maxi MATHS
Le Manuel

Mathématiques

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

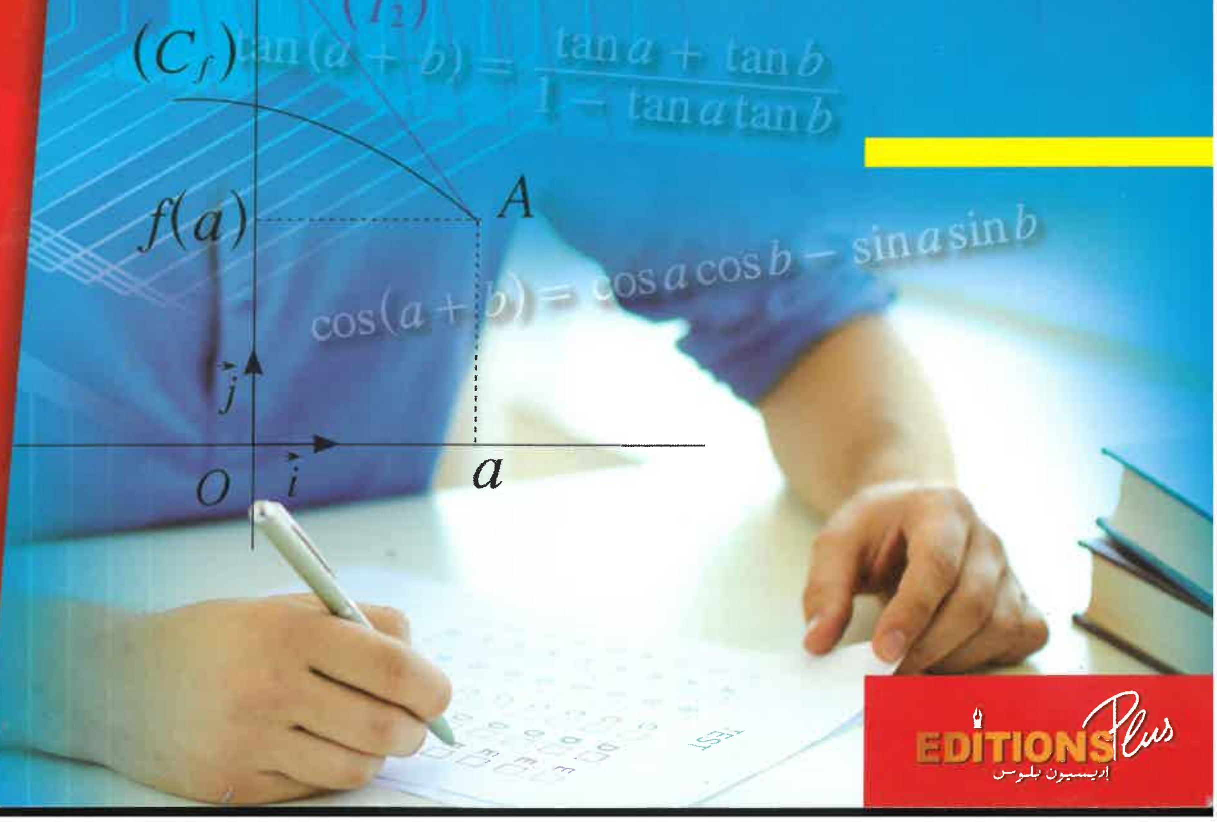
$g \circ f$

Conforme au Programme Marocain

1ère Bac S-exp

1ère Année du Baccalauréat

Sciences Expérimentales
et ses filières
Sciences et Technologies Industrielles
et ses filières



EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

maXi MATHS
Le Manuel

Mathématiques

1ère Bac S-exp

Conforme au Programme Marocain

1ère Année du Baccalauréat
Sciences Expérimentales
et ses filières
Sciences et Technologies Industrielles
et ses filières

Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Maxi maths le manuel Mathématiques
Édition: 2021
Dépôt Légal: 2017MO0901
ISBN: 978-9954-682-33-3
ISSN: 2508-9838

Préface

Cher(e) élève,

Tu es, cette année, sur le point de passer à la 2ème étape de ton cursus de formation et de qualification pour l'obtention du baccalauréat sciences expérimentales. Ceci exige plus d'efforts en vue de rendre opérationnels tes acquis en la matière. Afin d'atteindre cet objectif, nous mettons entre tes mains ce manuel qui s'inscrit dans les directives du Pacte national de l'éducation et de la formation, en respectant le programme tel qu'il est dicté par le cahier de charges prévu par le ministère de l'Education nationale et de la formation professionnelle .

Cher(e) élève,

Nous avons pris nos précautions pour que ce manuel soit un outil incontournable pour ton auto-formation, et auto-évaluation et qu'il te permet de t'ouvrir sur des champs de connaissances autres tels que :

- Faire de toi un acteur dans les différentes étapes de ton apprentissage, en abordant les activités d'introduction.
- Te fournir de nouvelles connaissances en la matière «définitions, propriétés...»
- Te doter de compétences et techniques pour affronter avec souplesse les différentes situations dans la partie intitulée «pour comprendre».
- Évaluer personnellement tes acquis du tronc commun pendant la résolution des activités préliminaires.
- Une pause de diagnostique te permettant de tester tes acquis, techniques et méthodes conçus dans les leçons et te doter de la capacité de faire le bon choix pendant le travail, dans la partie intitulée «je teste mes apprentissages».
- Des exercices et problèmes variés qui visent l'application du cours, la consolidation des acquis, l'approffondissement de la notion developpée et l'intégration des connaissances.
- Afin de consolider tes capacités dans l'emploi des outils de la technologie et de la communication dans le domaine des mathématiques, nous avons réservé des pages de ce manuel pour te faciliter l'usage de la calculatrice programmable et de quelques logiciels informatiques à savoir « Excel, Geogebra, Calculatrice ».

Cher(e) élève,

Nous espérons que tu pourras trouver dans ce manuel les moyens nécessaires à l'amélioration et à la consolidation de tes capacités, à affronter et résoudre les différents problèmes de mathématiques rencontrés lors de l'année en cours pour un avenir prometteur.

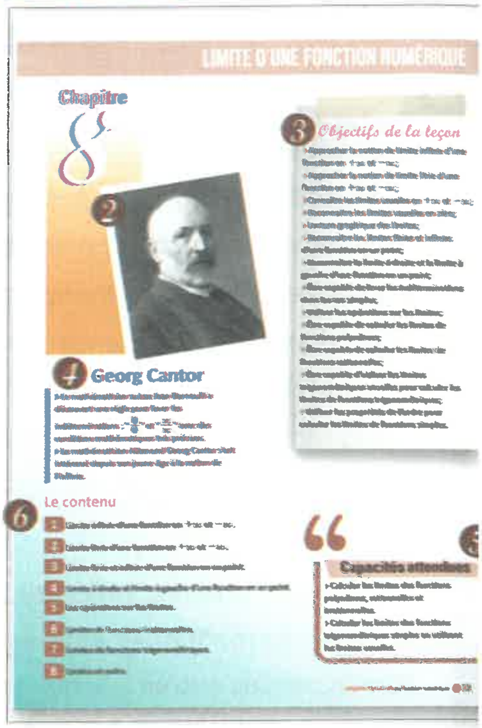
Les auteurs

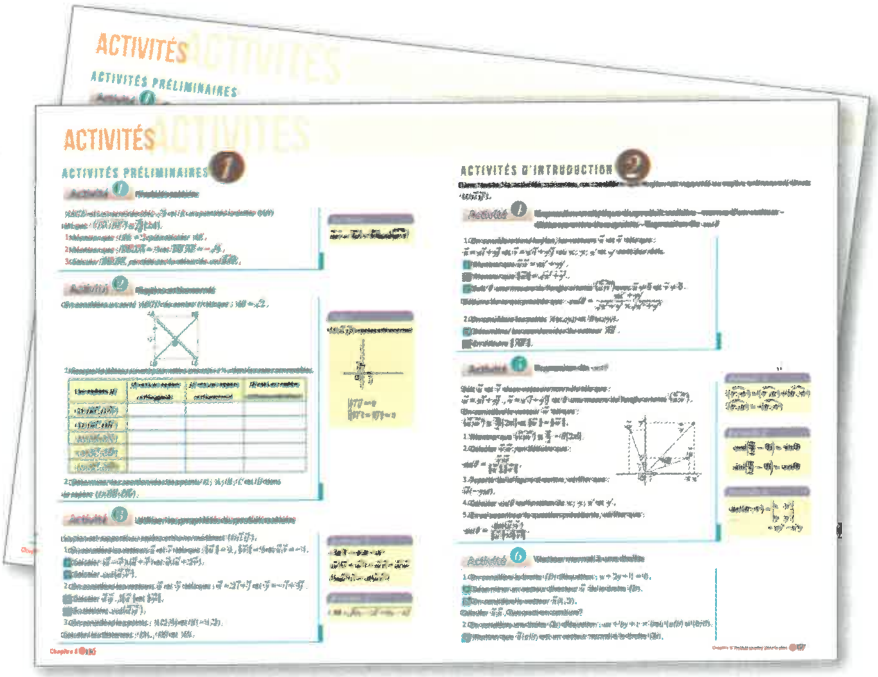
Mode d'utilisation

L'ouverture de chapitre

Cette page contient :

1. Titre de la leçon
2. Photo d'un mathématicien ou d'un thème en relation avec le chapitre
3. Objectifs visés
4. Aperçu historique
5. Capacités attendues (prévues)
6. Le contenu de la leçon





Les activités

Ces pages contiennent :

1. **Activités préliminaires (ou de révisio**
Evocation de prérequis et en faire le point de départ pour la construction des nouvelles connaissances.

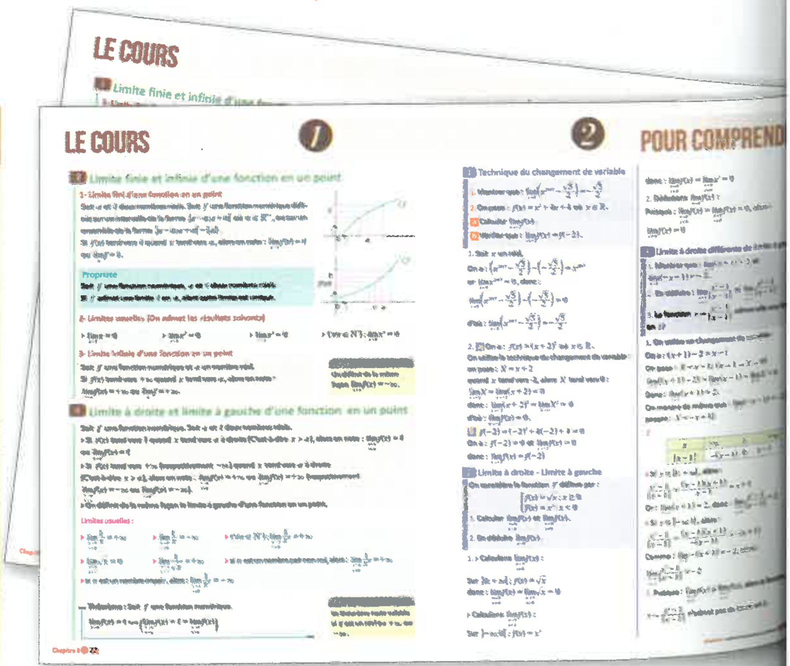
2. **Activités d'introduction :**
Facilitent et aident à établir de nouveaux concepts.
Ou : Instauration de nouveaux conce

Le Cours

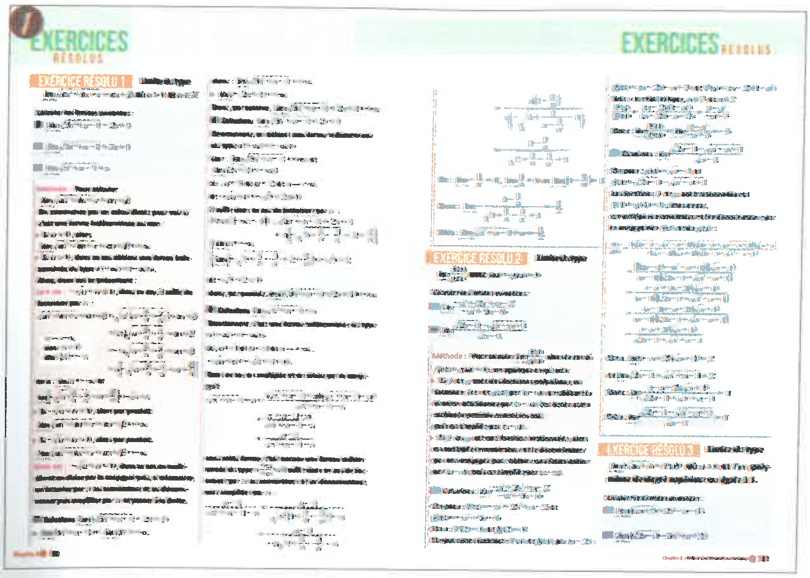
Ces pages contiennent :

1. **Le cours:** Cette page vous fournit les connaissances essentielles
   - Définition
   - Propriétés
   - Info
   - Règles
   - Exemples

2. **Pour comprendre:** Dans cette page on trouve des exercices résolus accompagnés de commentaires qui vous permettent d'assimiler les connaissances de la page en face. On y trouve parfois, des activités complémentaires.



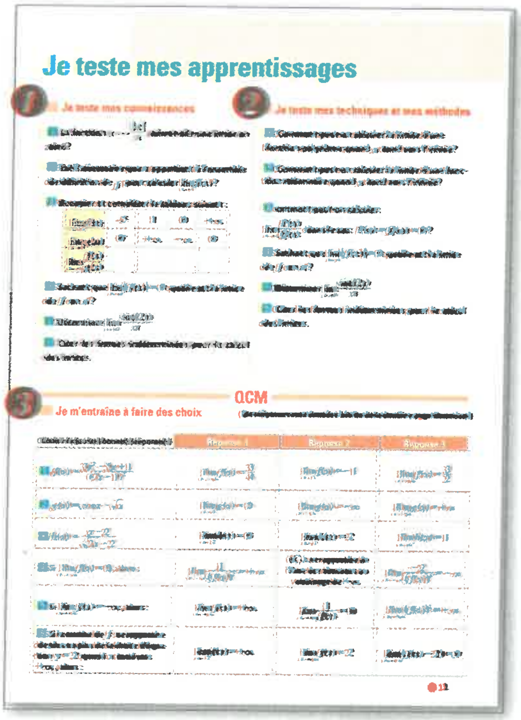
de mon manuel



Exercices Résolus

1 Exercices résolus:

Ces pages contiennent des exercices résolus visant à soutenir vos apprentissages, et vous présentent des techniques qui vous aident à résoudre des exercices.



Je teste mes apprentissages

Cette page est une pause évaluative qui est formée de :

1 Je teste mes connaissances:

- Auto évaluation pour tester les acquis.
- Un arrêt sur quelques lacunes.
- Questions sur les définitions, les règles et les propriétés vues dans la leçon.

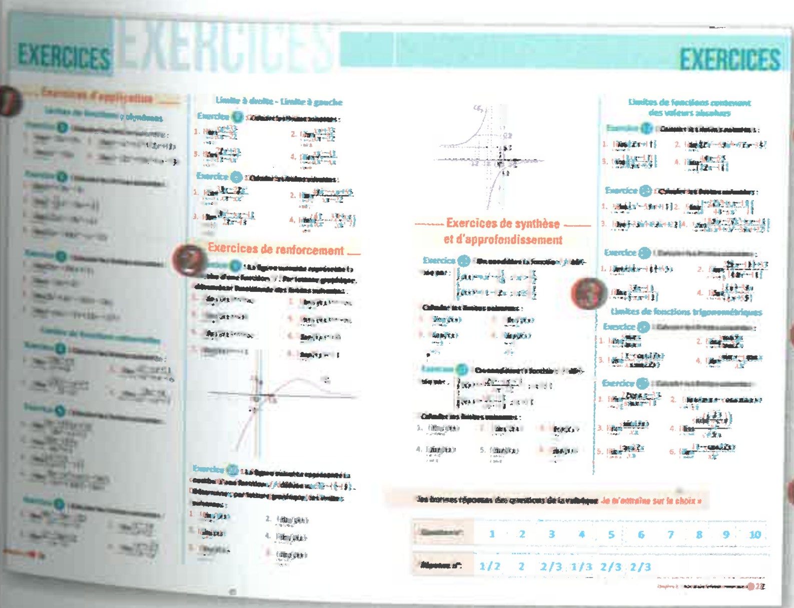
2 Je teste mes techniques et mes méthodes:

- S'entraîner et pratiquer des méthodes pour résoudre certains exercices.
- L'utilisation de méthodes appropriées pour résoudre certains problèmes.
- S'entraîner sur les raisonnements mathématiques.

3 Je m'entraine à faire des choix:

Des question à choix multiples

- Développent chez l'élève la capacité à choisir par la pratique.
- Affronter des problèmes et réviser les solutions proposées.
- Insister sur les réponses, surtout celles qui se ressemblent.



Les exercices

1 Exercices d'application:

Des exercices regroupés «par thème» selon les parties de la leçon.
Pour les résoudre, on doit appliquer directement les règles, les propriétés et les définitions préconçues dans la leçon.

2 Exercices de renforcement:

Exercices visant l'amélioration des apprentissages et dont la résolution exige la mise en oeuvre des compétences et techniques d'un niveau supérieur.

3 Exercices d'approfondissement et de synthèse:

Exercices visant l'intégration des acquis, leurs résolutions nécessitent des compétences et des techniques en relation avec toutes les leçons déjà étudiées.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Activité 1 Calcul numérique

Simplifier et calculer:

$A=\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1$ $\quad B=3\times\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$C=\sqrt{\frac{4^3+5\times4^2}{2^8}}$ $\quad D=3\sqrt{2}-4\sqrt{50}+2\sqrt{128}$

$E=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{20}}\times\frac{\sqrt{55}}{3}\times\sqrt{75}$ $\quad F=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{3}{\sqrt{3}}$

Activité 2 Développement et factorisation - Identités remarquables

1 Soit a un nombre réel.
Développer et simplifier:
$A=(a^2-a+1)(a-1)$; $B=(2a-3)\left(3a+\frac{1}{3}\right)$

2 **a.** Développer et simplifier
$C=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ et $D=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

b. Montrer que $\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\in\mathbb{N}$

3 Montrer que $((9+\sqrt{5})^3+(9-\sqrt{5})^3)\in\mathbb{N}$

4 Factoriser:
$G=(x^2-2x+1)-(2x+1)(x-1)$;
$H=(2x-6)x+(x^2-9)$;
$I=(x^2-5)-4x(x+\sqrt{5})$;
$J=(x^3-1)+3x(x^2-1)$.

Activité 3 Équations et systèmes

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a. $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=x$ **b.** $2\sqrt{2}x-1=3x$

c. $|2x-1|=0$ **d.** $|3x-1|=|2x+1|$

e. $|2x+5|=2x+5$ **f.** $|x-1|=2x$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a. $x^2-5x+15=0$ **b.** $x^2-7x+12=0$

3 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-x-6=0$

b. En déduire les solutions des équations suivantes:
$x-\sqrt{x}-6=0$ et $x^2-\frac{6}{x^2}-1=0$

4 **a.** Résoudre le système: $\begin{cases}2x+3y=7\\3x-5y=1\end{cases}$

b. Montrer que le système: $\begin{cases}4x+my=7\\2mx-y=1\end{cases}$
admet une seule solution pour tout réel m.

Activité 4 Ordre dans $\mathbb{R}$

1 Comparer les nombres X et Y dans chaque cas

a. $X=2\sqrt{5}-5$ et $Y=\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

b. $X=5\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ et $Y=7\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

2 Soit a et b deux réels tels que:
$-3<2a-1<5$ et $\left|b-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$

a. Encadrer a et b.

b. Encadrer les nombres $a-2b$ et ab

3 Soit x un nombre réel tel que $0<x<1$.
On pose $y=\frac{1+\sqrt{x}}{2}$.

a. Montrer que $\frac{1}{2}<y<1$.

b. Monter que $\frac{y-1}{x-1}=\frac{1}{2(1+\sqrt{x})}$.

c. Montrer que $|y-1|<\frac{1}{2}|x-1|$.

d. En déduire que 1 est une valeur approchée du nombre $\frac{1+\sqrt{0,8}}{2}$ à 10^{-1} près.

Activité 5 Les inéquations

1 Déterminer le signe de $A(x)$ suivant les valeurs de x dans chaque cas:

a. $A(x)=3x^2-4x+1$; **b.** $A(x)=-2x^2+x+1$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a. $(x-2)(1-3x)>0$ **b.** $1-2x\leq0$.

c. $-\frac{2x^2+5x-1}{x-3}\leq2$ **d.** $\frac{x+1}{x}\leq\frac{2}{x+1}$.

3 Comparer les nombres $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{x-1}{2x+1}$ suivant les valeurs de x.

Activité 6 Les polynômes

1 Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-a)$ dans chaque cas:

a. $P(x)=3x^3+2x^2-x+5$ et $a=2$.

b. $P(x)=-2x^4+x^2-1$ et $a=1$.

c. $P(x)=x^3-3x^2-x-2$ et $a=-3$.

2 On considère le polynôme
$Q(x)=x^2-x+(\sqrt{2}-2)$.
Vérifier que $\sqrt{2}$ est une racine du polynôme $Q(x)$, puis déterminer l'autre racine de $Q(x)$.

3 On considère le polynôme
$P(x)=x^3-3x^2+\sqrt{2}x+4-2\sqrt{2}$.

a. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-2)$

b. Déterminer les nombres a et b tels que:

$P(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$ pour tout réel x.

c. Ecrire $P(x)$ sous forme de produit de polynomes du premier degré :

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$x\sqrt{x}-3x+\sqrt{2x}+4-2\sqrt{2}=0$.

GÉOMÉTRIE PLANE

Activité 7 Calcul vectoriel

Soit ABC un triangle. M,N et P sont trois points tels que:

M est le milieu du segment $[AC]$,

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1 Faire une figure.

2 **a.** Écrire $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Vérifier que $3\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{BP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

3 En déduire que P est le point d'intersection des droites (BC) et (MN).

Activité 8 Droite dans le plan

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(1;2)$, $B(3;1)$ et $C(2,-1)$.

1 Montrer que les points A,B et C ne sont pas alingés.

2 Montrer que le triangle ABC est isocèle.

3 Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$.

4 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par B et parallèle à la droite (D).

5 Déterminer les coordonnées du point P intersection de la droite (AB) et la droite définie par la représentation paramétrique suivante:

$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Activité 9 Produit Scalaire

Soit ABC un triangle tel que $AB=6$.

1 On suppose que ABC est équilatéral

a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

2 On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-5$

Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

3 On suppose que ABC est isocèle de sommet C.

Soit I le milieu du segment $[AB]$ tel que $IC=4$

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{IC}$.

4 On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3\sqrt{2}$ et $AC=2$.

a. Calculer $\cos\widehat{BAC}$, en déduire la valeur du $\sin\widehat{BAC}$.

b. Calculer BC.

Activité 10 Calcul trigonométrique

1 Soit x un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $A=\sin x.\cos x\left(\tan x-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

a. Montrer que $A=\sin^2 x-\cos^2 x$

b. Sachant que $A=\frac{3}{5}$; Montrer que $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}$, puis déduire la valeur de $\tan x$.

2 Simplifier les expressions suivantes:

$A=\cos(\pi-x)+4\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)-3\cos x$.

$B=\sin x[(2\sin x-\cos x)^2+(2\cos x+\sin x)^2]$.

Activité 11 Calcul trigonométrique

1 On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$(E):(2\cos x-\sqrt{3})\tan x=0$

a. Déterminer D l'ensemble de définition de l'équation (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

c. Déterminer les solutions de (E) qui appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{41\pi}{3};\frac{-35\pi}{3}\right]$

2 Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation: $(2\cos x-\sqrt{3})\tan x>0$.

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Activité 12 Géneralités sur les fonctions

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

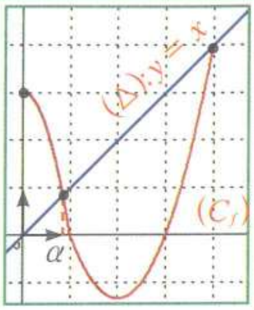
1 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq 0$.

2 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq x$ en fonction de α

3 On suppose que f est une fonction paire.

a. Recopier et compléter la figure.

b. Déduire le tableau des variations de f.



Activité 13 Fonctions de références

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $g(x) = \dfrac{3-x}{-x+2}$

1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.

2 Étudier les variations de f sur les intervalles I et J tels que $I = [2;+\infty[$ et $J =]-\infty;2]$.

3 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) représentative de la fonction f.

4 Déterminer les coodonnées de l'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

5 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe C_g représentative de la fonction g.

6 Dresser le tableau des variations de g.

7 Constuire (C_f) et (C_g) dans le même repère.

Activité 14 Fonctions de références

Soit f et g deux fonctions définies par: $f(x) = x^2 + 4x$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$

(C) et (C') sont les courbes réspectives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Déterminer l'intersection de chacune des courbes (C) et (C') avec l'axe des abscisses.

2 Calculer $f(-3)$; $g(-3)$; $f(-5)$ et (-5)

3 **a.** Développer et réduire $(x+2)^2 - 4$, en déduire la nature et les éléments caractéristique de la courbe (C)

b. Construire (C) dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4 **a.** Ecrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = a + \dfrac{b}{x+4}$, puis dresser le tableau des variations de g.

b. Sans faire les calculs, comparer les nombres: $\dfrac{0,123456789}{4,123456789}$ et $\dfrac{0,123456788}{4,123456788}$.

5 Construire (C') dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Utiliser une autre couleur).

6 Résoudre graphiquement l'inéquation: $x\left(\dfrac{1}{x+4} - x - 4\right) \geq 0$.

7 Soit h la fonction définie par $h(x) = x(4 - |x|)$.

a. Montrer que h est une fonction impaire.

b. Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions le l'équation: $x|x| - 4x + m = 0$.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Activité 15 Géométrie dans l'espace

Soit $SABCD$ une pyramide de base carrée $ABCD$ de centre O.

I et J sont respectivement les milieux des segments $[SA]$ et $[SB]$.

1 Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (SCD).

2 Déterminer l'intersection des plans (IAC) et (SAD).

3 Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).

4 On suppose que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

a. Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (SOC).

b. En déduire que les plans (SAC) et (SOC) sont orthogonaux.

Activité 16 Géométrie dans l'espace

Soit $ABCD$ un carré. M et N sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AD]$, et soit S un point de la droite passant par M et orthogonale au plan (ABC). P étant le milieu du segment $[SB]$ $(S \neq M)$

1 **a.** Montrer que $(MN) /\!/ (SBD)$

b. Déterminer l'intersection des plans (SBD) et (MNP).

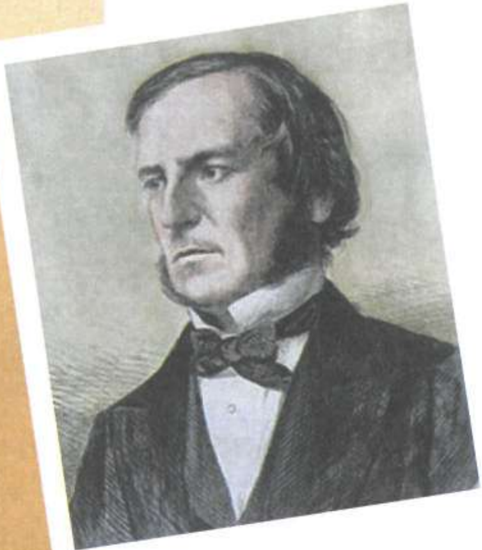
2 Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SMN).

3 Montrer que: $(AD) \perp (SAB)$.

4 Montrer que: $(AC) \perp (SMN)$.

NOTIONS DE LOGIQUE

Chapitre 1



George BOOLE
1815-1864

Mathématicien britannique, créateur de la logique mathématique moderne, Boole applique à la logique les méthodes de l'algèbre binaire, qui n'admet que les deux valeurs ١ et ٠ (vrai et faux). Au-delà de sa valeur théorique, l'algèbre booléenne, qui unifie la logique et les mathématiques, jette les bases de l'électronique numérique et de l'informatique.

Objectifs de la leçon

- Connaître la définition d'une proposition.
- Déterminer la valeur de vérité d'une proposition.
- Connaître la négation d'une proposition.
- Connaître la conjonction et la disjonction de deux propositions.
- Connaître l'implication et l'équivalence de deux propositions.
- Utiliser les opérations sur les propositions.
- Déterminer la négation d'une implication.
- Connaître la définition d'une fonction propositionnelle.
- Connaître et utiliser les quantificateurs.
- Connaître les raisonnements mathématiques (Raisonnement par l'absurde - Raisonnement par contraposée - Raisonnement par disjonction des cas - Raisonnement par équivalence - Raisonnement par récurrence).
- Utiliser les raisonnements mathématiques.

Le contenu

“

Capacités attendues

- Être capable d'utiliser le raisonnement mathématique convenable suivant la situation étudiée.
- Être capable de mener un raisonnement mathématique lucide et logique.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 1 Proposition

1. Recopier le tableau suivant et mettre une croix dans la case qui convient.

		Vrai	Faux
1	Tout nombre pair est divisible par 4		
2	La somme de deux nombres impairs est un nombre pair		
3	$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel		
4	La translation conserve les distances		
5	La fonction $x \mapsto x^2$ (où $x \in \mathbb{R}$) est une fonction paire.		
6	Toutes les droites orthogonales dans l'espace sont sécantes.		

2. Y-a-il dans ce tableau des phrases qui sont à la fois vraies et fausses?

Les phrases mathématiques qui figurent dans le tableau précédent sont des énoncés mathématiques corrects et ayant un sens qui peut être soit vrai, soit faux, et sont appelées «propositions mathématiques».
Si une proposition est vraie, on note par (V) sa valeur de vérité et si elle est fausse, on note par (F) sa valeur de vérité .

Activité 2 Fonction propositionnelle

On considère l'expression : $(x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x \geq 0$.

1. Pour $x = 2$ on obtient « $2^2 - 2 \geq 0$ » c'est une proposition vraie.
Pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient « $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq 0$ » c'est une proposition fausse.
L'expression « $x^2 - x \geq 0$ » est-elle vraie pour :

a $x = -1$? **b** $x = \frac{1}{3}$?

c $x = 3$? **d** $x = \frac{2}{5}$?

L'expression : « $(x \in \mathbb{R}) ; x^2 - x \geq 0$ » est vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autre valeurs. On dit que cette expression est une fonction propositionnelle.

2. Soit E l'ensemble des solutions de l'inéquation: $x^2 - x \geq 0$ où $x \in \mathbb{R}$.

a Déterminer l'ensemble E.

Pour tout $x \in E$, « $x^2 - x \geq 0$ » est une proposition vraie et on écrit : $(\forall x \in E) ; x^2 - x \geq 0$
qui se lit : «pour tout x appartenant à E, $x^2 - x \geq 0$ ».

Info :
Le symbole « $\forall$ » est appelé quantificateur universel qui se lit : pour tout ou quel que soit.
La proposition : « $(\forall x \in E) ; A(x)$ » se lit : «Pour tout x appartenant à E, $A(x)$ » ou «Quel que soit x de E, $A(x)$ ».

b Les propositions suivantes sont-elles vraies?

- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, x^2 - x \geq 0$
- $(\forall x \in \mathbb{Q})\,;\, x^2 - x \geq 0$

3. Il existe des éléments de l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui vérifient l'inéquation:
« $x^2 - x \geq 0$ » (par exemple $x = \frac{3}{2}$)
On exprime cette phrase par l'écriture : $(\exists x \in \mathbb{Q})\,;\, x^2 - x \geq 0$.
Les propositions suivantes sont-elle vraies?

- $(\exists x \in \mathbb{N})\,;\, x^2 - x \geq 0$
- $(\exists x \in \mathbb{Q})\,;\, x^2 - 3 \geq 0$

« $\exists x \in E$ » se lit : il existe au moins x de E.

Info :
- Le symbole « $\exists$ » est appelé quantificateur existentiel qui se lit : il existe au moins :
- La proposition : « $(\exists x \in E)\,;\, A(x)$ » se lit : il existe au moins un élément x de E tel que $A(x)$; cela veut dire qu'il existe au moins un élément x de E pour lequel $A(x)$ est vraie.

Activité 3 utiliser les connecteurs logiques "ou" et "et"

Recopier les expressions suivantes et les compléter par l'un des liens logiques suivants: «**ou**» ou «**et**»

1. $x(x-1) = 0$ signifie que : $x = 0 \,.....\, x = 1$.
2. $ABCD$ est un losange signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .... $AB = BC$.
3. ABC est un triangle équilatéral signifie que : $AB = BC$ .... $AB = AC$.
4. Soit x un réel, on a : $|x| = x$ .... $|x| = -x$
5. Soit x et y deux réels. $x \leq y$ signifie que : $x < y$ .... $x = y$.
6. Soit x un réel. $|x| < 1$ signifie que : $x < 1$ .... $x > -1$.
7. Soit x un réel. $|x| \geq 1$ signifie que : $x \geq 1$ .... $x \leq -1$.

Activité 4 Négation d'une proposition

Dans une discussion entre Fatima et Ahmed, qui consiste à ce que Fatima (nie) donne la négation de tout ce que dit Ahmed, et qu'Ahmed donne la négation de tout ce que dit Fatima.
Recopier et compléter le tableau suivant :

Le dialogue de Fatima	Le dialogue d'Ahmed	Valeur de vérité du dialogue de Fatima	Valeur de vérité du dialogue d'Ahmed
$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$		Faux	
	$\sqrt{7} + \sqrt{2} < 5$		
114516 est multiple de 4			
	$\sqrt{(-2)^2} = -2$		

ACTIVITÉS

Activité 5 L'implication logique - L'équivalence logique

I) Soit ABC un triangle rectangle en A et non isocèle.

On considère les propositions suivantes :

p : « ABC est un triangle rectangle en A ».

q : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »

r : « ABC un triangle isocèle rectangle en A »

s : « $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ »

- «Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » est une proposition vraie.

On exprime ceci en disant : si la proposition p est vraie, alors la proposition q est vraie. On dit aussi : la proposition p implique la proposition q ; et on écrit : $p \Rightarrow q$.

1. Les implications suivantes sont-elles vraies?

- $q \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow r$
- $p \Rightarrow s$
- $s \Rightarrow p$

2. La proposition : « ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » est une proposition vraie (c'est le théorème de Pythagore).

On exprime ceci en disant : La proposition p est équivalente à la proposition q ; et on écrit : $p \Longleftrightarrow q$.

II) Déterminer, parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies :

a Soit n un entier naturel; (n pair) $\Longleftrightarrow$ ($n+1$ impair)

b Soit x un réel; $(x = 1) \Longleftrightarrow (x^2 = 1)$

c Soit x un réel non nul; $\left(\frac{1}{x} < 0\right) \Longleftrightarrow (x > 0)$

d Soit A, B et I trois points du plan.

$$(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}) \Longleftrightarrow (I \text{ milieu de } [AB]).$$

Henri Poincaré
(1854-1912)

Info :
Le symbole « $\Longleftrightarrow$ » se lit : «équivalent» ou «équivaut à» ou «si et seulement si».

Activité 6 Raisonnement par disjonction des cas

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E): $|x+1| + |x-1| = |x|$

1. **a** Ecrire $|x+1|$, $|x-1|$ et $|x|$ sans le symbole de la valeur absolue suivant les valeurs de x.

b Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant les résultats de la question a).

x	$-\infty$ -1	0	1	$+\infty$
$\lvert x+1 \rvert$				
$\lvert x-1 \rvert$				
$\lvert x \rvert$				

2. Résoudre l'équation (E) dans chacun des cas suivants en s'aidant du tableau précédent :

a $x \in]-\infty; -1]$ **c** $x \in [0;1]$

b $x \in [-1;0]$ **d** $x \in [1; +\infty[$

La résolution de l'équation (E) nécessite de réduire et simplifier l'expression, puis résoudre dans des intervalles précis.

Ce type de raisonnement est appelé raisonnement par disjonction des cas.

Peono Guiseppe Peano (1858-1932)

Activité 7 Raisonnement par équivalence

On propose deux raisonnements dans lesquels on va utiliser le symbole « $\Longleftrightarrow$ ». L'un de ces raisonnements est faux, dire lequel en justifiant la réponse.

▸ Soit x un réel,

On a : $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Longleftrightarrow x^2+3 \geq 4$

$\Longleftrightarrow x^2 \geq 1$

$\Longleftrightarrow x \geq 1$

▸ Soit x un réel strictement positif,

On a : $x+\dfrac{1}{x} \geq 2 \Longleftrightarrow x+\dfrac{1}{x}-2 \geq 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$

$\Longleftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

Info : Ce type de raisonnement s'appelle raisonnement par équivalence.

Activité 8 Raisonnement par récurrence

On considère la propriété $P(n): 2^n > n$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que la proposition $P(0)$ est vraie.

2. Montrer que: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est une proposition vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En utilisant le raisonnement déductif, en déduire que $P(5)$ est vraie.

La proposition $P(0)$ est vraie et la proposition $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; on admet dans ce cas que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce type de raisonnement est appelé raisonnement par récurrence.

Info : Pour démontrer ce type de propriétés, les mathématiciens (surtout Henri Poincaré et Peano) ont découvert «l'axiome de récurrence» ce que l'on appelle aussi «le principe de récurrence».

Info : Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et on montre que la proposition q est vraie.

LE COURS

1 Propositions - opérations sur les propositions (Les connecteurs logiques)

1- Propositions

DÉFINITION

▸ Tout énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vrai, soit faux, est une proposition (ou assertion).

Une proposition est notée : p, q, r, s..., A, B, C... etc

On désigne par 1 ou V la valeur de verité d'une proposition vraie et par 0 ou F la valeur de verité d'une proposition fausse.

p
1
0

▸ Une table de vérité est une table qui indique si une proposition p, construite à partir d'autres propositions A, B, C... est vraie ou fausse suivant les valeurs de vérité de A, B, C...

2- Opérations sur les propositions (Les connecteurs logiques)

• **Négation d'une proposition**

DÉFINITION

On note «non p» ou « $\overline{p}$ » ou « $\neg P$ » La négation d'une proposition p, c'est-à-dire la proposition qui est vraie si p fausse, et fausse si p est vraie.

table de vérité de (non p)

p	(non p)
1	0
0	1

Remarque

Une proposition est soit vraie, soit fausse, et elle ne peut être à la fois vraie et fausse.

• **Conjonction de deux propositions**

DÉFINITION

La conjonction de deux propositions p et q, notée « p **et** q » ou « $p \wedge q$ » est vraie si les deux propositions p et q sont vraies.

table de vérité de (p et q)

p	q	(p et q)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

• **Disjonction de deux propositions**

DÉFINITION

La disjonction de deux propositions p et q, notée (p **ou** q) ou ($p \vee q$) est vraie si au moins une des deux propositions p ou q est vraie.

Table de vérité de (p ou q)

p	q	p ou q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Remarque

a) (p *et* $\overline{p}$) est une proposition fausse. b) (p *ou* $\overline{p}$) est une proposition vraie.

• **L'implication de deux propositions**

DÉFINITION

Soit p et q deux propositions. L'implication de q par p, notée ($p \Rightarrow q$), se lit « p implique q » (ou si p alors q) est vraie si p et q sont vraies ou si p est fausse.

Table de vérité de ($p \Rightarrow q$)

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque

1. Si p est vraie et ($p \Rightarrow q$) vraie alors q est vraie.
2. L'implication ($q \Rightarrow p$) est l'implication réciproque de l'implication ($p \Rightarrow q$).

1 Négation d'une proposition

Donner la négation des propositions suivantes :
▸ $p:(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5$ ▸ $q:\pi+1>4$ ▸ $r:\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$

On a :
▸ $\overline{p}:(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\neq 5$ ▸ $\overline{q}:\pi+1\leq 4$ ▸ $\overline{r}:\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$

2 Valeur de vérité d'une proposition

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : ▸ $p:\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$
▸ $q:\sqrt{2}+\sqrt{6}\geq\sqrt{8}$ ▸ $r:\sqrt{3}-\sqrt{2}=1$

▸ p est une proposition fausse car :
$-1\leq\cos\frac{\pi}{17}\leq 1$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$

▸ q est une proposition vraie car :
$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=8+2\sqrt{12}$

On a en général pour tout $a\geq 0$ et $b\geq 0$:
$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

▸ r est une proposition fausse car :
$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{3}$ donc : $\sqrt{2}+1>\sqrt{3}$ et par suite $\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$

3 Utiliser une table de vérité

1. Montrer à l'aide d'une table de vérité que les deux propositions : $(p\Rightarrow q)$ et $(\overline{p}$ ou $q)$ ont la même valeur de vérité.
2. En déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :
▸ $p:(\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{2}>1)$ ▸ $q:(\pi>3\Rightarrow\pi^2=10)$

1. On a :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ ou q	$p\Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Donc $(\overline{p}$ ou $q)$ et $(p\Rightarrow q)$ ont la même valeur de vérité, dans ce cas on dit qu'elles sont équivalentes.

2. ▸ $p:(\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{2}>1)$ s'écrit $(\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}\ ou\ \sqrt{2}>1)$

Donc p est une proposition vraie ($\sqrt{2}>1$ est une proposition vraie) de même que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$).

▸ $q:(\pi>3\Rightarrow\pi^2=10)$ s'écrit $(\pi\leq 3\ ou\ \pi^2=10)$ est une proposition fausse car $\pi\leqslant 3$ est fausse et $\pi^2=10$ est fausse.

4 Utiliser une table de vérité

1. Soit p et q deux propositions.
Montrer à l'aide d'une table de vérité que $(\overline{p\ et\ q})$ et $(\overline{p}\ ou\ \overline{q})$ ont la même valeur de vérité.
2. En déduire la négation de chacune des propositions suivantes :
Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$; m et n deux entiers naturels.
« $u:a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$ »
v : « $mn=m+n$ ou $mn>n+m$ »

1. On a :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$(p\ et\ q)$	$(\overline{p\ et\ q})$	$(\overline{p}\ ou\ \overline{q})$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Donc, à partir de cette table de vérité, on conclut que $(\overline{p\ et\ q})$ et $(\overline{p}\ ou\ \overline{q})$ ont la même valeur de vérité.

On a de même $(\overline{p\ ou\ q})$ et $(\overline{p}\ et\ \overline{q})$ ont la même valeur de vérité.

2. Application :
La proposition u s'écrit : « $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ et $(a+b)^2-2ab=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$ »

Donc: $\overline{u}$ (la négation de u) est : « $(a^2+b^2\neq(a+b)^2-2ab)$ ou $(a+b)^2-2ab\neq\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$ »

La négation de v est : $\overline{v}$:
« $mn\neq m+n$ et $mn\leq m+n$ ».

• **Équivalence de deux propositions**

DÉFINITION

Soit p et q deux propositions. L'équivalence de p et q notée $p \Longleftrightarrow q$ est la proposition qui est vraie si p et q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.
$p \Longleftrightarrow q$ se lit: (p équivaut à q) ou (p si et seulement si : q) ou (p si est équivalent à q).

Table de vérité de $(p \Longleftrightarrow q)$

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque

$(p \Longleftrightarrow q)$ est la proposition : $[(p \Rightarrow q)\, et\, (p \Rightarrow q)]$

Propriété (Lois de Morgan)

Soit p et q deux propositions, ▸ $(\overline{p\ et\ q}) \Longleftrightarrow (\overline{p}\ ou\ \overline{q})$ ▸ $(\overline{p\ ou\ q}) \Longleftrightarrow (\overline{p}\ et\ \overline{q})$

2 Les quantificateurs

1- Fonction propositionnelle

DÉFINITION

On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique contenant une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable (ou les variables) par un élément (ou des éléments) de E.
Une fonction propositionnelle est notée généralement $A(x)$, $B(x)$, $A(x;y)$, $A(x;y;z)$, etc.

Exemple: Soit la fonction propositionnelle $A(x): x^2 \geq x$ où $x \in \mathbb{R}$.
On a : $A\left(\frac{1}{2}\right)$ est une proposition fausse mais $A(3)$ est une proposition vraie.

2- Quantificateur universel et quantificateur existentiel

Soit $A(x)$ une fonction propositionnelle définie sur un ensemble E.
On pose : $A = \{x \in E / A(x)\ est\ vraie\}$

▸ Si $A = E$ cela signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété $A(x)$, c'est-à-dire pour tout x de l'ensemble E, on a $A(x)$ vraie. On écrit : $(\forall x \in E)\,;\, A(x)$.
Le symbole $\forall$ se lit «pour tout» ou «Quel que soit» et est appelé quantificateur universel.

Exemple: $p: (\forall x \in \mathbb{R})\,;\,(x^2 \in \mathbb{Z})$ est une proposition fausse. (car $\pi^2 \notin \mathbb{Z}$)

▸ Si $A \neq \phi$ c'est-à-dire, il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui vérifie la propriété $A(x)$.
On écrit : $(\exists x \in E)\,;\, A(x)$.
Le symbole $\exists$ se lit «il existe au moins» ou tout simplement «il existe» et est appelé quantificateur existentiel.

Remarque

L'équation $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ à savoir « $x = \sqrt{2}$ ».
On écrit : $(\exists! x \in \mathbb{R})\,;\, x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.
Le symbole $\exists!$ se lit «il existe un unique...» ou «il existe un seul...».

3- Négation d'une proposition avec quantificateurs

a) La proposition « $(\forall x \in E)\,;\, p(x)$ » signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété $p(x)$, sa négation est «il existe au moins un élément de E qui ne la vérifie pas».
$\overline{(\forall x \in E)\,;\, p(x)} \Longleftrightarrow (\exists x \in E)\,;\, \overline{p(x)}$

b) La proposition « $(\exists x \in E) / p(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie la propriété $p(x)$; sa négation est: «Aucun élément de E ne vérifie la propriété $P(x)$ ».
$\overline{(\exists x \in E)\,;\, p(x)} \Longleftrightarrow (\forall x \in E)\,;\, \overline{p(x)}$

1 Négation d'une implication - utilisation de la loi de Morgan

1. On a vu que : $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \; ou \, q)$

En déduire à l'aide de la loi de Morgan la négation de $(p \Rightarrow q)$.

2. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$p:(\forall \varepsilon > 0);|a| < \varepsilon \Rightarrow a = 0$

$q:(\forall x \in \mathbb{R});x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$

$r:\exists(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+1}{3}$

$s:(\forall(a;b) \in \mathbb{R}^2);(a^2 + b^2 \geq ab \;\; ou \;\; a^2 + 1 \neq a)$

1. On a : $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \; ou \, q)$

Donc : $\overline{(p \Rightarrow q)} \Longleftrightarrow \overline{(\overline{p} \; ou \, q)}$

$\Longleftrightarrow (p \; et \; \overline{q})$ (d'après Loi de Morgan)

Ainsi : $\overline{(p \Rightarrow q)} \Longleftrightarrow (p \text{ et } \overline{q})$

2. ▸ $\overline{p}:(\exists \varepsilon > 0);|a| < \varepsilon \; et \; a \neq 0$

▸ $\overline{q}:(\exists x \in \mathbb{R});x \geq 2 \; et \; x^2 < 4$

▸ r s'écrit $\exists(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 ; \dfrac{x-1}{2} = y \; et \; y = \dfrac{z+1}{3}$

Donc d'après loi de Morgan :

$\overline{r}:(\forall(x;y;z) \in \mathbb{R}^3); \left(\dfrac{x-1}{2} \neq y \; ou \; y \neq \dfrac{z+1}{3}\right)$

de même d'après la loi de morgan.

▸ $\overline{s}:(\exists(a;b) \in \mathbb{R}^2);(a^2 + b^2 < ab \; et \; a^2 + 1 = a)$

2 Utilisation des quantificateurs

Écrire les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs.

1. Pour tout entier naturel n il existe au moins un entier naturel k tel que : $n \leq k$.
2. Le carré de tout réel est positif.
3. f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et constante.

1. $(\forall n \in \mathbb{N});(\exists k \in \mathbb{N}) ; n \leq k$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 \geq 0$
3. $(\exists c \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = c$

Ordre de quantificateurs

Plusieurs quantificateurs peuvent figurer dans une phrase mathématique; l'ordre dans lequel ils sont lus est très important, et modifier leur ordre peut changer le sens de la proposition et même sa valeur de vérité!

Par exemple les deux propositions :

$p:(\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R});x \leq y$ et

$q:(\exists y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}) ; x \leq y$ sont totalement différentes : p est une proposition vraie, mais q est une proposition fausse.

Mais dans d'autres exemples, il se peut que les deux propositions bien que différentes soient toutes les deux vraies, par exemple :

$r:(\forall x \in \mathbb{N}^*);(\exists y \in \mathbb{N}^*) ; y \; divise \; x$ et

$s:(\exists y \in \mathbb{N}^*);(\forall x \in \mathbb{N}^*); y \; divise \; x$.

(NB: Pour la proposition r on prendra $y = x$ et pour la proposition s on prendra $y = 1$).

Néanmoins, on peut permuter deux quantificateurs de même nature et les deux propositions sont équivalentes, par exemple :

$p:(\forall x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}) ; x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$p:(\forall y \in \mathbb{R});(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$r:(\exists x \in \mathbb{Z});(\exists y \in \mathbb{Z}) ; x^3 = y^2$

$r:(\exists y \in \mathbb{Z});(\exists x \in \mathbb{Z}) ; x^3 = y^2$.

3 Utilisation des quantificateurs

Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in]-\infty;1[) ; 3x^2y - x + y = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a : $3x^2y - x + y = 0$

donc : $y(3x^2 + 1) = x$ et comme $3x^2 + 1 \neq 0$

(car $x^2 = -\dfrac{1}{3}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$).

alors : $y = \dfrac{x}{3x^2 + 1}$.

il reste à montrer que $y < 1$.

On a : $y - 1 = \dfrac{x}{3x^2 + 1} - 1$

$= \dfrac{x - 3x^2 - 1}{3x^2 + 1} = -\left(\dfrac{3x^2 - x + 1}{3x^2 + 1}\right)$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 3x^2 - x + 1 > 0$

(car $\Delta = -11$ et $a > 0$ $(a = 3)$) et $3x^2 + 1 > 0$

donc : $y - 1 < 0$ c'est-à-dire : $y < 1$

Ainsi : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\exists y \in]-\infty;1[) \,/\, 3x^2y - x + y = 0$

LE COURS

3 Les lois logiques et méthodes de raisonnement

DÉFINITION

Toute proposition construite à partir d'autres propositions liées entre elles par des connecteurs et qui est vraie indépendamment des propositions qui la composent, est une loi logique.

1- Raisonnement par déduction

Il consiste à appliquer la loi logique : $[p\ et\ (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ .C'est-à-dire, si p est vraie et $(p \Rightarrow q)$ est vraie alors q est vraie.

- **Exemple:** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z});(16n^2 - 48n + 33) \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, puisqu'un produit, une somme et une différence d'entiers relatifs sont des entiers relatifs, on en déduit que : $(16n^2 - 48n + 33) \in \mathbb{Z}$.
Et on a : $16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3$ et comme $2n - 3 \neq 0$ alors $(2n-3)^2 \geq 1$
Par suite : $4(2n-3)^2 - 3 \geq 1 > 0$. Ainsi : $(n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4(2n-3)^2 - 3 \in \mathbb{N}^*)$
Donc : $(16n^2 - 48n + 33) \in \mathbb{N}^*$, finalement $(\forall n \in \mathbb{Z});(16n^2 - 48n + 33) \in \mathbb{N}^*$.

2- Contraposée (raisonnement par contraposé)

L'implication $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est appelée contraposée de l'implication $(p \Rightarrow q)$ et on a : $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

- **Exemple:** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\left(x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \neq \frac{x}{4}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ par contraposée montrons que : $\left(\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4\right)$

On a : $\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{4} \Rightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$
$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = 4$$

Remarque

Si $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$ alors $(p \Rightarrow r)$ (On dit que l'implication est transitive).

- **Conséquence:** si $(A \Rightarrow B_1)$ et $(B_1 \Rightarrow B_2)$ et $(B_2 \Rightarrow B_3)$ et... $(B_n \Rightarrow B)$ alors $(A \Rightarrow B)$(Les implications successives).

3- Raisonnement par équivalence

Il consiste à appliquer la loi logique :Si $(p \Longleftrightarrow q)$ et $(q \Longleftrightarrow r)$ alors $(p \Longleftrightarrow r)$ (Transitivité de l'équivalence)

- **Conséquence:** si $(A \Longleftrightarrow B_1)$ et $(B_1 \Longleftrightarrow B_2)$ et $(B_2 \Longleftrightarrow B_3)$ et... $(B_n \Longleftrightarrow B)$ alors $(A \Longleftrightarrow B)$.

- **Exemple:** Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[);\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

Soit $x \in [1;+\infty[$; $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x^2} \leq \frac{1}{4}$;$\left(car\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} > 0\right)$
$$\Longleftrightarrow 4x - 4 \leq x^2 \quad ;(car\ x^2 > 0)$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leq (x-2)^2$$
et comme $(x-2)^2 \geq 0$ est une proposition vraie, alors : $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.Ainsi : $\forall x \in [1;+\infty[$; $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

4- Raisonnement par disjonction des cas

On applique ce raisonnement lorsqu'on veut démontrer une implication de la forme $(p\ ou\ q) \Rightarrow r$; on utilise alors la loi logique : $[(p\ ou\ q) \Rightarrow r] \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r)\ et\ (q \Rightarrow r)$ (1)
C'est-à-dire on distingue deux cas : ou bien p est vraie et il faut démontrer que r est vraie, ou bien q est vraie et il faut démontrer que r est vraie.
Généralement, on a la loi logique (2) suivante :
$[(A_1\ ou\ A_2\ ou\ A_3\ ou...ou\ A_n) \Rightarrow B] \Longleftrightarrow ((A_1 \Rightarrow B)\ et\ (A_2 \Rightarrow B)\ et\ (A_3 \Rightarrow B)\ et...et\ (A_n \Rightarrow B))$ (2)

1 Raisonnement par contraposé

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R})$

On a : $(xy \neq 1 \; et \; x \neq y) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrons que :

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow (x = y \; ou \; xy = 1)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} &\Rightarrow x(y^2+y+1) = y(x^2+x+1) \\
&\Rightarrow xy^2+xy+x = yx^2+yx+y \\
&\Rightarrow xy^2-x^2y+x-y=0 \\
&\Rightarrow xy(y-x)-(y-x)=0 \\
&\Rightarrow (y-x)(xy-1)=0 \\
&\Rightarrow y-x=0 \; ou \; xy-1=0 \\
&\Rightarrow x=y \; ou \; xy=1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow (x = y \; ou \; xy = 1)$$

D'où par contraposée :

$$(xy \neq 1 \; et \; x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

2 Raisonnement par Équivalence

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que : $(a+b=0 \Longleftrightarrow a=b=0)$

2. Déterminer les réels x et y tel que :

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4} = \dfrac{x+y}{2}$ (1)

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

si $a=b=0$ alors $a+b=0$ (évident).

Réciproquement si $a+b=0$, alors : $b=-a$

et comme $a \geq 0$ alors $b \leq 0$

on obtient alors : $b \geq 0$ et $b \leq 0$

Donc : $b=0$ or $a=-b$ d'où : $a=0$

Ainsi : $(a+b=0 \Longleftrightarrow a=b=0)$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que :

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4} = \dfrac{x+y}{2}$ (1)

L'équation existe si et seulement si $x-1 \geq 0$ et $y-4 \geq 0$

c'est-à-dire : $x \geq 1$ et $y \geq 4$

et on a :

$$\begin{aligned}
(1) &\Longleftrightarrow 2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4} = x+y \\
&\Longleftrightarrow x-2\sqrt{x-1}+y-4\sqrt{y-4}=0 \\
&\Longleftrightarrow (x-1-2\sqrt{x-1}+1)+(y-4-4\sqrt{y-4}+4)=0 \\
&\Longleftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2+(\sqrt{y-4}-2)^2=0
\end{aligned}$$

et comme $(\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0$ et $(\sqrt{y-4}-2)^2 \geq 0$

$$\text{Alors : } (1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ et \\ \sqrt{y-4}-2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ et \\ \sqrt{y-4}=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ et \\ y-4=4 \end{cases} \Longleftrightarrow x=2 \; et \; y=8$$

Ainsi :

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Longleftrightarrow x=2 \; et \; y=8$$

D'où : $x=2 \; et \; y=8$

3 Raisonnement par disjonction des cas

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); |x-2| < x^2-2x+3$

1er cas :

Si $x-2 \geq 0$ c'est-à-dire : $x \geq 2$ alors :

$|x-2| = x-2$

$$\begin{aligned}
\text{et } |x-2| < x^2-2x+3 &\Longleftrightarrow x-2 < x^2-2x+3 \\
&\Longleftrightarrow 0 < x^2-3x+5
\end{aligned}$$

et comme $\Delta = -11$ et $a > 0$ $(a=1)$

Alors : $x^2-3x+5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in [2;+\infty[); |x-2| < x^2-2x+3$

2ième cas :

Si $x-2 \leq 0$ c'est-à-dire : $x \leq 2$ alors :

$|x-2| = -x+2$

$$\begin{aligned}
\text{et } |x-2| < x^2-2x+3 &\Longleftrightarrow -x+2 < x^2-2x+3 \\
&\Longleftrightarrow 0 < x^2-x+1
\end{aligned}$$

et comme $\Delta = -3$ et $a > 0$ $(a=1)$

Alors : $x^2-x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : $(\forall x \in]-\infty; 2]); |x-2| < x^2-2x+3$

Conclusion : $(\forall x \in \mathbb{R}); |x-2| < x^2-2x+3$

5- Raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement consiste à appliquer la loi logique : $\boxed{[\overline{p} \Rightarrow (q \text{ } et \text{ } \overline{p})] \Rightarrow p}$

En principe pour démontrer par l'absurde qu'une proposition p est vraie, on suppose que p est fausse, c'est-à-dire sa négation $\overline{p}$ est vraie, et on montre que : $(\overline{p} \Rightarrow (q \text{ } et \text{ } \overline{q}))$ est vraie, ce qui contredit le fait que «le vrai n'implique jamais le faux» (car $\overline{p}$ est une proposition vraie et $(q \text{ } et \text{ } \overline{q})$ est fausse). Donc $\overline{p}$ est fausse et par suite p est vraie.

Exemple: Montrer que : (si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$) alors : $(a+b) \notin \mathbb{Q}$

Soit $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$, montrons que: $(a+b) \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde, supposons que: $(a+b) \in \mathbb{Q}$

Donc, il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que : $c = a+b$

D'où : $b = c - a$. Ainsi $b \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc: $(a+b) \notin \mathbb{Q}$

6- Raisonnement par récurrence

Soit $p(n)$ une propriété qui ne dépend que de l'entier naturel n.

Propriété (Raisonnement par récurrence) ou (Principe de récurrence)

1ère forme :

si **(1)** $p(0)$ est vraie.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ est vraie.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ est vraie.

2ème forme : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$

si **(1)** $p(n_0)$ est vraie.

(2) Pour tout $n \geq n_0$; $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ est vraie.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $p(n)$ est vraie.

Exemple:

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n > n$

Soit $p(n)$ la propriété : $2^n > n$, où $n \in \mathbb{N}$.

- On a : $2^0 = 1$ donc $2^0 > 0$ et par suite $p(0)$ vraie.

C'est-à-dire que la propriété vraie pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

C'est-à-dire $(2^n > n) \Rightarrow (2^{n+1} > n+1)$

Pour cela, supposons $2^n > n$ (Hypothèse de récurrence) (H.R)

et montrons que : $2^{n+1} > n+1$

On a : $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$

et comme $2^n > n$ (H.R) et $2^n \geq 1$

alors, par somme, $2^n + 2^n > n+1$

ainsi : $2^{n+1} > n+1$

Donc: $(P(n) \Rightarrow p(n+1))$ (on dit que la propriété est héréditaire).

Conclusion :

On a : $p(0)$ est vraie.

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (p(n) \Rightarrow p(n+1))$ vraie.

Donc, d'après principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$; $p(n)$

C'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2^n > n$

POUR COMPRENDRE

1 Raisonnement par l'absurde

Soit a un entier naturel non nul.
Montrer que a^2+1 n'est pas un carré parfait.

Par l'absurde, supposons que a^2+1 soit un carré parfait, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a^2+1=n^2$.
($n \in \mathbb{N}^*$ car $a^2+1>0$).
On a: $a^2 < a^2+1 < (a+1)^2$;
(car $(a+1)^2-(a^2+1)=2a$ et $2a>0$)
D'où : $a^2 < n^2 < (a+1)^2$, et par suite :
$a < n < a+1$.
C'est-à-dire, il existe un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.
Donc a^2+1 n'est pas un carré par fait pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

2 Raisonnement par récurrence

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

▸ On a : $1^2=1$ et $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$
Donc la propriété est vraie pour $n=1$.
▸ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que :
$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
et montrons que :
$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
On a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2$

$$\begin{aligned}&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\&=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Or : $(n+2)(2n+3)=n^2+3n+4n+6$
$=n^2+7n+6$
Donc :
$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6}$

Ainsi la propriété est héréditaire.
Conclusion : d'après principe de récurrence :
$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 Raisonnement par récurrence

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4^n-1$ est un multiple de 3.

