CHAPITRE 1 : PROBLEME ALGEBRIQUE ET NUMERIQUE

I. POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONELLES

EXERCICE N°1

1- Résoudre dans ℝxℝ les systèmes :

(S1) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ S2 $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=2 \end{cases}$

2- Résoudre dans ℝ puis dans ℕ : $\frac{1}{2} \leq \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2} \leq 1$

3- La fonction f : x $\rightarrow \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3 - (1-\sqrt{1+x^2})^3$ est-elle une fonction polynôme ?

EXERCICE N°2

1- Soit le polynôme p (x) = $9x^4-36x^3+29x^2+14x$

a) Démontrer qu'il existe deux nombreux réels à et b tels que pour tout nombre réel x, P(x)= a $(x^2-2x)^2$+ b(x^2-2x).

b) En déduire une factorisation de p(x)

2- Soit la fonction rationnelle r définie par : r(x)= $\dfrac{-x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}}{p(x)}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Dr de r

b) Calculer r $\left(-\frac{1}{3}\right)$

c) Simplifier r (x) sur Dr.

d) Déduisez en la résolution dans Dr puis dans ℤ de l'inéquation : r(x) ≤0

EXERCICE N°3

Parmi les fonctions numériques suivantes, reconnaître celles qui sont des fonctions polynômes et préciser leurs dégrées :

f1 : $x \mapsto \dfrac{x^4-81}{x^2+9}$ f2 : $x \mapsto \sqrt{x^4-5x^2+7}$

f3 : $x \mapsto \dfrac{3x^5-5x^3+7x}{\sqrt{5}}$ f4 : $t \mapsto \sqrt{t^4+2t^2+1}$

EXERCICE N°4

Soit le polynôme p(x)= $6x^3+4x^2+2x-1$ a, b, c sont les racines de P (x). Sans les calculer, déterminer : a + b + c, abc, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $a^2+b^2+c^2$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

EXERCICE N°5

Soit, f la fonction rationnelle f : $x \mapsto \dfrac{x^3-12x+16}{2x^2-7x+6}$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f sous forme de réunion d'intervalles.
2- Simplifier f(x) dans D et résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation f (x) ≤ 0

EXERCICE N°6

Soit f la fonction rationnelle définie par : f (x) = $\dfrac{6x^3-x^2-32x+20}{9x^2-4}$

a) Déterminer D_f.
b) Calculer f(2). En déduire les antécédents de 0 par f.
c) Simplifier f (x) pour tout x ∈ Df.
d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation f (x) $\geq$ -20. On donne : $59^2 = 3481$.

EXERCICE N°7

1.a) Démontrer que pour tout nombre réel x $x^3 = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$

b) Soit f le polynôme défini par $f(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$. Démonter que : f(x+1)- f (x)= x^3

c) Etablir alors que $1^3+2^3+\ldots..n^3+= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

2- Soit l'équation (E) :$-x^2+2x+4=0$

a) Montrer sans calculer le discriminant (Δ) et sans utiliser la forme canonique que (E) admet nécessairement deux racines distinctes x_1 et x_2 vérifiant $x_1 < 0 < x_2$
b) Sans calculer x_1 et x_2, trouver la valeur numérique du réel : A= $\dfrac{x_1-1}{x_1} + \dfrac{x_2-1}{x_2}$

EXERCICE N°8

Soit le polynôme $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ soit a un nombre réel.

1) Calculer f(x)- f(a)
2) En utilisant les identités remarquables écrire f(x) –f(a) sous la forme (x-a) g (x) où g (x) est un polynôme du 3^e degré dont les coefficients ne dépendent que de a
3) Vérifier que f(1) = 0 et en déduire une factorisation de f(x).
4) On considère g (x)= $2x^3+5x^2+3x+2$.
   a) Calculer g(-2)
   b) En déduire une factorisation de g(x) sous la forme g (x) = (x+2) h (x).
   c) Vérifier que h (x) n'admet pas de racine
5) Trouver enfin une factorisation complète de f (x)
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$f (x) = 0 et f(x) ≥ 0

EXERCICE N°9

P est un polynôme de degré 3 tel que $P(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - p(x) = x^2$

a) Montrer que $p(1)=0$
b) Quel est ce polynôme $p(x)$?
c) Démontrer que $p(n+1) - p(1) = 1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2$
d) En déduire que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE N°10

1. m est un nombre réel donné et $f(x) = -x^2+2x-m$

Déterminer m pour que f(x) soit négatif pour tout x.

2. $g(x) = x^2 - (m+1)x + 4$
   a) Pour quelles valeurs de m l'équation $g(x)=0$ admet- elle une seule solution ?
   b) Pour quelles valeurs de m l'équation $g(x) = 0$ n'a t- elle aucune solution ?

EXERCICE N°11

P est le polynôme défini par :

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6$.

a) Vérifier que P (x) est factorisable par $(x-1)(x+2)$. En déduire une factorisation de P (x)
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $p(x) \geq 0$.

EXERCICE N°12

g est le polynôme défini par $g(x) = x^2 - 2(2m-3)x + m^2 - 3x + 3$ où m est un réel

1- Pour quelles valeurs de m, g (x) à t- il une racine double ?
2- Pour quelles valeurs de m g (x) a t- il deux racines distinctes x_1 et x_2. Sans calculer x_1 et x_2, donner l'expression $x^2_1 + x^2_2$

EXERCICE N°13

Soit f la fonction rationnelle définie par :

$$f(x) = \frac{6x^3 - x^2 - 32x + 20}{9x^2 - 4}$$

a- Déterminer l'ensemble de définition D de f.
b- Calculer f (2). Quels sont les antécédents de 0 par f ?
c- Simplifier f (x) sur D
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $f(x) \geq -20$.

EXERCICE N°14

1) Factoriser le trinôme x^2-x-12
2) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme : $f(x)= 2x^4-4x^3-33x^2+ax+b$ soit divisible par le trinôme x^2-x-12
3) a et b étant les valeurs trouvées au 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) L'équation $f(x)= 0$
   b) L'inéquation $f(x) \geq 0$

EXERCICE N°15

Soit $f : x \longmapsto -2x^3+9x^2-9x+2$

$g : x \longmapsto -8x^5+38x^4-51x^3+44x^2-29x+6$

1- Trouver une racine entière de f
2- Calculer les racines de f
3- Vérifier que g est divisible par f
4- Trouver les racines de g et factoriser g.

EXERCICE N°16

1- Déterminer s'ils existent deux nombres de sommes S et de produit P dans les cas suivants :

S= 25 et P= 84, S= 2 et P= 3.

2- Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

EXERCICE N°17

1- Considérons l'équation (E) : $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$
   a) Vérifier que o n'est pas solution de l'équation (E). En déduire que l'équation (E) est équivalent à l'équation (E') : $2x^2-9x+8-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$
   b) Démontrer que si x_0 est racine de (E), alors $\dfrac{1}{x_0}$ est aussi racine de (E)

2- a)Calculer $(x+\frac{1}{x})^2$
   b) Montrer qu'en effectuant le changement de variable $y= x+\frac{1}{x}$ on peut ramener la résolution de l'équation(E) à celle d'une équation du second degré.
   c) En déduire les racines de l'équation (E)

EXERCICE N°18

1. On considère les polynômes p (x) = $6x^3+5x^2-4x$. et q (x) = $3x^2+x-4$. Démontrer que p (x) et q (x) sont factorisable en produit de facteurs du premier degré.
2. Soit la fonction f définie par :f (x) = $\frac{8x^3-1}{p(x)} - \frac{x^2-x}{q(x)}$

a- Donner l'ensemble de définition D de f sous forme de réunion d'intervalles.

b- Montrer que f s'exprime sur D comme quotient de deux polynômes du second degré.

c- Déterminer les antécédents de 1 par f.

d- Résoudre dans ℝ puis dans ℕ l'inéquation f (x) ≤0.

EXERCICE N°19

1. Résoudre dans ℝ puis dans ℤ le système

a) $\begin{cases} \frac{(2x-3)^2-x^2}{2-x} \leq 0 \\ x(1-x^2) \geq 0 \end{cases}$

b) $\frac{x}{x^2-3x+2} \geq \frac{1}{x^2+2x-3}$

2. Résoudre dans ℝ x ℝ les systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} xy = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{3} \end{cases}$ $(S_2) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{41}{400} \end{cases}$

EXERCICE N°20

1.Sachant que 3 est une racine du polynôme p(x) = $x^5-3x^4+4x^3-12x^2-5x+15$ résoudre dans ℝ puis dans ℕ l'inéquation P(x)< 0

2. On considère le polynôme f(x)= $20x^3-5x^2-3x+2$.f(x) a trois racines$\propto, \beta, \gamma$.Sans les calculer déterminer la valeur exacte de $\propto +\beta+\gamma,\ \propto\beta\gamma,\ \frac{1}{\propto}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\ et\ \propto^2+\beta^2+\gamma^2$

EXERCICE N°21

Soit la fonction rationnelle P définie par : f(x)=$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

1. Déterminer trois réels a,b,et c telles que pour tout réels x distinct de -2,-1 et 0

On ait : f(x)= $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$

2. En déduire la valeur exacte de la somme :

S=$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{46\times47\times48}$

EXERCICE N°22

On se propose de résoudre dans ℝ l'équation : $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0$ (E)

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de(E)

2. En déduire que (E) a les mêmes solutions que l'équation : $x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

3. On pose : $X = x+\frac{1}{x}$. Exprimer $x^2+\frac{1}{x^2}$ en fonction de X^2

4. Monter que l'équation (E') est équivalente à un système $\begin{cases} x+\frac{1}{x} = X \\ P(X)=0 \end{cases}$ Où p(x) est un polynôme à déterminer

5. Résoudre alors l'équation P (X)=0 puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE N°23

On pose pour tout x ϵℝ h(x) : $x^4-x^3-3x^2+2x+2$

1. Monter que $\sqrt{2}$ et -$\sqrt{2}$ sont des racines de h.
2. En déduire une factorisation de h sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré (Poser la division Euclidienne).

On pose (fx) = $\frac{1}{h\,(x)}+\frac{3x}{x^4-4}$

3. Déterminer l'ensemble de définition de f(x).
4. Ecrire f (x) sous la forme d'une fraction rationnelle
5. Résoudre l'équation f(x)=0.

APPLICATIONS

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas suivants, déterminer gof et fog, puis vérifier que fog ≠ gof.

1) F : ℝ → ℝ et g : ℝ → ℝ
   $x \longmapsto 5x-4$; $x \longmapsto x-3$
2) F :ℝ→ ℝ et g : ℝ → ℝ
   $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$

EXERCICE N°2

On donne la fonction f : $\mathbb{R}- \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}-\{-2\}$

$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x+3}$$

1. Démontrer que f est une bijection
2. Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
3. Calculer $(fof^{-1})(x)$ et $(f^{-1}of)(x)$

EXERCICE N°3

1- On donne l'application f : $[\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt{2x-1}$$

Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1}

2- On donne l'application g :$]-\infty, \frac{1}{2}[\rightarrow]\frac{5}{2}, +\infty[$

$$x \longmapsto 2x^2-2x+3$$

Démontrer que g est une bijection. Déterminer g^{-1}

EXERCICE N°4

On donne l'application f= $[2, +\infty[\rightarrow [-3 ; +\infty[$

$$X \longmapsto x^2-4x+1$$

Démontrer que f est une bijection Déterminer f^{-1}. Représenter f et f^{-1} dans le même repère.

EXERCICE N°5

On donne f :$]2, +\infty[\rightarrow]1 ; +\infty[$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1}

EXERCICE N°6

1. Soit l'application f : $[2 ; +\infty[\rightarrow]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{3}]$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$$

a. Démontrer que f définit une bijection de $[2 ; +\infty[$ sur $]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{3}]$
b. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f
c. Calculer $(fof^{-1})(x)$ et $(f^{-1}of)(x)$.

EXERCICE N°7

On considère les fonctions suivantes :

f : $[-\frac{1}{2}\ ; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ g : $\mathbb{R}$-{3} →R-{2}

$x \longmapsto \sqrt{2x+1}$ $x \longmapsto \frac{2x-1}{x-3}$

1a) Démontrer que g est une application

b) Démontrer que g est injective

c) Démontrer que g est surjective

d) En déduire que g admet une application réciproque que l'on déterminera.

2 a) Démontrer que f est une application

b) Démonter que f admet une application réciproque que l'on déterminera.

c) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

d) En déduire la représentation graphique de f dans le même repère.

EXERCICE N°8.

1. On considère l'application f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3}$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation f (x) = 0.

b) L'application f est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

2. Soit l'application g : [-1 ; 1] → [-1,1]

$$x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1}$$

a. Montrer que g est une application bijective

b. Expliciter sa bijection réciproque g^{-1}

EXERCICE N°9

f et g sont deux fonctions définies par f (x) = $\frac{1}{x^2-1}$ et g (x) = $\frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

a) Déterminer D_g et D_f les domaines de définition respectifs des fonctions g et f puis déterminer le domaine de définition de gof.
b) Déterminer l'expression de (gof) (x).

EXERCICE N°10

Déterminer la qualité de chacune des applications f, g, h et i.

f : [0, +∞ [→]-∞, +∞ [

$x \longmapsto x^2-1$

g :]-∞, +∞ [→ [-1 ; +∞ [

$x \longmapsto x^2-1$

h :[0,+∞[→ [-1,+∞[

$x \longmapsto x^2-1$

i :]-∞ ;+∞[→]-∞,+∞[

$x \longmapsto x^2-1$

EXERCICE N°11

f est une application telle que f : ℝ → [-1,8]

$x \longmapsto x^2+4x+3$

1. Justifier que f n'est pas une application bijective
2. Trouver un ensemble I, IC ℝ tel que f soit une bijection de I sur [-1 ; 8]

EXERCICE N°12

h est l'application définie de [-2 ; 3] dans [-3,4] par h(x)=$\begin{cases} \frac{3}{2}x + 2 \ \ si\ x \in [-2;0] \\ \frac{2}{3}x + 2\ si\ x\ \epsilon[0;3] \end{cases}$

Démontrer que h est bijective.

