Polynômes, Equations et Systèmes d'équations

Exercice n°1

Soit la fonction polynôme P définie par : $P(x) = ab(a-c)x^3 + (a^3 - a^2c + 2ab^2 - b^2c + abc)x^2 + (2a^2b + b^2c + a^2c + b^3 - abc)x + ab(b+c)$

où $(a, b, et\ c) \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que $P(x)$ est divisible par : $Q(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$.

En déduire que $P(x_0)$ pour $x_0 = (a+b+1)^n, n \in \mathbb{N}$ est divisible par $(a+b)^3$.

Exercice n°2

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la fonction polynôme : $x \longrightarrow (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par la fonction polynôme $x \longrightarrow (x-1)(x+1)$.
2. Montrer que la fonction polynôme $x \longrightarrow (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par la fonction polynôme : $x \longrightarrow x(x+1)(2x+1)$.

Exercice n°3

Soit $P(x)$ est une fonction polynôme de degré $r (r < n)$ et $q(x) = p(x) + 1$. (les équations $P(x) = 0$ et $q(x) = 0$ admettant r, racines réelles distinctes).

1. Démontrer que : $[P(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est divisible par $p(x).q(x)$
2. Déterminer les réels P et q de façon que $x^4 + Px + q$ factorisable par $x^2 + Px + q$.

Exercice n°4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+\frac{m}{3}z=1 \\ x-y-\frac{1}{2}z=1 \end{cases} ; (S_2)\begin{cases} \frac{xy}{z}=2 \\ \frac{yz}{x}=\frac{1}{2} \\ \frac{zx}{y}=8 \end{cases} ; (S_3)\begin{cases} 2x^2-\frac{9}{y+1}=15 \\ 3x^2-\frac{24}{y+1}=19 \end{cases} ; (S_4)\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=1 \\ x^5y^2+y^5x^2=2 \end{cases}$$

Exercice n°5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(E_1):\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-y^2-xy=x+1 \end{cases} ; (E_2):\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ x+y=5 \end{cases} ;$$

$$(E_3):\begin{cases} (x+3)^2+(y-2)^2=200 \\ 8x-3y=20 \end{cases} ; (E_4):\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=29 \\ xy=6 \end{cases}$$

Exercice n°6

Etant donné l'équation à une inconnue réel x :

$$E(x): x^2 + (2m+1)x + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$$

1. Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence des racines x' et x'' de cette équation. Le nombre $\frac{3}{2}$ peut-il être racine de (E) ?
2. Calculer en fonction de m :

$$A = \frac{1}{2x'-3} + \frac{1}{2x''-3}$$

3. Déterminer m pour que $A = -\frac{2}{3}$.

Exercice n°7

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1), n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(-1) = 0$.
2. Montre qu'il existe un polynôme Q tel que pour tout réel $x, P(x) = (x-1)^2(x+1).Q(x)$. Quel est le degré de Q ?

Exercice n°8

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivants :

$a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$; $b)\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$; $c)\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$; $d)\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 91 \end{cases}$

Exercice n°9

Déterminer φ pour que l'équation : $(E): x^2 - 4x + \varphi = 0$

1. Ait deux racines égales.
2. Ait une racine triple de l'autre
3. Ait deux racines x' et x'' telles que $x'' + x' = 9$.
4. Ait deux racines telles que $x'^2 + x''^2 = 58$
5. Ait deux racines comprises entre 1 et 5.

Exercice n°10

Soit P le polynôme définie par : $P(x) = x^2 - 2x + 3 - m$

1. Pour quelles valeurs de m le trinôme $P(x)$ admet-ils deux racines de signes contraires ?
2. Déterminer l'ensemble (E) des valeurs du réel m telles que : $-mx^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions du système :

$$(\Sigma)\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2y^2 - 6xy = -m \end{cases}$$

Exercice n°11

1. Soit P le polynôme de degré 4 définie par : $P(x) = x^4 - 5x + 4$ en utilisant l'algorithme d'horner, factoriser P ; puis déterminer les racines de P.
2. Déterminer les polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tel que : $P(x) (ax^2 + bx + c)Q(x) + R(x)$ dans le cas où $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $ax^2 + bx + c = 10x^2 - x - 21$.
3. Prouver que le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme Q(x) que l'on déterminera.

Exercice n°12

Soient a et b deux réels et $f$la fonction polynôme définie par : $f(x) = (a + b - 3)x^3 + (ab - 2)x^2 + 2x$,

1. Déterminer suivant les valeurs de a et b le degré de f.
2. Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes d'équations : $b = \frac{2}{a}$ et $a + b = 3$.
3. On admet qu'à toute fonction polynôme f est associé le point de coordonnée (a, b)dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer les régions du plan telle que degré $f = 3$; degré $f = 2$; degré $f = 1$.

Exercice n°13

1. Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que :
   $f(x) - f(x - 1) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'expression de : $E_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2$
3. Déterminer une fonction polynôme f de degré 4 telle que : $f(x) - f(x - 1) = x^3 \forall x \in \mathbb{R}$. *En déduire l'expresionde:* $E_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3$

Exercice n°14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$(E_1): x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$; $(E_2): (x^2 - 3)^2 = 4(x - 3)^2$; $(E_3): \frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x}$;

$(E_4): x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0, (a, b) \in \mathbb{R}$

$(E_5): (3x^2 - 5x + 2)(-2x \quad + 7x + 9) \geq 0$; $(E_6): \frac{x^4 - 49x + 96}{x^2 - 7x + 12} > 7$

Exercice n°15 :

1. Décomposer en un produit de fonction polynômes de degré 1 ou 2.
   a. $P_1(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2$
   b. $P_2(x) = 5x^4 + 6x^2 - 11$
2. Déterminer suivant les valeurs du réel m le degré de l'équation $(E): mx[(m - 1)x + m - 2] + 3 + m^2$
3. Déterminer les réels $a, b, m,$ et p tels que :
   $2x^3 - 7x^2 + mx + p = (x + 2)(x - 3)(ax + b) \forall x \in \mathbb{R}$.

Polynomes, Equations et Système d'équations

Exo n°1

Démontrons que $P(x)$ est divisible par $Q(x) = abx^2 + (a^2+b^2)x + ab$.

Q est un polynôme du second degré.

* factorisons Q.

On pose : $Q(x) = 0$

$\Rightarrow abx^2 + (a^2+b^2)x + ab = 0$

$\Delta = (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$

$\Delta = (a^2-b^2)^2$. Soit $x' = \dfrac{-a^2-b^2+a^2-b^2}{2ab}$

et $x'' = \dfrac{-a^2-b^2-a^2+b^2}{2ab}$

Ainsi : $x' = -\dfrac{b}{a}$ et $x'' = -\dfrac{a}{b}$

Par suite : $Q(x) = ab\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\left(x+\dfrac{a}{b}\right)$.

P est divisible par $Q \Leftrightarrow P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ et $P\left(-\dfrac{a}{b}\right) = 0$.

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = ab(a-c)\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 + (a^3 - a^2c + 2ab^2 - b^2c + abc)\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 + (2a^2b + b^2c + a^2c + b^3 - abc)\left(-\dfrac{b}{a}\right) + ab(b+c)$.

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{b^4}{a^2}(a-c) + ab^2 - ab^2 + \dfrac{2b^4}{a} - \dfrac{b^4c}{a^2} + \dfrac{b^3c}{a} - 2ab^2 - \dfrac{b^3c}{a} - bac - \dfrac{b^4}{a} + b^2c + ab^2 + abc$.

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{b^4}{a} + \dfrac{b^4c}{a^2} + \dfrac{2b^4}{a} - \dfrac{b^4c}{a^2} + \dfrac{b^3c}{a} - \dfrac{b^3c}{a}$

Soit $P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$. L'on montre de même que $P\left(-\dfrac{a}{b}\right) = 0$.

Par conséquent $P(x)$ est factorisable par $Q(x)$.

Déduisons que $P(x_0)$ pour $x_0 = ca$, $n \in \mathbb{N}$, est divisible par $(a+b)^3$.

$P(x) = Q(x)(\alpha x + \beta)$ car P est de degré 3 et Q de degré 2.

* Déterminons α et β.

On a : $ab(a-c) = ab\alpha$

et $ab(b+c) = ab\beta$. d'où $\alpha = a-c$ et $\beta = b+c$, (a et b) $\neq 0$.

Soit $P(x) = Q(x)[(a-c)x + b + c]$.

On a :

$P(x_0) = [abx_0^2 + (a^2+b^2)x_0 + ab][(a-c)x_0 \ldots$

Considérons le polynôme P comme un polynôme en a noté $R(a)$.