▸ On a : $4^0-1=1-1=0$ et 0 est un multiple de 3.
Donc la propriété est vraie pour $n=0$.
▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que 4^n-1 multiple de 3.
C'est-à-dire : $4^n-1=3k$ où $k \in \mathbb{N}$,
et montrons que : $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3.
C'est-à-dire : $4^{n+1}-1=3k'$ (où $k' \in \mathbb{N}$)
On a : $4^n-1=3k$ donc : $4^n=1+3k$.
Donc :
$$\begin{aligned}4^{n+1}-1&=4\times 4^n-1\\&=4(3k+1)-1\\&=4\times 3k+4-1\\&=3\times 4k+3\\&=3(4k+1)\\&=3k' \text{ où } k'=4k+1 \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.
Conclusion : d'après principe de récurrence :
$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4^n-1$ est un multiple de 3.

4 Raisonnement par l'absurde

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que : $((\forall \varepsilon > 0) ; |a| < \varepsilon) \Rightarrow a=0$

Supposons que: $((\forall \varepsilon > 0) ; |a| < \varepsilon)$ et montrons que $a=0$.
pour cela, raisonnons par l'absurde, supposons que $a \neq 0$
On a donc : $|a|>0$
et comme $(\forall \varepsilon > 0) ; |a| < \varepsilon$
on prend: $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$ (par exemple) on obtient
$|a| < \dfrac{|a|}{2}$
Ainsi: $1 < \dfrac{1}{2}$ contradiction.
Donc : $a=0$.

EXERCICES
RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 disjonction des cas

1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^4-x^3+2>0$ (on distinguera les trois cas : $x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$ et $0<x<1$

1 Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x^2+x+1>0$ (car $\Delta=-3$ et $a>0$ $(a=1)$)

Donc: $\sqrt{x^2+x+1}>0$

Montrer que $\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

1er cas : si $x+\frac{1}{2} \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{-1}{2}$

alors $\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

2ième cas : si $x+\frac{1}{2}<0$, c'est-à-dire $x<\frac{-1}{2}$

On a :

$$\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}=\frac{x^2+x+1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

Comme $-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$ et $\sqrt{x^2+x+1}>0$

alors $\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

Conclusions : $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

Remarque

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ (forme canonique)

Rappel: $X^2+AX=\left(X+\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2$

$X^2-AX=\left(X-\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2$

Donc : $x^2+x+1>\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

Et par suite : $\sqrt{x^2+x+1}>\left|x+\frac{1}{2}\right|$

or $\left|x+\frac{1}{2}\right| \geqslant -\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

donc : $\sqrt{x^2+x+1}>-\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi $\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

Conclusion: $(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}>0$

2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); x^4-x^3+2>0$

1er cas : $x \leqslant 0$	2ème cas : $x \geqslant 1$	3ième cas : $0<x<1$
alors $-x^3 \geqslant 0$ et $x^4 \geqslant 0$. D'où : $x^4-x^3+2 \geqslant 2$ Ainsi : $x^4+x^3+2>0$	Alors $x^4 \geqslant x^3$ Donc $x^4-x^3 \geqslant 0$ et par suite $x^4-x^3+2>0$	On a $0<x^3<1<2$ Donc: $2-x^3>0$ et $x^4>0$ D'où : $x^4-x^3+2>0$

Conclusion : $(\forall x \in \mathbb{R}); x^4-x^3+2>0$

EXERCICE RÉSOLU 2 Raisonnement par équivalence

1 Montrer que: $\forall(a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}$.

2 Soit $(x;y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $x^2+y^2=1$. Montrer que: $1<x+y \leqslant \sqrt{2}$.

1 Soit $a>0$ et $b>0$

Montrons que $\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}$

Comme $a+b>0$ alors on a :

$$\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4} \Longleftrightarrow 4a^2 \geqslant (a+b)(3a-b)$$
$$\Longleftrightarrow 4a^2 \geqslant 3a^2-ab+3ab-b^2$$
$$\Longleftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$$

Et comme $(a-b)^2 \geqslant 0$ est une proposition vraie, alors $\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}$ est vraie.

Donc : $\forall(a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}$.

2 Soit $x>0$ et $y>0$ tels que $x^2+y^2=1$.

Montrons que : $1<x+y \leqslant \sqrt{2}$.

On a : $1<x+y \Longleftrightarrow 1<(x+y)^2$ (car $x+y>0$)

$$\Longleftrightarrow 1<x^2+y^2+2xy$$
$$\Longleftrightarrow 1<1+2xy \quad (\text{car } x^2+y^2=1)$$
$$\Longleftrightarrow 0<2xy$$

Or $x>0$ et $y>0$ d'où $2xy>0$

Ainsi, la proposition $2xy>0$ est vraie

Donc $1<x+y$

d'autre part :

$$x+y \leqslant \sqrt{2} \Longleftrightarrow (x+y)^2 \leqslant 2; (car\ x+y>0)$$
$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+2xy \leqslant 2(x^2+y^2);$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant x^2+y^2-2xy$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant (x-y)^2 \quad (\text{car } x^2+y^2=1)$$

Et comme $(x-y)^2 \geqslant 0$ est vraie

alors $x+y \leqslant \sqrt{2}$ est vraie

Conclusion : $1<x+y \leqslant \sqrt{2}$

EXERCICE RÉSOLU 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sqrt{3x+4}=x$, (1)
et l'inéquation $\sqrt{x^2+2x-3}>x+2$ (2).

Méthode :

Pour résoudre une équation du type $\sqrt{A}=B$, suivre les étapes suivantes :

- Ensemble de définition D:
$x\in D \Longleftrightarrow A\in\mathbb{R}\ et\ A\geqslant 0$
- Soit $x\in D$: $\sqrt{A}=B \Longleftrightarrow A=B^2 et\ B\geqslant 0$

Résolution de l'équation (1) : $\sqrt{3x+4}=x$

Étape 1 : L'ensemble d'existence .

Soit D_1 l'ensemble de définition de cette équation.

$D_1=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 3x+4\geqslant 0\}=\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

Étape 2 : Résolution

Soit $x\in D_1$ $\sqrt{3x+4}=x \Longleftrightarrow 3x+4=x^2$ et $x\geqslant 0$

(1) $\Longleftrightarrow x^2-3x-4=0\ et\ x\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow (x=-1\ ou\ x=4)\ et\ x\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow x=4$

D'où 4 est l'unique solution de l'équation (1) .

Ainsi $S=\{4\}$.

- **Résolution de l'inéquation (2)**

$\sqrt{x^2+2x-3}>x+2$

Étape 1 : L'ensemble d'existence.

Soit D_2 l'ensemble de définition de cette iné-quaion: $D_2=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2+2x-3\geqslant 0\}$

Pour : $x^2+2x-3=0$; $\Delta=16$, $x_1=1$ et $x_2=-3$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
x^2+2x-3	+	0	-	0	+

Donc : $D=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

Étape 2 : Résolution :

Tableau de signe de $x+2$.

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-		0	+	

1[er] cas : si $x\in]-\infty;-3]$

alors $x+2<0$ donc $\sqrt{x^2+2x-3}>x+2$ est vraie pour tout $x\in]-\infty;-3]$, $S_1=]-\infty;-3]$

2[ième] cas : si $x\in[1;+\infty[$ donc $x+2>0$

et donc $\sqrt{x^2+2x-3}>x+2 \Longleftrightarrow x^2+2x-3>(x+2)^2$

$\Longleftrightarrow -2x-7>0$

$\Longleftrightarrow x<-\frac{7}{2}$

Donc: $S_2=\left]-\infty;\frac{-7}{2}\right[\cap[1;+\infty[=\phi$

D'où: $S=S_1\cup S_2=]-\infty;-3]$

EXERCICE RÉSOLU 4 Raisonnement par récurrence

1 Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

2 Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$

1 Montrer par récurrence que :

$(\forall n\in\mathbb{N});1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

- Pour $n=0$ on a $1=(0+1)^2$.

la proposition est vraie pour $n=0$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

Montrons que : $1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3)=(n+2)^2$

On a: $\underbrace{1+3+5+...+(2n+1)}_{=(n+1)^2}+(2n+3)=(n+1)^2+(2n+3)$

$=n^2+2n+1+2n+3$

(H.R) $=n^2+4n+4=(n+2)^2$

Donc la propriété est héréditaire

Conclusion: D'après le principe de récurrence,

$(\forall n\in\mathbb{N});1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

2 Montrons par récurrence que :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$

- Pour $n=1$ on a : $2-\frac{1}{1}=1$ et $1\leqslant 2-\frac{1}{1}$

La proposition est donc vraie au rang initial.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$,Supposons que : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$

Montrons que : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$

On a : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$ (H.R)

Donc : $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$

Ainsi, il suffit de montrer que :

$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$.

C'est-à-dire: $0\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$.

On a : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{n(n+1)^2}$

$=\frac{1}{n(n+1)^2}$

Donc : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0$

C'est-à-dire: $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$

Et par suite $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$

Conclusion: $(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Quand les propositions suivantes sont-elles vraies? $(p\ et\ q)$? $(p\ ou\ q)$? $(p \Rightarrow q)$?

2 Donner une proposition équivalente à la proposition $[(q \Rightarrow p)\ et\ (p \Rightarrow q)]$

3 Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$(P):(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{x^2+1}{2} \geqslant x$

$(Q):(\exists p \in \mathbb{Z})\ ;\ p(p-1) \leqslant 1$

4 Donner la définition de chacun des raisonnements suivants :
raisonnement par déduction ; raisonnement par l'absurde et raisonnement par récurrence.

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Quel est le raisonnement qui convient pour montrer que :
$(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$;
$(x \neq y\ et\ x+y \neq 2) \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$?

2 Donner une méthode pour étudier le signe de $\sqrt{x^2+1} - (x-1)$ où $x \in \mathbb{R}$

3 Quel est le raisonnement convenable pour montrer que :

$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$?

4 Comment peut-on montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$?

5 Quel est le raisonnement convenable pour montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \left(\dfrac{5}{4}\right)^n \geqslant 1 + \dfrac{1}{4}n$?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 La négation de la proposition $(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 < 0$ est la proposition :	$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 \neq 0$	$(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 \geqslant 0$	$(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 \geqslant 0$
2 La négation de la proposition $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ (\exists p \in \mathbb{Z})\ ;$ $p \leqslant x < p+1$ est la proposition :	$(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ (\forall p \in \mathbb{Z})$ $p > x$ ou $p+1 \leqslant x$	$(\exists x \in \mathbb{R})$; $(\forall p \in \mathbb{Z})$ $p > x \geqslant p+1$	$(\forall x \notin \mathbb{R})\ ;\ (\exists p \notin \mathbb{Z})$ $p > x\ ou\ p+1 \leqslant x$
3 La proposition $(\overline{p \Longrightarrow q})$ est équivalente à la proposition :	$\overline{p}$ et q	p et $\overline{q}$	$\overline{p}$ ou q
4 Pour montrer que : $(\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2)\ ;\ \dfrac{a+b}{ab} \geqslant \dfrac{4}{a+b}$ On utilise le raisonnement :	par récurrence	par l'absurde	par équivalence
5 La proposition : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{x^2+1}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$ implique :	$\dfrac{a^2+1}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$ où a est un réel donné.	$(\exists x \in \mathbb{R})$; $\dfrac{x^2+1}{2} < \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$	$(\exists x \in \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{x^2+1}{2} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$
6 La fonction propositionnelle : $(n \in \mathbb{N})\ ;\ 2^n > 5(n+1)$ est :	Vraie pour tout entier naturel	Vraie si $n \geqslant 5$	Vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICES

Exercices d'application

Exercice 1 : Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

P_1: $((-3^2)=9$ et $\sqrt{9}=-3)$

P_2: $(\pi \in \mathbb{Q})$ ou $(\sqrt{3}+\sqrt{7}>3)$

P_3: $(\sqrt{4}=2)$ et $(\sqrt{12} \neq 3)$

P_4: $(a \in \mathbb{Z})$; (a premier $\Rightarrow$ a impair)

P_5: $(a \in \mathbb{R})$; $(a<-1 \Rightarrow a<0)$

P_6: $(a \in \mathbb{R})$; $(a \geqslant 2 \Leftrightarrow a^2 \geqslant 4)$

P_7: $(a>1)$; $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=2 \Longleftrightarrow a=9\right)$

Exercice 2 : Écrire les propositions et les phrases suivantes à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs.

q_1: Tout nombre rationnel r s'écrit $r=\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

q_2 : Il existe un entier naturel unique plus petit que tout entier naturel

q_3 : Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leqslant x < p+1$

q_4 : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$

q_5 : f est une fonction numérique définie sur D est paire

q_6 : Tout entier relatif n s'écrit : $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ où $k \in \mathbb{Z}$

q_7 : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.

Exercice 3 : Donner la négation des chacunes des propositions suivantes

p: $(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)$; $(a^2+b^2 \geqslant ab$ ou $|a|+|b| \geqslant |a+b|)$

q: $(\exists x \in \mathbb{Z})$; $(x+1>x^2)$

r: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{Q})$; $x<b<y$

s: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\left(x>0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2\right)$

Exercice 4 : Donner la négation des chacunes des propositions suivantes :

p: $(\forall x \in \mathbb{N}^*)$; $(x \neq 1 \Rightarrow x \geqslant 2)$

q: $(\forall x \in [a;b])(\exists t \in [0;1])$; $x=ta+(1-t)b$;

r: $(\exists x \in \mathbb{R})$; $(\exists y \in \mathbb{R})$; $(\exists z \in \mathbb{R})$;

$\dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-2}{3}$

s: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$; $(x \leqslant y$ ou $x^2y+y=1)$

Exercice 5 : Donner la négation de chacunes des propositions suivantes et déterminer la valeur de leur vérité.

p_1: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})$; $n>x$

p_2: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$
$(x<y \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{R})$; $x<a<y)$

p_3: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z})$

p_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / y^2-xy-1=0$

p_5 : $(\exists p \in \mathbb{Z})$; $\dfrac{8}{p+4} \in \mathbb{N}$

Exercice 6 : On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

On pose $\Delta=b^2-4ac$ et
$S=\{x \in \mathbb{R} \,/\, ax^2+bx+c=0\}$

et si $\Delta>0$ on note x_1 et x_2 les solutions de l'équation $P(x)=0$ avec $x_1<x_2$

Déterminer parmi les implications suivantes celles qui sont vraies.

1. $ac<0 \Longrightarrow S \neq \phi$
2. $c=0 \Longrightarrow S \neq \phi$
3. $1 \in S \Longrightarrow a+b+c=0$
4. $a+b+c=0 \Longrightarrow S=\left\{1; \dfrac{c}{a}\right\}$
5. $a-b+c=0 \Longrightarrow S=\left\{-1; \dfrac{-c}{a}\right\}$
6. $\left(\Delta>0 \text{ et } \dfrac{a}{c}<0\right) \Longrightarrow x_1<0<x_2$
7. $\Delta<0 \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})$; $a.P(x)>0$
8. $x_1+x_2=0 \Longrightarrow b=0$
9. $(c=-1 \text{ et } \Delta=0) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})$; $a.P(x) \leqslant 0$
10. $((\exists \alpha \in \mathbb{R})(\exists \beta \in \mathbb{R}); P(\alpha)>0 \text{ et } P(\beta)<0) \Longrightarrow \Delta>0$

Raisonnement par disjonction des cas

Exercice 7 : **a)** Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{x^2+1}+x>0$

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\sqrt{2x^2-3x+3}-x+1>0$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$2x^2-|x-3|-18=0$

EXERCICES

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$\sqrt{x^2+2x-3} > x+2$

Exercice 10 : Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, x^4 - x^3 + 2 > 0$

Exercice 11 : Montrer que : $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Raisonnement par contraposée

Exercice 12 : Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{Z})\,;\, (n^2$ pair $\Longrightarrow n$ pair$)$

Exercice 13 : Montrer que :
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Exercice 14 : Soit $a \in \mathbb{R}$;
Montrer que $(\forall \varepsilon > 0\,; |a| < \varepsilon) \Longrightarrow a = 0$

Raisonnement par équivalence

Exercice 15 : Soit a, b et c des réels

a) Montrer que : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$

b) Montrer que : $(a^3+a = b^3+b) \Longleftrightarrow a = b$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que : $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+1} \leqslant \dfrac{4}{3}\sqrt{x}$

d) Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, (\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Longleftrightarrow x = 1)$

Exercice 16 : Soit a et b deux réels de l'intervalle $]-1;1[$
Montrer que : $-1 < \dfrac{a+b}{1+ab} < 1$

Exercice 17 : Soit a et b des réels positifs
Montrer que :

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 2. $\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

Exercice 18 : a) Montrer que:
$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\,;\; x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$

b) En déduire que:
$(\forall a > 0)\,;(\forall b > 0)\,;(\forall c > 0)\,;$
$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$

Raisonnement par contre exemple

Exercice 19 : 1. Montrer que
$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) / y < n$
est une proposition fausse.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 3x + 2$
Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 20 : Soit a, b, c et d des réels.
Montrer que l'implication suivante est fausse.

$$\begin{cases} a \neq b \\ et \\ c \neq d \end{cases} \Longrightarrow a+c \neq b+d$$

Exercice 21 : Soit a, b, c et d des nombres réels.
Montrer que la proposition :
$(a \neq b \; et \; c \neq d) \Longrightarrow (a+b \neq b+d)$
est une proposition fausse.

Raisonnement par implications successives

Exercice 22 : Soit x un nombre réel.
Montrer que : $2 < x < 4 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x-1} < 1$

Exercice 23 : Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}\right) \Rightarrow x = 0$

Exercice 24 : 1. Montrer que :
$(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2)\,;\, a^2+b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2. Soit x et y deux nombres réels positifs.
Montrer que :
$(x+y+2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \Rightarrow (x = y = 1)$

Raisonnement par déduction

Exercice 25 : Soit a et b deux nombres réels tels que : $a^2+b^2 = 1$.
Montrer que : $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice 26 : Soit a et x deux nombres réels tels que : $|a| < 1$ et $|x| < 1$.

1. Montrer que :
$|ax^2 + x - a| \leqslant |a| \times |x^2 - 1| + |x|$

2. En déduire que : $|ax^2+x-a|<-x^2+|x|+1$ et $|ax^2+x-a|<\dfrac{5}{4}$

(Rappel de la forme canonique : $x^2-Ax=\left(x-\frac{A}{2}\right)^2-\frac{A^2}{4}$)

Raisonnement par l'absurde

Exercice 27 : Soit x, y et z des nombres réels.

Montrer que le système: $\begin{cases}2x-3z>3\\3y-2x\geqslant 3\\y-z\leqslant 2\end{cases}$

n'admet pas de solution.

Exercice 28 : 1. Montrer que : $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$ et $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\notin\mathbb{Q}$

2. Montrer que si $(a\in\mathbb{Q}^*\ et\ b\notin\mathbb{Q})$, alors $(ab\notin\mathbb{Q}\ et\ (a+b)\notin\mathbb{Q})$

Exercice 29 : $ABCD$ est un parallélogramme de centre O ; I le milieu de $[AD]$ et J le point défini par : $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Montrer que les droites (AB) et (IJ) ne sont pas parallèles.
2. Montrer que la droite (IJ) ne passe pas par O.

Raisonnement par récurrence

Exercice 30 : Montrer que :
$(\forall n\in\mathbb{N}^*);1^3+2^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 31 : Montrer que :
$(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

Exercice 32 : Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$;
$1\times2+2\times3+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 33 : Montrer que :
$(\forall n\in\mathbb{N})$; 9 divise 4^n+6n-1

Exercice 34 : Montrer que :
$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; 11 divise $3^{2n}+2^{6n-5}$

Exercices de renforcement

Exercice 35 : 1. Montrer que pour toutes propositions p, q et r, on a :

- $[p\ et\ (q\ ou\ r)]\Longleftrightarrow[\ (p\ et\ q)\ ou\ (p\ et\ r)]$ (1)
- $[p\ ou\ (q\ et\ r)]\Leftrightarrow[(p\ ou\ q)\ et\ (p\ ou\ r)]$ (2)

2. Déterminer les réels x et y tels que : $(x^2-x=0$ et $y=3x-1)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$\begin{cases}xy-x+y=1\\2x^2-xy-y=0\end{cases}$

Lois logiques

Exercice 36 : Soit p, q et r trois propositions. Montrer que toutes les propositions suivantes sont des lois logiques

1. $[p\ et\ (p\Rightarrow q)]\Rightarrow q$
2. $(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)]$
3. $(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(p\ et\ r)\Rightarrow(q et\ r)]$
4. $(p\Rightarrow q)\Rightarrow[(p\ ou\ r)\Rightarrow(q\ ou\ r)]$
5. $[p\Rightarrow(q\ ou\ r)]\Longleftrightarrow[(p\ \text{et}\ \overline{q})\Rightarrow r]$

Exercice 37 :Soit x, y et z trois nombres réels dont l'un est strictement positif, un autre est nul et l'autre est strictement négatif et vérifiant les implications suivantes :

$x=0\Rightarrow y>0$; $x>0\Rightarrow y<0$ et $y\neq0\Rightarrow z>0$

Préciser lequel de ces trois nombres est nul, lequel est strictement positif et lequel est strictement négatif.

Exercice 38 : Soit n et p deux entiers relatifs. Montrer que : (np est pair ou (n^2-p^2) est un multiple de 8).

Exercice 39 : Soit n un entier naturel. Montrer que si $(2n+1)$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice 40 : 1. Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R}^*);0<\sqrt{1+x^2}-|x|<\dfrac{1}{2|x|}$

2. En déduire que :
$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});x+1<\sqrt{x^2+2x+2}<x+1+\dfrac{1}{2x}$

Exercice 41 : Soit x, y et z des nombres réels tels que : $z>0;|x+y|\leqslant z$ et $|x-y|\leqslant z$

1. Montrer que : $|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}z^2$
2. Montrer que : $|x|+|y|\leqslant z$

EXERCICES

Exercice 42 : Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N}) ; (n \geqslant 5 \Rightarrow 2^n > n^2)$

Exercice 43 : Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;
$$\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 44 : 1. Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions propositionnelles définies sur un ensemble E.
Montrer que :
(1) $[(\forall x \in E) ; P(x)] \Rightarrow [(\exists x \in E) ; P(x)]$
(2) $a \in E ; ((\forall x \in E) ; P(x)) \Rightarrow P(a)$
(3) La proposition $(\exists x \in E) ; [P(x)\ ou\ Q(x)]$ est équivalente à
$[((\exists x \in E) ; P(x))\ ou\ ((\exists x \in E) ; Q(x))]$
(4) La proposition $[(\forall x \in E) ; P(x)\ et\ Q(x)]$ est équivalente à
$[(\forall x \in E) ; P(x)\ et\ ((\forall x \in E) ; Q(x))]$
2. Montrer, en utilisant un contre-exemple, que l'équivalence (3) est fausse si on remplace la disjonction logique «ou» par la conjonction logique «et».
3. Montrer en utilisant un contre-exemple, que l'équivalence (4) est fausse si on remplace la conjonction logique «et» par la disjonction logique «ou».

Exercice 45 : soit a et b deux nombres rationnelles $((a;b) \in \mathbb{Q}^2)$
1. Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$
2. En déduire que : $\forall (x;y;x';y') \in \mathbb{Q}^4$;
$(x+y\sqrt{2}=x'+y'\sqrt{2} \Rightarrow x=x'\ et\ y=y')$

Exercice 46 : Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$
(On pourra étudier les cas : $x \leqslant 0$; $0<x<1$; $x \geqslant 1$)

Exercice 47 : Soit α, β et γ des nombres réels tels que : $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ et $\alpha+\beta+\gamma=5$
Montrer que : $-1 \leqslant \gamma \leqslant \frac{13}{3}$.

Exercice 48 : 1. Soit a un réel strictement positif.
Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (1+a)^n \geqslant 1+na$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{n}{2^{n-1}} < 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 49 : 1. Soit α un réel positif.
Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1;2\})$;
$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*-\{1;2\})$;
$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 50 : Soit f une fonction numérique définie sur $[0;1]$ et vérifiant :
- $(\forall x \in [0;1])$; $f(x) \in [0;1]$
- $(\forall (x;y) \in ([0;1])^2)$; $|f(x)-f(y)| \geqslant |x-y|$

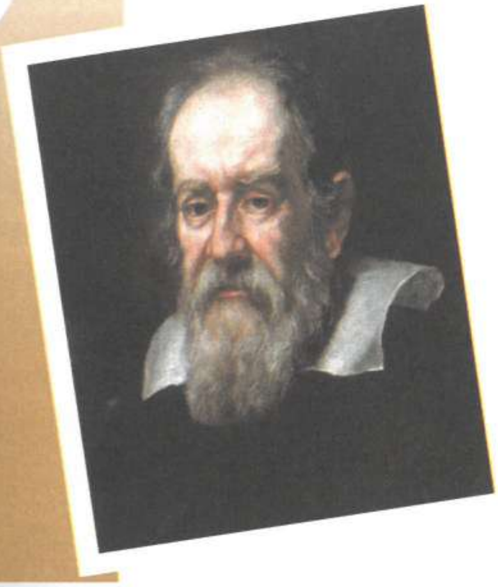
1. Montrer que : $(f(0)=0$ et $f(1)=1)$ ou $(f(0)=1$ et $f(1)=0)$
2. On suppose que: $f(0)=0$.
a) Montrer que : $(\forall x \in [0;1])$; $f(x) \geqslant x$
b) Montrer que : $(\forall x \in [0;1])$; $f(x)=x$
(Remarquer que : $|f(x)-1| \geqslant |x-1|$)

les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	2	1	2	3	1/3	2	2			

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Chapitre 2

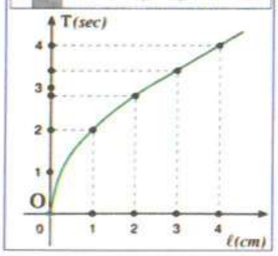


Galilée (1564-1642)

Galilée a découvert à l'âge de 19ans les lois de mouvement d'un pendule en temporisant la fréquence du lustre de la cathédrale de Pise à l'aide des battements de son coeur.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $\quad (g = 9{,}81\ m/s^2)$

ℓ	0	1	2	3	4	...
T	0	2	2.8	3.5	4	...



Le contenu

Objectifs de la leçon

- Connaître la fonction majorée, fonction minorée et fonction bornée;
- Connaître la fonction périodique;
- Utiliser la périodicité d'une fonction pour réduire l'ensemble d'étude;
- Utiliser la périodicité d'une fonction dans les représentations graphiques;
- Être capable de comparer deux fonctions graphiquement et algébriquement;
- Connaître la monotonie d'une fonction;
- Connaître la composée de deux fonctions;
- Être capable d'étudier les variations des fonctions: $f+g$, αf, gof connaissant les variations de f et g;
- Être capable de représenter graphiquement les fonctions: $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$;
- Utiliser la représentation graphique d'une fonction ou son tableau de variations pour déterminer l'image d'un intervalle.

Capacités attendues

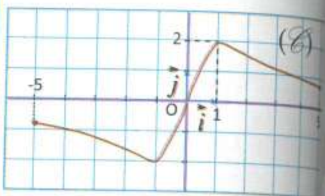
- Comparer deux expressions en utilisant les différentes techniques.
- Déduire les variations d'une fonction ou les valeurs maximales et minimales d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou de son tableau de variations.
- Connaître les variations des fonctions de la forme $f+\lambda$ et λf connaissant les variations de f.
- Utiliser la représentaion graphique d'une fonction ou son tableau de variations pour déterminer l'image d'un intervalle, et résoudre certaines équations et inéquations.
- Déterminer les variations de la composée gof connaissant les variations de f et g.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Lecture graphique

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-5;5]$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative (Voir figure ci-contre)



1. Dresser le tableau de variations de f.

2. **a** Déterminer la valeur maximale de f sur l'intervalle $[-5;5]$.

b Déterminer la valeur minimale de f sur l'intervalle $[-5;5]$.

c En déduire que $-2 \leq f(x) \leq 2$, pour tout réel x de l'intervalle $[-5;5]$.

3. Résoudre graphiquement:

a L'équation $f(x) = 0$.

b L'inéquation $f(x) \geq 0$.

4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 1$.

Activité 2 L'hyperbole

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$.

2. Dresser le tableau de variations de f.

3. **a** Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de l'hyperbole (H) d'équation: $y = \dfrac{3}{x}$ par une translation dont on précisera le vecteur.

b Tracer, dans le même repère, l'hyperbole (H) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Remarque:

La fonction: $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ est:

- Strictement décroissante sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ dans le cas où $a > 0$
- Strictement croissante sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ dans le cas où $a < 0$

Activité 3 La parabole

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a** Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$

b Dresser le tableau de variations de f.

2. **a** Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de la parabole (P) d'équation $y = x^2$ par une translation dont on déterminera le vecteur.

b Tracer dans le même repère la parabole (P) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Remarque:

Dans le cas $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^2$ est:

- strictement décroissante sur $]-\infty;0]$
- strictement croissante sur $[0;+\infty[$

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 4 Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. **a** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $f(x) < 1$

On dit que f est **majorée** par 1.

b L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$?

2. **a** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $f(x) \geq 0$

On dit que f est **minorée** par 0.

b Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$

On a: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0)$, on dit que $f(0)$ est le minimum (ou la valeur minimale) de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c En déduire que: pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $0 \leq f(x) < 1$

On dit que la fonction f est **bornée**, c'est-à-dire qu'elle est à la fois majorée et minorée.

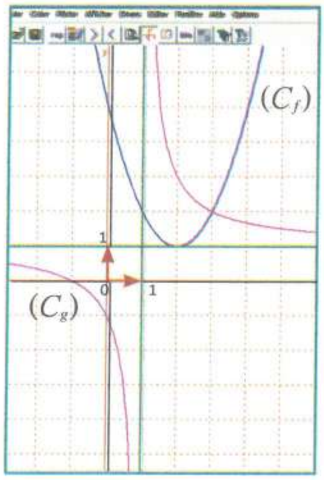
Activité 5 Comparaison de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques définies par: $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

(C_f) et (C_g) sont respectivement les courbes de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Remarque:

- f est une fonction polynôme de second degré
- g est une fonction homographique



I) 1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x) \geq g(x)$.

4. **a** Montrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$f(x) > g(x) \iff x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$

b En déduire, graphiquement, les solutions de l'inéquation:

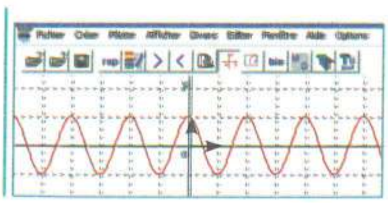
$x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1; +\infty[$

II) Résoudre algébriquement l'inéquation: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ où $x \in]1; +\infty[$ (comparer avec le résultat de la question (I) 4) b)).

(On poura considérer le polynôme: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ et remarquer que $P(3) = 0$).

Activité 6 Fonction périodique

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1. Par lecture graphique,

a Vérifier que : $f(1) = f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$ et $f(0) = f(2)$.

b Conjecturer la relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$ où $x \in \mathbb{R}$.

2. La fonction représentée par la courbe précédente est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos(\pi x)$.

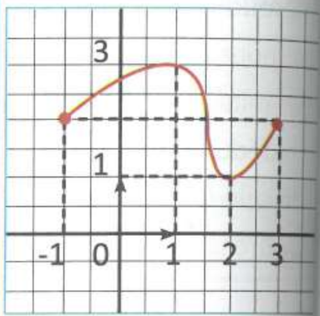
a Vérifier les résultats de la question 1) a) en utilisant l'expression de f.

b Montrer que pour tout réel x : $f(x+2) = f(x)$.

On dit dans ce cas que la fonction f est **périodique** et que le nombre 2 est une période de f.

Activité 7 L'image d'un intervalle par une fonction

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;3]$.



1. Dresser le tableau de variations de f.

2. **a** Montrer que: $(\forall x \in [1;2])$; $1 \leq f(x) \leq 3$.

La proposition: «$(\forall x \in [1;2])$; $f(x) \in [1;3]$» est exprimée par la notation: $f([1;2]) \subset [1;3]$.

b Soit b un élément de l'intervalle $[1;3]$.

Montrer, en utilisant le graphique, que l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1;2]$.

On exprime le résultat de cette question par $(\forall b \in [1;3])(\exists x \in [1;2]) / f(x) = b$ que l'on peut écrire: $[1;3] \subset f([1;2])$.

c En déduire que: $f([1;2]) = [1;3]$.

3. Déterminer graphiquement l'image de l'intervalle $[2;3]$ par la fonction f.

Remarque:

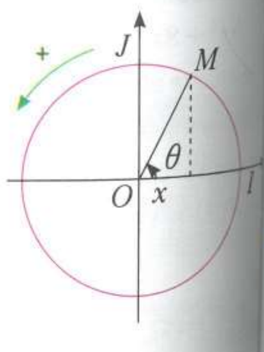
Soit A et B deux ensemb
On a:
$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset$

Activité 8 Composée de deux fonctions

Un point M se déplace sur le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon $R = 1$ dans le sens positif à une vitesse constante à raison d'un quart de tour par seconde.

À $t = 0$, le point M est en I. (le temps t est exprimé en seconde)

Soit θ une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}})$, et x l'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.



On remarque que x varie en fonction de θ, on pose : $x = f(\theta)$ et que θ varie en fonction de t, On pose : $\theta = g(t)$, donc : $x = f(\theta) = f(g(t))$

On pose : $x = h(t)$ alors la fonction h est la fonction : $h: t \mapsto f(g(t))$

1. **a** Montrer que: $f(\theta) = \cos\theta$.

b Vérifier que: $g(t) = \frac{\pi}{2}t$.

2. Donner l'expression de la fonction h en fonction de t.

La fonction h est notée fog et appelée **composée** des fonctions g et f dans cet ordre.

On a alors: $(\forall t \in [0;+\infty[)$; $h(t) = (fog)(t) = f(g(t))$.

Activité 9 Représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x+a}$

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Soit (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g.

2. Étudier les variations de f et g.

3. Recopier et compléter les tableaux suivants:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4	9
$g(x)$						

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$					

4. En s'aidant des résultats de ces deux tableaux, représenter (C_g) et (C_f) dans le même repère.

II) Soit x un réel de l'intervalle $[-2; +\infty[$, on considère les points $M(x+2; g(x+2))$ et $M'(x; f(x))$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{MM'} = -2\vec{i}$.

2. En déduire que la courbe (C_f) est l'image de la courbe (Cg) par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.

Activité 10 Représentation graphique de la fonction: $x \mapsto ax^3$

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3$.
Soit (C_g) la courbe de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Montrer que la fonction g est impaire, puis dresser son tableau de variations.

3. Recopier et compléter le tableau suivant:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$g(x)$				

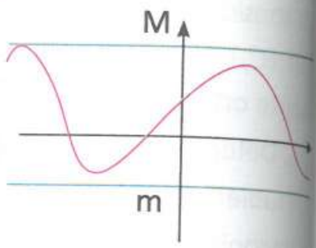
4. En s'aidant du tableau précédent, tracer la courbe de g.

II) Représenter graphiquement la fonction: $x \mapsto -2x^3$ (on peux s'inspirer des questions de la partie (I))

LE COURS

1 Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

DÉFINITION



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
- On dit que f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.
- On dit que f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

On a: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $0 < f(x) \leq 1$,

donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ (Elle est minorée par 0 et majorée par 1)

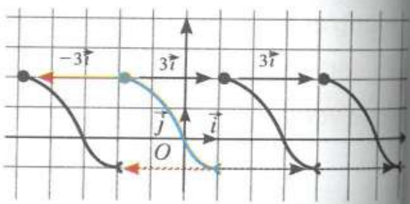
Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est bornée sur I si et seulement si il existe un réel positif k tel que : $|f(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$

2 Fonction périodique

DÉFINITION



Soit f une fonction numérique et D son ensemble de définition.

On dit que f est **périodique** s'il existe un réel strictement positif T tel que : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \text{ de } D; \text{ on a } (x+T) \in D \\ (\forall x \in D); f(x+T) = f(x) \end{cases}$

Le nombre réel T est appelé une période de la fonction f.

Exemples:

- 2π est une période de la fonction $x \mapsto \cos x$
- 2π est une période de la fonction $x \mapsto \sin x$
- π est une période de la fonction $x \mapsto \tan x$

Soit a un réel strictement positif.

- Les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{a}$
- La fonction $x \mapsto \tan(ax)$ est périodique de période $\dfrac{\pi}{a}$ (vérifier ces résultats)

Propriété

Si T est une période d'une fonction f, alors pour tout entier k de $\mathbb{Z}$; on a: $(\forall x \in D_f)$; $f(x+kT) = f(x)$

Remarque

Si f est une fonction d'ensemble de définition D et de période T, alors :

- Il suffit d'étudier ses variations sur: $[0,T] \cap D$ ou $\left[-\dfrac{T}{2};\dfrac{T}{2}\right] \cap D$ (ou sur tout intervalle d'amplitude T inclus dans D)
- La partie de la courbe de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}+(k+1)T \;;\; \dfrac{T}{2}+(k+1)T\right] \cap D$ où $k \in \mathbb{Z}$, se déduit de la partie de la courbe de f sur $\left[-\dfrac{T}{2}+kT \;;\; \dfrac{T}{2}+kT\right] \cap D$ par la translation de vecteur $\vec{u}(T;0)$

POUR COMPRENDRE

1 Fonction majorée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2$$

1. Développer : $(\sqrt{x^2+1} - x)^2$
2. Montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; on a:

$$(\sqrt{x^2+1} - x)^2 = x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2$$
$$= 1 + 2x^2 - 2x\sqrt{x^2+1}$$

2. **Montrons que la fonction f est majorée par $\frac{1}{2}$**

c'est-à-dire : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \leq \frac{1}{2}$

Soit x un réel, comparons $f(x)$ et $\frac{1}{2}$

On a: $f(x) - \frac{1}{2} = x\sqrt{x^2+1} - x^2 - \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2}[1 + 2x^2 - 2x\sqrt{x^2+1}]$$
$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x)^2 \text{ ; (d'aprés1))}$$

Or $(\sqrt{x^2+1} - x)^2 > 0$, donc $-\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x)^2 < 0$

d'où $f(x) < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est majorée par $\frac{1}{2}$

2 Fonction minorée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

Montrer que f est minorée par -2

Montrons que la fonction f est minorée par -2

C'est-à-dire: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) \geq -2$

Soit x un réel, comparons $f(x)$ et -2:

$$f(x) - (-2) = x - 1 + \sqrt{x^2+2x+3} + 2$$
$$= x + 1 + \sqrt{x^2+2x+3}$$

On a : $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ et

$(x+1)^2 + 2 > (x+1)^2$.

donc : $\sqrt{(x+1)^2+2} > \sqrt{(x+1)^2}$

d'où : $\sqrt{(x+1)^2+2} > |x+1|$

or : $|x+1| \geq -(x+1)$ (et aussi $|x+1| \geq x+1$)

d'où : $\sqrt{(x+1)^2+2} > |x+1| \geq -(x+1)$

donc : $\sqrt{(x+1)^2+2} + x + 1 > 0$.

par suite, $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f(x) > -2$.

La fonction f est donc minorée par -2

3 Fonction bornée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x^2+1}$$

1. Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$
2. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

1. Soit x un réel,

$$\frac{1}{2} - \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2|x|}{2(x^2+1)} = \frac{(|x|-1)^2}{2(x^2+1)}$$

On a: $\frac{(|x|-1)^2}{2(x^2+1)} \geq 0$ donc $\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

info
$x^2 = |x|^2$

2. **Montrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$**

Soit x un réel,

On a: $f(x) = \frac{x-x^2}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1}$

or: $0 \leq x^2 < x^2+1$, donc: $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$

d'où: $-1 < -\frac{x^2}{x^2+1} \leq 0$ (1)

On a: $\frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ (d'après la question 1))

c'est-à-dire: $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que: $-\frac{3}{2} < \frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$;

donc:

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $-\frac{3}{2} < f(x) \leq \frac{1}{2}$.

D'où f est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 Fonction périodique

Soit f une fonction numérique vérifiant les conditions suivantes : f est périodique de période 2 et $(\forall x \in [-1;1[)$; $f(x) = 2x - 1$.

1. Calculer $f(-1)$; $f(0)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Calculer $f(1)$; $f(2)$; $f(2018)$.

1. ▸ $-1 \in [-1;1[$; donc $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$
   ▸ $0 \in [-1;1[$; donc $f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$
   ▸ $\frac{1}{2} \in [-1;1[$; donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$

2. ▸ $1 \notin [-1;1[$ et $1 = -1 + 2$, donc

$f(1) = f(-1+2) = f(-1) = -3$

(car 2 est une période de f)

▸ $2 \notin [-1;1[$, $f(2) = f(0+2) = f(0) = -1$

▸ $2018 \notin [-1;1[$ et $2018 = 0 + 2 \times 1009$, donc

$f(2018) = f(0) = -1$ (car 2×1009 est une période de f)

LE COURS

3 Extremums d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un élément de l'intervalle I.

- On dit que $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou le maximum) de f sur l'intervalle I, si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- On dit que $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou le minimum) de f sur l'intervalle I, si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.

Exemples: Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-4;2]$ dont le tableau de variations est le suivant:

Déterminons les extremums de f sur l'intervalle $[-4;2]$.

x	-4		0		1		2
f	1	↘	-1	↗	3	↘	0

- Le maximum (ou la valeur maximale) d'une fonction f sur un intervalle I, s'il existe, est la plus grande valeur possible de $f(x)$ quand x décrit l'intervalle I.
- Le minimum (ou la valeur minimale) d'une fonction f sur un intervalle I, s'il existe, est la plus petite valeur possible de $f(x)$ quand x décrit l'intervalle I.

Sur l'intervalle $[-4;2]$, on a: $-1 \leq f(x) \leq 3$, or $-1 = f(0)$ et $3 = f(1)$ donc $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ pour tout $x \in [-4;2]$.

On en déduit que : $f(0)$ est le minimum de f sur $[-4;2]$, et $f(1)$ est le maximum de f sur $[-4;2]$.

Remarque:
On dit qu'une fonction f admet un extremum si elle admet un minimum ou un maximum

4 Comparaison de deux fonctions, interprétation géométrique

- **Égalité de deux fonctions**

DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement D_f et D_g.

On dit que f et g sont égales, et on note : $f = g$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- $D_f = D_g$ et
- $(\forall x \in D_f)$; $f(x) = g(x)$

- **Comparaison de deux fonctions**

DÉFINITION

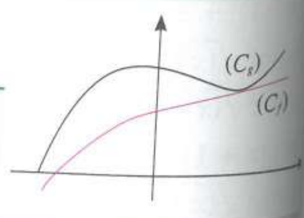
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que f est inférieure ou égale à g sur I, et on note: $f \leq g$; si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$

- **Interprétation géométrique**

DÉFINITION

Si $f \leq g$ sur un intervalle I, cela veut dire que la courbe de f se trouve au-dessous ou sur la courbe de g sur l'intervalle I.



Remarque

- $f < g$ sur I si et seulement si : $(\forall x \in I)$; $f(x) < g(x)$, et cela veut dire que (C_f) est strictement au- dessous de (C_g) sur I.
- $f \geq 0$ sur I si et seulement si : $(\forall x \in I)$; $f(x) \geq 0$, et cela veut dire que (C_f) est au-dessus ou sur l'axe des abscisses sur I.

1 Extremums d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

1. Montrer que $f(1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que $f(-1)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

1. **Montrons que $f(1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$**

Il s'agit de montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\geq f(1)$

Soit x un réel, on a : $f(1)=\dfrac{2}{3}$ et:

$$\begin{aligned}f(x)-f(1)&=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}\\&=\frac{3x^2+3-2x^2-2x-2}{3(x^2+x+1)}\\&=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}\\&=\frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

Or $3(x^2+x+1)>0$ (car $\Delta<0$ et $a>0$)

et $(x-1)^2\geq 0$, donc $\dfrac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}\geq 0$,

d'où $f(x)\geq f(1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Conclusion : $f(1)$ est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

2. **Montrons que $f(-1)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.**

Il s'agit de montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\leq f(-1)$

Soit x un réel, on a : $f(-1)=2$ et :

$$\begin{aligned}f(x)-f(-1)&=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-2\\&=\frac{x^2+1-2x^2-2x-2}{x^2+x+1}\\&=\frac{-(x^2+2x+1)}{x^2+x+1}\\&=\frac{-(x+1)^2}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

or : $x^2+x+1>0$ et $-(x+1)^2\leq 0$

d'où: $\dfrac{-(x+1)^2}{x^2+x+1}\leq 0$

c'est-à-dire $f(x)-f(-1)\leq 0$

donc: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)\leq f(-1)$

Conclusion : $f(-1)$ est bien le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

2 Position relative de deux courbes

Étudier la position relative de la courbe de f par rapport à la courbe de la fonction g, où $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=x+1$

On a: $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}$ et

$D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-1\}=D_f$

Étudions la position relative des courbe (C_f) et (C_g) sur D_f.

Méthode: Pour cela, étudions le signe de la différence : $f(x)-g(x)$ sur D_f.

Soit $x\in D_f$, on a:

$$f(x)-g(x)=x+\frac{1}{x+1}-x-1=\frac{1-x-1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		+		+	0	-	
$x+1$		-	0	+		+	
$f(x)-g(x)$		-	$\|$	+	0	-	
Position relative de (C_f) et (C_g)		(C_f) est au-dessous de (C_g)		(C_f) est au-dessus de (C_g)	0	(C_f) est au-dessous de (C_g)	

3 Comparaison de deux fonctions

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-3x+5$ et $g(x)=-x^2+2x+2$.

Comparer f et g sur $\mathbb{R}$

Méthode: Pour comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier le signe de la différence : $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel, on a:

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)\\&=2x^2-5x+3\\&=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

$\Delta=1$

$x_1=1$ et $x_2=\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		+	0	-	0	+	
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	

Donc: $f(x)>g(x)\iff x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$f(x)\leq g(x)\iff x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$

Conclusion: $f\leq g$ sur $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ et $f>g$ sur $\left]-\infty;1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

5 Opérations sur les fonctions

• Somme, produit et quotient de deux fonctions

DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D.

- La somme des fonctions f et g, notée $f+g$, est la fonction définie sur D par : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
- Le produit des fonctions f et g, noté $f\times g$ (ou $f.g$ ou fg), est la fonction définie sur D par : $(fg)(x)=f(x)\times g(x)$
- Le quotient des fonctions f et g, noté $\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie sur D (avec $\forall x\in D$; $g(x)\neq 0$) par: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

• Composée de deux fonctions

DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.

On pose : $D=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$

La fonction numérique h définie sur D par : $h(x)=g(f(x))$ est appelée **composée** des fonctions f et g dans cet ordre. Elle est notée: gof (se lit : g rond f)

Remarque

- $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$
- $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_g \text{ et } g(x)\in D_f\}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

6 Monotonie d'une fonction

• Sens de variations d'une fonction (Rappels)

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

- f est strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si : $(\forall(x_1;x_2)\in I^2)$; $(x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2))$
- f est strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si : $(\forall(x_1;x_2)\in I^2);(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2))$
- f est constante sur l'intervalle I si et seulement si : $(\forall(x_1;x_2)\in I^2)$; $f(x_1)=f(x_2)$

Remarque

- On peut également étudier la monotonie d'une fonction f sur un intervalle I, en étudiant le signe du taux d'accroissement $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ où x_1 et x_2 sont deux réels distincts de I.
- On dit que f est strictement monotone sur I si elle est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

Propriété

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à zéro.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ inclus dans D_f et I' le symétrique de I par rapport à zéro.

- Si f est une fonction paire, alors:
  - f est strictement croissante sur I, si et seulement si f est strictement décroissante sur I'.
  - f est strictement décroissante sur I, si et seulement si f est strictement croissante sur I'.
- Si f est une fonction impaire, alors f a la même monotonie sur les deux intervalles I et I'.

1 Ensemble de définition de la composée de deux fonctions.

Soit f et g les fonctions définie par :
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction gof puis son expression.

▸ **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction** gof **:**

on a : $D_f=\mathbb{R}^*$ **et** $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ Soit x un réel:

$$x\in D_{gof} \Longleftrightarrow x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g$$
$$\Longleftrightarrow x\neq 0 \text{ et } f(x)\neq 2$$

or: $f(x)=2 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x}=2$
$\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Donc $x\in D_{gof} \Longleftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq\dfrac{1}{2}$

D'où $D_{gof}=\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}$

▸ **Déterminons l'expression de** gof **:**

Soit $x\in D_{gof}$,

On a: $(gof)(x)=g(f(x))$

$$=\frac{2f(x)+1}{f(x)-2}$$
$$=\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{1}{x}-2}$$
$$=\frac{x+2}{1-2x}$$

Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\};(gof)(x)=\dfrac{x+2}{1-2x}\right)$.

2 Composée de deux fonctions

Soit f et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x-1$ et $h(x)=2x^2+3x-1$.
Déterminer la fonction g telle que : $h=gof$

Soit x un réel, on a : $h(x)=(gof)(x)=g(f(x))$
On pose : $y=f(x)$ donc $y=x-1$ d'où $x=y+1$.
donc : $g(y)=h(x)$

$$=2x^2+3x-1$$
$$=2(y+1)^2+3(y+1)-1$$
$$=2y^2+4y+2+3y+3-1$$
$$=2y^2+7y+4$$

Donc g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=2x^2+7x+4$

3 Image d'un intervalle par une fonction

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
Soit I un intervalle inclus dans D_f.
L'ensemble formé des éléments $f(x)$ quand x décrit l'intervalle I, est appelé l'image de l'intervalle I par la fonction f et noté $f(I)$. On a :
▸ $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$
▸ $y\in f(I)\Longleftrightarrow(\exists x\in I)/\,y=f(x)$

Remarque:
Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que : $I\subset D_f$
On a : $f(I)\subset J\Longleftrightarrow(\forall x\in I)\,;\,f(x)\in J$

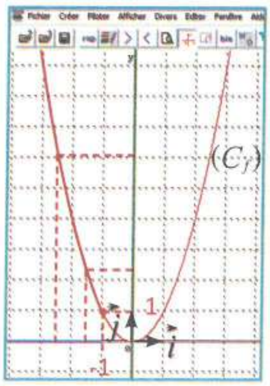
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1. Dresser le tableau de variations de f, puis tracer (C_f).
2. Déterminer graphiquement : $f(]-\infty;-1])$ et $f([0;1])$

1. ▸ Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

▸ Courbe de f : (C_f) est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

2. Graphiquement:



▸ x décrit l'intervalle $[0;1]$ équivaut à $f(x)$ décrit l'intervalle $[0;1]$.
Donc : $f([0;1])=[0;1]$
▸ x décrit l'intervalle $]-\infty;-1]$ équivaut à $f(x)$ décrit l'intervalle $[1;+\infty[$.
Donc:
$f(]-\infty;-1])=[1;+\infty[$.

LE COURS

7 Monotonie de la composée de deux fonctions monotones

Propriété

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur des intervalles I et J tels que : Pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$

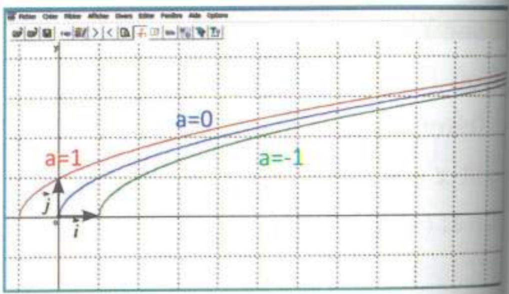
- Si f est strictement croissante sur I et g strictement croissante sur J, alors la fonction gof est strictement croissante sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I et g strictement décroissante sur J, alors la fonction gof est strictement croissante sur I.
- Si f est strictement croissante sur I et g strictement décroissante sur J, alors la fonction gof est strictement décroissante sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I et g strictement croissante sur J, alors la fonction gof est strictement décroissante sur I.

8 Représentation graphique des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$

- **Étude de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$ où a est un réel**

- Ensemble de définition : $D_f = [-a; +\infty[$
- Variations de f : la fonction f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$
- Tableau de variations :

x	$-a$	$+\infty$
f	0 ↗	



- Courbe de f : sur la figure ci-contre, on a représenté la courbe de f dans les cas $a = 0$; $a = -1$ et $a = 1$

Remarque

La courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

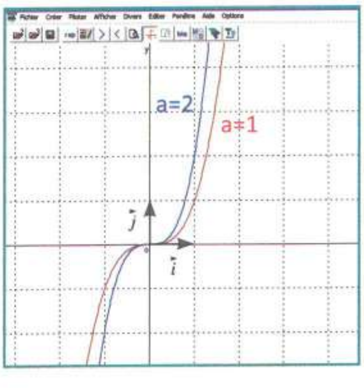
- **Étude de la fonction : $g : x \mapsto ax^3$, où a est un réel non nul**

- Ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R}$
- Variations :

si $a > 0$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
g	↗	

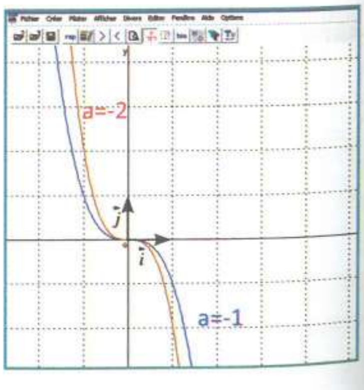
- Courbe de g : $(a > 0)$



si $a < 0$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
g	↘	

- Courbe de g : $(a < 0)$



1 Sens de variation des fonctions $f+\lambda$ et λf

Soit λ un nombre réel non nul.
Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
En utilisant la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de la fonction $g=f+\lambda$ sur I.

▸ **Étude de la monotonie de g sur l'intervalle I.**
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $u(x)=x+\lambda$
La fonction u est strictement croissante sur I, et pour tout $x\in I$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)+\lambda \\ &= u(f(x)) \\ &= (uof)(x) \end{aligned}$$

Donc $g=uof$

▸ Si f est strictement croissante sur I, alors on a :
$\begin{cases} f \text{ strictement croissante sur } I. \\ f(I)\subset\mathbb{R}, \text{ et } u \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{cases}$
Donc $g=uof=f+\lambda$ est strictement croissante sur I.

▸ Si f est strictement décroissante sur I, alors on a:
$\begin{cases} f \text{ strictement décroissante sur } I. \\ f(I)\subset\mathbb{R}, \text{ et } u \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{cases}$
Donc $g=uof=f+\lambda$ est strictement décroissante sur I.

Remarque : Sens de variation de la fonction $h=\lambda f$
On considère la fonction $v:x\mapsto\lambda x$ définie sur $\mathbb{R}$, on a: $h=vof$
En procédant de la même façon, pour $f+\lambda$, on obtient:
▸ si $\lambda>0$, alors la fonction λf a les mêmes variations que f sur I.
▸ si $\lambda<0$, alors le sens de variations de la fonction λf est le contraire de celui de f (f et λf ont des sens de variations contraires sur I).

2 Écrire une fonction comme composée de deux fonctions (Décomposition)

Étudier la monotonie de la fonction $h:x\mapsto\sqrt{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$, en utilisant la propriété de la monotonie d'une composée.

On a: $D_h=\mathbb{R}$
On peut décomposer la fonction h et l'écrire sous forme de la composée de deux fonctions :

$$\underbrace{x\xrightarrow{f}x^2+2\xrightarrow{g}\sqrt{x^2+2}}_{h=gof}$$

(où $g(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$)
Soit x un réel de $[0;+\infty[$,
On a : $(x^2+2)\in[0;+\infty[$, donc $f(x)\in[0;+\infty[$, donc $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$
Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc la fonction $h=gof$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On montre de même que la fonction $h=gof$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

3 Monotonie de la composée de deux fonctions

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^3+1}$
En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, étudier la monotonie de f sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

On considère les fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^3$ et $v(x)=\sqrt{x+1}$
Pour tout x de l'intervalle $[-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{u(x)+1} \\ &= v(u(x)) \\ &= (vou)(x) \end{aligned}$$

Donc $f=vou$
Tableaux de variations de u et v :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
u	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

x	-1	$+\infty$
v	0	$\nearrow$

On a : la fonction u est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ et $u([-1;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$
$(x\geq-1\Rightarrow x^3\geq-1)$
La fonction v est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, donc la fonction $f=vou$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

EXERCICES
RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 Monotonie de la composée de deux fonctions

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3x - 6\sqrt{x-1} + 8$$

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que la fonction f admet un minimum en 2 sur D.

2 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$

a. Dresser le tableau de variations de g.

b. Représenter la courbe de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, puis déterminer $g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$

c. Déterminer la fonction polynôme du second degré h telle que:

$(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\, f(x) = (hog)(x)$, puis déterminer les variations de f.

1 a. **Déterminons D.**

Soit x un réel.

On a: $x \in D \Longleftrightarrow x - 1 \geq 0$

$\Longleftrightarrow x \geq 1$

$\Longleftrightarrow x \in [1;+\infty[$

Donc $D = [1;+\infty[$

b. **Montrons que f admet un minimum en 2 sur D.**

C'est-à-dire: $(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\, f(x) \geq f(2)$

Soit $x \in [1;+\infty[$, comparons $f(x)$ et $f(2)$

On a : $f(2) = 8$

$$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= 3x - 6\sqrt{x-1} + 8 - 8 \\ &= 3x - 6\sqrt{x-1} \\ &= 3(x - 2\sqrt{x-1}) \\ &= 3[(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1] \\ &= 3[(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1] \\ &= 3(\sqrt{x-1} - 1)^2 \end{aligned}$$

or: $3(\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$, donc: $f(x) - f(2) \geq 0$

D'où : $(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\, f(x) \geq f(2)$

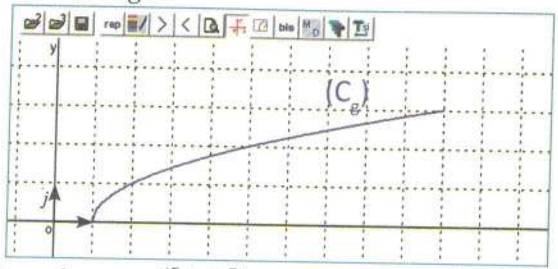
Donc f admet bien un minimum en 2 sur D.

2 a. **Tableau de variations de g.**

La fonction g est définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	1	$+\infty$
g	0 ↗	

b. **Courbe de g**



▸ **Déterminons $g([1;2])$**

La fonction g étant strictement croissante sur $[1;2]$, elle conserve donc l'ordre sur cet intervalle:

$x \in [1;2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(2)$

$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 1$

$\Rightarrow g(x) \in [0;1]$

Donc $g([1;2]) \subset [0;1]$ (1)

Réciproquement, soit $b \in [0;1]$

La droite d'équation $y = b$ coupe la courbe de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[1;2]$

Donc : $(\forall b \in [0;1])\,;\,(\exists! x \in [1;2]) \,/\, g(x) = b$

Donc : $[0;1] \subset g([1;2])$ (2)

Des relations (1) et (2) on déduit que $g([1;2]) = [0;1]$

▸ On déduit de même que $g([2;+\infty[) = [1;+\infty[$

c. **Déterminons la fonction polynôme h**

Soit x un réel de l'intervalle $[1;+\infty[$

On a: $f(x) - 8 = 3(\sqrt{x-1} - 1)^2$ (d'après la question 1) b)

Donc: $f(x) = 3(\sqrt{x-1} - 1)^2 + 8$

$= 3(g(x) - 1)^2 + 8$

On considère la fonction polynôme h définie par :

$h(x) = 3(x-1)^2 + 8$

On a : $f(x) = h(g(x)) = (hog)(x)$

Donc : $f = hog$

▸ **Les variations de f :**

La tableau de variations de h est le suivant :

x	$+\infty$	1	$-\infty$
h	↘	8	↗

(h est une fonction polynôme du second degré)

On a : $f = hog$

$\begin{cases} \bullet \text{ La fonction } g \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [1;2] \\ \bullet\ g([1;2]) = [0;1] \\ \bullet \text{ La fonction } h \text{ est strictement décroissante sur } [0;1] \end{cases}$

Donc : $f = hog$ est strictement décroissante sur $[1;2]$

$\begin{cases} \bullet \text{ La fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [2;+\infty[\\ \bullet\ g([2;+\infty[) = [1;+\infty[\\ \bullet \text{ La fonction } h \text{ est strictement croissante sur } [1;+\infty[\end{cases}$

Donc: $f = hog$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

EXERCICE RÉSOLU 2 Économie et fonctions

Une personne a acheté un terrain rectangulaire de périmètre 40m à un prix global égal à 200.000Dh. Déterminer les dimensions de ce terrain pour que le prix du mètre carré soit minimal.

