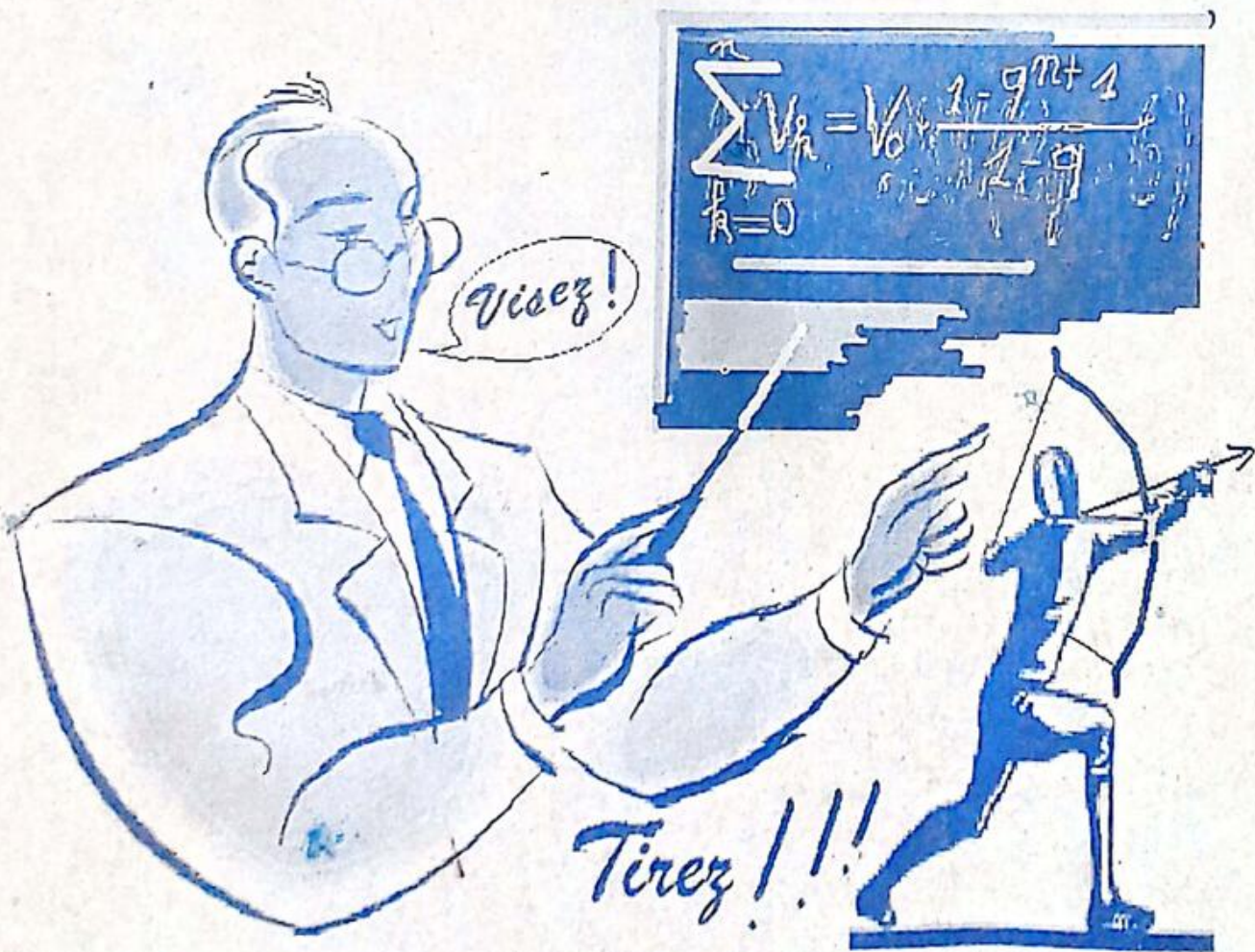


RESUME de COURS EXERCICES CORRIGES

MATHEMATIQUES CLASSES DE 1^{ère} D

Jean - Luc BANDAOGO

Professeur certifié de mathématiques au Lycée Municipal Sanny SANON de BOBODIOULASSO



Tampon de FASO LIVRES

(13^{ème} Tirage Juin 2020)



faso livres





✠ ✠ **Avant-Propos** ✠

Quelques années après la publication de ce présent document, nous sommes en partie satisfaits pour son apport à l'enseignement en général et à l'enseignement des mathématiques en particulier.

Mais ce document, comme toute œuvre humaine, a des insuffisances. Nous avons été surtout interpellés sur l'absence de quelques chapitres qui sont :

LES APPLICATIONS -
LES TRANSFORMATIONS DU PLAN -
LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE.

Nous avons beaucoup tenu compte de vos suggestions :

- C'est pour cette raison qu'à partir du 9^{ème} tirage, nous avons ajouté le chapitre concernant les APPLICATIONS.
- De même, à partir du 13^{ème} tirage nous avons ajouté des exercices non résolus aux exercices résolus des chapitres 2, 3, 4, 5, 6 et 9.

Je tiens à remercier nos chers élèves qui nous ont toujours interpellés sur quelques coquilles. Certains n'hésitent même pas à rentrer en contact avec nous encourager et pour avoir aussi plus d'éclaircissement. Cela est un motif de satisfaction.

A nos chers collègues, merci pour votre collaboration car la réussite des élèves est notre satisfaction

Pour terminer, nos remerciements vont particulièrement à Monsieur Alexis TAPSOBA professeur certifié de mathématiques au Lycée Bogodogo de Ouagadougou et doctorant en mathématiques à l'Université Ouagal Professeur Joseph KI-ZERBO et Monsieur Emmanuel MIZONZA professeur et co-fondateur du Lycée Privé EBEN EZER de Bobo-Dioulasso et à FASO-LIVRES qui nous a permis de nous exprimer.

Jean-Luc BANDAOGO(00226 64-74-74-39)

WhatsApp : 00226 70 74 11 96

Faso Livres, B.P. : 658 Tel : 20-98-28-01 (8h à 9h)
Bobo Dioulasso (BURKINA FASO)
13^{ème} Tirage, Juillet 2020
Couverture Jacques RESCH
Dépôt Légal 1^{er} trimestre 2011 ISBN 2 - 913669 - 47 - 6

Table de matières

Chapitres	Numéros des pages	
	Résumés des cours et Exercices	Corrigés des Exercices proposés
Chapitre 1 : Polynômes	3	52
Chapitre 2 : Equations – Inéquations - systèmes	4	56
Chapitre 3 : Trigonométrie	7	63
Chapitre 4 : Suites numériques	14	79
Chapitre 5 : Dénombrement	22	91
Chapitre 6 : Les applications	29	98
Chapitre 7 : Limites	37	101
Chapitre 8 : Dérivation	40	110
Chapitre 9 : Etude de fonctions	43	117

Chapitre I : Polynômes.

I- GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYNÔMES.

Soit $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ un polynôme avec a_0, a_1, \dots, a_n des réels et n un entier naturel.
 Si un réel a est un zéro ou une racine de p alors $p(x) = (x-a)q(x)$ avec $q(x)$ un polynôme de degré $(n-1)$
 Si b_1, b_2, \dots, b_n sont n zéros de p alors $p(x) = a_n(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$

II- POLYNÔME DE DEGRÉ 2.

Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2. Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$
 Si $\Delta < 0$ alors $p(x)$ n'est pas factorisable dans \mathbb{R} et $p(x)$ est du signe de « a » c'est-à-dire du coefficient de x^2 .
 Si $\Delta > 0$ alors $p(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\text{On a : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Si $\Delta = 0$ alors $p(x)$ a une racine double $x_1 = -\frac{b}{2a}$ et $p(x) = a(x-x_1)^2$

III- FRACTIONS RATIONNELLES.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes et $E = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$. Pour $x \in E$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fraction rationnelle.

Exercices

EXERCICE 1

1- Donner la forme canonique de chacun des trinômes suivants:

$$\text{a) } g(x) = \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \sqrt{3} \quad \text{b) } f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 12$$

2- Calculer $(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2$ et en déduire la résolution de l'équation $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$

3- Résoudre dans \mathbb{R} , $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$ (On pourra poser $X = (x^2 + x)$)

4- Déterminer les réels b et c pour que le polynôme f soit factorisable par g :

$$f(x) = x^3 - bx^2 + cx + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -2(x+1)(x-1)$$

EXERCICE 2

Soit le polynôme $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$

1- Vérifier que $\frac{3}{2}$ est une racine de $p(x)$

2- Résoudre dans \mathbb{R} $p(x) = 0$

3- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\frac{2x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$

EXERCICE 3

On considère le polynôme $P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 5$. Il a trois racines a, b, c sans calculer ces racines,

déterminer : $(a + b + c)$; abc ; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

EXERCICE 4

Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

1- Démontrer que pour tout x non nul, on a: $p(x) = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right]$

2- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $p(x) = 0$, puis l'inéquation $p(x) \geq 0$

EXERCICE 5

ABCD est un rectangle tel que: $BC = AB + 1$ et $AC = 2AB$. Calculer l'aire de ce rectangle

EXERCICE 6

1- Déterminer m pour que -1 soit une solution de $(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

2- Déterminer m pour que $mx^2 + 2mx + 1$ ait une racine double.

3- Déterminer les valeurs de m pour que $(m-1)x^2 + 2mx + m - 4$ ait deux racines de signes contraires.

EXERCICE 7

4- Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$

Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que p ait deux racines x_1 et x_2 telles que:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 29$; b) $|x_1 + x_2| = 3$

Dans chacun des cas, déduire les valeurs de x_1 et x_2 .

Chapitre 2 : Equations - Inéquations - Systèmes.

NB : Dans ce chapitre $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

I- EQUATIONS

1- Equations de type : $\sqrt{f(x)} = ax + b$: $\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) = (ax + b)^2 \end{cases}$

2- Equations de type : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ g(x) = f(x) \end{cases}$

II- INÉQUATIONS.

1- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$: $\sqrt{f(x)} \leq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \leq (ax + b)^2 \end{cases}$

2- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \geq ax + b$: $\sqrt{f(x)} \geq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \text{et} \end{cases} \begin{cases} ax + b \geq 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \geq (ax + b)^2 \end{cases}$

3- Inéquations de type : $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$: $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

III- SYSTÈMES DE N ÉQUATIONS À N INCONNUES.

Pour résoudre les systèmes de n équations à n inconnues nous utiliserons la méthode du pivot de Gauss qui consiste à transformer le système en un système triangulaire.

Exercices

..... Equations

EXERCICE 1

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{3x+7} = x+1$; b) $(x+1) - \sqrt{4x-15} = 4$; c) $\sqrt{4-x^2} = x-1$

EXERCICE 2

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2-1}$; b) $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$
 b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$; d) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

..... Inéquations

EXERCICE 3

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{4x^2-1} + 4x \leq 0$; d) $\sqrt{3-2x} \leq x+2$
 b) $\sqrt{x^2-4} < x+3$; c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 1$

EXERCICE 4

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{x^2-2x} > 1-x$; b) $\sqrt{3(x^2-1)} \geq 2x-1$; c) $\sqrt{x^2+6x+6} \geq |2x+1|$

EXERCICE 5

Résoudre dans IR : a) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{2x^2+3x-2} \leq \sqrt{x^2-2}$
 c) $\sqrt{-x+4} \geq \sqrt{x^2+2x}$; d) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4x+5}$

..... Systèmes

EXERCICE 6

Résoudre dans IR³ par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 2x - y - z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z - t = 1 \\ -x + 2y - z - t = 1 \\ x + y - 2z + t = 1 \\ x + y + z - 2t = -1 \end{cases}$

EXERCICE 7

Résoudre dans IR² : $\begin{cases} 7xy - 5(x+y) = 15 \\ 11xy - 8(x+y) = 22 \end{cases}$

EXERCICE 8

Déterminer un nombre de trois (3) chiffres sachant que :
 la somme de ses chiffres est égale à 17
 si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360.
 si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198.

EXERCICE 9

A Bobo 2010 la parcelle de Sogo SANOU est un rectangle de surface 480m^2 et de diagonale 34m.
 Déterminer les dimensions de cette parcelle.

EXERCICES NON RÉSOLUS**Exercice 1**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} a) \sqrt{3x+1} &= x-5 ; & b) x - \sqrt{2x+1} &= 1 ; & c) \sqrt{-x^2+4x+5} &= x-6 ; & d) \sqrt{-x^2+7x} &= \sqrt{x^2-3x+2} ; \\ e) \sqrt{10-x^2} &= \sqrt{x+2} ; & f) \sqrt{x^2+x+1} &= \sqrt{2x^2+2x-1} ; & g) \sqrt{x^2-7x+1} &= \sqrt{x-5} ; \\ h) \sqrt{x+2} &= 2x+1. \end{aligned}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations ci-dessous :

$$\begin{aligned} a) \sqrt{4-x^2} &\leq 1-x ; & b) \sqrt{3x+1} &< x-5 ; & c) \sqrt{x+2} &> 3x+4 ; & d) \sqrt{3-2x} &\geq \sqrt{x-1} ; \\ e) \sqrt{x^2-1} &< \sqrt{9-4x^2} ; & f) \sqrt{2x-3} &> 3-x ; & g) \sqrt{x+5} &< 2x ; & h) \sqrt{-x^2+7x} &\geq \sqrt{x^2-3x+2} ; \\ i) \sqrt{x^2+11} &\geq 2x-4. \end{aligned}$$

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{R}^3 :

$$a) \begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+y+2z=-2 \\ x+y+2z=-6 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} x+4y-5z=-6 \\ x-y-z=-4 \\ x+2y+z=8 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} x+3y-4=0 \\ x+y+z=15 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} .$$

Exercice 4

Lors de la fabrication de jouets en bois, on utilise:

- 300g de bois, 2h de travail et 120F de matériaux pour fabriquer un camion
- 50g de bois, 1h30mn de travail et 280F de matériaux pour fabriquer un bateau
- 50g de bois ; 1h de travail et 340F de matériaux pour fabriquer un avion

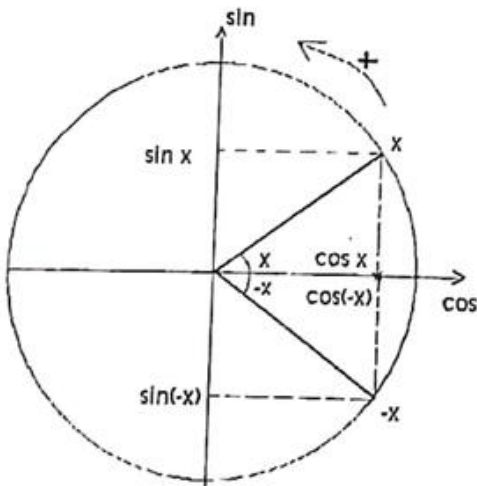
Combien peut-on fabriquer de camions, de bateaux et d'avions si on utilise exactement 5,5kg de bois, 55h de travail et 8000F de matériaux ?

Chapitre 3 : Trigonométrie

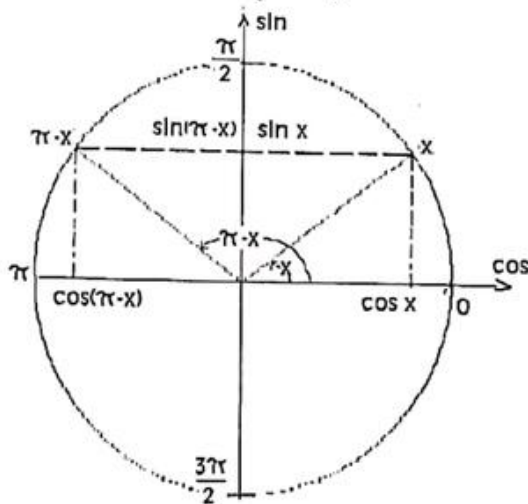
1 - LES ANGLES ASSOCIÉS.

Soit x un nombre réel.

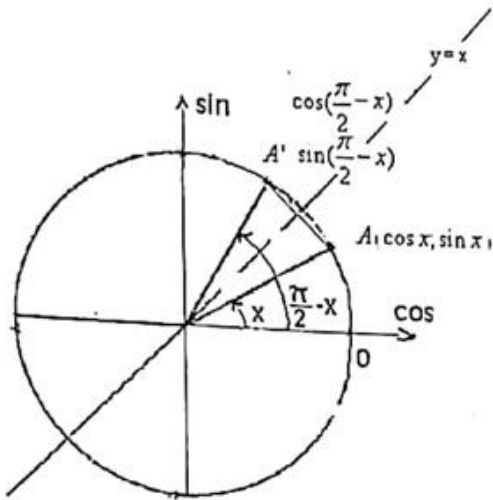
a) $\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ b) $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \end{cases}$



d) $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$



e) $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$



$$f) \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$$

$A(\cos x; \sin x)$ et $A'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Rappel

Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé. Si deux points $A(x; y)$ et $A'(x'; y')$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ alors $x=y'$ et $y=x'$.
En vertu de cette propriété, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

d'où

NB: A vous de démontrer a), b), c)

2- FORMULES D'ADDITION.

Soient a et b deux nombre réels. On a :

$$a) \begin{cases} \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases}$$

3- FORMULES DE DUPLICATION.

Soit x un réel :

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

a) Expression de $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (1) \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) : 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{et} \quad (2) - (1) : 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

b) Expression de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

4- EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

a) Résolution de $\cos x = a$ avec a un réel

* Si $a \notin [-1;1]$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

* Si $a \in [-1;1]$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{x_0 + 2k\pi; -x_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ où x_0 une solution évidente de $\cos x = a$

b) Résolution de $\sin x = b$ avec b un réel.

* Si $b \notin [-1;1]$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

* Si $b \in [-1;1]$ alors $S_{\mathbb{R}} = \{x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ où x_0 une solution évidente de $\sin x = b$

c) Equations de type $\cos ax = \sin bx$: $\cos ax = \sin bx \Rightarrow \cos ax = \cos(\frac{\pi}{2} - bx) \Rightarrow \begin{cases} ax = \frac{\pi}{2} - bx + 2k\pi \\ \text{ou} \\ ax = -(\frac{\pi}{2} - bx) + 2k\pi \end{cases}$

On peut aussi la résoudre de la façon suivante : $\cos ax = \sin bx$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - ax) = \sin bx \Rightarrow \begin{cases} bx = \frac{\pi}{2} - ax + 2k\pi \\ \text{ou} \\ bx = \pi - (\frac{\pi}{2} - ax) + 2k\pi \end{cases}$$

d) Equations de type $a \cos x + b \sin x = c$

Soit (E) : $a \cos x + b \sin x = c$ soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (E) : $\frac{a}{r} \cos x + \frac{b}{r} \sin x = \frac{c}{r}$

$(\frac{a}{r})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$ donc on peut poser $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

On a (E) : $\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{r} \Rightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{r}$

$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{r}$ est une équation que l'on peut résoudre à l'aide du a)

e) Résolution de $\tan x = c$: $\tan x = c \Rightarrow x = x_0 + k\pi$ avec k un entier où x_0 est une solution évidente de $\tan x = c$

5- INÉQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

La résolution des inéquations trigonométriques est essentiellement graphique à l'aide cercle trigonométrique.

NB : * $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ a n représentants sur le cercle trigonométrique, dans

l'intervalle $]-\pi; \pi]$ et dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

* $(2k\pi$ ou $(2k+1)\pi$) revient à $k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

* $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ revient à $(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ ou bien $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

Exercices

EXERCICE 1

Calculer : $A = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{4} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) - 2 \sin(-\pi + \frac{\pi}{4})$; $B = 2 \cos(\frac{\pi}{3}) + 4 \sin(-\frac{\pi}{6}) + 3 \sin(\frac{7\pi}{6}) - 1$

$C = -2 \sin(\frac{13\pi}{4}) + 4 \sin(\frac{3\pi}{4}) + \sin(\frac{103\pi}{2})$; $D = \sqrt{2} \sin(-\pi - \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{-5\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1$

Exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ $E = 2 \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(\pi + x) + 3 \cos(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(\pi - x)$

$$F = \sin(x - \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}) + \cos(x - \frac{11\pi}{2}) + \sin(x - \pi)$$

$$G = -3 \cos(-\frac{7\pi}{2} + x) + 2 \sin(x - \frac{3\pi}{2}) + \cos(2\pi - x)$$

EXERCICE 2

Soit x un réel donné tel que $\sin^2 x = \frac{3}{5}$.

a) Calculer $\sin x$; $\cos x$ et $\sin 2x$ si $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$; b) Calculer $\tan x$ et $\cos 2x$ si $x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$

2- On donne $\cos x = -\frac{3}{5}$; calculer $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$ sachant que $x \in [0; \pi]$

3- On considère un nombre α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$.

Calculer $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ et $\cos 2\alpha$

EXERCICE 3

1- Démontrer que : a) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$; b) $\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$

b) Pour $x \neq k\pi$, montrer que $\frac{1 + \cos 2x - \sin 2x}{1 - \cos 2x - \sin 2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

2- Calculer $A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 4

1- Montrer que $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$

2- Exprimer $\sin 3x$; $\cos 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

EXERCICE 5

1- On donne : $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

Calculer $A + B$ puis $A - B$ et déduire les exactes de A et B

2- a) Calculer $A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$ et $B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

b) En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

... .. Equations et Inéquations**EXERCICE 6**

- Résoudre dans \mathbb{R} : a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x)$;
 d) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$; e) $\sin 3x = \cos(x - \frac{\pi}{6})$; f) $\cos^2(2x - \frac{\pi}{3}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ g)
 $3 \tan^2 x - 1 = 0$; h) $\sin 2x = \tan x$; i) $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(2x + \frac{\pi}{8}) = 0$

EXERCICE 7

- 1- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$: a) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{2} \cos x + 1 \leq 0$
 2- Résoudre dans $[0; 2\pi]$: a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
 3- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$; $2 \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \leq \sqrt{2}$
 4- Résoudre dans $[0; 2\pi]$; $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 8

- 1- Résoudre dans $[0; 2\pi]$: a) $(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$; b) $\cos x(\frac{1}{2} - \sin x) < 0$
 2- Résoudre dans \mathbb{R} : a) $\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 1$

EXERCICE 9

- Résoudre dans $[0; 2\pi]$: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$
 2- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation : $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 3- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation : $\sin x > -\frac{1}{2}$
 4- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $(2 \sin x - 1)(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0$ 5- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $\frac{1 - 2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \leq 0$

EXERCICE 10

- Vérifier que $(2 + 2\sqrt{3})^2 = 16 + 8\sqrt{3}$ et résoudre dans \mathbb{R} $4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 0$
 Déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'équation $4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} = 0$
 Déduire la résolution dans $[0; 2\pi]$ de l'inéquation $4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} \leq 0$

EXERCICE 11

- 1- a) Vérifier que $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

2- Dédurre de 1-) a) la résolution dans \mathbb{R} l'équation $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

b) la résolution dans $]-\pi; \pi]$ $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

EXERCICE 12

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $A(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$

1- a) Ecrire $A(x)$ sous la forme $a\cos(2x + \beta)$ (avec $a > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$)

b) Résoudre $A(x) = -1$ dans $[0; 2\pi]$

2- Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leq 0$

3- Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x$; b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice 1

1- Soit x un réel donné tel que $\cos^2 x = \frac{4}{5}$.

a) Calculer $\sin x$; $\cos x$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; b) Calculer $\tan x$ et $\cos 2x$ si $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

2- Démontrer que pour tous réels a et b : $\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$

3- Calculer $K = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}$

4- Démontrer que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5- Démontrer que pour tout réel x , $\sin^4 x \leq \sin^2 x$.

Exercice 2

1- Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\sin x = 0,5$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x = 1 + \sqrt{3}$; d) $\cos\left(\frac{2\pi}{5} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$; f) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$; g) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; h) $\tan\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right) = \sqrt{3}$.

Exercice3Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad b) \cos x = -\frac{1}{2} ; \quad c) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad d) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -0,5 ;$$

$$e) \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) ; \quad f) \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$g) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{2} ; \quad h) 2\sin(2x) = -\sqrt{2}$$

Exercice4Résoudre dans $[0; 2\pi]$:

$$a) \cos^2 x = \frac{1}{2} ; \quad b) \sin 2x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) ; \quad c) \cos 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 ; \quad d) \cos x + 2(\cos x)(\sin 2x) = 0 .$$

Exercice5Résoudre dans \mathbb{R} et dans $]-\pi; \pi]$:

$$a) \cos x + \sin x + 1 = 0 ; \quad b) -\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{2} ; \quad c) -\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = \sqrt{3} .$$

Exercice6

$$1- \text{Résoudre dans }]-\pi; \pi] : \quad a) \sin x \leq \frac{1}{2} ; \quad b) \cos x > -\frac{1}{2} ; \quad c) \sin\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) \leq 0 .$$

$$2- \text{Résoudre dans } [0; 2\pi] : \quad a) \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad b) \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{2} ;$$

$$c) -2\cos^2 x + \cos x \geq -1$$

Exercice7Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$.1)) Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une racine de P et écrire P(x) sous forme de produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 1.2) Résoudre $P(x) < 0$.3)) Déduire la résolution de : a) $4\cos^3 x - 8\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$. b) $4\cos^3 x - 8\cos^2 x - \cos x + 2 > 0$ **Exercice8**

$$1)) \text{ Résoudre dans } [0; 2\pi[: \quad a) \sin x \geq -\frac{1}{2} ; \quad b) \cos x < -2 ; \quad c) \sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) \geq 1 .$$

$$2)) \text{ Résoudre dans }]-\pi; \pi] : \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 .$$

Exercice9Développer $(1 + \sqrt{3})^2$ puis déduire la résolution dans $]-\pi; \pi]$ de :

$$a) -4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + 4 - \sqrt{3} = 0 ; \quad b) -4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + 4 - \sqrt{3} \leq 0 .$$

Exercice 10

1)) On donne (E) : $8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$.

Vérifier que $\frac{1}{2}$ est solution de (E) puis résoudre (E).

2)) Déduire la résolution de :

a)) $8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$. b) $8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} \leq 0$.

On donne: $(4 + 4\sqrt{3})^2 = 64 + 32\sqrt{3}$ et $(4 - 4\sqrt{3})^2 = 64 - 32\sqrt{3}$

Chapitre 4 : Suites numériques.

1- DÉFINITION.

Une suite numérique (U_n) est une fonction U définie de \mathbb{N} vers \mathbb{R} $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto U(n)$ $U(n)$ est noté U_n appelé le terme d'indice n ou le terme général de la suite U .

2- VARIATION D'UNE SUITE.

Soit (U_n) une suite numérique ; on dit que :

(U_n) est croissante si $U_{n+1} \geq U_n$

(U_n) est décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$

(U_n) est constante si $U_{n+1} = U_n$

3- MAJORATION.

Soient (U_n) une suite numérique, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On dit que (U_n) est :

majorée si pour tout entier naturel n ; $U_n \leq M$

minorée si pour tout entier naturel n ; $U_n \geq m$

bornée si pour tout entier naturel n ; $m \leq U_n \leq M$

4- SUITES ARITHMÉTIQUES.

a) Définition

On dit que (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r$.
 r est appelé la raison de la suite U

Remarque : si (U_n) est une suite arithmétique alors on a : $U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$

b) Propriétés

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . On a :

$$* U_n = U_0 + nr$$

$$* U_n = U_1 + (n-1)r$$

$$* U_n = U_p + (n-p)r \text{ avec } n \text{ et } p \text{ des entiers naturels}$$

c) Somme des termes consécutifs

Soit (U_n) est une suite arithmétique.

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2} \quad S_n = \frac{\text{nbre de termes} (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} \quad S_n = U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2}$$

5- SUITES GÉOMÉTRIQUES.

a) Définition

Une suite (v_n) est dite géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que $v_{n+1} = q \cdot v_n$; q est appelé la raison de la suite (v_n) .

Remarque : si (v_n) est une suite géométrique alors $v_n^2 = (v_{n-1} \cdot v_{n+1})$

b) Propriétés

Soient (v_n) est suite géométrique de raison q , p et n des entiers naturels.

$$* v_n = v_0 q^n ; \quad * v_n = v_1 q^{n-1} ; \quad * v_n = v_p q^{n-p}$$

c) Somme des termes consécutifs

Soit (v_n) est suite géométrique de raison q

$$* S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$* S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$* S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ avec } p \text{ un entier naturel.}$$

6- RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE.

Pour démontrer qu'une propriété est vraie à un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$.

□ D'abord, on vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.

□ Secondo, on suppose que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n ($n \geq n_0$) et on démontre que la propriété est vraie pour l'ordre $n + 1$.

□ Enfin, on conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

NB : Pour les limites voir les Exercices.

Exercices

EXERCICE 1

1- Etudier le sens de variation de chacune des suites définies par :

$$\text{a) } U_n = 5 \frac{3^{n+2}}{4^{2n-1}} ; \quad \text{b) } V_n = \frac{1}{n+2} - 2$$

2- Soit V définie par récurrence par : $V_0 = 1$; $V_1 = 3$ et $V_{n+2} = \frac{1 + V_{n+1}}{2 + V_n}$. Calculer V_2 ; V_3 ; V_3 et V_4

EXERCICE 2

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

- 1- Etudier la variation de U
- 2- Ecrire sans radical au dénominateur
- 3- Calculer U_0, U_1 et U_2
- 4- Calculer $U_0 + U_1 + U_2$
- 5- Posons $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Montrer que $S_n = \sqrt{n+1}$

EXERCICE 3

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- 1- Vérifier que $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; 2- Calculer $U_1 + U_2 + U_3$.
- 3- Posons $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Montrer que $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et calculer la limite de S_n .

EXERCICE 4

(U_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme $U_0 = 2$ et de raison $r = -3$

- a) Exprimer U_n en fonction de n . Déterminer le sens de variation de U .
- b) Calculer la somme des 20 premiers termes.

EXERCICE 5

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que :

$U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = 210$ et $U_{10} + U_{11} = 42$. Calculer U_0 et la raison r .

EXERCICE 6

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que : $U_1 + U_2 = 18$ et $U_1 \cdot U_2 = 77$

- 1- Déterminer U_1 et U_2 .
- 2- Calculer U_n en fonction de n .
- 3- Calculer $S = U_4 + U_5 + \dots + U_{45} + U_{46}$.

EXERCICE 7

Soit (V_n) une suite géométrique telle que : $V_0 V_2 V_3 = 864$ et $V_0 V_1 V_3 = 432$

- 1- Déterminer V_0 et la raison q
- 2- Exprimer V_n en fonction de n .
- 3- Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$ en fonction de n .

EXERCICE 8

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . On donne $U_{50} = 406$ et $U_{100} = 806$.

- 1- Calculer U_0 et la raison r .
- 2- Calculer $S = U_{50} + U_{51} + \dots + U_{100}$.