Alors :

$R(a) = [a^2x_0 + a(b + bx_0^2) + b^2x_0][ax_0 + b + c \ldots$

$R(-b) = [2b^2x_0 - b(b + bx_0^2) + b^2x_0][-bx_0 + b + \ldots$

$R(-b) = [2b^2x_0 - b^2x_0^2 - b^2][-bx_0 + b + c - cx_0$

$R(-b) = -b^2(x_0^2 - 2x_0 + 1)(-bx_0 + b + c - cx_0$

$R(-b) = -b^2(x_0 - 1)^2[-b(x_0 - 1) - c(x_0 - 1)$

$R(-b) = -b^2(x_0 - 1)^3(-b-c)$

$R(-b) = b^2(b+a)(x_0-1)^3$ avec $x_0 = (-b+b)$

$\Rightarrow x_0 = (1)^n = 1$

$R(-b) = 0$ et $P(x_0)$ est divisible par $a+b$.

Du fait de la présence du terme $(x_0-1)^3$ nous en déduisons que $P(x)$ est divisible par $(a+b)^3$.

Exo n°2

1. Soit : $f(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$

et $g(x) = (x-1)(x+1)$.

On a : $f(1) = (1^n - 1)(1^{n+1} - 1)$

avec $1^n = 1^{n+1} = 1$ donc $f(1) = 0$.

$\Rightarrow f(-1) = [(-1)^n - 1][(-1)^{n+1} - 1]$ or

n et $n+1$ étant deux entiers consécutifs l'un des deux est pair et par suite :

$(-1)^n = 1$ où $(-1)^{n+1} = 1$ et $(-1)^n - 1 = 0$

où $(-1)^{n+1} - 1 = 0$.

donc $f(-1) = 0$.

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x-1)Q(x)$ avec degré de $Q = 2n+1-2$ soit degré de $Q = 2n-1$.

2. Soit $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$

et $Q(x) = 2x(x+1)(x+\frac{1}{2})$.

On a : $P(-1) = 0^{2n} - (-1)^{2n} - 2(-1) - 1$

$P(-1) = 0 - 1 + 2 - 1$ soit ...

$P(0) = 1^{2n} - 0^{2n} - 0 - 1$

$P(0) = 1 - 1$ soit $P(0) = 0$.

$P(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2(-\frac{1}{2}) - 1$

$P(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} + 1 - 1$

or $(-\frac{1}{2})^{2n} = [(-\frac{1}{2})^2]^n = (\frac{1}{4})^n = (\frac{1}{2})^{2n}$

$\Rightarrow P(-\frac{1}{2}) = 0$.

Par conséquent :

$\boxed{P(x) \text{ est factorisable par } x(x+1)(2x+1).}$

Exo n°3

1° Démontrons que $[P(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est divisible par $P(x) \cdot q(x)$.

Soit x_0 un réel / $P(x_0) = 0$, on a $q(x_0) = 1$ et en posant $g(x) = [P(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$, nous en déduisons :

$g(x_0) = [P(x_0)]^{2n} + [q(x_0)]^n - 1$

$g(x_0) = 0 + 1^n - 1$ soit $g(x_0) = 0$.

Soit x_1 un réel / $q(x_1) = 0$, on a alors $P(x_1) = -1$ et $g(x_1) = [P(x_1)]^{2n} + [q(x_1)]^n - 1$

$g(x_1) = (-1)^{2n} + 0^n - 1$ soit $g(x_1) = 0$.

Donc toute solution de l'équation $P(x) = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$. Et toute solution de l'équation $q(x) = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

D'où $g(x) = P(x) \cdot q(x) S(x)$ avec degré ~~S~~ $2n - 2r$.

Exo n°4

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=1 & (1)\\ x+y+\frac{m}{2}z=1 & (2)\\ x-y-\frac{1}{3}z=1 & (3)\end{cases}$$

Effectuons (2)-(1) et (3)-(1), cela nous conduit à :

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1)\\ -2y-\frac{4}{3}z=0 & (2')\\ (\frac{m}{2}-1)z=0 & (3')\end{cases}$$

l'équation (3') se traduit par :

* si $m \neq 2$ alors z est quelconque et le système s'écrit :

$$\begin{cases} x=1-\frac{1}{3}z\\ y=-\frac{2}{3}z\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$ et $S_{(1)}=\{(1-\frac{1}{3}z;-\frac{2}{3}z, z\in\mathbb{R})\}$

(S_1) admet donc une infinité de solution.

* si $m\neq 2$ alors $z=0$ et $y=0$ (à l'aide de (2')) et $x=1$ (à l'aide de (1)). D'où $\boxed{S=\{(1;0;0)\}}$

$$(S_2)\begin{cases} \frac{xy}{z}=2\\ \frac{yz}{x}=\frac{1}{2}\\ \frac{zx}{y}=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=2z\\ 2yz=x\\ zx=8y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(\frac{zx}{8})=2z\\ 2(\frac{zx}{8})z=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zx^2=16z\\ z^2x=4x\\ zx=8y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2-16)z=0\\ x(z^2-4)=0\\ zx=8y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4)z=0\\ x(z-2)(z+2)=0\\ zx=8\end{cases}$$

* Pour $x=4$ on a : $\begin{cases} x=4\\ (z-2)(z+2)=0\\ 4z=8y\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4\\ z=2 \text{ ou } z=-2\\ y=\frac{1}{2}z\end{cases}$$

Soit $S=\{(4,1,2);(4,-1,-2)\}$

* Pour $x=-4$, on a : $\begin{cases} x=-4\\ (z-2)(z+2)=0\\ -4z=8y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4\\ z=2 \text{ ou } z=-2\\ y=-\frac{1}{2}z\end{cases}$$

Soit $S=\{(-4,-1,2),(-4,1,-2)\}$

D'où

$\boxed{S_2=\{(-4,-1,2);(-4,1,-2);(4,1,2);(4,-1}$

$$(S_3)\begin{cases} 2x^2-\frac{9}{y+1}=15 & (1)\\ 3x^2-\frac{24}{y+1}=19 & (2)\end{cases}$$

On pose : $x^2=\alpha$ et $\frac{1}{y+1}=\beta$

l'équation devient :

$$\begin{cases} 2\alpha-9\beta=15 & (1)\\ 3\alpha-24\beta=19 & (2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{15+9\beta}{2}\\ \frac{45+27\beta}{2}-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{15+9\beta}{2}\\ 45+27\beta-48\beta=38\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{15+9\beta}{2}\\ 7=21\beta\end{cases}$$

donc $\beta=\frac{1}{3}$ et $\alpha=9$.

Comme $x^2=\alpha \Rightarrow x^2=9$ soit $x=-3$ ou $x=3$.

Ainsi : $\boxed{S=\{(3;2);(-3;2)\}}$

Exo n°5

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants.

$$(E_1)\begin{cases}2x-3y=1\\ x^2-y^2-xy=x+1\end{cases}$$

Par substitution, on obtient le système équivalent :

$$(E_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1+3y}{2}\\ \left(\frac{1+3y}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{1+3y}{2}\right)y=\left(\frac{1+3y}{2}\right)+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1+3y}{2}\\ \frac{1}{4}(1+6y+9y^2)+y^2-\frac{1}{2}(y+3y^2)=\frac{1}{2}(1+3y+2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1+3y}{2}\\ 1+6y+9y^2+4y^2-2y-6y^2=2+6y+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{1+3y}{2}\\ 7y^2-2y-5=0\ (1)\end{cases}$$

Résolvons (1) ; $\Delta'=1+35$

$\Delta'=36$

$y'=\frac{1+6}{7}=1$; $y''=\frac{1-6}{7}=-\frac{5}{7}$

d'où $x'=\frac{1+3y'}{2}$ soit $x'=\frac{4}{2}=2$.

$x''=\frac{1+3y''}{2}$ soit $x''=-\frac{4}{7}$

d'où

$$\boxed{S_{E_1}=\left\{(2,1),\left(-\frac{4}{7};-\frac{5}{7}\right)\right\}}$$

$$\begin{cases}x^4+y^4=97\ (1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^4+(5-x)^4=97\\ y=5-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^4+(625-500x+150x^2-20x^3+x^4)=97\\ y=5-x.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^4-10x^3+75x^2-250x+264=0\\ y=5-x.\end{cases}$$

Soit $P(x)=x^4-10x^3+75x^2-250x+26$

Nous savons $P(2)=0$ et $P(3)=0$.

$\Rightarrow P(x)=(x-2)(x-3)(x^2+bx+c)$, avec (b,c)

Déterminons b et c par la méthode d'identification.

On a :

$x^4-10x^3+75x^2-250x+264=(x-2)(x-3)(x^2+bx$

$x^4-10x^3+75x^2-250x+264=x^4+(b-5)x^3+(c-5b+$
$+(6b-5c)x+$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-5=-10\\ c-5b+6=75\\ 6b-5c=-250\\ 6c=264\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\ c=44\end{cases}$$

Par suite ; $P(x)=(x-2)(x-3)(x^2-5x+44)$

$P(x)=0\Leftrightarrow(x=2$ ou $x=3$ ou $x^2-5x+44=0)$

$x^2-5x+44=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $\Delta=-151$.