Soit x et y les dimensions de ce terrain rectangulaire.

Soit S son aire et P son périmètre.

On a : $P = 40 = 2(x+y)$ donc $x + y = \dfrac{P}{2} = 20$.

on a: $S = xy$ donc $S = x(20-x) = -x^2 + 20x$.

Soit P_u le prix du mètre carré (prix unitaire).

Le prix total de ce terrain est : $P_T = S \times P_u$ donc $P_u = \dfrac{P_T}{S}$

On a : $P_T > 0$ et $S > 0$, donc pour que P_u soit minimal il faut et il suffit que S soit maximale.

Étudions les variations de S :

On a : $S = -x^2 + 20x$ (fonction polynôme du second degré avec : $a < 0$ et $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 10$)

d'où le tableau de variations de S est :

x	0		10		20
S		↗	100	↘	

(car $x + y = 20$ et $y \geq 0$, donc: $0 \leq x \leq 20$)

L'aire S est maximale pour $x = 10$.

Donc le prix du mètre carré est minimal pour $x = 10$.

or $y = 20 - x$ donc $y = 10$.

Le prix du mètre carré est minimal si ce terrain est un carré de $10m$ de côté.

EXERCICE RÉSOLU 3 Monotonie de la composée de deux fonctions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$

1 Montrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\dfrac{1}{2}$.

2 On pose : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $u(x) = \sqrt{x}$

a. Déterminer la fonction v telle que : $f = vou$.

b. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

1 Soit x un réel positif,

▸ On a : $f(x) - 2 = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - 2 = \dfrac{-5}{\sqrt{x} + 2}$

On a : $\dfrac{-5}{\sqrt{x} + 2} < 0$ donc $f(x) - 2 < 0$.

d'où: $f(x) < 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

donc: f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}^+$.

▸ $f(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$

On a : $\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \geq 0$, donc $f(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0$.

d'où $f(x) \geq -\dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

La fonction f est donc minorée par $-\dfrac{1}{2}$.

2 a. **Déterminons la fonction v telle que:**

$f = vou$ où $u : x \mapsto \sqrt{x}$

On a : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{2u(x) - 1}{u(x) + 2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

On pose : $v(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

alors : $f(x) = \dfrac{2u(x) - 1}{u(x) + 2} = v(u(x)) = (vou)(x)$

pour tout $x \geq 0$

Donc : $f = vou$, où $v : x \mapsto \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

b. **Sens de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.**

▸ Tableau de variation de u

x	0		$+\infty$
u	0	↗	

▸ Tableau de variation de v

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
v		↗	‖	↗	

On a : $f = vou$

▸ La fonction u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

▸ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $u(x) \geq 0$ donc $u(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$

▸ La fonction v est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, la fonction $f = vou$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 4 Comparaison des fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

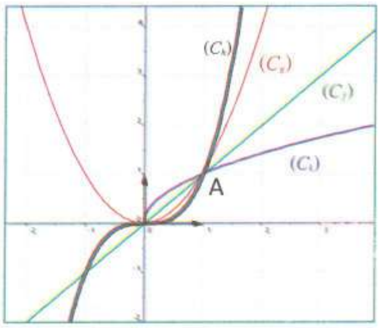
Soit f, g, h et k les fonctions définies par :

$f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^3$ et $k(x) = \sqrt{x}$

1 Représenter dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes des fonctions f, g, h et k en utilisant des couleurs différentes.

2 En utilisant le graphique, comparer ces fonctions suivant les intervalles.

1 Construction des courbes de f, g, h et k.



2 Comparaison de ces fonctions graphiquement,

- Sur l'intervalle $[0;1]$
  - ▸ (C_h) est au-dessous de (C_g) donc $h \leq g$
  - ▸ (C_g) est au-dessous de (C_f) donc $g \leq f$
  - ▸ (C_f) est au-dessous de (C_k) donc $f \leq k$

D'où, sur l'intervalle $[0;1]$: $h \leq g \leq f \leq k$

- Sur l'intervalle $[1;+\infty[$,
  - ▸ (C_k) est au-dessous de (C_f) donc $k \leq f$
  - ▸ (C_f) est au-dessous de (C_g) donc $f \leq g$
  - ▸ (C_g) est au-dessous de (C_h) donc $g \leq h$

D'où, sur l'intervalle $[1;+\infty[$: $k \leq f \leq g \leq h$

Les courbes (C_f); (C_g); (C_h) et (C_k) ont deux points communs $O(0;0)$ et $A(1;1)$

Donc : ▸ $\forall x \in \{0;1\}$; $x^3 = x^2 = x = \sqrt{x}$

▸ $(\forall x \in]0;1[)$; $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$

▸ $(\forall x \in]1;+\infty[)$; $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$

On remarque aussi que :

▸ $(\forall x \in]-\infty;-1[)$; $x^3 < x < x^2$

▸ $(\forall x \in]-1;0[)$; $x < x^3 < x^2$

▸ $(\forall x \in \{-1;0\})$; $x^3 = -x^2 = x$

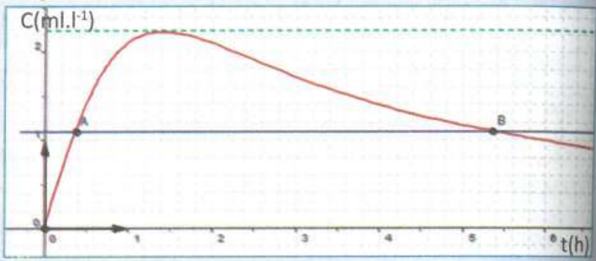
Remarque : ses résultats peuvent être vérifiés algébriquement.

EXERCICE RÉSOLU 5 Concentration maximale

Les expériences faites sur un médicament, montrent que sa concentration volumique en ml par litre du sang (après l'avoir injecté dans le corps humain) à l'instant t (en heures) est donnée par la relation :

$f(t) = \dfrac{6,3t}{t^2+2}$; $t \geq 0$

La figure suivante représente la courbe de la fonction f :



Par lecture graphique, déterminer :

1 Une valeur approchée de l'instant t auquel la concentration est maximale.

Quelle est la valeur de cette concentration maximale?

2 Les instants en lesquels la concentration est inférieure ou égale à la moitié de sa valeur maximale.

1 Par lecture graphique, on remarque que la fonction f admet un maximum pour $t = 1,4$ (valeur approchée) la valeur de ce maximum est : $2,2$.

Donc, la concentration est maximale $1h30$ après l'avoir injecté dans le corps humain, valeur de cette concentration maximale est : $C_{max} \simeq 2,2ml.l^{-1}$

2 La demi-concentration maximale est :

$\dfrac{C_{max}}{2} \simeq \dfrac{2,2}{2} ml.l^{-1} = 1,1ml.l^{-1}$

On remarque que la droite (D) d'équation $y = 1,1$ coupe la courbe de f en deux points A et B d'abscisses respectives $0,4$ et $5,4$.

(C_f) se trouve au-dessous de la droite (D) sur les intervalles $[0;0,4]$ et $[5,4;+\infty[$.

Donc : après avoir injecté le médicament dans le corps, la concentration volumique est inférieure ou égale à la demi-concentration maximale avant $0,4h = 24\,\text{min}$ et après $5,4h = 5h24\,\text{min}$.

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Que signifie, fonction majorée sur un intervalle I ?

2 Que signifie, fonction minorée sur un intervalle I ?

3 Interpréter géométriquement $f \leq g$ sur un intervalle I.

4 Quelle est la monotonie de la fonction $x \mapsto ax^3$ sur $\mathbb{R}$ où $a \neq 0$?

5 Que signifie $f(a)$ est un extremum d'une focntion f sur un intervalle I ?

6 Quelle est la période de la fonction $x \mapsto \cos(ax)$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$?

7 Si f est croissante sur un intervalle I, quelle est la monotonie de la fonction λf sur l'intervalle I, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment comparer deux fonctions définies sur un intervalle I ?

2 Comment comparer, graphiquement, deux fonctions?

3 Comment montrer que le réel a est un minimum de la fonction f sur D_f ?

4 Comment montrer que f admet un minimum en a sur D_f ?

5 Comment utiliser la période T d'une fonction périodique.
- Pour réduire l'ensemble d'étude?
- Pour représenter cette fonction sur $[0; 4T] \cap D_f$?

6 Comment déterminer l'ensemble de définition de la composée de deux fonctions f et g dans cet ordre?

7 Quelles sont les étapes à suivre pour déterminer la monotonie de la composée de deux fonctions monotones?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Sur l'intervalle $[0; 2]$, la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$ est :	croissante	bornée	sa courbe est une droite
2 La fonction: $x \mapsto \cos 2x$ est périodique dont une période est.	π	$\frac{\pi}{2}$	2π
3 Si $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) =$ [illegible], alors $(gof)(x) =$	$5(2x^2 + 1)$	$2(5x)^2 + 1$	$10x^2 + 1$
4 La fonction: $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ admet sur l'intervalle $]-1; 1[$ une valeur:	minimale	maximale	n'admet pas d'extremum
5 Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x$. On a pour tout $x \in [2; +\infty[$	$f \leq g$	$g \leq f$	$f = g$

Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-3		1		2		4
f	2	↘	0	↗	6	↘	-1

	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
6 $f([-3; 1]) =$	$[0; 2]$	$[2; 6]$	$[-3; 1]$
7 $f([1; 2]) =$	$[0; 2]$	$[0; 6]$	$[-1; 6]$
8 $f([-3; 4]) =$	$[-2; 0]$	$[-1; 2]$	$[-1; 6]$

EXERCICES

Exercices d'application

Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée - Fonction périodique

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f est majorée par le nombre 1 sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + \dfrac{1}{x^2+1}$.
Montrer que f est minorée par le nombre -2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.
Montrer que f est majorée par le nombre 2.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq f(x) \leq 1$.

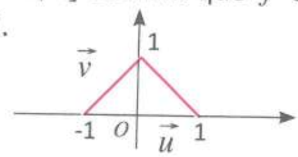
Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \cos x$.
Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f(x)| \leq 3$,
En déduire que f est bornée.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$
Montrer que f est bornée sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{1 + x^4}$.
1. Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f(x)| \leq \dfrac{x^4}{1+x^4} + \dfrac{x^2}{1+x^4}$
2. Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\dfrac{x^4}{1+x^4} \leq 1$ et $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que f est bornée.

Exercice 8 : Montrer dans chacun des cas suivants que T est une période de la fonction f :
1. $f(x) = cos(2x) + sin^2(x)$; $T = \pi$
2. $f(x) = sin(3x) + cos(2x)$; $T = 6\pi$
3. $f(x) = tan x + sin(2x)$; $T = \pi$

Exercice 9 : Reproduire la figure suivante et compléter la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4; 4]$ sachant que f est périodique de période 2.



Comparaison de deux fonctions

Exercice 10 : Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :
1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
2. $f(x) = -x^2 - x + 3$ et $g(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.
3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
4. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$.
5. $f(x) = x^3 - x - 1$ et $g(x) = 2x - 3$.

Extremums d'une fonction

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en 2.

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.
Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en 1.

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.
1. Vérifier que f est impaire.
2. **a)** Montrer que $f(1)$ est le minimum de f sur $[0; +\infty[$.
b) En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; 0])$; $f(x) \leq 2$.

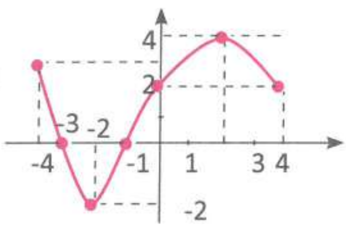
Exercice 14 : Soit f la fonction définie sur $[-8; 7]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-8		-4		0		4		7
f	0	↘	-2	↗	1	↘	0	↗	2

Déterminer les extremums de f sur chacun des intervalles suivants:

1. $[0;7]$ 2. $[-4;4]$
3. $[-8;4]$ 4. $[-4;7]$

Exercice 15 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$, dont la représentation graphique est la suivante :



1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les extremums de f.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-4;4]$.

Composée de deux fonctions

Exercice 16 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : f ; g ; gof ; et fog.
2. Déterminer l'expression de $(gof)(x)$ pour tout $x \in D_{gof}$ et $(fog)(x)$ pour tout x de D_{fog}.

Exercice 17 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : f ; g ; fog ; et gof.
2. Déterminer l'expression de $(fog)(x)$ pour tout $x \in D_{fog}$ et $(gof)(x)$ pour tout x de D_{gof}.

Exercice 18 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}+3}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

Déterminer la fonction h telle que : $f = hog$.

Monotonie de la composée de deux fonctions

Exercice 19 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ; g et gof.
2. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.
3. Déterminer les variations de la fonction gof.

Exercice 20 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.
2. Étudier la monotonie de la fonction gof sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique définie sur $[-3;3]$; dont le tableau de variations est :

x	-3		-1		0		2		3
f	-2	↗	0	↗	3	↘	1	↗	4

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

1. $h(x) = -f(x)$ 2. $g(x) = f(x) + 3$
3. $u(x) = (f(x))^2$ 4. $v(x) = -f(x) + 3$

Fonctions usuelles

Exercice 22 : Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 2x^3$ 2. $f(x) = -\dfrac{x^3}{8}$
3. $f(x) = \sqrt{x+1}$ 4. $f(x) = \sqrt{x-3}$

Exercice 23 : Construire dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f), (C_g) et (C_h) des fonctions f, g et h définies par :

$$f:\begin{cases} f(x) = x^3 \ ; \ x \in [0;1] \\ f(x) = \sqrt{x} \ ; \ x \in [1;+\infty[\\ f \text{ est impaire} \end{cases}$$

et $h(x) = f(-x)$

$$\text{et } g:\begin{cases} g(x) = -\dfrac{1}{x} \ ; \ x \leq -1 \\ g(x) = |x| \ ; \ x \in [-1;0] \\ g \text{ est paire} \end{cases}$$

Exercice 24 : 1. Représenter dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes des fonctions suivantes :

a) $f: x \mapsto \dfrac{x^3}{8}$ **b)** $g: x \mapsto \left|\dfrac{x^3}{8}\right|$ **c)** $h: x \mapsto \sqrt{x+3}$

EXERCICES

2. On considère dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$(E): x^6 - 64(x+3) = 0$.
a) Montrer que l'équation (E) n'admet aucune solution dans $]-\infty; -3]$.
b) En utilisant les courbes précédentes, montrer que l'équation (E) admet deux solutions dans $]-3; +\infty[$.

Exercice 25 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et gof.
2. Déterminer les variations de chacune des fonctions f et g.
En déduire les variations de la fonctions gof.

Exercices de renforcement

Exercice 26 : Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4	-3	1	5
f	2 ↘	-1 ↗	0 ↘	-2

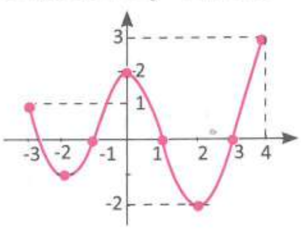
1. Déterminer : $f([-3;1])$ et $f([-4;5])$
2. Déterminer : $f([-3;5])$ et $f(]-4;5[)$

Exercice 27 : Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x - 2$ pour $I = [-4;1]$ puis, pour $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2$ pour $I = [-3;2]$ puis, pour $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -2x^2 - 4x - 5$ pour $I = [-1;1]$ puis, pour $I = [-3;2]$.

Exercice 28 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-3;4]$ dont la courbe est la suivante :

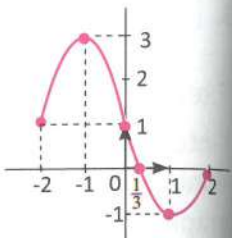
1. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.
2. Déterminer les extremums de la fonction f puis le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.



3. Déterminer graphiqument : $f([-2;0])$ et $f([-3;4])$.

Exercice 29 : La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Déterminer les extremums de la fonction f.
3. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
4. Déterminer le signe de $f(x)$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[-1;0]$.



Exercice 30 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 - 4x + 6)$ et $g(x) = \sqrt{x}$

Soit (C_f) et (C_g) les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. **a)** Donner une équation de l'axe de symétrie de la parabole (C_f).
b) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole (C_f).
2. **a)** Vérifier que : $f(1) = g(1)$ et $f(4) = g(4)$
b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère .
3. On considère dans $\mathbb{R}^+$ l'inéquation:
$(I): x(x-4) + 3(2 - \sqrt{x}) < 0$
a) Montrer que l'inéquation (I) est équivalente à $f(x) < g(x)$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation (I).

Exercice 31 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}.$$

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que : $f(x) \geq 3\sqrt{3}$ pour tout $x \in]-\infty; -2[$.

Exercice 32 : Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{2x - 3}$$

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $f(2)$ est le minimum de f sur D.

Exercice 33 : Une société fabrique de petites machines.

- chaque machine est vendue à 400dhs
- le coût de fabrication de x machines est donné par la relation : $C(x) = 0,02x^2 + 160x + 400$.

1. Déterminer le nombre de machines à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.
2. Quelle est la valeur de ce bénéfice maximal?

Exercice 34 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$$

1. a) Déterminer D, l'ensemble de définition de la fonction f.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -2\sqrt{2}$
2. Montrer que $-2\sqrt{2}$ est le minimum de f sur D.

Exercice 35 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que f est majorée par le nombre $\frac{1}{2}$ sur $]-\infty;0]$.

Exercice 36 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1}$$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.
2. **a)** Montrer que la fonction f est minorée par 0 sur D.
b) Montrer que $f(1)$ est le maximum de f sur D.

Exercice 37 : Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x) = \sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 2}$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[2;7]$
2. Montrer que g est strictement croissante sur $[2;7]$
3. On considère dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$(E): x^3 - 3x^2 + 1 = \sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 2}$
a) Vérifier que : $f(3) = g(3)$.
b) En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Exercice 38 : 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)^2$

a) Dresser le tableau de variations de f.
b) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g.
b) Montrer que g est la composée de la fonction f et d'une autre fonction h à déterminer.
c) Déterminer les variations de la fonction g.

Exercice 39 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Montrer que f est minorée par 2.
3. **a)** Montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $[0;1[$.
b) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $]-1;0]$.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2|x| + 3}$$

En utilisant la propriété des variations de la composée de deux fonctions, étudier les variations de la fonction g sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $[0;1[$.

Exercice 40 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

1. **a)** Déterminer D l'ensemble de définition de f.
b) Montrer que: $1 \leq f(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$
a) Vérifier que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = 1 + (g(x))^2$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction g et étudier le signe de $g(x)$ sur D.
c) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles : $[1;+\infty[$; $]-1;1]$ et $]-\infty;-1[$.

Exercice 41 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 8}$$

1. **a)** Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.
b) Montrer que : $(\forall x \in D)$; $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$.
2. On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 - 4x + 5$ et $v(x) = \dfrac{x + 1}{x + 3}$.

EXERCICES

a) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

b) En utilisant les variations des fonctions u et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles: $]-\infty;2]$ et $[2;+\infty[$.

Exercice 42 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x+2$ et $g(x)=x\sqrt{x}$

1. a) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur D.

c) En déduire que pour tout $x\in[0;1]$; $g(x)\in[0;1]$

2. Dresser le tableau de variations de f.

3. En utilisant les variations des fonctions f et g, étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$.

Exercice 43 : Soit f et g les fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

1. a) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g.

b) Représenter dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) et (C_g) des fonctions f et g.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$h(x)=\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonctions, montrer que la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$, puis montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$; $0\leq h(x)<1$.

Exercice 44 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $|f(x)|\leq 1$

b) Montrer que f est impaire.

2. a) Montrer que pour tous réels x et y, on a:
$$f(x)-f(y)=\frac{2(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}(x-y)$$

b) En déduire les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $[0;1]$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit g et h les fonctions définies par :
$$g(x)=\sqrt{x+1} \text{ et } h(x)=\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Déterminer les variations de la fonction g sur son ensemble de définition et représenter sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Déterminer graphiquement $g([-1;0])$ et $g([0;+\infty[)$

c) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $h(x)=(gof)(x)$

d) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 45 :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+x^2}$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R}^+)$; $\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\dfrac{3}{2}$.

Exercice 46 : Soit f la fonction définie par :
$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x^2-4x+3}$$

1. a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2x^2-4x+3>0$

b) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{1}{2}<f(x)\leq 1$

2. Soit u et v les fonctions définies par :
$u(x)=x^2-2x$ et $v(x)=\dfrac{x+2}{2x+3}$.

a) Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions u et v.

b) En utilisant les variations des fonctions u et v, étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par :
$$g(x)=\sqrt{\frac{x^2-2x+2}{2x^2-4x+3}}$$

a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<g(x)\leq 1$.

b) Étudier la monotonie de g sur chacun des intervalles : $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$.

Exercice 47 : On considère la fonction numérique f définie par :
$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-2}}$$

1. a) Déterminer D, l'ensemble de définition de f.

b) Vérifier que:
$(\forall x\in]1;+\infty[)$; $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2=x^2-\dfrac{2}{x}+1$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x) = x^2 - \dfrac{2}{x} + 1$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) En déduire la monotonie de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 48 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x+2}$

1. **a)** Déterminer D, l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que : $(\forall x \in D)$; $f(x) \geq -\dfrac{1}{4}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.

2. Soit u et v les fonctions définies par : $u(x) = x^2 - x$ et $v(x) = \sqrt{x+2}$

a) Déterminer les variations de la fonction v sur son ensemble de définition et tracer sa courbe.

b) Déterminer graphiquement $v\left(\left[-2; -\dfrac{7}{4}\right]\right)$ et $v\left(\left[-\dfrac{7}{4}; +\infty\right[\right)$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$.

d) Vérifier que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = (uov)(x)$

En déduire la monotonie de f sur chacun des intervalles $\left[-2; -\dfrac{7}{4}\right]$ et $\left[-\dfrac{7}{4}; +\infty\right[$.

Exercice 49 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

1. **a)** Déterminer D, l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que $f(2)$ est le minimum de f sur D.

2. Soit u et v les fonctions définies par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x-1} - 1$.

a) Montrer que la fonction v est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

b) Vérifier que : $(\forall x \in [1; +\infty[)$; $f(x) = (uov)(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 50 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + x$

1. **a)** Montrer que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2 + (1+y)x + y^2 + y + 1 > 0$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-\infty; 10]$ par : $g(x) = \sqrt{10 - x}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; 10]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution.

3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{1 + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire la monotonie de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 51 : Une société fabrique un produit A. Une étude a montré que le coût total (en milliers de dirhams) de fabrication de x unité du produit A est donné par : $C(x) = x^2 + 132x + 3000$ et que la loi de la demande est donnée par la relation : $p(x) = -2x^2 - 8x + 1056$ (en milliers de dirhams) où $p(x)$ est le prix unitaire quand la quantité produite est x, où $x \leq 20$

Déterminer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal et déterminer la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 52 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -15x^2 + 450x - 1875$

1. **a)** Montrer que f est croissante sur $]-\infty; 15]$ et décroissante sur $[15; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire le maximum de f.

2. Pour sa pièce théâtrale, une équipe a loué une salle contenant 450 places au prix global de 1875dhs.

On admet que si x est le prix en dirhams d'un ticket, et y le nombre de tickets vendus, alors : $y = 450 - 15x$.

a) Vérifier que la recette de la vente de y tickets (en dirhams) est $-15x^2 + 450x$.

b) Vérifier que le bénéfice réalisé par cette équipe théâtrale (en dirhams) est donné par : $f(x) = -15x^2 + 450x - 1875$

c) Quel est le prix du ticket (en dh) réalisant un bénéfice maximal?

Exercice 53 : Après l'apparition d'une épidémie dans un pays, on a remarqué que le nombre de personnes atteintes par la maladie, t jours après sa première apparition, est donné par la relation :

$f(t) = 45t^2 - t^3$ où $t \in [0;45]$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;30]$ et décroissante sur $[30;45]$
2. Déterminer le jour où le nombre des malades est maximal.

Exercice 54 : Soit (Δ) la partie du plan définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 2\sqrt{x} \end{cases}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par:
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que la courbe de f se trouve dans la partie (Δ).

Exercice 55 : Un produit A se vend en détail au prix de x dirhams le kilogramme.
La quantité V vendue est donnée par la relation:
$V(x) = \dfrac{8}{x} - \dfrac{1}{2}x + 12$ où $5 \leq x \leq 20$.

1. Déterminer la quantité V dans les cas suivants : $x = 8$ et $x = 10$.
2. Déterminer le prix associé à la quantité $10kg$.
3. **a)** Montrer que la fonction : $x \mapsto V(x)$ est décroissante sur $[5;20]$.

b) Que peut-on déduire pour la quantité $V(x)$ quand le prix x augmente?.

Exercice 56 : 1. Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I.
Montrer que :
$\forall (x;x') \in I^2 ;\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0;25]$ par :
$f(x) = \sqrt{\sqrt{25-x}} + \sqrt{\sqrt{x}}$

a) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{25}{2}\right]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 4$ n'admet aucune solution dans $[0;9]$ et que l'équation $f(x) = 3$ admet au plus une solution dans $[0;9]$.

Exercice 57 : Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Représenter dans le même repère les courbes des fonctions f et g définies par :
$f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = -x^3$
2. En déduire que l'équation $x^3 + \sqrt{x+1} = 0$ admet une unique solution α telle que :
$-\dfrac{7}{8} < \alpha < -\dfrac{3}{4}$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[-1;+\infty[$ l'inéquation $x^3 + \sqrt{x+1} \leq 0$.
(Donner l'ensemble de solutions en fonction de α)

La notion de fonction à travers l'Histoire

Il a fallu beaucoup de temps et d'efforts pour dégager et clarifier le concept de fonction. On rencontre chez les Baryloniens, avec leurs tables numériques et astronomiques, une vague idée de fonction.
Thomas Bradycardie (1290-1349) introduit le concept de fonction puissance, et Nicole Oresme (1323-1382), évêque de Normandie, explore les règles pour calculer sur les fonctions puissances; il est l'un des précurseurs du repérage graphique pour décrire les trajectoires des astres (il utilise les mots "latitude" et "longitude" jusqu'au XVII^{ème} siècle, les courbes sont étudiées d'un point de vue géométrique, sans faire appel à la notion de fonction associée à ces courbes. Cette association se dessine avec Descartes (1596-1650) et Newton (1642-1727).

les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	1 / 2	1 / 3	1	2	2	1	2	3		

Chapitre 3

François Viète

François Viète est né en 1540 à Fontenay-Le-Comte en Vendée. En 1571, il publie un premier ouvrage de trigonométrie "Canon mathematicus" où il présente de nombreuses formules de cosinus et sinus qui permettent de simplifier les calculs, ainsi que des tables trigonométriques.
Viète fait évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui. Depuis Mohammed al Battani (850 ;929) et Muhammad Abu'l-Wafa (940 ;998) elle n'avait pas connu de telles avancées.

Objectifs de la leçon

- Reconnaître une suite numérique (Notation - détermination des termes d'une suite);
- Reconnaître une suite récurrente et utiliser le raisonnement par récurrence;
- Reconnaître une suite majorée, une suite minorée et une suite bornée;
- Déterminer la monotonie d'une suite;
- Reconnaître une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme;
- Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique;
- Reconnaître une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme;
- Déterminer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique;
- Reconnaître des situations de suites arithmétiques ou géométriques;
- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques pour résoudre des problèmes.

Capacités attendues

- Utiliser le raisonnement par récurrence.
- Être capable d'étudier une suite (majoration - minoration - monotonie).
- Connaître une suite arithmétique ou géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
- Calcul de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaître des situations de suites arithmétiques ou géométriques.
- Utiliser les suites arithmétiques ou géométriques pour résoudre des problèmes.

Le contenu

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 1 Listes infinies

Observer, puis compléter par quatre nombres convenables pour continuer la série de chacune des listes suivantes :

1. 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; ...

2. $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; ...$

3. $-3 ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{4} ; -\frac{3}{8} ; -\frac{3}{16} ; -\frac{3}{32} ; ...$

4. $\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; \frac{5}{6} ; \frac{6}{7} ; ...$

Info :
▸ Chacune de ces listes de nombres s'appelle suite numérique.
▸ Les nombres 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... de la 1ère liste sont appelés les termes de la première suite.

Activité 2 Notation des termes d'une suite

Les nombres pairs positifs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2n$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Le nombre 0 est le premier nombre pair positif.
Écrire la liste des dix premiers nombres pairs positifs.

2. Si note u_0 le premier nombre de la liste obtenue, u_1 le deuxième nombre, u_2 le troisième nombre, ... et ainsi de suite, alors obtient la liste :
$u_0 ; u_1 ; u_2 ; ...$

a Quel est le rang du terme u_8 ?

b Déterminer la valeur de chacun des termes : u_8 ; u_{15} et u_{2018}.

$u_n = 2n$ est appelé **«le terme général»** de la suite numérique : 0; 2; 4; 6; ...

c Écrire u_{n+1} et u_{3n} en fonction de n.

3. Quel est le terme général de la suite numérique : 1; 3; 5; 7; 9; ...?

Info :
▸ u_0 ; u_1 ; u_2 ;... s'appellent **les termes** d'une suite.
▸ Si u_0 est le premier terme, alors :
- **le rang** de u_0 est 1.
- **le rang** de u_1 est 2.

Activité 3 Suite récurrente

Ahmed a décidé d'économiser une somme d'argent de la façon suivante :

▸ Le premier jour, Ahmed va déposer deux dirhams dans une boîte.

▸ Le deuxième jour, Ahmed va déposer le double du contenu de la boîte puis retirer un dirham.

▸ Le troisième jour, Ahmed va déposer encore le double du contenu de la boîte (du 2ième jour) puis retirer un dirham, et ainsi de suite pour les autres jours.

On note : u_1 la somme déposée par Ahmed le premier jour.
u_2 la somme déposée par Ahmed le deuxième jour.
u_3 la somme déposée par Ahmed le troisième jour.
•
•
•
u_n la somme déposée par Ahmed le nième jour.

Info :
On note souvent une suite par l'un des symboles suivants :
(u_n) ou (v_n) ou (w_n) ou (a_n) ou (b_n) ou (x_n) ou (y_n) ou (t_n).

On définit ainsi une suite numérique notée (u_n).

Les nombres u_1 ; u_2 ; u_3 ; ... ; u_n ;... sont les termes de la suite (u_n).

1. Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5.

2. **a** Peut-on calculer u_7 sans connaître u_6 ?

   b Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n.

La relation obtenue est appelée relation de récurrence.

3. Quelle est la somme qu'a économisée Ahmed durant les cinq premiers jours?

4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, u_n = 2^{n-1} + 1$

On dit dans ce cas que la suite (u_n) est définie par une expression explicite.

> *Info :*
> La suite (u_n) est appelée suite récurrente.

Activité 4 Suite majorée - suite minorée - suite bornée

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par :

$a_n = \frac{3}{2}n + 5$ et $b_n = \frac{n+1}{2n+1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer a_0 ; a_1 ; b_0 et b_1.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, a_n \geq 5$

   et que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, b_n \leq 1$

On dit dans ce cas que la suite (a_n) est minorée par 5 et que la suite (b_n) est majorée par 1.

3. On considére les suites numériques (u_n) et (v_n) définie par:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, u_n = \frac{1}{n}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, v_n = 2\cos(n) + 3$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

> *Info :*
> Soit (u_n) une suite numérique.
> Si la suite (u_n) est à la fois majorée et minorée, on dit que (u_n) est bornée.

Activité 5 Monotonie d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = (n+1)(n+2)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **a** Calculer : u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3.

   b Ordonner les nombres u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 dans l'ordre croissant.

   c Calculer en fonction de n, la différence $u_{n+1} - u_n$; puis en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} > u_n$.

On dit dans ce cas que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. **a** Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n, puis montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

   (Remarquer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n > 0$)

   b En déduire encore une fois que la suite (u_n) est strictement croissante.

> *Info :*
> Soit (u_n) une suite numérique.
> ▸ (u_n) est **croissante** signifie que :
> $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n \leq u_{n+1}$
> ▸ (u_n) est **décroissante** signifie que :
> $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} \leq u_n$

ACTIVITÉS

Activité 6 Suite arithmétique

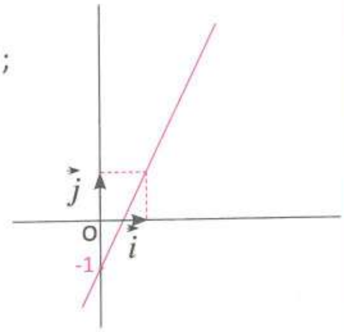
La figure ci-dessous est une représentation graphique de la fonction :
$f: x \longmapsto 2x - 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = f(n)$.

1. Recopier la figure, puis placer les points $A(0;u_0)$; $B(1;u_1)$; $C(2;u_2)$; $D(3;u_3)$ et $E(4;u_4)$.

2. En utilisant le graphique, vérifier que : $u_2 = u_1 + 2$ et $u_3 = u_2 + 2$; conjecturer la relation entre u_{20} et u_{19}.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = u_n + 2$.



▸ On dit dans ce cas que (u_n) est une suite **arithmétique de raison** 2 et de premier terme $u_0 = -1$.

▸ Le terme $u_n = 2n - 1$ est appelé **terme général** de la suite (u_n).

Info :
Si : $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où r est une constante réelle ne dépendant pas de n, alors (u_n) est une suite **arithmétique de raison** r.

Activité 7 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, v_n = n$.

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. **a** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\, v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b Calculer la somme : $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$.

3. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = u_0 + nr$

4. On pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

a Quel est le nombre de termes de cette somme?

b Montrer que : $S_n = (n+1)\left(\dfrac{2u_0 + nr}{2}\right)$.

c En déduire que : $S_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

Info :
$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ fois}} = na$

Info :
Le nombre de termes de la somme :
$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ est : $n - p + 1$

Activité 8 Suite géométrique

Un pharmacien a investi dans la création de sa pharmacie, une somme de 100 000 dh. Il a remarqué que, le premier mois, son bénéfice est de 5000 dh et que chaque mois, son bénéfice augmente de 5% par rapport au bénéfice du mois précédent.

Soit u_1 le bénéfice de ce pharmacien le premier mois, et u_n son bénéfice du nième mois.

1. Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

2. Vérifier que : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$

3. Conjecturer la relation entre u_{n+1} et u_n.

4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = 1,05u_n$

On dit dans ce cas que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme u_1.

Info :

Si : $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où q est une constante réelle ne dépendant pas de n, alors (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Activité 9 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit q un nombre réel non nul et différent de 1.

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

a Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = u_0 q^n$.

b On pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n ; n \in \mathbb{N}$

Vérifier que : $S_n = u_0(1 + q + q^2 + ... + q^n)$

En déduire S_n en fonction de n, u_0 et q.

3. Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme v_1.

a Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = v_1 \times q^{n-1}$

b On pose : $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que : $S_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

La légende du jeu d'échecs

On raconte que le jeu d'échecs a été inventé par un savant indien nommé «Sêta», quand il l'avait offert à l'empereur «CHIRAM» qui fut tant impressionné, l'empereur lui a demandé de choisir lui même sa récompense. Le savant répondit : «Je veux juste un grain de blé pour la première case, deux grains pour la deuxième, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains de blé d'une case à l'autre jusqu'à la 64ième case.

En utilisant les résultats de l'activité 9, montrer que le nombre total de grains de blé demandé est : $2^{64} - 1$.

(Ce nombre est excessivement grand :

$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$).

Info :

Revoir l'exercice 50 page 50 du manuel TCS (Maxi math).

LE COURS

1 Généralités sur les suites numériques

Soit n_0 un entier naturel. On pose : $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$

1- Définition et Notation

DÉFINITION

Toute fonction numérique u définie sur I est appelée suite numérique. L'image par u d'un entier de I est notée u_n et se lit : « u indice n » ou simplement « u n »

u_n est appelé le terme général de la suite u.

Notation

Une suite numérique u se note $(u_n)_{n\in I}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$

si $I=\mathbb{N}$, u se note (u_n) ou $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

si $I=\mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{n\geq 1}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

le réel u_{n_0} est le premier terme de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Exemples :

1. $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto 2n+1$ se note $(2n+1)_n$ ou $((u_n)_n$ où $u_n=2n+1$ et son premier terme est $u_0=1)$.
2. $v:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $n\mapsto 1+\dfrac{2}{n}$ se note $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)_{n\geq 1}$ ou $((v_n)_{n\geq 1}$ où $v_n=1+\dfrac{2}{n}$ et son premier terme est $v_1=3)$
3. $w:\mathbb{N}-\{0;1\}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto\dfrac{n+2}{n(n-1)}$ est la suite de terme général $w_n=\dfrac{n+2}{n(n-1)}$ pour tout $n\geq 2$

w se note $(w_n)_{n\geq 2}$ et son premier terme est $w_2=2$.

2- Deux façons de définir une suite

a) Suites définies par la donnée explicite de leurs termes

Exemples :

1. $u_n=(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. $(v_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=f(n)$ où f est une fonction numérique.

   Par exemple : $v_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$; $n\in\mathbb{N}$ où $f:x\mapsto\dfrac{2x+1}{x+2}$
3. $(w_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $w_n=\dfrac{2^n}{n}$

b) Suites définies implicitement

On s'intéresse dans cette leçon aux suites définies par récurrence, c'est-à-dire les suites définies par la donnée du premier terme (ou des premiers termes) et une relation dite de récurrence, qui permet de calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents .

Exemples :

1. $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+1\end{cases}$; pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   on a : $u_1=\dfrac{2}{3}u_0+1=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$

   $u_2=\dfrac{2}{3}u_1+1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{3}+1=\dfrac{19}{9}$

2. $\begin{cases}v_0=-1 \; et \; v_1=2\\ v_{n+2}=2v_n+3v_{n+1}\end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   on a : $v_2=2v_0+3v_1=-2+6=4$

   $v_3=2v_1+3v_2=4+12=16$

1 Déterminer les termes d'une suite explicite

a Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 3^n - 2^n$$

Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3.

b On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, v_n = \frac{2}{n^2+n}$$

Calculer v_1 ; v_2 et v_3.

a On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 3^n - 2^n$; donc:

- $u_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$
- $u_1 = 3 - 2 = 1$
- $u_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$
- $u_3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$

b On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, v_n = \dfrac{2}{n^2+n}$; donc

- $v_1 = \dfrac{2}{1+1} = 1$; ▸ $v_2 = \dfrac{2}{2^2+2} = \dfrac{1}{3}$
- $v_3 = \dfrac{2}{3^2+3} = \dfrac{1}{6}$ et ▸ $v_4 = \dfrac{2}{4^2+4} = \dfrac{1}{10}$

2 Déterminer les termes d'une suite définie par récurrence. Raisonnement par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 ; u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = \frac{2}{2n+1}$$

1. On a : $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0+1} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$$u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{2}{5}$$

et $u_3 = \dfrac{u_2}{u_2+1} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \dfrac{2}{7}$

2. Montrons par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

▸ On a : $\dfrac{2}{0+1} = 2 = u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{2}{2n+3}$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1}+1}$$

$$= \frac{2}{2n+3}$$

Donc : la propriété est vraie pour $n+1$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

3 Utiliser un raisonnement par récurrence

Soit $(a_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,;\, a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, a_n = 2^{n+1} - 1$

Montrons par récurrence que:
$(\forall n \in \mathbb{N}) ; a_n = 2^{n+1} - 1$

▸ On a : $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 = a_0$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $a_n = 2^{n+1} - 1$ et montrons que : $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

On a : $a_{n+1} = 2a_n + 1$

$$= 2(2^{n+1} - 1) + 1$$

$$= 2^{n+2} - 2 + 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n + 1$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, a_n = 2^{n+1} - 1$

2 Suites majorées - suites minorées - suites bornées

DÉFINITION

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

1. Dire que $(u_n)_{n\in I}$ est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout $(n \in I)\,; u_n \leq M$.
2. Dire que $(u_n)_{n\in I}$ est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout $(n \in I)\,; m \leq u_n$.
3. Une suite à la fois minorée et majorée est dite suite **bornée**.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_n = \dfrac{n}{n+2}$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 \leq u_n$ donc la suite $(u_n)_n$ est minorée par 0.

et on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_n \leq 1$ (car $n \leq n+2$)

donc la suite $(u_n)_n$ est majorée par 1.

Ainsi $(u_n)_n$ est à la fois minorée et majorée, elle est donc bornée.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique où $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite bornée si et seulement s'il existe un réel α strictement positif tel que : $(\forall n \in I)\,; |u_n| \leq$

3 Monotonie d'une suite

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique , où

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\forall (n;m) \in I^2\,; n > m \Rightarrow u_n \geq u_m$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\forall (n;m) \in I^2\,; n > m \Rightarrow u_n \leq u_m$.
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement croissante si : $\forall (n;m) \in I^2\,; n > m \Rightarrow u_n > u_m$.
4. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement décroissante si : $\forall (n;m) \in I^2\,; n > m \Rightarrow u_n < u_m$.
5. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si et seulement si : $\forall (n;m) \in I^2\,; u_n = u_m$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

1. la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si $(\forall n \in I)\,; u_{n+1} \geq u_n$.
2. la suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement croissante si et seulement si $(\forall n \in I)\,; u_{n+1} > u_n$.
3. la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n \in I)\,; u_{n+1} \leq u_n$.
4. la suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement décroissante si et seulement si $(\forall n \in I)\,; u_{n+1} < u_n$.
5. la suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si et seulement si $(\forall n \in I)\,; u_{n+1} = u_n$.

Exemple :

1. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_n = \frac{1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$, d'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; u_{n+1} < u_n$.

Ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,; v_n = \frac{1}{2} \times 3^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2} \times 3^n$

$$= \frac{1}{2} \times 3^n(3-1)$$

$$= 3^n$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$; d'où : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; v_{n+1} > v_n$

Ainsi $(v_n)_n$ est strictement croissante.

POUR COMPRENDRE

1 Suites bornées

1. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = \frac{n}{n^2+1}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 \leq u_n \leq 1$. Conclure.

2. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\, v_n = \frac{2}{n} - \sin(n)$$

Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

1. **Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leqslant u_n \leqslant 1$**

Soit $n \in \mathbb{N}$. ▸ On a : $n \geq 0$ et $n^2+1 > 0$

donc : $\dfrac{n}{n^2+1} \geq 0$, d'où : $u_n \geq 0$

▸ On a : $n \leq n^2+1$ (car $\forall X \in \mathbb{R}\,; X^2 - X + 1 > 0$; $\Delta = -3$ et $a = 1$)

Donc : $\dfrac{n}{n^2+1} \leq 1$, d'où : $u_n \leq 1$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}\,; 0 \leq u_n \leq 1$. D'où : $(u_n)_n$ est bornée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $n \geq 1$, donc : $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$

et par suite : $0 < \dfrac{2}{n} \leq 2$ or : $-1 \leq -\sin n \leq 1$

donc, par somme : $-1 < \dfrac{2}{n} - \sin n \leq 3$

c'est-à-dire : $-1 < v_n \leq 3$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; -1 < v_n \leq 3$.

Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2 Récurrence et monotomie d'une suite

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,;\, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2.$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 < u_n < 1$

En déduire que $(u_n)_n$ est décroissante.

▸ Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 < u_n < 1$.

▸ On a : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc : $0 < u_0 < 1$.

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n^2$ et $0 < u_n < 1$

Donc: $0 < u_n^2 < 1$ et $0 < \dfrac{1}{4}u_n^2 < \dfrac{1}{4} < 1$

Ainsi : $0 < u_{n+1} < 1$.

Donc, la propriété est vraie pour $n+1$.

D'où, d'après le principe de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 < u_n < 1$$

▸ **Déduisons que $(u_n)_n$ est décroissante:**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}u_n^2 - u_n$

$$= \frac{1}{4}u_n(u_n - 4)$$

Comme $0 < u_n < 1 < 4$

alors : $(u_n - 4 < 0$ et $u_n > 0)$

D'où : $u_{n+1} - u_n < 0$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; u_{n+1} < u_n$

Donc : $(u_n)_n$ est décroissante.

3 Récurrence et variation d'une suite

Soit $(a_n)_n$ la suite définie par : $a_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\,; a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 \leq a_n \leq 4$
2. En déduire le sens de variation de $(a_n)_n$.

1. Montrons par récurrence que:

$(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 \leq a_n \leq 4$

▸ On a : $a_0 = 0$ donc : $0 \leq a_0 \leq 4$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq a_n \leq 4$ et montrons que $0 \leq a_{n+1} \leq 4$.

On a : $0 \leq a_n \leq 4 \Longrightarrow 0 \leq 3a_n \leq 12$

$$\Longrightarrow 4 \leq 3a_n + 4 \leq 16$$

$$\Longrightarrow 2 \leq \sqrt{3a_n + 4} \leq 4$$

(car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

Donc: $0 \leq 2 \leq a_{n+1} \leq 4$.

Ainsi, la propriété est vraie pour $n+1$,

D'où, d'après le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,; 0 \leq a_n \leq 4$$

2. **Sens de variation de la suite $(a_n)_n$:**

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a : $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3a_n + 4 - a_n^2$

$$= -a_n^2 + 3a_n + 4$$

$$= (4 - a_n)(1 + a_n)$$

et comme : $0 \leq a_n \leq 4$

alors $4 - a_n \geq 0$ et $1 + a_n \geq 0$

D'où : $a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq 0$

c'est-à-dire : $a_{n+1}^2 \geq a_n^2$

et comme $a_n > 0$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,; a_{n+1} \geq a_n$

Ainsi : $(a_n)_n$ est croissante.

4 Suites arithmétiques

DÉFINITION

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre réel r tel que, $(\forall n \geq n_0)\,;\, u_{n+1} = u_n + r$, le nombre r est appelé **la raison** de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Autrement dit:
Une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

Exemple : $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 2n+5$ est une suite arithmétique.
en effet: $u_{n+1} = 2(n+1)+5 = 2n+2+5 = (2n+5)+2$.
Donc : $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi : $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

Propriétés

Propriété 1: (Terme général d'une suite arithmétique)
Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} alors : $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$ pour tout $n \geq n_0$.
En particulier: si $n_0 = 0$ on a $u_n = u_0 + nr$
si $n_0 = 1$ on a $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Conséquence: Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \geq n_0)\,;\,(\forall p \geq n_0)\,;\, u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et $u_6 = 31$.
Calculons u_{2018}.
On a : $u_{2018} = u_6 + (2018-6)\left(\frac{1}{2}\right) = 31 + 1006$
donc : $u_{2018} = 1037$

Exemple 2 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que, $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$.
Déterminons r et u_n en fonction de n.
On a : $u_{100} = u_0 + 100r = 5 + 100r$. Donc : $100r = u_{100} - 5 = -50$
D'où : $r = -\frac{1}{2}$ et par suite $u_n = u_0 + nr = 5 - \frac{1}{2}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 2 : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique.
On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ où $n_0 \leq p < n$
On a : $S_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$

Cas particuliers :
1. $p = n_0 = 0\;;\; S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$
2. $p = n_0 = 1\;;\; S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\left(\dfrac{u_1 + u_n}{2}\right)$

1 Déterminer trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit a, b et c dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $\begin{cases} a+b+c=39 \\ a^2+b^2+c^2=525 \end{cases}$

Déterminer a, b et c.

On a: $a=b-r$ et $c=b+r$

Donc : $a+b+c=b-r+b+b+r$
$\qquad = 3b$

Ainsi : $3b=39$ et par suite : $b=13$

Et $a^2+b^2+c^2=525$ s'écrit :

$(13-r)^2+13^2+(13+r)^2=525$

Soit $r^2=9$ (Après développement et simplification)

Donc : $r=3$ ou $r=-3$

Ainsi :

- Si $r=3$, alors : $(a=10\,;b=13$ et $c=16)$
- Si $r=-3$, alors : $(a=16\,;b=13$ et $c=10)$

2 Utiliser une suite arithmétique

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}\,;(n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\neq-1$
2. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

a Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b Calculer v_n et u_n en fonction de n.

1. Montrons par récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\neq-1$

On a : $u_0=0$ donc : $u_0\neq-1$

Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n\neq-1$ et montrons que : $u_{n+1}\neq-1$

On a : $u_{n+1}+1=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}=\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+3}$

Comme $u_n\neq-1$ alors $u_n+1\neq0$ et par suite $u_{n+1}+1\neq0$ ainsi : $u_{n+1}\neq-1$

D'où, d'après le principe de récurrence :

$(\forall n\in\mathbb{N})\,;u_n\neq-1$

2. **a** Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$ et

$v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{u_n+3}{2(u_n+1)}$

Donc : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\dfrac{2}{2(u_n+1)}$
$\qquad =\dfrac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\dfrac{1}{2}$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r=\dfrac{1}{2}$ et du 1er terme $v_0=\dfrac{1}{u_0+1}=1$.

b On a : $v_n=v_0+nr$; pour tout n de $\mathbb{N}$.

Donc : $v_n=1+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{2+n}{2}$ et comme $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

Alors : $u_n+1=\dfrac{1}{v_n}$

Soit $u_n=\dfrac{1}{v_n}-1$

D'où : $u_n=\dfrac{2}{n+2}-1=\dfrac{-n}{n+2}$

Conclusion : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;v_n=\dfrac{n+2}{2}$ et $u_n=\dfrac{-n}{n+2}$.

3 Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

1. Calculer la somme :
$S_n=-3+1+5+9+...+(4n+1)$.
2. Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique telle que :
$S=u_3+u_4+...+u_{10}=168$ et $u_6=5$.
Déterminer la raison r de cette suite et son premier terme u_0.

1. On remarque que S_n est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique $(v_n)_n$ de premier terme $v_0=-3$ et de raison $r=4$.

On a : $v_n=v_0+nr=-3+4n$ et

$v_{n+1}=-3+4(n+1)=1+4n$.

Donc : $S_n=v_0+v_1+....+v_{n+1}$

et par suite : $S_n=(n+1-0+1)\left(\dfrac{v_0+v_{n+1}}{2}\right)$

$S_n=(n+2)\left(\dfrac{-3+4n+1}{2}\right)$

$S_n=(n+2)(2n-1)$

2. On a : $S=(10-3+1)\left(\dfrac{u_3+u_{10}}{2}\right)$
$\qquad =4(u_3+u_{10})$

or $u_3=u_0+3r$ et $u_{10}=u_0+10r$

Donc : $S=4(2u_0+13r)$ or : $u_6=u_0+6r=5$

D'où : $u_0=5-6r$

Ainsi : $S=4(10+r)=168$

soit $40+4r=168$

D'où : $r=32$ et $u_0=5-6r=-187$

LE COURS

5 Suites géométriques

DÉFINITION

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé **la raison** de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Autrement dit:

Une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}u_n$. Donc : $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Propriétés 1: (Terme général d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q non nul.

1. Pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$

2. Pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

En particulier : si $n_0 = 0$ on a : $u_n = u_0 q^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

si $n_0 = 1$ on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exemple : $(u_n)_n$ est une suite géométrique telle que : $u_2 = \frac{3}{16}$ et $u_5 = \frac{3}{1024}$.

Déterminons u_n en fonction de n.

Soit q la raison de cette suite.

On a : $u_5 = u_2 \times q^3$ donc : $q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Donc : $q = \frac{1}{4}$ d'où : $u_n = u_2 \times q^{n-2} = \frac{3}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

D'où : $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Propriétés 2: (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

Pour tout $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, on a : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriétés 3:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q ; $(q \in \mathbb{R}^* - \{1\})$.

On pose : $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$ où : $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq n_0$

On a : $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

Remarque

si $q = 1$ alors : $S_n = (n-p+1)u_p$ = (nombre de termes) x 1er terme.

Cas particuliers : Pour $n_0 = 0$ et $p = 0$: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

Pour $n_0 = 1$ et $p = 1$: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

Exemple : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique telle que : $u_2 = \frac{3}{4}$ et $u_5 = \frac{3}{32}$

Calculons $S = u_2 + u_3 + ... + u_{11}$

Soit q la raison de cette suite.

On a : $u_5 = u_2 \times q^3$ donc : $\frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

D'où : $q = \frac{1}{2}$

et par suite : $S = u_2\left(\frac{1-q^{10}}{1-q}\right)$

c'est-à-dire : $S = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$

1 Déterminer le terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique non constante telle que : $3u_1 - u_0 = 2u_2$ et $u_0 = 5$.
Déterminer u_n en fonction de n.

Soit q la raison de cette suite.
Comme $(u_n)_n$ n'est pas une suite constante, alors : $q \neq 0$ et $q \neq 1$,
et comme : $u_2 = q^2 u_0$ et $u_1 = qu_0$
alors : $3u_1 - u_0 = 2u_2$ s'écrit : $3qu_0 - u_0 = 2q^2 u_0$
or : $u_0 = 5$ donc : $3q - 1 = 2q^2$
Soit $2q^2 - 3q + 1 = 0$ et
$2q^2 - 3q + 1 = (q-1)(2q-1)$
D'où : $q = 1$ ou $q = \frac{1}{2}$
et comme $q \neq 1$, alors : $q = \frac{1}{2}$
Donc : $u_n = q^n u_0 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Utiliser une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose : $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
2. Déterminer v_n et u_n en fonction de n.
3. Calculer en fonction de n, la somme : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 \\ &= \frac{2}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$
Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ de premier terme : $v_0 = u_0 - 3 = -2$.
2. On a : $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
et comme $u_n = v_n + 3$
alors : $u_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$
3. On a : $u_n = v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc :
$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + ... + (v_n + 3) \\ &= v_0 + v_1 + ... + v_n + (3 + 3 + 3 ... + 3) \\ &= v_0\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right) + 3(n+1) \end{aligned}$$
et $v_0 = -2$ donc : $S_n = -6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + 3(n+1)$

3 Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
On pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. où $n \in \mathbb{N}$.
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
1. On suppose que : $u_0 = 3$ et $q = 5$.
Calculer u_1, u_4 et S_{10}.
2. On suppose que : $u_5 = 486$ et $u_7 = 4374$ et $q > 0$.
Calculer u_0 et u_{10}.

1. On a : $u_n = u_0 q^n = 3 \times 5^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Donc : $u_1 = 3 \times 5 = 15$
$u_4 = 3 \times 5^4 = 1875$
et $S_n = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$
$S_n = 3\left(\frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5}\right)$
Soit $S_n = \frac{3}{4}(5^{n+1} - 1)$
et par suite : $S_{10} = \frac{3}{4}(5^{11} - 1)$
2. On a : $u_7 = q^2 \times u_5$
donc : $q^2 = \frac{u_7}{u_5} = \frac{4374}{486} = 9$
et comme $q > 0$ alors : $q = 3$
et on a : $u_5 = q^5 u_0 = 3^5 u_0$
d'où : $u_0 = \frac{u_5}{243} = \frac{486}{243} = 2$
On a : $u_{10} = u_0 q^{10}$
Donc : $u_{10} = 2 \times 3^{10}$.

EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 Étudier la monotomie d'une suite

1 Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par :
$u_0 = \frac{10}{3}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n}\right)$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 3$

b. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 \leq u_n \leq \frac{10}{3}$

2 On considère la suite $(v_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{2v_n^2}{1+v_n^3} \end{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n > 0$ *et* $v_n \leq \frac{1}{2}$

b. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. En déduire que $(v_n)_n$ est décroissante.

3 Soit $(t_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}} \end{cases}$

Montrer que $(t_n)_n$ est strictement décroissante.

4 Soit $(w_n)_n$ la suite définie par : $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f(x) = x^2 - 2x$.

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; w_n \geq 3$

b. Montrer que la suite $(w_n)_n$ est croissante.

1 On a : $u_0 = \frac{10}{3}$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n}$

a. Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 3$.

▸ On a : $u_0 = \frac{10}{3}$ et $\frac{10}{3} > 3$ donc : $u_0 \geq 3$

Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_n \geq 3$ et montrons que $u_{n+1} \geq 3$.

On a : $u_{n+1} - 3 = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} - 3$

$$= \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{u_n}$$

Comme $u_n > 0$ (car $u_n \geqslant 3$) alors : $\frac{(u_n-3)^2}{u_n} \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - 3 \geq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 3$.

Ainsi : $u_0 \geq 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (u_n \geq 3 \Rightarrow u_{n+1} \geq 3)$

D'après le principe de récurrence,

$((\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq 3)$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} - u_n$

$$= \frac{3(3 - u_n)}{u_n}$$

Comme $u_n \geq 3$ alors : $3 - u_n \leq 0$ et $u_n > 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_n$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$

Donc, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

et par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq u_0$ **(Toute suite décroissante est majorée par son premier terme)**

c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \frac{10}{3}$ et comme $u_n \geq 3$

alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 \leq u_n \leq \frac{10}{3}$

2 On a : $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{2v_n^2}{v_n^3 + 1} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n$ et $v_n \leq \frac{1}{2}$

▸ On a : $v_0 = \frac{1}{2}$ donc : $0 < v_0$ et $v_0 \leq \frac{1}{2}$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $0 < v_n$ et $v_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que : $0 < v_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

On a : $v_n > 0$ donc : $v_n^3 + 1 > 0$ et $2v_n^2 > 0$

D'où : $v_{n+1} > 0$

On a : $v_n^3 > 0 \Rightarrow v_n^3 + 1 > 1$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{v_n^3 + 1} < 1 \quad \textbf{(1)}$$

$$0 < v_n \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow v_n^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < 2v_n^2 \leq \frac{1}{2} \quad \textbf{(2)}$$

De **(1)** et **(2)** on déduit que : $0 < 2v_n^2 \times \frac{1}{1+v_n^3} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $0 < v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Ainsi : $v_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

D'où, d'après le principe de récurrence,

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < v_n$ et $v_n \leq \frac{1}{2}$

b. On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n > 0$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2v_n}{1 + v_n^3}$

et comme : $v_n \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+v_n^2} < 1$

alors : $0 < 2v_n \leq 1$ et $0 < \frac{1}{1+v_n^3} < 1$

et par suite : $\frac{2v_n}{1+v_n^3} \leq 1$

c'est-à-dire : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $v_n > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} \leq v_n$

D'où : la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

3 On a : $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $t_{n+1} > t_n$

▸ On a : $t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}t_0 + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}$

Donc : $t_1 > t_0$ (car $\sqrt{2} > 1$)

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $t_{n+1} > t_n$

et montrons que : $t_{n+2} > t_{n+1}$

On a : $t_{n+1} > t_n \Longleftrightarrow \frac{1}{2}t_{n+1} > \frac{1}{2}t_n$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}t_{n+1} + \frac{3}{2} > \frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}$

(la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$).

Donc : $\sqrt{\frac{1}{2}t_{n+1} + \frac{3}{2}} > \sqrt{\frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}}$

c'est-à-dire : $t_{n+2} > t_{n+1}$

D'après le principe de récurrence,

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $t_{n+1} > t_n$

et donc : $(t_n)_n$ est strictement croissante.

4 $\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ où $f(x) = x^2 - 2x$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-1	↗

a. Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \geq 3$

▸ On a : $w_0 = 4$ et $4 \geq 3$

donc : $w_0 \geq 3$

c'est-à-dire que la propriété est vraie pour $n = 0$.

▸ Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $w_n \geq 3$ et montrons que $w_{n+1} \geq 3$

f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $w_n \geq 3$

donc : $f(w_n) \geq f(3)$

et comme $f(3) = 3$ et $f(w_n) = w_{n+1}$ alors : $w_{n+1} \geq 3$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n+1$ et donc d'après le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \geq 3$

b. Montrons que $(w_n)_n$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $w_{n+1} - w_n = w_n^2 - 3w_n$

$= w_n(w_n - 3)$

comme $w_n \geq 3$ alors : $w_n > 0$ et $w_n - 3 \geq 0$

Donc : $w_{n+1} - w_n \geq 0$

Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} \geq w_n$

et par conséquent, la suite $(w_n)_n$ est croissante.

EXERCICE RÉSOLU 2

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites $(v_n)_n$ et (w_n) par :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1 a. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

b. On pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$; (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Calculer de deux façons différentes S_n et en déduire u_n en fonction de n.

2 a. Déterminer la nature de la suite $(w_n)_n$.

b. Déterminer u_n en fonction de v_n et w_n.

c. Retrouver u_n en fonction de n.

3 Calculer en fonction de n, la somme :

$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$.