EXERCICE 9

Un voyageur parcourt 30km le 1^{er} jour puis par la suite, chaque jour, il parcourt 5 km de plus que le précédent.

- 1- Calculer la distance d_2 parcourue le 2^{ème} jour puis la distance d_3 parcourue le 3^{ème} jour. Exprimer la distance parcourue le $n^{\text{ème}}$ jour en fonction de n .
- 2- Calculer la distance totale parcourue au bout de 10 jours de voyage.

EXERCICE 10

Le loyer mensuel d'une maison est de 50000F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%

- 1- Soit I_n le montant du loyer dans n ans.
- Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et exprimer I_n en fonction de n .

- 2- Quel sera le montant du loyer l'année dans 8 ans ?
- 3- Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?
- 4- Calculer le montant des loyers payés pendant les 10 premières années.

EXERCICE 11

Soit U et V deux (2) suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$$

- 1- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique
- 2- Exprimer U_n et V_n en fonction de n.
- 3- Calculer les limites des suites (V_n) et (U_n)

EXERCICE 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{U_n + 2} \end{cases} \quad \text{On suppose que } U_n \neq -1 \text{ et on pose } V_n = \frac{1}{U_n + 1}$$

- 1- Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0 .
- 2- Exprimer V_n et U_n en fonction de n.
- 3- Calculer la limite de V et celle de U.

EXERCICE 13

I- Soit (U_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$$

1- Montrer par récurrence que si $U_0 = 2$ alors U est constante

2- On pose ; $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 2}$

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0
- b) Exprimer V_n en fonction de n
- c) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE 14

Soit (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 & \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases}$$

1- Calculer U_1 , U_2 et U_3 .

2- Démontrer que pour tout $n \geq 4$; $U_n \geq 0$

3- On définit (V_n) par : $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0
- b) Exprimer V_n en fonction de n

c) Dédurre que $U_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

d) En posant $a_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $b_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

4- Calculer la limite de (V_n) , de (U_n) et de (S_n)

EXERCICE 15

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_1 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+2} = \frac{1}{2} a^2 U_{n+1} + (a-3)U_n \text{ avec } a \text{ un réel. Soit la suite } (V_n) \text{ définie par } V_n = U_{n+1} - U_n$$

1- On pose $a = 2$

a) Quelle est la nature de la suite (V_n) ? Justifier.

b) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Justifier.

Exprimer U_n en fonction de n et $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .

2- On pose $a = -4$

a) Quelle est la nature de la suite (V_n) ? Justifier. Exprimer V_n en fonction de n .

b) Calculer $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $T_n = U_{n+1} - 1$ et exprimer U_n en fonction de n .

EXERCICE 16

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- a) Calculer U_1 et U_2

; b) Démontrer par récurrence que : $0 \leq U_n \leq 1$

2- a) Démontrer que (U_n) est croissante.

; b) Démontrer que $U_n = \frac{3 - 3(\frac{1}{5})^n}{3 + (\frac{1}{5})^n}$

c) Calculer la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE 17

Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$

1- Calculer w_1 ; w_2 et w_3 .

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul ; on a $w_n = 2n^4 - n^2$.

3- Déterminer n_0 pour que $w_{n_0} = 29161$ On donne : $233289 = (483)^2$.

EXERCICE 18

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

1- Calculons $U_n - \frac{1}{4}U_n$ en fonction de n .

2- Dédurre l'expression de U_n en fonction de n et étudier la convergence de (U_n)

EXERCICE 19

1- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

2- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

EXERCICE 20

Soit un polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

1- Déterminer a , b et c pour que $P(x+1) - P(x) = x^2$

2- on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ (avec $n \geq 1$)

Dédurre de 1-) le calcul de S_n en fonction de n

EXERCICE 21

Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \cos \theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases} \quad n \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi$$

1- Calculer U_1 et U_2 en fonction de θ

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel, on a : $U_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3- Calculer la limite de (U_n) .

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice 1

I-) Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}.$$

1)) Donner la nature de u et expliciter u_n . 2) Calculer $T = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{85}$.

II-) Soit w la suite définie par :
$$\begin{cases} w_1 = 3 \\ \frac{1}{2} w_{n+1} = w_n \end{cases} ; n > 0.$$

1)) Donner la nature de w et expliciter w_n . 2)) Calculer $S = w_3 + w_4 + \dots + w_{58}$.

Exercice 2

Soit u la suite arithmétique définie sur \mathbb{N} telle que :

$$u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = -8 \text{ et } u_1 + u_{11} = -3$$

1)) Déterminer sa raison r et son 1^{er} terme u_0 .

2)) En déduire u_n en fonction de n .

3) On pose $S = u_{51} + u_{52} + \dots + u_{77}$

Exercice 3

Soit u la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Soit v la suite définie par : $v_n = u_n - 3$. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1^{er} terme v_0 .

3) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

Exercice 4

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0$.

a) Pour quelle valeur de a la suite u est une suite arithmétique ? Préciser sa raison.

b) Pour quelle valeur de b la suite u est une suite géométrique ? Préciser sa raison.

Exercice 5

La plante que vous venez d'acheter mesure 0,50m et doit grandir de 0,30m la première année, puis chaque année des $\frac{9}{10}$ de la hauteur gagnée l'année précédente.

La hauteur sans plafond de votre logement est 2,50m.

Soit U_1 la hauteur gagnée la première et U_n , la hauteur gagnée la $n^{\text{ième}}$ année.

- 1)) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
- 2)) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n
- 3)) Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Précisez sa raison.
- 4)) Exprimer U_n en fonction de n
- 5)) Au bout de combien d'années, votre plafond sera-t-il atteint par la plante ?

Exercice 6

Le conseil d'administration d'une entreprise décide d'augmenter les salaires mensuels au début de chaque année civile de la façon suivante : le nouveau salaire mensuel est obtenu en ajoutant forfaitairement 1000 F au salaire de l'année précédente augmenté de 5%.

Soit $u_0=30000$ F le salaire mensuel d'un ouvrier en 2010, u_1 son salaire mensuel en 2011, u_n son salaire mensuel en 2010+n.

- 1) Calculer u_1 ; u_2 .
- 2) Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- 3) Soit v la suite définie sur \mathbb{N} par : $v_n=u_n+20000$
 - a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
 - b) En déduire v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
 - c) Déduire son salaire mensuel en 2019
- 4) Au bout de combien d'années de travail, le salaire mensuel de cet ouvrier atteindra 80000 F.
- 5) Calculer ce que l'entreprise à verser comme salaire à cet ouvrier de janvier 2010 à décembre 2020.

Exercice 7

Soit u la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

- 1- a) Démontrer que pour tout entier non nul : $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$
- b) Prouver que pour tout entier non nul : $0 < u_n < 1$
- c) Etudier le sens de variation de u .
- 2- On pose $X_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$
 - a) démontrer par récurrence que pour tout entier non nul, on a : $X_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$
 - b) déterminer la limite de la suite X .

Exercice 8

I- Soient u et v deux(2) suites définies sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et $v_n = \frac{1}{3-u_n}$

Montrer que v est une arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme

Remarque : On a : $6 - x = (3 - x) + 3$

II- Soit w une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = -9 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 99 \end{cases}$

Calculer w_0 la raison r puis déduire w_n en fonction de n

III- La suite u est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

Démontrer par récurrence que u est une suite constante

Exercice 9

On définit deux suites U et V pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1-on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$.

Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n .

2- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer par récurrence que (t_n) est une suite constante.

3- Déduire des questions précédentes l'expression u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 10

Soit u et v les suites définies par : $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}$$

1)) Calculer $v_0; v_1$. 2)) Montrer que v est une suite géométrique dont précisera la raison.

3)) Expliciter v_n puis u_n . 4)) Calculer en fonction de n , $s_n = \sum_{i=0}^n v_i$. 5)) Déduire $s'_n = \sum_{i=0}^n u_i$ en fonction

de n .

Exercice 11

Une voiture achetée à 5 000 000 FCFA en 2000 perd chaque année 10% de sa valeur (on dit qu'elle s'amortit).

On désigne par U_n la valeur de cette voiture en $2000+n$ (ainsi $U_0=5\ 000\ 000$)

- 1) Calculer sa valeur en 2001, en 2002.
- 2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n . Déduire la nature de la suite U et exprimer U_n en fonction de n .
- 3) Quelle était la valeur de cette voiture en 2005 ? en 2011 ?
- 4) A partir de quelle année la voiture va perdre la moitié de sa valeur ?

Chapitre 5 : Dénombrement

I- CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI.

Définition

Soit A un ensemble à n éléments, on dit que A est un ensemble fini et son cardinal est n qui se note : $\text{Card}A = n$.

Cardinal de la *réunion* de deux ensembles finis. Soient A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$$

II- PRODUIT CARTÉSIEN ET P-LISTES.

Soient E_1, E_2, \dots, E_p des ensembles finis non vides. On appelle **produit cartésien** de p ensembles noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \{(x_1; x_2; \dots; x_p) / x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p\}$.

(x_1, x_2, \dots, x_p) est appelé un p -uplet ou p -listes.

Remarque : Si $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$ alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est noté E^p .

Théorème : Si E_1, E_2, \dots, E_p sont des ensembles finis non vides, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est fini et : $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{Card}E_1 \times \text{Card}E_2 \times \dots \times \text{Card}E_p$.

Remarque : $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}E)^p$.

III- P-LISTES D'ÉLÉMENTS DISTINCTS.

1- ARRANGEMENTS.

Définition

Soit $p \geq 1$ et E ensemble fini non vide. On appelle **arrangement de p éléments d'éléments de E** ou **p -arrangements d'éléments de E** toute p -listes d'éléments de E tous distincts.

Théorème : Soit E un ensemble fini non vide tel que $\text{Card}E = n$. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E noté A_n^p est donné par la formule : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

Exemple : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

2- PERMUTATION.Définition

Soit E un ensemble fini non vide tel que $\text{Card}E = n$. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E.

Définition

Pour $n \geq 2$, on appelle factorielle n noté $n!$ le nombre défini par $n! = n(n-1)\dots 2 \times 1$;
On pose $0! = 1$ et $1! = 1$.

Théorème : Soit E un ensemble fini tel que $\text{Card}E = n$. Le nombre de permutation est $n!$

Remarque : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

IV- PARTIES À P ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE À N ÉLÉMENTS.Définition

Les parties (ou sous-ensembles) à p éléments d'un ensemble E à n éléments sont appelées des combinaisons de p éléments de E ou p -combinaisons d'éléments de E.

Théorème : Le nombre de p -combinaisons d'éléments de E ($1 \leq p \leq n$) est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Remarque : $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^{n-1} = n$; $C_n^{n-p} = C_n^p$

Tableau récapitulatif

Tirages	Successifs	simultanés
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p p-arrangements	C_n^p p-combinaisons

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} ; C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

V- TRIANGLE DE PASCAL – FORMULE DU BINÔME.**1- FORMULE DU BINÔME.**

Pour tous nombres a et b et pour tout $n \geq 1$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

2- TRIANGLE DE PASCAL.

La formule $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ permet de construire des nombres C_n^p de proche en proche dans un tableau appelé triangle de Pascal.

p \ n	0	1	2	3	4	5	p-1	p
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
.		
.			
n	1								

N.B : La plupart des problèmes de dénombrement se résument souvent aux trois types de tirage. Le tirage simultané, le tirage successif avec remise et le tirage successif sans remise. Modéliser un problème en dénombrement revient à l'identifier à un des trois types de tirages si cela est possible.

Exercices

EXERCICE 1

Dans une classe les élèves ont le choix d'apprendre le latin ou l'arabe.

Il y a 40 élèves qui apprennent le latin, 30 l'arabe et 10 apprennent l'arabe et le latin.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

EXERCICE 2

Dans une classe de 35 élèves, le professeur de mathématiques pose les deux questions suivantes à chacun de ses élèves, qui répondent pour chaque question par OUI ou NON.

- Question1 : aimez-vous les mathématiques ?
- Question2 : aimez-vous votre lycée ?

Le professeur constate que,

- 20 élèves ont répondu OUI à la question1
- 12 élèves ont répondu NON à la question2
- 5 élèves ont répondu NON aux deux questions.

Calculer le nombre d'élèves ayant répondu OUI aux deux questions.

EXERCICE 3

1- Calculer en fonction de n , C_n^2 et C_n^3 puis résoudre $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

2- Résoudre dans \mathbb{N} ; $C_n^5 = C_n^7$

3- Combien y a-t-il de nombres entiers naturels à trois (3) chiffres dont les chiffres sont différents.

4- Combien y a-t-il de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui divisibles par 5.

5- Développer $(2x-1)^5$ et $(x-1)^6$

EXERCICE 4

Quatre personnes ayant chacun un permis de conduire désirent voyager à bord d'un véhicule de quatre places. De combien de manières peuvent-ils s'asseoir ?

EXERCICE 5

Les 20 membres d'une association se rencontrent pour une réunion. Combien de poignées de mains ont été échangées ?

EXERCICE 6

Les numéros d'immatriculation des véhicules et motos au Burkina-Faso sont formés du numéro de la province suivi de deux lettres qui à leur tour sont suivies de 4 chiffres.

Combien de numéros d'immatriculation la direction des transports dispose-t-elle ?

NB : Il y a 45 provinces au Burkina.

EXERCICE 7

Un prestataire de téléphonie mobile voudrait mettre à la disposition de sa clientèle des numéros commençant par 81, 82 et 83 suivis de 6 chiffres. Combien de numéros pourra-t-il disposer ?

EXERCICE 8

On considère 6 points deux à deux distincts situés sur un même cercle.

Combien peut-on construire de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces 6 points.

EXERCICE 9

Un jury est composé de 5 membres pris dans une liste comportant 10 hommes et 8 femmes.

1- Combien de jurys peut-on former ?

2- Combien de jurys peut-on former comprenant : a) seulement des femmes ?

b) seulement 3 hommes ? c) au moins 3 hommes ? d) au plus 1 femme ?

EXERCICE 10

Partant de la ville de Garango, un itinéraire d'un groupe de touristes italiens doit passer dans les villes de Dori, Bobo, Ouaga, Fada, Réo.

1) Il y a combien d'itinéraires possibles ?

2) Combien de ces itinéraires sont tels que Ouaga est la 1^{ère} ville visitée ?

3) Combien d'itinéraires sont tels que Bobo est la 2^{ème} ville visitée et Fada la 4^{ème} ville visitée ?

4) Combien d'itinéraires sont tels que la ville Bobo soit visitée avant la ville de Dori ?

EXERCICE 11

Huit (8) coureurs dont un jamaïcain (Usain BOLT), trois (3) américains, deux (2) britanniques et deux (2) burkinabé participent à la finale olympique du 100m.

1- Combien de podiums sont possibles ? (un podium est constitué par un 1^{er}, un 2^{ème} et un 3^{ème} coureur).

2- Combien de podiums sont tels que Usain BOLT est premier ?

3- Combien de podiums sont tels que les deux premiers sont burkinabés ?

4- Combien de podiums sont tels que le 1^{er} coureur est américain et le 2^{ème} britannique ?

EXERCICE 12

Les êtres humains sont repartis suivant la composition du sang en quatre groupes : O, A, B, AB. Dans une assemblée de dix donneurs de sang quatre sont du groupe O trois du groupe A deux du groupe B et un du groupe AB. On choisit au hasard trois (3) personnes de l'assemblée.

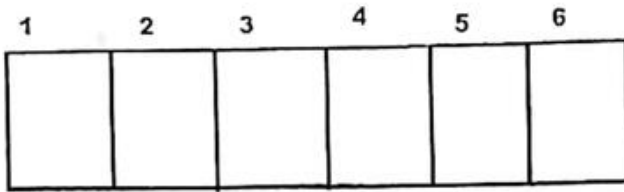
☐ Combien y a-t-il de choix possibles.

☐ Combien y en a-t-il où les trois personnes appartiennent au même groupe.

☐ Combien y en a-t-il où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin.

EXERCICE 13

On dispose de trois (3) couleurs (rouge, jaune, vert) pour colorier le motif ci-dessous formés de 6 cases.



On désire que deux cases voisines ne soient pas de la même couleur.

Déterminer alors :

- Le nombre de coloriages possibles
- Le nombre de coloriages possibles utilisant la couleur rouge et la couleur verte.
- Le nombre de coloriages utilisant exactement deux des trois couleurs
- Le nombre de coloriages utilisant une fois la couleur jaune

EXERCICE 14

Une caisse contient 9 pièces indiscernables au toucher numérotées de 1 à 9.

1- On tire simultanément 3 pièces de la caisse.

- Combien de tirages possibles y a-t-il ?
- Combien de tirages comportent au moins une pièce paire ?

2- On tire maintenant successivement 3 pièces avec remise

- Combien de tirages possibles y a-t-il ?
- Il y a combien de tirages possibles avec une 1^{ère} pièce paire tirée ?
- Il y a combien de tirages possibles comportant des pièces impaires seulement ?
- Il y a combien de tirages possibles comportant une seule pièce paire ?

EXERCICE 15

Dans une course de chevaux, il y a 15 partants dont 9 males et 6 femelles. Dans une arrivée, il n'y a pas d'ex-æquo.

- Combien a-t-on de quartés (4 chevaux) dans l'ordre ?
- Combien a-t-on de tiercés (3 chevaux) dans l'ordre ?
- Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre composés uniquement de femelles.
- Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre où l'on a un seul male
- Combien a-t-on de tiercés dans l'ordre où le 1^{er} cheval est male et 2^{ème} femelle.

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice 1

Un sac contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 5 boules rouges, toutes différentes et indiscernables au toucher.

On tire successivement 3 boules du sac, en remettant à chaque fois la boule tirée.

- Il y a combien de tirages possibles.
- Il y a combien de tirages où la 1^{ère} boule tirée est rouge.
- Il y a combien de tirages où toutes les 3 boules sont de même couleur.

Exercice 2

Une urne contient 4 boules noires et 5 boules blanches

- On tire simultanément 3 boules de l'urne

- 1- Il y a combien de tirages possibles
 - 2- Il y a combien de tirages où les trois boules sont toutes blanches.
 - 3- Il y a combien de tirages où on a au plus 2 boules blanches parmi les boules tirées.
- II- On tire maintenant successivement trois boules de l'urne en ne remettant pas la boule tirée
- 1- Il y a combien de tirages possibles.
 - 2- Il y a combien de tirages où la 1^{ère} boule tirée est noire.
 - 3- Il y a combien de tirages où les boules tirées sont de même couleur.

Exercice3

Une entreprise emploie des ouvriers qui sont fichés à l'aide des numéros matricules de 4 chiffres distincts ou non. Les chiffres sont choisis dans l'ensemble : $\{1; 2; 3; 4; 5\}$

- 1- Démontrer que le nombre maximal d'ouvriers que le directeur peut employer est 625.
- 2- Dans la suite de l'exercice, l'entreprise emploie 625 ouvriers répartis en trois(3) catégories :
 - Catégorie A comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent au moins deux fois le chiffre 2.
 - Catégorie B comprend les ouvriers dont les numéros matricules contiennent une seule fois le chiffre 2.
 - Catégorie C comprend les ouvriers dont les numéros matricules ne contiennent pas le chiffre 2.
 Déterminer les nombre d'ouvriers de chaque catégorie.

Exercice4

9 personnes dont Cinq(5) garçons et quatre(4) filles doivent s'asseoir dans une rangée de 9 chaises numérotées de 1 à 9 de sorte que deux garçons ou deux filles ne s'asseyent pas cote à cote.

- 1- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir ?
- 2- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si le garçons X veut être encadré par les filles Y et Z ?
- 3- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si le garçon X et la fille Y ne désirent pas s'asseoir cote à cote ?
- 4- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si la fille Y et le garçon X désirent s'asseoir cote à cote ?
- 5- De combien de manières peuvent-elles s'asseoir si la fille Y désire s'asseoir sur la chaise numéro 3 ?

Exercice5

Dans une famille, il y a quatre (4) filles et trois garçons.
Le père décide d'aller faire des achats en ville et d'emmener trois de ses enfants.

- 1- Combien de façons distinctes peut-il faire son choix ?

- 2- De combien de façons distinctes peut-il faire son choix s'il veut être accompagné :
- a) de deux filles et de d'un garçon ? b) d'au moins une fille ?
- 3- Le père et les trois enfants qui l'accompagnent prennent un autobus. Dans cet autobus, il reste neuf (9) places assises libres numérotées. De combien de façons distincts le père et ses trois enfants peuvent-ils prendre place ?

Exercice 6

Au cinquantenaire du FESPACO (FESPACO 2019), il y avait 20 films « fiction long métrage » dont 3 films burkinabé et un film rwandais pour la compétition de « l'Étalon d'or ».

Le jury visionne par jour un lot de 4 films appelé « tétralogie » .

- 1) Combien de jours, le jury mettra-t-il pour voir tous les films ?
- 2) a) On peut former combien de tétralogies possibles ? b) Il y a combien de tétralogies où l'on a un seul film burkinabé ? c) Il y a combien de tétralogies où l'on a au plus 1 film burkinabé ?
- 3) Au 3^{ème} jour, le jury a visionné une tétralogie composée de : 2 films burkinabé, le film rwandais et un film tunisien.
 - a) De combien de manières, le comité d'organisation va programmer ces 4 films ?
 - b) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si les films burkinabé sont visionnés en 1^{ères} positions ?
 - c) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si le film rwandais est visionné premièrement et un film burkinabé dernièrement ?
 - d) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer si le film tunisien est visionné premièrement et le film rwandais dernièrement ?
 - e) Y a-t-il combien de manières possibles de programmer de telle sorte que les films burkinabé ne se suivent pas.

Exercice 7

Afin d'équiper sa cuisine, FOFANA désire acquérir un réfrigérateur, un four, et une cuisinière. Le magasin lui propose :

- 3 modèles de réfrigérateurs, dont un de marque chinoise
- 4 modèles de fours, dont deux (2) de marque chinoise
- 5 modèles de cuisinières, dont deux (2) de marque chinoise

1- Dénombrer les choix possibles d'équipements de FOFANA.

2- Dénombrer les choix d'équipements tels que :

- a) les trois éléments payés sont de marque chinoise. b) au moins deux des trois éléments sont de marque chinoise. c) aucun des trois éléments ne soit de marque chinoise. d) le four est de marque chinoise.

Exercice 8 : énigme

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 20 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

Chapitre 6 : Les Applications

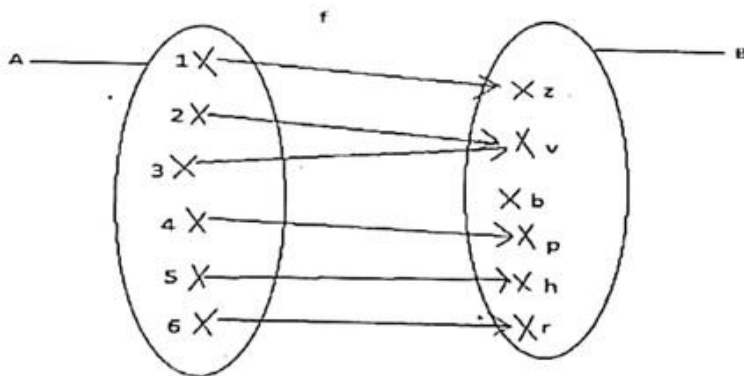
DÉFINITION

Une application définie d'un ensemble A vers un ensemble B, est une **relation** qui lie chaque élément de l'ensemble A à **un seul** élément de l'ensemble B.

L'ensemble A est appelé ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée.

Exemple

Voici le graphe d'une application $f: A \rightarrow B$



- L'image de 1 par f est z, on note $f(1) = z$.
- L'antécédent de p par f est 4.

1. APPLICATIONS INJECTIVES

a) Définitions

Définition 1

f étant une application définie de A vers B, si pour tous x_1 et x_2 de A tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 = x_2$ alors f est injective.

Définition 2

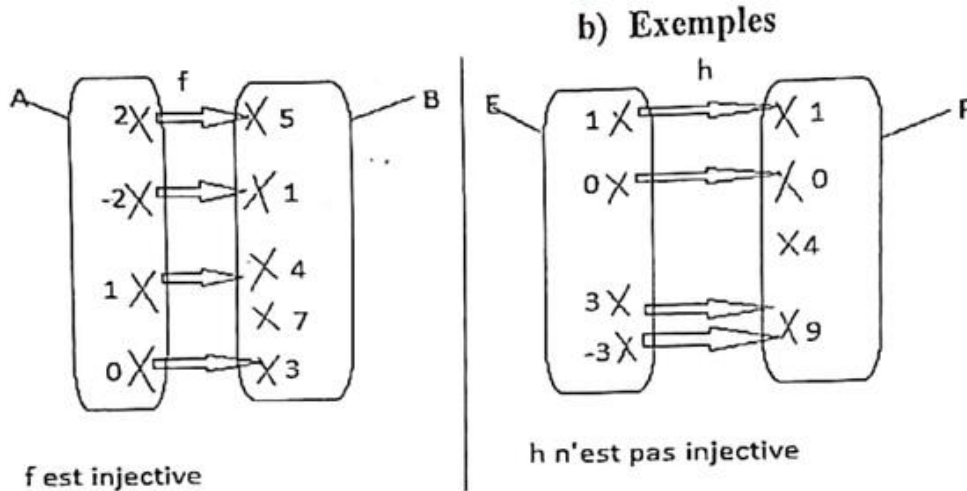
f étant une application définie de A vers B, si pour tous x_1 et x_2 de A tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors f est injective.

Définition 3

Soit f une application définie de A vers B. f est injective si tout élément y de B a **au plus** un antécédent par f .

Propriété

f étant une application définie de A vers B , si l'équation $f(x) = y$ avec $y \in B$ admet au plus une solution dans A alors f est injective.

**3) APPLICATIONS SURJECTIVES****a) Définitions**Définition 1

Soit f une application définie de A vers B , f est surjective si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

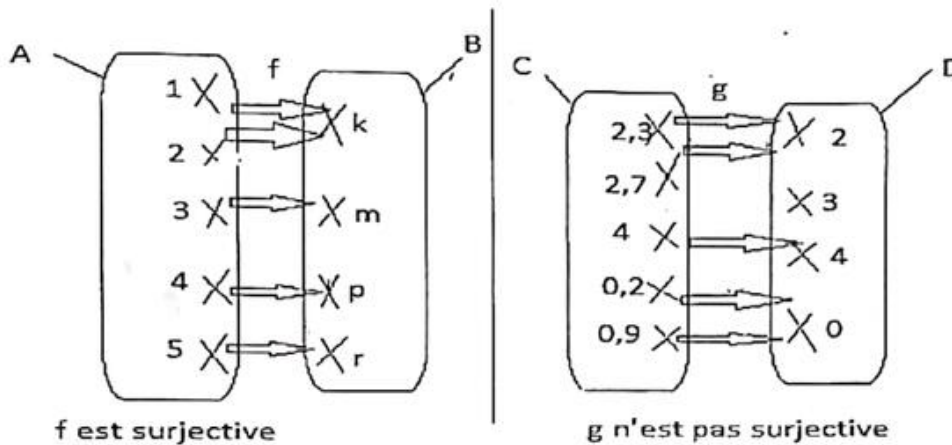
Définition 2

Une application f est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée a **au moins un** antécédent par f .

Propriété

Soit f une application définie de A vers B . Si l'équation $f(x) = y$ avec $y \in B$ admet **au moins** une solution dans A alors f est surjective.

b)) Exemples



4- APPLICATIONS BIJECTIVES

a) Définitions

Définition 1

Soit f une application définie de A vers B . f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

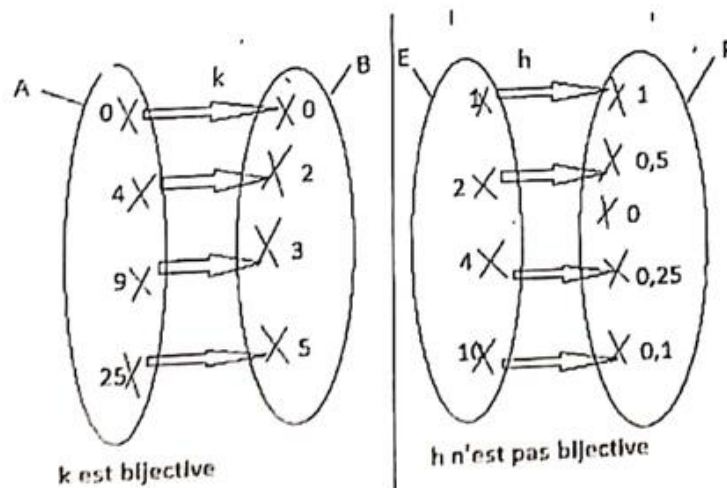
Définition 2

Soit f une application définie de A vers B . f est bijective si et seulement si tout élément de B a un et un seul antécédent par f .

Propriété

Soit f une application définie de A vers B . Si l'équation $f(x) = y$ avec $y \in B$ admet une et une seule solution dans A alors f est une bijection.

b) Exemples



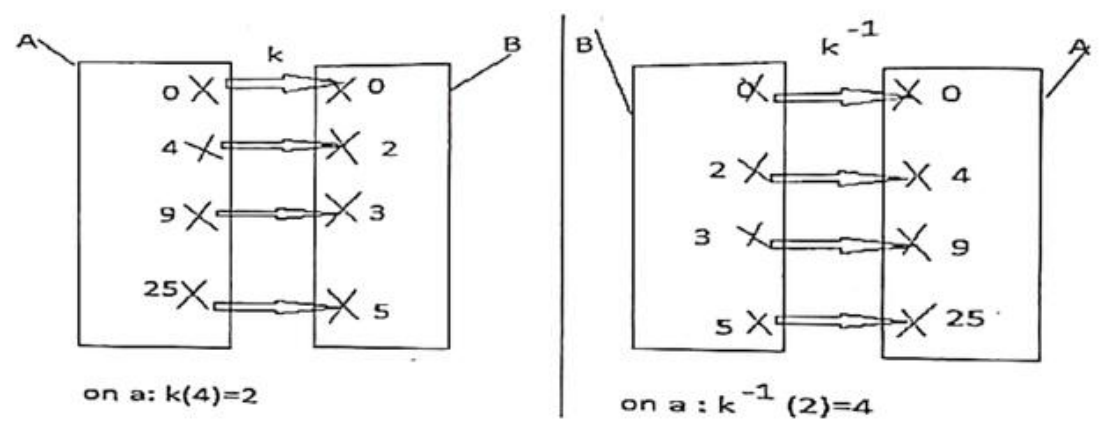
5- BIJECTION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION

Définition

Soit f une application définie de A vers B . Si $f: A \rightarrow B$ est une bijection alors

l'application $h: B \rightarrow A$ est appelée la bijection réciproque de f et h est notée f^{-1} .