EXERCICE N°13

On considère l'application f définie par :

h : [-2,2] → [-2 ; 4]

$x \ \longmapsto \ \begin{cases} h(x) = x\ si\ x\ \in [-2;1] \\ h(x) = 2x\ si\ x \in\ ]1;2] \end{cases}$Monter que h est injective mais pas surjective de [-2,2] vers [-2 ; 4]

EXERCICE N°14

Soit f : [1 ; + ∞[→ [2, +∞ [

$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

et g : [-2,1] → [1 ; 10]

$x \longmapsto g(x) = x^2-2x+2$

a)Monter que f et g sont des applications bijectives

b) Déterminer les applications réciproques de f et g.

EXERCICE N°15

Soit h : [-3, +∞ [→ $\mathbb{R}^+$ et g :]-∞,1]→ $\mathbb{R}$

x⟼ $\sqrt{12-x-x^2}$ x⟼-2x+1

1- Déterminer le domaine de définition de h et hog
2- Calculer en fonction de x l'expression de hog.

EXERCICE N°16

Soit l'application f : [0, +∞ [→ [-1, +∞ [

x⟼ $\sqrt{x}-1$

1- Montrer que f est injective et surjective. En déduire que f est une bijection de [0, +∞[vers [-1+∞[
2- Soit f^{-1} sa bijection réciproque. Sans chercher f^{-1} calculer f^{-1} (1) et f^{-1} (2).
3- Expliciter f^{-1}
4- Construire (C_f) et ($C_{f^{-1}}$) dans un repère orthonormé.

EXERCICE N°17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f (x)= $\frac{-2x}{1+x^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un RON (o,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Déterminer D_f puis construire (C_f).
2. Etudier la parité de f puis en déduire la conséquence graphique à cet effet.
3. a)Déterminer graphiquement F= imf= [c,d].
   b) Soit (D_m) la droite d'équation y= m, avec m élément de $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (D_m) avec (C_f).
   c) f est-elle injective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ? f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? Pourquoi ?
   d) Déterminer graphiquement le plus grand intervalle J sur l'axe des ordonnées de telle sorte que f soit surjective de $\mathbb{R}$ sur J.
   e)Déterminer graphiquement le plus grand intervalle I sur l'axe des abscisses de sorte que f soit bijective de I sur J.

III- EQUATIONS ET INEQUATIONS SYSTEMES

EXERCICE N°1

A) Résoudre dans ℝ les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1) $\sqrt{x-1}$ = 13-x

2) $\sqrt{2-x}$= $\sqrt{1-4x}-1$

3) 3-2x+ $\sqrt{x^2-x+1}$= 1-x

4) $\sqrt{2x^2+x-6}$≤ x+2

5) $\sqrt{x^2-5x+4}$ > -2x+6

6) $\sqrt{2x^2+x-6}$ ≥ x+2

B) Résoudre dans ℝ

a) $\sqrt{3x^2+2x-1}$<$\sqrt{2x^2+x-1}$

b) $\sqrt{2x-\sqrt{x^2+1}}$= 2x- $\sqrt{x^2+1}$

c) X+ $\sqrt{2x^2-4x+1}$≥ 3

d) $\sqrt{-x^2+3x-2}$> x-1

C) Résoudre dans ℝ les équations suviantes :

a) 3$\sqrt{9-x^2}$= x

b) x²-$\sqrt{4-x^2}$+2=0

c)$\sqrt{x+3}+1$= $\frac{2}{3}$x

d)$\sqrt{x^2-2x}$= 3+x

D) Résoudre dans ℝ les inéquations

a)$\sqrt{-x^2+3x+4}$ ≤$\frac{1}{2}$x+2

b)$\sqrt{5x+6}$≥x+2

c) $\sqrt{x^2+3x-4}$≥x+2

d)$\sqrt{-3x^2+2x-1}$<$\sqrt{2x^2+x+1}$

EXERCICE N°2

a)Résoudre dans ℝ l'équation : $\sqrt{x+2}$ + $\sqrt{3x+2}$=4

b) Résoudre dans ℝ puis dans ℤ les inéquations suivantes.

* x+1 ≤$\sqrt{x^2-3x-4}$

*$\sqrt{2x^2+x-6} <$ x+2

EXERCICE N°3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles

a) $\sqrt{3x^2+x-1} = \sqrt{2x^2+x+1}$ b) $\sqrt{x^2-2x+1} - x^2+1=0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{-4x^2+x+5} \leq 2x+2$ b) $2-\sqrt{2x^2-5x+2} \leq x$

c) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} < 1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$: $x+1 \leq \sqrt{x^2-x-2} \leq 2x+1$

EXERCICE N°3

On considère les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y = 1 \\ 3x+7y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-18y = 29 \\ -2x+9y = 17 \end{cases}$ C) $\begin{cases} 3x-6y = 12 \\ -11x+22y = -44 \end{cases}$

-

1- Calculer le déterminant de chacun des systèmes ci-dessus
2- Quel est le nombre de solutions de chacun des systèmes
3- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes

EXERCICE N°4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(S1)\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - y = \sqrt{2}-1 \\ x + (\sqrt{2}+1)y = 1 \end{cases}$ $(S2)\begin{cases} \sqrt{2}x - 3\sqrt{3}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

2. On donne les systèmes suivants :

$(S_a)\begin{cases} x+xy+y = 7 \\ x^2y+xy^2 = 6 \end{cases}$ $(Sb)\begin{cases} x^2+y^2-xy = 28 \\ x+y = 2 \end{cases}$

$(S_c)\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = 2xy \\ x+y+xy = 0 \end{cases}$ $(S_d)\begin{cases} 2x^2+x+y^2-2y = 3 \\ (2x^2+x)(y^2-2y) = 2 \end{cases}$

$(S_e)\begin{cases} x^2+2y^2-2x+8y+3 = 0 \\ 3x^2-y^2-6x-4y-12 = 0 \end{cases}$

EXERCICE N°5

1. Résoudre dans ℝx ℝ les systèmes suivants :

(s1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x-3}{y} + \frac{y-3}{x} = -2 \end{cases}$ $(S2)\begin{cases} x + y = 15 \\ |x - y| = 3 \end{cases}$ (s3) $\begin{cases} 2|x| + |y| = 8 \\ 3|x| - 2|y| = 5 \end{cases}$

P est la parabole d'équation y= ax^2+bx+c. Cette courbe passe par les points A (1 ; -3) ; B (2,-1) et C (-1,5). Trouver a, b et c.

EXERCICE N°6

Soit (C) la courbe représentative de la fonction P l'équation P(x) = $ax^2+ bx + c$.

1) Calculer les réels a, b et c sachant que (C) passe par les points A (1 ; 1) ; B (-2 ; 25), C (3 ; 5)
2) Ecrire P (x) sous la forme canonique
3) Soit f la fonction définie par :
   f :]-∞,2] → [$\frac{1}{2}$; +∞[
   $x \longmapsto 2x^2-6x+5$
   a) Montrer que f est une application bijective
   b) Explicite f^{-1} la bijection réciproque de f
   c) Dans un repère orthonormé (o,$\vec{i}$, $\vec{j}$), construire la courbe (C) de p. Justifier la construction à l'aide de la fonction h(x) = $2x^2$.
   d) Construire en bleu dans le même repère la courbe (Γ) de f^{-1}.

EXERCICE N°7

1) Résoudre dans ℝ
   a) $3+ \sqrt{2x + 7}= 17-x$ b) $2(x+1) \leq \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
2) Soit f (x) = $\frac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$, montrer que quel que soit x appartenant à ℝ, $\frac{1}{3} \leq$ f (x) ≤ 3
3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = 25 \\ 9x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

EXERCICE N°8

A- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes proposés, d'inconnue (x, y, z) par la méthode de Gauss.

(s1) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 5x + y - z = 4 \end{cases}$ (S2) $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(S3) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ 5x + 4y - 10z = 7 \end{cases}$ (s4) $\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

B) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :

$$a)\begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ 4x + 3y + 2z + t = -5 \\ 8x + 4y + 2z + t = -8 \\ 32x + 12y + 4z + t = -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ -x + y - z + t = -6 \\ 8x + 4y + 2z + t = 12 \end{cases}$$

<u>EXERCICE N°9</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss des systèmes suivants :

$$1)\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 6x + 12y + 4z = 41 \\ 6x + 4y + 12z = 45 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + y + z = -7 \\ 4x + 2y + z = -21 \\ x - y + z = -9 \end{cases}$$

3) On donne les systèmes suivants :

$$(E_1)\ \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x + 5y - 20z = -2 \\ -3x + 5y + 5z = 4 \end{cases} \qquad (E_2)\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{8} \\ x - y + z = 12 \end{cases}$$

a) Résoudre (E_1) par la méthode du pivot de Gauss

b) Résoudre (E_2) par la méthode de votre choix

3) Déterminer une parabole (p) d'équation $y= ax^2+bx+c$. dans un repère orthonormé, sachant qu'elle passe par les points A (1,2), B (2,-3), C (3,-12).

<u>EXERCICE N°10</u>

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

2) Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant

$$(s)\quad \begin{cases} 3x + y + 2z - t = 2 \\ 2x - 3y - z + t = -2 \\ x + y + 3z - 2t = -2 \\ x - 2y + z + 3t = -1 \end{cases}$$

CHAPITRE 2 : ANGLES ORIENTEES ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE N°1

Déterminer la mesure principale de l'angle dont une mesure est donnée ci-dessous, puis sur un cercle trigonométrique, placer les points associés à ces angles.

$-\frac{451}{2}$; $\frac{509\pi}{6}$; $\frac{437\pi}{15}$;$-\frac{731\pi}{16}$; $\frac{-19021\pi}{4}$

EXERCICE N°2

Soit les points A, B, C, D, et E tels que

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})=\frac{2\pi}{3}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})=\frac{\pi}{3}$

Démontrer que le triangle ACD est un triangle rectangle en A.

2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})=\frac{-2\pi}{3}$;$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})=\frac{3\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})=-\frac{5\pi}{12}$

Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

EXERCICE N°3

A et B sont deux points distincts. Placez le point C tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}$

Quelle est la nature du triangle BAC ?

EXERCICE N°4

Une mesure de l'angle Orienté $(\vec{u},\vec{v})$ est fixée. Donnez dans chaque cas une mesure de chacun des angles Orientés indiqués.

1. $(\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{2}$	2. $(\vec{u}, \vec{v})=\alpha$
a) $(-\vec{u},\overline{-\vec{v}})$	a) $(3\vec{u},-2\vec{v})$
b) $(-\vec{u},\vec{v})$	b) $(-2\vec{v},\vec{u})$
c) $(2\vec{u}, 3\vec{v})$	c) $(5\vec{v}, 4\vec{u})$
d) $(\vec{v},\vec{u})$	d) $(-5\vec{u}, -6\vec{v})$

EXERCICE N°5

1. Construisez une ligne brisé ABCDE telle que : AB=4 ; BC=3 ; CD=2 ; DE=2 (en cm) ;

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=-\frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DE})=\frac{\pi}{3}$

2. Calculer une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$. Déduisez-en l'existence d'un réel k à préciser tel que $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$
3. ABC est un triangle. Démontrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=\pi$

EXERCICE N°6

(O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est un repère orthonormé direct.

A est le point de coordonnées (2 ; 1)

1. Placer le point B tel que AB= 2 et $(\vec{\imath},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{6}$
2. Placer le point C tel que AC=2 et $(\vec{\imath},\overrightarrow{AC})=\frac{-\pi}{6}$
3. Calculer les coordonnées des points B et C
4. Trouver une mesure de ($\vec{\imath}$, BC)
5. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE N°7

1. Déterminer sin x et cos x sachant que : tan x=0,8 et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$
2. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

A= $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(x+\frac{15\pi}{2}\right)}-\tan\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$

B= $\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)$

3. Calculer A et B

A= $\cos^2\left(\frac{703\pi}{4}\right)+sin^2\left(\frac{551\pi}{6}\right)+cos^2\left(\frac{447\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{95\pi}{3}\right)$

B= $\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

4. Démontrer que :
   a) $\forall x \neq k\pi, \frac{2+\sin 2x-2cos2x}{1+3sin^2x-cos2x}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{1}{tanx}\right)$

   b) $\forall x\epsilon\mathbb{R}$, $(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=\sin^3 x$-$\cos^3 x$.
   c) Pour tout réel a et b tel que a-b$\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ et\ b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, k$\epsilon\mathbb{Z}$:
   $$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

EXERCICE N°8

1.a) Sachant que$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculer $\sin\frac{3\pi}{5}$.

b) Déduisez-en les valeurs du cosinus et du sinus des réels suivants : $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{9\pi}{10}$

2. Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

a=$\tan\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\tan\left(x+\frac{19\pi}{2}\right)}-\tan\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{95\pi}{2}-x\right)}$

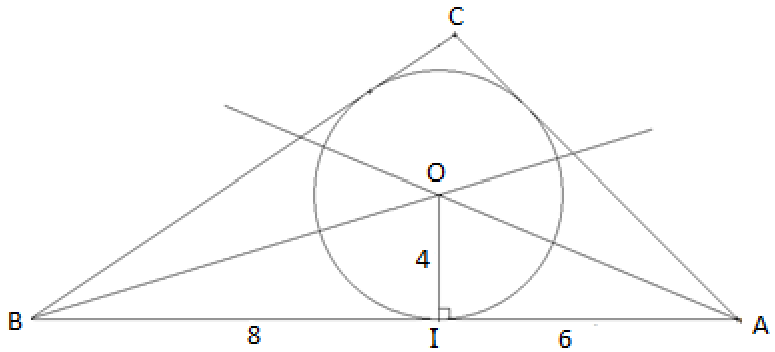
b=$\sin x \sin(y-z) + \sin \mathrm{y} \sin(z-x) + \sin z \sin(x-y)$

4. On donne : $\cos a = \frac{2}{3}$ avec 0<a<$\frac{\pi}{2}$ et $\sin b = \frac{1}{5}$ avec $\frac{\pi}{2} < b < \pi$

   Calculer :$\cos(a+b) et \sin(a+b)$

EXERCICE N°9

Dans la figure suivante, on a AI=6, BI=8 et OI=4 ; Le point O, intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ; OI est donc un rayon de ce cercle et l'angle O$\hat{I}$B est droit.



