ (-4\,;-3)$.
$M(x\,;y)\in(T)$, $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{\Omega I}=0 \Leftrightarrow -4(x+2)-3(y+9)=0$
$\Leftrightarrow -4x-3y-35=0$
$\Leftrightarrow 4x+3y+35=0$.
3. b. $d(J,(d))=\dfrac{|4\times2+3\times3+35|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{8+9+35}{5}=\dfrac{52}{5}$, donc
$d(J,(d))=10{,}4$.

Chapitre 4

Transformations du plan

59 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Vrai ; 7. Vrai.

60 1. Faux. Il faudrait que l'angle mesure $-\frac{2\pi}{3}$.
2. Vrai. Si h désigne l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$,
$h(B)=A'$ et $h(A)=B'$. Ainsi $h([AB])=[A'B']$ et donc $A'B'=\frac{1}{2}AB$.
3. Vrai. Leurs trois angles sont respectivement de même mesure.
4. Vrai. $\text{mes}(\widehat{A'GB'})=\text{mes}(\widehat{B'GC'})=\text{mes}(\widehat{C'GA'})=\frac{2\pi}{3}$.
5. Vrai. Leurs trois côtés sont respectivement égaux.

61 1. a. ; 2. c. ; 3. a. ; 4. b. ; 5. c.

62 1. a. Les triangles ont deux angles de même mesure.
2. b. $BC=\sqrt{34}$. Donc $\dfrac{JC}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{34}}\approx0{,}34$.
3. c. Les triangles sont semblables. Il existe donc une similitude qui les échange. Or, une similitude conserve les milieux. Comme l'image de $[IC]$ est $[BC]$, l'image du milieu de $[IC]$ est le milieu de $[BC]$.
4. b. $\dfrac{BC}{JC}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Chapitre 5

Droites et plans de l'espace

37 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Faux ; 7. Vrai.

38 1. Vrai. $(SH)\perp(ABC)$ donc la droite (SH) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) donc en particulier à la droite (HA).
2. Faux. $(SH)\perp(ABC)$ donc $(SH)\perp(BC)$.
3. Vrai. Le plan (SHA) contient la droite (SH) orthogonale au plan (ABC).
4. Faux. Les droites (AD) et (BC) sont sécantes en un point I du plan (ABC). Donc la droite d'intersection des plans (SAD) et (SBC) est la droite (SI), qui n'est pas parallèle à (ABC).

39 1. a. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. b. ; 5. c.

40 1. c. Les points O et A sont communs aux deux plans.
2. a. Le plan (SOA) contient la droite (SO) orthogonale au plan (ABC).
3. a. Le plan (SBD) contient la droite (BD) orthogonale aux deux droites (AC) et (SO) du plan (SAC).
4. c. $(SO)\perp(ABC)$ donc la droite (SO) est orthogonale à toute droite du plan (ABC) donc en particulier à la droite (CD).

Chapitre 6

Vecteurs et produit scalaire dans l'espace

65 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux ; 5. Faux.

66 1. Faux. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}=a^2$.
2. Vrai. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AG})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$.
3. Vrai. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DE}=0$.
4. Faux. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})\cdot\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}=0+0=0$.
Ainsi $(AG)\perp(HF)$.
$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DH}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}^2+0=a^2\neq0$.
Ainsi (AG) n'est pas perpendiculaire à (DH) et donc (AG) n'est pas perpendiculaire à (DHF).
5. Faux. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BD}=(a\sqrt2)^2=2a^2$.
Or $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH}=BD\times BH\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})$
$\Leftrightarrow 2a^2=\sqrt2a\times\sqrt{a^2+(\sqrt2a)^2}\times\cos(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})$
$\Leftrightarrow \dfrac{2a^2}{\sqrt2a\sqrt3a}=\cos(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt2}{\sqrt3}=\cos(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})$.
Ainsi, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BH}})=\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
6. Faux. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DB})$
$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{DB}$
$=0+0+(-a^2)+0=-a^2$.

67 1. b. ; 2. a. ; 3. a. ; 4. b. ; 5. c.