Donc : $S\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\{2,3\}\\ y=5-x\end{cases}$.

D'où $\boxed{S_{E_2}=\{(2;3),(3,2)\}}$

$$(E_3)\begin{cases}x+y+z=9\ (1)\\ x^2+y^2+z^2=29\ (2)\\ xy=6\ (3)\end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

donc $29 = 81 - 12 - 2z(x+y)$

$0 = 40 - 2z(9-z)$, car $x+y+z=9$

$0 = 2z^2 - 18z + 40$

$0 = z^2 - 9z + 20$

$\Delta = 81 - 80$ soit $\Delta = 1$ et $z' = 4$, $z'' = 5$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=9 \\ x^2+y^2+z^2=29 \\ xy=6 \\ z \in \{4;5\} \end{cases}$$

* Pour $z=4$ on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13 \\ xy=6 \\ z=4 \end{cases}$$

x et y sont deux réels de somme 5 et de produit 6, ce sont donc les solutions de l'équation $T^2-5T+6=0$ soit $T=2$ ou $T=3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$$

* Pour $z=5$ on a :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=4 \\ xy=6 \end{cases}$$

x et y sont deux réels de somme et de produit 6, ce sont donc solution de l'équation $k^2-4k+6=0$ cette équation n'a pas de solution

Finalement :

$$\boxed{S_{E_4} = \{(2;3;4);(3;2;4)\}}$$

$$(E_3) \begin{cases} (x+3)^2+(y-2)^2=200 \\ 8x-3y=20 \end{cases}$$

On pose $x+3=X$ et $y-2=Y$

$$\Rightarrow \begin{cases} X-3=x \\ Y+2=y \\ X^2+Y^2=200 \\ 8(X-3)-3(Y+2)=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^2+Y^2=200 \\ 8X-3Y=50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^2+Y^2=200 \\ X=\frac{50+3Y}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{50+3Y}{8}\right)^2+Y^2=200 \\ X=\frac{50+3Y}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{64}(2500+9Y^2+300Y)+Y^2=200 \\ X=\frac{50+3Y}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2500+9Y^2+300Y+64Y^2=12800 \\ X=\frac{50+3Y}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 73Y^2+300Y-10300=0 \quad (1) \\ X=\frac{50+3Y}{8} \end{cases}$$

Résolvons (1) : $\Delta = (1760)^2$

$Y'=10$, $Y''=-\frac{1030}{73}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{50+3Y}{8} \\ Y \in \{10, -\frac{1030}{73}\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X-3=x \\ Y+2=y \\ Y\in\{10; -\frac{10}{7}\} \\ X\in\{10; \frac{70}{73}\} \end{cases}$$

D'où $x=7$ ou $-\frac{149}{73}$

Ainsi :

$$\boxed{S_{E_3} = \left\{(7,12) ; \left(-\frac{149}{73}, -\frac{884}{73}\right)\right\}}$$

Exo n°6

1- Etudions suivant les valeurs du paramètre m l'existence des racines réelles (E).

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation (E) est du second degré.

$\Delta = (2m+1)^2 - \frac{4}{4}(3m-1)(2m-1)$

$\Delta = 4m^2+4m+1 - 6m^2 + 3m + 2m - 1$

$\Delta = -2m^2 + 9m$

$\Delta = m(-2m+9)$

Déterminons le signe de Δ suivant les valeurs de m.

m	$-\infty$		0		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $m \in]-\infty ; 0[\cup]\frac{9}{2} ; +\infty[$, $\Delta < 0$ et (E) n'a pas de solution.

$m \in]0 ; \frac{9}{2}[$, $\Delta > 0$ et (E) admet deux solut° réelles distinctes. $m = 0$ ou $m = \frac{9}{2}$, $\Delta = 0$ et (E) admet une solution double.

$\frac{3}{2}$ est solution de (E) $\Leftrightarrow$ il existe

m / ... $(2m+1)\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{6}{4}(2m+1) + \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1) = 0$

$\Rightarrow 9 + 12m + 6 + 6m^2 - 3m - 2m + 1 = 0$

$\Rightarrow 6m^2 + 7m + 16 = 0$, avec $\Delta < 0$

donc il $\nexists$ aucune valeur de m / le réel $x = \frac{3}{2}$ soit solution de (E).

2- Soit $A = \frac{1}{2x'-3} + \frac{1}{2x''-3}$

A est parfaitement défini car nous venons de voir que l'équ (E) n'admettait pour aucune valeur de m le réel $x = \frac{3}{2}$ comme solut° possible.

$\Rightarrow A = \frac{2x' + 2x'' - 6}{(2x'-3)(2x''-3)}$ soit $A = \frac{2(x'+x'') ...}{4x'x'' - 6(x' ... + ...}$

Or $x' + x'' = -(2m+1)$ et

$x' \cdot x'' = \frac{1}{4}(3m-1)(2m-1)$

$\Rightarrow A = \frac{-2(2m+1) - 6}{(3m-1)(2m-1) + 6(2m+1) + 9}$

$$\boxed{A = \frac{-4m-8}{6m^2+7m+16}}$$

3. Déterminons m pour que A = ...

$A = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -2(6m^2+7m+16) = 3(-4m- ...$

$\Leftrightarrow 12m^2 + 14m + 32 = 12m + 24$

$\Leftrightarrow 12m^2 + 2m + 8 = 0$

$\Rightarrow 6m^2 + m + 4 = 0$

$\Delta < 0$ donc il n'existe aucune ...

Exo n°9

1. l'équation (E) admet une solut° $\Leftrightarrow$ son discriminant est nul.

Or : $\Delta = 16 - 4\alpha = 4(4-\alpha)$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

(E) admet une solution double $\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 4}$

2. l'équation (E) admet une racine triple de l'autre $\Leftrightarrow$ elle admet deux racines x' et x'' $\left\{ x' = 3x'' \right.$

D'où $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x' = 3x'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ x' = 3x'' \end{cases}$

ou encore :

$\begin{cases} \alpha < 4 \\ \frac{4+\sqrt{16-4\alpha}}{2} = 3\left(\frac{4-\sqrt{16-4\alpha}}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 2+\sqrt{4-\alpha} = 3(2-\sqrt{4-\alpha}) \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha < 4 \\ \sqrt{4-\alpha} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 4-\alpha = 1 \end{cases}$ soit

$\boxed{\alpha = 3}$

Pour $\alpha = 3$ l'équation (E) admet deux solutions ($x' = 3$, $x'' = 1$) avec $x' = 3x''$.

3) Les conditions seront ici :

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x'' + x' = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 4 = 9 \end{cases}$ (car $x' + x'' = -\frac{b}{a} = 4$)

Ce qui est impossible.

D'où ... valeur de α / la somme des solut° (lorsqu'elles ex.) de E soit égale à 9.

4) Nous avons : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x'+x'')^2 - 2x'x'' = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 16 - 2\left(\frac{\alpha}{1}\right) = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 16 - 2\alpha = 58 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ \alpha = -21 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{\alpha = -21}$

Pour $\alpha = -21$, l'équation (E) admet deux solutions dont la somme des carrés est 58

5) Si $\Delta > 0$ c-à-d si $\alpha < 4$ on a alors deux solution distincts x' et x'' et $x^2 - 4x + \alpha = (x-x')(x-x'')$

Posons $f(x) = (x-x')(x-x'')$

$f(1) = (1-x')(1-x'')$ et

$f(5) = (5-x')(5-x'')$.

Si x' et x'' sont comprises entre 1 et 5 alors $f(1) > 0$ car $1-x' < 0$, $1-x'' < 0$.

$f(5) > 0$, car $5-x' > 0$ et $5-x'' > 0$

l'équation (E) admet deux solut° comprises entre 1 et 5 pour :

$\begin{cases} \alpha < 4 \\ (1-x')(1-x'') > 0 \\ (5-x')(5-x'') > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-(x'+x'')+x'x'' > \\ 25-(x'+x'')+x'x'' > \end{cases}$

Or pour $\Delta > 0$, on a : $x' + x'' = 4$ et $x'x''$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ 1-4+\alpha > 0 \\ 25-4+\alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 4 \\ \alpha > 3 \\ \alpha > -21 \end{cases}$

Solutions pour l'équation (E) ayant de plus la propriété énoncée.

Exo n° 10

1° Soit f est une fonction polynôme du second degré pour tout $m \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x)=0$ admet deux racines distinctes $\Leftrightarrow \Delta > 0$. Ces deux racines seront de signes contraires dès que le produit P sera négatif.

Les conditions imposées sont donc :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ 3-m<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>2 \\ m>3 \end{cases}.$$

L'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le trinôme $x^2-2x+3-m$

$S=\{(2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}};2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}),(2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}},2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}})\}$

$S=\{(2;2)\}$

$S=\phi$

Exo n° 12

1. f sera de degré 3 pour $a+b-3\neq 0$.