1. Calculer OA et OB, puis $\sin(\frac{\hat{A}}{2})$, $\cos(\frac{\hat{A}}{2})$; $\sin(\frac{\hat{B}}{2})$ et $\cos(\frac{\hat{B}}{2})$
2. Calculer $\sin(\hat{A})$, $\cos(\hat{A})$, $\sin(\hat{B})$ et $\cos(\hat{B})$
3. Montrer que $\sin(\hat{C})=\sin(\hat{A}+\hat{B})$. Calculer $\sin(\hat{C})$.
4. Calculer les distances BC et AC.

EXRCICE N°10

ABC est un triangle tel que BC=a=4 ; AC=b=6 ; AB=c=5

1. a) Faire la figure
   b) Rappeler les formules de duplication de cos2x et sin2x.

2. Calculer cos(A), puis cos(B). En déduire que cos(B)=cos (2A)

3. Calculer sin(B) en fonction de sin(A). En déduire que sin(B)=sin (2A).

4. Conclure sur les deux résultats précédents (2 et3)

5. Exprimer en fonction de la valeur de l'angle$\hat{A}$, la valeur de l'angle $\hat{C}$

6. Calculer l'aire du triangle ABC

EXRCICE N°11

I. Démontrer que $16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.sin\frac{7\pi}{24}sin\frac{11\pi}{24}=1$

II. Soit a un nombre réel vérifiant sina=$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 0<a<$\frac{\pi}{2}$

1. Calculer cos2a et cos4a.
2. Démontrer que le réel a est l'une des solutions de l'équation cos4x=sinx.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation cos4x=sinx ; en déduire le réel a

EXERCICE N°12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos 7x\cos 2x+\sin 7x\sin 2x=\cos\frac{5\pi}{12}$
b. $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$
c. $\cos^2(2x)-\sin^2(2x)=\cos 5x$
d. $\cos x=\frac{1}{2}$;
e. $\tan^2x+(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

EXERCICE N°13

1. Résoudre dans$]-\pi,\pi]$ l'inéquation $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$
2. a) Exprimer cos3x en fonction de cos x puis résoudre dans$]-\pi,\pi]$, l'équation $4\cos^3x-3\cos x-\frac{1}{2}<0$

EXERCICE N°14

I. a) Résoudre dans $[0, 2\pi]$, $\sin 3x\leq\frac{1}{2}$

b) Résoudre dans$]-\pi,\pi]$, $\cos x\geq\sin 2x$

II. 1. Résoudre l'équation : $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

2. Résoudre l'inéquation : $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$
3. Déduire de la question 1) la résolution de l'équation : $2\,cos^2x+(1-\sqrt{2})cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$(E) Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de l'équation (E)
4. Déduire de la question 2) la résolution dans $[0,2\pi]$

   De l'inéquation : $2\,cos^2x+(1-\sqrt{2})cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ (I)

EXERCICE N°15

a) Démontrer que pour tout réel a, $\cos 5a=16\cos^5a-20\cos^3a+5\cos a$
b) Vérifier que pour tout nombre réel x : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$
c) On pose $t=\cos\frac{\pi}{5}$

Démontrer que le nombre réel t est solution de l'équation : $4x^2-2x-1=0$ puis que $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

d) En déduire : $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{\pi}{10}$

EXERCICE N°16

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $2\cos(4x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$c) $2\sin(3x+\frac{\pi}{4})=1$
   b) $\text{Cos}(3x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$ d) $2\cos^2x+\cos x-1=0$
2. Résoudre $\mathbb{R}$dans les inéquations suivantes :
5. a) $2\sin(2x+\frac{\pi}{2})-1<0$ sur $[0,2\pi]$
   c) $\begin{cases} 2sinx \leq \sqrt{2} \\ 2sinx+1 \geq 0 \end{cases}$ sur $[0,2\pi]$

EXERCICE N°17

1. a) Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$
   b) Résoudre l'équation $2x^2+(1-\sqrt{2})x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$
   2. a) Résoudre l'équation (E) : $2\cos^2x+(1-\sqrt{2})\cos-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$
      b) Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE N°18

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   A: $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ B: $\tan x=\sqrt{3}$
   C: $\sin x[\sin x-\cos(2x+\frac{\pi}{3})]=0$ D: $\cos(\frac{1}{2}x)=\cos 3x$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   E : $\sqrt{2}\cos 2x+1>0$; $x\epsilon[0,\pi]$ F : $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$, sur $[0,2\pi]$
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a- $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)$
   b- $\sin^4x-\cos^4x=1-2\cos^2x$

EXERCICE N°19

1. Montrer que pour tout réel x, $\sin(3x)=-4\sin^3x+\sin x$
2. En déduire que : $\sin(3x)-\frac{\sqrt{2}}{2}=(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2})(-4\sin^2(x)-2\sqrt{2}\sin x+1)$
3. Résoudre $\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ puis en déduire que $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{17\pi}{12})$ solutions de l'équation : $-4x^2-2\sqrt{2}x+1=0$
4. En déduire les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{12})$ et$\sin(\frac{17\pi}{12})$

EXERCICE N°20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $16(\sin^2x-\sin^4x)=3$
2. Cos $(2x+\frac{\pi}{3})$ +cos $(\frac{\pi}{3}-2x)=\frac{1}{2}$
3. $2\sin^2x+\sqrt{3}\sin x-3=0$
4. $4\sin^2x+2(1-\sqrt{3})\cos x-4+\sqrt{3}=0$
5. a) Vérifier que pour tout réel x, $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$,
6. b) En déduire la résolution dans $[-\pi,\pi]$ de l'équation : $(\cos x-\sin x)^2=\frac{1}{2}$

EXERCICE N°21

Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle I donné

1. $4\sin^2x-1\leq 0$ I= $[0,2\pi]$
2. $|\text{Sin}x|<\frac{1}{2}$ a. I= $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ b) I= $[0,2\pi]$
3. $2\cos^2x-\cos x-1\leq 0$ I= $[0,\pi]$
4. $\text{Sin}2x\geq \sin x$ I=$[-\pi,\pi]$,
5. $\text{Sin}(x-\frac{\pi}{3})<\frac{1}{2}$ I= $[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
6. $2\sin 2x-\sqrt{2}\leq 0$ I= $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

EXERCICE N°22

1. Sachant que cos $\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer sin $\frac{\pi}{12}$ et tan$\frac{\pi}{12}$. Déduisez-en le sinus et le cosinus de : $\frac{5\pi}{12}$;$\frac{17\pi}{12}$;$\frac{25\pi}{12}$; $\frac{195\pi}{12}$
2. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'équation $(2-\sqrt{3})\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{3}-1$

EXERCICE N°23

1. Démontrer que pour tout réel a $\cos^3a=\frac{1}{4}(\cos 3a+3\cos a)$ et $\sin^3a==\frac{1}{4}(3\sin a-\sin 3a)$
2. Déduisez-en chacune des sommes suivantes :

$S_1=\cos^3\frac{\pi}{12}+\cos^3\frac{5\pi}{12}+\cos^3\frac{7\pi}{12}+\cos^3\frac{11\pi}{12}$

$S_2=\sin^3\frac{\pi}{12}+\sin^3\frac{5\pi}{12}+\sin^3\frac{7\pi}{12}+\sin^3\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°24

A. 1 On donne $\sin(a)=\frac{1}{3}$; $0\leq a\leq\frac{\pi}{2}$. Calculer cos2a et sin2a

2. Calculer $\cos\frac{5\pi}{8}$

B. 1) En utilisant les formules de duplication, montrer que a)$\forall x \epsilon \mathbb{R}$, 1+cosx+sinx=2cos $(\frac{x}{2})$ [cos $(\frac{x}{2})$ +sin $(\frac{x}{2})$]

b)$\forall x \epsilon \mathbb{R}$, 1-cosx+sinx=2sin $(\frac{x}{2})$ [sin $(\frac{x}{2})$ +cos $(\frac{x}{2})$]

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. 1+cosx+sinx=0 ; b)1-cosx+sinx=0

3. Résoudre dans $[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ l'équation : $(\sqrt{2}\sin x+1)(4\cos^2 x-3)<0$

EXERCICE N°25

1. Résoudredans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un changement de variable.

   (E_1):$-2\cos^2 x+\cos x+6=0$

   (E_2): $\sin^2 2x-\sqrt{3}\sin 2x+\frac{3}{4}=0$
2. a) En remarquant que sin (5x)=sin(x+4x) démontrer que $\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$
   b) Résoudre sin5x=0 et vérifier que $\frac{\pi}{5}$et $\frac{2\pi}{5}$sont des solutions de cette équation.
   c) Résoudre l'équation $16X^5-20X^3+5X=0$
   d) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de sin $\frac{\pi}{5}$et sin$\frac{2\pi}{5}$

EXERCICE N°26

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
   a) 2cos2x+4cosx-1=0
   b) $3\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{6}=0$
   c) Cos2x-sin2x=-1
2. a) Résoudre dans $[0,2\pi]$ $\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})-1<0$

   b) Résoudre dans $[0,2\pi[$ $\begin{cases} sinx \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2sinx+1 \geq 0 \end{cases}$

   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ cosx-sinx<0

3. a) Résoudre dans$]-\pi,\pi]$ $\frac{1-2cosx}{2sinx-\sqrt{2}}\geq 0$

   b) x et y étant deux nombre réels de l'intervalle$[0,2\pi]$ on considère le système : (S)$\begin{cases} cosxcosy = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ sinxsiny = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$

   c) Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant : (S')$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

EXERCICE N°27

1. Soit $\widehat{A}$, $\hat{B}$, et $\hat{C}$ les mesures des angles d'un triangle. Démontrer que

a. $\cos(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2})= \sin\frac{\hat{B},}{2}$

b. $\tan(\frac{\hat{B},+\hat{C}}{2})= \frac{1}{tan\frac{\hat{A}}{2}}$

2. On désigne par S l'aire du triangle ABC et on donne $\hat{A}$=45° ; CA=3 et S=3
   a) Calculer AB et BC
   b) Déterminer sin $\widehat{B}$ et cos $\hat{C}$
3. Calculer la longueur de la médiane relative au côté [BC]

EXERCICE N°28

Résoudre dans l'intervalle I donné les équations suivantes :

a) |Cosx| = |sin(x- $\frac{\pi}{3}$)|, I= $[0, 2\pi]$

b) Cos4x-$\sqrt{2}$ cos2x=1, I= $\mathbb{R}$

c) Cos2x+ (2+$\sqrt{3}$)sinx-(1+$\sqrt{3}$)=0, I= $\mathbb{R}$

d) Cosx+cos3x+cos5x=0, I= $\mathbb{R}$

EXERCICE N°29

Soit deux (2) réels x et y appartenant à l'intervalle [0 ; $\frac{\pi}{2}$ [tels que sinx=$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et cos y= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. a) Vérifier que $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
   c) Calculer siny. Quelle est la valeur de y.
2. a)Calculer cos(x+y) et sin(x+y)

b) Calculer cos(x-y) et sin(x-y) et en déduire la valeur de x

EXERCICE N°30

1. On donne sin(x) =$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et xϵ]-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$[
   a) Calculer la valeur exacte de cosx
   b) Calculer cos2x et en déduire la valeur de x.
2. a) Vérifier que cos $(\frac{\pi}{18})$-$\sqrt{3}$.sin $(\frac{\pi}{18})$= 2[$\frac{1}{2}$cos $(\frac{\pi}{18})$-$\frac{\sqrt{3}}{2}$ sin $(\frac{\pi}{18})$]

   b) En déduire que cos $(\frac{\pi}{18})$-$\sqrt{3}$.sin $(\frac{\pi}{18})$=2cos $(\frac{7\pi}{18})$

   c) On pose K= -$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{18})}$ +$\frac{\sqrt{3}}{\cos(\frac{\pi}{18})}$. Montrer que K =-4

EXERCICE N°31

ABC est un triangle tel que BC=8, AC=7, AB=5.

1. Faire une figure. On notera : $\hat{A}$=B$\hat{A}$C ; $\hat{B}$=A$\hat{B}$C et $\widehat{C}$=A$\hat{C}$B et a=BC ; b=AC ; c=AB
2. Calculer cos $\hat{B}$ et en déduire la mesure en degré de$\hat{B}$.
3. Calculer de même cos$\hat{A}$ et cos$\hat{C}$. En déduire la mesure en degré de $\hat{A}$ et $\widehat{C}$ sachant que cos82°=$\frac{1}{7}$
4. Soit H le pied de la hauteur de ABC issue de A
   a) Calculer h=AH
   b) Calculer l'aire du triangle ABC
5. Soit I le milieu de$[BC]$, calculer AI

EXERCICE N°32

1. a) Transformer en somme le produit cos5xcos6x
   b) Transformer en produitla somme sinx+sin3x+2sin2x

2. Un triangle ABC a pour côté BC=2$\sqrt{3}$, AC= 2$\sqrt{2}$ et AB= $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

   a) Calculer les angles $\widehat{A}$ et $\hat{B}$ donner les valeurs en radians. En déduire $\hat{C}$ et cos $\frac{\pi}{12}$

   b) Calculer la hauteur AH issue de A.