68 1. b. $\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-3\,;-2\,;2)$ sont non colinéaires et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6-2+2=-6$. Donc (AB) et (AC) sont sécantes.
2. c. $\overrightarrow{AD}(7\,;2\,;0)$ donc $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}(0\,;0\,;0)$.
3. b. D'après 2., $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec0$ donc il existe des réels non tous nuls tels que $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\vec0$.
Ainsi, les points sont coplanaires.
4. b. On résout $\begin{cases}2x-3y-2z=0\\0x+0y+0z=0\\1x+2y+9z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y-2z=0\\x+2y+9z=0\end{cases}$
Avec, $z=1$, $\begin{cases}2x-3y=2\\x+2y=-9\end{cases}$ on obtient $x=-\frac{23}{7}$ et $y=-\frac{20}{7}$.
Les quatre points sont coplanaires (comme au 3.).
5. a. $I\left(1\,;1\,;-\frac12\right)$, $J(0\,;1\,;4)$ et $K(-1{,}5\,;0\,;2{,}5)$.
$\overrightarrow{BC}(-5\,;-2\,;1)$ donc $\overrightarrow{BF}\left(-\frac{10}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ et donc $F\left(-\frac43;-\frac13\right)$.
Ainsi $\overrightarrow{FK}\left(-\frac16;\frac26;\frac{11}{6}\right)$ et $\overrightarrow{FD}\left(\frac{25}{3};\frac{10}{3};-\frac53\right)$, donc $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FD}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{FD}=-\frac{25}{18}+\frac{20}{18}-\frac{55}{18}=-\frac{60}{18}$ donc ces vecteurs ne sont pas orthogonaux.

Chapitre 7

Géométrie analytique de l'espace

47 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux.

48 1. **Faux.** $1+2-(-1)-1=3$. Or $3 \neq 0$, donc l'équation $x+y-z-1=0$ n'est pas celle du plan (ABC) puisque les coordonnées de A ne vérifient pas cette équation.
2. **Faux.** Le plan d'équation $x-2y+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}(1\,;-2\,;0)$ ou tout autre vecteur colinéaire à $\vec{n'}$.
3. **Faux.** $-1=1+2t \Leftrightarrow -2=2t \Leftrightarrow -1=t$.
Et si $t=-1$, alors $y=3$ et $z=3$. Or $y_M=3$ et $z_M=2$ donc $M \notin (\mathscr{D})$.
4. **Faux.** $x^2+x+y^2+y+z^2+z+1=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

5. **Vrai.** Cette sphère a pour équation $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=5$, soit $x^2-2x+1+y^2+z^2+4z+4=5$, donc $x^2+y^2+z^2-2x+4z=0$.
6. **Faux.** $\overrightarrow{BB'}(2\,;-5\,;5)$ et $\vec{n}(-1\,;3\,;-1)$.
$x_{\overrightarrow{BB'}}=-2\times x_{\vec{n}}$ mais $y_{\overrightarrow{BB'}}=-2\times y_{\vec{n}}$ donc $\overrightarrow{BB'}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires et donc (BB') n'est pas orthogonal au plan d'équation donnée.

49 1. c. ; 2. a. ; 3. b.

50 1. b. $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ donc $\vec{n}(1\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ mais aussi directeur de $(\mathscr{D})$. Or seul le vecteur directeur de la droite proposée en réponse **b.** est colinéaire à $\vec{n}$.

2. c. $d(A\,;(\mathscr{P}))=\dfrac{|1+(-2)-3\times0+4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}.$

3. c. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=3^2$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2=9$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y=4.$

Chapitre 8

Équations, inéquations, systèmes

66 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ;
5. Vrai ; 6. Faux ; 7. Vrai.

67 1. **Vrai.** $\Delta=1$. Deux solutions : $x_1=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+1}{4}=1$.
2. **Faux.** $2x^2-3x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$.
3. **Faux.** $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$.
4. **Vrai.** Trinôme du signe de $-a=-1$ à l'intérieur des racines.
5. **Vrai.** $D=\begin{vmatrix}13 & 7\\ 5 & 1\end{vmatrix}=13\times1-5\times7=-22$.
6. **Faux.** La solution est le couple : $(-2\,;3)$.

68 1. b. ; 2. b. ; 3. b ; 4. a. ; 5. c. ; 6. b.