On a:

$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$

1 on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrons que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

EXERCICES
RÉSOLUS

on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$= -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

$$= -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)$$

$$= -\frac{2}{3}v_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$

D'où : $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.

b. On a : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$.

$$= 1\left(\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}\right)$$

Donc : $S_n = \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

D'autre part, on a : $v_n = u_{n+1} - u_n$

Donc :

$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1})$

$= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \cdots + u_n - u_{n-1}$

$= u_n - u_0$ (aprés simplification)

$= u_n$ (car $u_0 = 0$)

D'où : $u_n = S_n = \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

2 a. On a : $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1}$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1}$$

$$= u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

$$= w_n$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} = w_n$

Ainsi : $(w_n)_n$ est une suite constante.

et comme $w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n = 1$

b. On a : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - u_n \\ w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$

Donc : $w_n - v_n = \frac{2}{3}u_n + u_n = \frac{5}{3}u_n$

et par suite : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

c. On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n = 1$

et $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$; (car (v_n) est une suite géométriq[ue] de raison $q = -\frac{2}{3}$ et $v_0 = 1$)

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$

3 $S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$

Méthode 1 : $S_n' = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left[n - \left(\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$S_n' = \frac{3}{5}\left(n - \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)$$

Rappel : (Notation $\sum$ sigma)

- $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$
- $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$; et $\sum_{k=0}^{n-1} a = na$
- $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n}$ bi

Méthode 2 :

$u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$

$$= \frac{3}{5}(w_0 - v_0) + \frac{3}{5}(w_1 - v_1) + \cdots + \frac{3}{5}(w_{n-1} - v_{n-1})$$

$$= \frac{3}{5}(w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}) - \frac{3}{5}(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1})$$

$$= \frac{3}{5}(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n fois}) - \frac{3}{5}.v_0\left[\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{5}\times(n\times 1) - \frac{3}{5}\left[\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[n - \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]$$

EXERCICE RÉSOLU 3

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$

1 a. Calculer u_1 et u_2

b. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 4 = \frac{4(u_n - [\ldots]}{u_n + [\ldots]}$

$u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 4)}{u_n + 2}$

c. Montrer par récurrence que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$

2 a. Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante.
b. En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $3 \leq u_n < 4$

3 a. Montrer que:
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
b. En déduire par récurrence que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

4 On pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
b. Déterminer v_n et u_n en fonction de n.
c. Calculer en fonction de n, la somme :
$S_n = \frac{2}{u_0 - 2} + \frac{2}{u_1 - 2} + \dots + \frac{2}{u_n - 2}$.

On a : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$

1 a. $u_1 = \frac{8(u_0 - 1)}{u_0 + 2} = \frac{8(3-1)}{3+2} = \frac{16}{5}$

$$u_2 = \frac{8(u_1 - 1)}{u_1 + 2} = \frac{8\left(\frac{16}{5} - 1\right)}{\frac{16}{5} + 2} = \frac{88}{26} = \frac{44}{13}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a : $u_{n+1} - 4 = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 4$
$= \frac{8u_n - 8 - 4u_n - 8}{u_n + 2}$
$= \frac{4u_n - 16}{u_n + 2}$
$= \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$

et $u_{n+1} - 2 = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - 2$
$= \frac{8u_n - 8 - 2u_n - 4}{u_n + 2}$
$= \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$
$= \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$

c. Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$
Par récurrence.

▸ On a : $u_0 = 3$ et $2 < 3 < 4$
Donc : $2 < u_0 < 4$
Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 0$
▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2 < u_n < 4$ (HR)
et montrons que $2 < u_{n+1} < 4$
▸ On a : $u_{n+1} - 4 = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$
et comme $u_n - 4 < 0$ et $u_n + 2 > 0$ (d'après HR)
alors $u_{n+1} - 4 < 0$ soit $u_{n+1} < 4$ **(1)**
▸ On a : $u_{n+1} - 2 = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$
et comme $u_n - 2 > 0$ et $u_n + 2 > 0$
alors $u_{n+1} - 2 > 0$ soit $u_{n+1} > 2$ **(2)**
de **(1)** et **(2)** on déduit que : $2 < u_{n+1} < 4$
Et par suite, la propriété est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence,
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 < u_n < 4$
(Ce qui signifie que la suite $(u_n)_n$ est bornée).

2 a. Montrons que $(u_n)_n$ est croissante
Soit : $n \in \mathbb{N}$
on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} - u_n$
$= \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2}$
$= \frac{(4 - u_n)(u_n - 2)}{u_n + 2}$

On peut considérer le trinôme $-x^2 + 6x - 8$ calculer Δ puis factoriser.

et comme $2 < u_n < 4$
alors : $4 - u_n > 0$ et $u_n + 2 > 0$ et $u_n - 2 > 0$
Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$
Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} > u_n$.
et par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.
b. Comme la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et $u_0 = 3$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq u_0$
Soit : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$
et comme $u_n < 4$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $3 \leq u_n < 4$.

3 a. Soit $n \in \mathbb{N}$
On a d'après 1) b).

$$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$$

$$3\leq u_n<4 \iff 5\leq u_n+2<6$$
$$\iff \frac{1}{6}\leq\frac{1}{u_n+2}\leq\frac{1}{5}$$

et comme $4(4-u_n)>0$ alors,

$$0<4(4-u_n)\times\frac{1}{u_n+2}\leq\frac{4}{5}(4-u_n)$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<4-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(4-u_n)$

b. Montrons par récurrence que :

$(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<4-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

▸ On a : $4-u_0=4-3=1$ et $\left(\frac{4}{5}\right)^0=1$

Donc : $0<4-u_0\leq\left(\frac{4}{5}\right)^0$

c'est-à-dire que la propriété est vraie pour $n=0$.

▸ Soit $n\in\mathbb{N}$: Supposons que $0<4-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

et montrons que $0<4-u_{n+1}\leq\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

On a : $0<4-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(4-u_n)$ (d'après 3) a))

Et : $0<4-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$ (d'après HR)

Donc : $0<\frac{4}{5}(4-u_n)\leq\frac{4}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$

D'où : $0<4-u_{n+1}\leq\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

Ainsi, la propriété est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence,

$(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<4-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

4 a. Montrons que (v_n) est une suite géométrique

On a : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}$

Or, d'après 1) b) $u_{n+1}-4=\frac{4(u_n-4)}{u_n+2}$

et $u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$

D'où $v_{n+1}=\frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)}=\frac{2}{3}v_n$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

Ainsi $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

et de premier terme $v_0=\frac{u_0-4}{u_0-2}=\frac{3-4}{3-2}=-1$

b. On a : $v_n=v_0q^n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}\iff v_nu_n-2v_n=u_n-4$$
$$\iff u_n(v_n-1)=2v_n-4$$
$$\iff u_n=\frac{2v_n-4}{v_n-1}\ ;\ (\text{car } \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n \ldots$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=\dfrac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n-4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$

Soit : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n=\dfrac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

c. Calculons S_n en fonction de n

On a : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}=\frac{u_n-2-2}{u_n-2}$

$$=1-\frac{2}{u_n-2}$$

D'où : $\frac{2}{u_n-2}=1-v_n$

et par suite,

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2}{u_0-2}+\frac{2}{u_1-2}+\cdots+\frac{2}{u_n-2}\\&=(1-v_0)+(1-v_1)+\cdots+(1-v_n)\\&=\Big(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(n+1)fois}\Big)-(v_0+v_1+\cdots+v_n)\\&=(n+1)\times1-(v_0+v_1+\cdots+v_n)\\&=n+1-v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\end{aligned}$$

D'où : $S_n=n+1+3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Donner la définition d'une suite majorée - d'une suite minorée - d'une suite bornée.

2 Donner la définition d'une suite croissante, d'une suite décroissante.

3 Donner le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

4 Donner le terme général d'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 1}$ de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_1 = -2$.

5 On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer S_n en fonction de n dans le cas où (u_n) est une suite arithmétique de raison r, puis dans le cas où (u_n) est une suite géométrique de raison q. (avec $q \neq 1$)

6 Quelle relation peut-on écrire si les nombres réels a, b et c dans cet ordre,

a) Sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique?

b) Sont des termes consécutifs d'une suite géométrique?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Donner au moins deux méthodes pour montrer qu'une suite est majorée par un nombre donné.

2 Donner au moins deux méthodes pour étudier la monotonie d'une suite.

3 Comment montrer qu'une suite est arithmétique? géométrique?

4 Préciser comment on peut déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique connaissant deux termes.

5 Préciser comment peut-on déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique connaissant deux termes.

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Le 7ième terme de la suite (u_n) où $u_n = \frac{7n}{2}$; $n \in \mathbb{N}$ est :	$\frac{49}{2}$	0	21
2 Le nombre de termes dans la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ est :	20	21	19
3 Si $u_{n+1} - u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,alors la suite (u_n) est :	Arithmétique	Géométrique	Croissante
4 Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}}$ et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est :	Croissante	Décroissante	Constante
5 Si $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$, alors la suite (a_n) est :	Croissante	Décroissante	Non monotone
6 Si $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{2n}{n^2+1}$, alors u_{n+1} est égale à :	$\frac{2n-1}{(n^2-1)+1}$	$\frac{2n+2}{n^2+1}$	$\frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1}$
7 La somme : $S = 2+4+6+8+\cdots+100$ est égale à :	5049	2550	120
8 La somme : $S = 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{3}{64}$ est égale à :	$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}$	$6\left(1-\frac{1}{128}\right)$	$\frac{381}{64}$
9 On considère les nombres : $A = 2017(1+2+3+\cdots+2018)$ $B = 2018(1+2+3+\cdots+2017)$	$A > B$	$A < B$	$A = B$
10 Le nombre de termes dans la somme : $3+7+11+15+\cdots+2015$	503	504	505

EXERCICES

Exercices d'application

Calcul des termes d'une suite

Exercice 1 : Soit (u_n) le suite définie par :
$u_n = 2n^2 - n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Quel est l'indice du 6ième terme? calculer ce terme.
3. Exprimer, en fonction de n, les termes u_{n+1}, u_{n-1}, u_{3n-2}, et la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2 : Préciser le premier terme de la suite (u_n) puis calculer ces quatre premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2-n}{n+1}$
2. $u_n = 3^{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{5^{n+1}}{n}$
4. $u_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$
5. $u_n = \dfrac{2(-1)^n}{n^2-n}$
6. $u_n = \sqrt{n-1}$
7. $u_n = \sqrt{n^2-4}$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

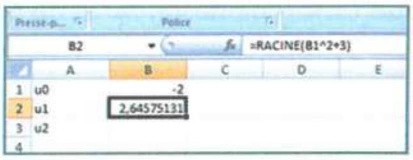
Exercice 3 : On considère la suite récurrente (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = -2v_n + n - 3 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Quel est l'indice du 7ième terme? calculer ce terme.
3. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_n et n,
Exprimer v_{n-1} en fonction de v_n et n (pour $n \geqslant 1$).

Exercice 4 : Calculer les cinq premiers termes de la suite récurrente (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 5 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_2 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1+u_n} \ ; \ n \geq 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2-u_n} - 1 \ ; \ n \geq 3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}u_{n-1} + 3 - n \end{cases}$; $n \geqslant 1$.

Exercice 5 : Sur un tableur (TiCE)
Si l'on étend vers le bas la formule écrite en B_2, on obtient les termes d'une suite (u_n).



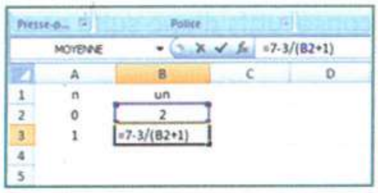
B2 =RACINE(B1^2+3)

	A	B	C	D	E
1	u0	-2			
2	u1	2,64575131			
3	u2				
4					

Déterminer la suite (u_n).

Exercice 6 : Sur un tableur (TiCE)
Dans chacun des cas suivants, une suite (u_n) a été définie sur tableur.
Définir la suite (u_n) dans chaque cas :

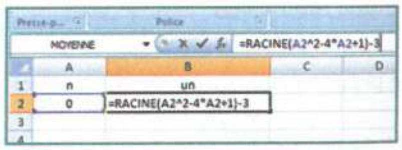
a)



MOYENNE =7-3/(B2+1)

	A	B	C	D
1	n	un		
2	0	2		
3	1	=7-3/(B2+1)		
4				
5				

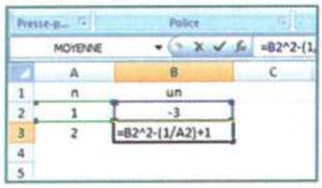
b)



MOYENNE =RACINE(A2^2-4*A2+1)-3

	A	B	C	D
1	n	un		
2	0	=RACINE(A2^2-4*A2+1)-3		
3				

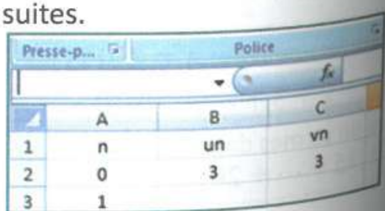
c)



MOYENNE =B2^2-(1/

	A	B	C
1	n	un	
2	1	-3	
3	2	=B2^2-(1/A2)+1	
4			
5			

Exercice 7 : (Avec un tableur) (TiCE)
Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :
$u_n = 3 - n^2$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3 - v_n^2 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$
On utilise le tableur pour calculer des termes de ces deux suites.



	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	3	3
3	1		

1. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B_3 ?
2. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, peut-on saisir dans la cellule C_3 ?

Exercice 8 : Avec une calculatrice
En utilisant une calculatrice programmable, déterminer à 10^{-4} près les termes $v_1, v_2 v_3, \cdots, v_{10}$; puis les termes v_{100} ; v_{950} et v_{3750} où (v_n) est la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 4} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$.

Suites majorées - Suites minorées - Suites bornées

Exercice 9 : Soit (u_n) la suite définie par :
$u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 2$. Conclure.

Exercice 10 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 11 : Soit (a_n) la suite définie par :
$a_n = \sqrt{2n^2 + 9}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n \geq 3$.
2. La suite (a_n) est-elle majorée?

Exercice 12 : Soit (b_n) la suite définie par :
$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{4} \\ b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$
Montrer par récurrence que la suite $(b_n)_n$ est minorée par 0 et majorée par 2.

Exercice 13 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leqslant 1$.
Conclure.

Exercice 14 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 4$.

Exercice 15 : Montrer que chacune des suites suivantes est bornée :
1. $w: n \longmapsto \dfrac{\pi}{2} + \cos(n)$
2. $t: n \longmapsto 7 + (-1)^n$
3. $v: n \longmapsto 2 + \dfrac{1}{n^2}$
4. $u: n \longmapsto 5 - \dfrac{3}{n}$
5. $s: n \longmapsto 1 + \dfrac{\sin(n)}{n^2}$

Exercice 16 : Soit (v_n) la suite définie par :
$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{2 + 3v_n}{2 + v_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n \geq 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 2, puis en déduire qu'elle est bornée.

Exercice 17 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$; $(n \in \mathbb{N})$
Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1.

Exercice 18 : Soit (v_n) la suite définie par :
$\begin{cases} v_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 2} \end{cases}$
Montrer (par récurrence) que:
$(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq v_n < 1$

Suites monotones

Exercice 19 : Trouvez, parmi les suites proposées celles qui sont monotones, éventuellement à partir d'un certain rang.
1. **a)** $u_n = -3n + 1$ **b)** $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
2. **a)** $u_n = 2^n$ **b)** $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. **a)** $u_n = n!$ **b)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$

Note : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICES

Exercice 20 : Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Prouver que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 21 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

Exercice 22 : Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

Suites arithmétiques - Suites géométriques

Exercice 23 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Prouver que les suites (v_n) et (w_n) définies respectivement, pour tout n, par : $v_n = 3u_n - 1$ et $w_n = u_{2n} + 3$

Sont arithmétiques et donner pour chacune la raison.

Exercice 24 : Les mesures des angles d'un triangle rectangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer les mesures de ses angles.

Exercice 25 : Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$.

Justifier que pour tout n, $v_n > 0$ et prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ est arithmétique .

Exercice 26 : Pour tout entier naturel n, on pose: $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 27 : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que : $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$.

Calculer u_{20}.

Exercice 28 : Soit (u_n) une suite géométrique telle que : $u_7 = \dfrac{1}{1080}$ et $u_{10} = \dfrac{25}{2197}$.

Calculer u_{30}.

Exercice 29 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et $u_1 = -2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 30 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2, telle que : $u_0 = -3$.

Calculer la somme $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$.

Exercice 31 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et $u_1 = -2$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_{2n}$. Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Exercice 32 : Calculer la somme :

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \cdots + 10.$$

Exercice 33 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2, telle que : $u_0 = 1$.

Calculer la somme : $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 34 : Calculer la somme :

$$S = 0{,}02 - 0{,}1 + 0{,}5 - 2{,}5 + \cdots + 312{,}5.$$

Exercice 35 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Trouver deux nombres réels a et b tels que

$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$

2. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison b.
3. Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = u_{n+1} - bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison a.
4. Exprimer explicitement v_n et w_n en fonction de n, puis en déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 36 : Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

tels que : $\begin{cases} a+b+c = 36,75 \\ abc = 343 \end{cases}$.

Calculer a, b et c.

Exercice 37 : Soit a, b, c trois réels distincts avec $a \neq 0$. On sait que :

- a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q,
- $3a$, $2b$, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Calculer q.

Exercices de renforcement

Suite «arithmético - géométrique»

Exercice 38 : On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par:
$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$ (a réel donné).

1. (v_n) est la suite numérique définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par: $v_n = 13u_n - 4$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison q.
2. a) Exprimer v_n en fonction de n et a.
b) En déduire u_n en fonction de n et de a.

Exercice 39 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$.

1. Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par: $v_n = u_n - \alpha$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique si et seulement si $\alpha = -1$.
b) Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.
c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 40 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$, où α est un nombre réel.

1. Déterminer le nombre α pour lequel la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n et calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
3. Exprimer u_n en fonction de n et calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 41 : Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = -2$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.
La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = u_n + 3$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. (S_n) est la suite définie pour tout entier n par : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Exprimer S_n en fonction de n.

Suites du type $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$

Exercice 42 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier n: $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 1$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et

préciser sa raison.

3. En déduire u_n en fonction de n.

4. a) Calculer $1 - v_n$ en fonction de u_n.

b) Calculer en fonction de n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1}$.

Exercice 43 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1. Démontrer, par récurrence, que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
Préciser la raison et le premier terme.
4. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
5. Trouver un entier N tel que, pour tout $n > N$: $u_n > 0{,}99$.

Exercice 44 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2}$.

On pose, pour tout entier n, $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 4}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. Calculer en fonction de n ;
$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{u_k - 4}$.

Exercice 45 : Soit $(x_n)_n$ la suite définie par :
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer x_2.
2. Déterminer le sens de variation de $(x_n)_n$.
3. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ x_n \geq 1$.

Exercice 46 : Soit $(u_n)_n$ et (v_n) les suites numériques définies par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \frac{4u_n}{4 - u_n} \end{cases}$$
et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{3u_n + 2}{u_n}$.

Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 47 : Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2. \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}. \end{cases}$$
On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

1. Calculer v_0 et u_1.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$.
3. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 48 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{4 + u_n}$.

On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer v_0 et u_1.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$.
En déduire le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire v_n et u_n en fonction de n.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 49 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} a_1 = 3. \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ a_{n+1} = \frac{(3n+3)a_n - 8n - 12}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); a_n \leq 0$
2. Déterminer le sens de variation de $(a_n)_{n\geq 1}$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $b_n = \frac{4 - a_n}{n}$.
a) Vérifier que $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique.
b) En déduire b_n et a_n en fonction de n.

Exercice 50 : Soit (t_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); t_{n+1} = \frac{3t_n + 2}{3 + 2t_n} \end{cases}$$
On pose $w_n = \frac{t_n - 1}{t_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer t_1 et w_0.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \neq 1$.
3. a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
b) En déduire w_n et t_n en fonction de n.

Exercice 51 : Soit (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{2}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = u_{n+1} - u_n$.
1. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
2. Calculer en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 52 : Soit $(a_n)_n$ une suite numérique telle que : $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
$= n^2 + n$
pour tout $n \in \mathbb{N}$
Montrer que $(a_n)_n$ est une suite arithmétique.

Exercice 53 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2 - 4u_n + 3}{2} \end{cases}$$
1. a) Calculer u_1 et u_2.
b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq \dfrac{1}{3}$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n < 1$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 54 : Soit (a_n) la suite définie par :
$a_0 = 3$ et $a_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4a_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
1. Calculer a_1 et a_2.
2. a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n > \dfrac{3}{2}$.
b) Étudier le sens de variation de $(a_n)_n$.
3. On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$; $b_n = \dfrac{2}{2a_n - 3}$.
a) Montrer que $(b_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$.
b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

Exercice 55 : Soit $(t_n)_n$ la suite définie par :
$t_0 = 2$ et $t_{n+1} = 6 + t_n^3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $t_n \geq 2$.
2. Vérifier que $t_n^3 - t_n + 6 = (2 + t_n)(t_n^2 - 2t_n + 3)$.
en déduire que (t_n) est une suite croissante.

Exercice 56 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = (1 + u_n)\sqrt{u_n}$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 1$.
b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \geq 1 + u_n$
3. a) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite croissante.
b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq n$.

Exercice 57 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.
1. a) Calculer u_1.
b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq 3$. Conclure
2. a) Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(3 - u_n)$.
b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq 3 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
c) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
Donner un encadrement de S_n en fonction de n.

Exercice 58 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{2}u_n$.
1. a) Calculer u_1 et u_2.
b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq \dfrac{1}{4}$.
c) En déduire que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.
2. a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}u_n$.
b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n u_0 < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 59 : Soit $(v_n)_n$ la suite définie par :
$v_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{2}{v_n^2}$.
a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est minorée par 2.
b) Montrer que:
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq v_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{4}(v_n - 2)$.
c) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq v_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Exercice 60 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$.
1. a) Calculer u_1.
b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$.
En déduire la monotonie de $(u_n)_n$.
2. a) Montrer que:
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.
b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n < \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq n + 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

EXERCICES

Exercice 61 : Soit $(t_n)_n$ la suite définie par :
$t_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); t_{n+1} = 5 - \frac{4}{t_n}$.

1. Calculer t_1 et t_2.
2. **a)** Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 \leq t_n \leq 4$.

b) En déduire le sens de variation de $(t_n)_n$.

3. **a)** Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $4 - t_{n+1} \leq \frac{4 - t_n}{2}$.

b) En déduire que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq 4 - t_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4. On pose $S_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n \geq 4n - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Exercice 62 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2} u_n$
et on pose $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n}{n+1}$.

1. **a)** Calculer v_0, u_1, v_1 et u_2.

b) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

c) En déduire v_n et u_n en fonction de n.

2. **a)** Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2^{n+1} \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$.

EN ÉCONOMIE

Exercice 63 : (Production des oeufs)

Une coopérative de production des oeufs a vendu sa production 6 fois, cette année.
Son 6ième revenu s'élève à 16105,10Dh; elle remarque que le revenu de chaque vente augmente de 10% par rapport au revenu de la vente précédente.
Soit u_p le revenu de la 6ième vente où $1 \leq p \leq 6$.

1. Exprimer u_{p+1} en fonction de u_p.
2. Déterminer le revenu de la première vente.
3. Déterminer le montant total des revenus de cette coopérative cette année.

Exercice 64 : (Production de fer)

Une usine de fer a produit 2000 tonnes durant l'année 1980.
Après cette année, la production a connu une diminution annuelle de 15% sur la période de 1981 à 1990.
A partir du premier janvier 1991, la production augmente de 15% chaque année.
Soit u_n la production de l'usine durant l'année « $1980 + n$ » où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. On suppose que: $0 \leq n \leq 10$.

Exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer u_{10}, la production de l'usine durant l'année 1990.
4. Calculer u_{11}.
5. Montrer que: $u_{12} = (1,15)^2 \times (0,85)^{10} \times 2000$
6. Exprimer u_n en fonction de n pour $n \geq 11$.

Exercice 65 : (Nombre d'habitants)

En 2000, le nombre d'habitants d'un pays est environ 30.000 000.
On suppose que le nombre d'habitants augmente de 1,5% chaque année, et que 45000 personnes quittent ce pays à cause de l'immigration.
On considère 1000000 comme unité. On note u_n le nombre d'habitants l'année $2000 + n$, on a alors $u_0 = 30$

1. **a)** Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = 1,015 u_n - 0,045$.

2. On pose : $v_n = u_n - 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_n en fonction de n.

c) Quel sera le nombre d'habitants de ce pays en 2020?
(On donne : $(1,015)^{20} = 1,346855$).

Exercice 66 : (Béneficie)

Une personne a investi la somme de 50000dh dans un projet.
Il a remarqué que son bénéfice net augmente de 3% (par rapport au bénéfice net du mois précédent).
Soit u_1 le bénefice net de cette personne le premier mois, et u_n le bénéfice net de cette personne le mois n.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Calculer u_{n-1} en fonction de u_n ; puis en déduire u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme des bénéfices nets des n premiers mois.
4. Sachant que cet homme économise chaque mois 30% de son bénéfice net; après combien de mois économisera t-il 10% de la somme investie?

Exercice 67 : (Voiture d'occasion)

Une personne a acheté une voiture à 80.000dh le premier janvier 1999.

Soit u_n la valeur de cette voiture le premier janvier $1999+n$.

On admet que : $u_{n+1}=0,7u_n+2100$.

On pose : $u_0=80.000$ et $v_n=u_n-7000$; $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Calculer u_n en fonction de n.
3. Quelle est la valeur de cette voiture au premier janvier 2007?
4. A partir de combien d'années la valeur de cette voiture sera inférieure à 30000dh?

Exercice 68 : (Matière première)

Le prix d'une matière première augmente de 5% par an à partir du premier janvier 1980.

Soit u_n le prix d'une tonne de cette matière au cours de l'année $1980+n$.

On suppose que $u_0=2000Dh$.

1. Que représente u_0 ? calculer u_1 et u_2.
2. **a)** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=1,05u_n$.
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? donner ses éléments caractéristiques.
3. **a)** Quel est le prix de cette matière au cours de l'année 1990?
(On prendra : $(1,05)^{10}\simeq 1,63$)
b) En quelle année le prix de cette matière sera doublé?
(On prendra : $(1,05)^{14}\simeq 2$)

Exercice 69 : Intérêt simple - Intérêt composé

On considère deux capitaux C_1 et C_2 de même valeur 20000dh $(C_1=C_2=20000)$.

Le capital C_1 est placé à un intérêt simple de 10,5%.

Le capital C_2 est placé à un intérêt composé de $t\%$.

1. **a)** Calculer la somme des intérêts produits par le capital C_1 à près n années.
b) Après combien d'années, cette somme sera de 42000dh?
2. **a)** Vérifier qu' après deux ans, le montant des intérêts produits par C_2 en deux ans est donné par : $\left(\frac{2t}{100}+\frac{t^2}{100^2}\right)C_2$.
b) Calculer t sachant que le montant de ces intérêts est égal à celui des intérêts produits par C_1 en deux ans.

Exercice 70 : Soit $(v_n)_n$ la suite définie par : $v_0=\frac{1}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_{n+1}=v_n\sqrt{v_n}$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le v_n\le\frac{1}{2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_n$.
4. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Exercice 71 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0=2$ et $(\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+1}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $(\forall n\in\mathbb{N})$; $v_n=u_n^2-2$.
a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
b) En déduire u_n en fonction de n.
3. **a)** Montrer que :
$(\forall n\in[0;+\infty[)$; $\sqrt{1+n}\le 1+\frac{n}{2}$.
b) En déduire que :
$(\forall n\in\mathbb{N})$; $\sqrt{2}\le u_n\le\sqrt{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Exercice 72 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0=\frac{3}{2}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}$.

1. **a)** Calculer u_1 et u_2.
b) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1<u_n<2$.

c) Déterminer le sens de variation de $(u_n)_n$.

2. On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) En déduire v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 73 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2(n+1)}$.

1. a) Calculer v_0 et montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

b) En déduire u_n en fonction de n.

2. a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2^n > n$.

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n < u_n < \frac{2}{n}$.

Exercice 74 : Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ v_0 = 12 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad et \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

On pose:
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n = u_n - v_n$ et $t_n = 3u_n + 8v_n$

1. a) Calculer w_0, w_1 et t_0.

b) Montrer que $(w_n)_n$ est une suite géométrique. En déduire w_n en fonction de n.

2. a) Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

b) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n > u_n$.

c) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bornées.

3. a) Montrer que la suite $(t_n)_n$ est une suite constante.

b) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 75 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :
$u_1 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > 0$.

3. a) Vérifier que
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$.

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n > \sqrt{2}$.

4. a) Vérifier que
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) En déduire que
$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < u_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 76 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :
$u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2)$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n < 4$.

3. a) Vérifier que
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{u_n})(1 + \sqrt{u_n})$.

b) En déduire la monotonie de $(u_n)_n$.

4. a) Montrer que
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$.

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < 4 - u_n \leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

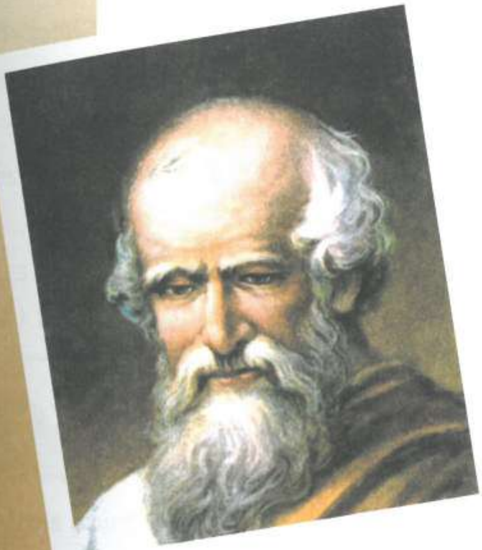
c) Déterminer le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 \Longrightarrow |4 - u_n| \leq 10^{-2}$.

les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	3	2	3	1	3	3	2	2/3	1	2

LE BARYCENTRE DANS LE PLAN

Chapitre 4



Archimède

Le barycentre (du grec barus : lourd, pesant) fut introduit en physique au 19 siècle.
Cependant, cette notion, indispensable en mécanique, se retrouve déjà dans les travaux d'Archimède. (3 siècle avant J.C) sur les leviers.

Objectifs de la leçon

- Reconnaitre le barycentre de deux points pondérés;
- Reconnaître le barycentre de trois ou quatre points pondérés;
- Reconnaître et utiliser la propriété caractéristique du barycentre de deux ou trois ou quatre points pondérés;
- Utiliser l'associativité et l'invariance du barycentre;
- Montrer la colinéarité de trois points en utilisant le barycentre;
- Utiliser le barycentre pour montrer que trois droites sont concourantes;
- Déterminer les coordonnées du barycentre.

Le contenu

1. Barycentre de deux points pondérés.
2. Barycentre de trois points pondérés.
3. Barycentre de quatre points pondérés.
4. Coordonnées du barycentre.

Capacités attendues

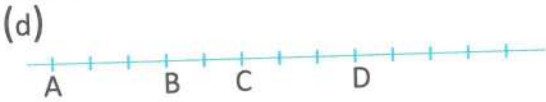
- Utilisation du barycentre pour réduire une expression vectorielle.
- Construire le barycentre de n points $(2 \leq n \leq 4)$.
- Utiliser le barycentre pour montrer que trois points sont alignés dans le plan.
- Utiliser le barycentre pour montrer que des droites sont concourantes.
- Utiliser le barycentre pour résoudre des problèmes géométriques ou physiques.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Alignement de trois points

On considère les points A, B, C et D sur une droite (d).



1. Déterminer le réel k dans chacun des cas suivants :

a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
b $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$
c $\overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DC}$
d $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CD}$

2. **a** Vérifier que : $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b Déterminer deux réels α et β dans chacun des cas suivants :
$\alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BA} = \vec{0}$; $\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ et $\alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

3. Recopier le dessin sur le cahier, puis construire les points K, H et G définis par :
$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$; $4\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}$ et $7\overrightarrow{GD} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 2 Balance romaine (sensibilisation à la notion du barycentre de deux points pondérés).

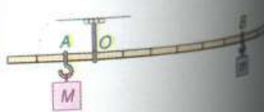
Le fonctionnement de la balance romaine est basée sur le principe d'Archimère telle que la relation $m \times OB = M \times OA$ est vérifiée.

1. **a** Montrer qu'à l'équilibre, la relation vectorielle $M.\overrightarrow{OA} + m.\overrightarrow{OB} = \vec{0}$ est vérifiée.

le point O est appelé **barycentre** des **points pondérés** $(A;M)$ et $(B;m)$.

b Déterminer le point O dans le cas où $M = m$.

2. On suppose que : $m = 300g$ et $\overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OA}$, quelle est la valeur de la masse M ?



Activité 3 Barycentre de deux points pondérés - propriété caractéristique - Coordonnées du barycentre

I) Soit A et B deux points du plan.

1. Montrer qu'il existe un seul point G tel que : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2. Construire le point G.

II) Soit A et B deux points distincts du plan; a et b sont deux réels non nuls.

1. Montrer que si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G qui vérifie:
$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. **(1)**

2. Montrer que si $a + b = 0$, alors il n'existe aucun point G vérifiant la relation **(1)**.

Si $a+b \neq 0$ alors le point G qui vérifie $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ s'appelle **le barycentre des deux points pondérés** $(A;a)$ et $(B;b)$.

3. Montrer que le point G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ si et seulement si $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ pour tout point M du plan.

4. Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ et a , b deux réels tels que : $a+b \neq 0$.

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.

a Montrer que : $\overrightarrow{OG}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$

b En déduire les coordonnées de G en fonction de a, b et les coordonnées de A et B.

c Déterminer les coordonnées du point K, barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$ avec $A(2;1)$ et $B(-3;4)$.

Remarque:

On dit aussi que K est le barycentre des points A et B affectés des coefficients 5 et -2.

Activité 4 Barycentre de trois points pondérés

Soit A, B et C trois points du plan.

I) Étudions l'existence d'un point G du plan qui vérifie:

$2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ **(1)**

1. Montrer que la relation **(1)** est équivalente à : $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire l'existence et l'unicité du point G.

3. Soit K le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;-3)$.

a Montrer que : $-\overrightarrow{GK}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b Montrer que G est le barycentre des points K et C affectés des coefficients à déterminer; en déduire que les points G; C et K sont alignés.

II) Existe t-il un point G du plan qui vérifie: $3\overrightarrow{GA}-7\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ **(2)** ?

III) Soit a, b et c trois nombres réels,

On veut déterminer une condition sur l'existence et l'unicité d'un point G qui vérifie : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ **(3)**.

a Montrer que la relation vectorielle **(3)** est équivalente à :

$(a+b+c)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$.

b En déduire que si $a+b+c \neq 0$, alors il existe un unique point G vérifiant **(3)**.

Dans ce cas, le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

LE COURS

1 Barycentre de deux points pondérés

1- Point pondéré

Soit A un point du plan et a un nombre réel. Le couple $(A;a)$ s'appelle **un point pondéré**, et le réel a s'appelle **la masse** du point A (on dit aussi que le point A est affecté du coefficient a).

Propriété et définition

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que $a+b\neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
Le point G s'appelle **le barycentre** des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.

Info :
- Si $a=0$ alors $G=B$.
- Si $b=0$ alors $G=A$.
- Si $a+b=0$ alors $(A;a)$ et $(B;b)$ n'ont pas de barycentre.

Remarque

Le point G s'appelle aussi le barycentre du système pondéré $\{(A;a);(B;b)\}$.

Info :
- $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ équivaut à:
- $a\overrightarrow{AG}+b\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

Exemple: Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Donc : I est le barycentre de $(A;1)$ et $(B;1)$.
I s'appelle aussi le centre de gravité des deux points A et B.

2- Propriétés du barycentre de deux points

a) Homogénéité :

- Si G est le barycentre de $(A;a)$; $(B;b)$ alors G est aussi le barycentre de $(A;ka)$; $(B;kb)$ pour tout réel k non nul.
- le barycentre ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul.

Pour la démonstration, remarquer que pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a :
$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Longleftrightarrow (ka)\overrightarrow{GA}+(kb)\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

b) Propriété caractéristique :

Propriété

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que : $a+b\neq 0$.
G est le barycentre des deux points pondérés $(A;a);(B;b)$
si et seulement si pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

info :
Si $a+b=0$ alors : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=b\overrightarrow{AB}$ c'est un vecteur indépendant du point M.

Remarque

- Dans la propriété caractéristique, en remplaçant M par A (respectivement par B), on obtient : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ (respectivement $\overrightarrow{BG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$)
- Ceci prouve que: si $A\neq B$ alors : $G\in(AB)$.

C'est-à-dire que les points A, B et G sont alignés.

POUR COMPRENDRE

1 Existence et construction du barycentre de deux points pondérés :

Soit A et B deux points et $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs de m pour que les deux points pondérés $(A;m)$ et $(B;m-1)$ admettent un barycentre G. Écrire une relation entre $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GA}$ dans ce cas.
2. Construire le point G dans le cas où $m = 2$.

Méthode

Deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ admettent un barycentre si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$.

1. Les points pondérés $(A;m)$ et $(B;m-1)$ admettent un barycentre si et seulement si $m+(m-1) \neq 0$. C'est-à-dire : $m \neq \frac{1}{2}$.
Dans ce cas on a : $m\overrightarrow{GA}+(m-1)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2. Construction du point G : G est le barycentre $(A;2)$; $(B;1)$; donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}$
c'est-à-dire : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; d'où la construction du point G.

2 Barycentre de deux points

Soit E, F et K trois points du plan tels que : $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$.

1. Déterminer deux réels α et β pour que K soit le barycentre de $(E;\alpha)$ et $(F;\beta)$.
2. Déterminer le réel x pour que K soit le barycentre de $(E;-2)$ et $(F;x)$.

1. **Déterminons α et β :**
On a : $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FE} \Longleftrightarrow 3\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KE}$
$\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{EK} = \vec{0}$
Puisque : $2+1 \neq 0$ alors K est le barycentre de $(F;2)$ et $(E;1)$ d'où : $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
on peut trouver d'autres valeurs de α et β.
(voir par exemple question 2)
2. Déterminons x tel que K soit le barycentre de $(E;-2)$ et $(F;x)$.
On a K est le barycentre de $(E;1)$ et $(F;2)$ donc K est aussi le barycentre $(E;-2)$ et $(F;-4)$, (on a multiplié les coefficients par un même réel non nul (-2)
d'où : $x = -4$.

3 Utilisation de la propriété caractéristique du barycentre

Soit A et B deux points distincts, I est le milieu du segment $[AB]$ et G le barycentre de $(A;3)$ et $(B;-5)$. Déterminer l'ensemble :
$E = \{M \in (P) / \| 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| \}$
(où (P) est le plan).

▸ G est le barycentre de $(A;3)$ et $(B;-5)$ donc d'après la propriété caractéristique,
pour tout point M du plan, on a:
$3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = (3+(-5))\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MG}$.

▸ I est le milieu du segment $[AB]$; donc I est le barycentre de $(A;1)$ et $(B;1)$; d'où :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Soit M un point du plan, on a:

$$\begin{aligned} M \in E &\Longleftrightarrow \| 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \| \\ &\Longleftrightarrow \| -2\overrightarrow{MG} \| = \| -2\overrightarrow{MI} \| \\ &\Longleftrightarrow 2MG = 2MI \\ &\Longleftrightarrow MG = MI \end{aligned}$$

Donc l'ensemble E est la médiatrice du segment $[GI]$.

Rappel : L'ensemble des points du plan équidistant deux extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment.

4 Barycentre et l'intersection de deux droites

Soit G le barycentre de $(A;2)$; $(B;-3)$, E et F deux points tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$.

1. Montrer que G est le barycentre de $(E;1)$ et $(F;2)$.
2. En déduire que les deux droites (EF) et (AB) sont sécantes en un point qu'on déterminera.

1. Montrons que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$:
On a : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Longleftrightarrow \overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$
$\Longleftrightarrow -\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{FG} = \vec{0} (-1+2 \neq 0)$
donc G est le barycentre de $(E;-1)$ et $(F;2)$.

2. Déduction :
On a G est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$.
G est barycentre de $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$.
Or $E \notin (AB)$ donc, les droites (AB) et (EF) ne sont pas confondus, d'où : $(EF) \cap (AB) = \{G\}$

2 Barycentre de trois points pondérés

Propriété et définition

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés tels que : $a+b+c \neq 0$.

Il existe un et un seul point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

▸ Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.

Exemple : On considère les points A; B; C et D tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; déterminons les réels a, b et c tels que D soit le barycentre de $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.

On a: $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})-4(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}-4\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

Puisque $7+3-4 \neq 0$ alors D est le barycentre des points $(A;7)$; $(B;3)$ et $(C;-4)$;

Donc : $a=7$; $b=3$ et $c=-4$.

Info :

Si $a+b+c=0$ alors les points $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ n'ont pas de barycentre.

Cas particulier : (isobarycentre)

Si $a=b=c$, alors le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ est appelé l'isobarycentre des points A; B et C. C'est le centre de gravité du triangle ABC (dans le cas où les points A; B et C ne sont pas alignés).

Propriétés :

Propriété de l'homogénéité

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ alors, pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre des points pondérés $(A;ka)$; $(B;kb)$ et $(C;kc)$.

Propriété caractéristique

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ des points pondérés du plan tels que $a+b+c \neq 0$ et G un point du plan.

G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ si, et seulement si, pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

Conséquence :

Pour $M=A$, dans la propriété caractéristique, on obtient : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Cette relation permet la construction du point G.

Associativité du barycentre

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ des points pondérés du plan tels que : $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$

Si G est le barycentre des points $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ et H est le barycentre des points $(A;a)$ et $(B;b)$, alors G est le barycentre des points $(H;a+b)$ et $(C;c)$.

1 Construction du barycentre de trois points

Soit ABC un triangle et G un point tel que: $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB}$.

1. Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;2)$.
2. Construire le point G.

Méthode : Pour montrer que G est barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;2)$, il suffit de vérifier que : $1+1+2 \neq 0$ et que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (ou : $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$)
Remarquer la position du point G dans chaque relation.

1. **Montrons que G est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;2)$:**

On a :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} &\Longleftrightarrow 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\Longleftrightarrow -\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{aligned}$$

or $1+1+2 \neq 0$, donc G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;2)$.

2. **Construction du point G :**

On a G est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;2)$.

D'après la propriété caractéristique du barycentre, pour tout point M du plan on a :

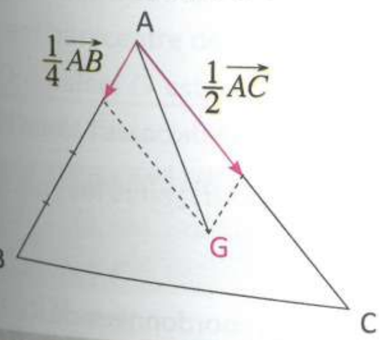
$(2+1+1)\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

En posant $M = A$, on obtient :

$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car $(\overrightarrow{AA} = \vec{0})$

d'où la construction du point G.



Remarque : On peut également construire le point G en utilisant l'associativité du barycentre.

2 Associativité du barycentre - droites concourantes

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points $(A;-2)$; $(B;3)$ et $(C;3)$. Soit K le barycentre des points pondérés $(A;-2)$ et $(B;3)$ et H le barycentre des points pondérés $(A;-2)$ et $(C;3)$, et I le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que G est le barycentre de $(K;1)$ et $(C;3)$ et que G est le barycentre de $(B;3)$ et $(H;1)$ et G est le barycentre de $(A;-1)$ et $(I;3)$.
2. En déduire que les droites (CK); (BH) et (AI) sont concourantes en un point qu'on déterminera.

1. ▸ On a K est barycentre de $(A;-2)$; $(B;3)$ et G est le barycentre de $(C;3)$; $(B;3)$ et $(A;-2)$

donc G est le barycentre de $(C;3)$ et $(K;-2+3)$
(d'après l'associativité du barycentre)
D'où G est le barycentre de $(K;1)$; $(C;3)$.

▸ De même on a H est le barycentre de $(A;-2)$ et $(C;3)$
et G est le barycentre de $(B;3)$; $(C;3)$ et $(A;-2)$

donc G est le barycentre de $(B;3)$ et $(H;1)$

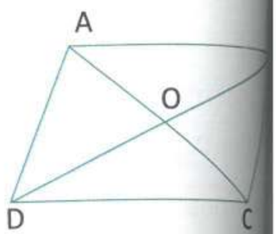
▸ I est le milieu de $[BC]$, donc I est le barycentre de $(B;3)$; $(C;3)$.
comme G est le barycentre $(C;3)$; $(B;3)$ et $(A;-2)$

alors, G est le barycentre de $(I;6)$ et $(A;-2)$
D'où : G est le barycentre de $(A;-1)$ et $(I;3)$.
(d'après l'homogénéité du barycentre)

2. Puisque G est barycentre de $(K;1)$ et $(C;3)$, donc : $G \in (CK)$ et on montre de même que $G \in (AI)$ et $G \in (BH)$.
Donc, les droites (CK); (BH) et (AI) sont concourantes au point G.

3 Barycentre de quatre points pondérés

On définit le barycentre de quatre points et ses propriétés comme la définition et les propriétés d[...]
barycentre de trois points.



Exemple : Soit ABC un parallélogramme de centre O.
On a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$; (Remarquer que $1+1+1+1\neq 0$).
donc O est le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$.
On dit que O est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
Le point O est aussi le centre de gravité du parallélogramme $ABCD$.

4 Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit $(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)$ et $(D;d)$ des points pondérés e[...]
$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$.

a) Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$, alors les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G = \dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$$

Exemple : Soit $A(2;3)$ et $b(-1;5)$, les coordonnées du point G barycentre de $(A;4)$ et $(B;-3[...]$
sont : $x_G=\dfrac{4x_A-3x_B}{4+(-3)}=11$ et $y_G=\dfrac{4y_A-3y_B}{4+(-3)}=-3$; donc: $G(11;-3)$

b) Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$, alors les coordonnées du point G sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

Exemple : Soit $A(1;1)$, $B(2;5)$ et $C(-1;0)$; et G est le barycentre de $(A;2)$; $(B;-1)$ et $(C;4)$
Les coordonnées de G sont :

$$x_G=\frac{2x_A-x_B+4x_G}{2+(-1)+4}=-\frac{4}{5} \text{ et } y_G=\frac{2y_A-y_B+4y_C}{2+(-1)+4}=-\frac{3}{5}$$

D'où : $G\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$

c) Coordonnées du barycentre de quatre points

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)$ et $(D;d)$, alors les coordonnées d[...]
point G sont : $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d}$ et $y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}$.

Exemple : Soit $A(-2;1)$, $B(0;-3)$; $C(1;-1)$ et $D(-3;-2)$, les coordonnées de G barycentre
des points pondérés $(A;0,5)$; $(B;2)$ $(C;1)$ et $(D;-1,5)$ sont :

$$x_G=\frac{0,5x_A+2x_B+x_C-1,5x_D}{0,5+2+1+(-1,5)}=\frac{9}{4} \text{ et } y_G=\frac{0,5y_A+2y_B+y_C-1,5y_D}{0,5+2+1+(-1,5)}=-\frac{7}{4}$$; D'où : $G\left(\frac{9}{4};-\frac{7}{4}\right)$

POUR COMPRENDRE

1 Construction du barycentre de quatre points pondérés

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

1. Montrer que les points $(A;-1)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ admettent un barycentre.
2. Construire le point G.

Le barycentre des points pondérés existe si et seulement si : la somme des coefficients est non nulle.

1. On a : $-1+3+1+1 \neq 0$ donc le barycentre des points pondérés $(A;-1)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ existe.

2. **Construction du point G.**

Méthode 1 : (On utilise la propriété caractéristique).

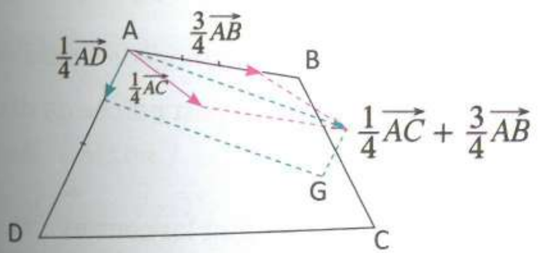
Pour tout point M du plan on a :

$(-1+3+1+1)\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Pour $M = A$, on obtient :

$4\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$



Méthode 2 :(On utilise l'associativité du barycentre).

On a : $3-1 \neq 0$, soit K le barycentre de $(A;-1)$ et $(B;3)$.

On a : $1+1 \neq 0$, soit H le barycentre de $(C;1)$ et $(D;1)$,

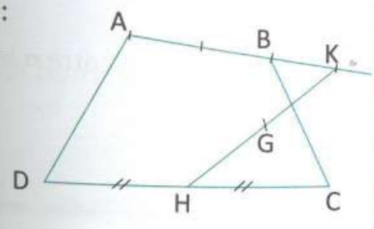
donc H est le milieu du segment $[CD]$.

Puisque G est barycentre de $(A;-1)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;4)$ alors G est le barycentre de $(K;2)$ et $(H;2)$; (d'après l'associativité du barycentre)

Donc G est le milieu de $[HK]$; d'où la construction du point G. (aprés avoir construit H et K).

construction de H et K :

on a: $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et H est le milieu de $[CD]$.



2 Barycentre de quatre points pondérés

Soit E, F, G, H et I cinq points du plan tels que : $2\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE} = 5\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{IE}$

Déterminer les réels a, b, c et d tels que I soit le barycentre des points pondérés $(E;a)$, $(F;b)$, $(G;c)$ et $(H;d)$.

Il suffit de chercher une relation de la forme :

$a\overrightarrow{EI} + b\overrightarrow{FI} + c\overrightarrow{GI} + d\overrightarrow{HI} = \vec{0}$ ou de la forme:

$a\overrightarrow{IE} + b\overrightarrow{IF} + c\overrightarrow{IG} + d\overrightarrow{IH} = \vec{0}$ avec $a+b+c+d \neq 0$

On a : $2\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE} = 5\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{IE}$

donc : $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IF} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IE} = 5\overrightarrow{HI} + 5\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IE}$

d'où : $5\overrightarrow{IE} + 3\overrightarrow{IG} - 2\overrightarrow{IF} - 5\overrightarrow{IH} = \vec{0}$

et puisque : $5+3-2-5 \neq 0$

alors : I est le barycentre des points pondérés $(E;5)$, $(G;3)$, $(F;-2)$ et $(H;-5)$.

3 Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points $A(-1;1)$; $B(0;2)$; $C(1;-1)$ et $D(1;0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point K barycentre de $(A;2)$ et $(B;3)$.
2. Déterminer les coordonnées du point L centre de gravité du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du point G barycentre de $(A;2)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;-1)$.

1. K est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;3)$; donc :

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{2x_A + 3x_B}{2+3} = \dfrac{2\times(-1)+3\times 0}{5} = -\dfrac{2}{5} \\ y_K = \dfrac{2y_A + 3y_B}{2+3} = \dfrac{2\times 1 + 3\times 2}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

d'où : $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$

2. L est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;1)$; donc :

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{1\times x_A + 1\times x_B + 1\times x_C}{1+1+1} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ y_L = \dfrac{1\times y_A + 1\times y_B + 1\times y_C}{1+1+1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

d'où : $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

3. G est le barycentre de $(A;2)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;-1)$; donc :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_A + 3x_B + 1\times x_C - 1\times x_D}{2+3+1+(-1)} = -\dfrac{2}{5} \\ y_G = \dfrac{2y_A + 3y_B + 1\times y_C - 1\times y_D}{2+3+1+(-1)} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

d'où : $G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

EXERCICES
RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 Utiliser le barycentre pour résoudre des exercices de géométrie

Soit $ABCD$ un quadrilatère. I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BD]$. K et L deux points définis par : $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; M est le milieu du segment $[KL]$.

Montrer que les points I ; J et M sont alignés.

Méthode : Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que l'un de ces points est le barycentre des deux autres points.

On a : $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ donc : $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$, donc

K est le barycentre de $(A;1)$; $(B;2)$ car $1+2\neq 0$

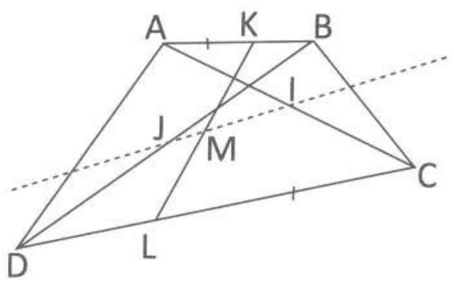
On a : $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ donc : $3\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{LC}$

d'où : $2\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{CL}=\vec{0}$

Donc : L est le barycentre de $(D;2)$ et $(C;1)$ car $2+1\neq 0$

M est le milieu du segment $[KL]$.

Donc : M est le barycentre de $(K;1)$; $(L;1)$.



On remarque que le coefficient (la masse) de chacun des points L ; K est égale à 3; donc M est barycentre de $(L;3)$ et $(K;3)$.

On a : M est barycentre de

$$\overbrace{(D;2)\quad(C;1)}^{(L;3)} \quad \text{et} \quad \overbrace{(B;2)\quad(A;1)}^{(K;3)}$$

D'après l'associativité du barycentre M est bar[…]centre de $(A;1)$; $(B;2)$; $(C;1)$ et $(D;2)$ et J e[…] le milieu de $[BD]$ comme I est le milieu de $[A$[…]

Alors M est barycentre de

$$\underbrace{(C;1)\text{ et }(A;1)}_{\downarrow} \text{ et } \underbrace{(D;2)\text{ et }(B\ldots}_{\downarrow}$$

M est barycentre de $\overline{(I;2)}$ et $\overline{(J;4)}$

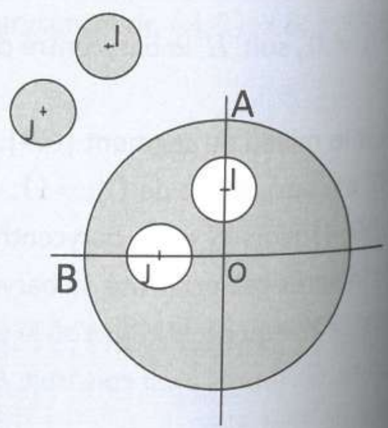
Donc : $M\in(IJ)$

D'où les points I ; J et M sont alignés.

EXERCICE RÉSOLU 2 Utilisation du barycentre pour résoudre des exercices de physique

Une plaque métalique homogène circulaire de centre O et de rayon R, est percée de deux pe[…]

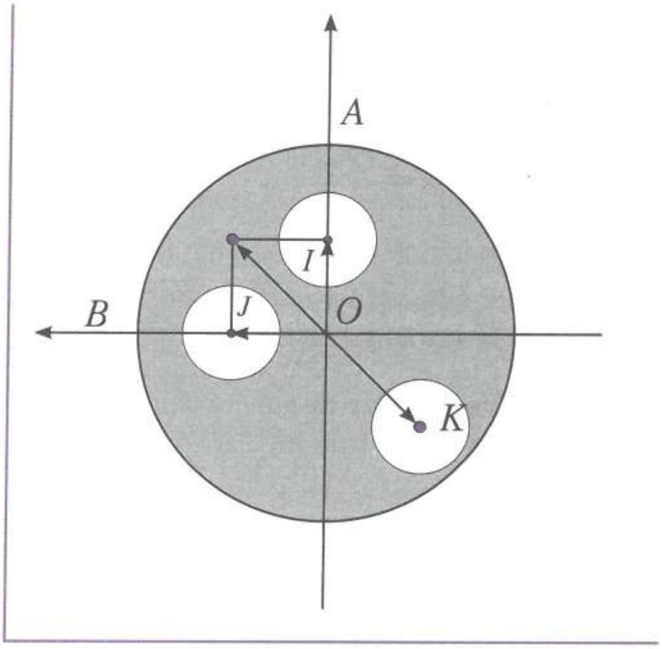
disques (D_1) et (D_2) dont les centres I et J so[…] les milieux respectifs de $[OA]$ et $[OB]$ et de mê[…] rayon $r=\frac{R}{4}$.



1 Déterminer le centre d'inertie G de cette p[…]que.

2 On veut percer un troisième disque (D_3) de centre K et de même rayon $r = \dfrac{R}{4}$. pour que O soit le centre d'inertie de la plaque.

Déterminer l'emplacement de K.



1 Déterminons le centre d'inertie G de cette plaque :

Soit m_1 et m_2 les masses de (D_1) et (D_2) telles que $m_1 = m_2$, soit m la masse du disque de centre O et de rayon R, puisque la plaque est homogène alors $\dfrac{m}{\pi R^2} = \dfrac{m_1}{\pi\left(\dfrac{R}{4}\right)^2} = \dfrac{m_2}{\pi\left(\dfrac{R}{4}\right)^2}$

les masses sont proportionnelles aux aires; donc : $m = 16m_1 = 16m_2$ par suite : $m_1 = m_2 = \dfrac{1}{16}m$

Le point G, centre d'inertie de la plaque est le barycentre de $\left(J;-\dfrac{1}{16}m\right)$; $\left(I;-\dfrac{1}{16}m\right)$ et $(O;m)$.

▸ Les coefficients de I et J sont négatifs.

On aura : $\overrightarrow{OG} = -\dfrac{1}{14}\overrightarrow{OI} - \dfrac{1}{14}\overrightarrow{OJ}$

2 Déterminons la position de K :

Pour que O soit le centre d'inertie de la plaque, il faut et il suffit que O soit le barycentre des points

$\left(G;m-\dfrac{1}{6}m-\dfrac{1}{6}\right)$ et $\left(K;-\dfrac{1}{6}m\right)$.

O barycentre de $\left(G;m-\dfrac{1}{6}m-\dfrac{1}{6}\right)$ et $\left(K;-\dfrac{1}{6}m\right)$ $(*)$

$(*) \Longleftrightarrow O$ barycentre de $(G;14)$ et $(K;-1)$

$\Longleftrightarrow 14\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OK} = \vec{0}$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OK} = 14\overrightarrow{OG}$

cette dernière relation détermine la position du point K.

Le terme barycentre provient du grec barus (lourd, pesant) et de centre, est initialement le centre des poids. Il s'agit d'une notion physique. Archimède, le mathématicien et physicien, est le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (que l'on appelle aujourd'hui centre de gravité), au IIIème siècle avant Jesus-Christ.

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 À quelle condition les points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ ont un barycentre?

2 Est-ce que le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$ est sur la droite (AB)?

3 Quelle condition doivent vérifier les réels a, b et c pour que $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ soit un vecteur indépendant de M ?

4 Est-ce que le centre de gravité d'un triangle est l'intersection de ces trois médianes?

Je teste mes techniques et mes métho

1 Comment peut-on démontrer que trois point sont alignés en utilisant le barycentre?

2 Comment peut-on démontrer que trois droite sont concourantes en utilisant le barycentre?

3 Comment peut-on construire le barycentre de deux points ?

4 Comment peut-on construire le barycentre de trois points ?

5 Comment peut-on simplifier une écriture vec-torielle en utilisant le barycentre?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exe

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse
1 Si G est le centre de gravité du triangle ABC alors :	$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$	G est barycentre de $(A;-2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3$
2 Si O est le centre du parallélogramme $ABCD$ alors :	O est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=$
3 Si G est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;1)$ alors :	$G\notin[AB]$	G est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(A;1)$	$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
4 Si I est le milieu de $[AB]$ et K est le barycentre de $(A;2)$; $(B;2)$ et $(C;4)$ alors :	$K\in[CI]$	K est le milieu de $[CI]$	C est le baryce de $(K;2)$ et $(I;-1)$
5 Si G est le barycentre de $(A;3)$; $(B;-1)$ et $(C;1)$ alors :	Les points G, A, B et C sont alignés.	A est le barycentre de $(B;1)$; $(C;1)$ et $(G;3)$	B est le baryce de $(A;3)$; $(C$ $(G;-3)$.
6 La relation : $3\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ signifie que G est le barycentre de:	$(A;3)$; $(B;1)$ et $(C;-2)$	$(A;-3)$; $(B;-1)$ et $(C;-2)$	$(A;3)$; $(B;-$ $(C;-2)$
7 La relation : $2\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{GF}-3\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ signifie que G est le barycentre de:	$(E;2)$; $(F;-1)$ et $(H;-3)$	$(E;2)$; $(F;1)$ et $(H;-3)$	$(E;-6)$; $(F$ $(H;9)$
8 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{BA}$ signifie que H est le barycentre de :	$(A;\sqrt{2})$ et $(B;1)$	$(A;-2)$ et $(B;-\sqrt{2})$	$H\in[AB]$
9 ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$ Si $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ alors:	K est le barycentre de $(A;1)$ et $(A';2)$	K est le barycentre de $(A;-1)$; $(B;-1)$ et $(C;-1)$	K est le centre gravité du tria ABC

Exercices d'application

Barycentre de deux points - Utilisation du barycentre

Exercice 1 : Déterminer dans chaque cas deux nombres réels a et b pour que G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$:

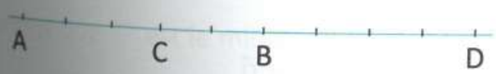
1. $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
2. $3\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
3. $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{BA}$
4. $5\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AB}$

Exercice 2 : Est-ce que les points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ admettent un barycentre dans chacun des cas suivants ?