EXERCICE N°33

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on considère le point A(2, 1)

1. Construire le point B tel que : AB=2 et ($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AB}$) =-$\frac{\pi}{6}$

   Construire le point C tel que : CB=2 et ($\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$)=$\frac{2\pi}{3}$

2. Calculer une mesure de l'angle orienté($\vec{\jmath}$,$\overrightarrow{BC}$)

EXERCICE N°34

1. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que BC=a et A$\hat{B}$C=$\frac{2\pi}{5}$ rad. La bissectrice de l'angle A$\hat{B}$C coupe [AC] en D.
   a. Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que DA=DB=a.
   b. Démontrer que AB=2acos$\frac{\pi}{5}$ et CD=2acos$\frac{2\pi}{5}$, en déduire que cos$\frac{\pi}{5}$ - cos$\frac{2\pi}{5}$=$\frac{1}{2}$
   c. Démontrer que : BC=BD cos$\frac{\pi}{5}$ +CD cos$\frac{2\pi}{5}$, en déduire que : cos$\frac{\pi}{5}$ cos$\frac{2\pi}{5}$ =$\frac{1}{4}$
   d. On pose x=cos$\frac{\pi}{5}$ et y=cos$\frac{2\pi}{5}$. On sait que x-y=$\frac{1}{2}$ et xy=$\frac{1}{4}$. Calculer alors x et y
   e. Calculer sin$\frac{\pi}{5}$ et tan$\frac{\pi}{5}$.

EXERCICE 2 (05points)

On considère le polynôme P défini dans ℝ par : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1) a-Calculer P (−2) puis résoudre dans ℝ l'équation P(x)=0

b- Résoudre dans ℝ l'inéquation P(x)<0

2) En déduire la résolution dans $]-\pi;\pi]$ de :

a) $2sin^3x + 5sin^2x + sinx - 2 = 0$

b) $2sin^3x + 5sin^2x + sinx - 2 < 0$

c) $2cos^3x - 5sin^2x + cosx + 3 = 0$

CHAPITRE 3 : FONCTIONS NUMERIQUE : COMPORTEMENT GLOBAL

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. f : x⟼ $\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}-3}$
2. g :x⟼ $\frac{x-1}{|x-1|-|3x-2|}$
3. h : x⟼ $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$
4. I : x⟼ $\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x-1}}$
5. J: x⟼ $\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$

6. k : x⟼ $\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-4}$

7. l: $[0, 2\pi] \to$ ℝ

x⟼ $\sqrt{\frac{cosx}{1-2cosx}}$

8. M :$[-\pi, \pi]$→ℝ

x⟼ $\frac{tanx}{1+tan}$

9. N:x ⟼ $\frac{sinx}{\sqrt{2}sinx+1}$

EXERCICE N°2

Etudier la parité des fonctions suivantes et interpréter graphiquement les résultats obtenus

1. f : x⟼ $x\sqrt{x^2-1}$
2. g :x⟼ $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
3. h : x⟼ $\frac{3x^2+2}{|x+1|}$

EXERCICE N°3

1. On considère les fonctions de ℝ $vers$ ℝ ci-dessous :

f(x)=$\frac{7x+21}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+6}}$; G(x)= 4x²-3 ; h(x)=$\frac{5x}{\sqrt{x-4}}$; I(x)=$\frac{5x}{\sqrt{x-4}-2}$;j(x)=$\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{12-2x}}$; k(x)=$\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; l(x)=$\sqrt{\frac{x-1}{2x-3}}$

   a) Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
   b) Déterminer l'ensemble de définition noté D de la fonction fog puis démontrer que $\forall x\epsilon D$; fog(x)= -14(1+$\sqrt{2}$) |x|

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
   a) f : [-2,6→[1, 4] b) f :ℝ⁺→ ℝ⁻ c)f :ℝ → ℝ*

   x⟼|x-4| x⟼ $\sqrt{x+2}$- x x⟼||x-4|-3|

   d) f : ℝ⁺ → ℝ e) f: ℝ → ℝ :
   x⟼ $\sqrt{4x+2}$ x⟼ $\sqrt{-|x+1|-2}$

3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions de ℝ $vers$ ℝ ci-dessous :
   a) f: x⟼5x$\sqrt{3-2x}$
   b) g : x⟼ $\sqrt{x-3}$+2$\sqrt{3x-1}$
   c) h : x⟼ $\sqrt{|x^2-5x+6|}$
   d) I : x→ $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+4}}$
   e)f : ℝ → ℝ
   X⟼ $\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x+2}$
   f) g : [-5, +∞[→ ℝ
   X⟼ $\sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$
   g) h : [0 ; 2π] → ℝ
   X⟼ $\frac{\sqrt{\cos x}}{\tan 2x}$
   h) i : ℝ → ℝ
   x⟼ $\frac{\sqrt{x}}{|2x-1|-|x-2|}$

EXERCICE N°4

On considère les fonctions suivantes :

f: ℝ → ℝ g : [b ; 7] → ℝ

x⟼5x²-(a+1)x+3 x⟼ $\frac{x^3}{x^2-1}$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit paire et g impaire.

EXERCICE N°5

f et g sont les fonctions définies par : f(x) =$\frac{x+3}{x+1}$ et g(x) =$\frac{x}{x+2}$; On pose h=gof

1. Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitement h(x)

2. La fonction k est définie par k(x)=$\frac{x+3}{3x+5}$; Les fonctions h et k sont-elles égales ?

EXERCICE N°6

f et g sont deux fonctions périodique de ℝ vers ℝ. f est de période 2 et g de période 3.

Démontrer que la fonction h définie par : h(x)=f(x)+g(x) est périodique de période 6.

EXERCICE N°7

1. f est la fonction définie par f(x)=$\frac{-2x^2+3x+7}{x^2-2x-3}$

Démontrer que la représentation graphique de f admet le point Ω (1 ;-2) comme centre de symétrie.

2. g est la fonction définie par : g(x)=$\frac{x^2+6x+2}{2x^2+12x+9}$

Démontrer que la représentation graphique de f admet comme axe de symétrie la droite (D) d'équation x=-3

EXERCICE N°8

En écrivant f comme la composée de deux fonctions usuelles, déduisez les variations de f sur l'intervalle I donné.

1. f(x)=$\sqrt{2x+1}$, I= [$-\frac{1}{2}$; +∞ [
2. f(x)= $\frac{1}{x+1}$; I=]-1; +∞ [
3. f(x)= $\frac{1}{x^2+1}$; I=]-∞ ; 0 [

EXERCICE N°9

f est une fonction définie sur [-1 ; 5] et g une fonction définie sur [2 ; +∞ [

Sur quel ensemble est définie fg ? Justifier.

EXERCICE N°10

Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction f définie sur [-4 ; 4]

X	-4		-1		2		4
f(x)	3	↘	0	↗	2	↘	-1

Dressez le tableau de variations des cinq fonctions définies par :

g(x)=2f(x) ; h(x)=-f(x) ; I(x)=f(x)+3 ; j(x)=|f(x)| ; k(x)=f(|x|)

EXERCICE N°11

f est la fonction définie par f(x)=$\frac{1}{\sin x+2}$

1. Démontrer que pour tout réel x, 1≤sin $x + 2 \leq 3$ et déduisez-en que f est définie sur ℝ
2. On donne u la fonction sinus
   a. Définissez la fonction g telle que f=g0u
   b. Rappelez la période de u.

Déduisez-en que f est périodique et donner une période de f.

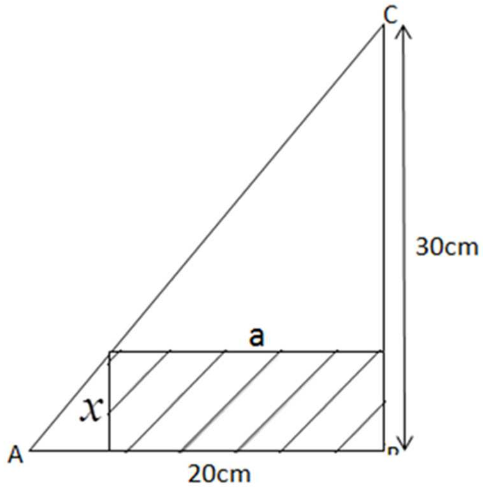
   c. U est impaire, f l'est-elle ? Justifier votre réponse.
3. Démontrer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \epsilon \mathbb{R}$, m≤f(x)≤M

EXERCICE N°12

On souhaite construire une maison de forme rectangulaire dans l'angle droite d'un terrain triangulaire (figure)

1) Exprimer a en fonction de x
2) Exprimer l'aire A(x) de la maison en fonction de x.
3) Pour quelle valeur de x l'aire de la construction

Construction est-elle maximale ? Quel est ce maximum



EXERCICE N°13

On considère la fonction f définie par f(x)=$\frac{2x+1}{x+2}$

1. Déterminer les réels a et b tel que pour tout x$\neq -2$, f(x)=a+$\frac{b}{x+2}$
2. A l'aide d'un changement de repère, tracer la courbe ($\mathcal{C}$) de f
3. Soit g la fonction définie par g(x)=|f(x)|
   a. Exprimer g(x) sans le symbole de la valeur absolue.
   b. Déduisez-en une méthode de construction de la courbe ($\mathcal{C}$') de g
   c. Tracer ($\mathcal{C}$') dans le même repère que ($\mathcal{C}$)
   d. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation g(x)=m, m.$\in \mathbb{R}$

EXERCICE N°14

Un super marché dispose d'un stock important d'un certain article. Le prix de vente est de 30f pièce et 100 articles sont vendus par semaine.

Le gérant constate que s'il diminue le prix de vente de 1f, il vend 100 articles de plus par semaine.

1. Calculer le chiffre de vente par semaine pour cet article lorsque le prix est de 30f ; de 29f et de 28f.
2. Noter x la diminution du prix de vente de cet article. Exprimer le chiffre de vente en fonction de x.
3. A l'aide de la forme canonique, trouvez x pour que le chiffre d'affaire soit maximal.

EXERCICE N°15

On considère la fonction f définie par f(x)= $\frac{1+x}{2-x}$

1. Déterminer les réels a et b tel que $\forall x \neq 2,$ f(x)=a+$\frac{b}{x-2}$
2. A l'aide du changement de repère construire la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f dans repère orthonormé (o,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
3. Soit g la fonction définie par g(x)=-f(x) et (Γ) sa représentation graphique dans (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).
   a. Comment obtient-on (Γ) à partir de $(\mathcal{C})$?
   b. Construire (Γ) dans (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

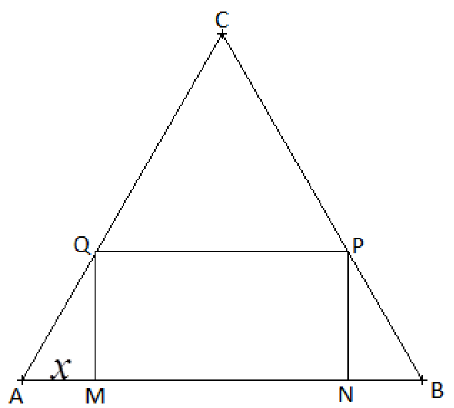
EXERCICE N°16

P est la parabole d'équation y=9-x². A et B sont les points de coordonnées respectives (-3 ; 0) et (3 ; 0) x est un réel de [0 ; 3], M et N sont les points de P d'abscisses respectives x et –x.

1. Faire une figure
2. Calculer l'aire S(x) du trapèze ABMN, et déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.

EXERCICE N°17

ABC est un triangle équilatérale de côté a. On inscrit dans ce triangle un rectangle MNPQ comme indiqué sur la figure suivante.



Posons AM=x. Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit maximale.

EXERCICE N°18

Soit f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ $vers\mathbb{R}$ par f(x)=$\sqrt{|x^2-1|}$ et g(x)=$\frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes : g_0f ; $f^2.g$
   b. Calculer leurs expressions explicites.

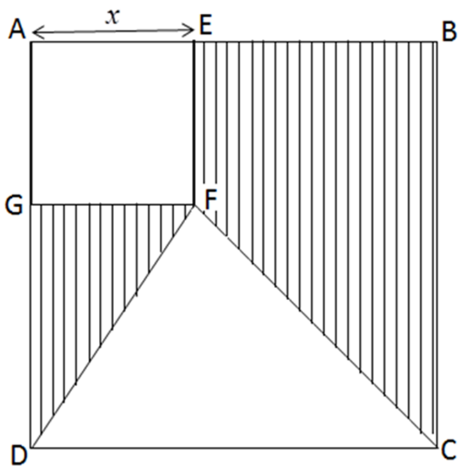
2. Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

   a. (g_0f) (x) pour $x\epsilon[-1;\ 0[\cup]0;1]$

   b. $(f^2.g)$ (x) pour $x\epsilon]-\infty$; $-\sqrt{2}[$

EXERCICE N°19

ABCD est un carré de 10cm de côté. AEFG est un carré de côté x. ($0\leq x\leq 10$)



On désigne par A(x) l'aire en cm² de la partie hachurée. Pour quelle valeur de x la surface colorée a-t-elle la plus grande aire ? Indiquer l'aire correspondante.

EXERCICE N°20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=$-x^2+4x-1$

1. A l'aide du changement de repère, tracer la courbe (C_f)

2. Soit g la fonction définie par g(x)=$|f(x)|$

   a) Exprimer g(x) en fonction de f(x).

   b) En déduire une méthode de construction de ($\mathcal{C}$g).

   c) Tracer ($\mathcal{C}$g).

3. Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation g(x)=m ou m$\in\mathbb{R}$.

On donne $\sqrt{3}\approx 1.7$

CHAPITRE 4 : FONCTIONS NUMERIQUES LIMITES

EXERCICE N°1

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+3x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+3x^2+1}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2- Calculer les limites des fonctions suivantes en -∞ et en +∞

a) f(x)= $\frac{2x^2-3x-1}{1-3x^2}$

b) g(x) = $\sqrt{x^2+1}+x$

c) h(x)= $\sqrt{3x^2-1}-3x+1$

d) J(x)= $\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-2\sqrt{x^2-1}}$

3- Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes puis calculer les limites de chacune d'elles aux bornes de son ensemble de définition.

a) K(x)=$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ b) L(x)=$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$ c)M(x)=$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x}$ d) N(x)=$\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$

EXERCICE N°2

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to1} 5x-3$
2) $\lim\limits_{x\to-1} x^3+8x^2-2$
3) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-7}{x-5}$
4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\cos x}$
5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan x$
6) $\lim\limits_{x\to o} \sqrt{x}-3x$

EXERCICE N°3

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} \frac{(x-2)(3x-4)}{3x-4}$;
2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{3x^3-3x^2}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+1}{x^3+x^2+4x+4}$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{1-x^3}{x-1}$
5) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
6) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$
7) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$
8) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$

EXERCICE N°4

Etudier la limite de la fonction f au point x_0 indiqué. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en x_0.