Si $a+b-3=0$ et $ab\neq 2$ alors f est de degré 2.

Si $a+b-3=0$ et $ab=2$, c-à-d pour $a=1$, $b=2$ ou $b=1$, $a=2$, alors f est de degré 1.

Représentons graphiquement [...] l'équat° $b=\frac{2}{a}$ et $a+b=3$.

Posons $xy=T$.

xy est solution de l'équation du second degré $T^2-6T+m=0$.

$\Delta'=9-m$.

* Pour $m>9$, xy n'existe pas et le système (Σ) n'a pas de solut°.

* Pour $m=9$, l'équat° $T^2-6T+m=$ s'écrit $T^2-6T+9=0$ où $(T-3)^2=0$, soit $xy=3$.

$\Rightarrow (\Sigma) \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}.$

x et y solut° de l'équat° : $X^2-4X+3=$

Nous avons $X=1$ ou $X=3$.

Les solut° de (Σ) sont alors les

bien $\hat{a}+\hat{b}=3$ ...

Tout pt $M(a,b)$ / $a+b=3$ et $ab\neq 2 \in$ à une région du plan / le degré de f soit 2. Cette région P_2 est (Δ) privée des points A et B intersections de (Δ) et de l'hyperbole $a \to \frac{2}{a}$ avec $A(1,2)$, $B(2,1)$.

Tout point $M(a,b)$ / $a+b=3$ et $ab=2$ c-à-d $M\in\{A,B\}$ répond à l'équat° ! « degré de f égal à 1 ».

La portion de plan est ici constituée de deux points : $A(1,2)$ et $B(2,1)$.

Exo n° 13

1° O.eq ! $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, avec a, b, c et d réels et a non nul.

On a : $f(x-1)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+$

$= ax^3+(b-3a)x^2+(3a-2b)x+c$

$\sqrt{9-m} < 1$ ce qui équivaut à $8 < m < 9$

Nous avons : $x-2=\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$ ou $x-2=-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$

$x = 2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$ ou $x = 2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$.

Les solution de (Σ) sont :

$(2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}};); (2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}); [(2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}$

$(2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}})]$.

$\sqrt{9-m}=1$ ce qui équivaut à $m=8$

Nous avons alors : $(x-2)^2=0$ soit $x=2$.

(Σ) admet pour solution : $(2;2)$.

Récapitulons à l'aide d'un schéma :

$S=\{(1,2),(3,1)\}$

$S=\{(2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}}; 2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}), (2-\sqrt{1-\sqrt{9-m}}, 2+\sqrt{1-\sqrt{9-m}})\}$

$S=\{(2;2)\}$

$S=\emptyset$

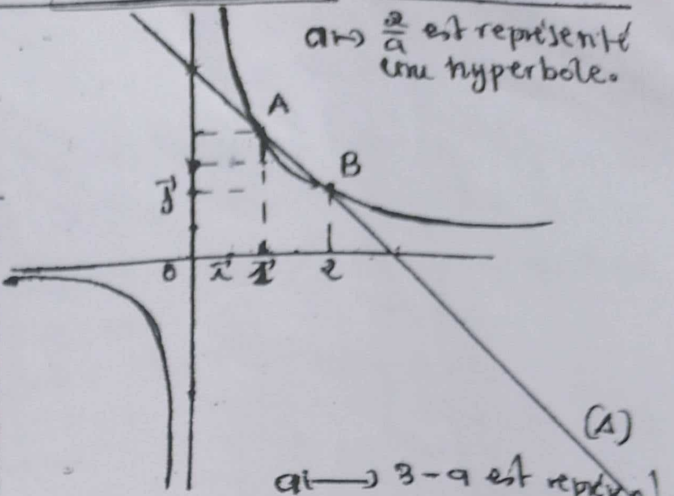
Exo n°12

1. f sera de degré 3 pour $a+b-3\neq 0$.

Si $a+b-3=0$ et $ab\neq 2$ alors f est de degré 2.

Si $a+b-3=0$ et $ab=2$, c-à-d pour $a=1$, $b=2$ ou $b=1$, $a=2$, alors f est de degré 1.

2. Représentons graphiquement [...] d'équat° $b=\frac{2}{a}$ et $a+b=3$.



$a \mapsto \frac{2}{a}$ est représenté une hyperbole.

$a \mapsto 3-a$ est représ. par une droite.

3. Tout point $M(a,b)$ tel que $a+b$ appartient à une région du plan le degré de f soit 3. Cette region P_1 est $P_1=P-(\Delta)$ où (Δ) est la droite d'équation $a+b=3$.

Tout pt $M(a,b) / a+b=3$ et $ab\neq 2 \in$ une région du plan/ le degré de f soit 2. Cette region P_2 est (Δ) privée points A et B intersections de (Δ) et de l'hyperbole $a \mapsto \frac{2}{a}$ avec $A(1,2)$ $B(2,1)$.

Tout point $M(a,b) / a+b=3$ et $ab=2$ -à-d $M\in\{A,B\}$ répond à l'équat° « degré de f égal à 1 ».

La portion de plan est ici constituée de deux points : $A(1,2)$ et $B(2,1)$

Exo n°13

1° O.eq! $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, avec a, b, c et d réels a non nul.

On a $f(x-1)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)$

$f(x-1)=ax^3+(b-3a)x^2+(3a-2b)x$

$f(x)-f(x-1)=ax^3+bx^2+cx+d-ax^3-(b-3a)x^2$
$-(3a-2b+c)x-d+c+a-b.$

$f(x)-f(x-1)=3ax^2-(3a-2b)x+c+a-b$ Pour $x\in\mathbb{R}$.

$f(x)-f(x-1)=x^2$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ équivaut :

$$\begin{cases}3a=1\\-3a+2b=0\\c+a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d,\ d\in\mathbb{R}.$

La fonct° polynôme f définie par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$ convient.

Nous avons :

$f(1)-f(1-1)=1^2$
$f(2)-f(2-1)=2^2$
$\vdots$
$f(n-1)-f(n-1-1)=(n-1)^2$
$f(n)-f(n-1)=n^2$

$f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\dots+f(n-1)-f(n-2)+f(n)-f(n-1)=E_2.$

Or $-f(0)+f(n)=E_2$ avec $f(0)=0$ et $f(n)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$

Donc $E_2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$

D'où $\boxed{E_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3: Nous avons ici :
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$ avec $(a,b,c,d\text{ et }e)\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

$f(x-1)=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)$

$f(x-1)=ax^4+(-4a+b)x^3+(6a-3b+c)x^2+(-4a+3b-2c+d)x+(a-b+c-d+e).$

$f(x)-f(x-1)=4ax^3-(6a-3b)x^2-(4a+3b-2c)x-(a-b+c-d)$ Pour tout $x\in\mathbb{R}.$

$f(x)-f(x-1)=x^3$ Pour tout $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4a=1\\-6a+3b=0\\4a-3b+2c=0\\-a+b-c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{4}\\d=0\end{cases}\text{ et } e\in\mathbb{R}$$

Soit $\boxed{f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+e,\ e\in\mathbb{R}}$

4° Nous avons :

$f(1)-f(1-1)=1^3$
$f(2)-f(2-1)=2^3$
$\vdots$
$f(n-1)-f(n-1-1)=(n-1)^3$
$f(n)-f(n-1)=n^3$

$f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\dots+f(n-1)-f(n-2)+f(n)-f(n-1)=E_3.$

Or $-f(0)+f(n)=E_3$ avec $f(0)=0$

$\Rightarrow E_3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$ Ainsi :

$\boxed{E_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Exo n°14

Resolvons dans $\mathbb{R}$ les équat° et inéquations suivantes.

$(E_1): x^2+(1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}=0$

$\Delta=(1-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2}$

... polyn | CALCULS ALGEBRIQUES | ...e réel a.

Jean Cl. MARIA

I - Calculs sur les polynômes

Définition 1

On appelle monôme toute expression algébrique en x, s'écrivant sous la forme : ax^n, où n est un élément de $\mathbb{N}$; $a \in \mathbb{R}^*$

Exemple : $2x^3$ et $-5x^4$ sont des monômes

Définition 2

On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

Théorème

Tout polynôme non nul $P(x)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$

Exemple

$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 6x + 2$

$P(x) = 6x^3 + 10x^2 - 5x + 1$ sont des polynômes.

Remarques

R_1 : La multiplication de deux monômes est un monôme.

R_2 : Le quotient de deux monômes $\frac{ax^n}{bx^p}$ est un monôme si $x > 0$.

R_3 : Un monôme est un polynôme (par exemple $3x^4 = 3x^4 - 2x^2 + 2x^2$).

R_4 : La somme de polynômes est un polynôme.