1. $a=-5\,;b=4$
2. $a=2\,;b=-2$
3. $a=m^2-1\,;b=m-1$
4. $a=\sqrt{2}\,;b=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$
5. $a=0\,;b=1$
6. $a=\dfrac{m-1}{2m}\,;b=\dfrac{m^2-1}{2}\,;\ m\in\mathbb{R}^*$

Exercice 3 : Soit A, B, C et D quatre points alignés (voir figure); dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels a et b tels que :

1. B est le barycentre de $(A;a)$ et $(C;b)$.
2. A est le barycentre de $(C;a)$ et $(D;b)$.
3. D est le barycentre de $(C;a)$ et $(A;b)$.
4. C est le barycentre de $(B;b)$ et $(D;a)$.



Exercice 4 : Soit E, F et K trois points tels que : $\overrightarrow{KF}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{KE}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer deux réels x et y tels que :

1. K est le barycentre de $(E;x)$ et $(F;y)$.
2. E est le barycentre de $(K;x)$ et $(F;y)$.
3. F est le barycentre de $(E;x)$ et $(K;y)$.

Exercice 5 : Soit I et J deux points distincts du plan et L le symétrique du point I par rapport à J.

Déterminer deux réels a et b pour que L soit le barycentre de $(I;a)$ et $(J;b)$.

Homogénéité (Invariance)

Exercice 6 : Soit G le barycentre de $(A;\sqrt{8})$ et $(B;-\sqrt{2})$.

Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;-2)$ et $(B;1)$.

Exercice 7 : Soit E le barycentre de $(H;\sqrt{2}-1)$ et $(F;1)$.

Montrer que E est le barycentre des points pondérés $(F;\sqrt{2}+1)$ et $(H;1)$.

Exercice 8 : Soit K le barycentre des points pondérés $\left(N;\dfrac{m^2-1}{2}\right)$ et $\left(M;\dfrac{m-1}{2m}\right)$ où $m\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

Montrer que K est le barycentre de $(N;m+1)$ et $\left(M;\dfrac{1}{m}\right)$.

Construction du barycentre de deux points pondérés

Exercice 9 : Soit A et B deux points du plan tels que : $AB=8$.

Construire le point G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ dans chacun des cas suivants :

1. $a=3$ et $b=1$
2. $a=-1$ et $b=-3$
3. $a=\dfrac{1}{3}$ et $b=\dfrac{1}{2}$
4. $a=\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{2}$

Exercice 10 : Construire le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$, lorsqu'il existe, dans chacun des cas suivants :

1. $a=14$ et $b=8$
2. $a=-2017$ et $b=3009$
3. $a=1-\sqrt{2}$ et $b=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$
4. $a=10^{16}$ et $b=\dfrac{-10^{16}}{2}$

EXERCICES

Réduction d'une expression vectorielle - Ensemble de points

Exercice 11 : Soit G le barycentre de $(A;1)$ et $\left(B;-\frac{1}{2}\right)$; réduire les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{KA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KB}$
2. $-2\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}$
3. $-3\overrightarrow{MB}+6\overrightarrow{MA}$
4. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{NB}$

Exercice 12 : Soit H le barycentre des points pondérés $(E;\sqrt{2})$ et $(F;\sqrt{8})$.
Réduire chacune des expressions suivantes :

1. $\sqrt{2}\,\overrightarrow{EM}+2\sqrt{2}\,\overrightarrow{FM}$
2. $2\overrightarrow{NE}+4\overrightarrow{NF}$
3. $\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{FI}$
4. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}$

Exercice 13 : Soit A, B et C trois points du plan, et M un point du plan.
On pose : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que $\vec{u}$ est indépendant du point M .
2. En déduire que : $3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
3. Soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-5)$.

a) Montrer que : $\vec{u}=2\overrightarrow{GC}$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|=\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$

Exercice 14 : Soit A et B deux points du plan.
Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

1. $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$
2. $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|$
3. $\|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|-2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|$
4. $\|5\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=MA$

Coordonnées du barycentre de deux points :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 15 : Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.
Déterminer les coordonnées du point G dans chacun des cas suivants :

1. $A(-2;1)$ et $B(5;4)$; $\alpha=3$ et $\beta=-2$
2. $A(3;2)$ et $B(1;0)$; $\alpha=-1$ et $\beta=-1$
3. $A\left(-\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B(-2;3)$; $\alpha=\sqrt{2}$ et $\beta=1$

Exercice 16 : Soit K le barycentre des points pondérés $(E;2)$ et $(F;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point K dans le cas où $E(-3;3)$ et $F(0;\sqrt{3})$.
2. Déterminer les coordonnées du point E dans le cas où $K(1;-1)$ et $F(2;-4)$.
3. Déterminer les coordonnées des points E et F dans le cas où $K(-2;1)$; $x_E=\frac{1}{2}$ et $y_F=-1$

Exercice 17 : Soit $A(0;-3)$ et $B(2;7)$
Déterminer les coordonnées du point G après avoir démontré son existence dans les cas suivants :

1. $2\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
2. $3\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
3. $\sqrt{3}\,\overrightarrow{GA}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
4. $0,25\overrightarrow{AG}=-1,75\overrightarrow{BG}$

Barycentre de trois points pondérés :

Exercice 18 : Déterminer trois réels a; b et c pour que G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GB}$
2. $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
3. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ où D est un point du plan.

Exercice 19 : Est-ce que les points $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ admettent un barycentre dans chacun des cas suivants ?
Si la réponse est oui; déterminer une relation vectorielle entre A, B, C et G.

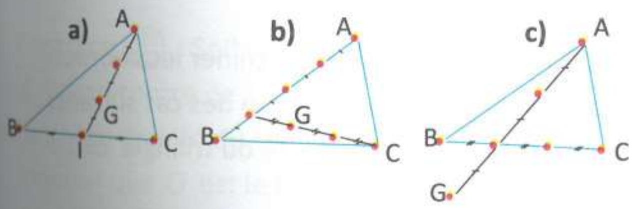
1. $a=1$; $b=\frac{1}{2}$ et $c=-3$
2. $a=2$; $b=3$ et $c=1$
3. $a=\sqrt{3}$; $b=\frac{3}{2}$ et $c=-\sqrt{3}$
4. $a=1$; $b=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ et $c=\sqrt{2}$

Associativité du barycentre :

Exercice 20 : Soit G le barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;-3)$ et $(C;2)$ et soit I le milieu de $[AC]$.
Montrer que : $4\overrightarrow{IG}-3\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

Exercice 21 : Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu de $[AC]$.
Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(I;2)$.

Exercice 22 : Pour chaque figure, déterminer les réels a; b et c pour que le point G soit le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.



Exercice 23 : Soit A, B et C trois points du plan, et K le point défini par : $2\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$
le point G est le barycentre de $(A;2)$; $(B;-3)$ et $(C;1)$.
Montrer que G est le milieu de $[CK]$.

Exercice 24 : Soit G le barycentre de $(E;-1)$; $(F;-3)$ et $(L;2)$.
K est le barycentre de $(E;2)$; $(L;-4)$.
H est le barycentre de $\left(F;\frac{3}{2}\right)$;$\left(L,-\frac{1}{2}\right)$.
Montrer que les points G, K et H sont alignés.

Construction du barycentre de trois points :

Exercice 25 : Soit ABC un triangle, dans chacun des cas suivants. Construire le point G barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.
1. $a=2$; $b=2$ et $c=2$
2. $a=3$; $b=-1$ et $c=2$
3. $a=0$; $b=1$ et $c=-\frac{1}{2}$
4. $a=\frac{1}{3}$; $b=\frac{1}{6}$ et $c=\frac{1}{2}$

Exercice 26 : Soit ABC un triangle. G est le barycentre des points pondérés $(A;-1)$; $(B;2)$ et $(C;4)$.
1. Construire le point K barycentre des points pondérés $(A;-1)$ et $(B;2)$.
2. Construire le point G en utilisant les points K et C.

Exercice 27 : Soit E, F et G trois points distincts, en utilisant l'associativité du barycentre, construire le point H dans chacun des cas suivants :
1. H est le barycentre de $\left(F;\frac{1}{2}\right)$; $\left(E;\frac{1}{2}\right)$ et $(G;1)$.
2. H est le barycentre de $\left(F;\frac{1}{2}\right)$; $(E;1)$ et $\left(G;\frac{1}{4}\right)$.
3. H est le barycentre de $(E;-3)$; $(F;-1)$ et $(G;2)$.

Exercice 28 : Soit ABC un triangle. G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;3)$ et $(C;-1)$.
1. Construire le point K barycentre de $(A;2)$ et $(B;3)$.
2. Construire le point H barycentre de $(B;3)$ et $(C;-1)$.
3. Construire le point G en utilisant les deux droites (GK) et (AH).

Exercice 29 : Soit ABC un triangle, en utilisant la méthode de l'exercice précédent, construire les points suivants :
1. G est barycentre de $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;2)$.
2. G est barycentre de $(A;-2)$, $(B;2)$ et $(C;1)$.
3. H est le point défini par la relation :
$3\overrightarrow{AH}-2\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=\vec{0}$

EXERCICES

Réduction d'une somme de vecteurs / Ensembles de points :

Exercice 30 : Soit G le barycentre de $\left(A;\frac{2}{3}\right)$, $(B;-1)$ et $\left(C;-\frac{1}{3}\right)$.

Réduire chacune des expressions suivantes :

1. $\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$
2. $-2\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$
3. $\overrightarrow{KA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$
4. $6\overrightarrow{BL}-2\overrightarrow{LC}+4\overrightarrow{LA}$

Exercice 31 : En utilisant un barycentre convenable, réduire chacune des expressions suivantes:

1. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$
2. $-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$
3. $\sqrt{2}\,\overrightarrow{LA}-\pi\overrightarrow{LB}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{CL}$
4. $2000\overrightarrow{NA}-3000\overrightarrow{BN}-4000\overrightarrow{NC}$

Exercice 32 : Soit A; B et C trois points du plan et M un point du plan.

On pose : $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est indépendant du point M.
2. Soit K le barycentre de $(B;1)$ et $(C;-3)$.
Montrer que : $\vec{v}=2\overrightarrow{KA}$.
3. Soit G le barycentre de $(A;2)$; $(B;-1)$ et $(C;-3)$.
a) Montrer que : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$ pour tout point M du plan.
b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|$

Exercice 33 : Soit ABC un triangle .

Déterminer chacun des ensembles suivants :

$E_1=\{M\in(P)/\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|\}$

$E_2=\{M\in(P)/\|5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|\}$

$E_3=\{M\in(P)/\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|\}$

E_4 est l'ensemble des points M du plan (P) tels que : $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{BC}$.

Coordonnées du barycentre de trois points :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 34 : Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

Déterminer les coordonnées de G dans chacun des cas suivants :

1. $a=-\frac{1}{2}$; $b=\frac{3}{2}$ et $c=-2$.
$A(4;1)$; $B(-2;-1)$ et $C(1;1)$
2. $A(-\sqrt{2};0)$; $B(-\sqrt{3};1)$ et $C(1;-1)$
$a=\sqrt{2}$; $b=-1$ et $c=\sqrt{3}$
3. $a=m-1$; $b=m$ et $c=1-m$
$A(2;-1)$; $B(-3;3)$ et $C(2;2)$ avec $m\in\mathbb{R}$

Exercice 35 : Soit les points $E(-2;2)$; $F(1;3)$ et $L(-1;1)$.

Montrer l'existence et déterminer les coordonnées du point G dans chacun des cas suivants:

1. G est le centre de gravité du triangle EFL.
2. $2\overrightarrow{GE}+3\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GL}=\vec{0}$
3. E est le barycentre de $(F;2)$; $(L;-1)$ et $(G;1$
4. O est le centre de gravité du triangle EFG.

Barycentre de quatre points pondérés :

Exercice 36 : Existe-t-il un point G barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)$ et $(D;d)$ dans chacun des cas suivants ?

1. $a=3$; $b=-1$; $c=2$ et $d=1$.
2. $a=2$; $b=1$; $c=-5$ et $d=2$.
3. $a=\frac{1}{3}$; $b=-\frac{1}{2}$; $c=1$ et $d=\frac{2}{3}$
4. $a=1$; $b=2+\sqrt{3}$; $c=\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ et $d=-1$

Exercice 37 : Soit P ; Q; R; S et T cinq points tels que : $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}-2\overrightarrow{PS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PT}$

1. Déterminer les réels α; β; γ et δ tels que Q le barycentre de $(P;\alpha)$; $(R;\beta)$; $(S;\gamma)$ et $(T;\delta)$
2. Montrer que le point P est le barycentre des points T ; Q; R et S affectés des coefficients que l'on déterminera.

3. Montrer que le point T est le barycentre des points P ; Q ; R et S affectés des coefficients qu'on précisera.

Associativité du barycentre :

Exercice 38 : Soit G le barycentre des points $(A;2)$; $(B;-1)$; $(C;2)$ et $(D;-1)$; I est le milieu du segment $[BD]$, J est le milieu de $[AC]$ et K est le barycentre de $(A;2)$; $(B;-1)$ et $(C;2)$.

1. Montrer que G est le barycentre des points K et D affectés des coefficients que l'on précisera.
2. Montrer que G est le barycentre des points I ; A et C affectés des coefficients que l'on précisera.
3. Montrer que les points G ; I et J sont alignés.

Exercice 39 : Soit $ABCD$ un quadrilatère, et E le barycentre de $(A;-1)$; $(B;3)$ et G le centre de gravité du triangle ECD.
Montrer que G est le barycentre de $(A;-1)$; $(B;3)$; $(C;2)$ et $(D;2)$.

Construction du barycentre de quatre points :

Exercice 40 : $EFGH$ est un parallélogramme. Construire le point K barycentre de $(E;-2)$; $(F;3)$; $(G;1)$ et $(H;-4)$.

Exercice 41 : Soit $ABCD$ un quadrilatère. Construire le point G barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;-1)$; $(C;2)$ et $(D;4)$.
Soit L le barycentre de $(E;-2)$; $(G;1)$ et M le barycentre de $(F;3)$ et $(H;-4)$.
Construire les deux points M et L, puis en déduire la construction du point K.

Réduction d'une somme de vecteurs - Ensemble de points :

Exercice 42 : Soit A;B;C et D quatre points du plan.

1. Soit M un point du plan; réduire les expressions :
$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$
et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$
2. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$
$=\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

Exercice 43 : Soit I le centre de gravité du triangle ADC ; et J le barycentre de $(A;-1)$; $(B;2)$; $(C;1)$ et $(D;2)$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\|$
$=\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

Exercices de renforcement

Alignement des points :

Exercice 44 : Soit $ABCD$ un parallélogramme et le point P défini par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Construire le point Q barycentre des points pondérés $(A;-3)$ et $(D;1)$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que : $a+b=3$ et P soit le barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$.
3. Montrer que le point C est le barycentre de $(A;-1)$; $(B;1)$ et $(D;1)$.
4. Montrer que les points P ; C et Q sont alignés.

Exercice 45 : Soit ABC un triangle et Q le point défini par $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;1)$ et $(C;1)$ et R est le projeté du point Q sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC).

1. Montrer que : $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que les points C ; G et R sont alignés.

Exercice 46 : Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points G ; I et J tels que:
G est le barycentre de $(B;-4)$ et $(C;9)$,
I est barycentre de $(A;3)$ et $(B;1)$,

EXERCICES

J est le point tel que : $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

1. Montrer que le point J est le barycentre des deux points C et D affectés par des coefficients que l'on déterminera.
2. Montrer que les points I ; J et G sont alignés.

Exercice 47 : Soit MNP un triangle. O est le milieu de $[NP]$, K est le barycentre de $(M;1)$ et $(N;a)$ avec $a \in \mathbb{R}^{*} - \{-1;1\}$ et G est le barycentre de $(M;1)$ et $(P;-a)$.
Montrer que les points O ; K et G sont alignés.

Intersection des droites - droites concourantes :

Exercice 48 : Soit ABC un triangle.

1. Construire le point G barycentre de $(A;3)$ et $(B;5)$.
2. Construire le point P défini par la relation : $7\overrightarrow{BP} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
3. Soit F le barycentre de $(A;3)$ et $(C;2)$ et soit M le barycentre de $(A;3)$; $(B;5)$ et $(C;2)$.

a) Construire les points F et M.

b) Montrer que les droites (BF); (AP) et (CG) sont concourantes.

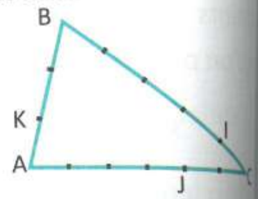
Exercice 49 : Soit ABC un triangle. Les points I ; J et K sont définis par : I le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{JC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.

1. Construire les points I ; J et K.
2. Montrer que les droites (AK); (BJ) et (CI) sont concourantes en un point G qui est barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;2)$ et $(C;-3)$.

Exercice 50 : Soit ABC un triangle. Les points J et G sont définis par: $\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CI}$

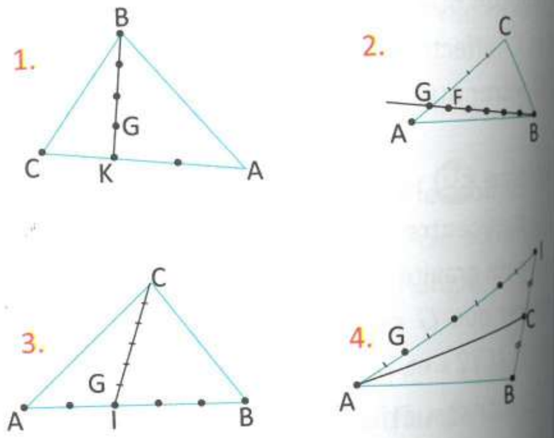
1. Montrer que G est le barycentre de $(A;3)$; $(B;-2)$ et $(C;4)$.
2. Montrer que les droites (BG); (AC) se coupent en J barycentre de $(A;3)$ et $(C;4)$.

Exercice 51 : En utilisant les données de cet exercice (voir figure).
Montrer que les droites (AI); (BJ) et (CK) sont concourantes.

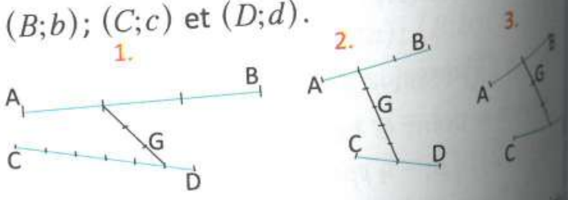


Lecture du barycentre à partir d'une figure :

Exercice 52 : En utilisant les figures suivantes, déterminer dans chaque cas les réels a ; b et c tels que G soit le barycentre de $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.



Exercice 53 : En utilisant les figures suivantes, déterminer dans chaque cas les réels a ; b ; c et d tels que le point G est le barycentre de $(A;a)$; $(B;b)$; $(C;c)$ et $(D;d)$.



Exercice 54 : ABC est un triangle. On considère les points M ; N et P définis par : $\overrightarrow{PA} = 2\ldots$ $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{NC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{NA}$

1. Construire les points M ; N et P.
2. Montrer que le point M est le barycentre des points pondérés $(N;-3)$ et $(P;1)$.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 55 : ABC est un triangle. On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que le barycentre des points $(A;1)$; $(B;1)$; $(D;3)$ et $(E;3)$ est le même que celui de $(A;4)$ et $(C;4)$.
2. En déduire que les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[DE]$ sont alignés.

Exercice 56 : ABC est un triangle. Soit D le symétrique du point B par rapport à A et K le point défini par : $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Soit F le barycentre de $(B;-1)$ et $(C;3)$.

1. En choisissant un repère convenable; montrer que les droites (BK) ; (AF) et (CD) sont concourantes.
2. En utilisant le barycentre, montrer que les droites (BK) ; (AF) et (CD) sont concourantes en un point G.

Exercice 57 : Soit $ABCD$ un rectangle de centre O. E est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Construire le point F barycentre de $(C;1)$ et $(D;3)$.
2. Soit G le milieu du segment $[ED]$.
Montrer que G est le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;3)$.
3. Montrer que G appartient à la droite (IF).
4. Soit K le point défini par : $4\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AD}$.
a) Déterminer deux réels a et b pour que K soit le barycentre de $(A;a)$ et $(D;b)$.
b) Montrer que le milieu du segment $[BC]$ appartient à la droite (GK).
5. a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{CA}$
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MD}\|$

Exercice 58 : Soit $ABCD$ un carré de côté a.
Déterminer et construire chaque ensemble des ensembles suivants :

$E_1=\{M\in(P)/\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2a\}$

$E_2=\{M\in(P)/\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|\}$

$E_3=\{M\in(P)/\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|\le a\}$

$E_4=\{M\in(P)/a\le\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|\le 2a\}$

E_5 est l'ensemble des points M du plan (P) tels que : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

$E_6=\{M\in(P)/\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|<\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|\}$

Barycentre et fonctions :

Exercice 59 : Soit A et B deux points du plan tels que : $AB=5$ et m un nombre réel.
Soit G le barycentre de $(A;2-m)$ et $(B;3m-1)$ (s'il existe).

1. a) Pour quelles valeurs de m le point G existe?
b) Vérifier que : $\overrightarrow{AG}=\frac{3m-1}{2m+1}\overrightarrow{AB}$ où $m\neq-\frac{1}{2}$.
Soit f la fonction définie par : $m\mapsto\frac{3m-1}{2m+1}$
2. Déterminer le réel m pour que G soit le milieu de $[AB]$.
3. Déterminer les valeurs de m pour que $G\in[AB]$.
4. Soit J le symétrique de I par rapport à B.
Existe-t-il une valeur de m pour que $G=J$?
5. Construire l'ensemble des points G lorsque m décrit l'intervalle $[0;2]$.

Barycentre et transformations usuelles

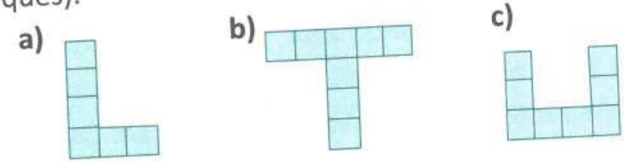
Exercice 60 : Soit A, B et C trois points du plan.
Soit T la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

1. Réduire l'écriture de la somme :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ en utilisant le milieu I du segment $[BC]$.
2. En déduire la nature de la transformation T.

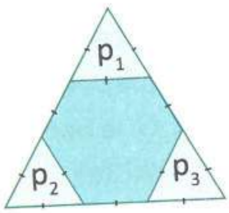
EXERCICES

Barycentre et la physique - centre d'inertie :

Exercice 61 : Construire le centre d'inertie de chaque plaque métallique homogène suivante. (on suppose que les petits carrés sont identiques).



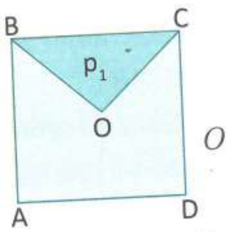
Exercice 62 : Une plaque métallique homogène de la forme d'un triangle équilatéral (voir figure ci-contre).



Déterminer dans chacun des cas suivants la position du centre d'inertie.

1. Lorsqu'on retire la plaque P_1 seulement.
2. Lorsqu'on retire les deux plaques P_1 et P_2.
3. Lorsqu'on retire les trois plaques P_1 ; P_2 et P_3.

Exercice 63 : La figure suivante represente une plaque métallique homogène (P) de forme carrée $ABCD$ de centre O dont on a retiré la plaque (P_1) de la forme d'un triangle OBC.



Déterminer le centre d'inertie de cette plaque (P).

Moyenne des notes :

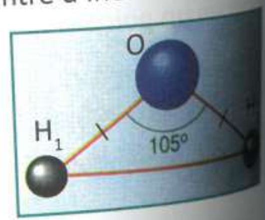
Exercice 64 : Un élève a obtenu à un contrôle la note 16 (coefficient 2) et la note 10 à un autre contrôle (coefficient 1).

1. Construire sur un axe les points D ; I et M correspondant respectivement aux notes du premier contrôle, du second et la moyenne .
2. **a)** Déterminer une relation de la forme $a\overrightarrow{MD} + b\overrightarrow{MI} = \vec{0}$.

   b) Que représente cette relation?

Barycentre et la chimie :

Exercice 65 : Une molécule d'eau de formule brute H_2O est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène H_1 et H_2. On assimile les noyaux de ces atomes à des points notés O ; H_1 et H_2 ; en pratique, on suppose que le triangle OH_1H_2 est isocèle, et que $H_1\widehat{O}H_2 = 105°$ et $OH_1 = 0,96°$ et $(1A° = 10^{-10}m)$
Les masses atomiques sont 16 pour l'oxygéne et 1 pour l'hydrogéne.
Trouver la position du centre d'inertie de la molécule d'eau.

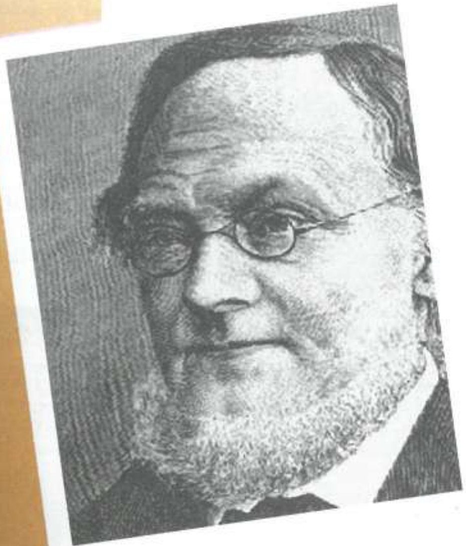


les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Réponse n°:	2 / 3	1 / 3	1	2 / 3	3	3	2	3	1 /2/ 3

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Chapitre 5



hermann grassmann günther

Hermann Günther Grassmann (1809-1877, né et mort à Stettin)1 est un mathématicien et indianiste allemand. Polymathe, il était connu de ses contemporains en tant que linguiste. Physicien, Il est considéré aujourd'hui comme le fondateur du calcul tensoriel et de la théorie des espaces vectoriels.

Objectifs de la leçon

- Connaître l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé;
- Utiliser l'expression analytique du produit scalaire;
- Connaître l'expression analytique de la nome d'un vecteur;
- Utiliser le produit scalaire pour :
  - calculer des distances;
  - déterminer les expressions de $\cos x$ et $\sin x$;
- Connaître un vecteur normal à une droite;
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point de cette droite et un vecteur normal à cette droite;
- Détermination de :
  - la distance d'un point à une droite;
  - l'équation d'un cercle connaissant son centre et son rayon;
  - l'équation d'un cercle connaissant un diamètre;
  - l'intérieur et l'extérieur d'un cercle;
  - la position relative d'un cercle et d'une droite;
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques.

Le contenu

1. Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé
2. Droite dans le plan (étude analytique)
3. Équation cartésienne d'un cercle
4. Étude de l'ensembles des points du plan $M(x;y)$ tels que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
5. Intérieur - Extérieur d'un cercle
6. Position relative d'une droite et d'un cercle
7. Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Capacités attendues

- Expression du parallélisme et l'orthogonalité de deux droites;
- Calcul des aires et mesure des angles en utilisant le produit scalaire;
- Détermination de l'ensemble des points tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$;
- Détermination du centre et du rayon d'un cercle connaissant son équation cartésienne;
- Passage de l'équation cartésienne à une représentation paramétrique et réciproquement ;
- Utilisation de l'expression analytique pour résoudre des exercices géométriques et algébriques.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Produit scalaire

$ABCD$ est un carré de côté $\sqrt{3}$ et E un point de la droite (AB) tel que : $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

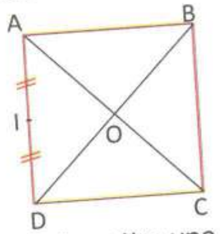
1. Montrer que : $DE = 2$ puis calculer AE.
2. Montrer que : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} = 3$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = -\sqrt{3}$.
3. Calculer $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}$, en déduire la valeur de $\cos\widehat{BDE}$.

formule:

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Activité 2 Repère orthonormé

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que : $AB = \sqrt{2}$.



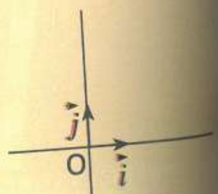
1. Recopier le tableau suivant puis mettre une croix « × » dans les cases convenables.

Le repère R	R est un repère orthogonal	R est un repère orthonormé	R est un repère orthonormé direct
$(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$			
$(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DI})$			
$(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$			
$(O;\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})$			
$(O;\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$			

2. Déterminer les coordonnées des points O ; A ; B ; C et D dans le repère $(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$.

Info :

$(O;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé



$\begin{cases} \vec{i}.\vec{j} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Activité 3 Utiliser les propriétés du produit scalaire

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = -1$.
   - a Calculer $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$ et $\vec{u}.(\vec{u}+2\vec{v})$.
   - b Calculer $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.
2. On considère les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que : $\vec{x} = 2\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{y} = -\vec{i}+3\vec{j}$.
   - a Calculer $\vec{x}.\vec{y}$, $\|\vec{x}\|$ et $\|\vec{y}\|$.
   - b En déduire $\cos(\widehat{\vec{x};\vec{y}})$.
3. On considère les points : $A(2;3)$ et $B(-1;2)$.

Calculer les distances : OA, OB et AB.

formule 1:

- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

formule 2:

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ACTIVITÉS D'INTRUDUCTION

Dans toutes les activités suivantes, on considère que le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Activité 4 — Expression analytique du produit scalaire - norme d'un vecteur - distance entre deux points - Expression de $\cos\theta$

1. On considère dans le plan, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ où x; y; x' et y' sont des réels.

a Montrer que $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

b Montrer que $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

c Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
Déduire de ce qui précède que : $\cos\theta=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

2. On considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

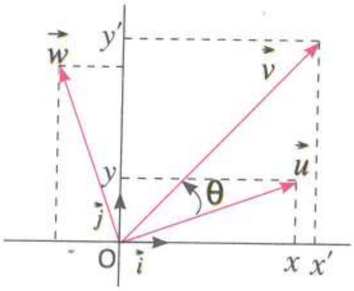
a Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b En déduire $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Activité 5 — Expression de $\sin\theta$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que :
$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.
On considère le vecteur $\vec{w}$ tel que :
$(\widehat{\vec{u};\vec{w}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$.

1. Montrer que $(\widehat{\vec{v};\vec{w}})\equiv\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]$.
2. Calculer $\vec{v}.\vec{w}$; en déduire que :
$\sin\theta=\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$.
3. À partir de la figure ci-contre, vérifier que : $\vec{w}(-y;x)$.
4. Calculer $\sin\theta$ en fonction de x; y; x' et y'.
5. En se basant sur la question précédante, vérifier que :
$\sin\theta=\dfrac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.



formule 1:
$(\widehat{\vec{v};\vec{w}})=(\widehat{\vec{v};\vec{u}})+(\widehat{\vec{u};\vec{w}})$
$(\widehat{\vec{v};\vec{u}})=-(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

formule 2:
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

formule 3:
$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$

Activité 6 — Vecteur normal à une droite

1. On considère la droite (D) d'équation : $x+2y+1=0$.

a Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D).

b On considère le vecteur $\vec{n}(1;2)$.
Calculer $\vec{n}.\vec{u}$. Que peut-on conclure?

2. On considère une droite (Δ) d'équation : $ax+by+c=0$ où $(a;b)\neq(0;0)$.

a Montrer que $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à la droite (Δ).

ACTIVITÉS

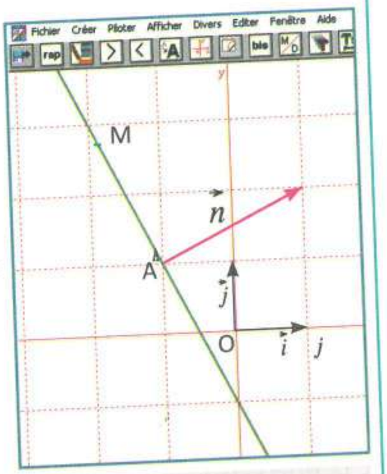
b Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

- La droite (D) d'équation : $x - y + 1 = 0$.
- La droite (D) d'équation : $2x + 5y - 3 = 0$.

Info :
tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur d'une droite est appelé **vecteur normal** à cette droite.

Activité 7 — Équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal

On considère dans le plan, la droite (D) passant par le point $A(-1;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal à (D). (voir figure)



1. Soit M un point de la droite (D).
Que vaut $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$? justifier votre réponse.

2. Soit $(x;y)$ les coordonnées du point M.

a Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

b En utilisant le résultat de la questions 1), déterminer une équation cartésienne de la droite (D).

Info :
Si : $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (D), alors $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D).

L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

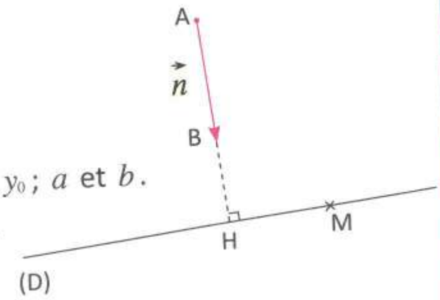
Activité 8 — Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ et $A(x_0;y_0)$ un point du plan.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (D). On pose $d = AH$.

1. Soit $\vec{n}(a;b)$ un vecteur normal à la droite (D) et B un point du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$.

Montrer que:
$(\forall M \in (D))$; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$.



2. Soit $(x;y)$ les coordonnées du point M.
Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ en fonction de x ; y ; x_0 ; y_0 ; a et b.

3. Montrer que : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = |ax_0 + by_0 + c|$.

4. En déduire que :
$$d(A;(D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Info :
- $(a;b) = (0;0)$ équivaut $a = 0$ et $b = 0$.
- $(a;b) \neq (0;0)$ équivaut $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Info :
$d = AH$ est la distance du point A à la droite (D) on la note $d(A;(D))$

Activité 9 — Équation cartésienne d'un cercle

On considère le cercle (C) de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

1. Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartiennent au cercle (C) : $A(3;1)$; $B(2;2)$; $C(\sqrt{3}+1;2)$ et $D(-1;1)$.

2. Soit $M(x;y)$ un point du plan.

a Calculer la distance ΩM en fonction de x et y.

b Montrer que le point M appartient au cercle (C) si et seulement si : (E) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

L'équation (E) est appelée **une équation cartésienne** du cercle (C) de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

3. En suivant les mêmes démarches de la question précédente, déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R $(R>0)$.

> **Info :**
> le cercle (C) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\Omega M = R$

Activité 10 — Représentation paramétrique d'un cercle

On considère un cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R ; soit M un point de (C) tel que : $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta[2\pi]$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

1. **a** Montrer que : $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{\Omega M} = R\cos\theta$

b Montrer que : $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{\Omega M} = R\sin\theta$

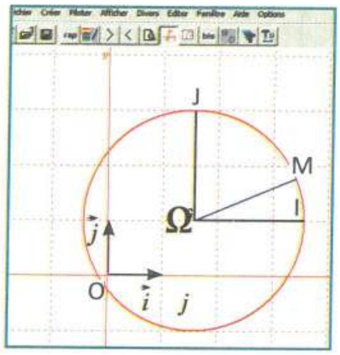
2. Soit $(x;y)$ les coordonnées du point M.

a Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

b Calculer en fonction de x ; y ; a et b les produits scalaires : $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{\Omega M}$.

c En déduire que : $(F)\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} / (\theta \in \mathbb{R})$.

Le système (F) est appelé **une représentation paramétrique** du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.



Activité 11 — Équation de la tangente en un point d'un cercle

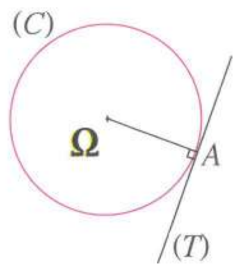
On considère un cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R, soit $A(x_0;y_0)$ un point du cercle (C).

Soit (T) la droite tangente au cercle (C) au point A.

1. Déterminer un vecteur normal à la droite (T).

2. Montrer qu' une équation cartésienne de la droite (T) est :

$$(x-x_0)(a-x_0)+(y-y_0)(b-y_0)=0$$



LE COURS

1 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

1- Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

DÉFINITION

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base du plan, et O un point du plan.

- On dit que $(\vec{i};\vec{j})$ est une **base orthonormée** si : $\vec{i}.\vec{j}=0$, $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$.
- On dit que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un **repère orthonormé** si : $(\vec{i};\vec{j})$ est une base orthonrmée.
- Si $(\vec{i};\vec{j})$ est une base orthonormée et $(\overline{\vec{i};\vec{j}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(O;\vec{i};\vec{j})$ est appelé **repère orthonormé direct**.

Dans toute la suite du chapitre, On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2- Propriétés

Propriété

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan, on a $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

Exemple : Calculons $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\vec{w}$ où $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$.

On a : $\vec{u}(1;2)$; $\vec{v}(2;-1)$ et $\vec{w}(5;3)$ donc : $\vec{u}.\vec{v}=1\times2+2\times(-1)=0$

et $\vec{v}.\vec{w}=2\times5+(-1)\times3=7$ et $\vec{u}.\vec{w}=1\times5+2\times3=11$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$

Info :

$\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}.\vec{v}=0$

3- Norme d'un vecteur - distance entre deux points

a) Norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ un vecteur du plan. La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

b) Distance entre deux points :

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.

La distance AB est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

4- Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Propriété

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a : $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\dfrac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

1 Vecteurs orthogonaux

Déterminer la valeur du nombre réel m pour que les vecteurs $\vec{u}(3;-1+m)$ et $\vec{v}(2-m;5)$ soient orthogonaux.

Calculons $\vec{u}.\vec{v}$

on a : $\vec{u}.\vec{v} = 3(2-m)+5(-1+m)$

$= 6-3m-5+5m = 2m+1$

Donc : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 2m+1=0$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

D'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $m = -\frac{1}{2}$

2 Norme d'un vecteur - Distance entre deux points.

On considère dans le plan, les points suivants : $A(3;2)$, $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $C(-1;-4)$, $D\left(\frac{5}{2};-2\right)$ et $E(1;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABE est rectangle en E.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

1. **Montrons que le triangle ABE est rectangle en E.**

Méthode 1 : On montre que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = 0$.

Méthode 2 : On calcule les longueurs des côtés du triangle ABE puis, on applique la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode 1 : On a : $\overrightarrow{AE}(-2;-3)$ et $\overrightarrow{BE}\left(\frac{3}{2};-1\right)$

D'où : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\times(-2)+(-1)\times(-3) = 0$

Donc : $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux et par conséquent, le triangle ABE est rectangle en E.

Méthode 2 : On a : $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ d'où :

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

On a : $AE = \|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$.

et : $BE = \|\overrightarrow{BE}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

D'où : $AE^2+BE^2 = 13+\frac{13}{4} = \frac{65}{4} = AB^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABE est rectangle en E.

2.

$ABCD$ est un losange signifie que : $ABCD$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux (ou les diagonales sont perpendiculaires)

▸ **Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme.**

On a : $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ d'où : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $ABCD$ est un parallélogramme.

▸ **Montrons que $ABCD$ est un losange, en utilisant deux méthodes.**

Méthode 1 : D'après la question 1) on a : $AB = \frac{\sqrt{65}}{2}$

et on a : $\overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{2};-4\right)$ d'où

$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+16} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Donc $ABCD$ est un parallélogramme et $AB = AD$, et par conséquent, $ABCD$ est un losange.

Méthode 2 : On a : $\overrightarrow{BD}(3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;-6)$ d'où : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = -12+12 = 0$ signifie que $(BD)\perp(AC)$, donc $ABCD$ est un parallélogramme avec des diagonales perpendiculaires, donc $ABCD$ est un losange.

3 Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ où $A(3;3)$, $B(1;1)$ et $C(1;3)$.

On a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;0)$ donc :

$AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{4+0} = 2$,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

D'où : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB\times AC} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

LE COURS

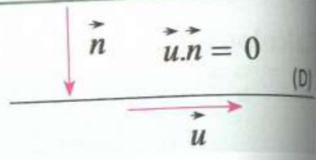
2 Droite dans le plan (Étude analytique)

1- Vecteur normal à une droite

DÉFINITION

Soit (D) une droite du plan.

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé **vecteur normal** à la droite (D).



Propriété

Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D).

2- Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

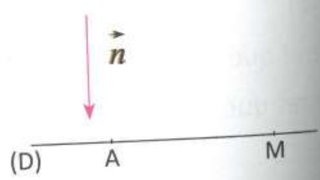
Propriété

Une équation de la droite (D) passant par le point $A(x_0;y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ es[t] $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Exemple : Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1;1)$ e[t] de vecteur normal $\vec{n}(2;3)$.

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (D) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)\times 2 + (y-1)\times 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2x + 3y - 5 = 0 \end{aligned}$$



Donc, une équation cartésienne de (D) est : $2x + 3y - 5 = 0$.

3- Orthogonalité de deux droites

Propriété

Soit (D) et (D') deux droits d'équations respectives : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

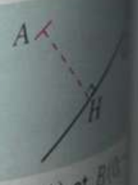
(D) et (D') sont **orthogonales** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est[-à-]dire : $aa' + bb' = 0$

4- Distance d'un point à une droite

DÉFINITION

Soit (D) une droite, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur (D).

Le nombre réel positif AH est appelé **la distance du point A à la droite** (D) et on écrit : $d(A;(D)) =$



Propriété

Soit (D) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et $A(x_0;y_0)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (D) est : $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple : On considère la droite (D) d'équation : $x + y + 2 = 0$ et les points $A(1;-1)$ et $B($

On a : $d(A;(D)) = \dfrac{|1 + (-1) + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $d(B;(D)) = \dfrac{|0 - 2 + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = 0$ donc : $B \in (D)$

1 Vecteur normal à une droite

Donner un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a $(D): x-2y+5=0$ b $(D): x-1=0$

c $(D): 2y-3=0$

a On a : $x-2y+5=0$ s'écrit :

$1x+(-2)y+5=0$

Donc $\vec{n}(1;-2)$ est un vecteur normal à la droite (D).

b On a : $x-1=0$ s'écrit : $1.x+0.y-1=0$

Donc $\vec{n}(1;0)$ est un vecteur normal à la droite (D).

c On a : $2y-3=0$ s'écrit : $0.x+2.y-3=0$

Donc $\vec{n}(0;2)$ est un vecteur normal à la droite (D).

2 Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite (D) passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

On peut procéder de deux façons:

Méthode 1 :

$\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D), donc une équation cartésienne de (D) s'écrit sous la forme : $ax+by+c=0(*)$

Puisque $A\in(D)$, alors en remplaçant les coordonnées de A dans $(*)$, on trouve c.

Méthode 2 :

Soit $M(x;y)$ un point du plan

On a : $M(x;y)\in(D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

En appliquant l'expression analytique du produit scalaire, on obtient une équation de (D).

On considère les points $A(1;1)$, $B(-2;0)$ et $C(3;5)$.

1. Déterminer une équation de la droite (D), médiatrice du segment $[AC]$.

2. Déterminer une équation de la droite (Δ), hauteur du triangle ABC issue de C.

1. **Déterminons une équation de la droite** (D)

La médiatrice du segment $[AC]$ est la droite (D) passant par le point I milieu du segment $[AC]$ et perpendiculaire à (AC) donc $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (D).

On a $I(2;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2;4)$ est un vecteur normal à (D), donc une équation cartésienne de (D) s'écrit sous la forme : $2x+4y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.

Puisque $I\in(D)$ alors : $4+12+c=0$ d'où : $c=-16$.

Donc : $x+2y-8=0$ est une équation de la médiatrice du segment $[AC]$.

2. **Déterminons une équation de la droite (Δ) hauteur du triangle ABC issue de C**

La hauteur du triangle ABC issue de C est la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire à (AB) ; cela signifie que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (Δ).

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\Delta) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0 \\ &\Longleftrightarrow (x-3)(-3)+(y-5)(-1)=0 \\ &\Longleftrightarrow -3x-y+14=0 \end{aligned}$$

Donc : $3x+y-14=0$ est une équation de (Δ).

3 Distance d'un point à une droite

On considère les points $A(-1;-3)$ et $B(3;2)$.

a Vérifier que : $5x-4y-7=0$ est une équation de la droite (AB).

b Calculer la distance du point O à la droite (AB).

c En déduire l'aire du triangle OAB.

a On a : $5(-1)-4(-3)-7=0$ et $5(3)-4(2)-7=0$

donc, les coordonnées de A et B vérifient l'équation.

D'où $5x-4y-7=0$ est une équation de la droite (AB). (On remarque $A\neq B$)

b On a : $d(O;(AB))=\dfrac{|5(0)-4(0)-7|}{\sqrt{(5)^2+(-4)^2}}=\dfrac{7\sqrt{41}}{41}$

c On a : $d(O;(AB))=OH$ où H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) donc OH est une hauteur du triangle OAB.

D'où : l'aire du triangle OAB est :

$$S=\frac{AB\times OH}{2}=\frac{AB\times d(O;(AB))}{2}$$

$$=\frac{5\times\frac{7\sqrt{41}}{41}}{2}=\frac{35\sqrt{41}}{82}$$

LE COURS

3 Équation cartésienne d'un cercle

1- Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

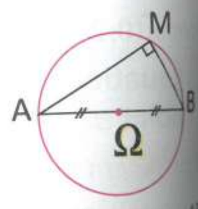
Propriété

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R $(R > 0)$ est :
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ que l'on peut écrire :
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$

Info :
Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\Omega M = R$

Exemple : Une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ est : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ que l'on peut écrire : $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

2- Équation d'un cercle définie par son diamètre



$\Omega A = \Omega B = R = \frac{AB}{2}$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan, il existe un et un seul cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$. Le centre du cercle $(\mathscr{C})$ est le point Ω milieu du segment $[AB]$ et son rayon R est la distance $\frac{AB}{2}$.
Autrement dit, pour tout point M du plan, on a : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \Omega M = \frac{AB}{2}$.

Exemple : Déterminons une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ tel que $A(1;3)$ et $B(-1;1)$.
On a : le centre de $(\mathscr{C})$ est le point $\Omega(0;2)$ milieu de $[AB]$ et le rayon est : $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$.
Donc : une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ est : $(x-0)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2$ que l'on peut écrire
$x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple : Déterminons une équation du cercle $(\mathscr{C})$ définie dans l'exemple précédent.
Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) + (y-3)(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \end{aligned}$$

3- Représentation paramétrique d'un cercle

Propriété et définition

le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R $(R > 0)$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système :

$(S)\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$. Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** du cercle.

1 Équation cartésienne d'un cercle

Déterminer une équation du cercle $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

a $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

b $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(2;1)$ et passe par le point $A(-1;1)$.

c $(\mathscr{C})$ passe par les points $A(-1;0)$, $B(1;2)$ et $C(7;4)$.

1. **a** Une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon $\sqrt{7}$ est : $(x-1)^2+y^2=7$ c'est-à-dire : $x^2+y^2-2x-6=0$

b **Déterminons une équation de** $(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre Ω et passant par le point A signifie que son rayon est : $R=\Omega A$.

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(-3,0)$ d'où : $R=\Omega A=\sqrt{9}=3$

Donc, une équation du cercle $(\mathscr{C})$ est :

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$ que l'on peut écrire :

$x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

c **Déterminons une équation de** $(\mathscr{C})$

Le point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC.

▸ Pour déterminer Ω, il suffit de déterminer le point d'intersection de deux médiatrices.

▸ le rayon de ce cercle est : $R=\Omega A=\Omega B=\Omega C$.

▸ Soit (Δ_1) la médiatrice du segment $[AB]$ et I est le milieu du segment $[AB]$.

On a $I(0;1)$ et $\overrightarrow{AB}(2;2)$.

Puisque $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (Δ_1) alors une équation de (Δ_1) s'écrit sous la forme :

$2x+2y+c=0$

On a : $I(0;1)\in(\Delta_1)$ signifie que : $2+c=0$ c'est-à-dire $c=-2$ Donc (Δ_1):$x+y-1=0$.

▸ Soit (Δ_2) la médiatrice du segment $[AC]$ et J est le milieu du segment $[AC]$.

On a : $J(3;2)$ et $\overrightarrow{AC}(8;4)$

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$M(x;y)\in(\Delta_2)\iff \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$\iff 8(x-3)+4(y-2)=0$$
$$\iff 2x+y-8=0$$

Donc (Δ_2): $2x+y-8=0$

▸ Soit $(a;b)$ les coordonnées du point Ω le centre du cercle $(\mathscr{C})$.

Ω est le point d'intersection de (Δ_1) et (Δ_2).

Donc : $(a;b)$ est solution du système : $\begin{cases}x+y=1\\2x+y=8\end{cases}$

Après résolution du système, on obtient $a=7$ et $b=-6$

D'où $\Omega(7;-6)$ est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.

▸ Calculons le rayon de $(\mathscr{C})$

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(-8;6)$; donc:

$R=\Omega A=\|\overrightarrow{\Omega A}\|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$

D'où, une équation de $(\mathscr{C})$ est : $(x-7)^2+(y+6)^2=100$

2 Représentation paramétrique d'un cercle

1. Déterminer une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ d'équation :

$$x^2+y^2+6x-8y+23=0.$$

2. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=3+2\sin\theta\end{cases}/(\theta\in\mathbb{R}).$$

1. Le centre du cercle $(\mathscr{C})$ est $\Omega(-3;4)$ et le rayon est $\sqrt{2}$ (vous pouvez le vérifier), donc d'après la propriété du cours, une représentation paramétrique du cercle

$(\mathscr{C})$ est : $\begin{cases}x=-3+\sqrt{2}\cos\theta\\y=4+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}/(\theta\in\mathbb{R})$.

2. Soit $M(x;y)$ un point du plan dont les coordonnées vérifient le système donné

On a : $\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\y=3+2\sin\theta\end{cases}$; donc: $\begin{cases}x+1=2\cos\theta\\y-3=2\sin\theta\end{cases}$

D'où : $(x+1)^2+(y-3)^2=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$
$=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4$

Par suite: $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ est une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(-1;3)$ et de rayon 2.

LE COURS

4 Étude de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Soit a, b et c trois nombres réels, on considère l'ensemble (E) défini par :

$(E)=\{M(x;y)\,/\,x^2+y^2+ax+by+c=0\}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(E) &\Longleftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0\\ &\Longleftrightarrow (x^2+ax)+(y^2+by)+c=0\\ &\Longleftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0\\ &\Longleftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}\end{aligned}$$

Info :

$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

On considère le point Ω de coordonnées $\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$, on a :

$M(x;y)\in(E)\Longleftrightarrow \Omega M^2=\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}\ (*)$

L'égalité $(*)$ nous mène à considérer les trois cas suivants :

Premier cas : Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'égalité $(*)$ est fausse, donc l'ensemble (E) est l'ensemble vide.

Deuxième cas : Si $a^2+b^2-4c=0$ alors l'égalité $(*)$ devient : $\Omega M^2=0$, ce qui signifie que: $M=\Omega$ donc: $(E)=\{\Omega\}$.

Troisième cas : Si $a^2+b^2-4c>0$ alors l'égalité $(*)$ devient : $\Omega M=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$, ce qui signifie que: (E) est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

Propriété

Soit a, b et c trois nombres réels et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

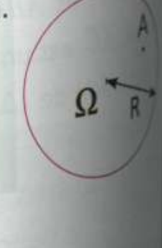
- (E) est un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ si et seulement si $a^2+b^2-4c>0$.
- Si $a^2+b^2-4c<0$ alors (E) est l'ensemble vide.
- Si $a^2+b^2-4c=0$ alors $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$.

5 Intérieur et extérieur d'un cercle

DÉFINITION

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon R avec $R>0$ et M un point du plan.

- Le point M est **sur** le cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M=R$.
- Le point M est à **l'intérieur** du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M<R$.
- Le point M est **l'extérieur** du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M>R$.



Conséquences

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Pour tout point $M(x_0;y_0)$ du plan, on a :

- M est un point du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$.
- M est à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c<0$.
- M est à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c>0$.

1 Étude de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble (E), des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation :

1. $x^2+y^2-x+3y-4=0$.
2. $x^2+y^2-6x+2y+10=0$.
3. $x^2+y^2-4x+5=0$.

1. **Déterminons la nature de l'ensemble** (E)

On a : $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

et $y^2+3y=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

Donc :

$$M(x;y)\in(E)\Longleftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=0$$
$$\Longleftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{26}{4}=\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2$$

D'où (E) est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2. **Déterminons la nature de l'ensemble** (E)

On a : $x^2-6x=(x-3)^2-9$

et $y^2+2y=(y+1)^2-1$

Donc :

$$M(x;y)\in(E)\Longleftrightarrow(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+10=0$$
$$\Longleftrightarrow(x-3)^2+(y+1)^2=0$$
$$\Longleftrightarrow x-3=0 \text{ et } y+1=0$$
$$\Longleftrightarrow x=3 \text{ et } y=-1$$

pour tout a et b de $\mathbb{R}$
on a : $a^2+b^2=0\Longleftrightarrow a=0$ et $b=0$

Donc $E=\{A(3;-1)\}$

3. **Déterminons la nature de l'ensemble** (E)

On a : $x^2-4x=(x-2)^2-4$

Donc : $M(x;y)\in(E)\Longleftrightarrow(x-2)^2-4+y^2+5=0$
$$\Longleftrightarrow(x-2)^2+y^2=-1$$

La dernière écriture est impossible, d'où (E) est l'ensemble vide.

2 Résolution d'inéquations

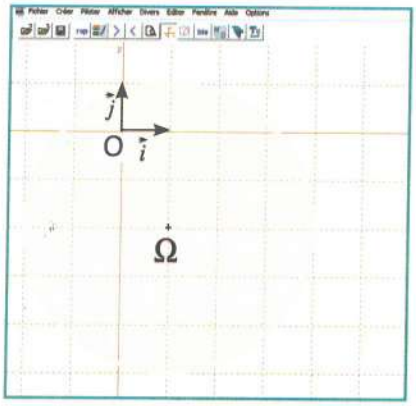
Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

1. $x^2+y^2-2x+4y-4\leq 0$ (1).
2. $x^2+y^2+2x+4y+4>0$ (2).

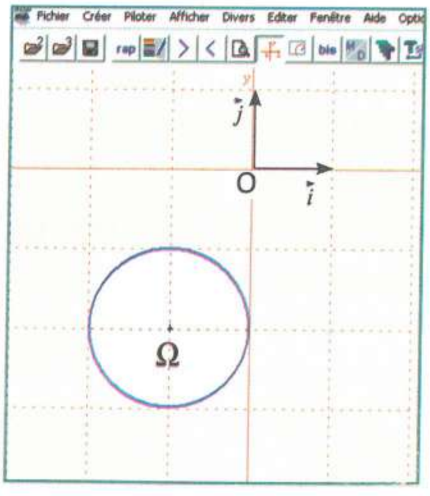
1. On a :

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0\Longleftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

Donc $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $R=3$, d'où: l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est formé des couples de coordonnées des points se trouvant à l'intérieur du cercle ou sur le cercle $(\mathscr{C})$.(C'est-à-dire sur le disque fermé de centre Ω et de rayon 3)



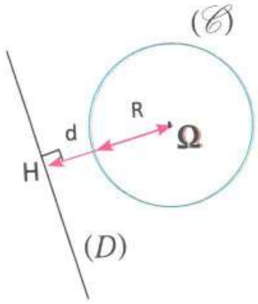
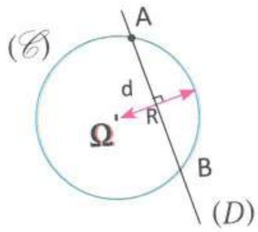
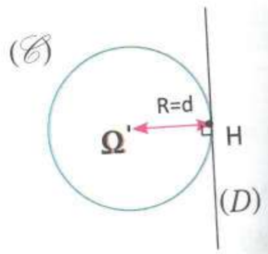
2. L'équation: $x^2+y^2+2x+4y+4=0$ est l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(-1;-2)$ et de rayon $R=1$, d'où: l'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est formé des couples de coordonnées des points se trouvant à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$.



LE COURS

6 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Pour étudier la position relative d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R avec une droite (D), on peut calculer la distance d du centre Ω à la droite (D) et la comparer au rayon R.

$d > R$	$d < R$	$d = R$
La droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathscr{C})$  $(\mathscr{C}) \cap (D) = \phi$	La droite (D) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points distincts  $(\mathscr{C}) \cap (D) = \{A;B\}$	La droite (D) et le cercle $(\mathscr{C})$ ont un seul point commun. On dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$  $(\mathscr{C}) \cap (D) = \{H\}$

7 Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Rappel :

A est un point du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω.
La tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$ est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (ΩA).

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle d'équation: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ et $A(x_0;y_0)$ un point de $(\mathscr{C})$.
Une équation de la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A est : $(x - x_0)\left(\frac{a}{2} + x_0\right) + (y - y_0)\left(\frac{b}{2} + y_0\right) = 0.$

Remarque

On a obtenu l'équation de la tangente grâce à l'équivalence : $(M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0)$

Exemple : On considère le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et le point $A(2;4)$ de $(\mathscr{C})$.
Une équation de la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A est : $(x-2)(-1+2) + (y-4)(-2+4) = 0$
c'est-à-dire : $x + 2y - 10 = 0$.

1 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Étudier la position relative du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ et de la droite (D) dans chacun des cas suivants:

a (D): $x+y+2=0$.

b (D): $x-y+2=0$.

c (D): $\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3}=0$.

Méthode:

Pour déterminer la position relative d'une droite (D) d'équation : $ax+by+c=0$ et d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R, on peut suivre les étapes suivantes :

- On calcule la distance d du point Ω à la droite (D) en appliquant la formule suivante :
$d=d(\Omega;(D))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- On compare les deux nombres réels d et R.

a On a : $d=d(\Omega;(D))=\dfrac{|1+2+2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

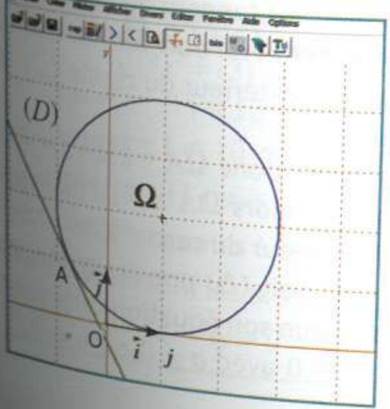
Puisque $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}>2$ alors $d>R$. Donc la droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathscr{C})$.

b On a : $d(\Omega;(D))=\dfrac{|1-2+2|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<2$ alors $d<R$. Donc, la droite (D) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points distincts.

c On a : $d(\Omega;(D))=\dfrac{|\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}}=2=R$

Puisque $d=R$ alors la droite (D) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$. Donc, la droite (D) et le cercle $(\mathscr{C})$ ont un seul point commun.



2 Déterminer l'équation de la tangente à un cercle en un point.

1. Vérifier que le point $A(-2;3)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon $R=2\sqrt{2}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (D) au cercle $(\mathscr{C})$ au point A.

1. On a : $\overrightarrow{\Omega A}(-2;2)$ donc $\Omega A=\|\overrightarrow{\Omega A}\|=2\sqrt{2}$ d'où $\Omega A=R$ et par suite A appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

2.

Méthode :

On peut déterminer l'équation de la tangente en un point A du cercle $(\mathscr{C})$, soit par application directe de la propriété, Soit en considérant que le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal à (D) et que $A\in(D)$.

Méthode 1 : L'équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$ est :

$(x-0)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$,

c'est-à-dire : $x^2+y^2-2y-7=0$.

D'après la propriété de la leçon, l'équation de la tangente est :

$(x-x_0)\left(\dfrac{a}{2}+x_0\right)+(y-y_0)\left(\dfrac{b}{2}+y_0\right)=0$

En prenant : $x_0=-2$, $y_0=3$, $a=0$ et $b=-2$, on obtient : $(x+2)(-2)+(y-3)(-1+3)=0$

c'est-à-dire : $-2x+2y-10=0$, donc

(D): $x-y+5=0$

Méthode 2 : On a $\overrightarrow{\Omega A}(-2;2)$ est un vecteur normal à la droite (D), donc une équation cartésienne de (D) s'écrit sous la forme : $-2x+2y+c=0$

$A(-2;3)\in(D)$ signifie que : $4+6+c=0$, c'est-à-dire $c=-10$, donc: $-2x+2y-10=0$

D'où : $x-y+5=0$, est une équation cartésienne de la tangente (D) au cercle $(\mathscr{C})$ en A.

EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 Utiliser le produit scalaire pour calculer l'aire d'un triangle

On considère un triangle ABC tel que : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et S son aire. L'objectif de cet exercice est de démontrer que :
$S = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|$

On a : $S = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A} = \frac{1}{2}AB.AC|\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|$

D'après une propriété antérieure, on a :
$$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}$$

Donc : $S = \frac{1}{2}AB.AC\left|\frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}\right|$
$$= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\frac{|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|}$$
$$= \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|$$

L'aire est positive et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ peut être négatif, donc utiliser la valeur absolue est justifié

D'où l'aire du triangle ABC est :
$S = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})|$

EXERCICE RÉSOLU 2 Tangente à un cercle

Soit (C) le cercle d'équation :
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

1 Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2 Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

3 Déterminer les équations des deux tangentes à (C) passant par le point $A(2;1)$.

4 Déterminer les équations des deux tangentes à (C) de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$.

1 Pour déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation cartésienne, on peut procéder de deux façons :

▸ Soit appliquer la propriété directement, c'est-à-dire le centre est $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et le rayon est $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

▸ Soit utiliser la forme canonique d'un trinôme.