1) f(x)= $\frac{x^2+5}{x}$; $x_0=0$
2) f(x)= $\frac{3x+1}{x-2}$ $x_0= 2$
3) f(x)= $\frac{1}{x^2-1}$; $x_0= 1$, $x_0= -1$
4) f(x)= $\frac{5|x|}{2-4x}$; $x_0= \frac{1}{2}$
5) f(x) = $\frac{1-cos2x}{\sin 2x}$; $x_0= 0$
6) f(x) =$\frac{5-2x}{(2x-1)^2}$; $x_0= \frac{1}{2}$
7) f(x) $\frac{x^2-4}{x^3-8}$; $x_0= 2$
8) f(x) = $\frac{x^2-2x}{3x^2+x}$; $x_0= \frac{-1}{3}$, $x_0= 0$
9) f(x)= $\frac{-2}{(2+x)(3+x)}$; $x_0= 3$
10) f(x) $= \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}$; $x_0= 1$, $x_0= -4$

EXERCICE N°4

On donne : $\lim_{x \to o} \frac{\sin x}{x}=1$

1-Démonter que :$\lim_{x \to o} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

2-Déduisez en les limites en 0 de chacune des fonctions f, g et h définis par :

F(x)= $\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$ g(x) $= \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2}$ et h(x)= $\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{\sin 2x}$

EXERCICE N°5

Calculer les limites suivantes :

1.$\lim\limits_{x\to o}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

2.$\lim\limits_{x\to o}[\frac{1}{2}\mathrm{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})]$

3.$\lim\limits_{x\to o}\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

4.$\lim\limits_{x\to o}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-5}-3}$

On donne $\lim\limits_{x\to o}\frac{\tan x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to o}\frac{sinx}{x}=1$

EXERCICE N°6

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}-3x^2+1}{-4\sqrt{x}+3}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(\mathrm{x}+1)\tan(\frac{\pi}{2}x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x-1}{x\sqrt{x^2+4}-x^2+7}$

x⟶-∞

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}).(4\mathrm{x}+7)$

EXERCICE N°7

Calculer les limites suivantes :

1-$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$

2- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$

3- $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3}$

4- $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cos^2x-sin^2x}{cosx-\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{5x-1}{-2x^2+x+10}$

8. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2+2}{3-x}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{x}-2\sqrt{x})$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x^2+x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

EXERCICE N°08

1. Soit f la fonction définie par f(x)= $\sqrt{x^2+2x}-x$
   - a- Quel est l'ensemble de définition de f ?
   - b- Etudier les limites de f aux bornes de D_f.

2. Exprimer en fonction de $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$ les expressions : 1+cosx+sinx, 1-cosx+ sinx
3. Calculer : $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\pi} \frac{1+cosx+sinx}{cos\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to2\pi} \frac{1-\cos x+\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$

EXERCICE N°9

1. Soit g la fonction définie sur [0 ; +∞ [par g (x)= $\sqrt{x^2+2x}-x$
   - a- Monter que : $|g\ (x)-1| \leq \frac{1}{2x}$ pour tout réel x >0
   - b- En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\mapsto+\infty}$ g (x)

2. Soit f la fonction définie sur [0, +∞ [par : f (x)= $\sqrt{x^2+1}-x$
   - a- Monter que pour tout x >0, 0<f(x) $\leq\frac{1}{2x}$
   - b- En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\mapsto+\infty}$ f(x)

NB : Les questions 1 et 2 sont indépendantes

EXERCICE N°10

On considère la fonction f définie sur ℝ-{0} par f (x) = $\frac{(x^2-1)\cos x+(x^2+1)\sin x}{x^3}$

1) a)Démonter que pour x >1 ; on a :- $\frac{2}{x}\leq$ f(x)$\leq\frac{2}{x}$.

   b) En déduire que pour x >1, $|f(x)| \leq\frac{2}{x}$ puis calculer la limite de f en+∞2) Soit g la fonction définie sur]1 ; 2 [u] 2, +∞ [par g (x) = $\frac{1-x\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}}$

   a)Calculer g (x) –x et donner son signe pour x∈]1 ; 2[∪] 2 ; +∞ [. (on pourra se servir d'un tableau de signe établi sur]1 ; 2[∪] 2 ; +∞[)

   b) Déduire de cette étude que : ∀ x ∈] 1 ; 2[∪] 2 ; +∞ [g (x) > x.

   c) Calculer la limite de g en +∞

EXERCICE N°11

1. Sachant que :$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ =1 et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ =0,

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos -1}{x^2}$ b)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3\pi}{\pi x}$

2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x})$; $\lim\limits_{X\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\cos x}$.

3. Soit f la fonction définie par : f(x)= $\frac{x^2+2x+5}{x+1}$

a) Trouver des réels a, b, c tel que pour tout x ∈ D_f : f (x)= ax + b+$\frac{c}{x+1}$

b) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

c)Déterminer l'équation de l'asymptote oblique et de l'asymptote verticale de la fonction f.

CHAPITRE 5 : FONCTIONS NUMERIQUES : DERIVATION

EXERCICE N°1

Calculer la dérivée de f sur D

1. f(x) = tan (3x), D= [0 ; $\frac{\pi}{6}$]
2. f(x)= sin (3x-$\frac{\pi}{3}$), D= $\mathbb{R}$
3. f(x)=$\sqrt{\cos x}$, D= [0 ; $\frac{\pi}{2}$]
4. f(x)= $\frac{\tan x}{tan^2 x-1}$, D= [0 ; $\frac{\pi}{4}$ [
5. f(x) = ($\frac{x+1}{2x-3}$)², D= $\mathbb{R}-\{3/2\}$
6. f(x)= $\frac{\cos x}{\sin x-1}$ D= [0 ; $\frac{\pi}{2}$[
7. f(x) = $\frac{x^2\ (x-1)^3}{2x+1}$D= $\mathbb{R}-\{-1/2\}$
8. f(x)=$\frac{x^2-3x-5}{x^2-2x+3}$ D= $\mathbb{R}$
9. f(x) = $\sqrt{\frac{5x-1}{x-2}}$ D=$]2;+\infty[$
10. f(x)=$\frac{\cos x}{\sin x-2}$ D= $\mathbb{R}$

EXERCICE N°2

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par son expression explicite. Déterminer, l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer f '(x).

a) f(x)= $\cos^3$ (4x+2)
b) f (x)= $\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$
c) f(x)= $\frac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1}$
d) f(x) =$\frac{2+3x}{-x^2+3x-2}$

EXERCICE N°3

A- Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur I :
   1. f (x) $\longmapsto \frac{x-1}{x+1}\sqrt{x}$, I=] 0, +∞ [
   2. g : x$\longmapsto$ (x+1)$\sqrt{x^2-3x-4}$, I=] 4 ; +∞ [
   3. h : x$\longmapsto$ $\frac{(x^2-2)3}{(2x+5)^2}$, I= $\mathbb{R}$-$\left\{-\frac{5}{2}\right\}$
   4. i : x $\longmapsto$ $\tan^4(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$, I = [0,$\frac{\pi}{2}$]

B) A l'aide du taux de variation de f en 1 étudier la dérivabilité de la fonction f :x $\longmapsto$ $\sqrt{x^2+1}$ en 1

EXERCICE N°4

f est la fonction de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ définie par :

f(x)= $\frac{2x^2-x+3}{3x-3}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2°) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE N°5

1. Soit f la fonction définie par : f(x) = ax + b +$\frac{1}{3-x}$, a$\epsilon\mathbb{R}$, b $\epsilon\mathbb{R}$. Déterminer les réels a et b pour que la courbe (Cf) de f passe par le point A (2 ; 1) et admette en ce point une tangente horizontale.
2. (Cg) est la courbe représentative de la fonction g : x$\longmapsto$ $\frac{x^3}{(x-1)^2}$. Déterminer le point de (Cg) où la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation –x+y-4=0.

EXERCICE N°6

1. Dans chacun des cas calculer la dérivée de la fonction sur l'ensemble I indiqué :

a) F : x$\longmapsto$tan^3 (4x), I= [0,π/8]

b) G : x$\longmapsto$ $\sqrt{\frac{x}{x^2-3}}$; I=]-$\sqrt{3}$; 0[

c) H : X $\longmapsto$ cos^4(3x-$\frac{\pi}{5}$), I= $\mathbb{R}$

d) I : x$\longmapsto$ $\frac{(x-3)^2}{(3x+5)^3}$, I= $\mathbb{R}$-$\left\{\frac{-5}{3}\right\}$

2. Trouvez l'ensemble des réels m pour lesquels la courbe représentative dans un repère orthonormée de la fonction f définie par f(x) = $\frac{mx-2}{(m+2)x+3}$ admet au point d'abscisse -1 une tangente perpendiculaire à la droite (D) d'équation y= $\frac{3}{2}$x+5

EXERCICE N°7

(C) est la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = $\frac{x}{x^2+2}$

a)Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

b) Existe – il des tangentes à (C) parallèle à la droite (D) : y = $-\frac{1}{4}$x ?

c)Existe- il des tangentes à (C) parallèles à la droite (D') : 4x-y=0

EXERCICE N°8

Trouver les membres a, b, c tels que la parabole d'équation y= ax^2+bx+c possède les propriétés suivantes :

Elle passe par le point A (3 ; 0) ;

La tangente en A est l'axe des abscisses ;

Elle passe par le point B (1 ; 2)

EXERCICE N°9

Calculer la dérivée de f sur l'ensemble D indiqué :

1. F (x) = tan (3x) ; D= $[0 ; \frac{\pi}{6}[$
2. F(x)= sin $(3x-\frac{\pi}{3})$; D= $\mathbb{R}$
3. F(x)= $\sqrt{cosx}$; D= $[0 ; \frac{\pi}{2}[$
4. F(x)= $\frac{\cos x}{\sin x-1}$; D= $[0 ; \frac{\pi}{2}[$
5. F(x) = $(\frac{x+1}{x+2})^3$, D= $\mathbb{R}$-$\{-2\}$
6. F(x)= $x\sqrt{x^2+1}$; D= $\mathbb{R}$

EXERCICE N°10

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0.

1) F : $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$, $x_0= 0$
2) F : $x \longmapsto x^3+1$, $x_0=a\in \mathbb{R}$
3) F : $x \longmapsto x+\sqrt{x-1}$, $x_0= 1$
4) F : $x \longmapsto x+1+\sqrt{x^2-4}$, $x_0= -2$

EXERCICE N°11

Démontrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : f(x)= $x^2\sqrt{x}$ est dérivable en 0 et sur$]0, +\infty[$. Calculer pour tout $x\in]0, + \infty[$, f'(x).

EXERCICE N°12

Après avoir déterminé l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer f'.

1) F(x) = $x -\sqrt{2x+3}$
2) F(x)= $\frac{3x^2-x+2}{3x-1}$
3) F(x)=$x^4 (x^3+4x-3)^3$
4) f(x)=$\frac{x-1}{x+3}\sqrt{x}$
5) f(x)=$\frac{sin^2x}{cos5x}$
6) f(x)=tan $(\frac{x}{2})$
7) f(x)= x sin $(\frac{1}{x})$
8) f(x)=$(2x+1)\sqrt{2-3x}$
9) f(x) $\frac{1}{(3x+5)^7}$
10) f(x) = $\frac{\tan x}{1+tanx}$

EXERCICE N°13

1°) f est la fonction rationnelle définie par : f(x) = $\frac{x-a}{x+a}$

Déterminer le nombre réel a pour que la fonction ait un nombre dérivé en a égal à $\frac{1}{2}$

2°) Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation y= $(m-1)x^2+(3m+2)x +4$ admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur 6.

EXERCICE N°14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La fonction f est définie par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. Démontrer que la courbe(C_f) de f coupe l'axe $(0,\vec{\imath})$ en deux points A et B dont l'un a pour abscisse -1.
2. Déterminer les équations des tangentes en A et B

EXERCICE N°15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. f est la fonction définie par : $f(x)= x^3-2x^2+1$.

1) Déterminer les points de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite (D), d'équation y= 7x-9
2) Déterminer les points de (C_f) où la tangente est perpendiculaire à la droite (Δ) d'équation y= x+3.

EXERCICE n°16

Déterminez les réels a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par f(x) = $ax+b-\frac{6}{x}$ passe par le point A (2 ; 0) et admette en ce point la droite (Δ) d'équation x- y-2=0 pour tangente.

EXERCICE N°17

1- La fonction f définie par $f(x)= x\sqrt{x}$ est-elle dérivable en $x_0=0$?
2- La fonction f définie par $f(x)= \sqrt{x+1}$ est elle dérivable en $x_0=-1$?
3- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ en $x_0=2$.
4- Calculer les dérivées des fonctions définies par :

$a(x)= \cos(3x+5)$ $\qquad$ $b(x)= (x^3+x^2+3)^4$

$c(x)= \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ $\qquad$ $d(x)=2x\cos x + (x^2-2) \sin x$.

EXERCICE N°18

Etudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations :

1. $f(x)= 2x+1- \frac{2}{x-3}$

2. $f(x)= \frac{2x^2+12x}{x^2+4}$

3. $f(x)= x\sqrt{x+3}$

4. $f(x) = \cos(x+\frac{\pi}{4})$ sur $[0,\pi]$

EXERCICE N°19

Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g et h sous leur forme la plus simplifiée.

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$
2) $f(x) = \frac{2x^2-3x+15}{2x^2-x-6}$;
3) $h(x)=\frac{sin^2x}{\cos x}$

EXERCICE N°20

a, b et c étant trois réels, on considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^2+bx+c$.