Exemple



6- APPLICATIONS COMPOSÉES

Définition

Soit $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$ deux (2) applications

L'application $h: A \rightarrow C$ est appelé l'application composée de g par f notée $g \circ f$.

Exemple

Soit $f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1; 1[$ et $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$x \mapsto \cos x$

$x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$

On a : $g \circ f:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1+[f(x)]^2}{1-[f(x)]^2} = \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

Remarque

Soit f une application bijective définie de A vers B , de bijection réciproque f^{-1} définie de B vers A .
 Pour tout a de A , $f^{-1} \circ f(a) = a$ et pour tout b de B , $f \circ f^{-1}(b) = b$.

7- APPLICATIONS ET FONCTIONS NUMÉRIQUES

- Une application est définie d'un ensemble A vers un ensemble B .
 Par contre une fonction numérique, elle est définie seulement d'un sous-ensemble de \mathbb{R} vers un autre sous-ensemble de \mathbb{R} .
- Pour une application f , chaque élément de l'ensemble de départ a obligatoirement une image par f .
 Par contre, pour une fonction numérique g , chaque élément de l'ensemble de départ a **au plus** une image par g .

Remarque

Une fonction numérique f définie sur son domaine de définition vers \mathbb{R} est une application.

Exemple

$q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{2x-1}{x-2}$ est une fonction. Le domaine de définition de q est $D_q = \mathbb{R} - \{2\}$

$f: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ est une fonction et aussi une application.

*Exercices*Exercice 1

$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

Soit h l'application définie par :

$$k \mapsto k^2$$

- h est-elle injective ?
- h est-elle surjective ?

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

$$\text{a) } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad ; \quad \text{b) } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad \text{c) } h: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad \text{d) } j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto 2n-3 \quad ; \quad x \mapsto x^2 \quad ; \quad x \mapsto x^2 \quad ; \quad x \mapsto E(x) \text{ où } E(x)$$

est la partie entière de x .

Exercice 3

Soit l'application $g: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto g(x) = |x|$$

- a) Montrer que g est surjective. b) Montrer que g n'est pas injective.
c) Trouver un autre ensemble de départ pour que g soit bijective.

Exercice 4

Montrer que chacune des applications est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$\text{a) } f:]-\infty; -3] \rightarrow [1; +\infty[\quad \text{b) } g:]-\infty; 0[\rightarrow]-2; +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 + 6x + 10 \quad x \mapsto \frac{2x+1}{-x}$$

Exercice 5

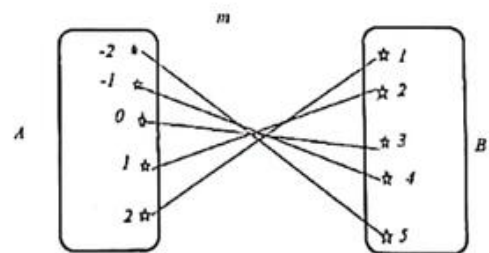
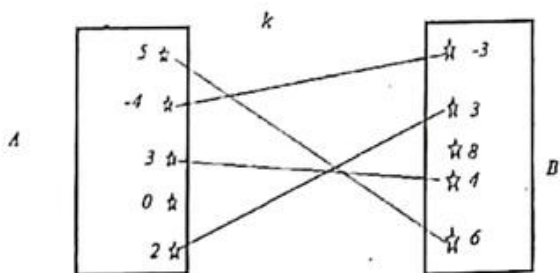
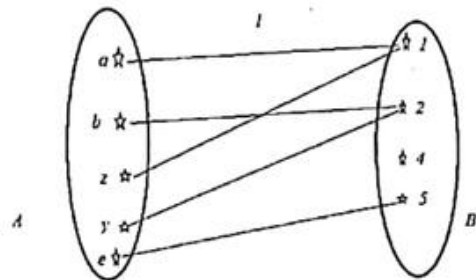
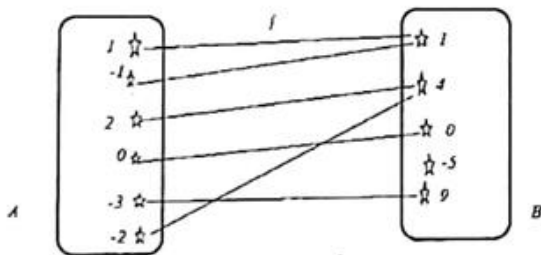
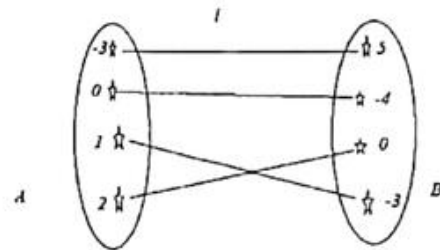
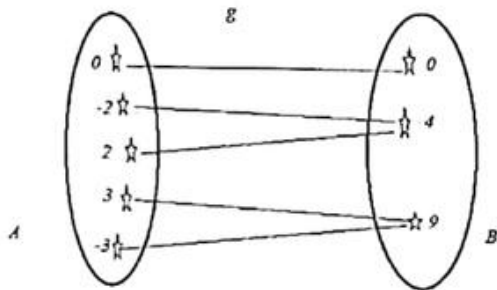
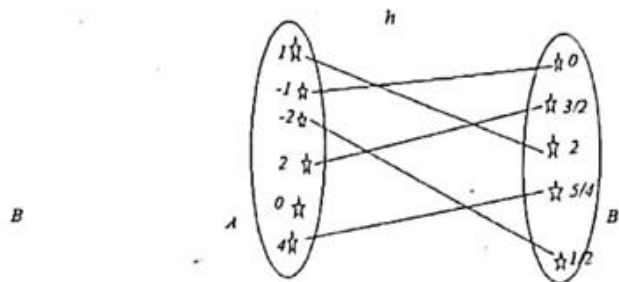
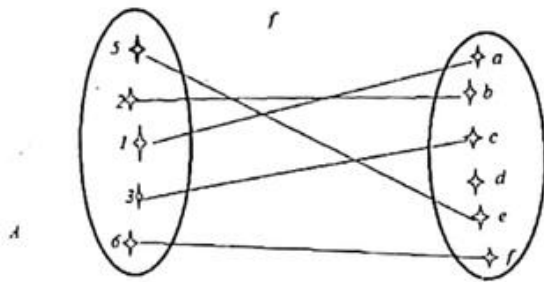
- 1) soit k l'application définie par $k(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Trouver $f(x); g(x)$ expressions de deux(2) applications pour que $k(x) = (f \circ g)(x)$.
- 2) Soit j l'application définie par $j(x) = \sqrt{3 + \cos^2 x}$. Trouver $f(x); g(x)$ et $h(x)$ expressions de trois(3) applications pour que $j(x) = (f \circ g \circ h)(x)$.

EXERCICES NON RÉSOLUS

Exercice 1

Pour chacune des relations définie de A vers B :

- a) Est-elle une application ?
b) Au cas où elle est une application, est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.



Exercice 2

Dans chacun des cas suivants dire si l'application *f* est injective, surjective ou bijective.

1) *f* est l'application de \mathbb{N} vers \mathbb{N} qui à tout entier naturel *n*, on associe la somme de ses chiffres.

2) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

;

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$x \mapsto 2x^2 - 1$$

Exercice 3

1) Soit $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \quad \text{a) Vérifier que } f \text{ est une application.}$$

b)) Montrer que f est bijective. c)) Donner l'application réciproque de f .

2) Soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3) Soit l'application $f :]-\infty; 1] \rightarrow [2; +\infty[$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4

On donne les applications :

$$f : I \rightarrow [0; +\infty[\quad ; \quad g : J \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad h : K \rightarrow \mathbb{R}^+ .$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{4-x} \quad ; \quad x \mapsto g(x) = x^2$$

intervalles de \mathbb{R} .

$$; \quad x \mapsto h(x) = |x| \quad \text{où } I, J \text{ et } K \text{ sont des}$$

1) Déterminer I, J et K .

2) Déterminer les ensembles de départ de $g \circ f$ et $h \circ f$ et expliciter $g \circ f(x)$ et $h \circ f(x)$.

Chapitre 7: Limites de fonctions

I- OPÉRATIONS SUR LES LIMITES.

Soient f et g des fonctions et l et l' des réels. Soit « a » un réel pouvant être égal aussi à $(+\infty)$ ou $(-\infty)$

1- LIMITE DE : $F+G$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$

2- LIMITE DE : $F \cdot G$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$l'(l' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	ll'	$+\infty$ si $(l' > 0)$ $-\infty$ si $(l' < 0)$	F.I	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3- LIMITE DE : F/G .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	0	∞	∞
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'(l' \neq 0)$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$l'(l' \neq 0)$	∞
alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	F.I	∞	F.I

NB : F.I (Forme Indéterminée)

II- PROPRIÉTÉS.

Propriété 1

La limite à l'infini d'un polynôme est égale à la limite à l'infini du monôme de plus haut degré.

Propriété 2

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du rapport des monômes de plus haut degré.

Propriété 3

Soient f une fonction et a un réel. Si f est définie en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Propriété 4

Soient a et b deux réels pouvant être infinis. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ alors $\lim_{x \rightarrow a} [f \circ g(x)] = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$

III- LIMITES ET ORDRE.

Théorème 1 : f et u étant deux fonctions définies sur $]a; +\infty[$,

si pour x assez grand $f(x) \geq u(x)$ (respectivement $f(x) \leq u(x)$) et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

(respectivement $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$) alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$)

Théorème 2 : f, u et v étant trois fonctions définies sur $]a; +\infty[$,

si pour x assez grand on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Limites remarquables : 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exercices

EXERCICE 1

1- Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

a) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = x - \sqrt{x}$; c) $f(x) = -3\sqrt{2}$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{1+x}$

2- Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, b) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 40x + 123874$; c) $f(x) = -x\sqrt{2} + 1$

d) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$; e) $f(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{2}-2}$; f) $f(x) = \frac{x+6}{4-x^2}$

g) $f(x) = \frac{4-5x}{2x+3}$; h) $f(x) = \frac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3}$; i) $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x - 11}{x^2 - 14x + 3}$

EXERCICE 2

Etudier la limite de f en a (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite de a)

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$; $a=1$; b) $f(x) = \frac{1-2x}{x+2}$; $a=-2$; c) $f(x) = \frac{-2}{(3-x)^2}$; $a=3$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$; $a=2$; e) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$; $a=2$; f) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$; $a=4$

g) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}$; $a=3$; h) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$; $a=1$; i) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2}$; $a=2$

j) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}$; $a=0$; k) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; $a=1$; l) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $a=3$

m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $a=0$.

EXERCICE 3

Calculer les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$,

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} + x$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1} & ; & & \text{d) } f(x) &= \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} \\ \text{e) } f(x) &= \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1} & ; & & \text{f) } f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{4x^2 + 3}} & ; & & \text{g) } f(x) &= \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} \end{aligned}$$

EXERCICE 4

Calculer les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x - \sin x & ; & & \text{b) } f(x) &= \frac{\cos x}{x^2 + 1} & ; & & \text{c) } f(x) &= x\sqrt{1 + \sin^2 x} & ; & & \text{d) } f(x) &= \sqrt{x^2 + \cos^2 x} \\ \text{e) } f(x) &= \frac{x - 1}{\sin^2 x + 2} & ; & & \text{f) } f(x) &= \frac{x}{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & ; & & \text{g) } f(x) &= \frac{x + \cos x}{x + \sin x} \end{aligned}$$

EXERCICE 5

1) Calculer la limite de f en 0.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{\sin 2x}{3x} & ; & & \text{b) } f(x) &= \frac{\sin 4x}{5x} & ; & & \text{c) } f(x) &= \frac{1 - \cos 4x}{4x^2} \\ \text{d) } f(x) &= \frac{x}{\sin x} & ; & & \text{e) } f(x) &= \frac{\sin 2x}{x} + \cos 2x & ; & & \text{f) } f(x) &= \frac{\tan x}{x} & ; \\ \text{g) } f(x) &= \frac{\sin 2x}{\sin 3x} & ; & & \text{h) } f(x) &= \frac{\tan 3x}{\tan 5x} & ; & & \text{i) } f(x) &= \frac{\sin 2x}{x \cos x} \end{aligned}$$

2) Calculer:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right) & ; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} \right)$$

EXERCICE 6

1- Soit h la fonction définie par $h(x) = -3x^3 + 5x - 4$

a) Déterminer le domaine de définition Dh de h ; b) Calculer les limites de h aux bornes de Dh

2- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x - 2}{x - 1}$

a) Déterminer le domaine de définition Df de f ; b) Calculer les limites de f aux bornes de Df

3- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x + 3}{4 - x^2}$

a) Déterminer le domaine de définition Dg de g ; b) Calculer les limites de g aux bornes de Dg

Chapitre 8 : Dérivation

I- DÉRIVATION EN x_0 .

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en un point x_0 :

lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$

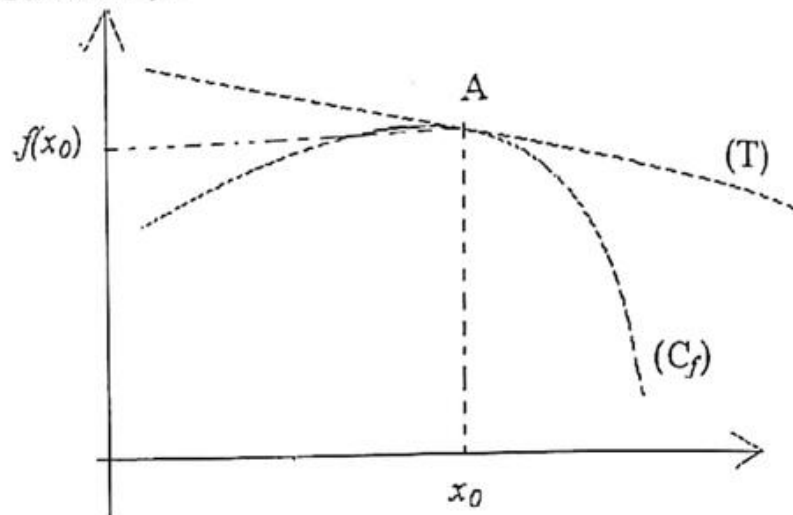
Remarque

Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C_f)

de f au point $A(x_0, f(x_0))$ est $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente (T) est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



II- DÉRIVÉE D'UNE FONCTION.

Définitions

On dit que f est dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} si f est dérivable en tout point de I .

La fonction qui à tout x de I , on associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f ou la dérivée de f . On la note f' .

Dérivées de quelques fonctions élémentaires

$f(x)$	D_f	f est dérivable sur	$f'(x)$
$k/k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	1
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	\mathbb{R}^+	$\mathbb{R}^+,$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\cos x$
$\cos x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

III- OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES.

Soient u et v deux fonctions dérivables.

$(u + v)' = u' + v'$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(k \cdot u)' = ku'$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$(u^2)' = 2u'u$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(u \circ v)' = (u' \circ v)v'$

III- DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION.

1- Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I .

f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I .

f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I .

2- Extremums relatifs d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et $x_0 \in I$.

$f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f si et seulement si

f' s'annule en x_0 en changeant de signe.

Exercices

EXERCICE 1

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = x + 125$; 2) $f(x) = \sqrt{5}$; 3) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 11x - 1$

4) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - 3$; 5) $f(x) = \frac{2x+3}{x+3}$; 6) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2}$

EXERCICE 2

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$; 2) $f(x) = (2x - \sqrt{x})^4$; 3) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-2}$

4) $f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$; 5) $f(x) = (2x^2 - 1)^2(3x + 1)^4$

EXERCICE 3

Donner l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) $f(x) = \tan x$; 2) $f(x) = \cos x \sin^2 x$; 3) $f(x) = (\sin^4 x) \tan x$

4) $f(x) = \frac{1-3\cos 3x}{2-\cos 3x}$; 5) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; 6) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$

7) $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos x$;

8) $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

- 1- Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes du domaine de définition.
- 2- Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.
- 3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

EXERCICE 5

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$

- 1- Calculer les réels a et b sachant que $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$
- 2- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1- Déterminer a , b , c pour que (C) ait les propriétés suivantes :
 - a) (C) passe par le point $A(0,5)$.
 - b) La tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses.
 - c) La tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3 .
- 2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 3- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
- 4- Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE 7 :

Soit a , b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

- a) Calculer $f'(x)$
- b) Déterminer a , b pour que la représentation graphique de f : Passe par $A(0, 3)$ et admet en ce point A une tangente d'équation $y = 4x + 3$.
- c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

EXERCICE 8

On dispose d'une feuille de carton carré de côté 100cm . Aux quatre coins de cette feuille on découpe un carré de côté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte sans couvercle. On désigne par $v(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm^3 .

- a) Préciser l'ensemble de valeurs possibles x .
 - b) Démontrer que $v(x) = x(100 - 2x)^2$
- Etudier le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue et dresser son tableau de variation. Calculer le volume maximum.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

- 1- Montrer que $f'(x) = 2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$
- 2- Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$
- 3- Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

Chapitre 9 : Etude de fonctions

I- PARITÉ ET PÉRIODICITÉ.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df . On dit que est paire si :

$$\text{Pour tout } x \in Df; -x \in Df \quad f(-x) = f(x)$$

Remarque : Si f est paire alors la courbe (C) de f admet (Oy) comme axe de symétrie.

1- FONCTIONS PAIRES.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df . On dit que est impaire si :

$$\text{Pour tout } x \in Df; -x \in Df \quad f(-x) = -f(x)$$

Remarque : Si f est impaire alors la courbe (C) de f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

2- FONCTIONS IMPAIRES.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df et T un réel non nul.

On dit que f est périodique, de période T , si pour tout $x \in Df$, $(x-T) \in Df$, $(x+T) \in Df$ et

$$f(x+T) = f(x)$$

3- FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Remarque : f est périodique de période T , si sa courbe est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

II- ELÉMENTS DE SYMÉTRIE.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df , C sa courbe représentative et $(D) : x = a$.

C admet $(D) : x = a$ comme axe de symétrie si : $x \in Df$; $(2a-x) \in Df$ $f(2a-x) = f(x)$

2- CENTRE DE SYMÉTRIE.

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df , C sa courbe représentative et $A(a ; b)$.

C admet $A(a ; b)$ comme centre de symétrie si : $x \in Df$; $(2a-x) \in Df$ $f(x) + f(2a-x) = 2b$

III- ASYMPTOTES.

1- ASYMPTOTES PARALLÈLES À L'AXE DES ABSCISSES (Ox).

Soit f une fonction et C sa courbe représentative.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ alors la droite $(D) : y = b$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $+\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ alors la droite $(D) : y = b$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $-\infty$

2- ASYMPTOTES PARALLÈLES À L'AXE DES ORDONNÉES (Oy).

Soit f une fonction, C sa courbe représentative et a un réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors la droite $(D) : x = a$ est une asymptote verticale à C .

3- ASYMPTOTES OBLIQUES.

Soit f une fonction de courbe C et $(D) : y = ax + b$

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors $(D) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$.

PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION.

Pour étudier une fonction, il faut :

- 1- déterminer son domaine de définition
- 2- calculer les limites aux bornes du domaine de définition et déduire l'existence d'asymptotes obliques et verticales.
- 3- déterminer la dérivée f' de f
- 4- déterminer le signe de f' et étudier les variations de f
- 5- Dresser le tableau de variation de f . 6- tracer la courbe

Problèmes

PROBLÈME 1

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

- 1- Déterminer le domaine de définition D de f .
- 2- Calculer les limites de f aux bornes de D . Déduire l'existence d'une asymptote.
- 3- Calculer $f'(x)$.
- 4- Etudier les variations de f .
- 5- Dresser le tableau de variation de f .
- 6- Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
- 7- Tracer dans un repère orthonormé (T) et la courbe (C) de f .

PROBLÈME 2

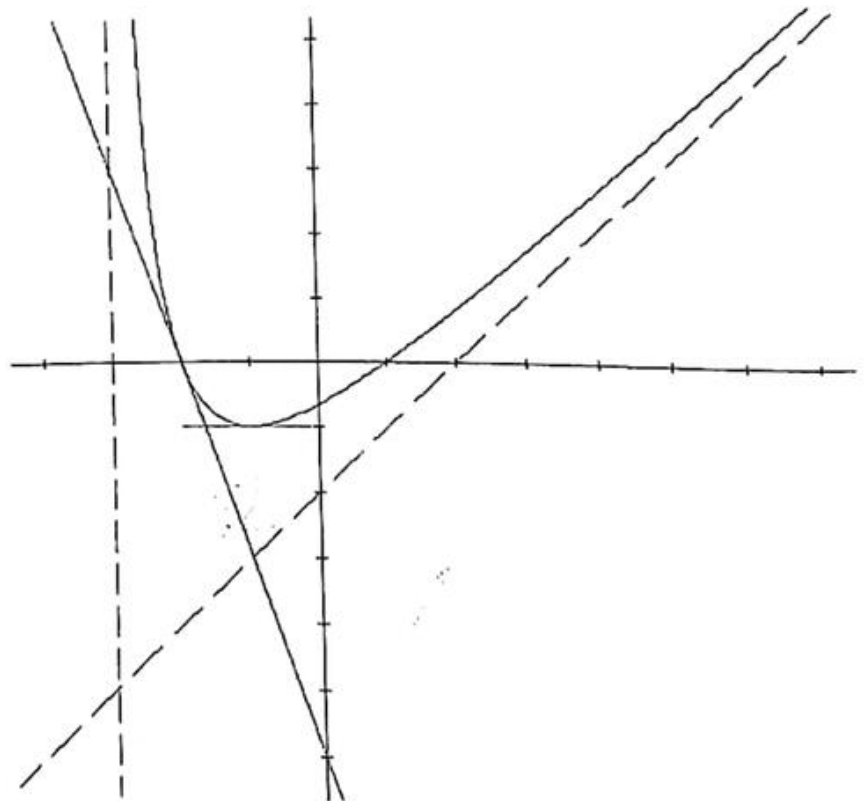
Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur $]-3, +\infty[$, ainsi que les tracés de ses asymptotes et d'une tangente T .

Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique

- 1- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse -2
- 2- Quelle limite de f en $+\infty$ le graphique laisse-t-il prévoir ?
- 3- Déterminer les équations des éventuelles asymptotes à C .
- 4- Etudier les positions relatives de C par rapport à l'asymptote oblique.

Dresser le tableau de variations de f .

- 6- Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.



PROBLÈME 3

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$ et C sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f , déterminer les limites de f aux bornes de D_f et déduire l'existence d'une asymptote (Δ).

2. Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)^2} = \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x + 3)^2}$ et dresser le tableau de variation de f .

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C et étudier les positions relatives de C par rapport à D .

4. Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.

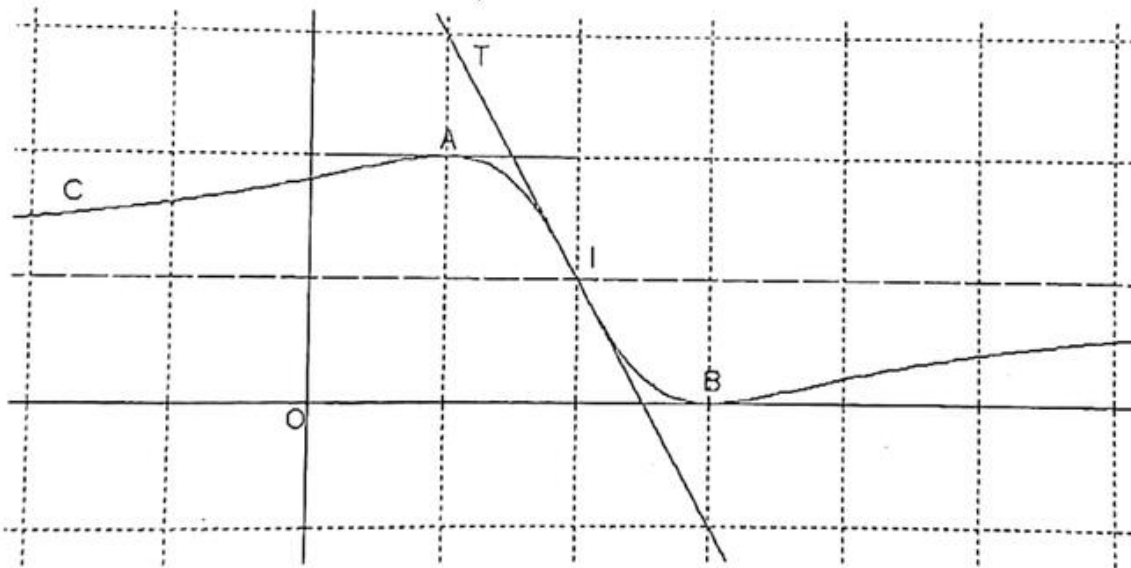
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 2.

6. Montrer que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour C

7. Tracer D, Δ, T, C dans un repère orthonormé (Unité : 1 cm).

PROBLÈME 4

Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur \mathbb{R} , ainsi que les tracés de l'asymptote et d'une tangente T (unités : 2 cm).



A. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique

1- Quel est le coefficient directeur de la de la tangente T au point I d'abscisse $x = 2$?

Quelle est l'équation de cette tangente ?

2- Quelles limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ le graphique laisse t'il prévoir ?

B. Soit la fonction $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 4x + 5}$ définie sur \mathbb{R} .

1. Etudier les limites de f aux bornes du domaine.

La dérivée de f est : $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{2(x - 1)(x - 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$; Etudier le signe de f' .

2. Dresser le tableau de variations de f .

PROBLÈME 5

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ et (C) sa courbe

représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé d'unité 1 cm.

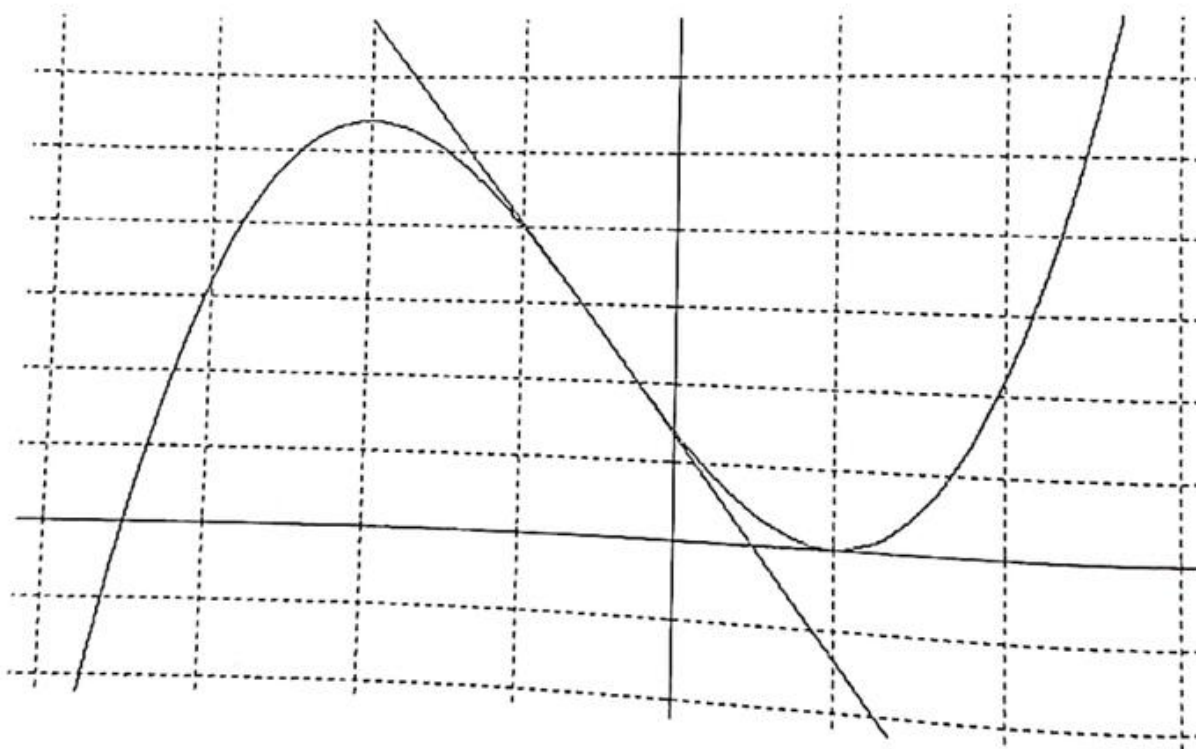
- 1- Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes.
- 2- Donner la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C) .
- 3- Calculer $f'(x)$.
- 4- a- Déterminer les points d'intersections A et B de (C) avec axes de coordonnées.
b- Donner une équation de la tangente au point d'intersection avec l'axe des abscisses.
- 5- Dresser le tableau de variation de f . Construire la courbe (C) dans (o, \vec{i}, \vec{j}) .
- 6- Etudier suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de $f(x) = m$.

PROBLÈME 6

Le graphique ci-dessous donne la courbe C représentative d'une fonction f sur \mathbf{R} , ainsi que le tracé d'une tangente T (unités : 2 cm sur Ox ; 1 cm sur Oy).

A. Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique (Page suivante)

- 1- Quelles limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ le graphique laisse-t-il prévoir ?
- 2- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.



B. La fonction f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
Calculer et étudier le signe de la fonction dérivée f' ?
Dresser le tableau de variation de f .

PROBLÈME 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1- Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- 2- Calculer les limites de f aux bornes de D .
- 3- Démontrer que la droite $(D1) : y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et que $(D2) : y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
- 4- Calculer $f'(x)$, étudier son signe et déduire les variations de f .
- 5- Dresser le tableau de variation de f .

- 6- Déterminer l'équation de tangente (T) à C au point d'abscisse 0.
 7- Tracer dans le même repère (D1), (D2), (T) et C.