69 1. c. car $1^3-6\times1^2+11\times1-6=0$.
2. a. car $(x-1)(x^2-5x+6)=x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6$
$=x^3-6x^2+11x-6$.
3. b. car x^2-5x+6 a deux racines 2 et 3.
4. b. Trinôme du signe $-a=-1$ à l'intérieur des racines.
5. c. car le trinôme x^2-5x+6 change de signe en 2.
6. a. car $P(x)<11x-6 \Leftrightarrow x^3-6x^2<0 \Leftrightarrow x^2(x-6)<0$.

Chapitre 9

Généralités sur les applications

61 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Faux ; 5. Vrai ; 6. Faux.

62 1. **Vrai.** En effet, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x)=x^2 \geq 0$.
2. **Faux.** En effet, $-5 \leq h(x) \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq x^2 \leq 4$
$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -16 \leq x \leq 16.$
3. **Faux.** En effet, pour $-1 \in \mathbb{R}$ n'admet aucun antécédent pour h, donc h n'est pas une surjection, donc n'est pas une bijection de $[h\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
4. **Faux.** En effet, $\mathscr{D}_{\frac{h}{g}}=\mathscr{D}_h \cap \mathscr{D}_g \setminus \{x \in \mathscr{D}_g \,/\, g(x)=0\}$
donc $\mathscr{D}_{\frac{h}{g}}=[0\,;+\infty[\setminus\{3\}$.
5. **Faux.** En effet, $f\circ h\circ g(x)=(x-3)^2+2$. Donc c'est une translation de vecteur $\vec{u}(3\,;2)$.

63 1. a. ; 2. b. ; 3. b. ; 4. b.

64 1. b. En effet, u n'est pas injective car, par exemple au chiffre des unités 2, correspond une infinité de nombres entiers naturels $(2\,;12\,;22\,;\ldots)$. 2 a donc plus d'un antécédent par u. u est surjective car à tout chiffre des unités correspondent au moins (et même une infinité) de nombres entiers naturels ayant ce chiffre pour unité.
2. b. En effet, $-1 \leq x < 8 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 < 9 \Leftrightarrow$
$0 \leq \sqrt{x+1} < 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2+\sqrt{x+1} < 5 \Leftrightarrow 2 \leq f(x) < 5 \Leftrightarrow f(x) \in [2\,;5[$.
3. c. En effet, si on pose $g: x \mapsto \sqrt{x}$, alors $f(x)=g(x-(-1))+2$
4. b. En effet, pour tout x de $[-1\,;+\infty[$,
$h\circ i\circ g(x)=h\circ i(x+1)=h\left(\sqrt{x+1}\right)=\sqrt{x+1}+2$.

Chapitre 10

Limites et continuité

51 1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Faux.

52 1. **Faux.** Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\frac{3x-4}{x-5}=\frac{3x\left[1-\dfrac{4}{3x}\right]}{x\left[1-\dfrac{5}{x}\right]}=3\times\frac{1-\dfrac{4}{3x}}{1-\dfrac{5}{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{3x}}{1-\dfrac{5}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-4}{x-5}=3$.

2. **Vrai.** Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $0 \leq \left|\dfrac{3\sin(x)}{x^2+3}\right| \leq \dfrac{3}{x^2+3} \leq \dfrac{3}{x^2}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$, par le théorème des gendarmes,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{3\sin(x)}{x^2+3}\right|=0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin(x)}{x^2+3}=0$.

3. **Vrai** • $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+2)=1+2=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)=0^+\end{array}\right\}$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$.

• De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}3x=3$, donc par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(3x+\dfrac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$.

4. **Faux.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=2=f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=3\neq f(1)$.

Donc f n'est pas continue en 1, donc f n'est pas continue sur $[1;3]$.

5. **Faux.** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-1) = 3-1 = 2 \neq g(3)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (6-x) = 6-3 = 3 = g(3)$

Donc f n'est pas continue en 3. Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

53 1. a. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. c.

54 1. a. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\frac{5x+1}{x^2+1} = \frac{5x\times\left[1+\frac{1}{5x}\right]}{x^2\times\left[1+\frac{1}{x^2}\right]} = \frac{5}{x}\times\frac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{5x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 0$,

par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{x^2+1} = 0$. • Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

2. b. Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\frac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = \frac{-x^3\times\left[\frac{4}{-x}+\frac{5}{-x^3}+1\right]}{3x^3\times\left[\frac{1}{3x}+1+\frac{4}{3x^3}\right]} = \frac{-1}{3}\times\frac{1+\frac{5}{-x^3}+\frac{4}{-x}}{1+\frac{4}{3x^3}+\frac{1}{3x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+5-x^3}{x^2+3x^3+4} = -\frac{1}{3}$.