Méthode 1 : On a : $a = -4$; $b = 6$ et $c = 9$, donc le centre du cercle (C) est $\Omega(2;-3)$ et le rayon est :
$$R = \frac{\sqrt{(-4)^2+(6)^2-36}}{2} = 2$$

Méthode 2 : Soit $M(x;y)$ un point de (C), on a :
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 - 4 - 9 + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4 = (2)^2$$

Donc (C) est le cercle de centre $\Omega(2;-3)$ et de rayon $R = 2$.

2 ▸ Déterminons l'intersection du cercle (C) avec l'axe des abscisses.

$y = 0$ est l'équation de l'axe des abscisses

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :
$$M(x;y) \in (C) \cap D(O;\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9=0 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+9=0 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=-5 \\ y=0 \end{cases}$$

L'équation: $(x-2)^2 = -5$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc l'axe des abscisses ne coupe pas le cercle (C).

▸ Déterminons l'intersection du cercle (C) avec l'axe des ordonnées.

$x = 0$ est l'équation de l'axe des ordonnées

Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :
$$M(x;y) \in (C) \cap D(O;\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9=0 \\ x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y+9=0 \\ x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2=0 \\ x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Donc: l'axe des ordonnées coupe le cercle (C) en un seul point $B(0;-3)$ et dans ce cas, on dit que l'axe des ordonnées est tangent au cercle (C) en B.

3 **Premièrement :** on doit vérifier que le point A se trouve à l'extérieur du cercle (C), pour cela calculons ΩA.

On a : $\overrightarrow{\Omega A}(0;4)$ donc $\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = 4$.

Puisque $R = 2$ alors $\Omega A > R$, d'où le point A se trouve à l'extérieur du cercle (C).

Deuxièment : Soit (Δ) une droite tangente au cercle (C) telle que son équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

(Δ) passe par le point $A(2;1)$ donc :

$2a+b+c=0$ c'est-à-dire $c=-2a-b$ d'où l'équation de (Δ) devient :

$ax+by-2a-b=0$ (1)

Puisque (Δ) est tangente à (C) alors

$d(\Omega;(\Delta))=R$

donc : $d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{|2a-3b-2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

Après le calcul, on trouve que : $a=\sqrt{3}b$ ou $a=-\sqrt{3}b$

On a : $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ c'est-à-dire que a et b ne peuvent pas être nuls en même temps.

▸ Dans le cas où $a=\sqrt{3}b$ et en remplaçant dans l'équation (1)

on obtient : $\sqrt{3}bx+by-2\sqrt{3}b-b=0$

c'est-à-dire : $b(\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}-1)=0$

Donc : $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}-1=0$ (car $b\neq 0$)

▸ Dans le cas où $a=-\sqrt{3}b$ et en remplaçant dans l'équation (1)

on obtient : $-\sqrt{3}bx+by+2\sqrt{3}b-b=0$

c'est-à-dire : $b(-\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}-1)=0$

Donc : $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+1=0$ (car $b\neq 0$)

On conclut qu'il existe deux droites (Δ_1) et (Δ_2) tangentes au cercle (C) et passant par le point A d'équations. respectives : $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}-1=0$ et $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+1=0$.

4 Soit (D) une droite tangente au cercle (C) et de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$.

Une équation cartésienne de la droite (D) s'écrit sous la forme : $4x+3y+c=0$.

Puisque (D) est tangente à (C) alors

$d(\Omega;(D))=R$

$$d(\Omega;(D))=R \Leftrightarrow \frac{|8-9+c|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow |c-1|=10$$

$$\Leftrightarrow c-1=10 \text{ ou } c-1=-10$$

$$\Leftrightarrow c=11 \text{ ou } =-9$$

Donc, il existe deux tangentes à (C) de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$; Ce sont les droites d'équations : $4x+3y+11=0$ et $4x+3y-9=0$.

EXERCICE RÉSOLU 3 Utiliser le produit scalaire

On considère les points $A(1;1)$, $B(-2;2)$ et $C(0;3)$.

1 a. Calculer CA, CB et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$; En déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

d. Calculer l'aire du triangle ABC.

2 Soit (C) le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

a. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).

b. Montrer que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

c. Déterminer une équation de la tangente (Δ) au cercle (C) au point $A(1;1)$.

3 On considère la droite (D) d'équation : $3x-y+m=0$ où m est un paramètre réel. Déterminer les valeurs de m, sachant que (D) est tangente au cercle (C).

4 Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-3y<0 \\ 3x-y+3<0 \\ x+y>0 \end{cases}$$

1 a. ▸ **Calculons la distance CA**

On a : $\overrightarrow{CA}(1;-2)$ donc $CA=\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

▸ **Calculons la distance CB**

On a :

$$CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

▸ **Calculons $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$**

On a : $\overrightarrow{CA}(1;-2)$ et $\overrightarrow{CB}(-2;-1)$

Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(-2)\times(1)+(-2)\times(-1)=0$

b. On a : $CA=CB$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$ donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

c. On a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;2)$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3+2=5$ et

$AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ et

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

EXERCICES
RÉSOLUS

D'où, d'après la formule du cosinus, on a :
$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et on a : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

et d'après la formule du sinus, on a :
$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB.AC} = \dfrac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Conclusion : On a $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc: $-\dfrac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

d. Calculons l'aire du triangle ABC **.**

Puisque le triangle ABC est rectangle en C alors son aire est : $S = \dfrac{AC.BC}{2} = \dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}$

2 a. Soit $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M\in(C) &\Leftrightarrow \Omega M = R \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+x-3y=0 \end{aligned}$$

b. Pour montrer que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC, il suffit de montrer que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = R$

On a : $\overrightarrow{\Omega A}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, donc :

$\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} = R$

On a : $\overrightarrow{\Omega B}\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, donc :

$\Omega B = \|\overrightarrow{\Omega B}\| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} = R$

On a : $\overrightarrow{\Omega C}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, donc :

$\Omega C = \|\overrightarrow{\Omega C}\| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} = R$

Donc : (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

c. Soit (Δ) la droite tangente au cercle (C) en A et $M(x;y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\Delta) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(-\frac{3}{2}\right) + (y-1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x-y-1=0 \end{aligned}$$

Donc $3x-y-1=0$ est une équation cartésienne de la tangente (Δ).

3 Calculons en fonction de m, $d(\Omega;(D))$

On a : $d(\Omega;(D)) = \dfrac{\left|-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+m\right|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{|m-3|}{\sqrt{10}}$

Donc : (D) est tangente au cercle (C)

équivaut à $\dfrac{|m-3|}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

équivaut à $|m-3| = 5$

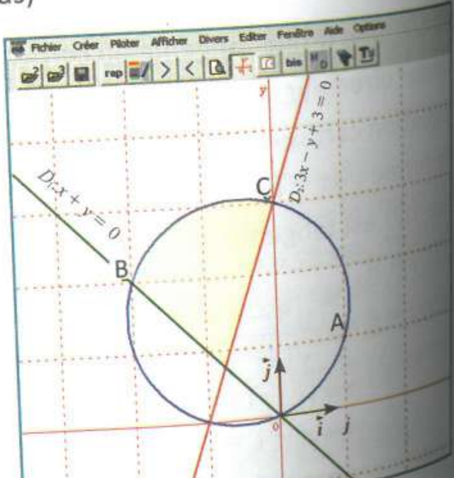
équivaut à $m-3=5$ ou $m-3=-5$

équivaut à $m=8$ ou $m=-2$

D'où (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $m=8$ ou $m=-2$.

4 ▶ On a : $x^2+y^2+x-3y=0$ est une équation cartésienne du cercle (C), donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+y^2+x-3y<0$ est l'ensemble des couples $(x;y)$, coordonnées des points du plan se trouvant à l'intérieur du cercle (C) dépourvu des points de (C).(Disque ouvert)

▶ Pour les deux inéquations : $3x-y+3<0$ et $x+y>0$, leur ensemble de solutions est formé chacun par les couples $(x;y)$ appartenant à un demi-plan, comme vous l'avez vu l'année dernière. Donc, l'ensemble des solutions du système est la partie du plan colorée en jaune (Voir figure ci-dessous)



Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Comment montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A ?

2 Comment montrer qu'un triangle ABC est isocèle en A ?

3 Donner deux méthodes pour déterminer une équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal.

4 Donner deux méthodes pour calculer la distance d'un point à une droite.

5 Comment montrer que deux droites sont orthogonales à partir de leurs équations cartésiennes?

6 Comment déterminer une équation cartésienne d'un cercle de centre Ω et passant par un point A ?

7 Comment déterminer une équation d'un cercle de diamètre $[AB]$?

8 Comment déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle $\mathscr{C}(\Omega;R)$ en un point A de ce cercle?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Quelle relation y a-t-il entre $\overrightarrow{AB}$ et AB ?

2 Que signifie $\vec{u}$ est un vecteur normal à une droite (D) ?

3 À quelle droite appartient le point M qui vérifie : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$? ($\vec{u}\neq\vec{0}$; A un point du plan)

4 Que signifie le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$? où A, B et M sont trois points deux à deux distincts?

5 (C) est un cercle de centre Ω et de rayon R, (D) est une droite du plan et $d=d(\Omega;(D))$. Comment déterminer selon les valeurs de d et R la position relative de (D) et (C) ?

6 Comment peut-on connaître la position d'un point A par rapport à un cercle (C) de centre Ω et de rayon R ?

7 Que signifie qu'une droite (D) est tangente à un cercle (C) ?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Si $\vec{u}(\sqrt{2};-1)$ et $\vec{v}(-\sqrt{2};-1)$ alors $\vec{u}.\vec{v}$ vaut :	3	-1	1
2 Soit les points : $A(1;1)$, $B(3;1)$ et $C(3;7)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?	équilatéral	rectangle	isocèle
3 Une équation de la droite passant par le point $A(1;1)$ et vecteur normal $\vec{n}(3;2)$ est :	$2x+3y-5=0$	$3x-2y-5=0$	$3x+2y-5=0$
4 La distance du point $A(2;-1)$ à la droite (D) d'équation : $4x+3y-1=0$ est égale à	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$
5 Le couple de coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $A(0;1)$ sur la droite (D) d'équation : $x+y+1=0$ est :	$(1;-1)$	$(0;-1)$	$(-1;0)$
6 Le rayon du cercle (C) de centre $\Omega(1;1)$ qui passe par le point $A(3;4)$ est :	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{3}$
7 L'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient l'égalité : $x^2+y^2+2x-4y+21=0$ est :	un cercle	l'ensemble vide	un point
8 Une équation de la tangente au cercle trigonométrique au point $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ est :	$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+1=0$	$x+\sqrt{3}y-1=0$	$\sqrt{3}x+y-2=0$

EXERCICES

Exercices d'application

Produit scalaire : étude analytique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 1 : Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u}(-3;1)$
2. $\vec{u}(5;0)$
3. $\vec{u}\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
4. $\vec{u}\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$
5. $\vec{u}(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)$
6. $\vec{u}(-\sqrt{5};-1)$

Exercice 2 : Soit $\vec{u}(2;m)$ un vecteur du plan, où m est un réel.

1. Déterminer en fonction de m, la norme du vecteur $\vec{u}$.
2. Déterminer les valeurs de m dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\|=5$ b) $\|\vec{u}\|=2$
c) $\|\vec{u}\|=\sqrt{13}$ d) $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$

Exercice 3 : Soit le vecteur $\vec{u}(3;-4)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$, sachant que : $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et $\|\vec{v}\|=15$.

Exercice 4 : Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u}(1;-2)$ et $\vec{v}(-3;4)$.
2. $\vec{u}(0;4)$ et $\vec{v}(3;-2)$.
3. $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(-b;a)$.
4. $\vec{u}(\sqrt{2};\sqrt{3})$ et $\vec{v}(\sqrt{2}-1;\sqrt{3}-1)$.

Exercice 5 : Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u}(1;m)$ et $\vec{v}(2m;-4)$.
2. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(m;-1)$.

Exercice 6 : Calculer $\cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ et $\sin(\overline{\vec{u};\vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u}(2;1)$ et $\vec{v}(1;2)$.
2. $\vec{u}(-1;\sqrt{3})$ et $\vec{v}(1;\sqrt{3})$.

Exercice 7 : On considère les points $A(3;4)$, $B(2;0)$ et $C(3;5)$.

1. Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
2. Calculer $\cos(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

Exercice 8 : On considère les points $A(1;2\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3};-1)$ et $C(1;1)$.

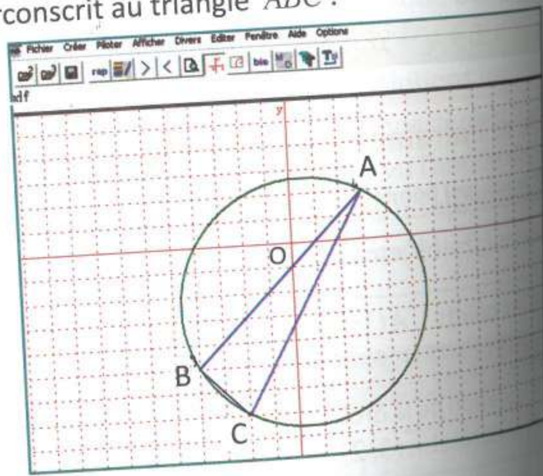
1. Calculer AC et BC.
2. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
3. Calculer $\cos(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$.

Exercice 9 : On considère les points $A(5;0)$, $B(2;1)$ et $C(6;3)$.

1. Calculer $\cos(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ et $\sin(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.
2. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$.

Exercice 10 : On considère les points $A(3;2)$, $B(-4;-5)$ et $C(-2;-7)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, en déduire que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.



Exercice 11 : On considère les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.
2. Calculer le produit scalaire $\vec{i}.\overrightarrow{OA}$.
3. En déduire que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OA}})$.

Exercice 12 : On considère les points $A(1;2)$, $B(5;0)$ et $C(-1;-2)$.

1. Calculer les distances AB, AC et BC.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 13 : On considère les points $A(-4;-2)$, $B(0;5)$, $C(8;4)$ et $D(4;-3)$.
1. Calculer les distances AB, BC, CD et DA.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 14 : On considère les points $A(1;1)$ et $B(3;-1)$.
Vérifier si les points suivants appartiennent à la médiatrice du segment $[AB]$.
$C(2;2)$; $D(2;0)$; $E(2;-2)$.

Exercice 15 : Montrer que le triangle ABC est isocèle dans chacun des cas suivants :
1. $A(7;3)$; $B(1;-4)$; $C(3;5)$.
2. $A\left(-\frac{3}{2};1\right)$; $B\left(\frac{1}{2};4\right)$; $C\left(4;-\frac{1}{2}\right)$.
3. $A(0;7)$; $B(7;4)$; $C(3;0)$.

Exercice 16 : Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :
1. $A(4;-1)$; $B(-5;-3)$; $C(-3;7)$.
2. $A(-1;-5)$; $B(5;3)$; $C(-4\sqrt{3}+2;3\sqrt{3}-1)$.
3. $A(3;0)$; $B(1;3)$; $C(0;7)$.
4. $A(1;-2)$; $B(3;4)$; $C(2;0)$.

Exercice 17 : On considère les points suivants :
$A(1;0)$; $B\left(0;\frac{11}{2}\right)$ et $C\left(-4;\frac{5}{2}\right)$
1. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
2. Déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 1 sachant qu'il appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon AB.

Exercice 18 : On considère les points suivants :
$A(1;2)$; $B(-3;-1)$ et $M(x;-2)$, où x est un réel.
Déterminer la valeur de x pour que le point M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 19 : On considère les points $A(1;2)$; $B(4;-2)$ et $M(1;y)$, où y est un réel.
Déterminer la valeur de y sachant que le point M appartient au cercle de centre A et de rayon AB.

Exercice 20 : Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$ (carré? losange?) dans chacun des cas suivants :
1. $A(-1;3)$; $B\left(\frac{5}{2};5\right)$; $C(2;1)$ et $D\left(-\frac{3}{2};-1\right)$
2. $A(2;2)$; $B\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; $C(-3;0)$ et $D\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

Exercice 21 : Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :
1. $(D): 2x-y-3=0$
2. $(D): y+3=0$
3. $(D): -2x+7=0$
4. $(D): \sqrt{2}x-\sqrt{3}y+6=0$

Exercice 22 : Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
1. $A(1;1)$ et $\vec{n}(-1;3)$
2. $A(1;2)$ et $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}$
3. $A\left(\frac{1}{2};3\right)$ et $\vec{n}(2;0)$
4. $A(\sqrt{2};-1)$ et $\vec{n}(0;-1)$

Exercice 23 : Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ dans chacun des cas suivants :
1. $A(2;1)$ et $B(4;3)$.
2. $A\left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$ et $B\left(\frac{3}{2};-\sqrt{2}\right)$.
3. $A(-1;3)$ et $B(2;2)$.

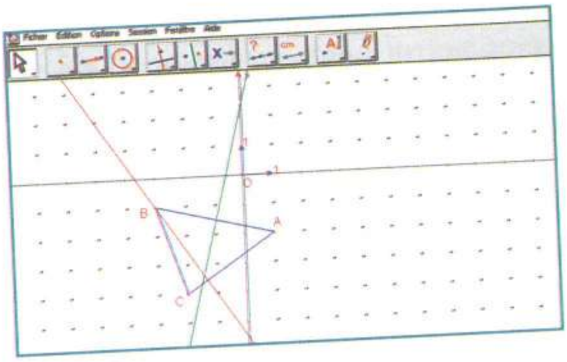
Exercice 24 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale à la droite (D) dans chacun des cas suivants :
1. $(D): x+y-1=0$ et $A(2;3)$
2. $(D): 2x-y=0$ et $A(-1;1)$
3. $(D): y=3x+2$ et $A(1;1)$

Exercice 25 : On considère le triangle ABC tel que $A(1;-2)$, $B(-3;-1)$ et $C(-2;-4)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la

EXERCICES

hauteur du triangle ABC issue de A.

3. Calculer l'aire du triangle ABC.



Exercice 26 : Dans chacun des cas suivants, (D) et (D') sont-elles orthogonales?

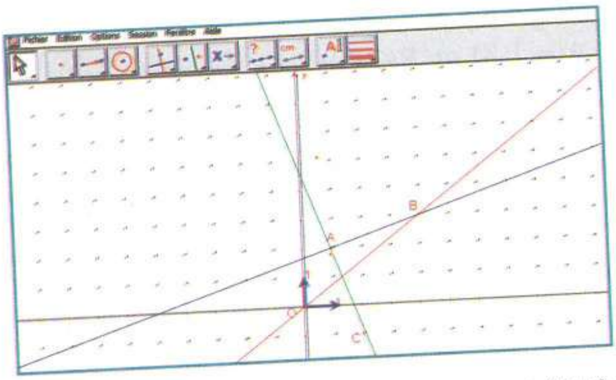
1. $(D): x-2y+1=0$; $(D'): 2x+y+3=0$
2. $(D): x-y+2=0$; $(D'): 2x-y+1=0$
3. $(D): \sqrt{3}x+y+1=0$; $(D'): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$

Exercice 27 : Calculer $d(A;(D))$ dans chacun des cas suivants :

1. $(D): 2x+3y-1=0$; $A(1;1)$
2. $(D): x+2=0$; $A(0;2)$
3. $(D): 2y-1=0$; $A(4;0)$
4. $(D): y=\sqrt{3}x+1$; $A(\sqrt{3};2)$

Exercice 28 : On considère les points $A(1;2)$; $B(4;3)$ et $C(2;-1)$.

1. Montrer que $(AB)\perp(AC)$.
2. Calculer $d(A;(OB))$.



Exercice 29 : On considère les points $A(5;7)$; $B(2;3)$ et $C(9;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer les distances AB, BC et AC.
3. Calculer $\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ et $\sin(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

Le cercle

Exercice 30 : Écrire une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R dans chacun des cas suivants :

1. $a=3$; $b=-3$ et $R=2$
2. $a=-2$; $b=3$ et $R=4$
3. $a=1$; $b=5$ et $R=\sqrt{2}$

Exercice 31 : Écrire une équation cartésienne du cercle de centre Ω et qui passe par le point A dans chacun des cas suivants :

1. $\Omega(0;0)$ et $A(-1;2)$
2. $\Omega(2;-3)$ et $A(4;-6)$
3. $\Omega(-3;4)$ et $A(0;1)$
4. $\Omega(-3;-2)$ et $A(3;4)$

Exercice 32 : Écrire une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants :

1. $A(0;1)$ et $B(4;1)$
2. $A(-2;1)$ et $B(4;-1)$
3. $A(0;0)$ et $B(2;0)$
4. $A\left(-\frac{1}{5};3\right)$ et $B\left(1;\frac{4}{5}\right)$

Exercice 33 : Déterminer la nature de l'ensemble (C), des points $M(x;y)$ qui vérifient les équations suivantes :

1. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
2. $x^2+y^2-x-10y+25=0$
3. $x^2+y^2-2x+y+\frac{1}{4}=0$
4. $9x^2+9y^2-6x-18y=26$
5. $x^2+y^2+4x-y+\frac{17}{4}=0$
6. $x^2+y^2+x+3y+5=0$

Exercice 34 : Montrer que la droite (D) est tangente au cercle $\mathscr{C}(\Omega;R)$ dans chacun des cas suivants :

1. $(D): x+y+2=0$ et $\Omega(1;1)$ et $R=2\sqrt{2}$
2. $(D): 2x-y+3=0$ et $\Omega(0;8)$ et $R=\sqrt{5}$
3. $(D): 4x+3y-1=0$ et $\Omega(0;0)$ et $R=\frac{1}{5}$

Exercice 35 : Vérifier que le point A appartient au cercle $(\mathscr{C})$ puis déterminer une équ tion de la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en A, dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{C}): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ et $A(1;0)$
2. $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x+6y=0$ et $A(0;0)$
3. $(\mathscr{C}): x^2+y^2-x-3y-\dfrac{3}{2}=0$ et $A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Exercice 36 : Étudier la position relative du cercle $(\mathscr{C})$ et la droite (D), dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x+y-1=0$ et $(D): x-y-3=0$.
2. $(\mathscr{C}): (x-1)^2+(y+1)^2=5$ et $(D): 2x+y+4=0$.
3. $(\mathscr{C}): x^2+y^2=9$ et $(D): y=4$.

Exercice 37 : Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

1. $x^2+y^2-4x<0$.
2. $x^2+y^2-2x+2y+1\geq 0$.
3. $(x+2)(x^2+y^2-2x-2y-2)\geq 0$.

Exercice 38 : Donner une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

1. $\Omega(2;-1)$ et $R=2$.
2. $\Omega(0;-2)$ et $R=\sqrt{3}$.

Exercices de renforcement

Exercice 39 : On considère les points $A(0;4)$; $B(-4;2)$ et $C(2;0)$.
Calculer de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.

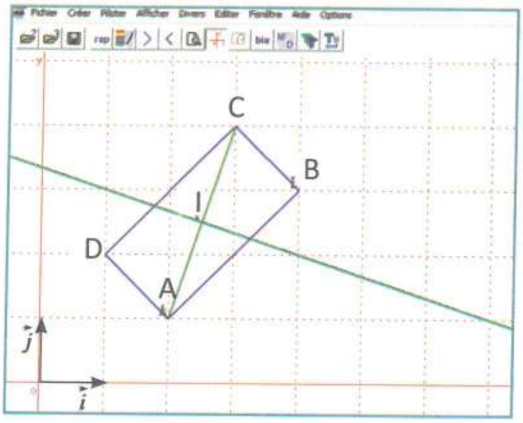
Exercice 40 : On considère les points $A(2;3)$; $B(1;5)$ et $C(4;4)$

1. a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la nature du triangle ABC.
2. Calculer la distance du point A à la droite (OB).

Exercice 41 : On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente au cercle (C) en A.
3. Déterminer l'intersection du cercle (C) avec les axes du repère.

Exercice 42 : On considère les points $A(2;1)$; $B(4;3)$; $C(3;4)$ et $D(1;2)$ et soit I le milieu du segment $[BD]$.



1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
2. a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
b) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la médiatrice du segment $[BD]$.

Exercice 43 : Soit (C) le cercle d'équation cartésienne : $x^2+y^2-6x-2y+5=0$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle (C).
2. Soit (D) la droite d'équation cartésienne : $2x-y=0$.
a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale à la droite (D).
b) Montrer que (D) est tangente au cercle (C).
3. En déduire la construction du cercle (C) (Justifier votre réponse)

Exercice 44 : On considère les points $A(-2;0)$; $B(1;1)$; $C(-1;3)$ et $M(x;y)$ où x et y sont des réels.

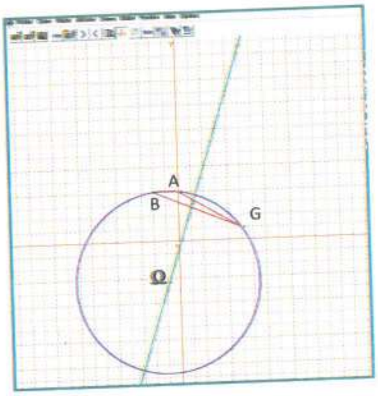
1. Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de x et y.
2. Soit (D) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient la relation : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=BA^2$.

EXERCICES

a) Montrer que $x-y+5=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (D).
b) Montrer que les droites (D) et (BC) sont orthogonales.

Exercice 45 : On considère les points $A(0;4)$; $B(-2;4)$ et $C(5;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G le centre de gravité du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées du point H l'orthocentre du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du point Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Montrer que les points Ω, G et H sont alignés.



Exercice 46 : Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(-1;1)$ et la droite d'équation : $4x-\frac{5}{3}y+3=0$ est tangente au cercle (C).

Exercice 47 : Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) passant par les points $A(-1;3)$ et $B(3;1)$ et son centre Ω appartient à la droite d'équation : $3x-2y-2=0$.

Exercice 48 : Soit (D) la droite d'équation : $x-\frac{5}{2}y+9=0$.
Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(3;-1)$ et qui définit avec la droite (D) une corde de longueur 6.

Exercice 49 : Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de rayon $\sqrt{5}$ sachant que la droite d'équation: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ est tangente à (C) au point $A(-1;-1)$.

Exercice 50 : Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) qui passe par le point $A(0;1)$ et les droites d'équations : $(D_1):x=2$ et $(D_2):y=2$ sont tangentes au cercle (C).

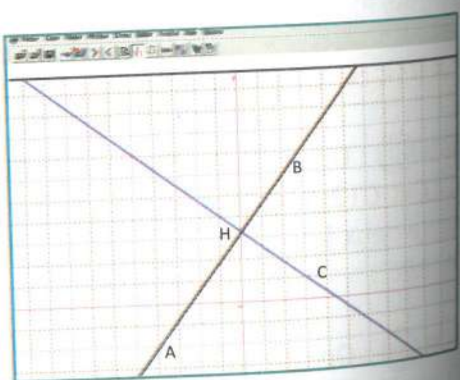
Exercice 51 : Soit (C) un cercle d'équation: $x^2+y^2=9$ et $\vec{u}(2;1)$ un vecteur du plan.
Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes au cercle (C) de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 52 : Déterminer la position relative de la droite (D) et du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1. $(D):y=-2x$ et $(C):x^2+y^2-2x=0$.
2. $(D):x+2y-3=0$
   et $(C):x^2+y^2+6x-2y+6=0$.

Exercice 53 : On considère les points $A(-4;-2)$; $B(2;6)$ et $C(3;1)$.

1. **a)** Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
   b) En déduire $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$



2. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
   Déterminer la valeur du réel k tel que : $\overrightarrow{AH}=k.\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire la distance AH, puis les coordonnées du point H.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 54 : Résoudre graphiquement:

1. $(x^2+y^2-2)(3x+2y-1)>0$

2. $\begin{cases} 3x-2y+6>0 \\ x^2+y^2-2x-6y+6\leq 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x+2y-3<0 \\ 3x+y+6>0 \end{cases}$

Exercice 55 : Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1. (C) passe par les points $A(0;2)$ et $B(-1;0)$ et la droite (D) d'équation $x+y-7=0$ est tangente à (C)
2. (C) passe par le point $A(-2;4)$ et les droites d'équations $x=-1$ et $y=1$ sont tangentes à (C).
3. Le rayon de (C) est $\sqrt{5}$ et la droite d'équation : $x-2y-1=0$ est tangente à (C).
4. Le centre du cercle (C) appartient à la droite d'équation : $2x+y=0$ et les droites d'équations : $(D_1): 4x-3y-30=0$ et $(D_2): 4x-3y+10=0$ sont tangentes à (C).
5. Le cercle (C) passe par le point O l'origine du repère et les droites : $(D_3): x+2y-9=0$ et $(D_4): 2x-y+2=0$ sont tangentes à (C).

Exercice 56 : Soit (C) le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. Déterminer les deux points d'intersection de (C) avec l'axe $(O;\vec{i})$ et déterminer une équation cartésienne des deux tangentes passant par chacun des deux points trouvés.
3. Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes à (C) de vecteur directeur $\vec{u}(2;1)$ puis déterminer les coordonnées des deux points de contact.
4. Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes à (C) passant par le point $C(6;1)$.

Exercice 57 : On considère les points $A(1;0)$; $B(m;0)$; $F(0;1)$ et $I(m+1;m)$ où $m>1$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (BF) en B.
2. **a)** Vérifier que $I\in(\Delta)$

b) Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IF}$ et en déduire que les points A, B, F, et I appartiennent au même cercle. (On dit que les points A, B, F et I sont cocycliques).

3. Déterminer m sachant que $\left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FB}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 58 : 1. Construire le cercle (C) de centre $I(3;-2)$ passant par le point $A(1;2)$.

2. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de coefficient directeur -2.
5. Déterminer l'intersection de (C) et (D).
6. Résoudre le système: $\begin{cases} x^2+y^2-6x+4y-7=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

et donner une interprétation géométrique à ce résultat.

Exercice 59 : On considère le cercle (C) de centre $\Omega(4;2)$ et de rayon 5.

1. Vérifier que le point $A(-7;4)$ se trouve à l'extérieur du cercle (C).
2. Déterminer les équations cartésiennes des deux tangentes à (C) passant par le point A.

Exercice 60 : On considère les points $A(5;3)$; $B(4;-2)$ et $C(0;4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes au cercle (Γ) qui sont parallèles à (BC).

Exercice 61 : On considère les points $A(2;2)$; $B(-1;1)$ et $C\left(\frac{1}{2};4\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).
2. **a)** Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et orthogonale

EXERCICES

à la droite (BC).

b) Montrer que le point $H(0;3)$ est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

3. En déduire une équation cartésienne du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABH.

Exercice 62 : Soit (C) le cercle de centre $\Omega(-3;1)$ et passant par le point $A(-3;3)$ et soit (D) la droite d'équation : $y=x$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).
2. Déterminer l'intersection de (C) et (D).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale à (D).
4. Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6 \le 0 \\ y-x>0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$$

Exercice 63 : Soit (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant :

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0$$

1. **a)** Montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Montrer que l'axe des abscisses est tangent au cercle (C) et déterminer leur point de contact.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 64 : On considère le cercle (C) de centre $\Omega(7;-1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).
2. Soit m un nombre réel et (D_m) la droite d'équation : $y=mx$.

Déterminer m pour que la droite (D_m) soit tangente au cercle (C).

Exercice 65 : On considère la droite (D) d'équation $y=x-4$.

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) d'équation : $x^2+y^2-2x+4y-4=0$
2. Construire (C) et (D).
3. Étudier l'intersection de (C) et (D).
4. Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2+y^2-2x+4y-4<0$.
5. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $|x^2+y^2-2x+4y-4|=2x-2y-8$

Exercice 66 : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2+y^2-6x+6y+9=0.$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle (C) et construire (C).
2. On considère une droite passant par le point O et coupe le cercle (C) en deux points A et B.

a) Montrer que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB'}$ où B' est le point diamétralement opposé au point B.

b) En déduire que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=9$.

Exercice 67 : On considère dans le plan, les deux droites : $(D):y=0$ et $(D'):x\sqrt{3}-y+3=0$

1. **a)** Déterminer le point B intersection de (D') avec l'axe des ordonnées.

On pose : $(D)\cap(D')=\{A\}$.

b) Calculer $\tan\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$ et en déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.

2. Déterminer les points M de l'axe des ordonnées qui vérifient : $d(M;(D))=d(M;(D'))$.

Exercice 68 : Soit (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+4x-2y=0$.

1. Montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.
2. On considère le point $A(-1;-1)$.

a) Vérifier que A appartient au cercle (C).

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) tangente à (C) en A.

3. Soit (D) la droite d'équation $2x+y-1=0$.

a) Étudier la position relative de (C) et (D).

b) Déterminer les points d'intersection de (C) et (D).

4. Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y<0. \\ 2x+y+3\ge 0. \end{cases}$$

Exercice 69 : On considère l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient :

$x^2+y^2+2x-2y-23=0$

1. Montrer que (C) est un cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .

2. Déterminer les équations cartésiennes des deux tangentes au cercle (C) parallèle à la droite d'équation : $x+2y-7=0$.

3. **a)** Vérifier que le point $E(-8;2)$ se trouve à l'extérieur du cercle (C).

b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des deux tangentes à (C) passant par le point E .

Exercice 70 : On considère les points $A(1;1)$; $B(4;-3)$; $C(3;-3)$ et $D(0;-2)$.

1. Montrer que $(AD)\perp(CD)$.

2. Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ADC issue du point D.

4. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AC]$.

a) Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$.

b) Montrer que la droite d'équation $x-2y+2=0$ est tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en un point que l'on déterminera.

Exercice 71 : On considère les points $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $N\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Vérifier que les points M et N appartiennent au cercle trigonométrique.

2. **a)** Montrer que les segments $[OP]$ et $[MN]$ ont le même milieu.

b) Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MP}$; OM et MP.

c) Montrer que le quadrilatère $OMPN$ est un carré.

3. **a)** Vérifier que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OP};\vec{i}}\right)$.

c) En déduire la valeur de : $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 72 : On considère les points $A(2;0)$ et $B(0;2)$ et la droite (T) d'équation : $x+y+2\sqrt{2}=0$.

1. **a)** Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ), la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Vérifier que le point $C(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ est le point d'intersection de (Δ) et (T).

2. On considère le point $\Omega(a;b)$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b pour que l'on ait : $\Omega\in(\Delta)$ et $A\Omega=C\Omega$.

3. Montrer que : $x^2+y^2-4=0$ est une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et passant par A.

4. Montrer que la droite (T) est tangente au cercle $(\mathscr{C})$.

5. Calculer $\cos\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice 73 : Soit (C) le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ où $A(-1;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).

2. Les droites (D_A) et (D_B) sont les tangentes à (C) respectivement en A et B.

Soit $S(\alpha;\beta)$ un point de (C) différent de A et B et (T) la tangente à (C) au point S.

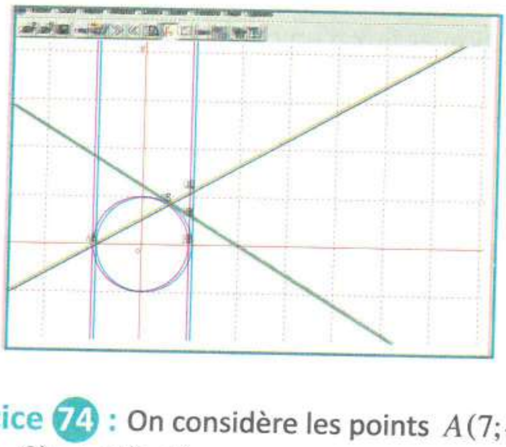
a) Déterminer en fonction de α et β une équation cartésienne de la droite (T).

b) Déterminer en fonction de α et β une équation cartésienne de la droite (AS).

3. Les droites (T) et (AS) coupent la droite (D_B) respectivement en M et Q.

a) Déterminer les coordonnées des points B, M et Q.

b) Montrer que le point M est le milieu du segment $[BQ]$.



Exercice 74 : On considère les points $A(7;4)$; $B(5;-2)$ et $C(2;1)$.

1. **a)** Vérifier que $3x-y-17=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

EXERCICES

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point C et orthogonale à la droite (AB).
c) Calculer la distance du point $E(1;-4)$ à la droite (AB).
2. Soit (Δ_A) et (Δ_B) les hauteurs du triangle ABC issues respectivement des points A et B.
a) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (Δ_A) et (Δ_B).
b) Déterminer les coordonnées du point H l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 75 : On considère les points $A(5;1)$ et $B(-1;7)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}(1;2)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) orthogonale à la droite (D) au point B.
4. Soit C un point de (Δ) d'abscisse (-6). Montrer que le triangle ABC est isocèle.
5. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D') passant par le point I et parallèle à la droite (D).
6. La droite (D') coupe le droite (BC) en un point H.
Déterminer les coordonnées du point H.
7. Soit J le milieu du segment $[IH]$. Montrer que les droites (CJ) et (AH) sont orthogonales.

Mathématiques et culture

Le concept de produit linéaire de deux vecteurs est né de la physique avec Grassman (1809-1877) et Gibbs (1839-1903) et fut nommé produit scalaire (scalar product) par Hamilton (1805-1865). Le terme scalaire du latin (scalaris=esaclier, échelle) est utilisé au sens de numérique : dans un contexte vectoriel, il s'agit de distinguer les objets vecteurs et les objets nombres qui opèrent sur les vecteurs. L'exemple fondamental du concept apparaît en dynamique avec le travail d'une force : si une force f déplace un corps selon un chemin rectiligne d, alors le travail fourni est donné par la formule : $W=|f|\times|d|\times\cos(\widehat{X})$, $|f|$ désignant l'intensité de la force, $|d|$ la longueur du déplacement et $\widehat{X}$ l'angle entre les directions de la force et du déplacement. aujourd'hui, le produit scalaire se rencontre dans tous les domaines de la physique : Energie et moment cinétique d'un solide ; hydrodynamique ; circulation et flux d'un champ électrostatique ; Electromagnétisme, équation de Maxwell, force de Lorentz (physicien hollandais, 1853-1928).

les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Réponse n°:	2	2	3	1	3	2	2	3	

UTILISATION DES LOGICIELS

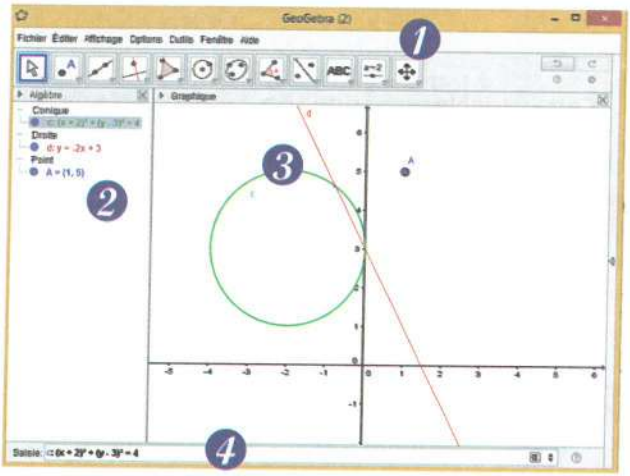
Geogebra

Barre d'outils 1

rangés par catégories (points, droites et segments, polygones, cercles, transformations...)
Le petit triangle en bas à droite de chaque icône permet d'accéder aux autres outils de la catégorie.

Fenêtre Algèbre 2

Tous les objets créés, affichés ou non, sont répertoriés ici avec leur valeur (variables numériques, longueurs, aires, angles...) ou leur équation (droite, cercle, courbe...)



Fenêtre graphique 3

C'est ici que s'affichent les différents objets créés (figures géométriques, courbes représentatives de fonctions, curseurs...).
Un clic droit en un point quelconque de cette zone permet d'accéder à un menu de propriétés; axes et grille, échelles des axes, couleur de fond, etc.

Champ de saisie 4

Pour saisir les expressions algébriques de nouveaux objets.

Création de points

• **Menu**

Selon la situation, on utilise les icône suivantes :

Le nom du point est alors choisi par le logiciel.

• **Champ de saisie**

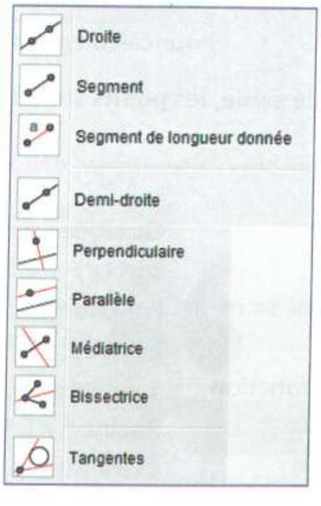
Lorsqu'un point en défini par coordonnées, on utilise le champ de saisie, Par exemple : Saisie: A=(2,-3) .

Astuce ▸ Un clic-droit de la souris sur un objet permet d'accéder à ses propriétés et ainsi :
- ▸ de modifier son nom, son style, sa couleur;
- ▸ de coder l'objet (angle, segment);
- ▸ d'afficher ou de masquer son étiquette (nom et/ ou valeur);
- ▸ d'activer la trace de l'objet;
- ▸ de modifier la forme de son équation (droite, cercle), etc.

Tout ceci permet de rendre la figure plus lisible.

Création de droites et de segments

• **Menu**



• **Champ de saisie**

Pour tracer une droite définie par son équation :

Saisie: d:y=5x-2 .

On peut utiliser la commande **Pente** $[d]$ pour obtenir le coefficient directeur de la droite d.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Simplifier des expressions trigonométriques

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos x\sin x\left(\tan x-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$B=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)-\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

info :
$\cos x=\cos\alpha$ équivaut à $x=\alpha+k2\pi$ ou $x=-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
$\sin x=\sin\alpha$ équivaut à $x=\alpha+k2\pi$ ou $x=\pi-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
$\tan x=\tan\alpha$ équivaut à $x=\alpha+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Activité 2 Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a $\cos x=-\frac{1}{2}$ **b** $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c** $\tan x=-1$

2. Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

a $\cos x<\frac{1}{2}$; $I=[-\pi;\pi]$ **b** $\sin x\geq\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $I=[0;2\pi]$

c $\tan x\geq\sqrt{3}$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

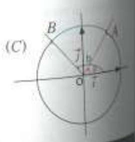
info :
$\cos(-x)=\cos x$
$\sin(-x)=-\sin x$

ACTIVITÉS DE PRÉSENTATION

Activité 3 Transformer $\cos(a-b)$ et ses résultats

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et (C) est le cercle trigonométrique qui lui est associé. Soit a et b deux nombres réels.

On considère les points A et B du cercle (C) tels que : $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OA}})\equiv a[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}})\equiv b[2\pi]$



1. Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})\equiv b-a[2\pi]$, puis en déduire que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos(b-a)$.

2. **a** Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ en utilisant l'expression analytique du produit scalaire.

b En déduire que : $\cos(b-a)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ (1)

3. En déduire les formules suivantes :

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ (2)

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ (3)

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ (4)

4. **a** En écrivant $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

b Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Info :
$\cos(a+b)=\cos(a-$ …

Info :
$\sin(a+b)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\right.\right.$ …

Info :
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ …
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ …

Activité 4 Transformer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ - formules de linéarisation

Soit a un nombre réel.

1. En utilisant la formule (2) de l'activité précédante, montrer que :

$[\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)]$ (5)

2. En déduire que :

$\left[\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}\right.$ et $\left.\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}\right]$ (6)

3. Montrer que :

$[\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)]$ (7)

info :
El Kashi est un mathématicien et astronome perse (v. 1380, Kashan (Iran) – 1429, Samarcande (Transoxiane)).
En 1424, dans son ouvrage intitulé Risala al-mouhitiyy (« Traité de la circonférence »)2, à partir de la méthode des polygones d'Archimède, en utilisant exclusivement la base 60 (sexagésimale)2, al-Kashi calcule 10 chiffres décimaux de π, soit 16 chiffres décimaux exacts3. Il publie ainsi le calcul suivant :
2π = 6 * 600 + 16 * 60–1 + 59 * 60–2 + 28 * 60–3 + 1 * 60-4 + 34 * 60-5 + 51 * 60-6 + 46 * 60-7 + 14 * 60-8 + 50 * 60-9,
ce qui donne, en décimal : 3,1415926535897932...

Activité 5 Transformer des produits en sommes et des sommes en produits

Soit a et b deux nombres réels.

1. En utilisant les deux formules (1) et (2) de l'activité (3), montrer que :

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ (8)

$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ (9)

montrer que aussi :

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ (10)

$\cos a\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$ (11)

2. On pose : $p=a+b$ et $q=a-b$, vérifier que : $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$

En déduire que les formules de la question **1** peuvent s'écrire aussi sous la forme :

$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (12)

$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (13)

$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (14)

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (15)

Activité 6 Transformer $\tan(a+b)$ et ses résultats

Soit a et b deux nombres réels tels que : $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$.

1. En utilisant l'activité 3), montrer que : $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan a\tan b}$

Puis en déduire que : $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

2. On suppose encore que : $a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ pour tout k de $\mathbb{Z}$, Déduire de la question 1. que : $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Info :
$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$
$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

LE COURS

1 Transformation de $\cos(a-b)$

1. Transformation de $\cos(a-b)$ et ses conséquences

D'après l'activité (3), on a pour tout a et b de $\mathbb{R}$:

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Exemple 1: Calculons $\cos\frac{5\pi}{12}$. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, on a :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exemple 2: Calculons $\sin\frac{\pi}{12}$. On a: $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\ldots}{4}$

2. Conséquences : Transformation de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ et formules de linéarisation

D'après l'activité (4), on a pour tout a et b de $\mathbb{R}$:

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Exemple : Calculons $\sin\frac{\pi}{8}$. On a: $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$ donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$

puisque $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{8} > 0$. D'où $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2 Transformation de produits en sommes et de sommes en produits

D'après l'activité (5), on a trouvé les formules suivantes :

Transformation de produits en somme :

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$, on a :

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

Transformation de sommes en produits :

Pour tout p et q de $\mathbb{R}$, on a :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\ldots\right)$

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\ldots\right)$

$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\ldots\right)$

Exemple : Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$.

Soit x un réel, on a :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(2x) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\cos^2(x) - 1 - \frac{1}{2}\right] = \cos^2(x) - \frac{3}{4}$$

info :
$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \ldots\right)\ldots$

POUR COMPRENDRE

1 Utiliser $\sin(a-b)$ et $\sin(a+b)$

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$.

Méthode 1:

On a : $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin x\cos\frac{2\pi}{3} + \cos x\sin\frac{2\pi}{3}$,

et on a : $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

et $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Donc : $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

et on a :

$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin x\cos\frac{2\pi}{3} - \cos x\sin\frac{2\pi}{3}$.

Donc : $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

D'où : $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin x$,

c'est-à-dire:

$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$.

Méthode 2:

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin x\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 2(\sin x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\sin x$$

2 Utiliser $\sin(a-b)$

Soit x un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

On a :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}$$
$$= \frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \frac{\sin(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)}.$$

Puisque $0 < 2x < \pi$ alors $\sin 2x \neq 0$.

Donc $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

3 Utiliser $\sin(2a)$

On pose : $A(x) = \cos x\cos 2x\cos 4x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\sin(x) \times A(x) = \frac{1}{8}\sin(8x)$.
2. En déduire que : $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$.

1. On applique la formule :
$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$
trois fois successives comme suit :

$$\sin(x) \times A(x) = (\sin(x)\cos(x))\cos(2x)\cos(4x)$$
$$= \frac{1}{2}(\sin(2x)\cos(2x))\cos(4x)$$
$$= \frac{1}{4}(\sin(4x)\cos(4x)) = \frac{1}{8}\sin(8x)$$

2. On prend $x = \frac{\pi}{9}$ et on obtient :
$\sin\frac{\pi}{9}A\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)$.
Puisque : $\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$,
alors : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)A\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$.
Puisque : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \neq 0$ alors $A\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}$.
C'est-à-dire : $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}$.

4 Transformer des sommes en produits

Soit ABC un triangle, on pose :
$T = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C}$.
Montrer que :
$\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = 2\cos\frac{\widehat{C}}{2}\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$
et que : $T = 4\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$

- On a :

$$\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = 2\sin\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi-\widehat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$

- Et on a : $\sin\widehat{C} = 2\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi-(\widehat{A}+\widehat{B})}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

Donc :

$$T = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C}$$
$$= 2\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)\right]$$
$$= 4\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$$

LE COURS

3 Transformation de $\tan(a+b)$

1. Transformation de $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$

D'après l'activité (6), on a obtenu les formules suivantes :

Soit a et b de $\mathbb{R}$ tels que : $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$

Si $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ alors $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

Si $a-b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ alors $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.

Exemple :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

2. Résultats :

▸ Si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ pour tout k de $\mathbb{Z}$, alors $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2(a)}$

On pose : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour x de $\mathbb{R}$ tel que : $x\neq\pi+2k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$

On a : $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$.

4 Transformation de l'expression $a\cos x+b\sin x$

Soit a et b de $\mathbb{R}$ tels que : $(a;b)\neq(0;0)$.

On a : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$,

et on a : $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ et $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$. (car $a^2\leq a^2+b^2$ et $b^2\leq a^2+b^2$)

Et puisque : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$,

alors, il existe α (respectivement β) de $\mathbb{R}$ tel que :

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (respectivement $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

D'où : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

ou : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos x\sin\beta+\sin x\cos\beta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta)$

Exemple:

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Remarque

On peut transformer $a\cos x+b\sin x$ pour résoudre des équations de type $a\cos x+b\sin x=c$ ou d'inéquations de type $a\cos x+b\sin x\geq c$ ou $a\cos x+b\sin x\leq c$.

POUR COMPRENDRE

1 Utiliser $\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2(a)}$

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$.

On pose $x=\frac{\pi}{4}$ et $t=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a: $\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2t}{1-t^2}$ donc $\frac{2t}{1-t^2}=1$,

c'est-à-dire: $1-t^2=2t$ donc : $t^2+2t-1=0$.

On a : $\Delta=8$ donc : $t_1=\sqrt{2}-1$ et $t_2=-\sqrt{2}-1$.

Puisque $\tan\frac{\pi}{8}>0$ (car $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$),

alors, $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

2 Utiliser $\tan(a+b)$

Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$.

Montrer que : $\tan(3\alpha)=\frac{\tan^3(\alpha)-3\tan\alpha}{3\tan^2\alpha-1}$.

On a :
$$\begin{aligned}\tan(3\alpha)&=\tan(2\alpha+\alpha)\\&=\frac{\tan(2\alpha)+\tan\alpha}{1-\tan(2\alpha).\tan\alpha}\\&=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\tan\alpha}\\&=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}\\&=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.\end{aligned}$$

3 Appliquer la transformation de l'expression $a\cos x+b\sin x$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation (E): $\cos x-\sqrt{3}\sin x=-1$
2. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation : (F): $\cos(2x)-\sin(2x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. ▸ L'équation (E) s'écrit $2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=-1$

c'est-à-dire : $2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Donc : $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

Puisque $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

Alors $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

Donc : $x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ou : $x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

D'où : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ou : $x=-\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

et par suite, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est :

$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{-\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

▸ Les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle $[0;2\pi]$

▸ $0\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq 2\pi\Longleftrightarrow-\frac{1}{6}\leq k\leq\frac{5}{6}$

Donc $k=0$ d'où : $x=\frac{\pi}{3}$

▸ $0\leq-\pi+2k\pi\leq 2\pi\Longleftrightarrow\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$

Donc $k=1$ d'où : $x=\pi$

Par suite : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\pi\right\}$

2. Résolvons dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation :

(F) : $\cos(2x)-\sin(2x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a :

$$\begin{aligned}\cos(2x)-\sin(2x)&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right)\\&=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Donc ,l'inéquation (F) est équivaut à :

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

On pose : $X=2x+\frac{\pi}{4}$

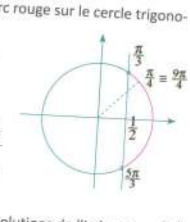
$\left(0\leq x\leq\pi\Longleftrightarrow\frac{\pi}{4}\leq X\leq\frac{9\pi}{4}\right)$

Donc, l'inéquation est équivaut à : $\begin{cases}X=2x+\frac{\pi}{4}\\\cos X>\frac{1}{2}\\X\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]\end{cases}$

Résolvons l'inéquation $\cos X>\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]$

Pour cela, on utilise le cercle trigonométrique.

Les images des solutions de l'inéquation sont représentées par l'arc rouge sur le cercle trigonométrique.



Donc : $\frac{\pi}{4}\leq X\leq\frac{\pi}{3}$

ou

$\frac{5\pi}{3}\leq X\leq\frac{9\pi}{4}$

Puisque : $x=\frac{X-\frac{\pi}{4}}{2}$

alors $0\leq x\leq\frac{\pi}{24}$ ou $\frac{17\pi}{24}\leq x\leq\pi$

D'où, l'ensemble des solutions de l'inéquation (F) est : $S=\left[0;\frac{\pi}{24}\right]\cup\left[\frac{17\pi}{24};\pi\right]$

EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1 utiliser $\sin(a+b)$

Sachant que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\cos a = \sin b = \frac{1}{3}$.
Déterminer la valeur de $a+b$.

Puisque $0 < a < \frac{\pi}{2}$ alors $\sin a > 0$,
donc: $\sin(a) = \sqrt{1-\cos^2(a)}$
d'où: $\sin a = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Puisque $0 < b < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos b > 0$
donc: $\cos(b) = \sqrt{1-\sin^2(b)}$
d'où: $\cos(b) = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
On a : $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$= \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

et on a : $0 < a+b < \pi$ et $\sin(a+b) = 1$
Donc : $a+b = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE RÉSOLU 2 Utiliser les formules de transformation pour résoudre des équations trigonométriques

Soit a un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\sin a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1 Vérifier que : $\cos a = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

2 Montrer que : $\cos 2a = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.
puis, en déduire que a est une solution de l'équation $\cos 4x - \sin x = 0$.

3 Résoudre dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation: $\cos 4x - \sin x = 0$ puis en déduire que $a = \frac{\pi}{10}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 2$.

1 On a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc
$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$
et on a : $\sin^2(a) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$
donc: $\cos^2(a) = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$
Puisque $a \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos a > 0$
D'où : $\cos(a) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

2 On a :

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$= 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$
$$= 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8}$$
$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{8}$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) -$
$= 1 - 2\sin^2$

▸ Déduction :

$$\cos(4a) = \cos(2(2a)) = 2\cos^2(2a) - 1$$
$$= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1$$
$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
$$= \sin a$$

Donc: $\cos(4a) - \sin a = 0$ c'est-à-dire: a est une solution de l'équation $\cos 4x - \sin x = 0$.

3 Résolvons dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation:
$\cos(4x) - \sin x = 0$
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(4x) - \sin(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos(4x) = \sin(x)$$
$$\Longleftrightarrow \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$\Longleftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi$ ou $4x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi\ (k \in$
$\Longleftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in$
$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in$

et on a : $0 < \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ équivaut à $-\frac{1}{4} < k$
Puisque $k \in \mathbb{Z}$ alors $k = 0$ donc $x = \frac{\pi}{10}$.

On a aussi :
$0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ équivaut à $\frac{1}{4} < k < 1$
Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $(\forall k \in \mathbb{Z})$; $-\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \notin]0;$
D'où : $a = \frac{\pi}{10}$, par suite $S = \left\{\frac{\pi}{10}\right\}$.

4 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 2$.
Cette équation s'écrit :
$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cos x + \frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\sin x = \frac{1}{2}$,
c'est-à-dire : $\cos a\cos x + \sin a \sin x = \frac{1}{2}$,
c'est-à-dire : $\cos(a-x) = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{\pi}{10}$.
Donc : $\cos\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.
D'où : $x - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x - \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$
avec $k \in \mathbb{Z}$.
Par suite : $x = \frac{13\pi}{30} + k2\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{30} + k2\pi$
avec $k \in \mathbb{Z}$.
finalement :
$S = \left\{\frac{13\pi}{30} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{30} + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE RÉSOLU 3 Utiliser $a\cos x + b\sin x$

Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation :
$\cos x - \sqrt{3}\sin x < 1$.

▸ Transformons : $\cos x - \sqrt{3}\sin x$
On a :

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$$
$$= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

On pose : $X = x + \frac{\pi}{3}$.
On a : $0 \le x \le 2\pi \Longleftrightarrow \frac{\pi}{3} \le X \le \frac{7\pi}{3}$

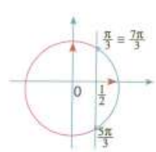
▸ Résolvons l'inéquation :

On a : $\begin{cases} \cos x - \sqrt{3}\sin x < 1 \\ x \in [0;2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) < 1 \\ x \in [0;2\pi] \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2} \\ x \in [0;2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{\pi}{3} \\ \cos X < \frac{1}{2} \\ X \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Résolvons l'inéquation :
$\begin{cases} \cos X < \frac{1}{2} \\ X \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right] \end{cases}$



On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $X = \frac{1}{2}$.
Les images des solutions de l'inéquation :
$X \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$; $\cos X < \frac{1}{2}$ est l'arc en rouge,
donc $X \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right[$
Puisque $X = x + \frac{\pi}{3}$ alors $x = X - \frac{\pi}{3}$
D'où : $x \in \left]0;\frac{4\pi}{3}\right[$ c'est-à-dire $S = \left]0;\frac{4\pi}{3}\right[$

EXERCICE RÉSOLU 4 Utiliser $\cos(2a)$

1 Montrer que :
$\cos(4x) - \cos(2x) = (2\cos(2x)+1)(\cos(2x)-1)$

2 Étudier le signe de $\cos(4x) - \cos(2x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

3 En déduire les solutions de l'inéquation :
$\cos(4x) > \cos(2x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

1 On a :

$$\cos(4x) - \cos(2x) = \cos(2(2x)) - \cos(2x)$$
$$= 2\cos^2(2x) - 1 - \cos(2x)$$
$$= 2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1$$

et on a :

$$(2\cos(2x)+1)(\cos(2x)-1)$$
$$= 2\cos^2(2x) - 2\cos(2x) + \cos(2x) - 1$$
$$= 2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1$$

Donc :
$\cos(4x) - \cos(2x) = (2\cos(2x)+1)(\cos(2x)-1)$

2 Étudions le signe de $\cos(4x) - \cos(2x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

▸ Puisque : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-1 \le \cos(2x) \le 1$
alors : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\cos(2x) - 1 \le 0$
Et on a : $\cos(2x) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos(2x) = 1$

$$\Longleftrightarrow 2x = 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$
$$\Longleftrightarrow x = k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

Puisque : $x \in [0;\pi]$ alors :

$\cos(2x)-1=0 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$

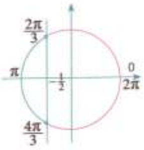
▸ Déterminons le signe de $2\cos(2x)+1$.
On pose $X=2x$

Puisque : $x\in[0;\pi]$ alors $X\in[0;2\pi]$

On a : $\begin{cases}2\cos(X)+1>0\\ X\in[0;2\pi]\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos(X)>-\frac{1}{2}\\ X\in[0;2\pi]\end{cases}$

Et on a : $\begin{cases}2\cos(X)+1=0\\ X\in[0;2\pi]\end{cases} \Longleftrightarrow X=\frac{2\pi}{3}$ ou $X=\frac{4\pi}{3}$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $X=-\frac{1}{2}$ puis on colorie en rouge les solutions de l'inéquation $\begin{cases}\cos(X)>-\frac{1}{2}\\ X\in[0;2\pi]\end{cases}$



Donc : $\begin{cases}\cos(X)>-\frac{1}{2}\\ X\in[0;2\pi]\end{cases} \Longleftrightarrow X\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$

Puisque $x=\frac{X}{2}$ alors $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

D'où le tableau de signe de $\cos(4x)-\cos(2x)$ est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos(2x)+1$		+	0	-	0	-	
$\cos(2x)-1$	0	-		-		-	0
$\cos(4x)-\cos(2x)$	0	-	0	+	0	-	0

3 Déduisons les solutions de l'inéquation $\cos(4x)>\cos(2x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

D'après la question 2) on a :

$\begin{cases}\cos(4x)-\cos(2x)>0\\ x\in[0;\pi]\end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$

Soit $x\subset[-\pi;0]$ on a : $-x\in[0;\pi]$

Puisque la fonction $\cos$ est paire alors :

$$\begin{cases}\cos(4x)-\cos(2x)>0\\ x\in[-\pi;0]\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\cos(-4x)-\cos(-2x)\\ -x\in[0;\pi]\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{3}<-x<\frac{2\pi}{3}$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{2\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{3}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(4x)>\cos(2x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ est :

$S=\left]-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[$

EXERCICE RÉSOLU 5 Utiliser $\sin(a+b)$ et $\sin a\sin b$

1 Montrer que : $\sin(3x)=\sin x(3-4\sin^2 x)$

2 En déduire que :
$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin(3x)$

1 On a :

$$\begin{aligned}\sin(3x)&=\sin(x+2x)\\ &=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x\\ &=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\cos^2 x\sin x\\ &=\sin x[1-2\sin^2 x+2(1-\sin^2 x)]\\ &=\sin x(3-4\sin^2 x)\end{aligned}$$

2

$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

On a :

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)&=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2x\right)\\ &=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\cos 2x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1-2\sin^2 x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2\sin^2 x\right)\\ &=\frac{1}{4}(3-4\sin^2 x)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)&=\sin x(3-4\sin^2 x)\\ &=\sin(3x)\end{aligned}$$

EXERCICE RÉSOLU 6 Utiliser $\cos p+\cos q$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$(E):\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1$

▸ On a : $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

Donc :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(3x)&=\frac{1+\cos(2x)}{2}+\frac{1+\cos(6x)}{2}\\ &=\frac{2+\cos(2x)+\cos(6x)}{2}\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned}\cos^2(x)+\cos^2(3x)&=\frac{2+2\cos 4x\cos(2x)}{2}\\ &=1+\cos(4x)\cos(2x)\end{aligned}$$

> *info :*
> $\cos p+\cos q$
> $=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Ainsi :

$\cos^2(x)+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1$

et équivaut à : $\cos(4x)\cos(2x)+\cos^2(2x)=0$

équivaut à : $\cos(2x)(\cos(4x)+\cos(2x))=0$

équivaut à : $\cos(2x)(2\cos(3x)\cos(x))=0$

équivaut à : $\cos(2x)=0$ ou $\cos(3x)=0$ ou $\cos(x)=0$

équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou
$3x=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}$ ou
$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

EXERCICE RÉSOLU 7 Utiliser $\sin p+\sin q$

Montrer que : $-\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}>0$

On a : $\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}=2\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

D'où :
$$\begin{aligned}A&=-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\\ &=-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(2\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)-1\right)\end{aligned}$$

Puisque : $\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{7}<\frac{5\pi}{6}$

alors : $2\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)-1>0$

et on a : $\cos\frac{\pi}{7}>0$

Donc : $-\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}>0$

EXERCICE RÉSOLU 8 Utiliser $\sin(2a)$

Montrer que : $2^4\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}=1$

On a :

> *info :*
> $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)&=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)&=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

On a :

> *info :*
> $\cos a\cos b=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}2^4\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}&=2^4\left(\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)\\ &=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\\ &=4\times\frac{1}{4}\\ &=1\end{aligned}$$

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Comment peut-on calculer $\cos\frac{\pi}{12}$?