PROBLÈME 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

- 1- Déterminer le domaine de définition D de f .
- 2- Montrer que f est impaire.
- 3- Montrer que f est périodique de période 2π
- 4- Montrer que $f'(x) = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$
- 5- Etudier les variations de f sur $[-\pi; \pi]$ et dresser le tableau de variation de f .
- 6- Représenter la courbe C de f dans un repère orthogonal pour $x \in [-3\pi; 3\pi]$

PROBLÈMES NON RÉSOLUS**Problème1**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x + 2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et déduire l'existence d'une asymptote.
- 2) Déterminer $f'(x)$. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f .
- 3) Vérifier que pour tout x de D_f , on a : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+2}$.
- 4) Montrer que la droite (D) : $y = x - 1$ est une asymptote à C.
- 5) Déterminer les positions relatives de C et (D).
- 6) Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.
- 7) Déterminer l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse -1.
- 8) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection des deux(2) asymptotes et montrer que H est un centre de symétrie de C.
- 9) Tracer dans le repère (T) ainsi que la courbe C.
- 10) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

Problème2

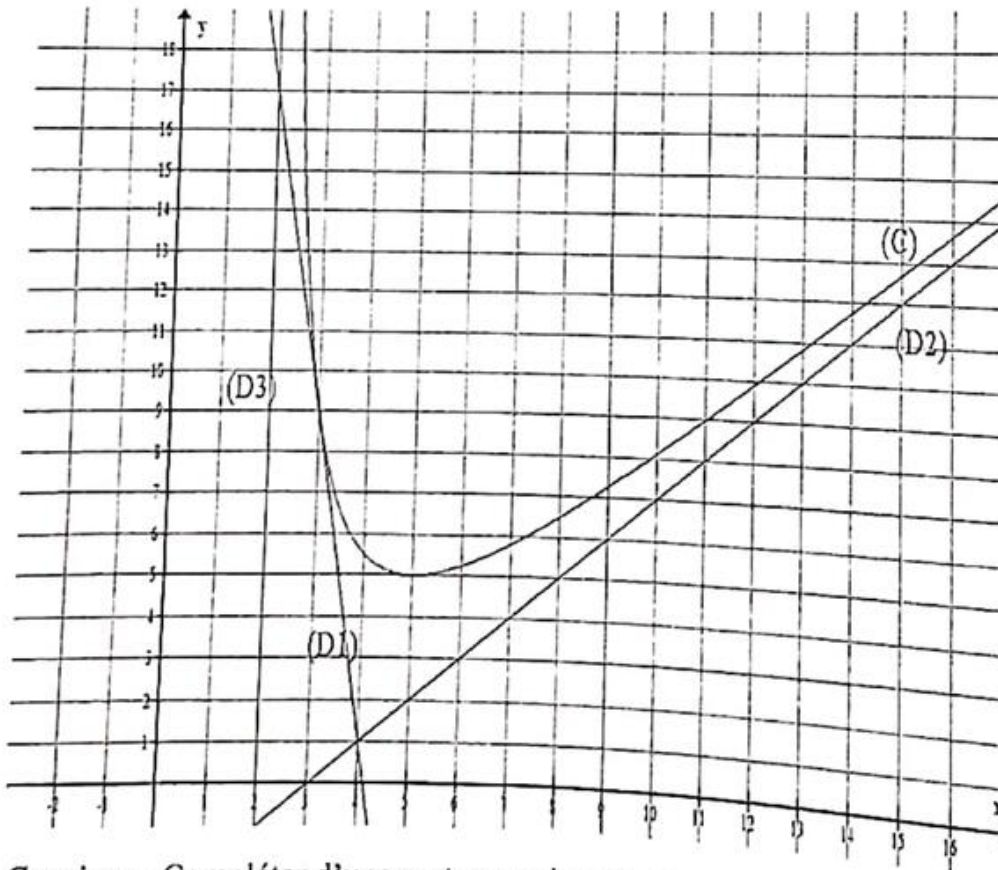
Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3}$. On note (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de g et calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Etudier la parité de g et donner une interprétation géométrique.

- 3) a) Vérifier que pour x de D , $g(x) = x - \frac{6x}{x^2+3}$.
- b) Montrer que la droite $(D): y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de l'infini.
- c) Etudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 3) a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$.
- b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 4) Tracer (D) , (T) et (C) .

problème3

On a la représentation graphique (C) de la fonction f dans un repère orthogonal.



Consigne : Compléter d'une part ou cocher d'autre part la bonne réponse

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$
- 3) $f(11) = \dots\dots\dots$
- 4) $f'(5) = \dots\dots\dots$
- 5) L'équation de la tangente $(D1)$ à (C) au point d'abscisse 3 est : $y = \dots\dots\dots$
- 6) $f'(3) = \dots\dots\dots$

7)) L'asymptote (D2) à la courbe (C) a pour équation : $y = \dots\dots\dots$

8)) Pour $x \geq 5$: $f'(x) < 0$; $f'(x) \geq 0$; $f'(x) > 0$; $f'(x) \leq 0$

9)) Pour $x \in]2; 4[$: $f'(x) < 0$; $f'(x) \geq 0$; $f'(x) > 0$; $f'(x) \leq 0$

10)) L'équation $f(x) = 5$ admet : 0 solution ; 1 solution ; 2 solutions

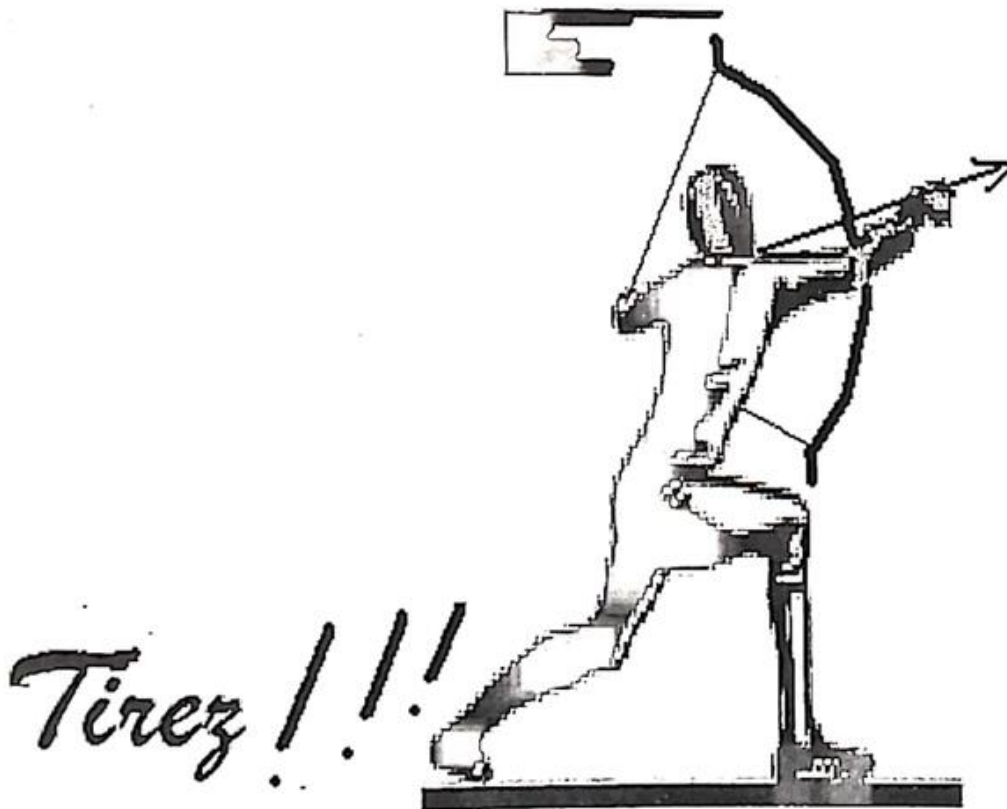
Problème 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos^2 x - \sin x + 1$. On note (C) sa courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- 1- Vérifier que f est périodique de période 2π
- 2- Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour (C)
- 3- Calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ sur $I = [-\pi; \pi]$ et déduire les variations de f sur I
- 4- Dresser le tableau de variations de f
- 5- Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère sur I

On rappelle que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Corrigés des exercices



Correction des Exercices du chapitre 1

Exercice 1

1- Donnons la forme canonique de $g(x)$ et de $f(x)$:

$$g(x) = x^2 \sqrt{2} + \frac{1}{3}x - \sqrt{3}$$

$$f(x) = \frac{-2}{3}x^2 + 4x - 12$$

a)
$$g(x) = \sqrt{2} \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

b)
$$f(x) = -\frac{2}{3}(x^2 - 6x + 18)$$

$$g(x) = \sqrt{2} \left[\left(x + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$$

$$f(x) = -\frac{2}{3} \left[(x-3)^2 - 9 + 18 \right]$$

$$g(x) = \sqrt{2} \left[\left(x + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{72} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$$

$$f(x) = -\frac{2}{3} \left[(x-3)^2 + 9 \right]$$

$$g(x) = \sqrt{2} \left[\left(x + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1+36\sqrt{6}}{72} \right]$$

2- $(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2 = 12 - 2\sqrt{35}$; Résolvons $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$

Calculons Δ et les racines x_1 et x_2 .

$$\Delta = (\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 - 4\sqrt{35}$$

$$\Delta = 12 - 2\sqrt{35}$$

$$\Delta = (\sqrt{5} - \sqrt{7})^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{7}) - (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}$$

$$x_2 = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{5}$$

$$x_2 = \sqrt{7}$$

$$S = \{\sqrt{7}; \sqrt{5}\}$$

3- Résoudre dans \mathbb{R} ; $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$; Posons $X = x^2 + x$

Résolvons l'équation $X^2 + 2X - 8 = 0$; $\Delta = 4 - 4(-8) = 6^2$ $X = \frac{-2-6}{2} = -4$ ou $X = \frac{-2+6}{2} = 2$

On a donc $x^2 + x = -4$ ou $x^2 + x = 2$

$x^2 + x = -4 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0$; on a $\Delta = 1 - 4(4) = -15$ donc $x^2 + x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R}

$x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$

d'où $x = -2$ ou $x = 1$. Conclusion : $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$ a pour solution : $S = \{-2; 1\}$

4- $f(x) = x^3 - bx^2 + cx + 1$ est factorisable par $g(x) = -2(x+1)(x-1)$ veut dire que 1 et -1 sont des racines de f donc $f(1) = 0$ et $f(-1) = 0$. Alors : $f(-1) = -b - c$ et $f(1) = -b + c + 2$.

Déterminer b et c revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -b - c = 0 & (1) \\ -b + c = -2 & (2) \end{cases}$$

on trouve $b = 1$ et $c = -1$;

On a donc $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Exercice 2

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$$

1- Vérifions que $\frac{3}{2}$ est une racine de p

.....=>

donc est $\frac{3}{2}$ une racine de p.

:

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right) - 3$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{54}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 3$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{54 - 18 - 12 - 24}{8}$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

2- Résoudre $p(x) = 0$. Par identification ou par division euclidienne, on trouve :

$$p(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) ; \quad p(x) = 0 \Rightarrow x - \frac{3}{2} = 0 \text{ ou } 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} ; \quad 2x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ on a } \Delta = 2^2 - 4(2)(2) = -12 \text{ donc : } \boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

$$3- \text{ Résolvons } p(x) \leq 0 \quad p(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)}{(x-2)(x-1)} \leq 0$$

D'abord l'inéquation existe si $(x-2)(x-1) \neq 0$; $(x-2)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq 1$

Faisons un tableau de signe de $p(x)$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$	-	-	0	+	+
$2x^2 + 2x + 2$	+	+	+	+	+
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$P(x)$	-	+	0	-	+

$$\boxed{S =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{3}{2}; 2[$$

Exercice 3

$P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 5$ Si a, b et c sont des racines de p on a alors : $p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$

Développons, déduisons et ordonnons $p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$;

$$p(x) = 20(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$p(x) = 20x^3 - 20(a+b+c)x^2 + 20(ab+ac+bc)x - 20abc$$

$$P(x) = 20x^3 - 5x^2 - 3x + 5 \quad \text{Par identification on a :}$$

$$(1): 20(a+b+c) = -5 ; (2): 20(ab+ac+bc) = -3 ; (3): -20abc = 5$$

$$(1) -20(a+b+c) = -5 \Rightarrow a+b+c = \frac{1}{4}$$

$$(3) : -20abc = 5 \Rightarrow abc = -\frac{1}{4}$$

De (3) et (2), si on fait $\frac{(2)}{(3)}$, on a :

$$\frac{20(ab+ac+bc)}{-20abc} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{ab}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{bc}{abc} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{3}{5}$$

Exercice 4

On donne $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

1- Montrons que $p(x) = x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right]$ avec $x \neq 0$ Développons $x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right]$

$$x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right] = x^2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 5x - \frac{5}{x} + 4 \right] = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$$

$$x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right] = p(x)$$

2- Résoudre dans \mathbb{R} $p(x) = 0$ $P(x) = 0 \Rightarrow x^2 \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right] \Rightarrow \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 \right] = 0$

Posons $X = x + \frac{1}{x}$ et résolvons ainsi $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$X^2 - 5X + 4 = 0 \Rightarrow (X-4)(X-1) = 0 \Rightarrow X = 4 \text{ ou } X = 1.$$

$X = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$; $\Delta = 4^2 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ On a : $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

$X = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = 1 - 4 = -3$; $\Delta < 0$

$$\text{Donc : } S = \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$$

Résolvons $p(x) \geq 0$: $P(x) = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - x + 1) = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x^2 - x + 1)$

Dressons le tableau de signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$		$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})$	+	0	-	0	+
$x^2 - x + 1$	+		+		+
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$S =]-\infty; 2 - \sqrt{3}] \cup]2 + \sqrt{3}; +\infty[$$

Exercice 5

ABCD est un rectangle tel que $BC = AB + 1$ et $AC = 2AB$

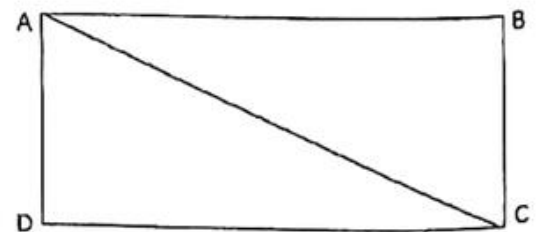
Posons $AB = x$; on a $BC = x + 1$ et $AC = 2x$

Calculons x .

ABC est un triangle rectangle en B ; on a :

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ signifie que $x^2 + (x + 1)^2 = (2x)^2$.

$$x^2 + (x + 1)^2 = 4x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$$



$$\Delta = 4 - 4(2)(-1) = 12 ; x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ donc } AB = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ car } x_2 < 0$$

$$\text{Calculons la surface } S \text{ de } ABCD : S = AB \cdot BC \Rightarrow S = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right); \quad \boxed{S = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}}$$

Exercice 6

1- Si (-1) est une solution de $(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$ alors : $(2m-1)(-1)^2 - 2m(-1) + 5 = 0 \Rightarrow 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1$

2- Déterminons m pour que $mx^2 + 2mx + 1$ ait une racine double.

Pour que $mx^2 + 2mx + 1$ ait une racine double il faut que : $m \neq 0$ et $(2m)^2 - 4m = 0$

$$(2m)^2 - 4m = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Rightarrow 4m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1$$

3- Déterminons les valeurs de m pour que $(m-1)x^2 + 2mx + m-4$ ait deux racines de signes contraires.

$$\text{Posons } \Delta = (2m)^2 - 4(m-1)(m-4) = 20m - 16$$

Pour que $(m-1)x^2 + 2mx + m-4$ ait deux racines de signes contraires il faut que :

$$m-1 \neq 0 ; \quad \Delta > 0 \quad \text{et } x_1 \cdot x_2 < 0 \text{ avec } x_1 = \frac{-2m - \sqrt{\Delta}}{2(m-1)} \text{ et } x_2 = \frac{-2m + \sqrt{\Delta}}{2(m-1)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - \Delta}{4(m-1)^2} = \frac{4m^2 - 20m + 16}{4(m-1)^2} = \frac{m^2 - 5m + 4}{(m-1)^2} = \frac{(m-1)(m-4)}{(m-1)^2}$$

$$* m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

$$* \Delta > 0 \Rightarrow 20m - 16 > 0 \Rightarrow m > \frac{4}{5} \Rightarrow m \in \left] \frac{4}{5}; +\infty \right[$$

$$* x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow (m-4)(m-1) < 0 \Rightarrow m \in]1; 4[$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{m \in \left] \frac{4}{5}; +\infty \right[\cap]1; 4[\Rightarrow m \in]1; 4[}$$

Exercice 7

$$P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1 ; \text{ on a : } \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 4m-3$$

$$\text{Pour que } p \text{ ait deux racines } x_1 \text{ et } x_2, \text{ il faut que : } \Delta > 0 \Rightarrow 4m-3 > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{4} \Rightarrow m \in \left] \frac{3}{4}; +\infty \right[$$

$$\text{Prenons } x_1 = \frac{-(2m+1) - \sqrt{4m-3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(2m+1) + \sqrt{4m-3}}{2}$$

a) Déterminons les valeurs du nombre m pour que : $x_1^2 + x_2^2 = 29 \Rightarrow$

$$\frac{(2m+1)^2 + (4m-3) + 2(2m+1)\sqrt{4m-3}}{4} + \frac{(2m+1)^2 + (4m-3) - 2(2m+1)\sqrt{4m-3}}{4} = 29$$

$$\Rightarrow \frac{2(2m+1)^2 + 2(4m-3)}{4} = 29 \Rightarrow \frac{(2m+1)^2 + 4m-3}{2} = 29 \Rightarrow 4m^2 + 8m - 2 = 58$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m - 60 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 15 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+5) = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ ou } m = -5$$

$$-5 \notin \left] \frac{3}{4}; +\infty \right[; \quad 3 \in \left] \frac{3}{4}; +\infty \right[\text{ donc } m = 3$$

Déduisons les valeurs de x_1 et x_2 .

$$x_1 = \frac{-(2 \times 3 + 1) - \sqrt{4 \times 3 - 3}}{2} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-(2 \times 3 + 1) + \sqrt{4 \times 3 - 3}}{2} = -2$$

b) Déterminons les valeurs du nombre m pour que $|x_1 + x_2| = 3$; On a : $x_1 + x_2 = -2m-1$.

Réolvons $|x_1 + x_2| = 3$

$$|x_1 + x_2| = 3 \Rightarrow |-2m-1| = 3 \Rightarrow -2m-1 = 3 \text{ ou } -2m-1 = -3 \Rightarrow m = -2 \text{ ou } m = 1$$

$$-2 \notin]\frac{3}{4}; +\infty[; 1 \in]\frac{3}{4}; +\infty[\text{ donc : } \boxed{m = 1}$$

Déduisons les valeurs de x_1 et x_2 .

$$\boxed{x_1 = \frac{-(2 \times 1 + 1) - \sqrt{4 \times 1 - 3}}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-(2 \times 1 + 1) + \sqrt{4 \times 1 - 3}}{2} = -1}$$

Chapitre 2 : Equations

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} : a) $\sqrt{3x+7} = x+1$ $\sqrt{3x+7} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \text{et} \\ 3x+7 = (x+1)^2 \end{cases}$

* $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1; +\infty[$

* $(x+1)^2 = 3x+7 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$

$-2 \notin [-1; +\infty[; 3 \in [-1; +\infty[\text{ donc } \boxed{S = \{3\}}$

b) $x+1 - \sqrt{4x-15} = 4$; $x+1 - \sqrt{4x-15} = 4 \Rightarrow \sqrt{4x-15} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ \text{et} \\ 4x-15 = (x-3)^2 \end{cases}$

* $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3; +\infty[$

* $(x-3)^2 = 4x-15 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$; $\Delta = 10^2 - 4(24) = 4 = 2^2$;

$x_1 = \frac{10-2}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{10+2}{2} = 6$; $4 \in [3; +\infty[\text{ et } 6 \in [3; +\infty[\text{ donc } \boxed{S = \{4; 6\}}$

c) $\sqrt{4-x^2} = x-1$; $\sqrt{4-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \text{et} \\ 4-x^2 = (x-1)^2 \end{cases}$

* $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1; +\infty[$

* $4-x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 4-x^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(2)(-3) = 28 = (2\sqrt{7})^2$; $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$x_1 \in [1; +\infty[; x_2 \notin [1; +\infty[\text{ donc } \boxed{S = \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right\}}$

Exercice 2

Réolvons dans \mathbb{R} : a) $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2-1}$: $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 2-x^2 = x^2-1 \end{cases}$

* $x^2-1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

* $2-x^2 = x^2-1 \Rightarrow 2x^2-3=0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{2} \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$; $-\frac{\sqrt{6}}{2} \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$

b) $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$; $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-7 \geq 0 \\ 2x^2+5x-7 = x^2-x-2 \end{cases}$

* $2x^2+5x-7 \geq 0$; $\Delta = 25-4(2)(-7) = 81 = 9^2$; $x_1 = \frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2}$ et $x_2 = \frac{-5+9}{4} = 1$

$2x^2+5x-7 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty; -\frac{7}{2}] \cup [1; +\infty[$

* $2x^2+5x-7 = x^2-x-2 \Rightarrow x^2+6x-5=0$; $\Delta = 6^2-4(-5) = 56 = (2\sqrt{14})^2$

$x_1 = \frac{-6-2\sqrt{14}}{2} = -3-\sqrt{14}$ et $x_2 = \frac{-6+2\sqrt{14}}{2} = -3+\sqrt{14}$

$x_1 \in]-\infty; -\frac{7}{2}] \cup [1; +\infty[$ mais : $x_2 \notin]-\infty; -\frac{7}{2}] \cup [1; +\infty[$ donc : $S = \{-3-\sqrt{14}\}$

c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12}$

$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x+12} \begin{cases} x+3 \geq 0 \text{ et } x-12 \geq 0 \text{ et } x+12 \geq 0 \\ \text{et} \\ [\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12}]^2 = x+12 \end{cases}$

* $x+3 \geq 0 \text{ et } x-12 \geq 0 \text{ et } x+12 \geq 0 \Rightarrow x \in [12; +\infty[$

* $[\sqrt{x+3} + \sqrt{x-12}]^2 = x+12 \Rightarrow (x+3) + (x-12) + 2\sqrt{(x+3)(x-12)} = x+12$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-12)} = 21-x \Rightarrow 4(x+3)(x-12) = (21-x)^2 \Rightarrow 3x^2+6x-585=0$;

$\Delta = 6^2-4(3)(-585) = 7056 = 84^2$, $x_1 = \frac{-6-84}{6} = -15$; $x_2 = \frac{-6+84}{6} = 13$

$-15 \notin [12; +\infty[$; $13 \in [12; +\infty[$ d'où : $S = \{13\}$

d) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \text{ et} \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = (1 + \sqrt{2x-1})^2 \end{cases}$

$$* 2x+1 \geq 0 \text{ et } 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$* 2x+1 = (1+\sqrt{2x-1})^2 \Rightarrow 2x+1 = 1+2x-1+2\sqrt{2x-1} \Rightarrow 2\sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow (2\sqrt{2x-1})^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ d'où : } \boxed{S = \left\{ \frac{5}{8} \right\}}$$

Inéquations

Exercice 3

Résolvons dans IR les inéquations suivantes : a) $\sqrt{4x^2-1} + 4x \leq 0$

$$\sqrt{4x^2-1} + 4x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2-1} \leq -4x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-1 \geq 0 \text{ et} \\ -4x \geq 0 \text{ et} \\ 4x^2-1 \leq 16x^2 \end{cases}$$

$$* 4x^2-1 \geq 0 \Rightarrow (2x-1)(2x+1) \geq 0; S_1 = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$* -4x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0; S_2 = \left] -\infty; 0 \right]$$

$$* 4x^2-1 \leq 16x^2 \Rightarrow -12x^2-1 \leq 0 \text{ Vrai : } S_3 = \mathbb{R} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2-4} < x+3 : \sqrt{x^2-4} < x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \text{ et} \\ x+3 \geq 0 \text{ et} \\ x^2-4 < (x+3)^2 \end{cases}$$

$$* x^2-4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0; S_1 = \left] -\infty; -2 \right] \cup \left[2; +\infty \right[$$

$$* x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3; S_2 = \left[-3; +\infty \right[$$

$$* x^2-4 < (x+3)^2 \Rightarrow x^2-4 < x^2+6x+9 \Rightarrow -6x-13 < 0 \Rightarrow x > -\frac{13}{6}; S_3 = \left] -\frac{13}{6}; +\infty \right[$$

$$\boxed{S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left] -\frac{13}{6}; -2 \right] \cup \left[2; +\infty \right[}$$

$$\text{c) } \sqrt{3-2x} \leq x+2 : \sqrt{3-2x} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 \text{ et} \\ x+2 \geq 0 \text{ et} \\ 3-2x \leq (x+2)^2 \end{cases}$$

$$* 3-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow S_1 = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$$

$$* x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow S_2 = \left[-2; +\infty \right[$$

$$* 3-2x \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2+6x+1 \geq 0; \Delta = 6^2-4(1) = 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$x_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{2}}{2} = -3 - 2\sqrt{2}; x_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{2}}{2} = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{d'où : } S_3 =]-\infty; -3 - 2\sqrt{2}] \cup]-3 + 2\sqrt{2}; +\infty[\quad ; \quad S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[-3 + 2\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{d) } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 1 \quad : \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \text{ et} \\ x \geq 0 \text{ et} \\ x+1 < (1+\sqrt{x})^2 \end{cases}$$

$$* x+1 \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0; S_1 = [0; +\infty[$$

$$* x+1 < (1+\sqrt{x})^2 \Rightarrow x+1 < 1+x+2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow S_2 =]0; +\infty[$$

$$S = S_1 \cap S_2 =]0; +\infty[$$

Exercice 4

$$\text{Résolvons dans } \mathbb{R} : \text{ a) } \sqrt{x^2 - 2x} > 1 - x \quad : \quad \sqrt{x^2 - 2x} > 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ \text{et} \\ 1 - x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 - 2x > (1-x)^2 \end{cases}$$

$$* x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

$$1 - x \leq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S_2 = [1; +\infty[$$

$$S_3 = S_1 \cap S_2 = [2; +\infty[$$

$$* 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S_4 =]-\infty; 1]$$

$$S_6 = S_4 \cap S_5 = \{ \} \quad \text{donc : } S = S_3 \cup S_6 = [2; +\infty[$$

$$x^2 - 2x > (1-x)^2 \Rightarrow 0 > 1 \text{ faux} \Rightarrow S_5 = \{ \}$$

$$\text{b) } \sqrt{3(x^2 - 1)} \geq 2x - 1 \quad : \quad \sqrt{3(x^2 - 1)} \geq 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \text{et} \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ \text{et} \\ 3(x^2 - 1) \geq (2x - 1)^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$* 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 =]-\infty; \frac{1}{2}]$$

$$S_3 = S_1 \cap S_2 =]-\infty; -1]$$

$$* 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow S_4 = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$S_6 = S_4 \cap S_5 = \{2\}$$

$$3(x^2 - 1) \geq (2x - 1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow S_5 = \{2\}$$

$$\text{d'où : } S = S_3 \cup S_6 =]-\infty; -1] \cup \{2\}$$

$$c) \sqrt{x^2 + 6x + 6} \geq |2x + 1| : \sqrt{x^2 + 6x + 6} \geq |2x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 6 \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 + 6x + 6 \geq (2x + 1)^2 \end{cases}$$

$$* x^2 + 6x + 6 \geq 0; \Delta = 36 - 4(6) = 12 = (2\sqrt{3})^2 \quad S_1 =]-\infty; -3 - \sqrt{3}] \cup [-3 + \sqrt{3}; +\infty[$$

$$x_1 = -3 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = -3 + \sqrt{3}$$

$$* x^2 + 6x + 6 \geq (2x + 1)^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 \leq 0; \Delta = 4 - 4(3)(-5) = 64 = 8^2$$

$$* x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{5}{3} \quad S_2 = \left[-1; \frac{5}{3}\right]$$

$$\text{En conclusion : } S = S_1 \cap S_2 = \left[-1; \frac{5}{3}\right]$$

Exercice 5

Résoudre dans IR les inéquations suivantes : a) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$

$$\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 & x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow S_1 = [1; +\infty[\\ \text{et} & ; \\ x-1 < 2x-3 & x-1 < 2x-3 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow S_2 =]2; +\infty[\end{cases}$$

$$S = S_1 \cap S_2 =]2; +\infty[$$

$$b) \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \leq \sqrt{x^2 - 2} \quad \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \leq \sqrt{x^2 - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \text{ et} \\ x^2 - 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 - 2 \end{cases}$$

$$* 2x^2 + 3x - 2 \geq 0; \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25 = 5^2;$$

$$x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$S = S_1 \cap S_2 = [-3; -2]$$

$$* 2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Rightarrow S_2 = [-3; 0]$$

$$c) \sqrt{-x+4} > \sqrt{x^2+2x} : \sqrt{-x+4} > \sqrt{x^2+2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ \text{et} \\ -x + 4 > x^2 + 2x \end{cases}$$

$$* x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow x(x+2) \geq 0 \Rightarrow S_1 =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

$$* -x + 4 > x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) < 0$$

$$S_2 =]-4; 1[$$

$$S = S_1 \cap S_2 =]-4; -2] \cup [0; 1[$$

$$d) \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4x+5} \quad ; \quad \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \text{ et} \\ x-1 \geq 0 \text{ et} \\ 4x+5 \geq 0 \text{ et} \\ (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1})^2 > 4x+5 \end{cases}$$

$$* x+4 \geq 0 \text{ et } x-1 \geq 0 \text{ et } 4x+5 \geq 0 \Rightarrow S_1 =]1; +\infty[$$

$$* (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1})^2 > 4x+5 \Rightarrow x+4+x-1+2\sqrt{(x+4)(x-1)} > 4x+5 \Rightarrow 2x+3+2\sqrt{(x+4)(x-1)} > 4x+5 \\ \Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(x-1)} > 2x+2 \Rightarrow 4(x^2+3x-4) > 4x^2+8x+4 \Rightarrow x > 5 \Rightarrow S_2 =]5; +\infty[$$

$$\text{donc : } \boxed{S = S_1 \cap S_2 =]5; +\infty[}$$

Exercice 6

$$a) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R}^3 (S) : \begin{cases} x-2y+z = -5(L1) \\ -x+y+2z = -4(L2) \\ 2x-y-z = 5(L3) \end{cases} ; \begin{cases} x-2y+z = -5(L1) \\ -x+y+2z = -4(L2) \\ 2x-y-z = 5(L3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L2 &\leftarrow L1 + L2 \\ L3 &\leftarrow \frac{1}{3}(L3 - 2L1) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z = -5(L1) \\ -y+3z = -9(L2) \\ y-z = 5(L3) \end{cases} ; \begin{aligned} L3 &\leftarrow L3 + L2 \\ L3 &\leftarrow L3 + L2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z = -5(L1) \\ -y+3z = -9(L2) \\ 2z = -4(L3) \end{cases}$$

$$(L3): 2z = -4 \Rightarrow z = -2$$

$$(L2): -y+3z = -9 \Rightarrow y = 3$$

$$\boxed{S = \{(3; 3; -2)\}}$$

$$(L1): x-2y+z = -5 \Rightarrow x = 3$$

$$b) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x-y-z-t = 1 \\ -x+2y-z-t = 1 \\ x+y-2z+t = 1 \\ x+y+z-2t = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y-z-t = 1(L1) \\ -x+2y-z-t = 1(L2) \\ x+y-2z+t = 1(L3) \\ x+y+z-2t = -1(L4) \end{cases}$$

$$L1 \leftrightarrow L3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t = 1(L1) \\ -x+2y-z-t = 1(L2) \\ 2x-y-z-t = 1(L3) \\ x+y+z-2t = -1(L3) \end{cases} \quad \begin{aligned} L2 &\leftarrow L1 + L2 \\ L3 &\leftarrow L3 - 2L1 \\ L4 &\leftarrow L4 - L1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t = 1(L1) \\ 3y-3z = 2(L2) \\ -3y+3z-3t = -1(L3) \\ 3z-3t = -2 \end{cases}$$

$$L3 \leftrightarrow L4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t = 1(L1) \\ 3y-3z = 2(L2) \\ 3z-3t = -2(L3) \\ -3y+3z-3t = -1(L4) \end{cases} ; \quad L4 \leftarrow L2 + L4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z+t = 1 \\ 3y-3z = 2 \\ 3z-3t = -2 \\ -3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 L4 : -3t = 1 &\Rightarrow t = -\frac{1}{3} \\
 \Rightarrow L3 : 3z - 3t = -2 &\Rightarrow z = -1 \\
 L2 : 3y - 3z = 2 &\Rightarrow y = -\frac{1}{3} \\
 L1 : x + y - 2z + t = 1 &\Rightarrow x = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

d'où $S = \left\{ \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -1; -\frac{1}{3} \right) \right\}$.