1) Déterminer les valeurs a, b et c sachant que :
- La courbe (C) de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x=\frac{3}{2}$
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est -1.
- La courbe (C) de f passe par le point A de coordonnées (1 ; -6).

2) Pour les valeurs de a, b et c trouvées, résoudre l'inéquation $f(x) \leq x-4$.

EXERCICE N°21

$(o,\vec{i},\vec{j})$ est un repère. Trouver toutes les hyperboles $\mathcal{H}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

* Il passe par le point A (-1,6)

* La droite d'équation x= 1 est une asymptote verticale à $\mathcal{H}$.

*La droite d'équation y= 2 est une asymptote horizontale à $\mathcal{H}$.

NB : Il a pour équation $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq0$, $ad-bc\neq0$.

EXERCICE N°22

On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) =\frac{ax+b}{x^2-4}$, $(a, b) \epsilon\mathbb{R}^2$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Calculer la dérivée de f. A quelle condition portant sur a et b la fonction f est-elle strictement monotone sur chaque intervalle où elle est définie ?
3- Déterminer a et b pour que la courbe représentative (C_f) de f passe par le point A (0,-5/4) et admette en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
4- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
5- Tracer $(C_{f.})$

CHAPITRE 6 : ETUDE DES FONCTIONS

EXERCICE N°1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. a)Calculer f'(x)
   b) Etudier le signe de f'(x)
   c)En déduire le sens de variation de f.
   d) Dresser le tableau de variation de f.

3. Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie par $f(x)= \frac{x^2-5x-7}{x-2}$

1- Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f et calculer les limites de f aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes éventuelles parallèles aux axes.

2- a)Déterminer trois membres réels a, b et c tels que $f(x) = ax+ b + \frac{c}{x-2}$
   b) Montrer que la courbe (C_f) admet la droite (D) d'équation y= x-3 comme asymptote oblique en $-\infty$et en $+\infty$

3- a) Calculer f'(x) ; étudier son signe et en déduire le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

4-Soit I le point d'intersection des asymptotes à (C_f)

a- Déterminer les coordonnées de I
b- Démontrer que I est centre de symétrie de (C_f).

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+2x^2+4}{(x+1)^2}$. On appelle (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité 2 cm .

1.a)Déterminer le domaine de définition D_f de f

b) Déterminer trois réels a, b et c tel que $f(x)= ax+ \frac{b}{x+1}+ \frac{c}{(x+1)^2}$

2-Calculer les limites de f(x) aux bornes de D_f. (on pourra utiliser l'une ou l'autre des écritures de f(x)).

3-a)Montrer que $\forall\ x \in D_f$, $f'(x)= \frac{(x-1)(x^2+4x+8)}{(x+1)(x+1)^2}$

b) Monter que $\forall\ x\in D_f$, $x^2+4x+8 >0$

C) Déduire de ce qui précède le signe de f'(x) et le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f

5a) Montrer que la droite (D) : y=x est une asymptote oblique à la courbe (C_f).

b) Etudier la position relative de (C_f) et (D) puis préciser les coordonnées de leur point d'intersection.

6) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7) Construire (D), (T) et (C_f)

8) Résoudre graphiquement f(x)= m, m ∈ ℝ

EXERCICE N°4

A. Soit le polynôme $p(x) =- x^3+6x^2-13x+8$

Sachant que 1 est une racine de p(x) étudier le signe de P (x)

B. f est la fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = -x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}$. (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Démonter que pour tout x ∈ Df, $f'(x)= \frac{P\,(x)}{(x-2)^3}$. Etudier le signe de f'(x) et déduisez en le sens de variation de f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. Dresser le tableau de variation de f.

2°) Soit (Δ) la droite d'équation y=-x+1

a)Déterminer les coordonnées du point A commun à (C_f) et à (Δ) :

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ)

c)Démonter que (Δ) est une asymptote oblique à (Cf).

3) Ecrire une équation de la Tangente (T) à (Cf), au point d'abscisse 0.

4) Construire les asymptotes, (T) et (Cf).

EXERCICE N°5

On se propose d'étudier la fonction numérique f dont on connait le tableau de variation ci- dessous :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	-3	-	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	2	↘	-1	↗	0

1- Quel est l'ensemble de définition de la fonction f noté D ?
2- Quelles sont les limites aux bornes de D ? Donner les équations des asymptotes à la courbe (Cf)
3- Ecrire les équations des tangentes à la courbe (C_f) que le tableau de variation permet de connaître.
4- Tracer une esquisse de la représentation graphique (C_f).

EXERCICE N°6

f est la fonction définie par : $f(x)=\frac{x(2x-1)}{(x-1)^2}$. (C) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

1. Etudier la fonction f

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec la droite (D) d'équation y= 2.

3.a)Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Déterminer le signe de f (x) +x. Déduisez en la position de (C) par rapport à (T).

4. Tracer (T), les asymptotes et (C).

EXERCICE N°7

1) f est la fonction définie par : $f(x)=\frac{-x^2+bx+3}{x-1}$
   Pour quelles valeurs de b, f admet- elle pas d'extrémum local ?
2) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (C) est la courbe de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$
   Déterminer les réels a, b, c, d pour que(C):
   - Coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 2
   - admette en ce point une tangente de coefficient directeur 1,
   - admette pour axe de symétrie la droite d'équation 2x-1=0.

EXERCICE N°8

f est une fonction à variable définie par :

$f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2) a) Déterminer les réels a, b et c tel que pour tout x de D_f, on ait : $f(x) = x + a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

   b) Pour les valeurs de a, b et c trouvées, montrer que la droite (D) d'équation y= x+a est une asymptote oblique à (Cf).

   c)Etudier la position de (C_f) par rapport à(D)

   3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

   4) Tracer (D) et (C_f).

   5) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $x^3+(3-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$.

EXERCICE N°9

On considère la courbe (C) d'équation y= g (x)= $\frac{x(ax+b)}{2(x-c)^2}$ où a, b, c sont des réels dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (d'unité 2 cm).

1- Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe ait deux asymptotes d'équations respectives x= 1 et y= $\frac{3}{2}$ et que la tangente à(C) au point O ait pour équation y= -2x.
2- Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3x^2-4x}{2\,(x-1)^2}$ et (Cf) sa courbe représentative dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   a) Etudier la fonction f
   b) Déterminer une équation de la tangente en O ainsi qu'au point d'abscisse $\frac{3}{2}$
   c) Etudier la positon de (Cf) par rapport à son asymptote horizontale.
   d) Tracer (Cf).
3- Soit (D_m) la droite d'équation y= 4x+m où m∈ ℝ. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation f(x) = 4x+m.
4- Soit h la fonction définie par h(x) = f (IxI)

   a) Quelle est l'ensemble définition de h ?

   b) Etudier la parité de h. Que peut-on en déduire pour la Courbe (C_h) ?

   c)Comparer h (x) et f(x) pour tout x ∈ [0,1[u] 1, +∞ [

   En déduire une explication de l'obtention de (C_h) à partir de (C_f) sans étudier h

   d) Tracer (C_h) dans le même repère que (C_f)

   e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation h(x) = λ où λ

est un réel.

EXERCICE N°10

Soit la fonction f définie par f (x)= $\frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f sous forme de réunion d'intervalles
2- Déterminer les réels a, b, c tels que : ∀x ∈Df, f (x)= a+$\frac{b}{x}$+$\frac{c}{x+1}$
3- Etudier la fonction f
4- Démontrer que la droite (D) d'équation x= -$\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la Courbe (C).
5- a)Tracer la courbe (C)

b) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation : (2-m) x^2+ (2-m) x-1=0.

6- Soit g la fonction définie par g (x) =$\frac{2x^2+2x-1}{|x^2+x|}$. et (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).Donner une méthode de construction de (C') puis tracer (C') dans le même repère que (C).

7- On considère la suite (u_n) définie pour tout élément n ∈ $\mathbb{N}^*$ par : u_n= 2- f(n).

a)Calcule en fonction de n, la somme S_n= U_1+U_2+…………..+ U_n.

b) Etudier le sens de variations de la suite (S_n)

c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

EXERCICE N°11

Soit f la fonction ℝ vers ℝ définie par f(x)= $\sin^2$x + cosx

1°) a) Monter que f est périodique de période 2π

b) Etudier la parité de f

c) En déduire lorsqu'on peut choisir l'intervalle I= $[0,\pi]$ comme domaine d'étude.

2) Etudier les variations de f sur I puis dressez son tableau de variations.

EXERCICE N°12

Soit f la fonction définie par f(x) = cos4x +2 sin2x

1- Justifier le choix de l'intervalle I = $[0,\pi]$ comme intervalle d'étude.
2- Démontrer que pour tout nombre réel x : f (x)= 4 cos 2x (1-2 sin 2x).
3- a) Résoudre dans I, l'équation f (x)= 0.
   b) En déduire le sens de variation de f sur I.
   d) Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrez que la droite (D) l'équation x = $\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de (C_f).

5. Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur [-π,π] par : f(x)= cos x $-\frac{1}{2}$ sin2x.

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

3. Tracer (C_f).

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie par : f(x)= $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

1. Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x\to\frac{\pi-}{4}} f(x)$; $\lim_{x\to\frac{\pi+}{4}} f(x)$; $\lim_{x\to\frac{3\pi-}{4}} f(x)$; $\lim_{x\to\frac{3\pi+}{4}} f(x)$.
2. Montrer que f est périodique de période T= 2π.
3. Etudier la parité de f.
4. Déduire de 2) et 3) que l'on peut étudier f sur D_E= [0,π]-$\left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$.
5. Démontrer que $\forall$ x$\in \mathbb{R}$, cosxcos2x+2 sin x sin 2x= [1+2sin ²x] cos x .
6. Résoudre dans D_E, [1+2 sin ²(x)]cos x ≥0.
7. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur D_E.
8. Tracer sur D_E, (C_f).

EXERCICE N°15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) : $\frac{1}{3}$ sin 3x- sin x.

1- Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle [0,π].
2- Démontrer que pour tout réel x, f'(x) = -4 sin ²x cosx
3- Déterminer le signe de f' (x) et dresser le tableau de variation de f sur [0,π]
4- Tracer la courbe (C) représentative de f sur [-π, π]

EXERCICE 16

Soif f la fonction définie par f(x)= $\frac{\sin x}{cox-\sin x}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est π périodique.
2- Déterminer le sens de variation de f et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3- Représenter la courbe (C) de la restriction de f à l'intervalle [$-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$]. On précisera la tangente à l'origine et au point d'abscisse π
4- Montrer que f (x)=$-\frac{1}{2}$+ $\frac{1}{2}$ tan (x+$\frac{\pi}{4}$).En déduire un centre de symétrie pour courbe (C).

EXERCICE N°17

Soit la fonction définie sur ℝ par f(x)= sin x - $\frac{2}{3}$ sin 3x.

1.a) Montrer que f est périodique de période 2π et étudier la parité de f.

b) Calculer f (π-x). Que peut-on en déduire pour (C_f) ?

c) En déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle I= $[0,\frac{\pi}{2}]$

2. Montrer que : f'(x) = cos x cos 2x.

3- Etudier les variations de f sur I et dresser son tableau de variation.

4-Tracer la courbe (C_f) sur $[-\pi,\pi]$ dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'unité graphique:2 cm

EXERCICE N°18

Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x)= sin 3 x

a-Démonter que la fonction f est impaire et périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. En déduire qu'il sufflit d'étudier f sur $[0\,;\frac{\pi}{3}]$ pour connaitre les variations de f sur ℝ

b- Calculer f' (x) et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0, \pi/3]$.

c- Tracer dans un repère orthonormal la représentation graphique de f pour x∈ $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

EXERCICE N°19

Soit la fonction f définie sur ℝ par : f (x)= $\frac{1}{2}$ cos 2x+ cos x

1- Démonter qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[0,\pi]$ pour connaître les variations de f sur ℝ
2- Calculer f' (x) et résoudre f' (x)= 0 sur $[0,\pi]$.
   Etudier le signe de f'(x) sur $[0, \pi]$
3- Dresser le tableau de variations de f pour x ∈ $[0,\pi]$
4- Tracer la Représentation Graphique (C) de f dans un RON et pour x ∈ $[-\pi, 2\pi]$
   Démontrer que toute droite D_k d'équation x = k π est un axe de symétrie pour (C).

EXERCICE N°20

Soit f la fonction définie sur ℝ par : f (x)= cos 2x-2cosx +1

1- Justifier pourquoi il est suffisant d'étudier f sur l'intervalle I= $[0,\pi]$
2- a) Calculer f'(x)
   b) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation f'(x)=0 puis l'inéquation f' (x) >0
   c)Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$. Préciser le minimum de f sur $[0,\pi]$;
   Quel est le tableau de variation de f sur $[-\pi,\pi]$?
3- On veut tracer la Représentation graphique (C) de f avec précision

a-Résoudre l'équation f (x)= 0 dans [0,π]
Quels sont les points communs à la courbe (C) restreinte à [-π,π] et à l'axe des abcisses ?
Préciser les coefficients directeurs des tangentes à (C) en chacun de ces points

b-Tracer la courbe (C) restreintes à [-π,π] compléter pour obtenir la courbe sur [3π,3π]

4- a) Résoudre l'inéquation f (x) $\leq$0 dans [-π,π]
b) Quels sont les nombres x de [-π,π] tels que 1< f(x)< 3.
c)Retrouver les résultats en a) et b) à l'aide du graphique.

CHAPITRE 7 : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE N°1

Dans chacun des cas suivants étudier la convergence de la suite (u_n) n $\in \mathbb{N}$ définie par :

a) $u_n = \ = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$
b) $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}-n}{\sqrt{4n^2+1}+n}$
c) $u_n = 4^n+2^n$
d) $u_n = \frac{5^n-2^n}{5^n-3^n}$
e) $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{5}{4}\right)^n$
f) $u_n = \frac{n\cos(1+\frac{1}{n})}{n^2+1}$
g) $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE N°2

1- Soit u une suite arithmétique de raison r. Sachant que :
   a) u_0= 2 et r= 6. Calculeru_{29}.
   b) u_{94} =-181 et u_{10} = -1. Calculer r.
2- Soit v une suite géométrique de raision q ; sachant que :
a) v_1 = 2 et q= 5. Calculer v_4.
b) v_0 = 343 et v_3 =1 Calculer q.
3- u Est une suite arithmétique de raison r.
   a) On sait que $u_0+u_1+u_2$=333. Calculer le termeu_1.
   b) On sait que $u_0{}^2+u_1{}^2+u_2{}^2$= 37205. Calculer r.