R_5 : Le produit de polynômes est un polynôme.

R_6 : Le quotient de deux polynômes en général, n'est pas un polynôme.

... polynôme

... entier naturel, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des ... et ... variable réelle. Si le polynôme P est défini par

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$

, on dit que P est un polynôme de degré n de coefficients $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$.

On note $\boxed{d^\circ P = n}$

Exemples:

Pour $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$, on a : $d^\circ f = 4$

Pour $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 3x + 20$, on a : $d^\circ P = 3$

Pour $T(x) = 3$, on a : $d^\circ T = 0$

Remarque

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$, P est un polynôme nul sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le degré de P n'existe pas.

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- ils ont le même degré.
- les coefficients des termes de même degré sont égaux.

2. Racine d'un polynôme

On appelle racine (ou zéro) d'un polynôme P, tout ...bre réel α tel que : $P(\alpha) = 0$

...ple

Soit $P(x) = x^2 + x - 2$. Calculer $P(1)$ et $P(-2)$

Solution : $P(1) = 0$ et $P(-2) = 0$

-2 et 1 sont donc des racines de P.

3. Factorisation par $x - \alpha$

Soit P un polynôme et α un nombre réel.

α est racine de P si et seulement si, il existe un polynôme Q tel que : pour tout nombre réel x,

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

Remarque : Si $d^\circ P = n$ alors $d^\circ Q = n - 1$

4. Divisibilité des polynômes

Soient deux polynômes P et Q tels que $d^\circ P = n$, $d^\circ Q = p$, $(p \leq n)$.

P est divisible par Q, s'il existe un polynôme T tel que :

$$\boxed{P = T \times Q}$$

4.1. Reste de la division de $P(x)$ par $x - \alpha$

Dividende $\to P(x)$; Diviseur $\to x - \alpha$; Quotient $\to Q(x)$; Reste $\to R$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - \alpha \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R}$$

Remarques

R_1 : Le reste R ne contient pas la variable x.

R_2 : En particulier, pour $x = \alpha$, $R = P(\alpha)$

Exemple

Trouver le reste R de la division de $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ par $x + 1$.

Solution

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^2 - 3x + 1 & x + 1 \\ \cline{3-3} - & (2x^2 + 2x) & 2x - 5 \\ \cline{2-2} & -5x + 1 & \\ - & (-5x - 5) & \\ \cline{2-2} & 6 & \end{array}$$

$\boxed{R = 6}$

Soit en posant $x + 1 = 0$, on a : $x = -1$ et $P(-1) = 6$ alors $\boxed{R = 6}$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x+1)(2x-5) + 6}$

4-2 - Divisibilité de $P(x)$ par $x - \alpha$.

Soit le polynôme : $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$.

$$\boxed{P \text{ est divisible par } x-\alpha \iff R = 0}$$

Activité n°1

1°) On donne : $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$; $g(x) = x + 3$

P est-il divisible par g ?

2°) On considère le polynôme f défini par :

$$f(x) = 5x^3 + 11x^2 - 13x - 3$$

a) Calculer $f(-3)$

b) Montrer qu'il existe un polynôme g tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)g(x)$

c) Préciser l'expression de g par trois méthodes différentes.

II - Les fonctions rationnelles

Définition 1

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes avec $B(x) \neq 0$.
Pour tout x, l'expression $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est une fraction rationnelle.

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-4}$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$ est une fonction rationnelle.

Simplification d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$. La factorisation de $A(x)$ et de $B(x)$ peut faire apparaître les facteurs communs ; alors deux cas se présentent.

1^{er} cas : Le facteur commun ne s'annule pas.
On peut alors le supprimer pour tout x.

Exemple :

$$f(x) = \frac{(x^2+2)(x-1)}{(x+1)(x^2+2)}$$

Pour tout x, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

2^e cas : Le facteur commun s'annule.
On peut alors le supprimer pour tout $x \in E_f$.

Exemple :

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

$E_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Alors $\boxed{\forall x \in E_g, g(x) = \frac{x+1}{x}}$

Définition 2

Une fraction rationnelle est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont aucun diviseur (facteur) commun de degré supérieur ou égal à 1.

Exemple : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est irréductible.

Activité n°2

1. Mettre sous la forme réduite $f(x) = \frac{3x^2-6x}{x^2-4}$
2. On considère : $M(x) = \frac{3x}{x^3+1}$ et $N(x) = \frac{1-x^6}{x^5+x}$
   Calculer $g(x) = M(x) \times N(x)$
3. Soit $h(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$
   a) Donner l'ensemble de définition de h.
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in E_h$, $h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

PhaLDy.B

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

el. MARA (1)

I - Systèmes de deux équations à deux inconnues

1°) Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, toute écriture de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Exemples

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$$

sont des systèmes de deux équations à deux inconnues.

2°) Résolution

Méthode de Cramer

Soit à résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Calculons les déterminants.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \quad ; \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$\text{et} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Discussion

1er cas : Si $D \neq 0$, le système (S) admet une solution unique : le couple $(x ; y)$ avec

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$\boxed{S = \{(x ; y)\}}$$

2ème cas : Si $D = 0$, ~~on a~~ et que

- $D_x = D_y = D = 0$, le système admet une infinité de solution. $\boxed{S = \mathbb{R}}$
- $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$, le système n'admet pas de solution. $\boxed{S = \emptyset}$

Activité n°1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ -x - y = 4 \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3mx + y = 6m \\ x + 3my = 2 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

II - Systèmes de trois équations à trois inconnues

1 - Méthode de cofacteurs

Activité n°2

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -11 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

2 - Méthode de SARÜS

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = a \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = b \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = c \end{cases}$$

On calcule le réel D

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{array}\right.$$

$D = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - (\alpha_3\beta_2\gamma_1 + \beta_3\gamma_2\alpha_1 + \gamma_3\alpha_2\beta_1)$

1er cas : Si $D \neq 0$, alors il existe un triplet unique (x, y, z) solution du système (S) avec

$$x = \frac{D_x}{D} \; ; \; y = \frac{D_y}{D} \text{ et } z = \frac{D_z}{D} \text{ où}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & \beta_1 & \gamma_1 \\ b & \beta_2 & \gamma_2 \\ c & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \; ; \; D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \gamma_1 \\ \alpha_2 & b & \gamma_2 \\ \alpha_3 & c & \gamma_3 \end{vmatrix} \text{ et } D_z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & a \\ \alpha_2 & \beta_2 & b \\ \alpha_3 & \beta_3 & c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(x ; y ; z)\}}$$

2è cas : Si $D = 0$ et que

- $D_x = D_y = D_z = 0$, alors les équations sont équivalentes ; on a une infinité de solution

$$\boxed{S = \mathbb{R}.}$$

- Si l'un des déterminants par rapport à x, y et z est non nul, alors

$$\boxed{S = \emptyset}$$

Activité n° 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

3 - Méthode de pivot de GAUSS

… lle système de GAUSS, tout système d'équations … de la forme :

$$\ldots : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = a \\ \beta_2 y + \gamma_2 z = b \\ \ldots \end{cases}$$

$D = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - (\alpha_3\beta_2\gamma_1 + \beta_3\gamma_2\alpha_1 + \gamma_3\alpha_2\beta_1)$

1er cas : Si $D \neq 0$, alors il existe un triplet unique (x, y, z) solution du système (S) avec

$$x = \frac{D_x}{D} \; ; \; y = \frac{D_y}{D} \text{ et } z = \frac{D_z}{D} \text{ où}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & \beta_1 & \gamma_1 \\ b & \beta_2 & \gamma_2 \\ c & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \; ; \; D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \gamma_1 \\ \alpha_2 & b & \gamma_2 \\ \alpha_3 & c & \gamma_3 \end{vmatrix} \text{ et } D_z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & a \\ \alpha_2 & \beta_2 & b \\ \alpha_3 & \beta_3 & c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{S = \{(x; y; z)\}}$$

2è cas : Si $D = 0$ et que

- $D_x = D_y = D_z = 0$, alors les équations sont équivalentes ; on a une infinité de solution
$$\boxed{S = \mathbb{R}.}$$
- Si l'un des déterminants par rapport à x, y et z est non nul, alors
$$\boxed{S = \emptyset}$$

Activité n°3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

3 _ Méthode de pivot de GAUSS

... lle système de GAUSS, tout système d'équations ... de la forme :

$$(\ldots) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = a \\ \beta_2 y + \gamma_2 z = b \\ \gamma_3 z = c \end{cases}$$

Les réels α_1, β_2 et γ_3 sont appelés pivot de GAUSS. $(\mathcal{S})$ est aussi appelé système triangulaire.