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} 7xy - 5(x+y) = 15 \\ 11xy - 8(x+y) = 22 \end{cases}$$

Posons $p = xy$ et $s = x + y$. On obtient ainsi (E) :

$$\begin{cases} 7p - 5s = 15(L1) \\ 11p - 8s = 22(L2) \end{cases}$$

En faisant $11(L1) - 7L2$; on trouve $s = 11$

En remplaçant la valeur de s dans $L1$, on trouve $p = 10 \Rightarrow$ On a donc :

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 10 \end{cases}$$

x et y sont solutions de $x^2 - 11x + 10 = 0$

$$\Delta = 11^2 - 4(10) = 81 = 9^2 \text{ d'où : } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 10$$

Conclusion : $S = \{(1; 10); (10; 1)\}$

Exercice 8

Soit N ce nombre. Posons x le chiffre des centaines, y le chiffre des dizaines et z le chiffre des unités (xyz).
 $N = 100x + 10y + z$.

* la somme de ses chiffres est 17. On a donc : (1) : $x + y + z = 17$

* Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines (yxz), le nouveau nombre est $100y + 10x + z$ qui est $N + 360$. On a ainsi : (2) : $100y + 10x + z = (100x + 10y + z) + 360 \Leftrightarrow x - y = -4$

* Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines (zyx) ; le nombre obtenu est $100z + 10y + x$ qui est aussi $N - 198$. On a : (3) : $100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 198 \Leftrightarrow x - z = 2$

En résolvant le système (S) :

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ x - y = -4 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

; on trouve $x = 5$; $y = 9$ et $z = 3$

Conclusion : le nombre $N = 593$

Exercice 9

Soit x et y les dimensions de la parcelle

La surface est : $xy = 480$. Comme la diagonale est 34 alors $34^2 = x^2 + y^2$. On a : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34^2 \\ xy = 480 \end{cases}$

on a : $2xy = 960$ ainsi $x^2 + y^2 + 2xy = 34^2 + 960$

$x^2 + y^2 + 2xy = 34^2 + 960 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 2116 \Rightarrow (x + y)^2 = 46^2 \Rightarrow x + y = 46$ car les dimensions

sont positives. D'où le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34^2 \\ xy = 480 \end{cases}$ revient à $\begin{cases} x + y = 46 \\ xy = 480 \end{cases}$.

Réolvons (S) : $\begin{cases} x + y = 46 \\ xy = 480 \end{cases}$. On a : $X^2 - 46X + 480 = 0$.

$$\Delta = 46^2 - 4 \times 480 = 196 = 14^2 \text{ d'où } X_1 = \frac{46+14}{2} = 30 \text{ et } X_2 = \frac{46-14}{2} = 16$$

La parcelle de Sogo SANOU a pour longueur 30m et de largeur 16m.

Chapitre 3 : Trigonométrie.

Exercice 1

1- Calculons :

$$A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

$$B = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1$$

$$; B = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{\pi}{6} + 3 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$B = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{\pi}{6} - 3 \sin \frac{\pi}{6} - 1$$

$$B = 2 \times \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{2} - 1 \quad B = -\frac{7}{2}$$

$$C = -2 \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{2}\right)$$

$$C = -2 \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(52\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = -2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2}$$

$$C = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$D = \sqrt{2} \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{-5\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$D = \sqrt{2} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$D = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos \frac{\pi}{4} - 1$$

$$D = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$$

2-) Exprimons en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ les expressions suivantes :

$$E = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi + x) + 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - x) \quad F = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$$

$$E = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x - 3 \sin x - \sin x \quad ; \quad F = \sin\left(x + 3\pi\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x$$

$$E = 2 \sin x - \sin x - 3 \sin x - \sin x = -3 \sin x \quad F = -\sin x - \sin x - \sin x = -3 \sin x$$

$$G = -3 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + x\right) + 2 \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\pi - x)$$

$$G = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x) \quad G = 3 \sin x + 2 \cos x + \cos x = 3 \cos x + 3 \sin x$$

Exercice 2

1- Soit x un réel donné tel que $\sin^2 x = \frac{3}{5}$.

a) Calculons $\sin x$; $\cos x$ et $\sin 2x$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

* $\sin x$; $\sin^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ alors $\sin x = \sqrt{\frac{3}{5}}$

* $\cos x$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ alors $\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

* $\sin 2x$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sqrt{\frac{3}{5}} \times \left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) Calculons $\tan x$ et $\cos 2x$ si $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ comme : $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

comme : $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $\cos x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}}{-\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$

2- On donne $\cos x = -\frac{3}{5}$; Calculons $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$ sachant que $x \in [0; \pi]$

$$\cos x = \cos(2 \times \frac{x}{2}) \text{ donc } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2} \text{ et } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \text{D'où } \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ou } \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

pour $x \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc : $\boxed{\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}}$ ainsi : $\boxed{\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

3- On considère un nombre α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$.

Calculons $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ et $\cos 2\alpha$

$$\square) \quad \boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3}}$$

$$\square) \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ comme } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ donc : } \boxed{\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\square) \quad \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}}$$

Exercice 3

1- a) Démontrons que : $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$. On transforme le second membre :

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{car : } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x \Rightarrow \boxed{\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x}$$

b Démontrons que : $\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$$\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x - 1)$$

$$\text{Or } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ donc } \boxed{\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 1 - 1 = 0}$$

c) pour $x \neq k\pi$, montrons que : $\frac{1 + \cos 2x - \sin 2x}{1 - \cos 2x - \sin 2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{1 + \cos 2x - \sin 2x}{1 - \cos 2x - \sin 2x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x}{(\cos^2 x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x} = \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}$$

$$\boxed{\frac{1 + \cos 2x - \sin 2x}{1 - \cos 2x - \sin 2x} = \frac{2 \cos x(\cos x - \sin x)}{-2 \sin x(\cos x - \sin x)} = -\frac{\cos x}{\sin x}}$$

2- Calculons $A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \Rightarrow A = \cos(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) \Rightarrow A = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4

1- Montrons que : $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x + \cos\left(x + \pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x - \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos x - 2 \cos x \cos \frac{\pi}{3} = \cos x - 2 \cos x \cdot \frac{1}{2} = \cos x - \cos x = 0$$

2- Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$; $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

$$* \sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

$$\sin 3x = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$\sin 3x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\boxed{\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x}$$

$$* \cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin x \sin x$$

$$\cos 3x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Exercice 5

$$1- \text{On donne : } A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

~~2~~ Calculons : $A + B$ puis $A - B$ et déduire les exactes de A et B

$$A + B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}\right) + \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc (~~2~~) :

$$A + B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{7\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$A + B = 4(1)$$

$$A - B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}\right) - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$A - B = \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sin^2 \frac{7\pi}{8}\right)$$

On sait que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ d'où :

$$A - B = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(2\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} - \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow A - B = 0 \quad (2)$$

Calculons : A et B : (2) : on a $A = B$; de (1), on a : $2A = 4$ d'où : $A = 2$ et $B = 2$

2- a) Calculer $A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$ et $B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} ; \quad B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$A = \cos(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \quad B = \cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

b) En déduire que : $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ (....)

$$A + B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$A + B = 2 \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

$$A - B = (\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}) - (\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12})$$

$$A - B = 2 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$$

Equations et Inéquations

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} : a) $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$

$$\text{Donc : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\sin(3x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x) \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou :

$$3x + \frac{\pi}{3} = \pi - (\frac{2\pi}{3} - x) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = k\pi \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} ; x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3} - x) \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{e) } \sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} - x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{d'où : } S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{f) } \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ou } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{19\pi}{12} + 2k\pi; -\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{g) } 3 \tan^2 x - 1 = 0 \text{ l'équation existe si : } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3 \tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi ; \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{On a donc : } S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi ; -\frac{\pi}{6} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{h) } \sin 2x = \tan x ; \text{ l'équation existe si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin 2x = \tan x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$* \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$* \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{On aura ainsi : } S = \left\{ k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ce qui donne $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 7

1- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ a) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$

Pour $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$; $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; la partie non hachurée sur le cercle

trigonométrie

Donc $S_{]-\pi; \pi]} = \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$.

b) $\sqrt{2} \cos x + 1 \leq 0$

$\sqrt{2} \cos x + 1 \leq 0 \Rightarrow \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$

$S_{]-\pi; \pi]} = \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right] \cup \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4} \right]$.

2- Résoudre dans $[0; 2\pi]$: a) $\sin x \geq 0$;

$\sin x \geq 0$; pour tout $x \in [0; \pi]$; $\sin x \geq 0$

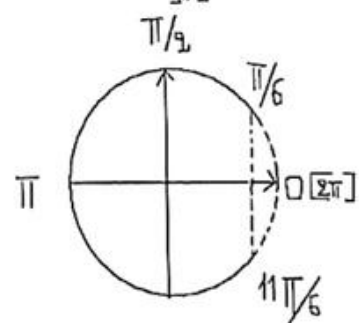
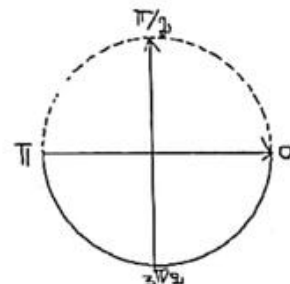
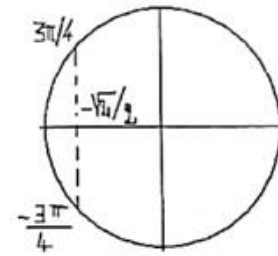
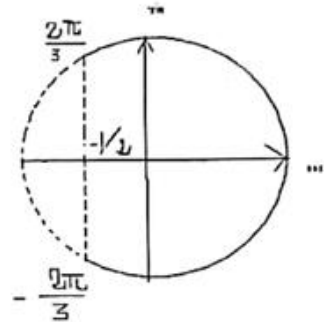
donc $S_{[0; 2\pi]} = [0; \pi]$.

b) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

d'où $S_{[0; 2\pi]} = \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$.

3- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$; $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \sqrt{2}$



$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ posons : } X = \frac{\pi}{3} - 2x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin X \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow X \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \cup \left[-\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

$$X \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \cup \left[-\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \cup \left[-\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

$$\Rightarrow -2x \in \left[\frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right]$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{5\pi}{24} + k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{24} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$$

$$\text{pour } k = 0; x \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{5\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{\pi}{24}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\text{pour } k = 1; x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi; -\frac{5\pi}{24} + \pi\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{24}\right]$$

$$\text{pour } k = -1 x \in \left[\frac{\pi}{24} - \pi; \frac{2\pi}{3} - \pi\right] \Rightarrow x \in \left[-\frac{23\pi}{24}; -\frac{\pi}{3}\right] \text{ donc :}$$

$$S = \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{5\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{\pi}{24}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[-\frac{23\pi}{24}; -\frac{\pi}{3}\right] = \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{5\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[-\frac{23\pi}{24}; -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$4- \text{ Résoudre dans } [0; 2\pi] : \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ posons : } X = 3x + \frac{\pi}{6}$$

$$\cos X \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow X \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \Rightarrow \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right]$$

$$\text{Pour } k = 0; x \in \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{3}\right]; \text{ pour } k = 1 x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{8\pi}{9}; \pi\right]$$

$$\text{Pour } k = 2; x \in \left[\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{14\pi}{9}; \frac{5\pi}{3}\right] \quad S = \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{9}; \pi\right] \cup \left[\frac{14\pi}{9}; \frac{5\pi}{3}\right]$$

Exercice 8

$$1- \text{ Résoudre dans } [0; 2\pi] ; \quad a) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{ ou } \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$* (\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

$$* (\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} \text{ alors : } \boxed{S[0; 2\pi] = \left\{ \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}}$$

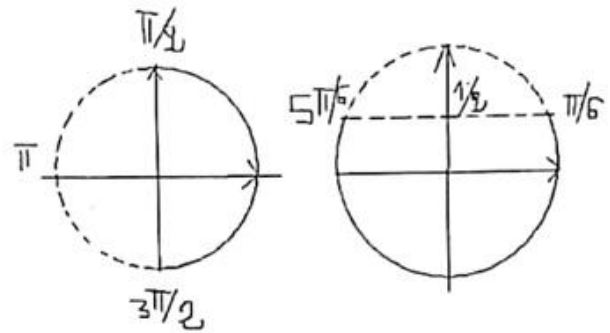
$$b) \cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right) < 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2};$$

$$\left(\frac{1}{2} - \sin x \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Pour } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]; \cos x \leq 0$$

$$\text{et pour } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]; \frac{1}{2} \leq \sin x \Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \leq 0$$



Dressons maintenant un tableau de signe :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$\cos x$	+	+	0	-	-	+			
$\frac{1}{2} - \sin x$	+	0	-	-	0	+			
$\cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$\boxed{S[0; 2\pi] = \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right[}$$

$$2- \text{Résoudre dans } \mathbb{R} : a) \sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x = \sin(3x - 2x) = \sin x$$

$$\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

$$b) -\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 1 ; \text{ Posons } r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$-\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2x + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \left(2x - \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; \quad S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{7\pi}{12} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 9

1- Résoudre dans $[0; 2\pi]$: a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}; \text{ d'où } S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$\text{b) } \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

donc : $S = \left\{ \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right\}$.

c) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$ On a : $r = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$$3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = -\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi; \text{ donc } S = \left\{ \frac{7\pi}{12}; \frac{13\pi}{12} \right\}.$$

2- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation :

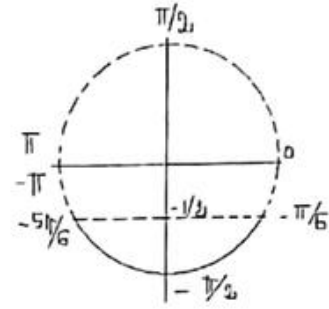
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

on aura : $S = \left\{ \frac{7\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} - \pi; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} + \pi \right\}$.

3- Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$S = \left] -\frac{\pi}{6}; \pi \right[\cup \left] -\pi; -\frac{5\pi}{6} \right[$$



4- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $(2 \sin x - 1)(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0$

$$(2 \sin x - 1)(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\sin x - \frac{1}{2})(\cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2})) \geq 0 \Leftrightarrow (\sin x - \frac{1}{2})(\cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2})) \geq 0$$

$$* \sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

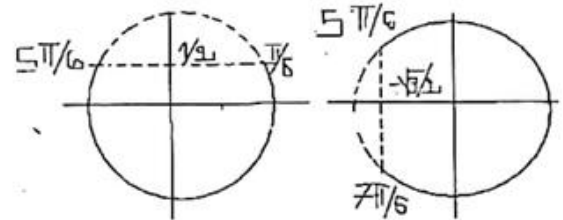
$$* \cos x - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]; \sin x - \frac{1}{2} \geq 0;$

$x \in \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]; \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0$

En faisant le tableau de signe ci-dessous, la solution est donc

$$S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$$



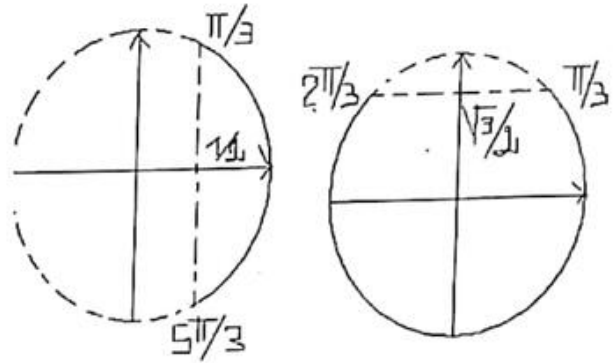
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	2π		
$\sin x - \frac{1}{2}$	-	0	+	0	-		
$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$	+	+	0	-	0	+	
$2(\sin x - \frac{1}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2})$	-	0	+	0	+	0	-

5- Résoudre dans $[0; 2\pi]$ $\frac{1 - 2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \leq 0$; L'inéquation existe si $x \neq \frac{\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{1-2\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)}{\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \leq 0$$

$$\frac{1}{2}-\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3};$$

$$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$



Pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right], \frac{1}{2}-\cos x \geq 0$; pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right], \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$

Vu le tableau ci-dessous on a : $S = \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π		
$\frac{1}{2}-\cos x$	-	0	+	+	0	-	
$\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$	-	0	+	0	-	-	
$\frac{\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)}{\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$	+		+		-	0	+

Exercice 10

1- $(2+2\sqrt{3})^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2 \times 2\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3}$

Résolvons dans IR $4x^2 + (2\sqrt{3}-2)x - \sqrt{3} = 0$

$4x^2 + (2\sqrt{3}-2)x - \sqrt{3} = 0$; $\Delta = (2\sqrt{3}-2)^2 - 4(4)(-\sqrt{3}) = (2+2\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{-(2\sqrt{3}-2) - (2+2\sqrt{3})}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-(2\sqrt{3}-2) + (2+2\sqrt{3})}{8} = \frac{1}{2}$

$S_{IR} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

2- Dédudisons les solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'équation $4\sin^2 x + (2\sqrt{3}-2)\sin x - \sqrt{3} = 0$

Posons $X = \sin x$

$4\sin^2 x + (2\sqrt{3}-2)\sin x - \sqrt{3} = 0$ devient $4X^2 + (2\sqrt{3}-2)X - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow X = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $X = \frac{1}{2}$

$$X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$X = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$S_{[0, 2\pi]} = \left\{ \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

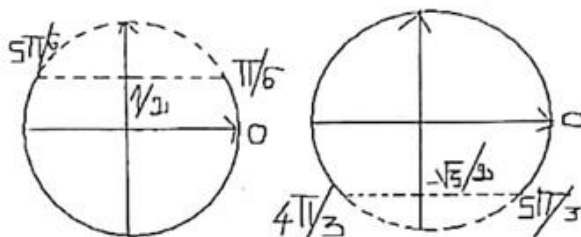
3. Dédurre la résolution dans $[0; 2\pi]$ de l'inéquation $4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} \leq 0$

$$4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ de même } 4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} = 4\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$4\sin^2 x + (2\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow 4\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0$$

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right], \sin x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x - \frac{1}{2} \geq 0$;

pour $x \in \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right], \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0$



Dressons le tableau de signe de $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin x - \frac{1}{2}$	-	0	+	0	-	-
$\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$	+	+	+	0	-	0
$4\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	-	0	+	0	-	0

$$S = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$$

Exercice 11

1-a) Vérifions que : $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$; $(1 + \sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

b) Résoudre dans IR l'équation : $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Calculons $\Delta = (1 - \sqrt{2})^2 - 4(2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. Les racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-(1 - \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2})}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

2- Dédire de 1-)

a) La résolution dans IR l'équation : $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ En posant $X = \cos x$

résoudre $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ revient à résoudre : $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

On a donc :
$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

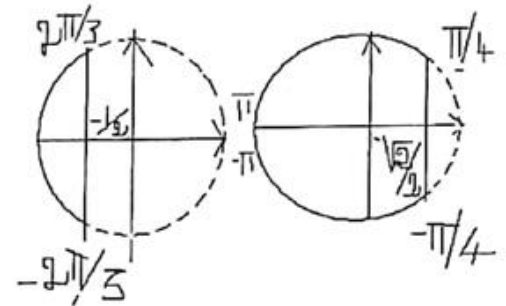
b) la résolution dans $]-\pi; \pi]$ $2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

$$2 \cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Leftrightarrow 2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0$$

$$\left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4}$$

Pour $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$, $\cos x - \left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$; pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right]$, $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$



X	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π			
$\cos x + \frac{1}{2}$	-	0	+	+	+	0	-		
$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	-	-	0	+	0	-	-		
$2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$S = \left] -\pi; -\frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{2\pi}{3}; \pi \right[$$

Exercice 12

On considère la fonction définie sur IR par $A(x) = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$

1- a) Ecrivons $A(x)$ sous la forme $a \cos(2x + \beta)$ (avec $a > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$) ; Soit : $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$A(x) = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x, \text{ on a } A(x) = \frac{2}{2} (\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right)$$

On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $A(x) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$

$$\text{d'où : } \boxed{A(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

b) Résoudre $A(x) = -1$ dans $[0; 2\pi]$

$$A(x) = -1 \Rightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

pour $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, on a $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6}$

pour $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, on a $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$; donc :

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}}$$

2- Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leq 0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ a 4 représentants dans $[-\pi; \pi]$ qui sont $\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} - \pi$;

$$\text{d'où : } \boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12} \right\}}$$

$-\pi$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	π
--------	---------------------	--------------------	------------------	-------------------	-------

pour $x \in \left[-\pi; -\frac{11\pi}{12}\right]$; $\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \in \left[2\pi; 2\pi + \frac{\pi}{6}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \geq 0$

pour $x \in \left[-\frac{11\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}\right]$; $\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \in [\pi; 2\pi]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leq 0$

pour $x \in \left[-\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right]$; $\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \in [0; \pi]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \geq 0$

$$\text{pour } x \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} \right]; \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) \in [-\pi; 0] \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leq 0$$

$$\text{pour } x \in \left[\frac{7\pi}{12}; \pi \right]; \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right) \in \left[-2\pi + \frac{\pi}{6}; -\pi \right] \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \geq 0$$

$$\text{d'où la solution de } 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leq 0 \text{ est : } S = \left[-\frac{11\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} \right]$$

$$3\text{- Résoudre dans } [-\Pi; \Pi] \quad \text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{6} - 2x = \pi - x + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$\text{b) } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{6} - 2x + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{9}; -\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Chapitre 4 : Suites

Exercice 1

1- Etudions le sens de variation de chacune des suites définies par : a) $U_n = 5 \frac{3^{n+2}}{4^{2n-1}}$

Comme pour tout entier naturel n $U_n > 0$ alors positionnons $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \frac{3^{n+3}}{4^{2(n+1)-1}}}{5 \frac{3^{n+2}}{4^{2n-1}}} = 5 \frac{3^{n+3}}{4^{2n+1}} \times \frac{4^{2n-1}}{5 \cdot 3^{n+2}} = \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}; \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n \quad \text{donc} \quad : \underline{(U_n) \text{ est}}$$

décroissante.

$$b) V_n = \frac{1}{n+2} - 2 \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+3} - 2 - \frac{1}{n+2} + 2 = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$-\frac{1}{(n+2)(n+3)} < 0 \Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0 \Rightarrow V_{n+1} < V_n \quad \text{d'où} \quad : \underline{(V_n) \text{ est décroissante.}}$$

2- Soit V définie par récurrence par : $V_0 = 1$; $V_1 = 3$ et $V_{n+2} = \frac{1+V_{n+1}}{2+V_n}$

Calculons : V_2 ; V_3 ; et V_4

$$V_2 = \frac{1+V_1}{2+V_0} = \frac{1+3}{2+1} = \frac{4}{3}; \quad V_3 = \frac{1+V_2}{2+V_1} = \frac{1+\frac{4}{3}}{2+3} = \frac{7}{15}; \quad V_4 = \frac{1+V_3}{1+V_2} = \frac{1+\frac{7}{15}}{2+\frac{4}{3}} = \frac{11}{25}$$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

1- Etudions la variation de U : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$;

$$n+2 > n \Rightarrow \sqrt{n+2} > \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} < U_n \quad \text{donc} \quad : \underline{(U_n) \text{ est décroissante.}}$$

2- Ecrivons U_n sans radical au dénominateur :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

3- Calculer U_0 , U_1 et U_2 : $U_0 = 1$; $U_1 = \sqrt{2} - 1$; $U_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

4- Calculons $U_0 + U_1 + U_2$: $U_0 + U_1 + U_2 = 1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$$U_0 + U_1 + U_2 = \sqrt{3}$$

5- Posons $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$. Montrons que $S_n = \sqrt{n+1}$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = 1 + ((\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})) = \sqrt{n+1}$$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1- Vérifions que $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = U_n$

2- Calculons $U_1 + U_2 + U_3$: $U_1 + U_2 + U_3 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$

3- $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$. Montrons que $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et calculer la limite de S_n .

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exercice 4

(U_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme $U_0 = 2$ et de raison $r = -3$

a) Exprimons U_n en fonction de n et déterminer le sens de variation de U .

$U_n = U_0 + nr$ d'où $U_n = 2 - 3n$. U est décroissante car la raison est négative.

b) Calculer la somme des 20 premiers termes. Pour cela on pose S_{20} la somme des 20 premiers termes

$$S_{20} = \sum_{k=0}^{19} U_k = \frac{20(U_0 + U_{19})}{2} = \frac{20(2 + (2 - 3 \times 19))}{2} = -530$$

Exercice 5

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = 210$ et $U_{10} + U_{11} = 42$.

Calculons U_0 et la raison r . $U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = \frac{21(U_0 + U_{20})}{2}$ or $U_{20} = U_0 + 20r$

donc : $U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = 21(U_0 + 10r) = 210$ d'où $U_0 + 10r = 10$ (1)

On a $U_{10} + U_{11} = (U_0 + 10r) + (U_0 + 11r) = 2U_0 + 21r$ d'où $2U_0 + 21r = 42$ (2)

En résolvant le système (S) :
$$\begin{cases} U_0 + 10r = 10 \\ 2U_0 + 21r = 42 \end{cases}$$
 on trouve $U_0 = -210$ et $r = 22$

Exercice 6

Soit (U_n) une suite arithmétique croissante telle que : $U_1 + U_2 = 18$ et $U_1 \cdot U_2 = 77$

1- Déterminer U_1 et U_2 et déduire la raison de la suite U .

Posons $U_1 + U_2 = S$ et $U_1 \cdot U_2 = P$. U_1 et U_2 sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 77 = 0 ; \Delta = (18)^2 - 4(77) = 16 = 4^2 \text{ d'où } x_1 = 7 \text{ et } x_2 = 11$$

Conclusion : $U_1 = 7$ et $U_2 = 11$ car U est croissante

2- Calculons U_n en fonction de n .

Calculons la raison r . $r = U_2 - U_1 = 4$; $U_n = U_1 + (n-1)r$ d'où : $U_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$

3- Calculer $S = U_4 + U_5 + \dots + U_{45} + U_{46}$. $\Rightarrow U_4 = 19$ et $U_{46} = 187$

$$S = U_4 + U_5 + \dots + U_{45} + U_{46} = \frac{(46 - 4 + 1)(U_4 + U_{46})}{2} = 4429$$

Exercice 7

Soit (V_n) une suite géométrique telle que : $V_0 V_2 V_3 = 864$ et $V_0 V_1 V_3 = 432$

1- Déterminons V_0 et la raison q . $\frac{V_0 V_2 V_3}{V_0 V_1 V_3} = \frac{V_0 V_0 \cdot q^2 \cdot V_0 q^3}{V_0 V_0 q \cdot V_0 q^3} = q$ et $\frac{V_0 V_2 V_3}{V_0 V_1 V_3} = \frac{864}{432} = 2$ d'où : $q = 2$

On a : $V_0 V_1 V_3 = 432 \Leftrightarrow V_0^3 q^4 = 432 \Rightarrow V_0^3 = 27 \Rightarrow V_0^3 = 3^3 \Rightarrow V_0 = 3$

2- Exprimons V_n en fonction de n . $V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = 3(2)^n$

3- Calculons $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$ en fonction de n . $S_n = \sum_{k=1}^n V_k = V_1 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 6(2^n - 1)$

Exercice 8

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . On donne $U_{50} = 406$ et $U_{100} = 806$

1- Calculer U_0 et la raison r . $U_{50} = U_0 + 50r = 406$ et $U_{100} = U_0 + 100r = 806$

En résolvant le système (S) :
$$\begin{cases} U_0 + 50r = 406 \\ U_0 + 100r = 806 \end{cases} ; \text{ on trouve : } U_0 = 6 \text{ et } r = 8$$

2- Calculons $S = U_{50} + U_{51} + \dots + U_{100}$.

$$U_{50} + U_{51} + \dots + U_{100} = \frac{(100 - 50 + 1)(U_{50} + U_{100})}{2} = \frac{51(406 + 806)}{2} = 30906$$

Exercice 9

Un voyageur parcourt 30km le 1^{er} jour puis par la suite, chaque jour, il parcourt 5km de plus que le précédent.

1- Calculer la distance d_2 parcourue le 2^{ème} jour puis la distance d_3 parcourue le 3^{ème} jour

$$d_2 = 30\text{km} + 5\text{km} = 35\text{km} ; d_3 = d_2 + 5\text{km} = 40\text{km}$$

Exprimer la distance d_n parcourue le $n^{\text{ème}}$ jour en fonction de n .

(d_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5\text{km}$ et de 1^{er} terme $d_1 = 30\text{km}$

$$d_n = d_1 + (n-1)r \text{ donc } \boxed{d_n = 5n + 25}$$

✍ 2- Calculer la distance D totale parcourue au bout de 10 jours de voyage

$$\boxed{D = d_1 + d_2 + \dots + d_{10} = \frac{10(d_1 + d_{10})}{2} = 525\text{km}}$$

Exercice 10

Le loyer mensuel d'une maison est de 50000F CFA. Ce loyer augmente chaque année de 6%

1- Soit l_n le montant du loyer dans n ans.