2 Comment peut-on calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ à partir de $\cos\frac{\pi}{4}$?

3 Comment peut-on calculer $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$?

4 Comment factoriser $\cos(3x)+\cos x$?

5 Comment peut-on transformer $\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ en une somme?

6 Comment peut-on transformer $\cos 3x \sin x$ en une somme?

7 Comment peut-on résoudre l'inéquation $\sqrt{3}\sin x-\cos x \geq \sqrt{2}$?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Écrire $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ seulement.

2 Écrire $\sin(2a)$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$.

3 Simplifier $\cos(a+b)+\cos(a-b)$.

4 Donner les formules de transformation des produits en sommes.

5 Donner les formules de transformation des sommes en produits.

6 Exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

7 Transformer l'expression $a\cos x+b\sin x$.

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 $\cos(2x)$ est égale à	$1-2\cos^2 x$	$\sin^2 x-\cos^2 x$	$1-2\sin^2 x$
2 $\cos(3x)$ est égale à	$\sin x(4\cos^2 x-1)$	$\cos x(4\cos^2 x-3)$	$\cos x(4\sin 2x-$ [illegible]
3 $\sin(3x)-\sin x$ est égale à	$2\sin x\cos(2x)$	$2\cos x\sin(2x)$	$2\sin x\sin 2x$
4 Si $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ alors	$\cos(2\alpha)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\cos(2\alpha)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$\cos(2\alpha)=\frac{3-}{4}$ [illegible]
5 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)$ est égale à :	$-\cos a$	$\cos a$	0
6 $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ est égale à	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-1}{4}$
7 Les solutions de l'équation : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$ dans l'intervalle $[0;2\pi[$ sont :	$\frac{4\pi}{3}$ et 0	$\frac{-2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$ et [illegible]
8 L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$ sur l'intervalle $[0;\pi]$ est :	$\left[\frac{-\pi}{2};0\right]$	$\left[0;\frac{\pi}{8}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{8};\pi\right]$	$\left[\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right]$

EXERCICES

Exercices d'application

Utiliser $\cos(a+b)$; $\sin(a+b)$ et $\tan(a+b)$

Exercice 1 : 1. a) Vérifier que : $\frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$.

b) Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

2. a) Calculer $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) Vérifier que : $\frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$.

c) Calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

$B=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{6}+x\right)$.

$C=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

où $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$ et $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 3 : Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

1. $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
2. $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. $2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
4. $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 4 : Soit α un réel de l'intervalle $\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ tel que $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$.
Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

Exercice 5 : Soit α et β des réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tels que : $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$.
Montrer que : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6 : Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos 7x.\sin 6x-\sin 7x.\cos 6x$

$B=\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x$

$C=\cos 3x.\sin 2x+\cos 2x.\sin 3x$

$D=\cos x.\cos 2x.\cos 3x+\cos x.\sin 2x.\sin 3x$
$+\sin x.\cos 2x.\sin 3x-\sin x.\sin 2x.\cos 3x$

Exercice 7 : Sachant que :
$\cos b=\sin a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ et $0<a<\frac{\pi}{2}$.
Déterminer la valeur de $a+b$.

Exercice 8 : a et b sont deux réels tels que :
$0<a<\frac{\pi}{2}$, $b<0$, $\tan(a).\tan(b)=3-2\sqrt{3}$
et $a+b=\frac{\pi}{4}$.
Déterminer a et b.

Exercice 9 : Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, on a :

$\sin 2a=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2a\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2a\right)$.

$\cos 2a=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2a\right)$.

Exercice 10 : Soit $x\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$;
montrer que : $\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}=2$

Utiliser $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$

Exercice 11 : En utilisant $\cos\frac{\pi}{6}$
calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$,
puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 12 : Calculer $\sin(2x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $\sin x=\frac{1}{3}$ et $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin x=-\frac{3}{5}$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.
3. $\cos x=-\frac{4}{5}$ et $x\in[-\pi;0]$.

Exercice 13 : Sachant que : $\tan a=-\frac{1}{2}$.
Calculer $\tan(2a)$, $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 14 : Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(2x)$

$A=5\cos^2 x-3\sin^2 x$

$B=2\cos^2 x+3\sin^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x$

$C=\cos^4 x-\sin^4 x$

Exercice 15 : Soit x un réel tel que:
$\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $0<x<\frac{\pi}{2}$.

1. En utilisant une calculatrice, donner un encadrement de x d'amplitude 10^{-2}.
2. Calculer $\sin x$.
3. Calculer $\cos 2x$ puis en déduire la valeur de x.
4. Montrer que $\tan x = 2-\sqrt{3}$.

Exercice 16 : Sachant que : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.
Calculer $\cos(2\alpha)$, $\cos\alpha$ et $\sin(4\alpha)$ puis en déduire la valeur de α.

Transformation de produit en somme ou somme en produit

Exercice 17 : Transformer en produit les expressions suivantes :
$A=\cos(2x)+\cos(6x)$.
$B=\cos(7x)-\cos(3x)$.
$C=\sin(3x)+\sin(5x)$.
$D=\sin(8x)-\sin(6x)$.

Exercice 18 : Montrer que pour tout réel x :
a) $1+\cos 2x+2\cos x = 2\cos x(1+\cos x)$
b) $1-\cos 2x+2\sin x = 2\sin x(1+\sin x)$

Exercice 19 : Pour tout réel x ; On pose :
$A(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$
1. Montrer que : $A(x)=4\cos x.\cos 2x.\cos 4x$
2. **a)** Montrer que :
$(\forall\alpha\in\mathbb{R});\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$
b) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{9}A\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}$.
Puis que : $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$.

Exercice 20 : 1. Montrer que pour tout réel x :
$8\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos 4x=\sin 8x$
2. **a)** Vérifier que : $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$.
b) En déduire que : $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$.

Exercice 21 : 1. Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$.
2. En déduire la valeur de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 22 : Factoriser les expressions suivantes :
$A(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$.
$B(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$.
$C(x)=\cos x-\cos 2x+\sin 2x-\sin 3x$.

Exercice 23 : Factoriser les expressions suivantes :
$A(x)=1+\cos 2x+\cos x$.
$B(x)=1-\cos 2x+\sin x$.
$C(x)=1+\cos x+\cos\frac{x}{2}$.
$D(x)=1-\cos x+\sin\frac{x}{2}$.

Exercice 24 : Soit x un nombre réel, montrer que :
a) $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.
b) $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$

Exercice 25 : Montrer que pour tout réel x :
a) $\cos(3x)=4\cos^3x-3\cos x$.
b) $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3x$.
c) $\cos(4x)=8\cos^4x-8\cos^2x+1$.

Exercice 26 : 1. Vérifier que :
$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$.
2. **a)** Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R});\cos(3x)=\cos x(1-4\sin^2x)$.
b) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.
3. Montrer que :
$\sin\left(\frac{7\pi}{30}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$.
(Remarquer que : $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$)

Exercice 27 : 1. Montrer que :
a) $(\forall x\in\mathbb{R})\cos^3(x)=\frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos x)$
b) $(\forall x\in\mathbb{R});\sin^3(x)=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin(3x))$
2. En déduire le calcul de S_1 et S_2 tels que:
$S_1=\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right)+\cos^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos^3\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\cos^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
$S_2=\sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin^3\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^3\left(\frac{7\pi}{12}\right)-\sin^3\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 28 : 1. Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, on a :
$\cos(5a)=16\cos^5a-20\cos^3a+5\cos a$.
2. Vérifier que pour tout réel x :
$16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$.
3. On pose $t=\cos\frac{\pi}{5}$.
Montrer que t est une solution de l'équation :
$4x^2-2x+1=0$ et en déduire que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
4. En déduire : $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Résolution d'équations et inéquations trigonométriques.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (exercices de 29 à 31)

Exercice 29 :
1. $\cos 3x=0$
2. $\sin 7x=0$
3. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=0$
4. $\sin 2x=1$

Exercice 30 :
1. $\cos 5x=-1$
2. $\sin 3x=\frac{1}{2}$
3. $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 31 :
1. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$
2. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$
4. $\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 32 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $[0;2\pi]$ les équations suivantes :
1. $\cos x=\cos 3x$
2. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2x=0$
3. $\cos x-\sin 2x=0$
4. $\tan 2x-\tan x=0$
5. $\cos x-\sin x=1$
6. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
1. $2\sin^2x-3\sin x+1=0$
2. $\cos^2x-3\cos x+2=0$
3. $\sqrt{3}\tan^2x+(\sqrt{3}-1)\tan x-1=0$
4. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

Exercice 34 : On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :
$h(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}$.
1. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Montrer que : $(\forall x\in D);h(x)=4\cos(2x)$
3. Résoudre dans D l'équation $h(x)=4(1+\sqrt{3}\sin 2x)$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 35 : On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$(E):\cos^2x-\sin^2x=\sin(3x)$.
1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à :
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin(3x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation (E).

Exercice 36 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\cos(2x)-\sin(2x)=1$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.
2. **a)** Calculer : $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$ et $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
b) Montrer que : $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt{3}$.
c) En déduire : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\cos x-(2-\sqrt{3})\sin x=0$.

Exercice 37 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$.
1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
2. Montrer que pour tout réel x :
$A(x)=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 38 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique:
1. $\cos(x)\tan(3x)=0$.
2. $(1+\cos(x))\tan\left(\frac{x}{7}\right)=0$.
3. $\sin(4x)\cos(x)\tan(2x)=0$.

Exercice 39 : 1. Montrer que :
$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
a) $\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}=2-\sqrt{3}$.
b) $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x-2=0$.

Exercice 40 : Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes :
1. $2\cos(2x)-1\geqslant 0$
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant 0$
3. $4\cos^2 x-1\leqslant 0$
4. $\cos x-\sin x\leqslant 0$

Exercice 41 : Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :
1. $\sqrt{3}\cos x+\sin x\leqslant 1$
2. $\sin(7x)-\sin x\leqslant\sin(3x)$

Exercice 42 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$\frac{1}{\cos x}<\frac{1}{\sin x}$.
$\left(\text{Montrer que: }\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin(2x)}\right)$

Exercices de renforcement

Exercice 43 : Simplifier les expressions suivantes :
1. $\frac{2\cos 2x-\cos x-\cos 3x}{4\cos 2x}$.
2. $\frac{\sin 2x-\sin 4x}{\cos 2x-\cos 4x}$.
3. $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x}$.

Exercice 44 : Soit α un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que : $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2}$.

Exercice 45 : Montrer que :
$\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2}$

Exercice 46 : Montrer que: $\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{9}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}=$ [illegible]

Exercice 47 : Soit α et β de $\mathbb{R}$.
Montrer que :
$(\cos\alpha+\sin\beta)^2+(\sin\alpha-\cos\beta)^2$
$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Exercice 48 : Montrer que :
$\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{-1}{8}$.
(remarquer que $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{7}$ sont les mesures des angles d'un triangle).

Exercice 49 : Montrer que :
1. $\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{3\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$.
2. $\cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{3\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$.
3. $\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=$ [illegible]

Exercice 50 : Montrer que :
$2^4.\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}=1$.

Exercice 51 : Soit α et β deux réels de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tels que : $\tan\beta=2$ et $\tan\alpha=$ [illegible]
Calculer $\alpha+2\beta$.

Exercice 52 : Soit α et β deux réels de l'intervalle
$\left]0;\frac{\pi}{6}\right[$ tels que : $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ et $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$.
1. Calculer $\tan(2\beta)$.
2. En déduire que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 53 : Soit α, β et γ des nombres réels strictement positifs tels que: $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.
Montrer que :
$\tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha=1$.

Exercice 54 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x+3\cos x-\sqrt{3}\sin x$.
1. Montrer que pour x de $\mathbb{R}$, on a :
$A(x)=2(2\cos x-\sqrt{3})\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$ et représenter les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$, l'inéquation $A(x)>0$.

Exercice 55 : Soit α un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ tel que : $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
1. Calculer $\sin 2\alpha$ et en déduire que : $\alpha=\frac{\pi}{12}$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation :
$(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x-2=0$.

Exercice 56 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$f(x)=2\sqrt{3}\cos^2 x+\sin 2x$.
1. Montrer que : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $f(x)=2\cos x(\sqrt{3}\cos x+\sin x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation $f(x)=0$.

Exercice 57 : Soit x un nombre réel, on pose :
$P(x)=2\sqrt{3}\cos^2 x+\sin 2x-\sqrt{3}-1$.
1. Montrer que : $P(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x-1$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi[$ l'équation : $P(x)=0$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi[$ l'inéquation: $P(x)>0$.

Exercice 58 : 1. Montrer que :
$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$.
2. Montrer que :
$4\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin 3x$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation :
$4\sin x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1+\cos 3x$,
puis représenter les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 59 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos 3x-\cos 2x+\cos x$.
1. a) Montrer que : $\cos 3x=\cos x(2\cos 2x-1)$.
b) En déduire que : $f(x)=\cos 2x(2\cos x-1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
3. Montrer que :
$f(x)=4\cos^3 x-2\cos^2 x-2\cos x+1$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$,
et représenter les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 60 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\cos^3 x+2\cos x$.
1. a) Montrer que : $\cos 3x=(1-4\sin^2 x)\cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) En déduire que :
$A(x)=(-2\sin^2 x+\sin x+1)\cos x$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi[$ l'équation : $A(x)=0$ et représenter les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 61 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+2\cos x-\sqrt{3}$.
1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$A(x)=(\sin x+1)(2\cos x-\sqrt{3})$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$.
3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi[$ l'inéquation: $A(x)>0$.

Exercice 62 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$h(x)=2\cos^3(x)-\cos x+2\sin x-2\sin^3(x)$.
1. a) Montrer que :
$\sin x-\sin^3(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)\cos x$
et : $2\cos^3(x)-\cos x=\cos(2x)\cos x$.
b) En déduire que : $h(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x)=0$.
3. Montrer que pour tout x de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $h(x)\geqslant 0$.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 63 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=\cos 2x+\cos x-\sin x$.

1. a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$A(x)=(\cos x-\sin x)(1+\cos x+\sin x)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x-\sin x=0$.
2. a) Vérifier que :
$1+\cos x+\sin x=1+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$ on a : $1+\cos x+\sin x>0$.
3. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$ l'équation $A(x)=0$.

Exercice 64 : Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose:
$f(x)=\cos^2 x+\cos^2 2x$.
1. Montrer que pour tout a et b de $\mathbb{R}$, on a:
$\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b$.
2. a) Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R}):f(x)-1=\cos x\cos 3x$.
b) Résoudre l'équation (E) : $f(x)=1$; $x\in[0;\pi]$
c) Représenter sur le cercle trigonométrique, les images des solutions de l'équation (E).
3. Résoudre l'inéquation : $f(x)>1$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 65 : Soit a un nombre réel.
1. Calculer $\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$ puis déduire que :
$\cos a\sin a=\cos^2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos 4x+\sin 4x-\sqrt{2}\sin 8x$.
a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$f(x)=\sqrt{2}\left[-2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.
b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$f(x)=2\sqrt{2}\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\left[1+2\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$.

Exercice 66 : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cos^2 x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin^2 x+2\sin x\cos x$.
1. Montrer que : $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+\sqrt{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que : $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et représenter les images de ses solutions sur le cercle trigonométrique.
b) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

Exercice 67 : 1. Vérifier que pour tout réel x:
$(\cos^2 x+\sin^2 x)^3=\cos^6 x+\sin^6 x+\frac{3}{4}\sin^2 2x$
2. Résoudre l'équation $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{5}{8}$; $x\in\mathbb{R}$
3. Résoudre l'inéquation : $\cos^6 x+\sin^6 x\leqslant\frac{5}{8}$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 68 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $(\sqrt{2}-1)\cos 2x+\sin 2x-1=0$
(on pourra déterminer $\tan\frac{\pi}{8}$)
2. $\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}$.
3. $\cos 3x-\sin 3x-1=0$.

Exercice 69 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.
1. Montrer que : $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$.
3. Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ l'inéquation : $f(x)>0$.

Exercice 70 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
a) $\cos x+\sin x=0$ b) $\cos x+\sin x=1$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $\sin 2x+\cos x+\sin x+1=0$; $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 71 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose :
$A(x)=5\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+3\sin^2 x$.
a) Montrer que : $A(x)=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+4$
b) En déduire les solutions de l'équation $A(x)=3$ dans $\mathbb{R}$.
3. Résoudre dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation: $A(x)\geqslant 3$.

Exercice 72 : Pour tout nombre réel x, on pose : $f(x)=\sqrt{3}(4\cos^4 x+\sin^2 2x)-2\sin 2x$.
1. Montrer que : $4\cos^4 x=4\cos^2 x-\sin^2 2x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que :
$f(x)=4\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation : $f(x)=0$.
3. a) Vérifier que : $f(x)=4\cos^2 x(\sqrt{3}-\tan x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
b) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $f(x)\geqslant 0$.

Exercice 73 : 1. Montrer que : $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$
2. Soit x un nombre réel, montrer que :
$\sin x-\sin 3x+\sin 5x=\sin(3x)(2\cos 2x-1)$
et $\cos x-\cos 3x+\cos 5x=\cos(3x)(2\cos 2x-1)$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation suivante : $\dfrac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x}{\cos x-\cos 3x+\cos 5x}=2+\sqrt{3}$.

Exercice 74 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$t^2+(\sqrt{3}-1)t-\sqrt{3}=0$.
2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x+(\sqrt{3}-1)\cos x+(\sqrt{3}-3)\sin x+1-\sqrt{3}$.
a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$f(x)=(\cos x-\sqrt{3}\sin x)^2+(\sqrt{3}-1)(\cos x-\sqrt{3}\sin x)-\sqrt{3}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$.

Exercice 75 : Soit $A(x)$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$A(x)=\frac{1}{4}(3\cos x-\cos 3x-3\sin 2x)$.
1. a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:
$A(x)=\frac{1}{4}\left(6\cos^2\frac{x}{2}-\cos 3x-3\sin 2x-3\right)$
b) Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ de deux façons différentes et en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$.
2. a) Montrer que $\cos 3x=\cos x(1-4\sin^2 x)$.
b) En déduire que :
$A(x)=\frac{1}{2}\cos x(2\sin^2 x-3\sin x+1)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x)=0$.
d) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation $A(x)\leqslant 0$.

Exercice 76 : Montrer les égalités suivantes :
1. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\dfrac{\cos 2x\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.
2. $\cos x\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cos x=-\frac{3}{4}$.
3. $\sin x+\sin 2x+\sin 7x+\sin 8x=4\sin\frac{9x}{2}\cos 3x\cos\frac{x}{2}$.
4. $\tan x+2\tan 2x+4\tan 4x+8\tan\left(\frac{\pi}{2}-8x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
5. $\dfrac{1-\cos 2x+\cos 4x-\cos 6x}{\sin 2x-\sin 4x+\sin 6x}=\tan 3x$.

Exercice 77 : Soit α un nombre réel tel que :
$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ et $180°<\alpha<270°$.
Calculer $\tan\frac{\alpha}{4}$.

Exercice 78 : Soit x un nombre réel.
1. Montrer que :
$\cos 5x=\cos x(16\cos^4 x-20\cos^2 x+5)$.
2. Montrer que :
$1-\cos 5x=(1-\cos x)(4\cos^2 x+2\cos x-1)^2$.
3. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation : (E): $4X^2-2X-1=0$
puis calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{30}$.

Exercice 79 : soit x de $\mathbb{R}$, on pose :
$a=\cos x+\cos 3x$ et $b=\sin x+\sin 3x$.
1. Montrer que : $a^2+b^2=4\cos^2 x$.
2. a) Montrer que : $a=2\cos x.\cos 2x$ et $b=2\sin 2x.\cos x$.
b) Montrer que : $a+b=2\sqrt{2}\cos x.\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation :
$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation :
$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0$.

EXERCICES

Exercice 80 : On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $(E): \sin 3x = -\sin 2x$.

1. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation (E).

2. **a)** Soit x un nombre réel.
Montrer que : $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$.
b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation : $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$.
c) En déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$.

3. On pose : $X = \cos x$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4X^2 + 2X - 1 = 0$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 81 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $S(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x$.

1. **a)** Montrons que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}(2 + \cos 2x + \cos 6x)$.
b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $S(x) = 2\cos x\cos 2x\cos 3x + 1$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'équation: $S(x) = 1$ et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

3. On pose : $A = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$.
a) Montrer que : $A = \frac{1}{8}$.
(On pourra calculer $A\sin\frac{\pi}{7}$)
b) En déduire la valeur de $S\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Exercice 82 : Soit a un nombre réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2^n}\right[$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$\cos(a)\cos(2a)\cos(4a)\dots\cos(2^n a) = \frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$

Exercice 83 : Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \sin 4x\sin x + \sin 2x\sin x$.

1. Montrer que : $f(x) = \sin 2x\sin 3x$ pour tout réel x de $\mathbb{R}$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$.

3. **a)** Vérifier que : $f\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}$.
b) Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{7}$ et $\widehat{BAC} = \frac{4\pi}{7}$.
On pose : $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

Exercice 84 : Soit α, β et γ des nombres réels tels que: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
Montrer que :

1. $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$
2. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

Exercice 85 : Soit α un nombre réel.
Montrer que :
$\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha \geq \frac{1}{16}$.

Exercice 86 : 1. Soit t un nombre réel.
Montrer que : $(1+t)^4 + (1-t)^4 = 2(t^2+3)^2 - 16$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{41}{128}$.

les bonnes réponses au paragraphe **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	3	2	1	1	2	1	1	1		

Chapitre 7

Nicolas Copernic

Le mouvement du pendule pesant, les roues d'un vélo et d'autres choses dans notre vie courante, nous donnent une idée sur la rotation. En ce qui concerne la géométrie, la rotation est une transformation très importante et aide à résoudre beaucoup de problèmes en géométrie.
Nicolas Copernic est un mathématicien et astronome polonais.
Il est célèbre pour être le premier penseur moderne à avoir envisagé que la terre tourne autour du soleil et non l'inverse.

Objectifs de la leçon

- Connaître la rotation à partir de son centre et son angle.
- Connaître et construire l'image d'un point par une rotation.
- Connaître les propriétés d'une rotation (conservation de la distance-conservation de la mesure d'un angle orienté-conservation du barycentre).
- Connaître et construire les images de figures (Droite-segment-cercle...).
- Utiliser les propriétés de la rotation pour montrer que deux figures sont isométriques.
- Utiliser la rotation pour résoudre des problèmes de géométrie.

Le contenu

1. Rotation et rotation réciproque.
2. Propriétés.
3. Images de figures par une rotation.

Capacités attendues

- Construire les images de figures usuelles par une rotation donnée.
- Connaître que des figures sont isométriques en utilisant une rotation.
- Utiliser une rotation donnée dans une situation géométrique simple.

UTILISATION DES LOGICIELS

Création d'une variable numérique

L'icône $a = 2$ permet la création d'une variable numérique. Les variables numériques sont associées à des curseurs que l'on déplace à l'aide de la souris.

Cette variable numérique peut être utilisée dans la définition d'un autre objet, comme un point : `Saisie: [illegible]`

Création de figures géométriques

• Menu

Selon la situation, on utilise les icône suivantes :

• Champ de saisie

Pour tracer un cercle défini par son équation `Saisie: (x+1)^2+(y-5)^2=9`.

Mesurer/ comparer des objets

L'iône permet de mesurer des longueurs.

L'icône permet de mesurer des angles.

L'iône permet de comparer ou relier deux objets sélectionnés à l'aide de la souris.

Autour des vecteur

• Menu

Selon la situation, on utilise les icônes suivantes :

• Champ de saisie

On peut également utiliser le champ de saisie pour définir un vecteur. Par exemple,

Pour définir le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on saisit `Saisie: u=Vecteur[A, B]`.

Pour définir le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, on saisit `Saisie: v=(1,-2)`.

Enfin, pour définir le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, on saisit `Saisie: M=A+Vecteur[A, B]-2*Vecteur[A, C]`.

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, `Saisie: p=u*v`.

Attention : dans le champ de saisie, les **points** sont définis par des lettres majuscules, les vecteurs par des lettres **minuscules** .

Autour des fonctions

• Champs de saisie

Définir une fonction et tracer sa représentation graphique

Par exemple, pour définir la fonction f qui à x associe $-x^2 + 3x + 5$, on saisit : `Saisie: f(x)=-x^2+3x+5`

Quelques commandes bien utiles...

sqrt(x) donne la racine carrée de x,

Fonction $[f,a,b]$ trace $\mathscr{C}_f$ entre a et b.

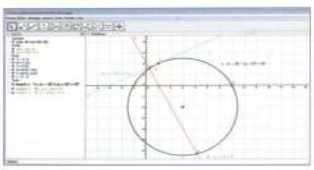
Dérivée $[f]$ définit la dérivée de f et trace sa courbe représentative.

Tangente $[a,f]$ trace la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Racine $[f]$ donne les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Extremum $[f]$ donne les extrema (locaux ou absolus) de fonction f.

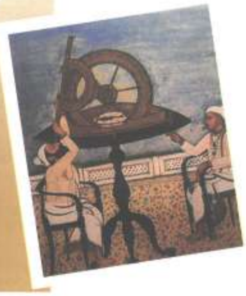
• Solution de l'exercice 58



• Solution de l'exercice 59

Chapitre 6

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE



Ibn youness

C'est Ali Ben Abderrahmane Ben Ahmed Ben Youness, né et décédé en EGYPTE en 1009 après JC.

Il était parmi les mathématiciens et les astrologues les plus célèbres en Egypte, il était excellent dans le calcul trigonométrique et c'est lui qui a posé la formule suivante :

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$.

Objectifs de la leçon

- Transformer l'expression $a\cos x + b\sin x$;
- Utiliser les formules de transformation dans : - Les simplifications d'expressions
  - La résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques;
- Représenter et lire des solutions d'une équation ou d'une équation trigonométrique;
- Connaître la transformation de $\cos(a-b)$;
- Transformer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$;
- Connaître les formules de linéarisation;
- Connaître la transformation de sommes en produits ;
- Connaître la transformation de produits en sommes;
- Transformation $\tan(a+b)$ et ses conséquences.

Le contenu

1. Transformation de $\cos(a-b)$
2. Transformation de sommes en produits et de produits en sommes
3. Transformation de $\tan(a+b)$
4. Transformation de l'expression $a\cos x + b\sin x$

Capacités attendues

- être capable d'utiliser toutes les formules de transformation.
- être capable de résoudre les équations et inéquations trigonométriques de base.
- être capable de représenter et lire les solutions d'une équation ou d'une inéquation trigonométrique sur le cercle trigonométrique.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce chapitre, le plan est orienté dans le sens direct.

Activité 1 Angles orientés

1. Construire un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, puis déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$.
2. Construire un triangle EFG tel que $EF = EG$ et $(\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

> **info :**
> $\alpha \equiv \alpha' \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z};$
> $\alpha - \alpha' = 2k\pi$

Activité 2 Symétrie centrale

$ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Le point I est le milieu du segment $[AD]$.

1. En utilisant la symétrie centrale S_o :

a Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}})$.

b Montrer que $S_o(I)$ est le milieu du segment $[BC]$.

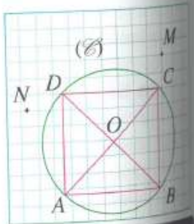
2. En utilisant uniquement la règle et le compas, construire les points E et F tels que : $\begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} AF = AE \\ (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$, puis vérifier que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

> **info :**
> Soit O, M et M' des points du plan.
> $S_O(M) = M'$ signifie que : $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$
> ou $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 3 Approche de la notion de rotation

Sur la figure ci-contre : $ABCD$ est un carré de centre O, tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit au carré $ABCD$ et M, N sont deux points du plan.



1. Construire sur le cercle $(\mathscr{C})$ les points A', B', C' et D', qui vérifient : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OD'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

On a : $\begin{cases} OA = OA' \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

On dit que le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On note cette rotation par r, et on écrit : $r(A) = A'$.

2. Quelles sont les images par la rotation r des points B, C et D?
3. Construire les points M' et N' les images respectives des points M et N par la rotation r.

> **info :**
> pour $M \neq O$
> $r(M) = M'$ équivaut à : $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Activité 4 Conservation de la distance - Conservation du milieu

Soit r une rotation de centre O et d'angle α.

Soit A et B deux points du plan et A' et B' leur images respectives par la rotation r.

1. On suppose que : $A \neq B$, $A \neq O$ et $B \neq O$.

a Montrer que : $(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) \equiv (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})[2\pi]$.

b En appliquant le théorème d'Alkashi dans les triangles OAB et $OA'B'$, montrer que : $AB = A'B'$.

2. Vérifier que : $AB = A'B'$ dans les cas suivants : $A = B$; $A = O$ et $B = O$.
3. Soit I le milieu du segment $[AB]$ avec $A \neq B$. Posons : $r(I) = I'$

a Montrer que : $A'I' = B'I'$.

b Montrer que : $A'I' + I'B' = A'B'$, puis en déduire que le point I' est le milieu du segment $[A'B']$.

4. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre J.

On pose : $r(C) = C'$; $r(D) = D'$ et $r(J) = J'$.

Montrer que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

> **info :**
> ▶ $M \in [AB] \Longleftrightarrow AM + MB = AB$
> ▶ I est le milieu de $[AB]$ équivaut à $AI = IB$ et $I \in [AB]$.

Activité 5 Conservation d'une mesure d'angle orienté par une rotation.

Soit r une rotation de centre O et d'angle α.

Soit A et B deux points distincts du plan et A', B' leurs images respectives par la rotation r.

1. Vérifier que si $A = O$ ou $B = O$ alors $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha[2\pi]$.
2. On suppose que : $A \neq O$ et $B \neq O$.

Soit D le point défini par : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD}$, posons $r(D) = D'$.

a Quelle est la nature des quadrilatères $ABDO$ et $A'B'D'O$?

b Montrer que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \equiv (\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OD'})[2\pi]$, puis en déduire que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha[2\pi]$.

3. Soit E et F deux points distincts du plan, E' et F' leurs images respectives par la rotation r.

Montrer que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EF}) \equiv (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{E'F'})[2\pi]$.

> **info :**
> On dit que la rotation conserve une mesure d'angle orienté.

Activité 6 Conservation du barycentre par une rotation

Soit A, B et C des points du plan tels que $A \neq B$, $A \neq C$ et $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. On considère la rotation r de centre O et d'angle α. Les points A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par la rotation r.

1. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$, suivant le signe de k.
2. **a** On suppose que : $k > 0$.

Montrer que : $A'C' = kA'B'$ et $(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}) \equiv 0[2\pi]$, puis en déduire que : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

b Montrer que si $k < 0$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

3. Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ et G' l'image du point G par la rotation r.

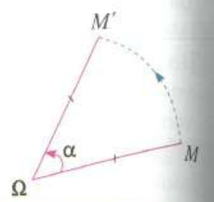
a Montrer que : $\overrightarrow{A'G'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

b En déduire que le point G' est le barycentre des points pondérés $(A';\alpha)$ et $(B';\beta)$.

> **info :**
> On dit que la rotation conserve le barycentre de deux points pondérés.

LE COURS

1 Rotation et rotation réciproque



1- Rotation

DÉFINITION

Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et α un nombre réel.
La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

- Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$
- Si $M \neq \Omega$ alors $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

info :
$\alpha \equiv \alpha'[2\pi] \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z};$
$\alpha = \alpha' + 2k\pi$

Notations et vocabulaire

- La rotation de centre Ω et d'angle α est notée $r(\Omega;\alpha)$, ou simplement r, lorsqu'il n' y a pas de confusion possible.
- Si M' est l'image de M par la rotation r, alors on dit que la rotation r transforme M en M', et on écrit $r(M) = M'$.

Et on a : $r(\Omega) = \Omega$

- Pour tout point M du plan tel que $M \neq \Omega$ on a: $r(M) = M'$ équivaut à : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

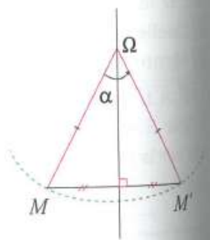
Coséquences

- Soit r la rotation de centre Ω et d'angle α.

On a : $r(\Omega) = \Omega$, on dit que Ω est un point invariant par la rotation r.

- Si $\alpha \neq 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; alors Ω le centre de la rotation r est l'unique point invariant par cette rotation, et dans ce cas : Pour tout point M du plan tel que $M \neq \Omega$ et $r(M) = M'$ on a :
  - M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon ΩM.
  - La médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point Ω.
  - Le triangle $M\Omega M'$ est isocèle de sommet Ω.

(dans le cas : $\alpha \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$)



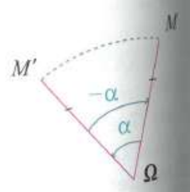
Rotations particulières

- La rotation r d'angle nul $(2k\pi; k \in \mathbb{Z})$ transforme tout point M du plan en lui-même, c'est-à-dire $r(M) = M$, cela signifie que tout point du plan est invariant.
- La symétrie centrale de centre Ω est la rotation de centre Ω et d'angle π.

2- Rotation réciproque d'une rotation

DÉFINITION

La rotation $r(\Omega; -\alpha)$ de centre Ω et d'angle $-\alpha$, est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(\Omega;\alpha)$ de centre Ω et d'angle α.



- La rotation réciproque d'une rotation r est notée r^{-1}.
- Pour tout point M du plan on a : $r(M) = M'$ équivaut à $r^{-1}(M') = M$.

POUR COMPRENDRE

1 Définition d'une rotation

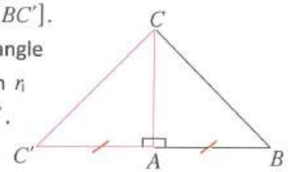
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit O le milieu du segment $[BC]$.
Construire l'image du triangle ABC par les rotations suivantes :

1. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. r_2 est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. On a $r_1(A) = A$, car A est le centre de la rotation r_1.

- On a : $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,
donc $r_1(B) = C$.
- On pose $r_1(C) = C'$.

On a : $AC = AC'$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Or $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AC'})[2\pi]$,
donc : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}) \equiv \pi[2\pi]$.
Et on a $AB = AC = AC'$, donc $AB = AC'$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}) \equiv \pi[2\pi] \Longleftrightarrow r_{(A;\pi)}(B) = C$.
Donc : $S_A(B) = C'$.
Par suite, on construit le point C' tel que A soit le milieu du segment $[BC']$.
D'où: l'image du triangle ABC par la rotation r_1 est le triangle ACC'.



2. Le point O est le milieu du segment $[BC]$ et le triangle ABC est rectangle en A.

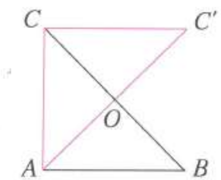
Donc: O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Donc: $OA = OB = OC$.
Et puisque ABC est un triangle isocèle de sommet A et O milieu du segment $[BC]$,
alors: (OA) est la médiatrice de $[BC]$.
Donc : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
et $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
D'où : $\begin{cases} OB = OA \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$;
c'est-à-dire : $r_2(B) = A$

- $\begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$;

c'est-à-dire : $r_2(A) = C$

- On pose $r_2(C) = C'$.

on a $OC = OC'$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Puisque $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC'}) \equiv (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'})[2\pi]$
alors: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC'}) \equiv -\pi[2\pi]$.
Donc: $OA = OC'$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC'}) \equiv -\pi[2\pi]$,
signifie que $r_{(O;-\pi)}(A) = C'$,
c'est-à-dire: $S_O(A) = C'$
Par suite, on construit le point C' tel que O soit le milieu de $[AC']$.
D'où, l'image du triangle ABC par la rotation r_2 est le triangle CAC'.

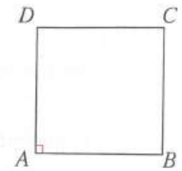


2 Détermination de l'angle d'une rotation

$ABCD$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Déterminer les angles des rotations r_1 et r_2 de centres respectifs A et C tels que:
$r_1(D) = B$ et $r_2(D) = B$.

- On a: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'où: $\begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
Par conséquent: l'angle de la rotation r_1 est $-\frac{\pi}{2}$.

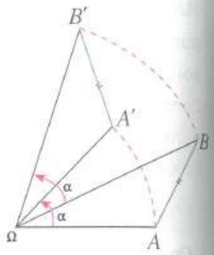


- On a :

$(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})[2\pi]$,
donc: $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Et puisque: $CD = CB$, alors l'angle de la rotation r_2 est $\frac{\pi}{2}$.

2 Propriétés

Propriété 1:
Si A et B sont deux points du plan et A', B' leurs images respectives par une rotation alors $AB = A'B'$.
On dit que la rotation conserve la distance.



Propriété 2:
Soit r une rotation d'angle α.
Si A' et B' sont les images respectives de deux points distincts A et B par la rotation r, alors: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha[2\pi]$.

Remarque
Cette propriété nous permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

Propriété 3:
Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et A', B', C' et D' leurs images respectives par une rotation.
On a : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'})[2\pi]$.
On dit que la rotation conserve les mesures d'angles orientés.

Propriété 4:
Soit G le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.
Si A', B' et G' sont les images respectives de A, B et G par une rotation, alors G' est le barycentre des points pondérés $(A';\alpha)$ et $(B';\beta)$.

Info : On dit qu'une rotation conserve le barycentre de deux points pondérés.

Remarque
On peut étendre cette propriété au barycentre de trois ou quatre points pondérés.

Conséquence 1
Soit I le milieu d'un segment $[AB]$.
Si A', B' et I' sont les images respectives de A, B et I par une rotation, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.

Info : On dit que la rotation conserve le milieu d'un segment

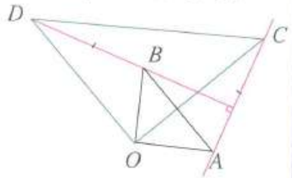
Conséquence 2
Soit A, B et C des points du plan; A', B' et C' leurs images respectives par une rotation.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, où k est un réel, alors: $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

Info : On dit que la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs, ou que la rotation conserve l'alignement des points.

1 Utilisation d'une rotation pour démontrer l'orthogonalité de deux droites et l'égalité de distances

OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles au sommet commun O tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Montrer que : $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- OAB est un triangle rectangle isocèle en O, donc $OA = OB$.
Et puisque $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors, le point B est l'image de A par la rotation r, c'est-à-dire $r(A) = B$.



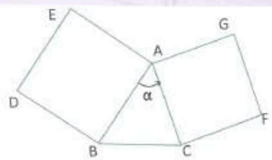
- OCD est un triangle rectangle isocèle en O donc $OC = OD$.
Et comme $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors $r(C) = D$.

Conclusion : On a $r(A) = B$, $r(C) = D$ et la rotation r conserve la distance donc $AC = BD$.
D'autre part l'angle de la rotation r est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD})$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
Ainsi : Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

2 Conservation de mesure d'un angle orienté

ABC est un triangle tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est positive.
On construit à l'extérieur de ce triangle deux carrés $ABDE$ et $ACFG$, On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Déterminer l'image de chacun des points E et C par la rotation r.
2. Montrer que $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})[2\pi]$.

On pose : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \alpha[2\pi]$ tel que $\alpha \in]0;\pi[$.



1. Déterminons $r(E)$ et $r(C)$.
$ABDE$ et $ACFG$ sont des carrés donc :
- $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AE = AB$, donc $r(E) = B$.
- $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AC = AG$, donc $r(C) = G$

2. Montrons que : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})[2\pi]$
La rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme les points A, E et C respectivement aux points A, B et G.
Et puisque la rotation conserve les mesures d'angles orientés, alors : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB})[2\pi]$.

3 Montrer que la médiatrice d'un segment passe par un point fixe

$ABCD$ est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
I et J sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Montrer que la médiatrice du segment $[IJ]$ passe par le point O.

Méthode : Pour montrer que la médiatrice du segment $[IJ]$ passe par le point O, on peut montrer que I est l'image de J par une rotation de centre O.

$ABCD$ est un carré de centre O et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ce qui nous conduit à considérer la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ signifie que : $r(A) = B$.
- $\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ signifie que : $r(B) = C$.

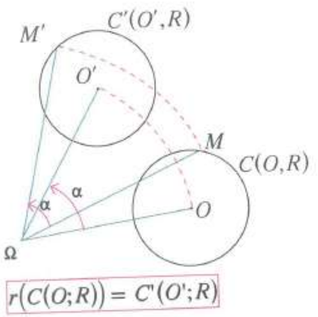
On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ équivaut à $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, c'est-à-dire: I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;1)$.
Et on a : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ équivaut à $3\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$, c'est-à-dire: J est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;1)$.
Et puisque la rotation r conserve le barycentre, alors $r(I)$ est le barycentre des points pondérés $(r(A);3)$ et $(r(B);1)$ c'est-à-dire: $(B;3)$ et $(C;1)$, donc $r(I) = J$.
Par conséquent $OI = OJ$ c'est-à-dire que la médiatrice du segment $[IJ]$ passe par point O.

3 Images de certaines figures par une rotation

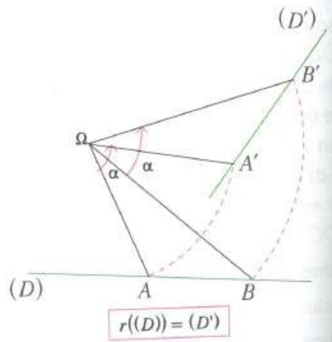
Soit r une rotation et A, B, O, A', B' et O' des points du plan tels que $A \neq B$, $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(O) = O'$.

Propriété

- L'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$.
- L'image du cercle $C(O;R)$, de centre O et de rayon R, est le cercle $C'(O';R)$, de centre O' et de rayon R.



$r(C(O;R)) = C'(O';R)$



$r((D)) = (D')$

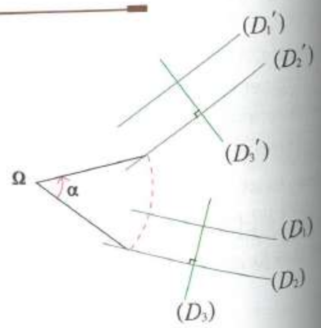
Conséquences

- L'image de la demi-droite $[AB)$ par la rotation r est la demi-droite $[A'B')$.
- Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Si un point M est le point d'intersection de deux droites (D) et (Δ) alors, l'image de M par la rotation r est le point d'intersection des images de (D) et (Δ) par la rotation r.

Info :
La rotation conserve l'in-
tersection de deux figu-
res

On a : $r((D_1)) = (D'_1)$ et $r((D_2)) = (D'_2)$ et $r((D_3)) = (D'_3)$.

- Si $(D_1) // (D_2)$ alors $(D'_1) // (D'_2)$
- Si $(D_1) \perp (D_3)$ alors $(D'_1) \perp (D'_3)$



1 Une rotation transforme un segment en un segment

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
E est un point du segment $[AB]$ et I un point du segment $[AD]$ tels que $AE = DI$.
r est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
1. Déterminer les images de A et B par la rotation r.
2. Montrer que $r(E) = I$.

1. Déterminons $r(A)$ et $r(B)$.
On a $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Puisque O est le centre du carré $ABCD$, alors $OA = OB = OC = OD$.
Donc: $\begin{cases} OB = OA \\ (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r(B) = A$.
Et $\begin{cases} OA = OD \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ c'est-à-dire $r(A) = D$.

2. Montrons que $r(E) = I$
Posons $r(E) = E'$, et montrons que $I = E'$.
On a $r(A) = D$ et $r(B) = A$ et puisque la rotation transforme un segment $[MN]$ en un segment $[r(M)r(N)]$, alors $r([AB]) = [DA]$.
Et comme $E \in [AB]$ alors $E' \in [DA]$.
On a $r(E) = E'$ et $r(A) = D$, donc $AE = DE'$.
Puisque $AE = DI$, alors $DI = DE'$.
Donc: I et E' sont deux points du segment $[DA]$ tels que $DE' = DI$, d'où $E' = I$ .c'est-à-dire $r(E) = I$.

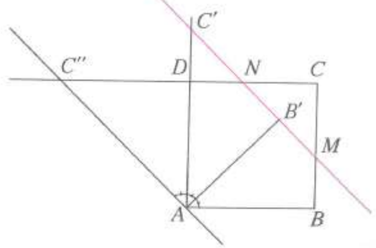
2 La rotation conserve l'intersection de deux figures

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On pose : $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(C') = C''$.
1. a Montrer que $r(B') = D$.
b Montrer que C'' appartient à la droite (CD).
2. La droite $(B'C')$ coupe (BC) en M et (CD) en N.
Montrer que : $r(M) = N$.

1. a Montrons que $r(B') = D$.
On a : $r(B) = B'$ équivaut à $\begin{cases} AB = AB' \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$
Comme $ABCD$ est un carré alors $AB = AD$, donc $AB' = AD$.
D'autre part :
$(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})[2\pi]$,
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
donc $(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
D'où : $AB' = AD$ et $(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ c'est-à-dire $r(B') = D$.

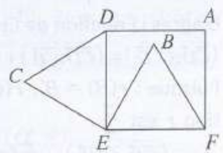
b Montrons que : $C'' \in (CD)$.
D'après la relation de Chasles, on a :
$(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C''D}) \equiv (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{C'B'}) + (\overrightarrow{C'B'};\overrightarrow{C''D})[2\pi]$.
Puisque : $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et l'angle de la rotation r est $\frac{\pi}{4}$.
alors $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{C'B'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
Et on a $r(C') = C''$ et $r(B') = D$, donc $(\overrightarrow{C'B'};\overrightarrow{C''D}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
D'où $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{C'B'}) + (\overrightarrow{C'B'};\overrightarrow{C''D}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Et comme $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
alors $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{C'B'}) + (\overrightarrow{C'B'};\overrightarrow{C''D}) \equiv \pi[2\pi]$.
c'est-à-dire $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C''D}) \equiv \pi[2\pi]$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{C''D}$ sont colinéaires, par suite $C'' \in (CD)$.

2. Montrons que $r(M) = N$.
On a $r(B) = B'$ et $r(C) = C'$, et puisque la rotation r transforme toute droite en une droite, alors $(B'C')$ est l'image de (BC) par la rotation r c'est-à-dire $r((BC)) = (B'C')$.
Par suite, $r(M) \in (B'C')$, car $M \in (BC)$.
D'autre part, $r(B') = D$ et $r(C') = C''$, donc $r((B'C')) = (DC'')$.
Et comme $M \in (B'C')$ alors $r(M) \in (DC'')$.
Et on a $C'' \in (DC)$ alors $(DC'') = (DC)$, donc $r(M) \in (DC)$.
Il en résulte que : $r(M) \in (DC) \cap (B'C')$.
Or $(DC) \cap (B'C') = \{N\}$, d'où $r(M) = N$.



EXERCICE RÉSOLU 1 Utiliser une rotation pour démontrer que des points sont alignés.

$ADEF$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On construit à l'extérieur de ce carré le triangle équilatéral CED et à son intérieur le triangle équilatéral BEF (voir figure).
Montrer que les points A, B et C sont alignés.



Montrons que les points A, B et C sont alignés.

Méthode : Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, on peut démontrer que les points A, B et C sont les images respectives de trois points alignés par une rotation.

▸ **Recherche d'une rotation convenable.**

Les triangles CED et BEF sont équilatéraux et ils ont un sommet commun E, ce qui nous conduit à considérer la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\begin{cases} EF = EB \\ (\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$, donc $r(F) = B$

Et on a : $\begin{cases} ED = EC \\ (\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$, donc $r(D) = C$

▸ **Recherche des points alignés.**

Commentaire :

Le but de l'exercice est de montrer que les points A, B et C sont alignés, et puisque $r(D) = C$ et $r(F) = B$, alors il est naturel de prendre en considération le point A.

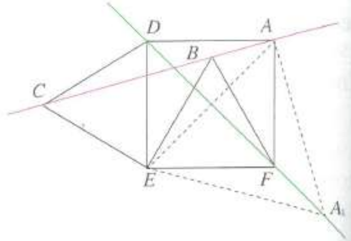
Soit le point A_1 tel que $r^{-1}(A) = A_1$

c'est-à-dire $r(A_1) = A$

On a : $r(A_1) = A$ équivaut à $\begin{cases} EA_1 = EA \\ (\overrightarrow{EA_1};\overrightarrow{EA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

C'est-à-dire que le triangle AEA_1 est équilatéral, on en déduit que $A_1E = A_1A$.

Donc, le point A_1 appartient à la médiatrice du segment $[AE]$.



On a les droites (DF) et (AE) sont les diagonales du carré $ADEF$, donc la droite (DF) est la médiatrice du segment $[AE]$,
d'où les points A_1, D et F sont alignés, car ils appartiennent à la médiatrice du segment $[AE]$.

Conclusion : On a $r(A_1) = A$, $r(D) = C$, $r(F) = B$ et les points A_1, D et F sont alignés.
Et comme la rotation r conserve l'alignement des points, alors les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE RÉSOLU 2 Utiliser une rotation pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires

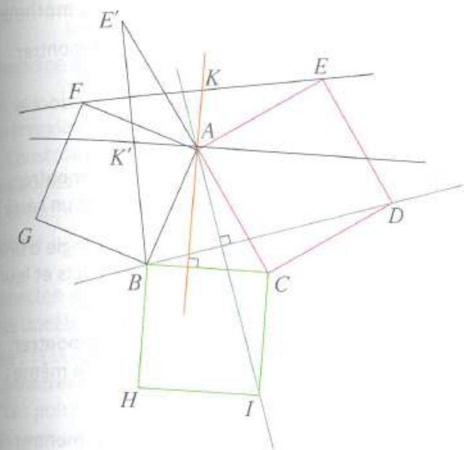
ABC est un triangle tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ est positive.
On construit, à l'extérieur de ce triangle, les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1 a. Montrer que le triangle ACI est l'image du triangle DCB par une rotation que l'on déterminera.
b. En déduire que les droites (AI) et (BD) sont perpendiculaires.

2 Montrer que les droites (AH) et (CG) sont perpendiculaires.

3 On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Soit K le milieu du segment $[EF]$,
on pose $r(K) = K'$.
a. Montrer que K' appartient à la droite qui passe par A et parallèle à la droite (BC).
b. En déduire que (AK) est une hauteur dans le triangle ABC.

Remarque : Soit r une rotation et $(\mathscr{F})$ une figure du plan. Toutes les images des points de la figure $(\mathscr{F})$ par la rotation r forment un ensemble, appelé image de $(\mathscr{F})$ par la rotation r, qu'on note $r((\mathscr{F}))$.



1 a. Montrons que le triangle ACI est l'image du triangle DCB par une rotation qu'on va déterminer.

Les triangles BCD et ACI ont un sommet en commun C.
On pense à considérer la rotation r_1 de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. $(r_1(C) = C)$

On a : $\begin{cases} CD = CA \\ (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r_1(D) = A$

et $\begin{cases} CB = CI \\ (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r_1(B) = I$

Donc, l'image du triangle BCD par la rotation r_1 est le triangle ACI.

b. Montrons que : $(AI) \perp (BD)$

On a $r_1(D) = A$, $r_1(B) = I$ et l'angle de la rotation r_1 est $\frac{\pi}{2}$, donc $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{IA}$

D'où $(AI) \perp (BD)$.

2 Montrons que $(AH) \perp (GC)$.

On considère la rotation r_2 de centre B d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a $\begin{cases} BH = BC \\ (\overrightarrow{BH};\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r_2(H) = C$

et $\begin{cases} BA = BG \\ (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r_2(A) = G$

Et puisque l'angle de la rotation r_2 est $\frac{\pi}{2}$, alors $(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{GC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{GC}$.

Donc $(AH) \perp (GC)$

3 a. Montrons que K' appartient à droite passant par A et parallèle à la droite (BC).

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AF = AB \\ (\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r(F) = B$,

et $\begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est-à-dire $r(C) = E$.

Posons $r(E) = E'$

Puisque K est le milieu de $[EF]$ et la rotation conserve le milieu, alors $r(K)$ est le milieu de $r([EF]) = [E'B]$
c'est-à-dire K' est le milieu $[E'B]$.

D'après la relation de chasles on a :
$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE'}) \equiv (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AE'})[2\pi]$,
c'est-à-dire $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE'}) \equiv \pi[2\pi]$ et comme $AC = AE'$, alors A est le milieu du segment $[CE']$.

Dans le triangle BCE' on a : A est le milieu de $[CE']$ et K' est le milieu de $[E'B]$, donc d'après la propriété des milieux des côtés d'un triangle on a :
$\overrightarrow{K'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $(AK')//(BC)$. Donc K' appartient à la droite passant par A et parallèle à la droite (BC).

(On peut aussi le justifier par en utilisant la réciproque du théorème de Thalès).

b. Déduction :

on a $r(K) = K'$ donc $AK = AK'$ et $(\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AK'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. D'où $(AK) \perp (AK')$.
Or $(AK')//(BC)$, alors $(AK) \perp (BC)$.
D'où (AK) est une hauteur du triangle ABC.
(hauteur issue de A).

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

Soit r une rotation de centre Ω et d'angle α.

1 Que signifie $r(A) = B$?

2 Quel est l'angle de la rotation réciproque de la rotation r ?

3 Quelle est la relation entre les distances AB et $r(A)r(B)$?

4 Que signifie la rotation r conserve une mesure d'angles orientés?

5 Que signifie la rotation r conserve le barycentre?

6 Quelle est l'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ par la rotation r ?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment utiliser une rotation pour montrer qu'un triangle ABC :
est équilatéral? rectangle isocèle en A ? isocèle en A ?

2 Comment utiliser une rotation pour montrer qu'un parallélogramme de centre O est un carré?

3 Comment déterminer le centre et l'angle d'une rotation, connaissant deux points distincts et leurs images respectives?

4 Comment utiliser une rotation pour montrer que deux segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur?

5 Comment utiliser une rotation pour montrer que trois points sont alignés?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)

- ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G.
- r est la rotation qui transforme A en B et B en C.
- r' est la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Le centre de la rotation r est :	A	B	G
2 Une mesure de l'angle de la rotation r est :	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
3 L'image de la droite (AB) par la rotation r est :	(AB)	(GC)	(BC)
4 Le quotient $\frac{AB}{BC}$ est égal à :	2	1	-1
5 Si I est le milieu de $[AB]$ alors $r(I)$ est le milieu de :	$[BC]$	$[AC]$	$[CG]$
6 L'image de B par la rotation r' est :	C	A	B
7 L'image du segment $[BC]$ par la rotation r' est le segment :	$[AB]$	$[AC]$	$[AG]$
8 L'image de la droite (GC) par la rotation r' est :	La droite (GC)	La droite (GA)	La droite (AB)

EXERCICES

Exercices d'application

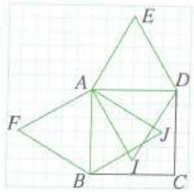
Rotation et ses propriétés

Exercice 1 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Construire A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la rotation r.
2. Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB'}})$.

Exercice 2 : OAB et OCD sont deux triangles isocèles en leur sommet commun O tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})[2\pi]$.
1. Montrer que $AC = BD$.
2. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Montrer que le triangle OIJ est équilatéral.

Exercice 3 : ABC est un triangle isocèle rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
1. Déterminer le centre de la rotation r qui transforme A en C et transforme B en A.
2. Soit C' l'image du point C par la rotation r.
Quelle est la nature du quadrilatère $BACC'$?

Exercice 4 : Les triangles ADE, AID, ABJ et AFB sont équilatéraux et $ABCD$ est un carré de centre O (voir la figure).
Déterminer le centre et l'angle de la rotation r dans chacun des cas suivants :
1. $r(D) = C$ et $r(F) = E$
2. $r(B) = J$ et $r(D) = E$
3. $r(D) = J$ et $r(I) = B$
4. $r(F) = D$ et $r(B) = E$



Exercice 5 : $ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On construit le point L pour que le triangle BLC soit isocèle rectangle en L et $(\overrightarrow{LC};\overrightarrow{LB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit K le symétrique de O par rapport à D.
Montrer que le triangle ALK est isocèle rectangle.

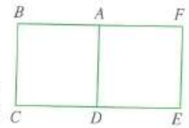
Exercice 6 : ABC et ACD sont deux triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
1. Déterminer le centre de la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et qui transforme B en D.
2. Construire C' l'image du point C par la rotation r, puis montrer que A est le milieu du segment $[BC']$.

Exercice 7 : ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit D le symétrique de A par rapport à B.
Déterminer le centre et l'angle de la rotation r qui transforme C en B et transforme A en D.

Exercice 8 : $ABCD$ est un carré de centre O, I et J sont les milieux respectifs des segments $[OC]$ et $[OD]$.
Montrer que $BI = CJ$ et que les droites (BI) et (CJ) sont perpendiculaires.

Exercice 9 : OAB et OCD sont deux triangles isocèles rectangles en leur sommet commun O tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Montrer que : $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$

Exercice 10 : $ABCD$ et $DEFA$ sont deux carrés (voir la figure).
Soit M un point du segment $[AB]$ $(M \neq A)$.
Le cercle de centre A et passe par le point M coupe $[AD]$ en un point N et coupe $[AF]$ en un point P.



En utilisant une rotation convenable, montrer que : $DM = NF$ et $CN = EP$.

Exercice 11 : On considère un triangle ABC.
On construit à l'extérieur de ce triangle deux triangles MAB et NAC qui sont équilatéraux.
Prouver que : $MC = NB$

Exercice 12 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
1. Construire B' et C' les images respectives des points B et C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
2. Montrer que : $(AB') \perp (BC)$ et $(AC) \perp (B'C')$.

Exercice 13 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et D l'image du point A par la symétrie axiale d'axe (BC).

Soit M un point du segment $[BC]$ $(M \neq C)$.
Le cercle de centre C et passe par M coupe le segment $[CD]$ en un point N.
En utilisant une rotation convenable, montrer que : $AM = BN$.

Exercice 14 : $ABCD$ est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Les points M, N, P et Q sont respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.
Soit r la rotation de centre O et qui transforme A en B.
1. Déterminer l'image de M par la rotation r.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Exercice 15 : OAB et OCD sont deux triangles équilatéraux tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $BOCE$ est un parallélogramme.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on pose $r(E) = F$.
1. a) Montrer que : $OF = BE$ et $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
b) En déduire que : $OF = OC$ et $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
2. En déduire que : $F = D$.
Quelle est la nature du triangle AED ?

Exercice 16 : ABC est un triangle isocèle rectangle en B tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et O est un point du plan.
On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On pose : $r(A) = A'$ et $r(C) = C'$.
Montrer que les droites (BC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Exercice 17 : On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I le milieu de $[BC]$ et $r = r\left(I;\frac{\pi}{2}\right)$.
1. a) Déterminer $r(A)$ et $r(C)$.
b) Déterminer l'image de la droite (BC) par la rotation r.
2. E et F sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.
Montrer que le triangle EIF est rectangle isocèle.