Activité n°4

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y+1} = -1 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{y+1} = 2 \end{cases}$$

$2x + 3y - 5z = -11$

$2(1) + 3(2) - 5(3) = -11$

$-2 + 6 - 15$

BAILLA PHALDY PC1

INSPECTION DE LYCEES ZONNE 4

Année scolaire 2018-2019

Composition du deuxième trimestre
Epreuve de Mathématiques
Niveau : Première C
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 « Fonction » 5 points

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-1}$ de courbe représentative (C).

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f
3. Montrer que la droite $(\Delta): y = -x + 2$ est asymptote à (C)
4. Achever l'étude des branches infinies de (C).
5. Etudier les variations de f sur D_f (on dressera le tableau de variation).
6. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

EXERCICE 2 « Isométrie planes » 7points

Partie 1 :

On considère le carré directe ABCD de centre O, de côté 5cm et (C)le cercle circonscrit au carré.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[DC]$, $[AD]$, et $[AB]$.

On pose $g = S_{AC} \circ S_{AB}$ et $h = S_{OD} \circ S_{OC}$

1. Faire la figure (Si possible réserver une page pour la figure).
2. Montrer que g et h sont des rotations de centres et d'angles à préciser
3. Construire l'image (C')de (C) par la translation du vecteur $\overrightarrow{KJ}$
4. Déterminer $g(B)$, $g(L)$, $h(O)$ et $h(B)$

Partie 2 : On considère que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1. Donner les coordonnées de tous les points connus de la figure précédente.
2. On considère l'application$f: (x; y) \mapsto (x'; y')$ définie par

$$f\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

a) Montrer que f est une isométrie
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

IHALDY YC1
BATCHI

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-1} \; si \; x < 0 \\ f(x) = -\cos\dfrac{\pi}{2}x \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A « Préalables »

1) Donner l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$
3) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en donner une interprétation.

Partie B « On considère $x < 0$ »

1- Démontrer que, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$ où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.

2- Etudier les variations de P et démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; -1]$.

On admet que $\alpha \in [-2; -1]$

3- Déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x négatifs.

4- Déterminer les variations de f pour x négatif.

5- Déterminer l'équation de la tangente T de C au point $A(0; -1)$. Préciser la position de T par rapport à C au point A.

6- Soit h la restriction de f sur $]\alpha; 0[$.

a) Montrer que h admet une réciproque h^{-1}.

b) Sans expliciter $h^{-1}(x)$, déterminre $(h^{-1})'(0)$.

Partie C « On considère $x \geq 0$ »

1- Montrer f est une fonction 4-périodique pour les valeurs positives de x.

2- Donne son ensemble d'étude E pour les valeurs positives de x.

3- Etudier les variations de f sur E.

Partie D « Etude complète de f »

1- Dresser le tableau de variation de f.

2- Construire C et T dans un repère orthonormé. En déduire la représentation graphique de la courbe C' de h^{-1} dans ce même repère.

INSPECTION DE LYCEES ZONNE 4 | Année scolaire 2019-2020

PhaLDy.B^2
P.C.1

Composition du deuxième trimestre
Epreuve de Mathématiques
Niveau : Première C
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 « Fonction » 5 points

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ de courbe représentative (C_f) dans repère orthonormé$(O, \vec{I}, \vec{J})$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f(0,5 point)
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f(1point)
   En déduire les équations des deux asymptotes de (C_f)(1point)
3. Etudier la dérivabilité de $f$en $x = 0$.
   En donner une interprétation géométrique.(1 point)
4. Etudier les variations de f sur D_f (on dressera le tableau de variation).(1point)
5. Construire la courbe représentative de f.(0,5 point)

EXERCICE 2 « Isométrie planes » 8points

NB ; Les deux parties sont liées

Partie 1

On considère l'application $f: (x; y) \longmapsto (x'; y')$ définie par

$$f\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer que $f$est une isométrie. (0,75 point)
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   $f$est - elle un déplacement ?justifier. (0,75 point)
c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. (1,25 point)

Partie 2 :

On considère le carré directe ABCD de centre O, de côté 5cm et (C)le cercle circonscrit au carré.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[DC]$, $[AD]$, et $[AB]$.

On pose $g = S_{BD} \circ S_{BC}$ et $h = S_{OA} \circ S_{\Delta}$

M. Guel

INSPECTION DE LYCEES ZONNE 4

Année scolaire 2018-2019

PhaLDY, B 2

Composition du troisième trimestre

Epreuve de Mathématiques

Niveau : Première C

Durée : 3 heures

Exercice 1 « Les deux Questions sont indépendantes » " 3 points "

1- On donne l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

a) Combien y a-t-il de couples d'éléments de A ?

b) Combien y a-t-il de triplets d'éléments de A ?

c) Combien y a-t-il de 4-listes d'éléments de A ?

2- Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules rouges et 1 boule verte. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien y a-t-il de tirages ayant 2 boules de même couleur ?

c) Combien y a-t-il de tirages ayant 2 boules de couleurs différentes ?

Exercice 2 " 3 points "

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ 4U_n = U_{n-1} + 12 \end{cases}$

1- On pose : $V_n = U_n - 4$

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique de raison et de premier terme V_1 à préciser.

2- Déduire l'expression de (U_n) en fonction de n , puis calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3- Calculer $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ en fonction de n

Exercice 3 " 7 points "

ABD est un triangle rectangle isocèle direct en A tel que $[AB]$ soit horizontale et que AB=6. On note O le milieu de $[BD]$. La parallèle à (AD) passant par B coupe (AO) en C.

1- Faire la figure que l'on complètera au fur et à mesure sur une page entière.

2- Réduire et donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes (composées des symétries centrales)

$f = S_A o S_B o S_C o S_D$ et $g = S_A o S_B o S_D o S_C$

3- Réduire et donner la nature et les éléments caractéristiques des isométries suivantes (composées des symétries orthogonales)

$h = S_{(AB)} o S_{(AO)}$; $l = S_{(AD)} o S_{(BC)}$ et $j = S_{(CB)} o S_{(CD)}$

4- « Ensemble des points »

LYCÉE SAVORGNAN DE BRAZZA

DIRECTION DES ETUDES

DEPARTEMENT DE SVT

Année scolaire 2007-2008
Devoir de classe
Epreuve : SVT
Niveau : 1^{er} D
Durée : 2 heures

Exercice n°1 (6pts)

A partir de la formule développée de la leucyl –alanyl -méthionine.

```
H2N -CH -CO -NH -CH  -CO -NH- CH- COOH
     |            |            |
    CH3           H          (CH2)2
                               |
                               S
                               |
                              CH3
```

PhaLDy.B²

1- Qu'est ce qu'une liaison peptidique ?

2- Indiquer le nombre de liaisons peptidiques de cette molécule ; ainsi que le nombre de molécules d'eau formées.

3- Qu'appelle-t-on
   a) Réaction xanthoprotéique ?
   b) Réaction de Biuret ?

4- representer les formules des acides aminés ayant participé à la synthèse de cette molécule

Exercice n°2 (6 pts)

Une feuille de laitue après dessiccation (déshydratation) pèse 40 g . Fraîche, son eau pèse 80g Sachant que les sels minéraux représentent 5% du frais. Calculez

1- a) le poids frais,
   b) le poids des substances organiques de cette feuille de laitue

2- Calculez la teneur en eau par rapport
   a) au poids frais
   b) au poids sec
   c) au poids des substances minérales
   d) au poids des substances organiques

Exercice n°3 (8 pts)

On a extrait du maïs ? une substance A et de betterave une substance B. La substance A donne une reaction positive avec l'eau iodée, tandisque la substance B donne une reaction negative avec ce même réactif et avec la liqueur de fehling. L'hydrolyse acide de ces deux substances aboutit à des oses réducteurs.

1- De quelles substances s'agit-il ?
2- Donner les différentes étapes de ces Hydrolyses tout en précisant les réactifs utilisés
3- Le produit final de l'Hydrolyse de la substance A a servi à la synthèse d'un alcool. Dans quelles conditions se déroule la réaction (opération) ?
4- Sachant qu'on a utilisé 300g de ce produit final, calculer la masse d'alcool formé
5- L'estérification de cet alcool par l'acide butyrique de formule CH_3-$(CH_2)_2$-COOH a conduit à un ester.
a) Qu'entend –on par estérification ?
b) Ecrire l'équation de la réaction et donner le non, de l'ester formé.
c) Quelle est la masse de l'ester et celle de l'eau si on a utilisé 160g de l'acide butyrique ?

El - MARA

SUITES NUMERIQUES

Première D (1)

Soit I un sous ensemble de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

I- Généralités

1- Définition

On appelle suite numérique, toute application U de $\mathbb{N}$ ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$U : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U_n$$

U_n est le terme général de la suite et n est l'indice ou le rang de U_n.

I est l'ensemble d'indices.

La suite numérique U se note aussi $(U_n)_{n \in I}$ ou plus simplement (U_n).

2) Détermination d'une suite numérique

La suite $(U_n)_{n \in I}$ est déterminée par :

- Un moyen permettant d'obtenir chaque terme.