3. c. • $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = h\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} h(x) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} h(x)$. Donc h est continue en $\frac{\pi}{4}$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = 1 = h(0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{2}{\pi}x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\times 0} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) \neq h(0)$ et h n'est pas continue en 0, donc h n'est par continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x\in[1;+\infty[$, $h(x) = \sin(x)$.
h est donc continue sur $[1;+\infty[$.

Chapitre 11

Dérivée d'une fonction

71 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Faux ; 6. Vrai ; 7. Faux.

72 1. **Vrai.** car $f'(x) > 0$. 2. **Faux.** car $f'(x) > 0$.
3. **Vrai.** car $f'(3) = 2$. 4. **Faux.** car $f'(x) > 0$ et donc le coefficient directeur de la tangente ne peut être égal à -1.
5. **Vrai.** car $f'(x)$ s'annule en 1 et change de signe autour de 1.
6. **Faux.** car $f(0) > f(3)$.

73 1. a. ; 2. c. ; 3. b. ; 4. a. ; 5. c.

74 1. c. $f'(x) = 2(3x-4)+3(2x-5) = 12x-23$.

2. a. $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

3. a. $f'(x) = 2x$.

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗

4. b. $f'(x) = 2(1+x)$; $f'(x) \approx 2(x-0)+1 \approx 2x+1$.

5. a. $f'(x) \approx 3x^2-2x-1$. f est croissante sur $]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	

Chapitre 12

Étude de fonctions usuelles

68 1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. Vrai ; 6. Vrai.

69 1. **Faux.** En effet, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f n'est pas centré en zéro.

2. **Vrai.** En effet, pour tout $x\neq-2$, $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ donc $f'(x) > 0$.
f est donc croissante sur $]-\infty;-2[$.

3. **Vrai.** En effet, pour tout $x\neq 2$,

$$3-\frac{5}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2}-\frac{5}{x+2} = \frac{3x+6-5}{x+2} = \frac{3x+1}{x+2} = f(x).$$

4. **Faux.** En effet, $f(2) = \frac{3\times2+1}{2+2} = \frac{7}{4}$ et $f'(2) = \frac{5}{(2+2)^2} = \frac{5}{16}$.

Ainsi, la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2 a pour équation

$$y = \frac{5}{16}(x-2)+\frac{7}{4} \text{ soit } y = \frac{5}{16}x+\frac{19}{8}.$$

5. **Vrai.** En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $-2+h\in\mathcal{D}_f$,
on a $-2+h<-2$ ou $-2+h>-2$ donc $h<0$ ou $h>0$,
donc $-2-h>-2$ ou $-2-h<-2$, $-2-h$ donc $h\in\mathcal{D}_f$

et $f(-2-h) = \frac{3(-2-h)+1}{-2-h+2} = \frac{-5-3h}{-h} = \frac{5+3h}{h}$

$f(-2+h) = \frac{3(-2+h)+1}{-2+h+2} = \frac{-5+3h}{h}$.

Donc $\frac{f(-2-h)+f(-2+h)}{2} = \frac{\frac{5+3h}{h}+\frac{-5+3h}{h}}{2} = 3$.

6. **Vrai.** En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}} f(x) = -\infty$,
donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

70 1. c. ; 2. b. ; 3. c ; 4. a ; 5. a.

71 1. a. En effet, on observe sur le graphique que $A(0;-3)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = -3$.
Cette condition ne convient que pour la réponse **a.**

2. a. En effet, $\mathbb{R}$ est centré en zéro et, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -1-2\cos(2x)$ (car $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$).

Ainsi, $f(x) = -1-2\cos(2(-x)) = -1-2\cos(-2x)$
donc $f(-x) = -1-2\cos(2x) = f(x)$.

3. c. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4}+h \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\pi}{4}-h \in \mathbb{R}$

et $f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)=-1+2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-\frac{\pi}{2}\right)=-1-2\sin(2h)$

et $f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=-1+2\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{\pi}{2}\right)=-1+2\sin(2h)$.

Donc, $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{2}=-1$.