EXERCICE N°3

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que$u_2+u_3+u_4$=15 et u_6=20.

a)Calculer u_0 et la raison r.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

c)Donner l'expression deu_n en fonction de n.

2) Soit (V_n) la suite géométrique de raison q >0. Telle que $V_4 = 10$ et $V_6 = 250$.
a. Calculer V_0 et la raison de q
b. Quel est le sens de variation de la suite (V_n)?
c. Donner l'expression de V_n en fonction de n.

EXERCICE N°4

1) (u_n) est une suite géométrique non constante. En outre $u_0 = 5$ et $2u_2 = 3u_1 - u_0$.
Déterminer la raison de (u_n).
2) Etudier la convergence de la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{5^n-2^n}{5^n+3^n}$

EXERCICE N°5

1) a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique telle que : $\begin{cases} a+b+c = 27 \\ a^2+b^2+c^2 = 275 \end{cases}$.

Déterminer les valeurs de a, b et c

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison r. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_{n-1}$. Sachant que : $u_{27} = 9{,}5$ et $S_{28} = 140$, Calculer u_0 et r.

En déduire S_n en fonction de n.

EXERCICE N°6

(u_n) est une suite croissante. (V_n) est la suite définie par : $V_n = \frac{1}{n}(U_1+U_2+\ldots+U_n)$ pour tout $n \geq 1$ Démontrer que (V_n) est croissante.

EXERCICE N°7

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1- Prouvez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$.
2- Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
3- Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{u_n+1}$.
   a) Démontrez que (V_n) est une suite arithmétique que vous caractériserez.
   b) Exprimez V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Exprimez la somme $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ en fonction de n.

EXERCICE N°08

(U_n) est la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{U_n}{2U_n+1}$.

1- Calculer U_1, U_2, U_3, U_4.
2- On pose pour tout n, $V_n = \frac{1}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique que vous caractériserez.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c) Exprimer en fonction de n, $S_n = V_o+V_1+\dots V_{n-1}$.

Quelle est la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$?

Déduisez en la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE N°9

Déterminer la raison de la suite géométrique (U_n) définie par : $U_0=\frac{2}{3}$, $U_5=162$.

Calculer en fonction de n, la somme $S_n= U_0+U_1 +\dots+U_n$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

EXERCICE N°10

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3
2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n= U_n-2$
   a)Démontrer que (V_n) est une suite géométrique Caractérisez- là,
   b) Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
   c)Exprimer en fonction de n les sommes ; $S_n = V_o+V_1+\dots+ V_n$ et $S'_n= U_0 +U_1+\dots+U_n$.

   d) Calculer $\lim\limits_{n\to +\infty} Sn'$.

EXERCICE N°11

On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+8}{2U_n+1} \end{cases}$; $n\epsilon\mathbb{N}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.
2) (V_n) est la suite définie pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$

a) Calculer V_0, V_1.
b) Monter que (V_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
d) Exprimer en fonction de n la somme
   $S_n= V_o+V_1+\dots+V_n$.

EXERCICE N°12

La suite $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est définie par $U_0= 2$ et $U_{n+1}= \frac{2U_n-16}{U_n-6}$

1) Calculer U_1 et U_2. Vérifier que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, $U_n<4$.
3) Déduire que, pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, $U_n<U_{n+1}$
   Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?
4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n= \frac{1}{U_n-4}$
   a)Montrer que (V_n) est une suite arithmétique
   b) Exprimez V_n puis U_n en fonction de n
   c)Calculer la somme $S_n= V_o +V_1+\ldots+V_n$.

EXERCICE N°13

On définit une suite $(U_n,)$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1 \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3. La suite (U_n) est-elle arithmétique ?est-elle géométrique ? On définit la suite (V_n) par $V_n= U_n-2n+6$.
   Calculer V_o, V_1, V_2 et V_3.
2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Etudier le sens de variation de la suite (V_n).
3) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.
4) Calculer $S_n= V_0+V_1+\ldots+V_n$ et $S_n'= U_o+U_1+\ldots+U_n$.

EXERCICE N°14

Monsieur SAWADOGO désire acheter un vélo qui au 1er janvier 1998, coûtait 90 000F CFA. Ne pouvant disposer que de 77 000F CFA et ne voulant faire aucun emprunt, il décide de placer cette somme de 77 000FCFA.

Un établissement financier lui propose un placement à intérêt composé au taux annuel de 6%. On désigne par (U_n) le capital disponible au 1er Janvier de l'année (1998 +n).

1°) Calculer U_1, U_2, U3.

2°) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Exprime U_n en fonction de n.

3°) A l'aide d'une calculatrice, déterminer à partir de quelle année Monsieur SAWADOGO Pourra acheter son vélo.

EXERCICE N°15

Le loyer mensuel d'une maison est de 50 000 F CFA

A) Le loyer augmente chaque année de 6% de l'année du contrat
   1- Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
   2- Au bout de combien d'année le loyer aura t- il double ?
   3- Calculer le total des loyers payés pendant les 20 premières années.
B) Ce loyer augmente chaque année de 6%
   1- Quel sera le montant du loyer dans 8 ans ?
   2- Au bout de combien d'année le loyer aura t- il doublé ?
   3- Calculer le total des loyers payés pendant les 20 premières années

EXERCICE N°16

Une personne reçoit 20 000F en héritage le 1er janvier 2008. Elle a placé cette somme à intérêts composés au taux de 7,5%.

1. Quelle somme disposera t- elle le 1er Janvier 2009 ?
2. On pose U_0= 20 000. On désigne par U_n la somme dont elle disposera le 1er janvier de l'année (2008+n) et par U_{n+1} celle dont elle disposera l'année suivante.
   a) Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).
   b) Exprimer pour tout entier $n \geq 0$, U_n en fonction de n.
   c) Calculer U_{12}.
3. Une publicité annonce : « gagner de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100% en 12 ans ».

a) Le placement est- il plus ou moins intéressant que le précédent ?
b) Déterminer son taux annuel sachant qu'il s'agit aussi d'un placement à intérêts composés
c) Calculer la limite de U_n.

EXERCICE N°17

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- Le premier mètre creusé coûte 1 000F

- Puis chaque mètre creusé ensuite coûte 50F de plus que le mètre précédent

1) Evaluer le montant perçu pour le 50ème mètre creusé.

2) Quelle profondeur pourra atteindre le forage si l'on dispose d'un crédit de 519 750F ?.

EXERCICE N°18

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}U_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \ ; \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1- Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.
2- Etudier le sens de variation de la suite (U_n).
3- On considère la suite (V_n) définie par. $V_n = n(3-U_n)$
a) Prouver que le suit (V_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme V_1.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE N°19

(U_n) et (V_n) sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ \forall n \geq 1,\quad U_{n+1} = \frac{2U_n+3V_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 7 \\ \forall n \geq 1, V_{n+1} = \frac{U_n+4V_n}{5} \end{cases}$$

1. On pose $\forall n \geq 1$, $W_n = V_n - U_n$.
   a- Démontrer que (W_n) est géométrique
   b- Exprimer W_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (W_n).
2. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
   b) Démontrer que la suite (U_n) est majorée et que la suite (V_n) est minorée
   c) En déduire la convergence des suites (U_n) et (V_n).

3. Soit (T_n) la suite telle que : $\forall n \geq 1$, $T_n = \frac{1}{3} U_n + V_n$

Démontrer que (T_n) est constante en déduire les limites des suites (U_n) et (V_n).

EXERCICE N°20

Soit (U_n) $n \geq 0$ la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$ et soit (V_n) $n \geq 0$ la suite définie par $V_n = 4U_n - 6n + 15$

1°) a) Calculer V_o.

b) Démontrer que (V_n) $n \geq 0$ est géométrique et en déduire son expression explicite en fonction de n et V_o.

c)En-déduire que $U_n = \frac{19}{4} \text{x} \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

2) Démontrer que U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = T_n + W_n$ ou (T_n) $n \geq 0$ est géométrique et (W_n) $n \geq 0$ est arithmétique $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer $S_1 = T_0 + T_1 + \ldots + T_n$; $S_2 = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$ et en déduire $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_n$.

EXERCICE N°21

On considère la suite (V_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par la donnée de V_o et de la condition :

$V_{n+1} = \frac{2V_n+1}{V_n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer $V_{n+1} - 1$ puis $V_{n+1} + 1$ en fonction de V_n.

b) En déduire une expression simple du quotient $\frac{V_{n+1}-1}{V_{n+1}+1}$ en fonction de V_n.

2) a) On pose $P_n = \frac{V_n-1}{V_n+1}$, en vous servant de la question précédente, montrer que P_n $n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer P_n en fonction de n et de P_0.

c)Exprimer P_n en fonction de n et d V_o

d) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n et de P_o.

EXERCICE N°22

Soit (V_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = ½$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n}V_n$.

1- Calculer V_2, V_3 et V_4.
2- a) Démontrer que la suite $V_n>0$ pour $n>0$. (on pourra procéder par récurrence). b) Démontrer que la suite (V_n) décroissante.

3- Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall n>0$.

a)Montrer que (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer (U_n) puis (V_n) en fonction de n.

c)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. En déduire la convergence de (U_n).

EXERCICE N°23.

U et V sont les suites numériques définies par $U_0 = 5/4$.

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - n - \frac{4}{3}$ ($n \in \mathbb{N}$) et $V_n = U_n + an + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1- Déterminer les réels a et b sachant que la suite (V_n) est une suite géométrique. Pour les valeurs de a et b déterminées au 1-)
2- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
3- On pose : $S_n = V_o + V_1 + ... + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$. Exprimer en fonction de n, S_n puis T_n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

EXERCICE N°24.

Soit(U_n)la suitedéfinie par :$U_0=1$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n+4}{U_n+3}$ $\forall n \geq \mathbb{N}$.

1- Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses $(o,\vec{\imath})$ les 5 premiers termes de la suite (U_n) et conjecturer la limite de (U_n).
2- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ o \leq U_n \leq 2$.
   b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

3- Soit (V_n)la suite la suite définie par $V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2}$pour tout n∈ ℕ

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique que vous caractériserez.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4- Calculer en fonction de n la somme $S_n= V_0+V_1+\dots V_{n-1}$ et étudier la convergence de la suite (S_n) nϵℕ.

EXERCICE N°25

Soit a un réel et les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0= a$, $V_0=-\frac{3}{4}$et∀ nϵℕ, $U_{n+1}=\frac{1}{5}(U_n+4V_n)$ et $V_{n+1}=\frac{1}{5}(3U_n+2V_n)$ et soit la suite (W_n) définie par $W_n= 3U_n+4V_n$ pour tout n∈ ℕ.

1- Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n. Que peut-on en déduire ?
2- Déduisez en V_n en fonction de U_n puis exprimer U_{n+1} en fonction de U_n seulement.
3- Exprimer U_n puis V_n en fonction de n .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.
4- Exprimer en fonction de n la somme $S_n= V_0+V_1+\dots+V_n$et Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE N°26

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x+3$ et la suite U définie par $U_O=-5$ $U_{n+1}= f(U_n)$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé.

2. Conjecturer le sens de variation et la limite de (U_n).

3. a. Déterminer le réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Que représente α graphiquement.

4. a) Démonter que (V_n) est une suite géométrique sachant que $V_n= U_n - \alpha$, $n \geq 0$

b) En déduire V_n puis U_n en fonction n

c)Démontrer les conjectures faites à la question 2

5- Exprimer en fonction de n, $S_n= U_0+ U_1+\dots+U_n$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE N°27

On considère la suite (U_n) nϵℕ à terme positifs définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n\epsilon\mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n-3}{U_n} \end{cases}$

1. La fonction f est dérivable sur]0, +∞ [et définie par : $f(x) = \frac{4x-3}{x}$. (C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm.
a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
b) Tracer (C) et la droite (D) d'équation y= x
c) Déduisez en la construction des termes U_0, U_1, U_2 et U_3 sur l'axe (OI).

2. a)Démonter que pour tout $x \epsilon [2 ; 3]$, $f(x) \epsilon [2 ; 3[$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $2 \leq U_n < 3$.
   c)Etudier les variations de la suite (U_n) $n\epsilon\mathbb{N}$.

EXERCICE 28

1.a)Montrer que pour tout réel α, on a :
$2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$
d) Transformer cos a. cos b en somme

3. Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = \cos 3 \\ U_{n+1} = 2\, U_1 . U_n - U_{n-1}\ [n \geq 1] \end{cases}$$

   a) Calculer U_2, U_3 et U_4. (on donnera le résultat sous la forme cosp, $p\ \epsilon\mathbb{N}$)
   b) Faites une conjecture sur le terme général de (U_n) puis démontrez le par récurrence.

EXERCICE N°29

Soit les suites (V_n) et (W_n) définies par $\begin{cases} Vo = 2 \\ V_{n+1} = \frac{9-11V_n}{4-6V_n} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \frac{2V_n - 3}{1 - V_n}$

1- Démontrer que la suite (W_n) est une suite géométrique à caractériser
2- Exprimer V_n en fonction de n. Etudier la convergence de (V_n)
3- Exprimer en fonction de n : $S_n = W_o + W_1 + \dots + W_n$ et
   $P_n = W_o \times W_1 \times \dots \times W_n$

EXERCICE N°30

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \epsilon [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + U_n}{2}} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$
b) Montrer que (U_n) est croissante ; est- elle convergente ? Justifier
c) On pose $u_0 = \cos(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$.
   Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$
d) Etudier la limite de (U_n).