Exemple

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2n+1}{n+2}$

Calculer U_0, U_1, U_2 et U_{20}

Solution

$n=0$, $U_0 = \frac{2(0)+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{1}{2}}$

$n=1$: $U_1 = \frac{2+1}{1+2} = 1 \Rightarrow \boxed{U_1 = 1}$

$n=2$: $U_2 = \frac{4+1}{2+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{U_2 = \frac{5}{4}}$

$n=20$, $U_{20} = \frac{2(20)+1}{20+2} = \frac{41}{22} \Rightarrow \boxed{U_{20} = \frac{41}{22}}$

- La donnée du premier terme et la relation de récurrence liant deux termes consécutifs par

Exemple Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = -\frac{1}{2}U_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Calculer U_1, U_2 et, U_3

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = -\frac{1}{2}U_{n-1} + 3$

$n=1$: $U_1 = -\frac{1}{2}U_0 + 3 = -\frac{1}{2}(0) + 3$; $\boxed{U_1 = 3}$

$n=2$: $U_2 = -\frac{1}{2}U_1 + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$ $\boxed{U_2 = \frac{3}{2}}$

$n=3$: $U_3 = -\frac{1}{2}U_2 + 3 = \frac{-3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$ $\boxed{U_3 = \frac{9}{4}}$

- La donnée des deux premiers termes et la relation de récurrence liant trois termes consécutifs.

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par :

Solution

$n=0$, $U_0 = \dfrac{2(0)+1}{0+2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{U_0 = \dfrac{1}{2}}$

$n=1$: $U_1 = \dfrac{2+1}{1+2} = 1 \Rightarrow \boxed{U_1 = 1}$

$n=2$: $U_2 = \dfrac{4+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \boxed{U_2 = \dfrac{5}{4}}$

$n=20$, $U_{20} = \dfrac{2(20)+1}{20+2} = \dfrac{41}{22} \Rightarrow \boxed{U_{20} = \dfrac{41}{22}}$

- La donnée du premier terme et la relation de récurrence liant deux termes consécutifs par

Exemple Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = -\dfrac{1}{2}U_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Calculer U_1, U_2 et, U_3

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = -\dfrac{1}{2}U_{n-1} + 3$

$n=1$: $U_1 = -\dfrac{1}{2}U_0 + 3 = -\dfrac{1}{2}(0) + 3$; $\boxed{U_1 = 3}$

$n=2$: $U_2 = -\dfrac{1}{2}U_1 + 3 = -\dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{3}{2}$ $\boxed{U_2 = \dfrac{3}{2}}$

$n=3$: $U_3 = -\dfrac{1}{2}U_2 + 3 = \dfrac{-3}{4} + 3 = \dfrac{9}{4}$ $\boxed{U_3 = \dfrac{9}{4}}$

- La donnée des deux premiers termes et la relation de récurrence liant trois termes consécutifs.

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Calculer u_2, u_3 et u_4

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$

$n=1$; $u_2 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1 - \frac{1}{2}(0) = 1 \Rightarrow \boxed{u_2 = 1}$

$n=2$; $u_3 = u_2 - \frac{1}{2}u_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{1}{2}}$

$n=3$; $u_4 = u_3 - \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ $\boxed{u_4 = 0}$

3 - Propriétés

Ces propriétés sont celles des fonctions :

P_1 : Une suite (u_n) est dite constante $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n}$$

Exemple :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2 et u_3

Montrer que (u_n) est stationnaire, constante.

Solution

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = 2 \quad \Rightarrow u_1 = 2$

$u_2 = \sqrt{u_1 + 2} = 2 \quad \Rightarrow u_2 = 2$

$u_3 = \sqrt{u_2 + 2} = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow u_3 = 2$

Montrons que (u_n) est stationnaire

$u_1 = 2$

$u_2 = 2$

$u_3 = 2$ $\qquad$ (u_n) est donc stationnaire constante.

$u_{n+1} = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

P_2 : Une suite (u_n) est dite stationnaire $\Leftrightarrow$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $/ \forall n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$

Exemple

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\begin{cases} v_1 = 1, \ v_2 = 2 \\ v_n = \sqrt{v_{n-1} + 2} \quad n \geq 3 \end{cases}$

$v_3 = \sqrt{v_2 + 2} = 2$

$v_4 = \sqrt{2 + 2} = 2$

$v_5 = \sqrt{2 + 2} = 2$

$n_0 = 2$

Remarque :

Une suite constante est une suite stationnaire mais, la réciproque n'est pas toujours vraie

P_3 : Une suite (u_n) est dite positive $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

Montrer que (v_n) est strictement décroissante.

Solution

$v_n = -2n+1$; $v_{n+1} = -2n-2+1$

$v_{n+1} - v_n = -2n - 1 + 2n - 1$

$= -2$

$v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow (v_n)$ est strictement décroissante.

P_8 : Une suite (u_n) est dite strictement monotone (monotone) $\Leftrightarrow$ elle est strictement croissante (croissante) ou strictement décroissante (décroissante).

P_9 : Une suite (u_n) est dite minorée $\Leftrightarrow \forall n \in I, \exists$ $m \in \mathbb{R} / u_n \geq m$.

. La suite (u_n) est dite majorée $\Leftrightarrow \forall n \in I, \exists$ $M \in \mathbb{R} / u_n \leq M$

Finalement (u_n) est bornée $\Leftrightarrow \forall n \in I, \exists m, M \in \mathbb{R}$ $/ m \leq u_n \leq M$.

P_{10} : Une suite (u_n) est périodique $\Leftrightarrow$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+p} = u_n}$ (1)

NB : La période de cette suite, est le plus petit entier qui vérifie (1).

P_{11} : Suites convergemtes

Exemple

Les suites $u_n = 1+n$ et $v_n = n^2$ sont positives $\forall n \in \mathbb{N}$.

P_4 : Une suite (v_n) est dite négative $\iff$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$

Exemple :

Les suites $u_n = -n^2$ et $v_n = -2n-1$ sont négatives.

P_5 : Une suite (u_n) est nulle $\iff$ tous ses termes sont nuls. (u_n) est nulle $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

P_6 : Une suite (u_n) est dite strictement croissante (croissante) $\iff \forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad (u_{n+1} - u_n \geq 0)$$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

$u_{n+1} = n+1$. $\quad u_{n+1} - u_n = n+1-n = 1 > 0$

alors $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

P_7 : Une suite (u_n) est dite strictement décroissante (décroissante) $\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

$$(u_{n+1} - u_n \leq 0)$$

Exemple.

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = -2n+1$

Théorème 1

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Théorème 2

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque : Toute suite monotone et non bornée est divergente.

4) Raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ $n \in \mathbb{N}$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné, on utilise un raisonnement de type particulier appelé raisonnement par récurrence.

1°) Théorème de récurrence (Admis)

Soit $P(n)$ une propriété avec n un entier naturel.

Si :

1°) Il existe un entier naturel n_0, tel que $P(n_0)$ est vraie, (initialisation)

2°) Si $\forall k$, un entier naturel, l'implication $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie,

On conclut alors que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $(\forall n \geq n_0)$

2°) Remarques

R_1 : 1°) est appelé hypothèse de récurrence ou départ (initialisation).

R_2 : 2°) est appelé hypothèse de l'hérédité.

Exemples

① Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Solution

① :

- Au rang $n=1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ i-e } 1 = 1 \text{ vraie}$$

- * Supposons que la relation est vraie au rang $n = k$ (hypothèse de récurrence)

C'est-à-dire : $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

* Montrons que la relation est aussi vraie au rang $n = k+1$ c'est-à-dire

$$1+2+3+\dots+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

En effet, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$+2+3+\dots+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ cqfd.

Comme $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie,

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$

- Au rang $n=0$, $2^0 > 0$

$1 > 0$ vraie.

- Supposons que la relation est vraie au rang $n=k$ c'est-à-dire

$2^k > k$.

Montrons que $2^{k+1} > k+1$.

D'après l'hypothèse de recurrence, $2^k > k$

$2 \cdot 2^k > 2k$.

Il reste à demontrer que $\forall k \geq 1$,

$2k > k+1$

En effet, $k \geq 1 \Leftrightarrow 2k \geq k+1$

D'où $2^{k+1} > k+1$ cqfd

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

II - ETUDE DES SUITES NUMERIQUES

A - SUITES ARITHMETIQUES

a) Définition

Une suite (U_n) est dite arithmétique

(ou progression arithmétique) s'il existe un réel r tel que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r}$

Le réel r est appelé raison de la suite (u_n)

Exemple :

Montrons que (v_n) définie par $v_n = 3n - 2$ est une Suite arithmétique.