Chapitre 13

Suites numériques

65 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Faux ; **7.** Faux ; **8.** Vrai.

66 **1. Faux.** $u_0=\frac{2\times 0+7}{0+2}=\frac{7}{2}$ et $u_1=\frac{2\times 1+7}{1+2}=\frac{9}{3}=3$ donc $u_1<u_0$.

2. Vrai. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

3. Vrai. $w_n=\dfrac{\frac{2n+7}{n+2}+1}{\frac{2n+7}{n+2}-2}=\dfrac{\frac{2n+7}{n+2}+\frac{n+2}{n+2}}{\frac{2n+7}{n+2}-\frac{2n+4}{n+2}}=\dfrac{\frac{3n+9}{n+2}}{\frac{3}{n+2}}=\frac{3n+9}{n+2}\times\frac{n+2}{3}=\frac{3n+9}{3}=n+3$

$w_{n+1}-w_n=[(n+1)+3]-(n+3)=1$ donc (w_n) est une suite arithmétique.

4. Vrai. Voir la réponse à la question **3.**

5. Faux. $v_1=f(v_0)=f(3)=\frac{2\times 3+7}{3+2}=\frac{13}{5}$ et $v_0=3$ donc $v_1<v_0$.

6. Faux. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+3)=+\infty$.

67 **1. a.** ; **2. c.** ; **3. b.** ; **4. a.** ; **5. c.**

68 **1. a.** En effet, $u_{n+1}-u_n=\frac{-2}{(n+1)^2+2}-\frac{-2}{n^2+2}$

$=\frac{-2}{n^2+2n+3}+\frac{2}{n^2+2}=\frac{-2(n^2+2)+2(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}=\frac{4n+2}{(n^2+2n+3)(n^2+2)}$.

Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $n\geqslant 0$, par conséquent $n^2+2n+3>0$, $n^2+2>0$ et $u_{4n+2}>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$.

2. a. En effet, pout tout n de $\mathbb{N}$, on a $(-1)^n\geqslant -1$ donc $n+(-1)^n\geqslant n-1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n=+\infty$.

3. a. En effet, $S_n=u_0\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=5\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=3\times 5\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$=15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ (car $-1<\frac{2}{3}<1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=15$.

4. c. En effet, pout tout n de $\mathbb{N}$, $-1\leqslant \sin n\leqslant 1$
donc $2-1\leqslant 2+\sin n\leqslant 2+1$, donc $0<1\leqslant 2+\sin n\leqslant 3$,

par conséquent $\frac{1}{1}\geqslant\frac{1}{2+\sin n}\geqslant\frac{1}{3}$, $1\geqslant\frac{1}{2+\sin n}\geqslant\frac{1}{3}$

donc $3\times 1\geqslant 3\times\frac{1}{2+\sin n}\geqslant 3\times\frac{1}{3}$ c'est-à-dire $1\leqslant u_n\leqslant 3$.

Chapitre 14

Dénombrement

50 **1.** Faux ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Vrai ; **6.** Vrai.

51 Tous les choix s'effectuent sans répétitions (on ne prend pas plusieurs fois le même élève) et sans tenir compte de l'ordre. On dénombre donc les combinaisons.

1. Vrai. En effet, il y a C_{32}^6, c'est-à-dire 906 192 équipes possibles.

2. Faux. En effet, card $(F^6)=15^6=11\,390\,625$ et en choisissant 6 élèves parmi les filles, on peut constituer C_{15}^6, c'est-à-dire 5 005 équipes différentes de filles. Or, card $(F^6)\neq C_{15}^6$.

3. Vrai. En effet, le nombre de garçons est 17 (32 – 15). Il y a donc C_{17}^6, c'est-à-dire 12 376 équipes différentes de garçons.

4. Vrai. En effet, on choisit successivement 3 filles parmi 15 filles et 3 garçons parmi 17 garçons. Il y a donc $C_{15}^3\times C_{17}^3$, c'est-à-dire 309 400 équipes différentes comptant autant de filles que de garçons.

52 **1. c.** ; **2. a.** ; **3. b.** ; **4. a.**

53 **1. a.** En effet, on dénombre des p-listes.

5 choix	5 choix	5 choix	5 choix	5 choix
1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre	4e chiffre	5e chiffre

$\to$ le nombre total de choix : 5^5.

2. b. En effet, en dénombrant des permutations.