EXERCICE N°31

1) x, y et z sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres, sachant que leur somme est 63 et la somme de leurs inverses est $\frac{7}{16}$
2) Soit (U_n) $n\epsilon\mathbb{N}$ cette suite de premier terme x
   a)Calculer S_n la somme des n premiers termes
   b) Donner le sens de variation et la limite de (U_n).

EXERCICE 32

Soit (a_n) et (b_n) les suites réelles définies par : $a_0= 2$, $b_0=4$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}.$$

1) Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

Sur une droite (D) graduée et rapportée au repère $(o,\vec{\imath})$ placer les points A_0, Bo, A_1, B_1, A_2 et B_2 d'abscisses respectives a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 et b_2 sur la droite (D).

2) Soit (U_n) la suite définie par $U_n= a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (U_n) est constante. En déduire que pour tout entier naturel n les segments [A_n, B_n] et [A_{n+1}, B_{n+1}] ont le même milieu I dont on donnera l'abscisse.
3) Soit (V_n) la suite de terme général $V_n= a_n- b_n$
   a) Monter que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
   b) Exprimer V_n en fonction de n et calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$. Que peut-on en déduire de la distance $A_n B_n$ lorsque n tend vers +∞ ?

B- Exprimer a_n et b_n en fonction de n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$; $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

EXERCICE 33

Soit(U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} Uo = 2 \\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1+U_n{}^2}{2U_n} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.
2) a- Etudier le sens de variation de la suite (U_n).
   b- En déduire que (U_n) converge.
3) a-Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n-1)$.
   b-En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   c-En déduire la limite de la suite(U_n).
4) soit (S_n)la suite definie sur $\mathbb{N}^*$par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ =$U_1+U_2+\ldots+U_n$.
   a) Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\leq S_n \leq n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

CHAPITRE 8 : DENOMBREMENT

EXERCICE N°1

Résoudre dans ℕ, les équations suivantes :

a) $A_n^2 + A_n^3 = 4n$
b) $C_n^5 = 17C_n^4$
c) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$
d) $A_n^3 = 90n$

EXERCICE N°2

A- Une enquête sur la lecture de trois revues x, y, z portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants :

* 60% lisent X, 50% lisent Y et 50% lisent Z

* 20% lisent Y et Z, 30% lisent X et Z et 30% lisent et X et Y

* 10% lisent les trois revues

Parmi ces 1 000 personnes :

1. Combien lisent deux de ses revues exactement ?
2. Combien ne lisent aucune de ces revues.

B) Démontrer que pour tous naturels n et p tel que :

a) n> p on a : $C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1}C_n^p$.

b) $1 \leq p \leq n-1$ on a: $C_{n+1}^{P+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$

EXERCICE N°3

Un sac contient 5 boules blanches, 2 boules rouges et 3 boules noires toutes indiscernables au toucher. Une main tire simultanément trois (3) boules du sac.

1) Combien y a t- il de tirages possibles ?
2) Combien y a t- il de tirages contenant :
   a) 3 boules de couleurs différentes
   b) 3 boules noires
   c) 2 boules rouges
   d) Aucune boule blanche

EXERCICE N° 4

Au cours de la Kermesse du lycée, une loterie est organisée. Sur 150 billets, 15 sont gagnants. Pour un tirage, Sosthène prend simultanément 5 billets. Déterminer :

1- Le nombre total de résultats de ce choix
2- Le nombre de résultats contenant :
   a) 0 billet gagnant,
   b) 2 billets gagnants ;
   c) Au plus 4 billets gagnants.

EXERCICE N°5

On pose que n et p sont des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

1-a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(x+1)^n$ puis en déduire :

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

   c) Vérifier que $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.

2-En déduire $S_1 = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p$

3- En remarquant que $p^2 = p(p-1)+p$, calculer $S_2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$

EXERCICE N°6

Un sac contient 9 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1- On tire 3 jetons successivement avec remise. On place les jetons côté à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombres de trois chiffres ?
2- On procède au tirage de 3 jetons successivement mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage
   Combien peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?
3- On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

EXERCICE N°7

Une urne contient 4 boules vertes et 6 boules bleues. On extrait simultanément trois boules.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages comportant exactement 2 boules vertes ?
c) Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucune boule verte ?
d) Combien y a t- il de tirages comportant au moins une boule verte ?

EXERCICE N°8

On considère un sac contenant 5 boules vertes et 6 boules bleues. On effectue quatre fois le tirage d'une boule sans remise en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages commençant par une boule verte
c) Combien y a t- il de tirages ne comportant que des boules vertes ?
d) Combien y a t- il de tirages contenant au moins une boule bleue ?

EXERCICE N°9

Le conseil d'administration d'une petite entreprise doit désigner son bureau comportant un président un trésorier et un secrétaire. Dix candidats se présentent.

1) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne peut occuper plusieurs postes ?
2) De combien de façons peut-on constituer ce bureau sachant qu'une personne ne peut pas occuper plus d'un poste ?

EXERCICE N°10

Une urne contient 5 boules noires, 3 boules blanches et 4 boules rouges

1- On tire successivement avec remise 5 boules
a) Combien y a t- il de tirages possibles ?
b) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 noires et 3 blanches ?
2- On tire successivement sans remise 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
3- On tire simultanément 5 boules. Répondre aux mêmes questions a) et b)
c) Combien y a t- il de tirages possibles comportant 2 rouges, 1 noire et 3 blanches ?

EXERCICE N°11

Une urne contient 7 boules dont 4 noires. On tire successivement avec remise 5 boules. Combien y a t- il de tirages contenant au moins 2 boules noires ?

EXERCICE N°12

Une urne contient neuf boules numérotées de 1 à 9.

1°) De combien de façon différentes est – il possibles de tirer trois boules simultanément de l'urne ?

2°) Combien de tirages font- ils apparaître trois numéros pairs ?

3°) Combien de tirages font ils apparaître deux numéros pairs et un impair

4°) Pour combien de tirages la somme des trois numéros est- elle paire ?

EXERCICE N°13

Dans une classe de 40 élèves un professeur a chargé un élève d'une enquête : les quarante élèves ont répondu soit par Oui, soit par non (Pas d'abstention) à chacune des deux questions posées :

A la question n°1 : Aimez- vous la lecture ? 20 élèves ont répondu Oui.

A la question n°2 : aimez-vous le sport ? 26 élèves ont répondu Oui.

On a par ailleurs dénombre 8 élèves n'aimant ni la lecture ni le sport.

1- Déterminer le nombre d'élèves qui aiment à la fois le sport et la lecture
2- Déterminer le nombre d'élèves qui n'aiment pas le sport.

EXERCICE N°14

Dans un lycée trois langues vivantes et trois seulement sont enseignées.

* 70 élèves n'étudient pas de langues vivantes

*520 apprennent l'allemand et parmi eux 380 étudiant également l'anglais et 170 l'espagnol

∗860élèves étudient l'anglais et parmi eux 420 étudient l'espagnol.

*610 élèves étudient l'espagnol et 110 d'entre eux étudiant les trois langues.

Trouvez le nombre total d'élèves dans ce lycée

EXERCICE N°15

A partir des mots Paul, Edith et MARIE, On forme un mot de trois lettres ayant ou non une signification de la façon suivante : $1^{ère}$ lettre est une lettre du mot PAUL, la $2^{ème}$ du mot EDITH et la $3^{ème}$ une lettre du mot MARIE.

1) Combien peut-on former de mots au total ?
2) Combien peut-on former de mots dont les trois lettres sont différentes ?

EXERCICE N°16

Un sac contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard trois jetons de ce sac.

$1^{ère}$ situation : tirages successifs avec remise. Les trois jetons sont tirés successivement, donc dans un ordre donné et remis dans le sac après chaque tirage.

a) Dénombrer tous les résultats possibles à l'issue de ce triple tirage
b) Dénombrer les résultats tels que le $2^{ème}$ tirage ne soit pas le jeton 3
c) Dénombrer les résultats pour lesquels le jeton 3 est tiré exactement deux fois.

$2^{ème}$ situation : tirages successifs sans remise

Les trois jetons sont tirés successivement mais sans remettre dans le sac les jetons tirés.

a) Dénombrer tous les résultats possibles
b) Dénombrer les résultats pour lesquels le $2^{ème}$ tirage n'est pas le jeton 3.
c) Dénombrer les tirages du (a, b, c) avec $a < b < c$.

EXERCICE N°17

1- De combien de façon peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier dans une assemblée de 12 personnes ?
2- Un Porte manteau comporte cinq patères alignées sans mettre deux manteaux l'un sur l'autre, combien a t- on de dispositions possibles pour : trois manteaux ? Cinq manteaux ?

CHAPITRE 9 : STATISTIQUES

EXERCICE N°1

On Effectue des essais sur un échantillon de deux cent vingt lames électriques afin de tester leur durée de vie. Cette durée est exprimée en heures. Les résultats sont regroupés par classes dans le tableau suivant

Durée en heures	[1100,1200[	[1200,1300[	[1300,1400[	[1400,1500[	[1500,1600[	[1600,1700[	[1700,1800[	[1800,1900[
Effectif	6	14	25	75	80	10	8	2

1. Quelle est la population étudiée ? le caractère étudié ? la classe médiane ? la classe modale ?
2. a) Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes
   b) Utiliser cette courbe pour déterminer la médiane

3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série

4- Calculer le pourcentage des lampes dont la durée de vie est dans l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$

5-Un autre lot de lampes électriques de même puissance, provenant d'un autre fabriquant est également testé.

La moyenne de durée de vie de 1400h et l'écart type de 140h.
Quel est celui des deux lots qui vous semble être le meilleur ?

EXERCICE N°2

Une entreprise artisanale fabrique chaque jour 250 pièces de tissu. Leur longueur est inégale, suivant la qualité du tissu ou l'équipe chargée de la fabrication. La production d'une journée peut être résumée par le tableau statistique suivant:

Longueur (en m)	[20 ; 24[	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Nombre de pièces	40	70	50	42	48

1) Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère étudié ? Calculer l'étendue de cette série.
2) Calculer la moyenne $\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ de cette série.

3) a) Construire l'histogramme et la courbe des effectifs cumulés croissants.
   c) Utiliser cette courbe pour déterminer la médiane M_e de cette série.

EXERCICE N°3

Les masses de 70 élèves d'une classe de 1ère sont données ci-dessous (en kg) :

60	69	61	54	64	65	56	58	75	68
75	51	66	64	69	53	57	58	66	63
58	73	57	67	64	51	66	73	73	58
69	65	70	58	68	54	75	69	63	70
57	64	72	77	51	65	65	55	68	64
64	65	77	54	64	61	60	63	75	76
75	58	70	72	64	63	60	69	62	71

1- Regrouper ces données en classes d'amplitude 5 dont la première est [50,55[
2- Calculer la moyenne$\bar{x}$, la variance V et l'écart type σ de la nouvelle série statistique ainsi obtenue.
3- Déterminer le pourcentage des élèves ayant une masse comprise entre $\bar{X}$- σ et $\bar{X}$+ σ.

NB : Tous les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICE N°4

Lors D'une enquête portant sur 1300 personnes on a demandé le temps passé par jour devant le téléviseur. On a obtenu le tableau suivant :

Temps mis (en h)	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[	[6,7[	[7,8[
Effectifs	170	309	432	221	103	41	10	14

1- Quel est l'étendue le caractère, la classe médiane de cette série ?
2- Calculer la moyenne$\bar{x}$, la variance V et l'écart typeσ.
3- Déterminer le pourcentage des personnes se trouvant dans l'intervalle [$\bar{x}$ - σ, $\bar{x}$+ σ]
4- Construire le diagramme en bâton les effectifs cumulés décroissants

NB : Tous les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut

EXERCICE N°5

On veut étudier l'effet d'un produit P sur une tumeur cancéreuse chez le rat. On greffe cette tumeur à 120 rats, puis on forme deux groupes de 60 animaux, la répartition des rats étant aléatoire.

Le premier groupe noté A, reçoit le produit à l'aide d'une injection en solution dans du sérum physiologique, alors que le second groupe, noté B, reçoit le sérum uniquement.

On s'attache à la durée de survie de ces rats à partir de la greffe :

Durée de survie en mois	[0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	**[5,6[**	**[6,7[**
Effectifs groupe A	0	1	6	11	25	12	5
Effectif groupe B	2	3	9	19	16	08	3

1. Calculer la moyenne et l'écart type de la série A
2. Calculer la moyenne et l'écart type de la série B
3. Calculer pour chacune de ses séries les pourcentages d'effectifs se trouvant pas dans l'intervalle $[\bar{x}$ - 2σ, $\bar{x}$+ $2\sigma]$. Le produit P est-il efficace ?

EXERCICE N°6

Pour étudier l'effet de la caféine sur la fréquence cardiaque, on réalise l'expérience suivante : Douze sujets prennent une tasse de café décaféiné puis, vingt-quatre heures plus tard, une tasse du même café avec caféine. Ils ignorent si le café contient de la caféine ou non. La fréquence cardiaque, en nombre de battements par minutes, est mesurée, à chaque fois, 2 heures après absorption du café.

Le tableau suivant indique les résultats obtenus

Sujet n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence cardiaque café décaféiné : xi	82	96	88	62	66	74	64	76	80	72	91	68
Fréquence cardiaque que café normal : yi	80	90	92	64	72	76	74	84	90	92	89	84

On note x_i la fréquence cardiaque du sujet n°i)après absorption de café décaféine et y_i après absorption de café normal. On pose $Z_i= y_i-x_i$. Par exemple $Z_1= 80-82=-2$.

1- Dresser le tableau statistique de la série $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$.
2- Calculer la moyenne $\bar{Z}$ et l'écart type σ_z de la série statistique$Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$.
3- On pose $t= \frac{\bar{Z}\sqrt{n}}{\sigma_z}$, n désigne le nombre de sujets (n= 12). Lorsque t >2,2 les statistiques médicaux estiment que la caféine augmente de façon significative la fréquence cardiaque deux heures après son absorption.

Calculer t et conclure

NB : Donner tous les résultats à 10^{-2} pris par défaut.