Exprimons l_{n+1} en fonction de l_n et exprimons l_n en fonction de n : $\boxed{l_{n+1} = l_n + \frac{6}{100}l_n = (1,06)l_n}$

Soit $l_0 = 50000$ le montant du loyer cette année. On a donc : $\boxed{l_n = l_0(1,06)^n = 50000(1,06)^n}$

✍ 2- le montant du loyer l'année dans 8 ans est l_8 . $\boxed{l_8 = 50000(1,06)^8 = 79692,40}$

✍ 3- Au bout de combien d'années le loyer aura-t-il doublé ?

$$l_{11} = 50000(1,06)^{11} = 94914,92 ; l_{12} = 50000(1,06)^{12} = 100609,82 . \text{ Dans } \underline{12 \text{ ans}} \text{ le loyer aura doublé.}$$

✍ 4- Calculons le montant M des loyers payés pendant les 10 premières années.

$$M = 12l_0 + 12l_1 + \dots + 12l_9 = 12(l_0 + l_1 + \dots + l_9) = 12 \left[l_0 \times \frac{1 - (1,06)^{10}}{1 - 1,06} \right] = 7.908.476,96$$

Exercice 11

Soit U et V deux (2) suites définies par :
$$\begin{cases} U_n = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 1$$

✍ 1- Démontrons que (V_n) est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \left(\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(U_n - 1) \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{\frac{1}{5}}$ et de 1^{er} terme $\boxed{V_0 = 5}$.

✍ 2- Exprimons U_n et V_n en fonction de n .

Exprimons V_n en fonction de n :

$$\boxed{V_n = V_0 \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

$$\text{On a } V_n = U_n - 1 \Rightarrow U_n = V_n + 1 \Rightarrow \boxed{U_n = \left[\frac{1}{5}\right]^{n-1} + 1}$$

3- Calculons les limites des suites (V_n) et (U_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{5} < 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{U_n + 2} \end{cases}$$

On suppose que $U_n \neq -1$ et on pose $V_n = \frac{1}{U_n + 1}$

1- Démontrons que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0 .

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} + 1} - \frac{1}{U_n + 1} = \frac{1}{\frac{-1}{U_n + 2} + 1} - \frac{1}{U_n + 1} = \frac{1}{\frac{U_n + 1}{U_n + 2}} - \frac{1}{U_n + 1}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 2}{U_n + 1} - \frac{1}{U_n + 1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 1} = 1 \text{ d'où } (V_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } \boxed{r = 1} \text{ et de 1}^{\text{er}}$$

terme $V_0 = \frac{1}{U_0 + 1} = \frac{1}{2}$.

2- Exprimer V_n et U_n en fonction de n .

(V_n) étant une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de 1^{er} terme $V_0 = \frac{1}{2}$ alors :

$$V_n = n + \frac{1}{2} \text{ . Déduisons } U_n \text{ en fonction de } n.$$

$$V_n = \frac{1}{U_n + 1} \Rightarrow V_n(U_n + 1) = 1 \Rightarrow V_n U_n + V_n = 1 \Rightarrow V_n U_n = 1 - V_n \Rightarrow U_n = \frac{1 - V_n}{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{1 - 2n}{1 + 2n}$$

3- Calculons la limite de U et V .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2n}{1 + 2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{2n} = -1$$

Exercice 13

Soit (U_n) une suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases}$$

1- Montrer par récurrence que si $U_0 = 2$ alors U est constante

Posons $U_0 = 2$; calculons U_1 . $U_1 = \frac{3U_0 + 2}{U_0 + 2} = \frac{8}{4} = 2$; vraie car $U_0 = U_1$.

Supposons que $U_n = 2$ et montrons que $U_{n+1} = 2$

$$U_n = 2; U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{3 \times 2 + 2}{2 + 2} = 2 \text{ donc pour } U_0 = 2, U \text{ est constante}$$

2- On pose ; $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 2}$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0
 V est bien définie car $U_0 \neq 2$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 2} = \frac{\frac{3U_n + 2}{U_n + 2} + 1}{\frac{3U_n + 2}{U_n + 2} - 2} = \frac{4U_n + 4}{U_n + 2} \times \frac{U_n + 2}{U_n - 2} = 4 \frac{U_n + 1}{U_n - 2}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 4V_n \text{ d'où } V \text{ est une suite géométrique de raison } q = 4 \text{ et 1^{er} terme } V_0 = -\frac{1}{2}$$

b) Exprimons V_n en fonction de n . $V_n = V_0 q^n = -\frac{1}{2}(4)^n$

c) Exprimons U_n en fonction de n .

$$\text{on a : } V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 2} \Rightarrow V_n(U_n - 2) = U_n + 1 \Rightarrow V_n U_n - 2V_n = U_n + 1 \Rightarrow V_n U_n - U_n = 1 + 2V_n$$

$$\Rightarrow U_n(V_n - 1) = 1 + 2V_n \Rightarrow U_n = \frac{1 + 2V_n}{V_n - 1} \text{ d'où : } U_n = \frac{1 - 4^n}{-\frac{1}{2}(4)^n - 1} = \frac{4^n - 1}{2(4)^{n-1} + 1}$$

Exercice 14

$$\text{Soit } (U_n) \text{ définie par : } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2 \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer U_1, U_2 et U_3 .

$$U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}; U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 1 - 2 = -\frac{14}{9}; U_3 = \frac{1}{3}U_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$$

2- Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 4; U_n \geq 0$

$$* U_4 = \frac{1}{3}U_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81} \text{ donc } U_4 \geq 0$$

* Supposons que $U_n \geq 0$ pour $n \geq 4$ et montrons que $U_{n+1} \geq 0$

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 2. \text{ Par hypothèse on a } U_n \geq 0 \text{ pour } n \geq 4 \text{ donc } \frac{1}{3}U_n \geq 0.$$

$$\text{Pour } n \geq 4; n - 2 \geq 2 \Rightarrow n - 2 \geq 0 \text{ donc } \frac{1}{3}U_n + n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow U_{n+1} \geq 0.$$

On peut donc conclure que pour tout $n \geq 4$, $U_n \geq 0$

3- On définit (V_n) par : $V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme V_0 .

$$V_{n+1} = -2U_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$$

$$V_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3}U_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}U_n + n - \frac{7}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}\left[-2U_n + 3n - \frac{21}{2}\right] \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et 1^{er} terme $V_0 = -2U_0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

b) Exprimer V_n en fonction de n . $V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = -\frac{25}{2} \left[\frac{1}{3}\right]^n$

c) Déduisons que $U_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

$$V_n = -2U_n + 3n - \frac{21}{2} \Rightarrow 2U_n = -V_n + 3n - \frac{21}{2} \Rightarrow U_n = -\frac{1}{2}V_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

d'où :
$$U_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

d) En posant $a_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $b_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ Calculons $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

(a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $a_0 = \frac{25}{4}$ d'où :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \frac{25}{4} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right] = \frac{25}{4} \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] = \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$$

(b_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et $b_0 = -\frac{21}{4}$

$$\sum_{k=0}^n b_k = \frac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2} = \frac{(n+1)\left(-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)}{2} = \frac{(n+1)\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{2}\right)}{2} = \frac{(n+1)(3n-21)}{4}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = \frac{75}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{(n+1)(3n-21)}{4}$$

4- Calculons la limite de (V_n) , de (U_n) et de (S_n) .

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{75}{8} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(3n-21)}{4} = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Exercice 15

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_1 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 U_{n+1} + (a-3)U_n \text{ avec } a \text{ un réel.}$$

Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$

1- pour $a=2$. On a $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$

a) Déterminons la nature de (V_n) .

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 2U_{n+1} - U_n - U_{n+1} = U_{n+1} - U_n = V_n \text{ donc } (V_n) \text{ est une suite constante ;}$$

$$\text{d'où : } V_n = U_1 - U_0 = 2$$

b) Nature de la suite (U_n)

$V_n = 2$; ainsi $U_{n+1} - U_n = 2$ d'où (U_n) est une suite arithmétique de raison 2

Exprimons U_n en fonction de n . $U_n = U_0 + nr = 2n + 1$

Calculons $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n . $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} = \frac{n(2n+4)}{2} = n(n+2)$

2- On pose $a=-4$. On a $U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n$

a) la nature de la suite (V_n) .

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 8U_{n+1} - 7U_n - U_{n+1} = 7U_{n+1} - 7U_n = 7(U_{n+1} - U_n)$$

$V_{n+1} = 7V_n$ donc V est une suite géométrique de raison $q=7$ et de 1^{er} terme $V_0 = 2$

Exprimons V_n en fonction de n . $V_n = V_0(7)^n = 2 \times (7)^n$

b) Calculons $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n . $T_n = V_0 \frac{1-7^{n+1}}{-6} = \frac{1}{3} [7^{n+1} - 1]$

c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $T_n = U_{n+1} - 1$

$T_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} + V_n$ comme $V_n = U_{n+1} - U_n$ alors

$$T_n = (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \dots + (U_n - U_{n-1}) + (U_{n+1} - U_n) \text{ d'où}$$

$$T_n = -U_0 + U_{n+1} = U_{n+1} - 1$$

Exprimons U_n en fonction de n . On a : $T_n = \frac{1}{3} [7^{n+1} - 1]$; $T_n = U_{n+1} - 1$ d'où

$$\frac{1}{3} [7^{n+1} - 1] = U_{n+1} - 1 \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{3} [7^{n+1} - 1] + 1 \text{ donc } U_n = \frac{1}{3} [7^n - 1] + 1$$

Exercice 16

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- a) Calculons U_1 et U_2 .
$$U_1 = \frac{2U_0 + 3}{U_0 + 4} = \frac{3}{4} ; \quad U_2 = \frac{2U_1 + 3}{U_1 + 4} = \frac{18}{19}$$

b) Démontrons par récurrence que $0 \leq U_n \leq 1$

* $U_0 = 0$ vraie pour $n = 0$

* Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} = 2 - \frac{5}{U_n + 4} ; \quad \text{On a :}$$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow 4 \leq U_n + 4 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{U_n + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq -\frac{5}{U_n + 4} \leq -1 \Rightarrow 2 - \frac{5}{4} \leq 2 - \frac{5}{U_n + 4} \leq -1 + 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq U_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$

2- a) Démontrons que (U_n) est croissante

Calculons et étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - U_n = \frac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n + 4} = \frac{(U_n + 3)(1 - U_n)}{U_n + 4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n + 3 > 0$ de même que $U_n + 4$ car $0 \leq U_n \leq 1$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -U_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - U_n \leq 1 \Rightarrow 1 - U_n \geq 0$

donc : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ d'où (U_n) est croissante.

b) Démontrons par récurrence que $U_n = \frac{3 - 3(\frac{1}{5})^n}{3 + (\frac{1}{5})^n}$

*
$$\frac{3 - 3(\frac{1}{5})^0}{3 + (\frac{1}{5})^0} = 0 = U_0 ; \text{ vraie pour } n = 0$$

* Supposons que : $U_n = \frac{3 - 3(\frac{1}{5})^n}{3 + (\frac{1}{5})^n}$ et montrons que : $U_{n+1} = \frac{3 - 3(\frac{1}{5})^{n+1}}{3 + (\frac{1}{5})^{n+1}} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4}$

Par hypothèse $U_n = \frac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}$. On a :
$$U_{n+1} = \frac{2 \left[\frac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n} \right] + 3}{\frac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n} + 4} = \frac{6-6(\frac{1}{5})^n + 9+3(\frac{1}{5})^n}{3-3(\frac{1}{5})^n + 12+4(\frac{1}{5})^n} = \frac{15-3(\frac{1}{5})^n}{15+(\frac{1}{5})^n} \Rightarrow$$

$$U_{n+1} = \frac{5(3-3(\frac{1}{5})^{n+1})}{5(3+(\frac{1}{5})^{n+1})} = \frac{3-3(\frac{1}{5})^{n+1}}{3+(\frac{1}{5})^{n+1}} \quad \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$U_n = \frac{3-3(\frac{1}{5})^n}{3+(\frac{1}{5})^n}$$

c) Calculons la limite de la suite (U_n) .

on a : $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{5})^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

Exercice 17

Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$

1- Calculons $W_1; W_2; W_3$.

$$W_1 = (2(1)-1)^3 = 1; \quad W_2 = 1^3 + (2 \times 2 - 1)^3 = 1 + 3^3 = 28; \quad W_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$$

2- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul ; on a $w_n = 2n^4 - n^2$.

$$2 \times 1^4 - 1^2 = 1 = W_1 \text{ vraie pour } n = 1$$

Supposons que $w_n = 2n^4 - n^2$.et montrons que $W_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$

$$W_{n+1} = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 = [1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3] + (2n+1)^3$$

$$W_{n+1} = W_n + (2n+1)^3. \text{ Par hypothèse } w_n = 2n^4 - n^2$$

$$W_{n+1} = 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = (2n^4 - n^2) + (2n+1)^3 = 2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1; \quad (n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2) - (n+1)^2$$

$$2n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2 \text{ d'où}$$

$$W_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2 \text{ donc pour tout : } n \in \mathbb{N}^* ; w_n = 2n^4 - n^2.$$

3- Déterminons n_0 pour que $w_{n_0} = 29161$

$$W_n = 29161 \Rightarrow 2n^4 - n^2 = 29161 \Rightarrow 2n^4 - n^2 - 29161 = 0$$

Posons $X = n^2$. Résolvons donc $2X^2 - X - 29161 = 0$

$$\Delta = 1 - 4(2)(-29161) = 233289 = (483)^2; \quad X_1 = -120,5 \text{ et } X_2 = 121$$

$$\text{d'où } X = 121 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11 \text{ donc } \underline{n_0 = 11}$$

Exercice 18

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

1- Calculons $U_n - \frac{1}{4}U_n$ en fonction de n. $U_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{2n-2}} + \frac{2n+1}{2^{2n}}$

$$\frac{1}{4}U_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^6} + \dots + \frac{2n-1}{2^{2n}} + \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$U_n - \frac{1}{4}U_n = 1 + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^4} - \frac{3}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{2n+1}{2^{2n}} - \frac{2n-1}{2^{2n}}\right) - \frac{2n+1}{2^{2n+2}}$$

$$U_n - \frac{1}{4}U_n = 1 + \left(\frac{1}{2^1}\right) + \left(\frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right) - \frac{2n+1}{2^{2n+2}} \quad \left(U_n - \frac{1}{4}U_n\right) = 1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}} + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right]$$

$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right]$ est une somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme $\frac{1}{2}$ donc $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

Ainsi : $\left(U_n - \frac{1}{4}U_n\right) = \left(1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}\right) + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

2- Dédurre l'expression de U_n en fonction de n et étudier la convergence de (U_n)

$$\left(U_n - \frac{1}{4}U_n\right) = \left(1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}\right) + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \Rightarrow \frac{3}{4}U_n = \left(1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}\right) + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

donc : $U_n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{(2n+1)}{2^{2n+2}}\right) + \frac{8}{9} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2^{2n+2}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} = \frac{20}{9}$ donc (U_n) est convergente et converge vers $\frac{20}{9}$

Exercice 19

1- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

$7^1 - 1 = 6$; 6 est divisible par 3 ; vraie pour $n = 1$
Supposons que $(7^n - 1)$ est divisible par 3 et montrons que $(7^{n+1} - 1)$ est divisible par 3.

$$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = (6+1)7^n - 1 = 6 \times 7^n + (7^n - 1)$$

6×7^n est divisible par 3 et par hypothèse $(7^n - 1)$ est divisible par 3 ; donc $6 \times 7^n + (7^n - 1)$

est divisible par 3.

Ainsi pour tout entier naturel non nul $(7^n - 1)$ est divisible par 3.

2- Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 3(5) + 2 = 17$ vrai pour $n = 1$

Supposons que $(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2})$ est divisible par 17 et montrons que $(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$ est divisible par 17

$$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 3 \times 5^{2n-1} \times 25 + 2^{3n-2} \times 2^3$$

$$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 3 \times 5^{2n-1} (17 + 8) + 2^{3n-2} \times 8 = 8(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1}$$

$8(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2})$ est divisible par 17 car par hypothèse $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 et $17 \times 3 \times 5^{2n-1}$ est multiple de 17 donc $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. Ainsi pour tout entier naturel non nul $(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2})$ est divisible par 17

Exercice 20

Soit un polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

1- Déterminons a, b et c pour que $P(x+1) - P(x) = x^2$

$$P(x+1) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) = ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c)$$

$$P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c)$$

$$P(x+1) - P(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + (a+b+c) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{1}{6}$$

$$\text{Donc : } P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

2- on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ (avec $n \geq 1$)

Déduisons de 1-) le calcul S_n de en fonction de n. On peut prendre $x = n$ ainsi $P(n+1) - P(n) = n^2$.

On a :

$$p(2) - p(1) = 1^2$$

$$p(3) - p(2) = 2^2$$

$$p(4) - p(3) = 3^2$$

...

...

$$p(n) - p(n-1) = (n-1)^2$$

$$p(n+1) - p(n) = n^2$$

$$p(n+1) - p(1) = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

$$p(n+1) - p(1) = \left(\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)\right) - 0$$

$$\text{donc : } S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \left(\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)\right)$$

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Exercice 21

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \cos \theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases} \quad n \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi$$

1- Calculons U_1 et U_2 en fonction de θ . $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

$$U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{2(1 + \cos(2 \frac{\theta}{2}))} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

Comme $0 \leq \theta \leq \pi$ alors $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$ d'où : $U_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$

$$U_2 = \sqrt{2 + U_1} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1 + \cos(2 \frac{\theta}{2^2}))} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{4}} = 2 \cos \frac{\theta}{4}$$

2- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel, on a : $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$

$$2 \cos(\frac{\theta}{2^0}) = 2 \cos \theta = U_0 ; \text{ vraie pour } n = 0$$

Supposons que $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$ et montrons que $U_{n+1} = 2 \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} = \sqrt{2 + 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1 + \cos(\frac{\theta}{2^n}))} = \sqrt{2(1 + \cos[2 \frac{\theta}{2^{n+1}}])}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2 \times 2 \cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})} = 2 \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$$

Donc pour tout entier naturel, $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$.

3- Calculer la limite de (U_n) . $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos(\frac{\theta}{2^n}) = 2$

Chapitre 5 : Dénombrements

Exercice 1

Dans une classe les élèves ont le choix d'apprendre soit le latin ou l'arabe

Il y a 40 élèves qui apprennent le latin, 30 l'arabe et 10 apprennent l'arabe et le latin.

Calculons le nombre d'élèves de la classe :

Soit A l'ensemble des élèves apprenant le latin. Soit B l'ensemble des élèves apprenant l'arabe.

Ainsi l'ensemble des élèves de la classe est $(A \cup B)$ et $(A \cap B)$ est l'ensemble des élèves qui apprennent les deux langues, d'où $\text{Card}(A \cup B)$ est le nombre d'élèves de la classe.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B) \Rightarrow \text{Card}(A \cup B) = 40 + 30 - 10 = 60.$$

Il y a 60 élèves dans la classe.

Exercice 2

Soit A l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question 1.

Soit B l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question 2.

$A \cap B$ est donc l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à la Question 1 et à la Question 2.

$A \cup B$ est l'ensemble des élèves qui ont répondu OUI à une des questions

- $\text{Card}A = 20$, $\text{Card}B = 35 - 12 = 23$
- $\text{Card}(A \cup B) = 35 - 5 = 30$ car il y a 5 élèves qui ont répondu NON aux deux questions

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B) \Rightarrow \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cup B)$$

$$\text{Card}(A \cap B) = 20 + 23 - 30 = 13$$

Conclusion : Il y a donc 13 élèves qui ont répondu OUI à la Question 1 et à la Question 2

Exercice 3

1- Calculons en fonction de n , C_n^2 et C_n^3

$$C_n^2 = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Réolvons $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$. L'équation existe si $n \geq 3$.

$$2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n \Rightarrow 2 \frac{n(n-1)}{2} + 6 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 9n \Rightarrow n-1 + (n-1)(n-2) = 9$$

$$\Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n+2)(n-4) = 0 \Rightarrow n = -2 \text{ ou } n = 4; \quad \boxed{S = \{4\}}$$

2- Résolvons dans \mathbb{N} ; $C_n^5 = C_n^7$

L'équation existe si $n \geq 7$

$$C_n^5 = C_n^7 \Rightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{7!(n-7)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7 \times 6 \times 5!}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(n-5)(n-6)}{42} \Rightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-12) = 0 \Rightarrow n = -1 \text{ ou } n = 12 \quad \boxed{S_{\mathbb{N}} = \{12\}}$$

3- Soit N le nombre des nombres entiers naturels à trois (3) chiffres dont les chiffres sont différents.
Exemple : XYZ Il y a 10 chiffres. X ne peut pas prendre la valeur 0

	X	Y	Z
Nombre de choix	9	9	8

4- Soit K le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents (WXYZ) qui sont divisibles par 5. Un nombre entier naturel est divisible par 5 s'il se termine par 5 ou 0.
Par exemple : 1965 ; 9750 ; 6325 ;

$$\text{d'où : } N = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

Déterminons K_1 le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui se terminent par 5. W ne peut pas prendre la valeur 0 ni la valeur 5 donc pour W on a 8 choix.

	W	X	Y	Z
Nombre de choix	8	8	7	1

$$K_1 = 8 \times 8 \times 7 \times 1 = 448$$

Déterminons K_2 le nombre de nombres entiers naturels à quatre (4) chiffres différents qui se terminent par 0. W ne peut pas prendre la valeur 0, de même que X et Y

	W	X	Y	Z
Nombre de choix	9	8	7	1

$$K_2 = 9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$$

$$D'où \boxed{K = K_1 + K_2 = 448 + 504 = 952}$$

5- Développons $(2x-1)^5$ et $(x-1)^6$

□ Développons $(2x-1)^5$. En se servant du *triangle de Pascal*, on a :

$$(2x-1)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-1) + 10(2x)^3(-1)^2 + 10(2x)^2(-1)^3 + 5(2x)(-1)^4 + (2x)^0(-1)^5$$

$$(2x-1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$$

□ Développons $(x-1)^6$: $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

Exercice 4

Quatre personnes ayant chacun un permis de conduire désirent voyager à bord d'un véhicule de quatre places. Calculons le nombre N de manières dont ils peuvent s'asseoir.

Ici on a une permutation d'où $\boxed{N = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24}$.

Exercice 5

Les 20 membres d'une association se rencontrent pour une réunion.

Calculons le nombre N de poignées de mains poignées échangées.

Une poignée de mains est un sous-ensemble de deux éléments des 20 membres,

donc : $N = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$. Il y a eu 190 poignées de mains échangées.

Exercice 6

Les numéros d'immatriculation des véhicules et motos au Burkina-Faso sont formés du numéro de la province suivi de deux lettres qui à leur tour sont suivies de 4 chiffres.

Déterminons le nombre I de numéros d'immatriculation que la direction des transports peut disposer.

Par exemple : 04 AA 0036 ; 10 MR 2987 ; 11 ZT 0333 ; 44 EJ 9915.

- Le nombre de choix des provinces est : 45
- Le nombre de choix des deux lettres est : 26×26
- Le nombre de choix des 4 chiffres est : $10 \times 10 \times 10 \times 10$

d'où $I = 45 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \underline{304.200.000}$

Exercice 7

Un prestataire de téléphonie mobile voudrait mettre à la disposition de sa clientèle des numéros commençant

par 81, 82 et 83 suivis de 6 chiffres.

Calculons le nombre N de numéros téléphoniques.

Les numéros sont sous la forme : 81 XX XX XX ; 82 XX XX XX ; 83 XX XX XX où X est un chiffre. On a

3 choix pour les deux premiers chiffres qui sont 81, 82 et 83.

Pour les 6 chiffres suivants, on a : 10^6 choix. D'où $N = 3 \cdot 10^6 = \underline{3.000.000}$

Exercice 8

Calculons le nombre P de polygones non croisés dont chacun des sommets est l'un de ces 6 points du cercle.

On peut avoir des triangles (3 sommets), des quadrilatères (4 sommets), des pentagones (5 sommets) et des hexagones (6 sommets).

En exemples, on a les figures ci-contre :

-Un triangle est un sous-ensemble à 3 éléments des 6 points ; donc le nombre de triangles est : $C_6^3 = 20$

-Un quadrilatère est un sous-ensemble à 4 éléments des 6 points ; donc le nombre de quadrilatères est : $C_6^4 = 15$

-Un pentagone est un sous-ensemble à 5 éléments des 6 points ; donc le nombre de pentagones est : $C_6^5 = 6$

-Un hexagone est un sous-ensemble à 6 éléments des 6 points ; donc on a 1 seul hexagone.

On a donc $P = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$.

Exercice 9

Un jury est composé de 5 membres pris dans une liste comportant 10 hommes et 8 femmes.

1- Calculons le nombre N de jurys qu'on peut former.

Un jury est un sous-ensemble à 5 éléments des 18 personnes d'où : $N = C_{18}^5 = 8568$.

2- Calculons le nombre : a) N_1 de jurys comprenant seulement des femmes : $N_1 = C_8^5 = 56$.

b) N_2 de jurys comprenant seulement 3 hommes ; les deux autres sont des femmes ainsi :

$$N_2 = C_{10}^3 \times C_8^2 = 3360$$

c) N_3 de jurys comprenant au moins 3 hommes. Cela veut dire que le jury peut comporter 3 hommes ou 4 hommes ou 5 hommes. On a donc $N_3 = C_{10}^3 \times C_8^2 + C_{10}^4 \times C_8^1 + C_{10}^5 \times C_8^0 = 5292$.

d) N_4 de jurys comprenant au plus 1 femme. Cela veut dire que le jury peut comporter 1 femme ou le jury peut être sans femme. On a ainsi : $N_4 = C_8^1 \times C_{10}^4 + C_{10}^5 = 1932$.

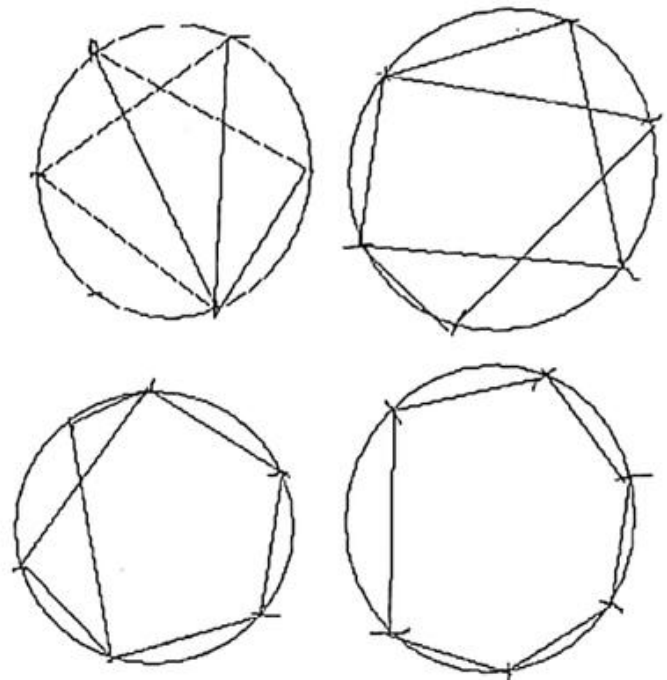
Exercice 10

1- Soit N_1 le nombre d'itinéraires possibles

Pour la 1^{ère} ville à visiter, on a 5 choix. Pour la 2^{ème} ville à visiter, on a 4 choix puisque les touristes ont déjà visité une ville. Et ainsi de suite.

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	5	4	3	2	1

D'où $N_1 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$



2- Soit N_2 le nombre d'itinéraires tels que Ouaga est la 1^{ère} ville visitée

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	1	4	3	2	1

$$\text{Ainsi } N_2 = 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

3- Soit N_3 le nombre d'itinéraires tels que Bobo est la 2^{ème} ville visitée et Fada la 4^{ème} ville visitée

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	3	1	2	1	1

$$N_3 = 3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

4- Soit N_4 le nombre d'itinéraires tels que la ville Bobo soit visitée avant la ville de Dori

Si Bobo est la 1^{ère} ville visitée, on aura : $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ itinéraires

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	1	4	3	2	1

Si Bobo est la 2^{ème} ville visitée, on aura : $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1$ itinéraires

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	3	1	3	2	1

Si Bobo est la 3^{ème} ville visitée, on aura : $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1$ itinéraires

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	3	2	1	2	1

Si Bobo est la 4^{ème} ville visitée, on aura : $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$ itinéraires

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}
Nombre de choix	3	2	1	1	1

$$\text{D'où } N_4 = (1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1) = 24 + 18 + 12 + 6 = 60$$

Exercice 11

1- Le nombre N_1 de podiums possibles

$$N_1 = 8 \times 7 \times 6 = A_8^3 = 336.$$

2- Soit N_2 le nombre de podiums tels que Hussein Bolt est premier

Le 1^{er} étant un jamaïcain et comme on a un seul jamaïcain, on a donc un seul choix.

Pour le 2^{ème}, on a 7 choix et pour le 3^{ème}, on a 6 choix. D'où $N_2 = 1 \times 7 \times 6 = 42$

3- Soit N_3 le nombre de podiums tels que les deux premiers sont des burkinabés

	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}
Nombre de choix	2	1	6

$$N_3 = 2 \times 1 \times 6 = 12$$

4- Soit N_4 le nombre de podiums tels que 1^{er} coureur est américain et le 2^{ème} britannique

	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	$N_4 = 3 \times 2 \times 6 = 36$
Nombre de choix	3	2	6	

Exercice 12

Les êtres humains sont repartis suivant la composition du sang en quatre groupes : O, A, B, AB. Dans une assemblée de dix donneurs de sang quatre sont du groupe O trois du groupe A deux du groupe B et un du groupe AB. On choisit au hasard trois (3) personnes de l'assemblée.

1- Calculons le nombre N de choix possibles. $N = C_{10}^3 = 120$.

2- Calculons le nombre N_1 de choix où les trois personnes appartiennent au même groupe sanguin.

On ne peut avoir que 3 de O et 3 de A. $N_1 = C_4^3 + C_3^3 = 5$.

3- Calculons le nombre N_2 de choix où deux personnes au moins appartiennent au même groupe sanguin. Cas où il y a 2 exactement qui appartiennent au même groupe sanguin. On a dans ce cas :

$$C_4^2 \times C_6^1 + C_3^2 \times C_7^1 + C_2^2 \times C_8^1 = 65$$

Cas où il y a 3 exactement qui appartiennent au même groupe sanguin. On a dans ce cas : N_1

Ainsi on a $N_2 = 65 + N_1 = 65 + 5 = 70$.

Exercice 13

a) Soit N_1 le nombre de coloriages possibles

Pour la 1^{ère} case, on a 3 couleurs donc 3 choix. Pour la 2^{ème} case, on a 2 choix car la couleur utilisée dans la 1^{ère} case ne sera pas utilisée. Pour la 3^{ème} case, on a 2 choix car la couleur utilisée pour la 2^{ème} case ne sera pas utilisée mais la couleur utilisée pour la 1^{ère} case peut être utilisée ; ainsi de suite.