5 choix	4 choix	3 choix	2 choix	1 choix
1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre	4e chiffre	5e chiffre

$\to$ le nombre total de choix : $5\times 4\times 3\times 2\times 1=5\,!$

3. b. En effet, on dénombre des arrangements.

8 choix	7 choix	6 choix	5 choix	4 choix
1er chiffre	2e chiffre	3e chiffre	4e chiffre	5e chiffre

$\to$ le nombre total de choix : $8\times 7\times 6\times 5=A_8^5$.

4. a. En effet, on dénombre des combinaisons de 3 fruits choisis parmi 8 fruits. Il y a C_8^3, c'est-à-dire 56 choix possibles.

Chapitre 15

Statistiques

33 **1.** Vrai ; **2.** Vrai ; **3.** Faux ; **4.** Faux ; **5.** Faux.

34 **1. Faux.** On a la répartition en classes suivante :

Classe	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[
Effectif	6	8	12	3	1

La classe modale est la classe [30 ; 35[.

2. Vrai. $\bar{x}=\frac{6\times 22{,}5+8\times 27{,}5+12\times 32{,}5+3\times 37{,}5+1\times 42{,}5}{6+8+12+3+1}=30$.

3. Faux. 30 = 15 + 15. 6 + 8 = 14. La classe médiane est la classe [30 ; 35[. Donc la valeur médiane est strictement supérieure à 30.

4. Vrai. $V=\frac{6\times 22{,}5^2+8\times 27{,}5^2+12\times 32{,}5^2+3\times 37{,}5^2+1\times 42{,}5^2}{30}-30^2=26{,}25$.

$\sigma=\sqrt{26{,}25}=5{,}12=5{,}1$.

35 **1. c.** ; **2. b.** ; **3. c.**

36 **1. c.** $\bar{x}=\frac{50+100+150+200+250+300}{6}=175$

$\bar{y}=\frac{2{,}8+2{,}5+2{,}2+2+1{,}6+1{,}5}{6}=2{,}1$.

2. c. $a=\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma^2(X)}=\frac{-39{,}17}{85{,}39^2}$. $a=-5{,}37\times 10^{-3}$.

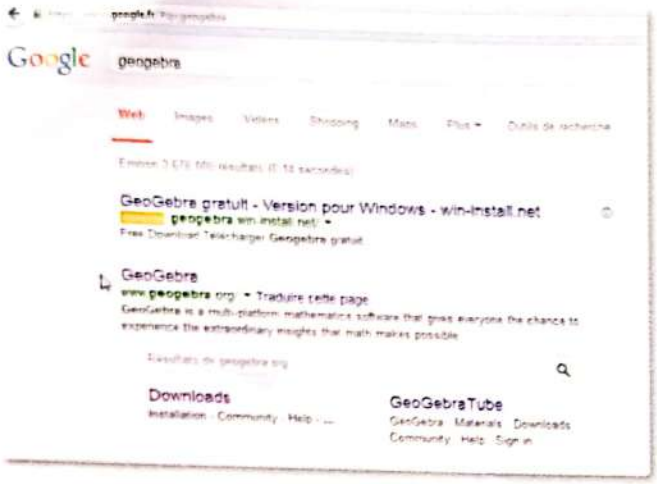
$b=\bar{y}-a\bar{x}=3{,}04$.

3. a. Pour $x=500$, on calcule :
$y=-5{,}37\times 10^{-3}\times 500+3{,}04=0{,}355=0{,}36$.

Installation de GeoGebra

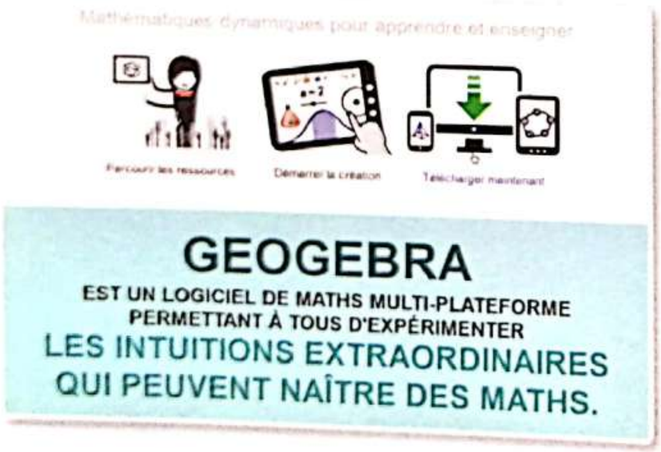
GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique téléchargeable gratuitement, qui peut être installé sur n'importe quel ordinateur, ordinateur portable, tablette...