En effet, $v_{n+1} = 3(n+1) - 2$

$= 3n + 3 - 2 = 3n + 1$

$v_{n+1} - v_n = 3n + 1 - 3n + 2 = 3$

$v_{n+1} - v_n = 3$

Donc (v_n) est une S.A.

b) Relation entre les termes d'une suite arithmétique

Théorème 1

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de prémier terme u_0, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nr}$$

Rémarque :

Cette relation permet de calculer chaque terme de la suite connaissant u_0 et la raison r

Exemple

Soit (u_n) une S.A. telle que $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$

Calculer u_{30} et u_{50}

$u_n = u_0 + nr$

$u_{30} = 5 + 30 \times 3 = 95$ alors $\boxed{u_{30} = 95}$

• $u_{50} = 5 + 50 \times 3 = 155$; $\boxed{u_{50} = 155}$

Théorème 2

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour un entier naturel k quelconque, et pour tout entier $n \geq k$, on a :

$$\boxed{u_n = u_k + (n-k)r} \quad (*)$$

Cas particulier

• Si le premier terme de la suite est u_0, alors $k = 0$ et $\underline{u_n = u_0 + nr}$

• Si le premier terme de la suite (u_n) est u_1, alors $k = 1$ et $\underline{u_n = u_1 + (n-1)r}$

Remarques

R_1 : La relation $(*)$ permet de calculer n'importe quel terme de la suite arithmétique dont on connait la raison et 1 terme qlq (pas nécessairement le 1er)

R_2 : La relation $(*)$ permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique connaissant deux de ses termes.

Exemples

① (v_n) est une suite arithmétique telle que $v_{15} = 9$ et $r = 2$

Calculer v_{32}

② (W_n) est une suite arithmétique telle que

$w_{30} = 50$ et $w_{10} = 40$

Calculer r.

Solution

① Calculons v_{32}

$v_n = v_k + (n-k)r$

$v_{32} = v_{15} + (32-15)\times 2$

$= 9 + 34 \Rightarrow \boxed{v_{32} = 43}$

② $w_n = w_k + (n-k)r$

$w_{30} = w_{10} + (30-10)r$

$50 = 40 + 20r \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$

c) Propriété

Trois réels a, b et c pris dans cet ordre, forment une suite arithmétique $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{a+c}{2} = b} \quad \text{ou} \quad \boxed{2b = a+c}$$

d) Sens de variation d'une suite arithmétique

(U_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, (U_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$, (U_n) est strictement décroissante
- Si $r = 0$, (U_n) est constante.

Somme de n termes consécutifs

1) Nombre des termes consécutifs d'une suite

Soit $u_{a_0}, u_{a_1}, \dots u_{a_p}$ les termes consécutifs d'une suite. Leur nombre N est donné par la rélation

$$N = (\text{Dernier indice} - 1^{er}\text{ indice}) + 1$$

$$\boxed{N = (a_p - a_0) + 1}$$

2) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

* Si le prémier terme d'une S.A (U_n) est U_0 et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ alors

$$\boxed{S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}}$$

Somme d'une suite arithmétique

$$S_n = \frac{\text{nbr de t}\,(1^{er}\text{ t} + \text{Dernier})}{2}$$

parceque : $\boxed{U_n = U_0 + nr}$

ou

$$\boxed{S_n = \frac{(n+1)(2U_0 + nr)}{2}}$$

* Si le prémier terme de (U_n) est U_1 et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ alors

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)}$$

Exercice

Soit (v_n) une suite arithmétique définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 2 \end{cases}$$

1) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
2) Exprimer v_n en fonction de n
3) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

Solution

1) Mq (v_n) est une S.A.

$v_{n+1} - v_n = 2$ (v_n) est une S.A de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

2) Exprimons v_n en fonction de n

$$\boxed{v_n = 2 + 2n}$$

3) Calculons $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} = \frac{(n+1)(2+2+2n)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)(2+n)}{2}$$

$$\boxed{S_n = (n+1)(n+2)}$$

B- SUITES GÉOMÉTRIQUES

a) Définition

Une suite (U_n) est dite géométrique (ou progression géométrique) s'il existe un réel non nul q tel que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n}$

ou $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q}$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

Exemple

Montrons que la suite $v_n = 3^n$ est une SG

$v_{n+1} = 3^{n+1}$ $\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = \dfrac{\cancel{3^n} \times 3}{\cancel{3^n}} = 3$

$= 3 \cdot 3^n$; $v_{n+1} = 3 v_n$

Donc (v_n) est une SG de raison $q = 3$

b) Relation entre les termes

Théorème :

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de prémier terme u_0 alors, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 q^n}$$

- Plus généralement, pour un entier naturel k quelconque et pour tout entier $n \geq k$

$$\boxed{u_n = u_k q^{n-k}} \quad (**)$$

Remarque:

- La relation $(**)$ permet de calculer la raison q connaissant deux termes de la suite.

- Elle permet aussi de calculer n'importe quel terme de la suite connaissant la raison q et un terme quelconque (pas nécessairement le premier).

Cas particulier

Si u_1 est le premier terme de la suite, le terme général est : $\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$

Exemples:

① (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{9}{2}$ avec $u_{10} = 5$

Calculer : u_8 et u_9

② (T_n) est une suite géométrique telle que $T_6 = 64$ et $T_3 = 8$

Calculer q.

Solution

① Calculons u_8 et u_9

$u_{10} = u_8 q^2 \Leftrightarrow 5 = u_8 \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{u_8 = \frac{20}{81}}$

$u_{10} = u_9 \left(\frac{9}{2}\right)^1 \Leftrightarrow 5 = u_5\left(\frac{9}{2}\right) \Rightarrow u_5 = \frac{5}{\frac{9}{2}} = 5 \times \frac{2}{9}$

$\boxed{u_9 = \frac{10}{9}}$

② Calculons q

$T_6 = T_3 q^3$

$64 = 8q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{64}{8} = 8 \Rightarrow \boxed{q = 2}$

Sens de variation d'une suite géométrique (17)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q

$$u_{n+1} - u_n = q u_n - u_n$$
$$= u_n(q-1)$$

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1)$$

- Si $u_0 \neq 0$ et $q < 0$, alors (u_n) n'est pas monstone. La suite (u_n) est alternée : les termes successifs sont alternativement positif et négatifs.
- Si $u_1 = 0$ ou $0 \leq q < 1$ alors (u_n) est stationnaire
- Si $u_0 \neq 0$ et $q = 1$ alors (u_n) est constante
- Si $u_0 \neq 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est momdone (strictement décroissante)
- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est monotone (strictement croissante)

d) Convergence

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

$$u_n = u_0 q^n$$

- Si $0 < q < 1$, (u_n) est convergente
- Si $q = 1$, (u_n) est convergente
- Si $-1 < q < 0$ (u_n) est convergente

• Si $|q| > 1$, (U_n) est divergente

e) Relation entre les termes consecutifs x, y et z d'une suite géometrique

Trois termes x, y, z, pris dans cet ordre forment une suite (ou progression) géométrique $\Leftrightarrow$ $\boxed{y^2 = xz}$

y est appelé moyenne géométrique

f) Somme de n premiers termes d'une suite géométrique

* Si le premier terme de la suite géométrique (U_n) est U_0 et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 \dots + U_n$,

alors $\boxed{S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}}$ $(q \neq 1)$

* Si le premier terme est U_1 et

$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ alors

$\boxed{S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}}$ $q \neq 1$

× Si $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

$= U_1 q^0 + U_1 q^1 + U_1 q^2 + \dots + U_1 q^{n-1}$

$= U_1 (q^0 + q^1 + q + \dots + q^{n-1})$

D'où $\boxed{1+q^1+q^2+\cdots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}}$

Exemple : Calculer : $S_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Calculons :

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\boxed{S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

C - LIMITE D'UNE SUITE

1- Théorème des gendarmes

Soit (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites numériques vérifiant les trois conditions suivantes :

- On a $U_n \leq V_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang ;
- les suites (U_n) et (W_n) sont convergentes ;
- les suites (U_n) et (W_n) ont la même limite réelle l.

Alors la suite (V_n) est convergente et sa limite est égale à l.

Exemple :

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{2+\sin n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

Solution

Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $-1 \leq \sin n \leq 1$

Soit $1 \leq 2+\sin n \leq 3$

On a : $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{2+\sin n}{n} \leq \dfrac{3}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2 + \sin n}{n} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$

2 - Conséquence

Soit (U_n) une suite numérique et l un nombre réel.
Si, à partir d'un certain rang, on a $|U_n - l| \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors la suite (U_n) converge vers l.

3 - Limite d'une suite géométrique

Théorème

Soit q un réel, non nul et différent 1.

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = 0}$$

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) admet pour limite $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$$

- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Remarque.

- Lorsque $q < 0$, les termes de la suite (q^n) sont alternativement positifs et négatifs ;
  si $-1 < q < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

Exemples.

On considère la suite géométrique (U_n) de raison 2