D'où $N_1 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$

b) Soit N_2 le nombre de coloriages utilisant la couleur rouge et la couleur verte

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}	$N_2 = 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$
Nombres de choix	2	1	1	1	1	1	

c) Soit N_3 le nombre de coloriages qui utilisent deux des trois couleurs

En s'inspirant de b) avec les couleurs rouge et verte, on a 2 choix. Avec les couleurs rouge et jaune, on a aussi 2 choix. Il en a de même pour les couleurs verte et jaune. D'où $N_3 = 2 + 2 + 2 = 6$

d) Soit N_4 le nombre de coloriages où la couleur jaune est utilisée une seule fois

• Si la 1^{ère} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}	On a : 2 coloriages
Nombres de choix	1	2	1	1	1	1	

• Si la 2^{ème} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}	On a : 4 coloriages possibles
Nombres de choix	2	1	2	1	1	1	

- Si la 3^{ème} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}
Nombres de choix	2	1	1	2	1	1

On a : 4 coloriages possibles

- Si la 4^{ème} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}
Nombres de choix	2	1	1	1	2	1

On a : 4 coloriages

- Si la 5^{ème} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}
Nombres de choix	2	1	1	1	1	2

On a : 4 coloriages possibles

- Si la 6^{ème} case est coloriée en jaune

	1 ^{ère}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}
Nombres de choix	2	1	1	1	1	1

On a : 2 coloriages possibles

D'où $N_4 = 2+4+4+4+4+2 = 20$

Exercice 14

Une caisse contient 9 pièces indiscernables au toucher numérotées de 1 à 9.

Dans la caisse il y a 5 pièces impaires et 4 pièces paires.

1- On tire simultanément 3 pièces de la caisse

a) Le nombre de tirages possibles est : $C_9^3 = 84$.

b) Le nombre de tirages comportant au moins une pièce paire est : $C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3 = 74$.

2- On tire maintenant successivement 3 pièces avec remise

a) Le nombre de tirages possibles est : $9^3 = 729$.

b) Le nombre de tirages où la 1^{ère} boule est paire est : $4 \times 9 \times 9 = 324$.

c) Le nombre de tirages comportant des pièces impaires seulement est : $5^3 = 125$.

d) Le nombre de tirages comportant une seule pièce paire est : $(4 \times 5 \times 5) \times 3 = 300$.

Exercice 15

Dans une course de chevaux, il y a 15 partants dont 9 mâles et 6 femelles. Dans une arrivée, il n'y a pas d'ex aequo.

a) Le nombre de quartés (4 chevaux) dans l'ordre est : $A_{15}^4 = 15 \times 14 \times 13 \times 12$.

b) Le nombre de tiercés (3 chevaux) dans l'ordre est : $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13$.

c) Le nombre de tiercés dans l'ordre composés uniquement de femelles est : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

d) Le nombre de tiercés dans l'ordre où l'on a un seul mâle est : $(9 \times 6 \times 5) \times 3 = 810$.

e) Le nombre de tiercés dans l'ordre où le 1^{er} cheval est mâle et 2^{ème} femelle est : $(9 \times 6 \times 13) = 702$.

Chapitre 6 : Les Applications

Exercice 1

Soit h l'application définie par :

$$h : Z \rightarrow IN$$

$$k \mapsto k^2$$

a) Soient $k_1 \in Z$ et $k_2 \in Z$ tels que $h(k_1) = h(k_2)$

$h(k_1) = h(k_2) \Leftrightarrow k_1^2 = k_2^2 \Rightarrow k_1 = k_2$ ou $k_1 = -k_2$ donc h n'est pas injective.

(On peut aussi remarquer par exemple que $-3 \neq 3$ or $h(-3) = 9$ et $h(3) = 9$ donc h n'est pas injective.)

b) h est surjective si chaque élément de IN a au moins un antécédent par h .

On a $2 \in IN$ qui n'a pas d'antécédent par h car c'est $(\sqrt{2})^2 = 2$ or $\sqrt{2} \notin Z$ donc h n'est pas surjective.

Exercice 2

Etudions l'injectivité et la surjectivité de chacune des applications ci-dessous

a) $f : IN \rightarrow Z$
 $n \mapsto 2n - 3$

➤ injectivité

soit $n_1 \in IN$ et $n_2 \in IN$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.

$f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 2n_1 - 3 = 2n_2 - 3 \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective.

➤ Surjectivité

f est surjective si l'équation $f(n) = m$ avec $m \in Z$ admet au moins une solution dans IN .

$f(n) = m \Leftrightarrow 2n - 3 = m \Rightarrow n = \frac{3+m}{2}$. Pour m pair, $\frac{3+m}{2} \notin IN$ (par exemple pour $m = 2$, on a :

$n = \frac{5}{2}$) donc f n'est pas surjective.

b) $g : IR \rightarrow IR^+$
 $x \mapsto x^2$

➤ surjectivité

g est surjective si l'équation $g(x) = y$ pour $y \in IR^+$ admet au moins une solution dans IR .

Soit $y \in IR^+$. $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$ ainsi $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

$\sqrt{y} \in IR$ ou $x = -\sqrt{y} \in IR$ donc g est surjective.

➤ Injectivité

Si $a \in IR$, on a : $-a \in IR$.

$g(a) = a^2$ et $g(-a) = a^2$ d'où $g(a) = g(-a)$ donc g n'est pas injective.

c) .

$$h: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2$$

soit $y \in \mathbb{R}^+$. Résolvons dans \mathbb{R}^- l'équation $h(x) = y$.

$$h(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = y \text{ d'où } x = \sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{y}.$$

$\sqrt{y} \notin \mathbb{R}^-$ et $-\sqrt{y} \in \mathbb{R}^-$ donc l'équation $h(x) = y$ admet une seule solution dans \mathbb{R}^- ainsi h est bijective donc h est injective et surjective.

$$d) \quad j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto E(x) \quad \text{où } E(x) \text{ est la partie entière de } x.$$

➤ Injectivité

On a : $E(4,5) = E(4,8) = 4$ mais $4,5 \neq 4,8$ donc j n'est pas injective.

➤ Surjectivité

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Résolvons $E(x) = n$.

$E(x) = n \Rightarrow x \in [n; n+1[\subset \mathbb{R}$ donc j est surjective.

Exercice 3

Soit l'application $g: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto g(x) = |x|$$

a) Montrons que g est surjective.

Soit $y \in [0; +\infty[$; résolvons $g(x) = y$.

$g(x) = y \Leftrightarrow |x| = y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$ or $y \in \mathbb{R}$ et $-y \in \mathbb{R}$ donc g est surjective

b) Montrons que g n'est pas injective.

$1 \in \mathbb{R}$ et $-1 \in \mathbb{R}$ ($-1 \neq 1$); on a $g(-1) = g(1) = 1$ donc g n'est pas injective.

c) Trouvons un autre ensemble de départ pour que g soit bijective.

On peut considérer $[0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0]$ comme ensemble de départ pour que g soit bijective.

Exercice 4

Montrons que chacune des applications est bijective et déterminons sa bijection réciproque.

$$a) \quad f:]-\infty; -3] \rightarrow [1; +\infty[\\ x \mapsto f(x) = x^2 + 6x + 10$$

- Montrons que f est bijective.

f est bijective si l'équation $f(x) = y$ avec $y \in [1; +\infty[$ a une seule solution dans $]-\infty; -3]$.

$$f(x) = y \iff x^2 + 6x + 10 = y \iff (x+3)^2 - 9 + 10 = y \iff (x+3)^2 + 1 = y$$

$$(x+3)^2 = y - 1 \text{ comme } y \in [1; +\infty[\text{ alors } (y-1) \in [0; +\infty[\iff (y-1) \geq 0$$

Ainsi

$$(x+3)^2 = y - 1 \iff x+3 = \sqrt{y-1} \text{ ou } x+3 = -\sqrt{y-1} \iff x = -3 - \sqrt{y-1} \text{ ou } x = -3 + \sqrt{y-1}.$$

On a :

$$(y-1) \geq 0 \iff \sqrt{y-1} \geq 0 \iff -3 + \sqrt{y-1} \geq -3 \iff (-3 + \sqrt{y-1}) \in [-3; +\infty[$$

$$\text{On a : } (y-1) \geq 0 \iff \sqrt{y-1} \geq 0 \iff -\sqrt{y-1} \leq 0 \iff -3 - \sqrt{y-1} \leq -3 \iff (-3 - \sqrt{y-1}) \in]-\infty; -3]$$

d'où l'équation $f(x) = y$ a une solution dans $]-\infty; -3]$ qui est $x = -3 - \sqrt{y-1}$ donc f est bijective.

- Déterminons la bijection réciproque de f .

Comme $f:]-\infty; -3] \rightarrow [1; +\infty[$ est bijective alors f admet une bijection réciproque $f^{-1}: [1; +\infty[\rightarrow]-\infty; -3]$.

posons : $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ or on vient de montrer que $x = -3 - \sqrt{y-1} \iff f^{-1}(y) = -3 - \sqrt{y-1}$ donc $f^{-1}: [1; +\infty[\rightarrow]-\infty; -3]$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x-1}$$

$$\text{b) } g:]-\infty; 0[\rightarrow]-2; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{-x}$$

- Montrons que g est bijective

g est bijective si l'équation $g(x) = y$ avec $y \in]-2; +\infty[$ a une seule solution dans $]-\infty; 0[$.

$$g(x) = y \iff \frac{2x+1}{-x} = y \iff -2 - \frac{1}{x} = y \iff \frac{1}{x} = -2 - y \text{ comme } y \in]-2; +\infty[\iff -y \in]-\infty; 2[$$

$$\forall (-2-y) \in]-\infty; 0[\mid \mid (-2-y) < 0 \mid \mid (-2-y) \neq 0.$$

$$\frac{1}{x} = -2-y \mid \mid x = \frac{1}{-y-2}. \text{ On a : } (-2-y) < 0 \mid \mid \frac{1}{-y-2} < 0 \mid \mid x < 0 \mid \mid x \in]-\infty; 0[\text{ d'où}$$

l'équation $g(x) = y$ a une seule solution dans $]-\infty; 0[$ qui est $x = \frac{1}{-y-2}$ donc g est bijective.

- Déterminons la bijection réciproque de g .

Comme $g:]-\infty; 0[\rightarrow]-2; +\infty[$ est bijective alors g admet une bijection réciproque

$$g^{-1}:]-2; +\infty[\rightarrow]-\infty; 0[$$

Posons : $y = g(x) \mid \mid x = g^{-1}(y)$. On vient de montrer que $x = \frac{1}{-y-2} \mid \mid g^{-1}(y) = \frac{1}{-y-2}$ donc

$$x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{1}{-x-2} = -\frac{1}{x+2}$$

Exercice 5

1) soit k l'application définie par $k(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Trouvons $f(x); g(x)$ expressions de deux(2)

applications pour que $k(x) = (f \circ g)(x)$.

$$\text{On a par exemple : } f(x) = \frac{1-x}{2+x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

2) Soit j l'application définie par $j(x) = \sqrt{3 + \cos^2 x}$. Trouvons $f(x); g(x)$ et $h(x)$

expressions de trois(3) applications pour que $j(x) = (f \circ g \circ h)(x)$.

$$\text{On a par exemple : } f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = 3 + x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \cos x$$

Chapitre 7 : Limites

Exercice 1

1- Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$

$$\text{a) } f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{b) } f(x) = x - \sqrt{x}. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{c) } f(x) = -3\sqrt{2}. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{1+x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

2- Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$a) f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$b) f(x) = 5x^3 + x^2 - 40x + 123874 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 + x^2 - 40x + 123874 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 + x^2 - 40x + 123874 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty$$

$$c) f(x) = -x\sqrt{2} + 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x\sqrt{2} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x\sqrt{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{2} + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x\sqrt{2} = +\infty$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$e) f(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{2}-2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x\sqrt{2}-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x\sqrt{2}-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f) f(x) = \frac{x+6}{4-x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+6}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+6}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$g) f(x) = \frac{4-5x}{2x+3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-5x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x}{2x} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-5x}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{2x} = -\frac{5}{2}$$

$$h) f(x) = \frac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-2)^2+1}{3-5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-8x+9}{3-5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-5x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-2)^2 + 1}{3 - 5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 8x + 9}{3 - 5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-5x} = 0$$

$$i) f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 2x - 11}{x^2 - 14x + 3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 2x - 11}{x^2 - 14x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 2x - 11}{x^2 - 14x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Exercice 2

Etudions la limite de f en a (on calculera éventuellement les limites à gauche et à droite de a)

$$a) f(x) = \frac{x+2}{x-1}; a=1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} x+2 = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} x+2 = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0^-$$

$$b) f(x) = \frac{1-2x}{x+2}; a=-2 \cdot \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1-2x}{x+2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (1-2x) = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} x - (-2) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1-2x}{x+2} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (1-2x) = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x - (-2) = 0^-$$

$$c) f(x) = \frac{-2}{(3-x)^2}; a=3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2}{(3-x)^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x)^2 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{(3-x)^2} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)^2 = 0^+$$

$$d) f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}; a=2 \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{(x+3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+3}{x+2} \times \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}; \lim_{x \rightarrow 2^+} x-2 = 0^+; \lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = 0^- \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$e) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}; a=2 \cdot f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \text{ pour } x \neq 2; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$f) f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}; a=4$$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x})^3 - 2^3}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} = x+2\sqrt{x}+4$$

$$\text{pour } x \neq 4 \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x+2\sqrt{x}+4 = 12$$

$$g) f(x) = \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}; a=3 \quad f(x) = \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} = \frac{(x-3)(2x-1)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$\text{pour } x \neq 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x+2} = 1$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}; a=1 \quad f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$$

$$\text{pour } x \neq 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{i) } f(x) = \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}; a=2 \quad f(x) = \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} - \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{2-x}{x^2-4} = -\frac{1}{x+2}$$

$$\text{pour } x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{j) } f(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}; a=0 \quad f(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$\text{pour } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\text{k) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}; a=1 \quad \text{Pour } x > 0 \text{ et } x \neq 1; \text{ on a } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \sqrt{x}+1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$$\text{l) } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}; a=3 \quad \text{pour } x \neq 3 \text{ et } x > -1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{m) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}; a=0.$$

$$\text{pour } x \neq 0; f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} = (\sqrt{1+x^2}+1) \times \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2}+1 = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Exercice 3

Calculons les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{2x^2-x+1} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2-x+1} = +\infty \quad (\text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2-x+1 = +\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} + x = |x| \sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x ; \text{ pour } x < 0, \text{ on a :}$$

$$f(x) = -x \sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x = -x \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - x + 1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty$$

$$\text{Pour } x > 0 ; f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} = \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x \left[\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right]} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$$

$$f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1} = \frac{(x + 2)^2 - (x^2 - 3x + 1)}{(x + 2) - \sqrt{x^2 - 3x + 1}} = \frac{7x + 3}{x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 1}} ;$$

$$\text{Pour } x < 0, \text{ on a : } f(x) = \frac{x \left[7 + \frac{3}{x} \right]}{x \left[1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right]} = \frac{7 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 + \frac{3}{x} = 7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{7}{2}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{|x| \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]} \text{ avec } x \neq 0$$

$$\text{Pour } x > 0 ; f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Pour $x < 0$; $f(x) = -\frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$ donc: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1} = \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}$ avec $x \neq 0$

Pour $x > 0$; $f(x) = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{(3-\frac{1}{x})}$ donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Pour $x < 0$; $f(x) = -\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{(3-\frac{1}{x})}$ donc: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2+3}}$; $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2+3}} = \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{4x^2+3}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-3}{4x^2+3} = \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-3}{4x^2+3}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

g) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$

Pour $x > 0$; $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{x(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}})}{x(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}})} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$

donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1-1}{2} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Pour $x < 0$;

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{[x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}][2x - \sqrt{4x^2 + x}]}{-x} = -\left[1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}\right][2x - \sqrt{4x^2 + x}]$$

donc: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 4

Calculer les limites de fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x) = x - \sin x$; pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq x - \sin x \leq x+1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x-1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

c) $f(x) = x\sqrt{1+\sin^2 x}$

Pour $x > 0$; $x\sqrt{1+\sin^2 x} \geq x$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Pour $x < 0$; $x\sqrt{1+\sin^2 x} \leq x$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2 x}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \cos^2 x} \leq \sqrt{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \frac{x-1}{\sin^2 x + 2}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq \frac{x-1}{3}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) \leq \frac{x-1}{2}$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

f) $f(x) = \frac{x}{2 - \sin(\frac{1}{x})}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \sin(\frac{1}{x})} = +\infty \text{ de m\^eme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2 - \sin(\frac{1}{x})} = -\infty$$

g) $f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$; $f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$ pour $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Exercices 5

Calculons la limite de f en 0.

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sin 2x}{3x} ; f(x) = \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} ; \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sin 4x}{5x} ; \text{ de même qu'au a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{4x^2} ; \text{ Posons } X = 4x \Rightarrow x = \frac{X}{4} \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ alors } X \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{4x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{4\left(\frac{X}{4}\right)^2} = \lim_{X \rightarrow 0} 4 \frac{1 - \cos X}{X^2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x}{\sin x} ; f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sin 2x}{x} + \cos 2x ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \cos 2x = 3$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{\tan x}{x} ; f(x) = \frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan 5x} ; f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\tan 5x}{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \times \frac{1}{\cos 3x} = 3 \text{ et :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \times \frac{1}{\cos 5x} = 5 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}$$

$$\text{i) } f(x) = \frac{\sin 2x}{x \cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x \cos x} = \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{1}{\cos x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

2) Calculons :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x \sin x}{x^2}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right) = 2 \text{ . car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} .$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\left[2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{4 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2} \right] .$$

Procédons par un changement de variable en posant : $X = \frac{\pi}{2} - x$.

Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$; $X \rightarrow 0$. On a : $X = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - X$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 - \sin x}{4 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2} \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - X \right)}{4(X)^2} \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos X}{X^2} \right] = \frac{1}{8} \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos X}{X^2} \right) = \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2} \right) = \frac{1}{8} .$$

Exercice 6

1- Soit h la fonction définie par $h(x) = -3x^3 + 5x - 4$

a) Déterminons le domaine de définition Dh de h $Dh = \mathbb{R}$ car $h(x)$ est un polynôme $Dh =]-\infty; +\infty[$

b) Calculons les limites de h aux bornes de Dh $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$$

2- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

a) Déterminons le domaine de définition Df de f .
 f existe si $x-1 \neq 0$; $x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; $Df = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

b) Calculons les limites de f aux bornes de Df

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} x-2 = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} x-1 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-2 = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$$

3- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{4-x^2}$

a) Déterminons le domaine de définition Dg de g . g existe si $4-x^2 \neq 0$
 $4-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$ d'où $Df = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

b) Calculons les limites de g aux bornes de Dg

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

$$g(x) = \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{x+3}{2-x} \times \frac{1}{2+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{2-x} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^-} 2+x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{2-x} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} 2+x = 0^+$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x+2} \times \frac{1}{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0^-$$

Chapitre 8 : Dérivation

Exercice 1

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

$$1) f(x) = x + 125 \rightarrow f'(x) = x' + 125' = 1 \quad ; \quad 2) f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 11x - 1 \rightarrow f'(x) = (4x^3)' - (2x^2)' + (11x)' - (1)' = 12x^2 - 4x + 11$$

$$4) f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x - 3 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}(x^4)' + \frac{2}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x)' - 3' = 3x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}$$

$$5) f(x) = \frac{2x+3}{x+3} \rightarrow f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x+3}\right)' = \frac{(2x+3)'(x+3) - (2x+3)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3) - (2x+3)}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$$6) f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2} \\ f'(x) = \left(\frac{2x+2}{x^2+2}\right)' = \frac{(2x+2)'(x^2+2) - (x^2+2)'(2x+2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2(x^2+2) - 2x(2x+2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2+2)^2}$$

Exercice 2

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

$$1) f(x) = 2x\sqrt{x^2+1} \rightarrow f'(x) = (2x\sqrt{x^2+1})' = (2x)'\sqrt{x^2+1} + (\sqrt{x^2+1})'(2x) = 2\sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(x^2+1) + 2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$2) f(x) = (2x - \sqrt{x})^4 \rightarrow f'(x) = [(2x - \sqrt{x})^4]' = 4(2x - \sqrt{x})'(2x - \sqrt{x})^3 = 4\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2x - \sqrt{x})^3$$

$$f'(x) = \frac{2(4\sqrt{x} - 1)(2x - \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$$

$$3) f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-2}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x\sqrt{x+1}}{x-2}\right]' = \frac{[x\sqrt{x+1}]'(x-2) - (x-2)'(x\sqrt{x+1})}{(x-2)^2} = \frac{[\sqrt{x+1} + x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}](x-2) - x\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x+2)(x-2) - 2x(x+1)}{2(x-2)^2\sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - 6x - 4}{2(x-2)^2\sqrt{x+1}}$$

$$4) f(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = [x^2 + 1 + \sqrt{x}]' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$5) f(x) = (2x^2 - 1)^2(3x + 1)^4$$

$$f'(x) = [(2x^2 - 1)^2(3x + 1)^4]' = [(2x^2 - 1)^2]'[(3x + 1)^4] + (2x^2 - 1)^2[(3x + 1)^4]'$$

$$f'(x) = 8x(2x^2 - 1)(3x + 1)^4 + 12(3x + 1)^3(2x^2 - 1)^2 = (3x + 1)^3(2x^2 - 1)[8x(3x + 1) + 12(2x^2 - 1)]$$

$$f'(x) = 4(3x + 1)^3(2x^2 - 1)(12x^2 + 2x - 3)$$

Exercice 3

Donnons l'expression de la dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

$$1) f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$2) f(x) = \cos x \sin^2 x$$

$$f'(x) = [\cos x \sin^2 x]' = (\cos x)' \sin^2 x + \cos x [\sin^2 x]' = -\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x$$

$$3) f(x) = (\sin^4 x) \tan x$$

$$f'(x) = [(\sin^4 x) \tan x]' = [\sin^4 x]' \tan x + (\tan x)' \sin^4 x = 4 \cos x \sin^3 x \tan x + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = 4 \cos x \sin^4 x \times \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{4 \cos^2 x \sin^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x (4 \cos^2 x + 1)}{\cos^2 x}$$

$$4) f(x) = \frac{1 - 3 \cos 3x}{2 - \cos 3x}$$

$$f'(x) = \left[\frac{1 - 3 \cos 3x}{2 - \cos 3x} \right]' = \frac{(1 - 3 \cos 3x)'(2 - \cos 3x) - (2 - \cos 3x)'(1 - 3 \cos 3x)}{(2 - \cos 3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9 \sin 3x(2 - \cos 3x) - 3 \sin 3x(1 - 3 \cos 3x)}{(2 - \cos 3x)^2} = \frac{15 \sin 3x}{(2 - \cos 3x)^2}$$

$$5) f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow f'(x) = \left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right]' = -\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$6) f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \rightarrow f'(x) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right]' = \left[\frac{\pi}{4} - 3x\right]' \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

$$7) f(x) = \sin^2 x + 3 \cos x \rightarrow f'(x) = [\sin^2 x + 3 \cos x]' = 2 \sin x \cos x - 3 \sin x = 2 \sin x \left(\cos x - \frac{3}{2}\right)$$

$$8) f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$f'(x) = [\tan^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)]' = 2[\tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)]' \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)' [1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)] \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$f'(x) = -4[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)] \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1- Déterminons le domaine de définition de f et calculons les limites aux bornes du domaine de définition. f existe si $x - 2 \neq 0$. $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$. $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ les limites de f aux bornes de D_f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 3 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$$

2- Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 2)^2}$$

déterminons son signe. Le signe de $f'(x)$ dépend de $(x - 1)(x - 3)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$(x-1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3- Etudions les variations de f

- pour $x \in]-\infty; 1[; f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante
- pour $x \in]1; 2[; f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]2; 3[; f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]3; +\infty[; f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante

dressons son tableau de variation :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$	6	$+\infty$

Exercice 5

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$

1- Calculons les réels a et b sachant que $f(2) = 2$ et $f'(2) = 0$ $f(2) = 2a + b + 1 = 2$

$$f'(x) = a + \frac{1}{(3-x)^2}; f'(2) = a + 1 = 0 \quad \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = 3$$

2- Déterminons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.

$$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2) = f(2) \text{ puisque } f'(2) = 0$$

$$(T) : y = 2 \text{ ((T) est une tangente horizontale)}$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans un

repère orthogonal. On a $f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$

$$\text{pour a) ; on a } f(0) = 5 \Rightarrow \frac{c}{-2} = 5 \Rightarrow c = -10$$

$$\text{pour b) ; on a : } f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-2b - c}{4} = 0 \Rightarrow b = 5$$

$$\text{pour c) ; on a : } f'(1) = -3 \Rightarrow a - 4a - 2b - c = -3 \Rightarrow -3a - 2b - c = -3 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{on a : } f(x) = \frac{x^2 + 5x - 10}{x-2}$$

2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 5x - 10 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 5x - 10 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$$

3- Calculons $f'(x)$ et étudions les variations de f .

$$f'(x) = \left[\frac{x^2 + 5x - 10}{x - 2} \right]' = \frac{(x^2 + 5x - 10)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 + 5x - 10)}{(x - 2)^2} = \frac{(2x + 5)(x - 2) - (x^2 + 5x - 10)}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $x(x-4)$. Dressons le tableau de signe.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- pour $x \in]-\infty; 0[$; $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante
- pour $x \in]0; 2[$; $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]2; 4[$; $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- pour $x \in]4; +\infty[$; $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante

4- Dressons le tableau de variation de f .

f	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	5	$+\infty$	13	$+\infty$

Exercice 7 :

Soit a, b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

a) Calculons $f'(x)$ $Df = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left[\frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \right]' = \frac{(3x^2 + ax + b)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-ax^2 + x(6 - 2b) + a}{(x^2 + 1)^2}$$

b) Déterminons a, b pour que la représentation graphique de f : passe par $A(0, 3)$ et admet en ce point A une tangente d'équation $y = 4x + 3$. On a donc : $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$.

$$f(0) = 3 \Rightarrow b = 3 ; f'(0) = 4 \Rightarrow a = 4 \text{ donc : } f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

c) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \text{ aussi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

le signe de $f'(x)$ dépend de $-4x^2 + 4$

pour $x \in]-\infty; -1[; f'(x) < 0$ donc f est décroissante

pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[; f'(x) > 0$ donc f est croissante

pour $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[; f'(x) < 0$ donc f est décroissante

Dressons le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	3	↓	1	↑	5	↓	3

Exercice 8

On dispose d'une feuille de carton carré de côté 100cm. Aux quatre coins de cette feuille on découpe un carré de côté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte sans couvercle.

1-a) Précisons l'ensemble de valeurs possibles x .

$$\text{On a : } x \in]0; 50[$$

b) Démontrer que $v(x) = x(100 - 2x)^2$

- la base est un carré de côté $(100 - 2x)$ donc la surface de base est $(100 - 2x)^2$.

- la hauteur est x .

- le volume de la boîte est donc $x(100 - 2x)^2$.

2-On désigne par $v(x)$ le volume de cette boîte, exprimé en cm^3 .

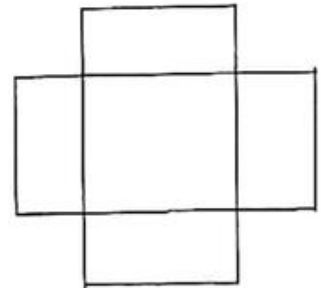
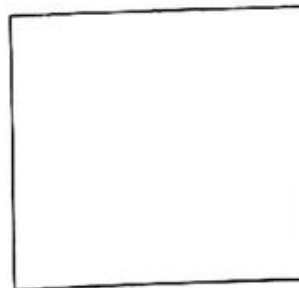
a) Etudions le sens de variation de la fonction V ainsi obtenue

$$v(x) = x(100 - 2x)^2 \Rightarrow v'(x) = x'(100 - 2x)^2 + x[(100 - 2x)^2]' = (100 - 2x)(100 - 6x)$$

$$v(x) = 50 \Rightarrow x = 50 \text{ ou } x = \frac{50}{3}$$

pour $x \in]0; \frac{50}{3}[; v'(x) > 0$ donc v est croissante

pour $x \in]\frac{50}{3}; 50[; v'(x) < 0$ donc v est décroissante.



Dressons son tableau de variation.

x	0	$\frac{50}{3}$	50
$v'(x)$		+	0
$v(x)$	0	$\frac{2 \times 10^6}{27}$	0

3- Calculer le volume maximum.

Le volume est maximum pour $x = \frac{50}{3}$ cm d'où le volume maximum est $V = \frac{2 \times 10^6}{27} \text{ cm}^3$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

1- Montrons que $f'(x) = 2\sin x(\cos x - \frac{1}{2})$ $f'(x) = (\sin^2 x + \cos x)' = 2\sin x \cos x - \sin x = 2\sin x(\cos x - \frac{1}{2})$

2- Etudions les variations de f sur $[0; \pi]$

Pour $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$; $\sin x \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de $(\cos x - \frac{1}{2})$

pour $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$; $\cos x \geq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

pour $x \in [\frac{\pi}{3}; \pi]$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante

3- Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	1	$\frac{5}{4}$	-1

Chapitre 8 : Etude de fonctions

Problème 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

1- Déterminons le domaine de définition D de f . $D = \mathbb{R}$ car $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel.

2- Calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \text{ de même :}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation (D) : $y = 3$ à C.