1 • Dans un moteur de recherche de type Google, Yahoo..., taper GeoGebra dans la barre de menu.

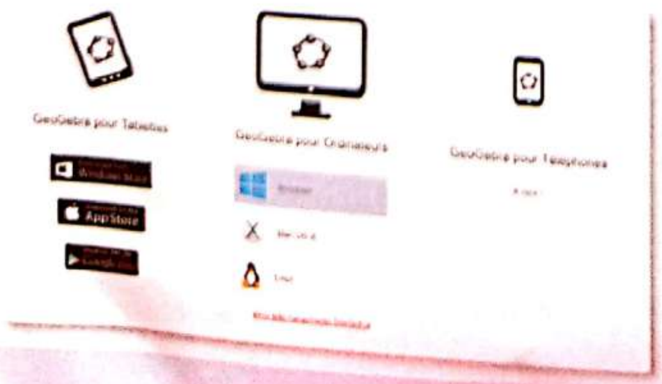


• Cliquer sur le lien GeoGebra.

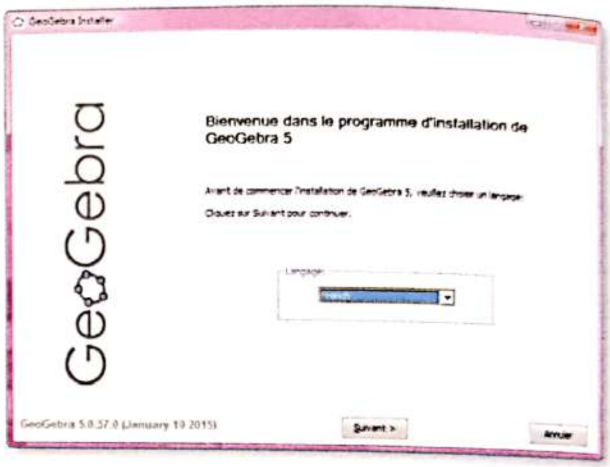
2 Dans la fenêtre qui s'ouvre, cliquer sur : Télécharger maintenant.



3 Choisir le support (tablette, ordinateur ou téléphone) et le système d'exploitation de l'appareil (pour les ordinateurs : Windows, Mac ou Linux).

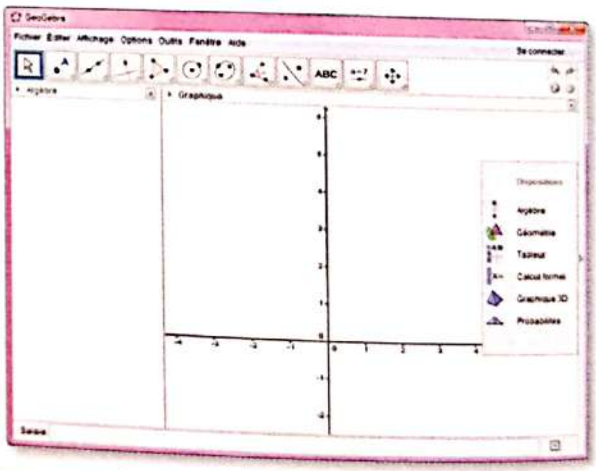


4 • Sur la fenêtre qui apparaît, cliquer sur : Enregistrer le fichier.
• Lancer l'exécution.



• Suivre les instructions d'installation standard.

5 Une fenêtre GeoGebra s'ouvre à la fin de l'installation.



Des menus s'affichent à droite de la fenêtre.
Ils désignent les différentes capacités du logiciel.

6 • L'icône apparaît désormais sur le bureau de l'ordinateur. Double-cliquer sur cette icône pour ouvrir une fenêtre GeoGebra.

• En haut d'une fenêtre GeoGebra, cliquer sur Fichier :
– pour enregistrer un travail (Sauvegarder sous) ;
– pour imprimer un travail (Aperçu avant impression) ;
– ouvrir un ancien document (Ouvrir).