3- Calculer $f'(x)$. $f'(x) = \left(\frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$

4- Etudier les variations de f . Le signe de $f'(x)$ dépend de $-4x^2 + 4$

pour $x \in]-\infty; -1[$; $f'(x) < 0$ donc f est décroissante

pour $x \in]-1; 1[$; $f'(x) > 0$ donc f est croissante

pour $x \in]1; +\infty[$; $f'(x) < 0$ donc f est décroissante

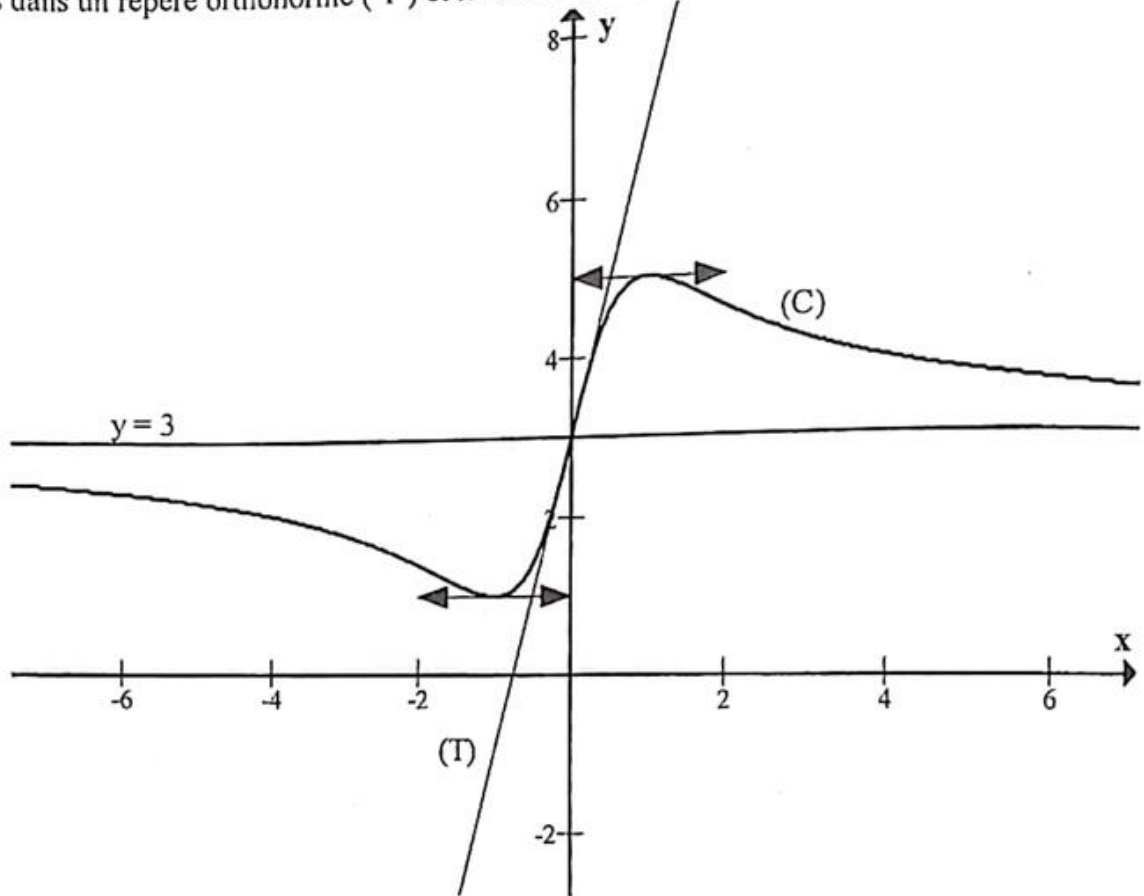
6- Déterminons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. (T) :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0), (T) : y = 4x + 3$$

5- Dressons le tableau de variation

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	3	1	5	3	

7- Traçons dans un repère orthonormé (T) et la courbe (C) de f.



Problème 2

1- La tangente au point d'abscisse (-2) passe par les points (-2 ; 0) et (0 ; - 6) d'où : (T) : $y = -3x - 6$

2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3-

- on a une asymptote oblique d'équation $x = -3$.

- On a aussi une asymptote oblique qui passe par les points(2 ; 0) et (0 ; -2) , son équation est donc $y = x-2$.

4-Pour $x \in]-3; +\infty[$, C est au dessus de l'asymptote oblique.

5-

x	-3	-1	$+\infty$
f'(x)		0	+
f(x)	$+\infty$	-1	$+\infty$

6- $S =]-3;-2] \cup]1; +\infty[$

Problème 3

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$ et C sa courbe représentative.

1.

Déterminons le domaine de définition D_f de f

f existe si $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -3^-} x^2 + x - 2 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^-} x - (-3) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2 + x - 2 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} x - (-3) = 0^+$$

déduire l'existence d'une asymptote (Δ).

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$ donc (Δ) : $x = -3$ est une asymptote verticale à C

2. Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)^2} = \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x + 3)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \right)' = \frac{(2x + 1)(x + 3) - (x^2 + x - 2)}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)^2} = \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x + 3)^2}$$

Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-9	\searrow	$+\infty$	\searrow	-1	\nearrow	$+\infty$

3.

Démontrons que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe C

$$\text{Calculons } f(x) - (x - 2); \quad f(x) - (x - 2) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} - (x - 2) = \frac{x^2 + x - 2 - (x - 2)(x + 3)}{x + 3} = \frac{4}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 3} = 0 \text{ donc}$$

(D) : $y = x - 2$ est asymptote à C .

Étudions les positions relatives de C par rapport à D . $f(x) - (x - 2) = \frac{4}{x + 3}$

pour $x \in]-\infty; -3[$; $f(x) - (x - 2) < 0$ donc D est au dessus de C

pour $x \in]-3; +\infty[$; $f(x) - (x-2) > 0$ donc C est au dessus de D

4. Déterminer les points d'intersection de C avec les axes des coordonnées.

- axe des ordonnées (Oy) $f(0) = -\frac{2}{3} \Rightarrow C \cap (Oy) = \left\{ A(0; -\frac{2}{3}) \right\}$

- axe des abscisses (Ox)

Les points qui appartiennent à (Ox) ont pour ordonnée $0 = f(x)$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$$

$$C \cap (Ox) = \{ B(1; 0); C(-2; 0) \}$$

5. Déterminons l'équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 2.

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) \text{ donc } : (T): y = \frac{21}{25}x - \frac{22}{25}$$

6. Montrons que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour C

Les asymptotes ont pour équation $x = 3$ et $y = x-2$.

$$\text{En résolvant (S): } \begin{cases} x = -3 \\ y = x - 2 \end{cases} \text{ trouve : } x = -3 \text{ et } y = -5.$$

Le point de concours des asymptotes est $H(-3; -5)$.

Montrons que $H(-3; -5)$ est un centre de symétrie pour C.

- Montrons que $(2(-3)-x) \in Df$

$$x \in]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[\Rightarrow (-6-x) \in]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[\text{ donc } (2(-3)-x) \in Df$$

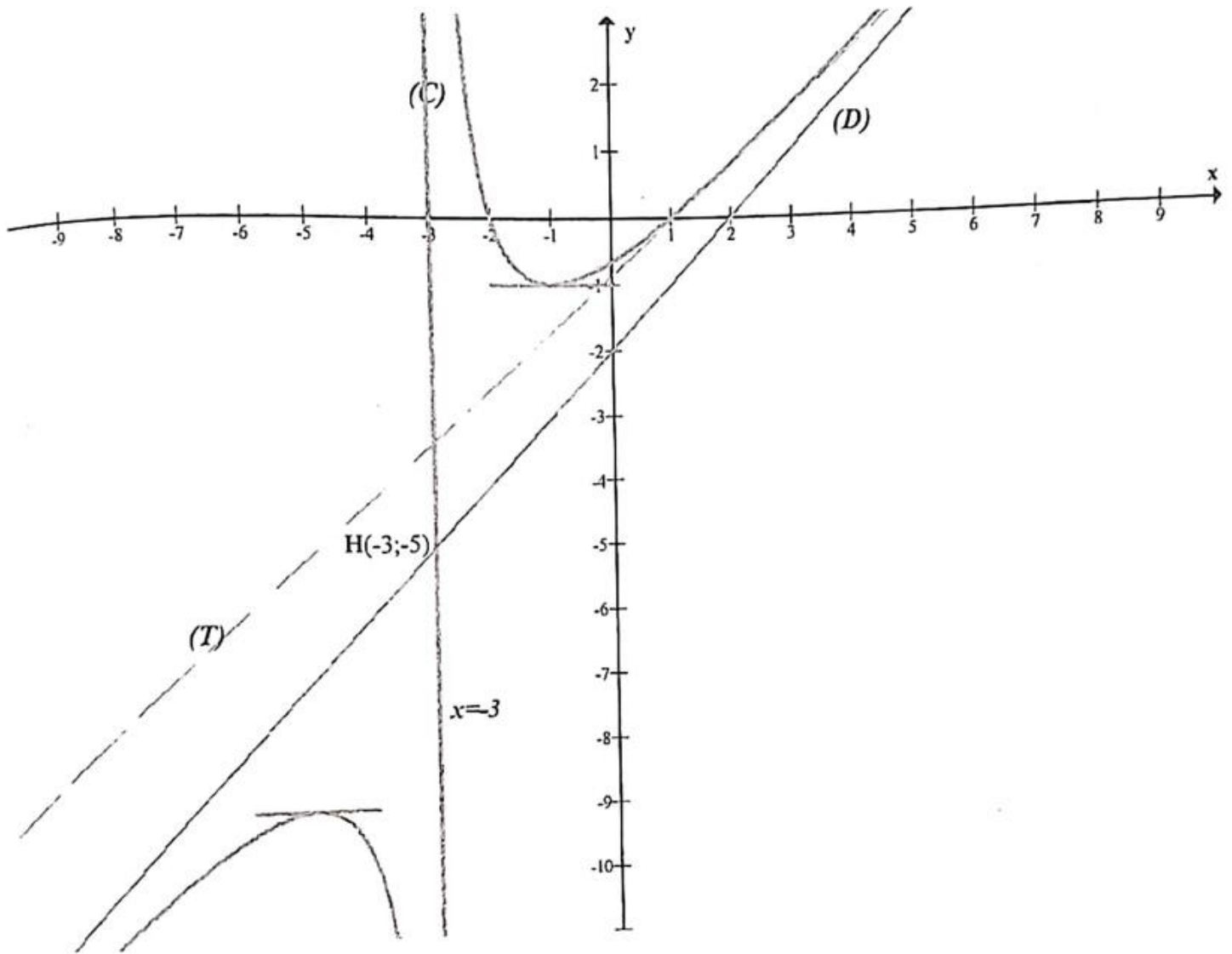
- Montrons que : $f(-6-x) + f(x) = -10$

$$\text{Calculons : } f(-6-x); f(-6-x) = \frac{(-6-x)^2 - 6 - x - 2}{-3-x} = \frac{-x^2 - 11x - 28}{x+3}$$

$$f(-6-x) + f(x) = \frac{-x^2 - 11x - 28}{x+3} + \frac{x^2 + x - 2}{x+3} = \frac{-10x - 30}{x+3} = -10 \text{ donc :}$$

$f(-6-x) + f(x) = 2(-5)$ d'où $H(-3; -5)$ est un centre de symétrie pour C.

7. Traçons D, Δ , T, C dans un repère orthonormé (Unité : 1cm).



Problème 4

A. Répondons aux questions suivantes en utilisant le graphique

1- Déterminons le coefficient directeur de la de la tangente T au point I d'abscisse $x = 2$. T passe par les points I(2 ; 1) et K(1 ; 3). Le coefficient directeur de la de la tangente T est donc :

$$m = \frac{1-3}{2-1} = -2$$

- Déterminons l'équation la tangente T : $T : y = -2x + 5$.

2- limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ que le graphique laisse prévoir.

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 1$$

B. Soit la fonction $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2 - 4x + 5}$ définie sur IR.

1. Etudions les limites de f aux bornes du domaine de définition IR.

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 1$$

La dérivée de f est : $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$

Etudions le signe de f' . Le signe de f' dépend de $(x-1)(x-3)$
 - pour $x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$; $f'(x) > 0$ et pour $x \in]1; 3[$; $f'(x) < 0$.

2. Dressons le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	1	2	0	1

Problème 5

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$ et (C) sa courbe

représentative dans un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé d'unité 1cm.

1- Déterminons le domaine de définition de f et calculons les limites aux bornes.

f existe si $x^2 + 2x - 3 \neq 0$; $x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ et $x \neq -3$

$$Df =]-\infty; -3[\cup]-3; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+3)(x-1)} = \frac{2x+2}{(x-1)} \times \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x+2}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^-} x - (-3) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x+2}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} x - (-3) = 0^+$$

$$f(x) = \frac{2x+2}{(x+3)(x-1)} = \frac{2x+2}{(x+3)} \times \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+2}{x+3} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+2}{x+3} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$$

2- Donnons la nature et l'équation de chacune des asymptotes à (C) .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C .
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à C .
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C .

3) calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{2x+2}{x^2+2x-3} \right)' = \frac{(2x+2)'(x^2+2x-3) - (2x+2)(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{-2(x^2+2x+5)}{(x^2+2x-3)^2}$$

4) a- Déterminons les points d'intersections A et B de (C) avec axes de coordonnées.

- $C \cap (Ox)$: Résolvons $f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$; $C \cap (Ox) = \{A(-1;0)\}$

- $C \cap (Oy)$: Calculons $f(0)$; $f(0) = -\frac{2}{3}$; $C \cap (Oy) = \left\{ B\left(0; -\frac{2}{3}\right) \right\}$

b- Donnons une équation de la tangente (T) au point A

(T) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$; (T) : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

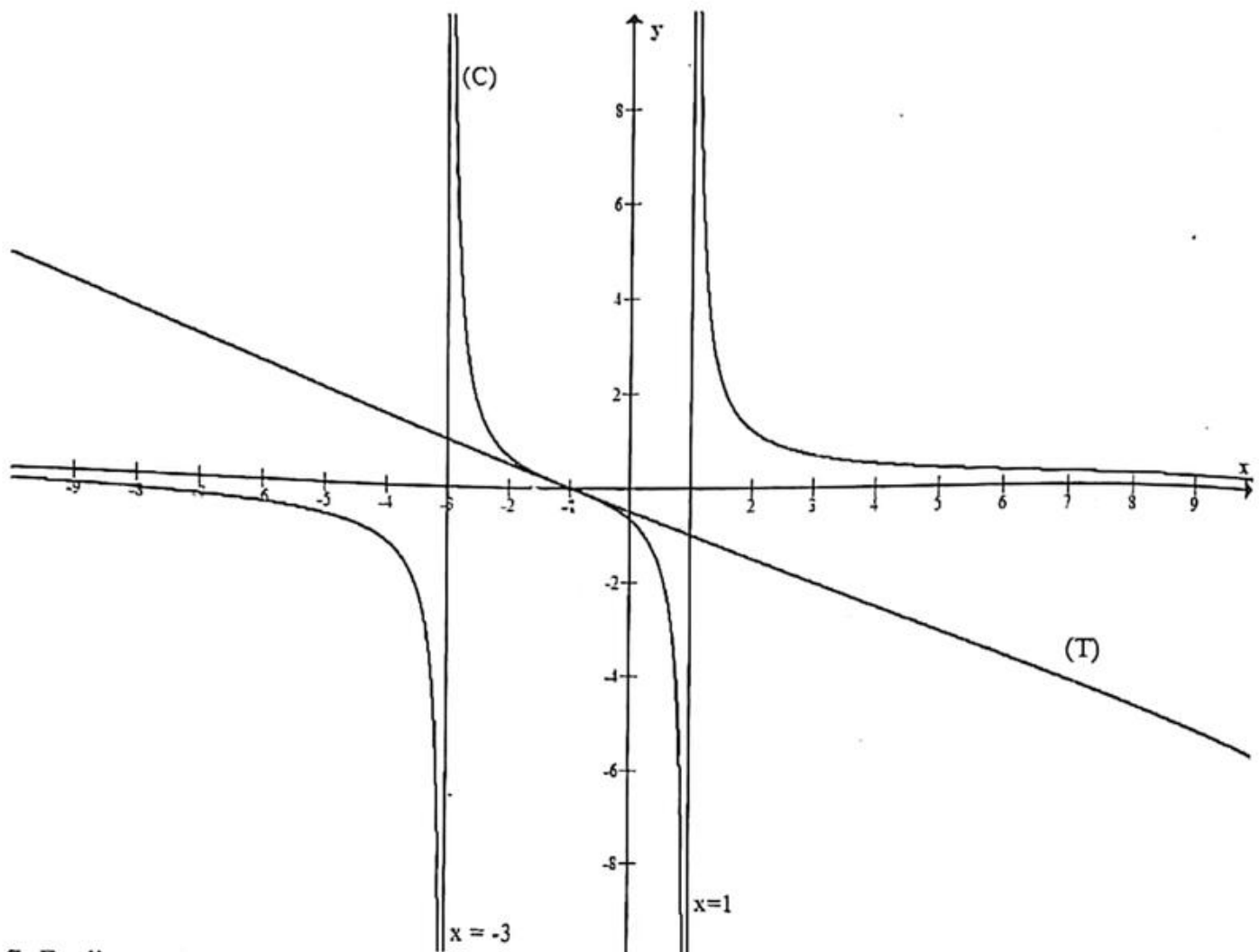
5) Dressons le tableau de variation de f .

Déterminons le signe de f' . Le signe de f' dépend de $-2(x^2 + 2x + 5)$.

Le discriminant de $x^2 + 2x + 5$ est $\Delta = 2^2 - 4(5) = -18$ donc $x^2 + 2x + 5 > 0$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 \rightarrow $-\infty$	$+\infty$ \rightarrow $-\infty$	$+\infty$ \rightarrow 0	0

6) Construire la courbe (C) dans (o, \vec{i}, \vec{j}) .



- 7- Etudions suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de $f(x) = m$.
 pour $m \neq 0$; l'équation $f(x) = m$. a deux solutions
 pour $m = 0$; l'équation $f(x) = m$. a une solution

Problème 6

A.....

1- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- $S = \left] -\frac{7}{2}; 1 \right[\cup] 1; +\infty[$.

B..... La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

1- Calculons et étudions le signe de la fonction dérivée f'

$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

- pour $x \in]-\infty; -2] \cup]1; +\infty[$; $f'(x) \geq 0$

- pour $x \in [-2; 1]$; $f'(x) \leq 0$

2- Dressons le tableau de variation de f . $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	27	0	$+\infty$

3- Démontrons que la droite T d'équation $y = -\frac{27}{2}x + \frac{27}{4}$ est tangente à la courbe C au point I d'abscisse $x = -\frac{1}{2}$.

$$T: y = f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}); \quad f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{2} \text{ et } f(-\frac{1}{2}) = \frac{27}{2} \text{ donc } T: y = -\frac{27}{2}x + \frac{27}{4}$$

Problème 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1- Déterminons l'ensemble de définition D de f . $D = \mathbb{R}$

2- Calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \quad f(x) = x(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

3- Démontrons que la droite (D1) : $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$ et que (D2) : $y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

$$f(x) - x = x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}; \quad f(x) - 3x = -x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$ donc (D1) : $y = x$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x - \sqrt{x^2 + 1} = -\infty$ donc (D2) : $y = 3x$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$

4- Calculons $f'(x)$ $f'(x) = (2x)' + (\sqrt{x^2 + 1})' = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Signe de $f'(x)$. Résolvons $f'(x) < 0$; $f'(x) < 0 \Rightarrow x + 2\sqrt{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} < -\frac{x}{2}$

- Pour $x \geq 0$; $\sqrt{x^2 + 1} < -\frac{x}{2}$ est fautive donc $f'(x) > 0$

-Pour $x < 0$; $\sqrt{x^2+1} < -\frac{x}{2} \Rightarrow x^2+1 < \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2+4 < x^2 \Rightarrow 3x^2+4 < 0$

impossible donc pour $x < 0$; $f'(x) > 0$

En conclusion pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R} .

5- Dresser le tableau de variation de f .

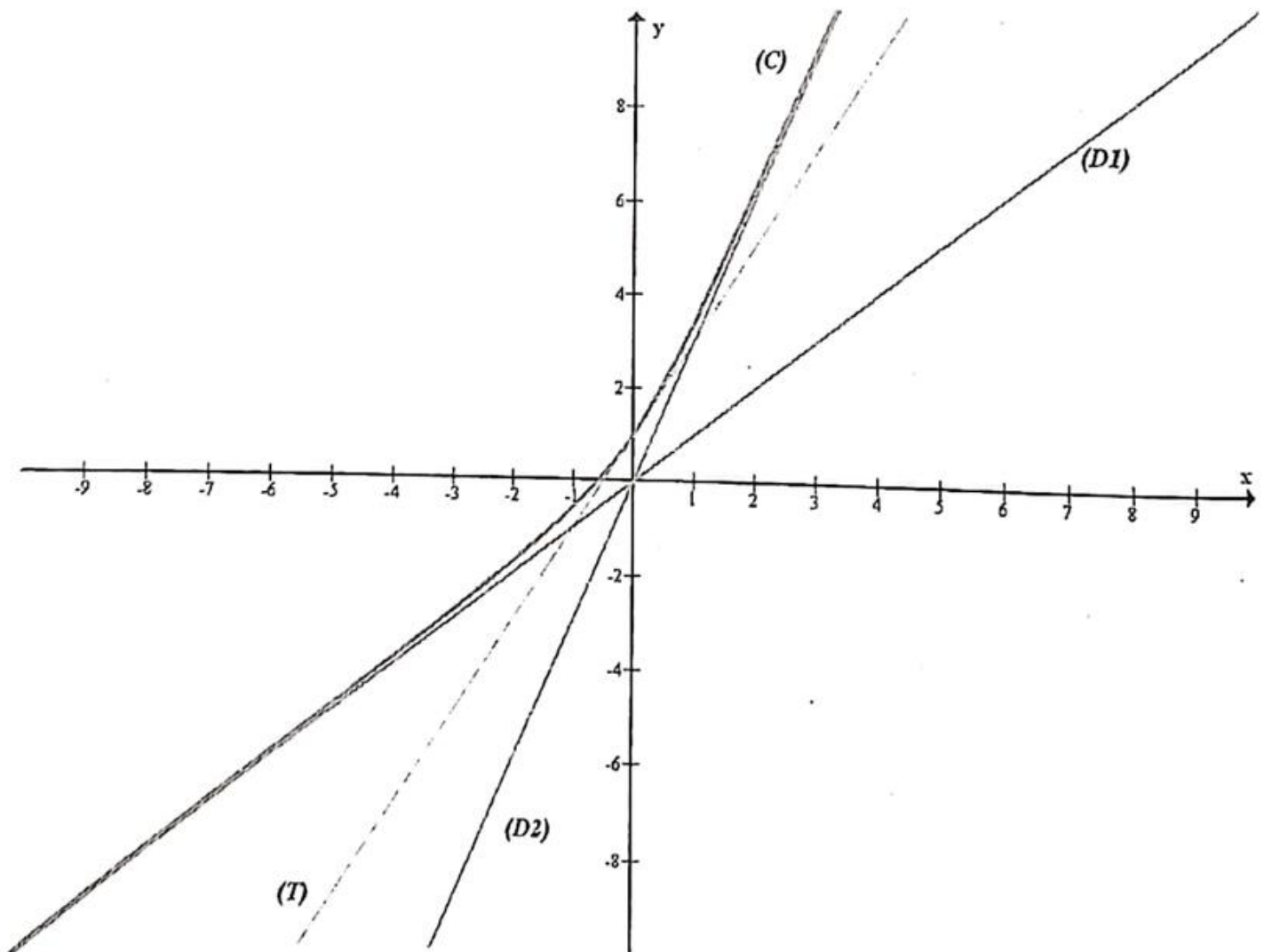
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

6- Déterminons l'équation de tangente (T) à C au point d'abscisse 0.

(T): $y = f'(0)(x-0) + f(0)$; (T):

$y = 2x+1$

7- Tracer dans le même repère (D1), (D2), (T) et C



Problème 8

5- Représenter la courbe C de f dans un repère orthogonal pour $x \in [-\pi; 3\pi]$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

1- Déterminons le domaine de définition D de f . $D = \mathbb{R}$ car $2 + \cos x \neq 0$.

2- Montrons que f est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x}; \text{ on a } f(-x) = -f(x) \text{ donc } f \text{ est impaire.}$$

3- Montrons que f est périodique de période 2π

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}; x + 2\pi \in \mathbb{R}; f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x) \text{ donc } f \text{ est bien}$$

périodique de période 2π .

4- Montrons que $f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$

$$f'(x) = \left[\frac{\sin x}{2 + \cos x} \right]' = \frac{(\sin x)'(2 + \cos x) - (2 + \cos x)'\sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

5- Etudier les variations de f sur $[-\pi; \pi]$ et dresser le tableau de variation de f .

Le signe de $f'(x)$ dépend de $(1 + 2\cos x)$.

$$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}$$

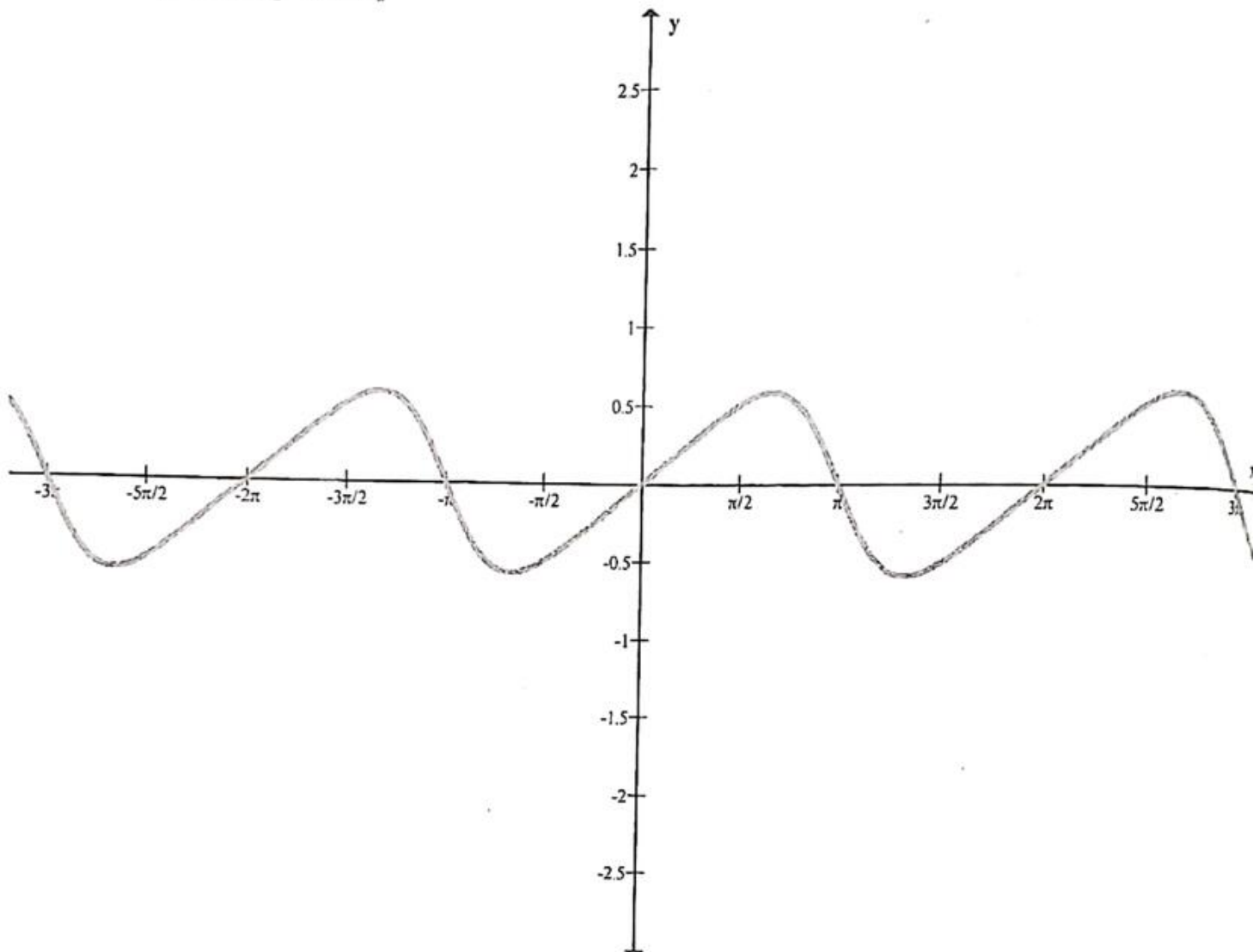
Pour $x \in \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$; $f'(x) \leq 0$; f est décroissante.

Pour $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$; $f'(x) \geq 0$; f est croissante

Pour $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$; $f'(x) \leq 0$; f est décroissante

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6- Traçons C pour $x \in [-3\pi; 3\pi]$



UNE NATION S'INSTRUIT ELLE-MEME

Français CEP	700 F	Eno + Corrigés P. C. 1° :	1000 F
CALCUL CEP	800 F	PC 1° JR (Cours-Enoncés-Corrigés) (Nouveau)	2500 F
Q/R Sc.N-H-G. CEP	700 F	Sc. Naturelles 1° :	700 F
ANNA CEP (1994-2005)	1500 F	Math 1° D	1500 F
Sc. Naturelles 6ème :	800 F	Français BAC (Nouveau) :	1000 F
I PLAY (tous niveaux)	600 F	Allemand BAC A4 :	1500 F
Math 6°	1500 F	BIOLOGIE TD :	1500 F
Mon Compagnon du Collège	1000 F	PC Term + Cor	1500 F
Français 6° 5° (Nouveau)	1000 F	PC Term JR tome I : (Nouveau)	1000 F
		PC Term JR tome II : (Nouveau)	1000 F
		PC Term JR tome III : (en cours)	1000 F
PC 4ème :	1500 F	MATH TC et TD Tome A	1500 F
Math 4ème	1000 F	MATH TC et TD Tome B	1500 F
Français 4° 3° (Nouveau)	1000 F	ANNA MATH BAC (2013-2018)	1500 F
		MATH TA	1000 F
Français BEPC :	700 F	Philo Term :	1500 F
Sc. Nat BEPC :	800 F	Cours Philo 1° et T° :	2000 F
Anatomie Humaine :	800 F	Hist.Géo Term	1500 F
Math. BEPC :	1000 F		
Q/R PC. BEPC :	700 F	COMPTABILITE	1500 F
		Cor-Comptabilité	1500 F
PC Cours 3° JR (Nouveau)	1500 F		
Hist. Géo. BEPC :	800 F	Cours de Sociologie (Nouveau)	1000 F
VOCABULARY (1er cycle) :	800 F		
ANGLAIS 4c / BEPC	800 F	PEDAGOGIE (ENEP)	1500 F
Je prépare mon BEPC (Ang-Fr-Hist géo-SVT)	500 F		
BEPC 2012 à 2017 (Nouveau)			
Eno P.C. 2nde + Cor :	1500 F	Collection Diana : SHEKINA	1500 F
PC 2nde (Cours-Enoncés-Corrigés)	2500 F	Collection Diana : LILU	1500 F
(Nouveau)			
MATH 2nde :	1000 F	Dict. DIOULA / FRANÇAIS	2500 F
ENJOY 2nde, 1° et T°	800 F	BD Kolokolo (et les autres...):	4000 F

Dépôt Légal 1^{er} trimestre 2011

ISBN 2 - 913669 - 47 - 6

Ce livre ne coûte que 1500 CFA
BOUTIQUE FASO LIVRES A OUAGA Square Naaba Koom (gare de train) 25-41-06-60

FASO LIVRES
BP : 658 Tel : 20- 98-28-01
Bobo Dioulasso (Burkina Faso)