Exercice 18 : ABC est un triangle isocèle rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
1. Construire A' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Construire C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
3. Montrer que les points A, A' et C' sont alignés.

Exercice 19 : Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O son centre de gravité.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
1. Déterminer les images par la rotation r des points A, B et C.
2. I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le point L est le symétrique de K par rapport au point B, le point M est le symétrique de I par rapport au point C, le point N est le symétrique de J par rapport au point A.
Déterminer l'image par la rotation r du point L, puis montrer que le triangle LMN est équilatéral.

Exercice 20 : $ABCD$ est un parallélogramme tel que une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}})$ est positive.
1. Construire le triangle rectangle isocèle IAD en I tel que $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{ID}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et DCE soit un triangle rectangle isocèle en D tel que $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Détermine l'image de A par la rotation r, et montrer que : $r(B) = E$.
3. Soit A' le symétrique du point A par rapport au point I.
a) Vérifier que : $r(D) = A'$.
b) Montrer que : $A'E = BD$ et $(A'E) \perp (BD)$.

Exercice 21 : On considère le carré $ABCD$ tel que : $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit E et F les milieu respectifs des segments $[DC]$ et $[BC]$.
1. Montrer que : $AE = DF$.
2. Soit r la rotation qui transforme A en D et transforme E en F.
Déterminer le centre et l'angle de la rotation r.
3. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE).
Montrer que les droites (HC) et (DF) sont parallèles.

Exercices de renforcement

Exercice 22 : On considère un triangle équilatéral ABC tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit I le milieu du segment $[BC]$ et D un point du plan tel que $\overrightarrow{ID} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AI}$.
1. Montrer que : $AB = ID$.
2. On considère la rotation r qui transforme A en I et transforme B en D.
a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.
b) Construire le point Ω centre de la rotation r.
c) Construire l'image du point C par la rotation r.

Exercice 23 : On considère un parallélogramme $ABCD$.
On construit à l'extérieur de ce parallélogramme un triangle IAB rectangle isocèle en I et un carré $BEFC$ tel que : $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
1. Construire la figure.
2. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on pose : $r(D) = K$.
a) Montrer que : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BK}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
b) Montrer que K est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
c) En déduire que : $r(D) = E$.

Exercice 24 : On considère deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ tels que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AE = AB$.
1. a) Construire une figure qui vérifie les données.
b) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r de centre A et transforme B en E.
2. a) Montrer que : $r(C) = F$ et $r(D) = G$.
b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{EF}})$.
3. Soit K le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;-1)$, on pose $r(K) = K'$.
Prouver que les points K', F et G sont alignés.

Exercice 25 : OAB est un triangle.
On considère le rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Construire les points C et D tels que : $r(D) = A$ et $r(B) = C$.
2. Montrer que : $AC = BC$.
3. Montrer que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 26 : ABC est triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I le milieu du segment $[BC]$.
On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Montrer que : $r(A) = B$ et $r(C) = A$.
2. Soit (Γ) le cercle de centre C et passant par le point I.
a) Construire (Γ') image par la rotation r du cercle (Γ).
b) Le cercle (Γ) coupe le segment $[AC]$ en un point E, et le cercle (Γ') coupe le segment $[AB]$ en un point F.
Montrer que : $r(E) = F$.

Exercice 27 : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
1. Construire le point E image de C par la rotation r.
2. Soit I le milieu de $[BC]$.
La droite (BE) coupe (AI) en M et (AC) en N.
a) Montrer que le triangle AMN est isocèle en A.
b) En déduire l'image du point M par la rotation r.
3. Soit F l'image de B par la rotation r et P le point d'intersection des deux droites (AE) et (FN).
Montrer que : $r(N) = P$.

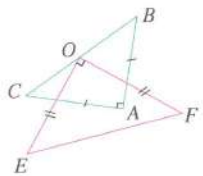
Exercice 28 : On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
E et F sont respectivement deux points de $[AB]$ et $[BC]$ tels que $AE = BF$.
On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Montrer que : $r(E) = F$.
2. Soit H le point d'intersection des droites (CE) et (AF).
Montrer que H est l'orthocentre du triangle DEF.

Exercice 29 : On considère un carré $ABCD$ tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On pose : $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(C') = C''$.
1. Montrer que : $r(B') = D$ et que le point C'' appartient à la droite (CD).
2. La droite $(B'C')$ coupe $[BC]$ en M et $[CD]$ en N.
Montrer que : $r(M) = N$.

Exercice 30 : On considère un rectangle $ABCD$
de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1. Vérifier que : $r(C) = D$.
2. On pose $r(B) = E$ et $r(D) = F$.
Montrer que $BD = EF$ et que le point O est le milieu de $[EF]$.
3. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre A et coupe $[AD]$ en un point H, $(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par la rotation r et K point d'intersection de $(\mathscr{C}')$ et le segment $[BF]$.
Montrer que le triangle OHK est équilatéral.

Exercice 31 : On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et le point H milieu du segment $[BC]$.
Soit M un point du segment $[BC]$, I le projeté orthogonal du point M sur (AB) et J le projeté orthogonal du point M sur (AC).
1. Prouver que $AJ = IB = IM$.
2. En utilisant une rotation convenable, montrer que le triangle HIJ est rectangle isocèle.

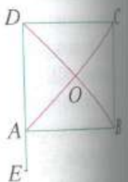
Exercice 32 : Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, O est le milieu du segment $[BC]$ et OEF est un triangle isocèle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On considère la rotation r de centre O et qui transforme C en A.



1. a) Déterminer l'angle de la rotation r puis montrer que : $r(E) = F$.
b) En déduire que les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.
c) I et J sont les milieux respectifs des segments $[EC]$ et $[AF]$.
Montrer que : $r(I) = J$.
2. La droite (OE) coupe (AC) en M et la droite (OF) coupe (AB) en N.
Montrer que : $r(M) = N$.

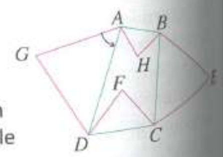
Exercice 33 : On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1. Construire les points M, N et P images respectives des points B, C et D par la rotation r.
2. Montrer que le triangle MNP est rectangle isocèle.
3. Montrer que les droites (AN) et (MP) sont perpendiculaires.
4. Soit I le point d'intersection des droites (AN) et (MP).
Montrer qui : $r(O) = I$, puis en déduire la nature du triangle OAI.

Exercice 34 : Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, et E un point de la demi-droite $[DA)$ et à l'extérieur du carré $ABCD$.
On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. Déterminer l'image de la droite (AD) par la rotation r.
2. Soit F l'image de E par la rotation r.
Montrer que F appartient à la droite (AB) et que $BF = AE$ puis construire le point F.



3. Soit G le symétrique du point E par rapport au point O.
a) Montrer que l'image de F par la rotation r est le point G.
b) En déduire que le triangle EFG est rectangle isocèle.

Exercice 35 : On considère un quadrilatère convexe $ABCD$.
On construit les triangles équilatéraux BCE, AHB, AGD et DCF (voir figure).
1. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
a) Quelles sont les images des points G et H par la rotation r ?
b) En déduire que : $GH = DB$ et $(\overrightarrow{GH};\overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



2. En utilisant la rotation r' de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, montrer que :
$DB = EF$ et $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{FE}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. a) Montrer que : $(\overrightarrow{GH};\overrightarrow{FE}) \equiv 0[2\pi]$.
b) En déduire la nature du quadrilatère $GHEF$.

Exercice 36 : On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et la droite (Δ) est la médiatrice de $[BC]$.
Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
1. a) Montrer que : $r(B) = O$ et $r(O) = A$.
b) Montrer que l'image de droite (BC) par la rotation r est la droite (Δ).
2. La droite perpendiculaire à (IC) en I coupe (Δ) en E.
Montrer que : $r(C) = E$.
3. Déterminer le centre et l'angle de la rotation qui transforme O en C et transforme C en A.

Exercice 37 : On considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Et soit la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1. Montrer que : $r(I) = J$.
2. À l'extérieur du triangle ABC on construit les points M et N tels que les triangles AIM et AJN sont équilatéraux.
En utilisant la rotation r, montrer que : $MJ = NI$.
3. Soit E le point d'intersection de (JN) et (IC).
a) Déterminer l'image de chacune des droites (BM) et (IJ) par la rotation r.
b) En déduire que le triangle AEF est équilatéral.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 38 : On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et un point I distinct de O.
Construire le point A tel que le point I est le milieu de $[AA']$ et A' image de A par la rotation r.

Exercice 39 : O est un point du plan, (D) et (Δ) des droites qui ne passent pas par O.
Construire un carré $ABCD$ tel que O est son centre, A appartient à (D), B appartient à (Δ) et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 40 : (D) et (D') sont deux droites et A est un point extérieur à (D) et à (D').
Construire le point B appartenant à (D) et le point C appartenant à (D') tels que le triangle ABC soit rectangle isocèle en A et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exercice 41 : $ABCD$ est un carré de centre O.
Les points M et N sont respectivement sur les côtés $[BC]$ et $[AB]$ du carré $ABCD$ tels que $AM = BN$.
1. Montrer que le triangle MON est rectangle isocèle.
2. Soit I le milieu de $[AN]$.
Montrer que : $IO = IB$.
3. Quel est le lieu géométrique du point I lorsque M décrit le segment $[AB]$.

Exercice 42 : (D) est une droite, A un point extérieur à (D).
B et C sont deux points qui varient sur (D) tels que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Quel est le lieu géométrique du point B' le symétrique de B par rapport à la droite (A) lorsque B et C décrivent (D) selon les conditions des hypothèses?

Exercice 43 : $ABCD$ est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
On considère le point K tel que KBI soit un triangle rectangle isocèle avec $(\overrightarrow{KB};\overrightarrow{KI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
1. Montrer que la médiatrice du segment $[IJ]$ passe par le point O.
2. En utilisant une rotation convenable, montrer que AKJ est un triangle isocèle.

Exercice 44 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit k un nombre réel et M, N et B des points définis par : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$.
En utilisant une rotation convenable, montrer que le triangle MNP est équilatéral.

Exercice 45 : On considère un triangle équilatéral et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, qui ne contient pas le point B ($M \neq A$ et $M \neq C$), et le point I appartenant au segment $[MB]$ tel que $AM = IM$.
1. Montrer que le triangle IMA est équilatéral.
2. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICES

Déterminer $r(B)$ et $r(I)$ puis en déduire que : $MA + MC = MB$.

Exercice 46 : On considère un triangle ABC. On construit, à l'extérieur de ce triangle, les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$ tels que : $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. On considère la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Montrer que : $r(D) = A$ et $r(B) = I$.
b) En déduire que les droites (BD) et (AI) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les droites (CG) et (AH) sont perpendiculaires.
3. Soit r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Déterminer l'image du point F par la rotation r'.
b) Montrer que l'image de E par la rotation r' est le symétrique du point C par rapport au point A.
c) Soit K le milieu du segment $[EF]$, on pose $r'(K) = K'$.
Montrer que le point K appartient à la droite qui passe par A et parallèle à la droite (BC), puis en déduire que les droites (AK) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 47 : On considère un carré $ABCD$ de centre O.
Soit (D) et (Δ) deux droites qui passent par le point O et orthogonales.
La droite (Δ) coupe respectivement (AB) et (DC) en I et K.
La droite (D) coupe respectivement (AD) et (BC) en J et L.

1. On considère la rotation r de centre O et qui transforme B en C.
Montrer que : $r(I) = J$ et $r(K) = L$ puis en déduire que $IK = JL$.
2. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un carré.

Exercice 48 : On considère un triangle ABC isocèle de sommet A, le point O est le centre de son cercle circonscrit et M un point du segment $[BC]$.
Soit E un point de $[AB]$ et D un point de $[AC]$ tels que le quadrilatère $AEMD$ soit un parallélogramme.
Soit r la rotation de centre O et d'angle α tels que : $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) \equiv \alpha[2\pi]$.

1. **a)** Montrer que : $r(B) = A$ et $r(A) = C$.
b) Vérifier que : $AD = BE$
c) On pose : $r(E) = E'$.
Montrer que : $BE = AE'$ et que le point E' appartient au segment $[AC]$, puis en déduire que : $E' = D$ et le point O appartient à la médiatrice du segment $[DE]$.
2. On pose : $r(C) = C'$.
Vérifier que C' appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, puis construire le point C'.

Exercice 49 : On considère un triangle ABC tel que H est son orthocentre et le point I est le milieu du segment $[BC]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On pose : $r(B) = B'$, $r(C) = C''$ et $r^{-1}(C) = C'$.

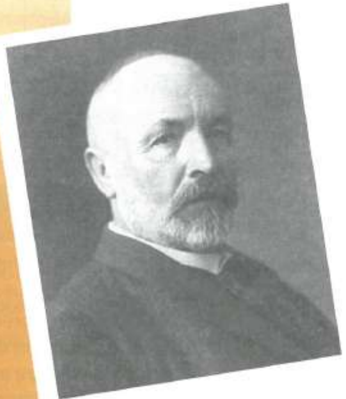
1. **a)** Construire les points B', C' et C''.
b) Montrer que les droites (BC') et $(B'C)$ sont perpendiculaires.
2. **a)** Montrer que le point A est le milieu du segment $[C'C'']$.
b) Montrer que les droites $(B'C'')$ et (AH) sont parallèles.
c) Montrer que la droite (AH) est une médiane du triangle $AB'C'$.
3. Montrer que : $B'C' = 2AI$.
4. Montrer que les droites (AI) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

les bonnes réponses du paragraphe **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	3	1	3	2	1	1	2	2		

LIMITE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Chapitre 8



Georg Cantor

- Le mathématicien suisse Jean Bernoulli a découvert une règle pour lever les indéterminations : " $\frac{0}{0}$ " et " $\frac{\infty}{\infty}$ " avec des conditions mathématiques très précises.
- Le mathématicien Allemand Georg Cantor s'est intéressé depuis son jeune âge à la notion de l'infinie.

Objectifs de la leçon

- Approcher la notion de limite infinie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$;
- Approcher la notion de limite finie d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$;
- Connaître les limites usuelles en $+\infty$ et $-\infty$;
- Reconnaître les limites usuelles en zéro;
- Lecture graphique des limites;
- Reconnaître les limites finies et infinies d'une fonction en un point;
- Reconnaître la limite à droite et la limite à gauche d'une fonction en un point;
- Être capable de lever les indéterminations dans les cas simples;
- Utiliser les opérations sur les limites;
- Être capable de calculer les limites de fonctions polynômes;
- Être capable de calculer les limites de fonctions rationnelles;
- Être capable d'utiliser les limites trigonométriques usuelles pour calculer les limites de fonctions trigonométriques;
- Utiliser les propriétés de l'ordre pour calculer les limites de fonctions simples.

Le contenu

Capacités attendues

- Calculer les limites des fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles.
- Calculer les limites des fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles.

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 1 Limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de zéro et au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

La figure (1) représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

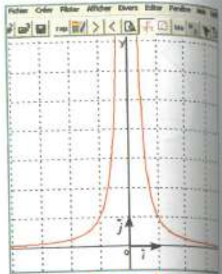


Figure 1

1. Limite de la fonction f au voisinage de zéro.

a Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0,2	0,1	0,01	10^{-6}	10^{-30}	-0,1	-0,001	-10^{-7}	-10^{-10}	-10^{-50}
$f(x)$										

b En utilisant la courbe ou le tableau, que peut-on conclure pour les valeurs de $f(x)$ quand x se rapproche de plus en plus de zéro?

▸ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro, on dit que : «la limite de $f(x)$ quand x tend vers zéro est $+\infty$» et on note : $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to 0} f = +\infty$.

2. Limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Le tableau suivant est obtenu en utilisant le logiciel «Excel».

H2 f_x =1/H1^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	6	10	12	23	98	1000	999999
2	f(x)=1/x²	0,02777778	0,01	0,00694444	0,00189036	0,00010412	0,000001	1E-12

a Que remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quant x prend des valeurs positives de plus en plus grandes?

▸ Si $f(x)$ tend vers zéro (c'est-à-dire se rapproche de plus en plus de zéro) quand x tend vers $+\infty$, on dit que : «la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0» et on note : « $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ » ou « $\lim_{x \to +\infty} f = 0$ ».

On peut alors interpréter la remarque précédente en écrivant : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

b Conjecturer la limite : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

Info 1:

▸ Si x se rapproche de plus en plus d'un réel a.
On dit que : « x tend vers a »

▸ Si x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, on dit que : « x tend vers plus l'infinie» et on note : $x \to +\infty$.

Info 2:

▸ Si x est négatif et $|x|$ prend des valeurs de plus en plus grandes, On dit que : « x tend vers moins l'infinie» et on note : $x \to -\infty$

▸ Si $f(x)$ est négatif tel que $|f(x)|$ prend des valeurs de plus en plus grandes, On dit que : « $f(x)$ tend vers moins l'infinie» et on note : $f(x) \to -\infty$

Activité 2 Limite de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ en zéro et en $+\infty$.

La figure (2) représente la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$ dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. En s'aidant de la courbe de f, que peut-on remarquer quand aux valeurs de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

2. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	100	999	9899	100000000	10^{39}	10^{82}	10^{200}
$f(x) = \sqrt{x}$							

Info :

▸ Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, on dit que : «la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est égale à $-\infty$», et on note : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes?

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0.1	0.01	0.0001	0.00001	0.0000001	0.000000001
$f(x) = \sqrt{x}$						

Que peut-on remarquer quant aux valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus proches de zéro?
(vous pouvez utiliser la courbe ou le tableau).

4. Exprimez vos remarques dans les questions 1), 2) et 3) en utilisant le symbole lim.

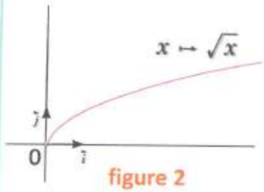


figure 2

Activité 3 Limite de la fonction $x \mapsto x^2$ en zéro, $+\infty$ et $-\infty$.

La figure (3) représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

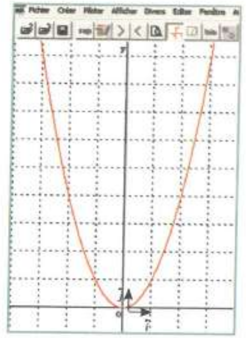


figure 3

1. Limite de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au voisinage de zéro.

a Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0,2	0,1	0,01	10^{-6}	10^{-30}	-0,1	-0,001	-10^{-7}	-10^{-10}	-10^{-50}
$f(x)$										

b En utilisant la courbe ou le tableau, donner $\lim_{x \to 0} x^2$.

2. Conjecturer les limites suivantes : $\lim_{x \to 0} x^3$; $\lim_{x \to 0} 2x$; $\lim_{x \to 0} x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Limite de la fonction $x \mapsto x^2$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

a Recopier et compléter le tableau suivant :

x	6	10	99	998	10^{20}	10^{70}
$f(x)$						

b En utilisant la courbe ou le tableau, donner $\lim_{x \to +\infty} x^2$.

c Conjecturer les limites suivantes : $\lim_{x \to -\infty} x^2$; $\lim_{x \to +\infty} x^3$; $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

Activité 4 Limite infinie d'une fonction en un point.
(Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un point).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
Soit (C) la courbe de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Les deux tableaux suivants sont obtenus en utilisant le logiciel «Excel».

Tableau 1 : (Les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2 avec $x > 2$).

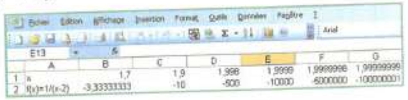
H8 f_x

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	2,1	2,02	2,01	2,001	2,00001	2,0000001
2	f(x)=1/(x-2)	10	50	100	1000	100000	10000000

ACTIVITÉS

Si $x > a$, tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x > a$ » ou « x tend vers a à droite».

Tableau 2: (Les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2 avec $x < 2$).



	A	B	C	D	E	F	G
1	x	1,7	1,9	1,998	1,9999	1,9999998	1,99999999
2	f(x)=1/(x-2)	-3,33333333	-10	-500	-10000	-5000000	-100000001

Si $x < a$, tel que x tend vers a, on dit que « x prend des valeurs de plus en plus proches de a avec $x < a$ » ou « x tend vers a à gauche».

Que remarque-t-on des valeurs de $f(x)$ dans le tableau 1? dans le tableau 2?

2. Construire la courbe (C) de la fonction f.

3. La courbe de f coupe-t-elle la droite d'équation $x = 2$? Pourquoi?

4. Exprime tes remarques dans la question 1. en utilisant le symbole « lim ».

Info :

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a à droite, on dit que : «la limite de $f(x)$ à droite en a est égale à $+\infty$ » et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

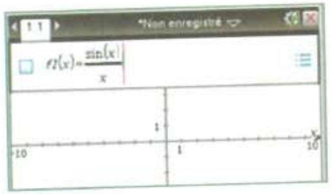
ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$

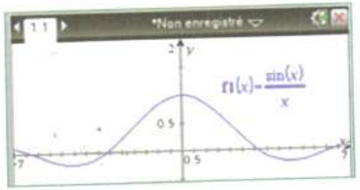
ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

Activité 5 Limites de fonctions trigonométriques

1. Étude de la limite de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en zéro.

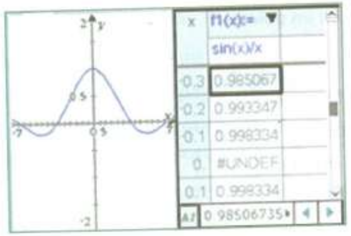
En utilisant une calculatrice programmable, on obtient la figure suivante qui représente la courbe de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

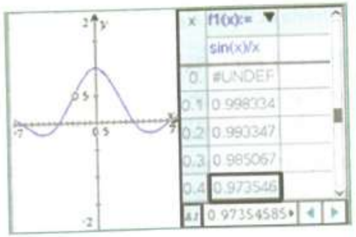




Le tableau suivant donne des valeurs approchées de « $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ » quand x se rapproche de plus en plus de zéro.

Conjecturer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ par lecture du graphique ou du tableau.





Info :

Pour savoir comment afficher ce tracé et comment afficher le tableau de valeurs, voir la page réservée à l'utilisation des logiciels.

2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$

En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (poser : $X = \dfrac{x}{2}$)

3. En remarquant que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \sin x = x\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos x = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$,

montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (poser : $X = \dfrac{x}{2}$)

En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

Info :

▸ En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on dit qu'on a fait un changement de variable.

▸ Remarquer que lorsque x tend vers zéro, X tend aussi vers zéro, et on écrit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X}$$

Tu as certainement trouvé dans la question 1) que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Activité 6 Limites et ordre

1. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

a) Vérifier que : $(\forall x \in I) ; f(x) \geqslant x^2$

b) Rappeler la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ (Activité 1).

c) ▸ Si $x > 100$, quelles sont les valeurs possibles de $f(x)$?

▸ Si $x > 10^{90}$, quelles sont les valeurs possibles de $f(x)$?

d) Que peut-on conclure pour le nombre $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$? Exprimer cette conclusion en utilisant le symbole « lim ».

2. Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x) = -x^2 - \dfrac{1}{x}$.

a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[) ; g(x) < -\dfrac{1}{x}$

b) Rappeler la limite : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(-\dfrac{1}{x}\right)$

c) Quelles sont les valeurs possibles $g(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $x = 0,01$? 2) $x = 0,00001$? 3) $x = 10^{-99}$?

d) Que peut-on conclure pour $g(x)$ quand x tend vers zéro par valeurs positives? Exprimer cette conclusion en utilisant le symbole « lim ».

3. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{x^2+3} + 1$

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |h(x) - 1| \leq \dfrac{1}{x^2}$

b) Déterminer une valeur approchée de $h(x)$ et la précision de cette valeur dans chacun des cas suivants :

1) $x = 10$ 2) $x = 10^6$ 3) $x = 10^{30}$

c) Que peut-on conclure pour $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$? Exprimer cette conclusion en utilisant le symbole « lim ».

Aperçu historique :

La notion de limite est le concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité.

Dire qu'une quantité "admet une limite" est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

Grâce aux travaux de L'Huillier Simon (1750-1840) qui portent principalement sur le concept de limite pour lequel celui-ci apporte une notation nouvelle bien pratique : l'abréviation lim. pour limite.

LE COURS

1 Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

On peut exprimer aussi par des phrases les symboles suivants : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

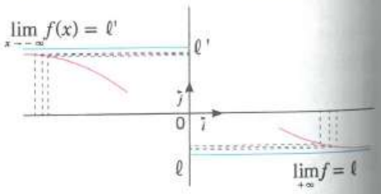
Limites usuelles : (On admet les limites suivantes).

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
- Si n est pair et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
- Si n est impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

2 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$:

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$), et soit ℓ un réel.
Si $f(x)$ tend vers le nombre ℓ quand x tend vers $+\infty$, alors on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.
- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b]$ (où $b \in \mathbb{R}$), et soit ℓ' un réel.
Si $f(x)$ tend vers le nombre ℓ' quand x tend vers $-\infty$, alors on note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell'$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = \ell'$.

- La courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell'$ quand x tend vers $-\infty$.
- La courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ quand x tend vers $+\infty$.



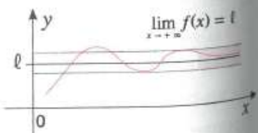
Limites usuelles :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Propriété

Soit f une fonction numérique, et ℓ un nombre réel.

- Si f admet une limite ℓ en $+\infty$ (ou en $-\infty$), alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - \ell) = 0$



POUR COMPRENDRE

1 Calcul de la limite d'une fonction en l'infinie

Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3 + x}{x^3} = -2$

Méthode

On utilise la propriété suivante :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - \ell) = 0$
puis les limites usuelles.

On pose :
$f(x) = \frac{-2x^3 + x}{x^3}$ où $x \in \mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

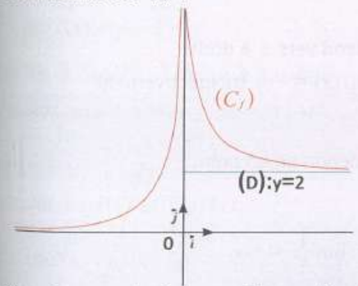
$$f(x) - (-2) = \frac{-2x^3 + x}{x^3} + 2 = \frac{-2x^3 + x + 2x^3}{x^3} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

2 Lecture graphique des limites

La figure suivante représente la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.



1. Déterminer, par lecture graphique, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Sachant que (C_f) est la courbe de la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{1}{x^2} & ; x < 0 \end{cases}$

Retrouver les résultats de la première question.

1. Au voisinage de $+\infty$ (C'est-à-dire quand x tend vers $+\infty$),
on remarque que (C_f) se rapproche de plus en plus de la droite (D) d'équation : $y = 2$; donc $f(x)$ se rapproche de plus en plus du nombre 2 ;
d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
   - Au voisinage de $-\infty$, (C_f) se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses (dont l'équation est $y = 0$) ; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$,
$f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$;
donc : $f(x) - 2 = \frac{1}{x}$
or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2) = 0$, d'où :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

C'est le même résultat obtenu par lecture graphique.

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

sur l'intervalle $]-\infty;0[$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$
or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

C'est le même résultat obtenu par lecture graphique.

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

Cauchy est devenu professeur à l'école polytechnique en 1814, après avoir débuté une carrière d'ingénieur des ponts et chaussées qui ne lui convenait pas. Il rédigea un cours d'analyse, dans lequel il prit comme notions fondamentales la limite et la continuité. L'analyse moderne était née.

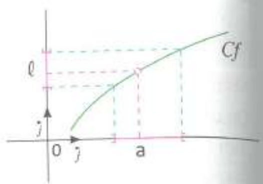
LE COURS

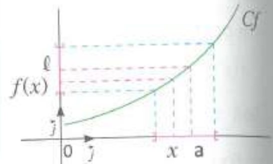
3 Limite finie et infinie d'une fonction en un point

1- Limite finie d'une fonction en un point

Soit a et ℓ deux nombres réels. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, ou sur un ensemble de la forme $]a-\alpha;a+\alpha[-\{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, alors on note : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{a} f=\ell$.





Propriété

Soit f une fonction numérique, a et ℓ deux nombres réels.

Si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique.

2- Limites usuelles (On admet les résultats suivants)

- $\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$
- $(\forall n\in \mathbb{N}^*)\,;\ \lim\limits_{x\to 0} x^n=0$

3- Limite infinie d'une fonction en un point

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors on note :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{a} f=+\infty$.

Info : On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

4 Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un point

Soit f une fonction numérique. Soit a et ℓ deux nombres réels.

- Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a à droite (C'est-à-dire $x>a$), alors on note : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers a à droite (C'est-à-dire $x>a$), alors on note : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$).
- On définit de la même façon la limite à gauche d'une fonction en un point.

Limites usuelles :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$
- $(\forall n\in \mathbb{N}^*)\,;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$
- si n est un nombre pair non nul, alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$
- si n est un nombre impair, alors : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n}=-\infty$

Théorème : Soit f une fonction numérique.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \iff \left(\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right)$$

Info : Le théorème reste valable si ℓ est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

POUR COMPRENDRE

1 Technique du changement de variable

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2017}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
2. On pose : $f(x)=x^2+4x+4$ où $x\in\mathbb{R}$.
   - a Calculer $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
   - b Vérifier que : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$.

1. Soit x un réel,

On a : $\left(x^{2017}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=x^{2017}$

or $\lim\limits_{x\to 0} x^{2017}=0$, donc :

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2017}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2017}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

2. a On a : $f(x)=(x+2)^2$ où $x\in\mathbb{R}$.

On utilise la technique du changement de variable :

on pose : $X=x+2$

quand x tend vers -2, alors X tend vers 0 :

$\lim\limits_{x\to -2} X=\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$

donc : $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)^2=\lim\limits_{X\to 0} X^2=0$

d'où : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$.

b $f(-2)=(-2)^2+4(-2)+4=0$

On a : $f(-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$

donc : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

2 Limite à droite - Limite à gauche

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\,;\ x\geq 0\\ f(x)=x^3\,;\ x<0\end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

1. ▸ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$:

Sur $]0;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{x}$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}=0$

▸ Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$:

Sur $]-\infty;0[$; $f(x)=x^3$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^3=0$

2. Déduisons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$, alors :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

3 Limite à droite différente de limite à gauche

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1}(-x-1)=-2$.
2. En déduire : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.
3. La fonction $x\mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ admet-elle une limite en 1?

1. On utilise un changement de variable :

On a : $(x+1)-2=x-1$

On pose : $X=x-1$; $(x\to 1 \Rightarrow X\to 0)$

$\lim\limits_{x\to 1}((x+1)-2)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=\lim\limits_{X\to 0} X=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

On montre de même que : $\lim\limits_{x\to 1}(-x-1)=-2$ (en posant : $X=-x+1$)

2.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	0	$x-1$

▸ Si $x\in\,]1;+\infty[$, alors :

$\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$

Or : $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}=2$

▸ Si $x\in\,]-\infty;1[$, alors :

$\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}=-(x+1)$

Comme : $\lim\limits_{x\to 1}-(x+1)=-2$, alors :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}=-2$

3. Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, alors la fonction $x\mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ n'admet pas de limite en 1.

5 Opérations sur les limites

On admet toutes les opérations suivantes.

Dans tout ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$;

ℓ et ℓ' sont des nombres réels. Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

1- Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	

2- Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

3- Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g}(x)$	$\frac{1}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4- Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $\ell<0$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$+\infty$ ou $\ell>0$	$-\infty$ ou $\ell<0$	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

5- Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

- Soit P et Q deux fonctions polynômes et x_0 un réel.
  - $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$
- Si ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes P et Q,

  alors :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$

1 Utiliser les propriétés des sommes et produits de limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)(1-x)^{2017}$

1. On a : $\lim\limits_{x\to 0}(3x+7)=7$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ donc,

par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$

2. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)^{2017}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^{2017})=-\infty$

(d'après la propriété de limite d'une fonction polynôme en $+\infty$; Le terme du plus haut degré du polynôme $(1-x)^{2017}$ est : $(-x)^{2017}=-x^{2017}$).

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)(1-x)^{2017}=-\infty$

2 Limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et limite d'une fonction rationnelle en $-\infty$

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+5x+1)$
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3x^2-4x+5}{x^2+x-1}$

1. Le terme du plus haut degré du polynôme $-3x^2+5x+1$ est $-3x^2$,

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+5x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$)

2. La fonction $x\mapsto\frac{-x^3+3x^2-4x+5}{x^2+x-1}$ est une fonction rationnelle, le rapport de ses termes du plus haut degré est $\frac{-x^3}{x^2}$,

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x^2-4x+5}{x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

Attention!

On ne peut pas utiliser cette méthode pour le calcul de la limite en un nombre!

3 Limite d'une fonction rationnelle à droite et à gauche en un point

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}}\frac{1}{-x+3}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1-\frac{1}{x}}{x^2+x}$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{3x-4}{x-1}$

1. Tableau de signe de $-x+3$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	0	$-$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}}(-x+3)=0^-$

D'où, par inverse,

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}}\frac{1}{-x+3}=-\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-\frac{1}{x}=-\infty$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$

d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^2+x=0^+$ (car $x>0\Rightarrow x^2+x>0$)

donc, par quotient; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1-\frac{1}{x}}{x^2+x}=-\infty$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}3x-4=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}x-1=0^-$

(car $x<1\Rightarrow x-1<0$)

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{3x-4}{x-1}=+\infty$.

4 Lever une indétermination

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$.
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)\frac{1}{x}$.

1. Directement, cette limite est une forme indéterminée du type « $+\infty+(-\infty)$ », il suffit dans ce cas de factoriser par $\sqrt{x}$ ou par x pour obtenir une forme déterminée.

- Méthode 1 : $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ donc;

par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})=+\infty$

- Méthode 2 : Soit $x>0$;

$x-\sqrt{x}=x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$ donc;

Rappel : Pour $A>0$; $\frac{\sqrt{A}}{A}=\frac{1}{\sqrt{A}}$

par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})=+\infty$

2. Directement, cette limite est une forme indéterminée du type « $(+\infty)\times 0$ », il suffit dans ce cas de développer :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$; $(x^2+1)\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ donc; par somme,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$; D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)\frac{1}{x}=-\infty$.

6 Limites de fonctions irrationnelles

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ (où a est un réel) telle que : $(\forall x \in [a;+\infty[)\,;\, f(x) \geq 0$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\ell \geq 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = +\infty$

Remarque

cette propriété reste valable si on calcule la limite quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a, ou à droite en a ou à gauche en a.

Exemples :

1. Calculons $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{2x-1}$:

On a : $\lim\limits_{x\to3} 2x-1 = 5$, donc : $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$

2. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-x+2}$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-x+2 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-x+2} = +\infty$

3. Calculons $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{3-\frac{1}{x}}$:

on a : $\lim\limits_{x\to0^-} 3-\frac{1}{x} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{3-\frac{1}{x}} = +\infty$

7 Limites de fonctions trigonométriques

Propriété

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = 1$
- Pour tout réel non nul a, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$.
- Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$.
- $\lim\limits_{x\to0}\sin x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$
- Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$.
- $\lim\limits_{x\to0}\tan x = 0$
- Pour tout réel $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$

Exemples :

1. Calculons $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{3x}$: $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(2x)}{x}$, or : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x} = 2$

donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{2}{3}$, d'où : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}$

2. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}}\frac{\sin(x)}{x+\frac{\pi}{6}}$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}} x+\frac{\pi}{6} = 0^+$ $\left(x > -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x+\frac{\pi}{6} > 0\right)$

Donc, par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}}\frac{\sin(x)}{x+\frac{\pi}{6}} = -\infty$

1 Limites du type $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2-x+1}}$

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to1} 2x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} x-1 = 0^+$

Donc, par quotient; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}\frac{2x}{x-1} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}}\sqrt{\frac{2x}{x-1}} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{4x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2-x+1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

2 Limite d'une fonction trigonométrique au voisinage de zéro

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \frac{1-\cos(2x)}{\frac{1}{4}(2x)^2} = 4\left(\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right)$

On pose : $X = 2x$

$\lim\limits_{x\to0} X = \lim\limits_{x\to0} 2x = 0$ (donc $x\to0 \Rightarrow X\to0$)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} = \lim\limits_{X\to0}\frac{1-\cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$

donc : $\lim\limits_{x\to0} 4\left(\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}\right) = 4\times\frac{1}{2} = 2$

D'où : $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$

2. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right[-\{0\}$

$\frac{\tan 3x}{\sin x} = \frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3x}{\sin x} = 3\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$ donc, par inverse; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x} = \lim\limits_{X\to0}\frac{\tan X}{X} = 1$ (avec $X = 3x$)

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to0} 3\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right) = 3$

D'où : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin x} = 3$

3. On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, donc : $\sin x = \cos x \tan x$

d'où : $\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{\tan x-\cos x\tan x}{x^3}$

$= \frac{\tan x}{x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

comme : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\left(\frac{1-\cos}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

3 Limite d'une fonction trigonométrique en un point différent de zéro

Calculer : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

On effectue un changement de variable.

On pose : $X = x-1$

$\lim\limits_{x\to1} X = \lim\limits_{x\to1}(x-1) = 0$,

donc : $x\to1 \Rightarrow X\to0$

$\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \frac{\sin(x-1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

$= \frac{\sin X}{X}\times\frac{1}{X+2}$

$\lim\limits_{X\to0}\frac{\sin X}{X} = 1$ et $\lim\limits_{X\to0}\frac{1}{X+2} = \frac{1}{2}$

Donc, par produit, $\lim\limits_{X\to0}\left(\frac{\sin X}{X}\times\frac{1}{X+2}\right) = \frac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

8 Limites et ordre

Propriété

Soit a et ℓ deux réels et $I=[a;+\infty[$.

Soit f, u et v des fonctions numériques définies sur I.

1) Si $\begin{cases}\bullet (\forall x\in I)\,;u(x)\le f(x)\\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si $\begin{cases}\bullet (\forall x\in I)\,;u(x)\ge f(x)\\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

3) Si $\begin{cases}\bullet (\forall x\in I)\,;|f(x)-\ell|\le u(x)\\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$

4) Si $\begin{cases}\bullet (\forall x\in I)\,;u(x)\le f(x)\le v(x)\\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=\ell\end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$

Remarque

Ces propriétés restent valables si on calcule la limite en $-\infty$ ou en a ou à droite en a ou à gauche en a.

Exemples :

1. **Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\sin^2x)$ **:**

On ne peut pas calculer directement cette limite, car la fonction $x\mapsto\sin^2x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

On a : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\sin^2x\ge0$, donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;2x+\sin^2x\ge2x$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\sin^2x)=+\infty$ (d'après la propriété (1) où $u(x)=2x$).

2. On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{3x+\sin x}{x+1}$:

Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

Soit x un réel de $]0;+\infty[$

$$|f(x)-3|=\left|\frac{3x+\sin x}{x+1}-3\right|=\left|\frac{3x+\sin x-3x-3}{x+1}\right|=\left|\frac{\sin x-3}{x+1}\right|$$

Or $|\sin x-3|\le|\sin x|+3\le1+3\le4$ et $|x+1|=x+1$ (car $x>0$)

Donc : $\dfrac{|\sin x-3|}{|x+1|}\le\dfrac{4}{x+1}$,

D'où : $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;|f(x)-3|\le\dfrac{4}{x+1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$,

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ (d'après la propriété (3) avec $\ell=3$ et $u(x)=\dfrac{4}{x+1}$)

1 Utiliser la propriété (1) (Limite et ordre)

Calculer : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3+\cos^2x}{(x-1)^2}$

Soit x un réel différent de 1.

On a : $0\le\cos^2x\le1$

donc : $3\le3+\cos^2x\le4$

or $(x-1)^2>0$, donc :

$$\frac{3}{(x-1)^2}\le\frac{3+\cos^2x}{(x-1)^2}\le\frac{4}{(x-1)^2}$$

on a : $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+$

donc : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3}{(x-1)^2}=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3+\cos^2x}{(x-1)^2}=+\infty$

2 Utiliser la propriété (4) (Limite et ordre)

Calculer $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$:

Soit x un réel non nul,

on a : $-1\le\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le1$ et $x^2\ge0$

donc : $-x^2\le x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x^2$

or $\lim\limits_{x\to0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

3 Utiliser la propriété (1) et (2)

1. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$.

2. Calculer les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}$

b $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2-\cos x}$

c $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$

1. Montrons que: $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$

Soit x un réel,

$-1\le\cos x\le1\Rightarrow-1\le-\cos x\le1$

$\Rightarrow1\le2-\cos x\le3$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$

2. a Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}$

$x\to+\infty$, donc : $x>0$

On a : $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$ (d'après 1)

Donc : $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2-\cos x}\le x$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$

Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}=+\infty$

b Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2-\cos x}$

$x\longrightarrow-\infty\Longrightarrow x<0$

$\Longrightarrow x^3<0$

On a : $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$ (d'après 1)

Donc : $\dfrac{x^3}{3}\ge\dfrac{x^3}{2-\cos x}\ge x^3$ pour tout $x\in\mathbb{R}^-$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3}=-\infty$, alors

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2-\cos x}=-\infty$

c Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$

On a : x tend vers $+\infty$, on peut supposer $x>1$

$(\forall x\in]1;+\infty[)$; $-1\le\cos x\le1$, donc

$0<-1+x\le x+\cos x\le1+x$

or : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le1$

Donc, par produit membre à membre, on a:

$(\forall x\in]1;+\infty[)$; $\dfrac{-1+x}{3}\le\dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}\le1+x$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+x}{3}=+\infty$, alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}=+\infty$

EXERCICE RÉSOLU 1 Limite du type $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ où $a>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-1}+x$

Méthode : Pour calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$

On commence par un calcul direct pour voir si c'est une forme indéterminée ou non :

▸ Si $\alpha<0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=+\infty$

▸ Si $\alpha>0$, dans ce cas obtient une forme indéterminée du type « $(+\infty)+(-\infty)$ ».

Alors, deux cas se présentent :

1ére cas : $-\sqrt{a}+\alpha\neq0$, dans ce cas, il suffit de factoriser par x :

$$\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta$$
$$=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha x+\beta$$
$$=-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha x+\beta$$
$$=x\left[-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right]$$

$x\to-\infty$ donc $x<0$ d'où $|x|=-x$

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right]=-\sqrt{a}+\alpha$

▸ Si $-\sqrt{a}+\alpha<0$, alors par produit:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=+\infty$

▸ Si $-\sqrt{a}+\alpha>0$, alors par produit:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta=-\infty$

2éme cas : $-\sqrt{a}+\alpha=0$, dans ce cas on multiplie et on divise par le conjugué puis, si nécessaire, on factorise par x au numérateur et au dénominateur puis simplifier par x et passer à la limite.

1 Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1)$

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}5x^2=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}=+\infty$

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1=+\infty$

2 Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « $(+\infty)+(-\infty)$ »

(car : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$)

ici : $a=5$ et $\alpha=2$ et $x\to-\infty$

et $-\sqrt{a}+\alpha=-\sqrt{5}+2\neq0$

il suffit dans ce cas de factoriser par x :

$(\forall x\in]-\infty;-1])$; $\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1=x\left[-\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right]$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)=-\sqrt{5}+2\end{cases}$$

et $-\sqrt{5}+2<0$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1)=+\infty$

3 Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-1}+x$

Directement, c'est une forme indéterminée du type « $(+\infty)+(-\infty)$ »

ici, $a=1$ et $\alpha=1$ et $x\to-\infty$,

$-\sqrt{a}+\alpha=-\sqrt{1}+1=0$.

Dans ce cas, on multiplie et on divise par le conjugué :

$$\sqrt{x^2+x-1}+x=\frac{(\sqrt{x^2+x-1}+x)(\sqrt{x^2+x-1}-x)}{\sqrt{x^2+x-1}-x}$$
$$=\frac{x^2+x-1-x^2}{\sqrt{x^2+x-1}-x}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}-x}$$

sous cette forme, c'est encore une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » il suffit dans ce cas de factoriser par x au numérateur et au dénominateur, puis simplifier par x :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-1}-x}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$
$$=\frac{x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)}$$
$$=-\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-1}+x=-\frac{1}{2}$

EXERCICE RÉSOLU 2 Limite du type $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(a)=g(a)=0$

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

Méthode : Pour calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ dans le cas où $f(a)=g(a)=0$, on applique ce qui suit:

▸ Si f et g sont des fonctions polynômes, on factorise $f(x)$ et $g(x)$ par $(x-a)$ en utilisant la division euclidienne par $(x-a)$ (ou toute autre méthode possible suivant les cas).
puis on simplifie par $(x-a)$.

▸ Si f ou g est une fonction irrationnelle, alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par son conjugué pour obtenir une factorisation par $(x-a)$ puis on simplifie par $(x-a)$.

1 Calculons : $\lim\limits_{x\to2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

On pose : $P(x)=-x^3+2x^2+x-2$ et $Q(x)=-x^2+5x-6$

On a : $P(2)=0$ et $Q(2)=0$

On peut donc factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ par $(x-2)$:

$Q(x)=(x-2)(-x+3)$ et $P(x)=(x-2)(1-x^2)$

Soit x un réel tel que, $x\neq3$ et $x\neq2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-2)(1-x^2)}{(x-2)(-x+3)}=\frac{1-x^2}{-x+3}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to2}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1-x^2}{-x+3}=-3$

2 Calculons : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

On pose : $g(x)=\sqrt{x}-1$ et $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Les fonctions f et g sont irrationnelles et $f(1)=g(1)=0$, dans ce cas, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $f(x)$ et de $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\frac{[(2x-1)-(x^2-x+1)](\sqrt{x}+1)}{(x-1)[\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}]}$$
$$=\frac{(-x^2+3x-2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)[\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}]}$$
$$=\frac{(x-1)(-x+2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)[\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}]}$$
$$=\frac{(-x+2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+x-1}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to1}(-x+2)(\sqrt{x}+1)=2$

et $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+x-1}=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\frac{(-x+2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+x-1}}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=1$

EXERCICE RÉSOLU 3 Limite du type $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax+b}+P(x))$ où $a>0$ et $P(x)$ polynôme de degré supérieur ou égale à 1.

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}+2x^4-x-1)$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2)$

EXERCICES RÉSOLUS

Méthode : Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{ax+b}+P(x)$ où $a>0$ et $P(x)$ polynôme de degré supérieur ou égal à 1.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax+b}+P(x))=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{ax+b}=+\infty$)
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=-\infty$, alors on obtient une forme indéterminée du type « $(+\infty)+(-\infty)$ ». Pour lever cette indétermination, il suffit de factoriser par x ou par le terme du plus haut degré de $P(x)$:

$$\sqrt{ax+b}+P(x)=x\left(\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+\frac{P(x)}{x}\right);(x>0)$$

1 Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}+2x^4-x-1)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}=+\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty}x+5=+\infty$).

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4)=+\infty$

Donc, par somme,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}+2x^4-x-1)=+\infty$

2 Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2)=-\infty$

On obtient alors une forme indéterminée du type « $(+\infty)+(-\infty)$ »

Méthode 1 : Factorisation par x

Soit $x>\frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2 &= \sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(-3x+1+\frac{2}{3}\right)\\ &=|x|\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x\left(-3x+1+\frac{2}{x}\right)\\ &=x\left[\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-3x+1+\frac{2}{x}\right]\end{aligned}$$

On a : $x>0$, donc : $\sqrt{x^2}=|x|=x$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x+1+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-3x+1+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. Donc, par produit:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left[\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-3x+1+\frac{2}{x}\right]\right)=-\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2)=-\infty$

Méthode 2 : Factoriser par le terme du plus haut degré de $P(x)$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2\\ &=-3x^2\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{3x}-\frac{2}{3x^2}\right]\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{3x}-\frac{2}{3x^2}\right]=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x-1}-3x^2+x+2)=-\infty$

EXERCICE RÉSOLU 4 Limite d'une fonction trigonométrique en un point différent de zéro

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$

On utilise un changement de variable:

On pose: $X=x-\frac{\pi}{3}$

On a: $x\to\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow X\to 0$

Donc:

$$\begin{aligned}2\cos x-1&=2\cos\left(X+\frac{\pi}{3}\right)-1\\ &=2\left(\cos X.\cos\frac{\pi}{3}-\sin X.\sin\frac{\pi}{3}\right)-1\\ &=\cos X-\sqrt{3}\sin X-1\end{aligned}$$

D'où: $$\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos X-\sqrt{3}\sin X-1}{X}=\frac{\cos X-1}{X^2}.X-\sqrt{3}\frac{\sin X}{X}$$

Puisque: $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\cos X-1}{X^2}=-\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{X\to0}X=0$

et $\lim\dfrac{\sin X}{X}=1$

Alors $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}$

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 La fonction $x\longmapsto\dfrac{|x|}{x}$ admet-elle une limite en zéro?

2 Est-il nécessaire que a appartienne à l'ensemble de définition de f pour calculer $\lim\limits_{x\to a}f(x)$?

3 Recopier et compléter le tableau suivant :

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	-5	1	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}g(a)$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	0^-
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$				

4 Sachant que $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ quelle est la limite de f en a ?

5 Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{x}$

6 Citer les formes indéterminées pour le calcul des limites.

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment peut-on calculer la limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini?

2 Comment peut-on calculer la limite d'une fonction rationnelle quand x tend vers l'infini?

3 Comment peut-on calculer:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dans le cas: $P(a)=Q(a)=0$?

4 Comment peut-on calculer: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$?

5 Comment peut-on calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)$?

6 Comment peut-on calculer:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$ dans le cas $a>0$; $\alpha<0$ et $\sqrt{a}+\alpha\neq0$?

7 Comment peut-on calculer:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta)$ dans le cas $a>0$; $\alpha>0$ et $-\sqrt{a}+\alpha=0$?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+1}{(2x-1)^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3}{4}$	$\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3}{2}$
2 $g(x)=\cos x-\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$
3 $h(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$	$\lim\limits_{x\to2}h(x)=0$	$\lim\limits_{x\to2}h(x)=2$	$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=1$
4 Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, alors :	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(f(x))^2}=+\infty$	(C_f) se rapproche de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{(f(x))^4}=-\infty$
5 Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, alors :	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^2=+\infty$
6 Si la courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y=2$ quand x tend vers $+\infty$, alors :	$\lim\limits_{x\to2}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=0$

Exercices d'application

Limites de fonctions polynômes

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+5)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^5+x^2+2x+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^6+5x^3+x-3)$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}(x^2+2x-1)$
2. $\lim\limits_{x\to-2}\left(-\frac{1}{2}x^2-3x+1\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(\sqrt{2}x^3-3x^2-x)$
4. $\lim\limits_{x\to-1}(2x-1)(x^2-x-2)$

Exercice 3 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)(x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+1)^3$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+(x^2-1)(1-3x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x(x-1)+(2x-1)^2)$

Limites de fonctions rationnelles

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^5+5}{x^3+4}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-x+1}{-x^3+x-6}$
3. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x^3-x+7}{2-x^3}$
4. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x-4}{x^2-x+1}$

Exercice 5 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{3x^2-x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)^2x}{4x^3+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+1}-x\right)$
4. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x-x^4+x(1-5x^4)}{(x^2+1)(2-3x^3)}$

Exercice 6 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^3-5x-22}{x^2-x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x+\sqrt{3}}{3-x^2}$

Limite à droite - Limite à gauche

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x+3}{x-2}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x+3}{x-2}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x+3}{1-x^2}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^3-1}{x^2-x}$

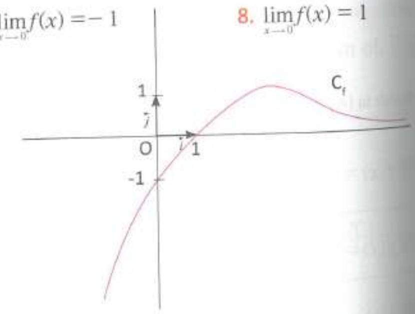
Exercice 8 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{3x-2x^2}{x-x^3}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{4x^2-x+5}{x-2}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}}\frac{3x^2-x-1}{2x-1}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{3+x}{x^3}\right)$

Lecteur graphique de limites

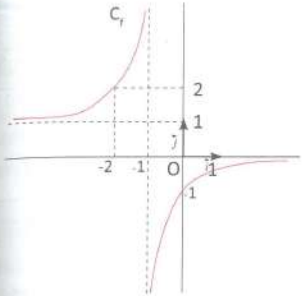
Exercice 9 : La figure suivante représente la courbe d'une fonction f. Par lecture graphique, déterminer l'exactitude des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
6. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$
7. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$
8. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$



Exercice 10 : La figure suivante représente la courbe d'une fonctions f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$. Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-1}$



Limites de fonctions définies par morceaux

Exercice 11 : On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x^3-\frac{1}{8}\ ;\ x>\frac{1}{2}\\ f(x)=1-2x\ ;\ x\le\frac{1}{2}\end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}}f(x)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}}f(x)$

Exercice 12 : On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-2}\ ;\ x\ge1\\ f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}\ ;\ x<1\end{cases}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)$

Limites de fonctions contenant des valeurs absolues

Exercice 13 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-3}|2x+1|$
2. $\lim\limits_{x\to1}|2x^3-5x^2+7x-3|$
3. $\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{x-1}{3x+5}\right|$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x-5}{|2x-1|}$

Exercice 14 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}|x^3-5x+1|$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{-2x^4+x-1}{4-x^3}\right|$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}|-3x^7+3x^2+2|$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{5x^2-7x^5+x-1}{x^5+x^4-3x+2}\right|$

Exercice 15 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to3}(x|x-1|+5)$
2. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2|x-1|+3}{|4x^2-1|}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{|-x+1|}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|-3x}{|x+5|}$

Limites de fonctions trigonométriques

Exercice 16 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(3x)}{x\sin(2x)}$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

Exercice 17 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-3}{\sin x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}(\tan x-\cos x\sin x)$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\sqrt{5x}}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

Exercice 18 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\frac{1+\sin x}{\cos x}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\x<-\frac{\pi}{2}}}\tan x$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2x}{\sin x}\right)$

Limites et ordre

Exercice 19 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$(\forall x\in[0;+\infty[)\ ;\ x^2-x\le f(x)\le x^2+x$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 20 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=2+\pi x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$

1. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ |f(x)-2|\le\pi x^2$
2. En déduire : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

Exercice 21 : En utilisant un encadrement convenable, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\cos x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^2}-\sqrt{2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x-x+1}{x}$

Exercice 22 : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par :
$f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$;

1. Montrer que :
$(\forall x\in[2;+\infty])$; $|f(x)-3|\leq\dfrac{8}{x}$
2. En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Limites de fonctions irrationnelles

Exercice 23 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+3x-1)$
2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4x-3}{\sqrt{x}+2}$
3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-5\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to9}\left(\dfrac{\sqrt{x}+x^2}{1-x}-\sqrt{x}\right)$

Exercice 24 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+3x^2-x+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-2x^2+5-\sqrt{x})$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-2x+x^2}$

Exercice 25 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+x-3x^2+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}-x^3+\dfrac{1}{2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(3x^2-1)\sqrt{x})$.

Exercice 26 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3x}{2-3\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+\sqrt{x}}{1-5x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x-2}{x^2+3x-1}$

Exercice 27 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-5}$

Exercice 28 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x\sqrt{2x-1})$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{5-4x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x+1}\right)\sqrt{3x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2}{x}\sqrt{3-\dfrac{1}{2}x}$

Exercice 29 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+\sqrt{7x-1})$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-\sqrt{1-2x})$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1-\sqrt{2-9x})$

Exercice 30 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3. $\lim\limits_{x\to25}\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$
4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

Exercice 31 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x+1}-3}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}\left(\dfrac{-3x+2}{3-\sqrt{x+4}}\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}\dfrac{x+1}{\sqrt{5-x}}$

Exercice 32 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\dfrac{-\sqrt{x+3}}{x+3}$

Exercice 33 :Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+x-5}-x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2-3x+1}+x)$

Exercices de renforcement

Exercice 34 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx^3+(m-1)x^2-3x+5)$

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m.

2. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(ax^3+bx^2+2x-1)$

Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a et b.

Exercice 35 : Calculer les limites suivantes et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m :

1. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3mx^4-5x^3-mx+5}{(2m-1)x^3-x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m(x-1)^2+(m-1)(x^3-3x)}{3x^2-5x+7}$

Exercice 36 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{|x-1|}-\dfrac{1}{|x|}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{(x-1)^2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^4-1\right]\right)$

Exercice 37 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8}\right)$
2. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^6-a^6}{x^4-a^4}$

Exercice 38 : Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction numérique f et calculer les limites de f aux bornes de D_f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+2}$
2. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2(x-1)}$
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2+x-2}$
4. $f(x)=\dfrac{3x-4}{|x|-1}$

Exercice 39 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. **a)** Montrer que :
$(\forall x\in D_f)$; $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$,

b) En déduire : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-x)$

Exercice 40 : On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+2}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. **a)** Vérifier que :
$(\forall x\in D_f)$; $f(x)=2x-1-\dfrac{3}{x+2}$

b) En déduire : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-(2x-1))$

Exercice 41 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3x+3}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Exercice 42 : Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^3}\ ;\ x>1\\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}\ ;\ x\leq1\end{cases}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 43 : On considère la fonction numérique f définie par :

$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2+1}{3-x}\ ;\ x\leq2\\ f(x)=1-ax^2\ ;\ x>2\end{cases}$ où a est un nombre réel.

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a.
3. Déterminer la valeur de a pour que :
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)$.

Exercice 44 : Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 3} \ ; \ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - 1} \ ; \ x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Exercice 45 : 1. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2 - \cos x} \leq 1$

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{2 - \cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \cos x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \cos x}{2 - \cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + \sin^2 x}{2 - \cos x}$

Exercice 46 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x + \cos x}{x + 1}$

1. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$; $|f(x) - 2| < \dfrac{3}{x}$
2. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 47 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} + x}$

1. Montrer que : $\left| f(x) - \dfrac{1}{2} \right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$
2. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Limites de fonctions trigonométriques

Exercice 48 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{6x - \pi}$
3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$
4. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$

Exercice 49 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{3x - \pi}$
3. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{6}} \left(\dfrac{\sqrt{3}\tan x + 1}{\pi + 6x} \right)$
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \dfrac{3x + \pi}{\sqrt{3} + \tan x}$

Limites de fonction irrationnelles

Exercice 50 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2 - \dfrac{1}{3}} \right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 - 5})$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} + 2x)$

Exercice 51 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x + \sqrt{x^2 + 4} + 2)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 1)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x + \sqrt{4x^2 + x - 3})$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{3}x + 2 + \sqrt{\dfrac{x^2}{9} - 2x + 3} \right)$

Exercice 52 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - x + 3)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 5x + \sqrt{2x^2 + 3x - 7})$

Exercice 53 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{-x + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{2x^2 - 3}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x + 2} - 1}{x - 3} \right)$

Exercice 54 : On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt{2x - \sqrt{x}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{4}}} \dfrac{f(x)}{x - \frac{1}{4}}$

Exercice 55 : Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \left| \dfrac{x^2 + x}{x} \right| \ ; \ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 56 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f
2. Vérifier que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$
3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x)$

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 57 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 2[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1)\sin\left(\dfrac{1}{x - 1}\right) \ ; \ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que par tout $x \in]0; 2[$, $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$
2. En déduire : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Exercice 58 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$ où a et b sont des nombres réels non nuls.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 59 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{mx^2 + x - 1}{x - 2}$. Où m est un paramètre réel.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, et calculer les limites de f aux bornes de D_f (Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).
2. Déterminer m pour que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ soit un réel.

Exercice 60 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \dfrac{ax^3 + (a-2)x^2 + (a-1)x + (a-3)}{x(x-2)(x-3)}$$

où a est un paramètre réel.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f (Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a).

Exercice 61 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sqrt{3} + 2\sin x}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{2\cos x - \sqrt{2}}$
3. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{8}} \dfrac{\cos 4x}{\sqrt{2}\cos 2x - 1}$
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$

Exercice 62 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{1 - \tan x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1}{x - 2}$
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x + \sin x}{\tan x + 1}$

Exercice 63 : Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$$

Exercice 64 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to a} (a^2 - x^2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$; où a est en nombre réel non nul.
2. $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)\tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

Exercice 65 : Calculer les limites suivantes en utilisant un encadrement convenable:

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \cos^2 x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} + \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\cos 2x}{\sqrt{x} + 3x^2}$

Exercice 66 : On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty]$ par : $f(x) = \dfrac{4\sin x + 3x}{x - 1}$

1. Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[$; $|f(x) - 3| \leq \dfrac{7}{x - 1}$
2. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 67 : On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2 + \cos x}{1 + \sqrt{x}}$

1. Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $|f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 68 : Soit f une fonction numérique telle que :
$(\forall x \in]1;+\infty[)$; $\frac{2x+\cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{2x+3}{x-1}$
1. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Peut-on calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$?

Exercice 69 : En utilisant un encadrement convenable, calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4+3\sin x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\sin x}{2+\sin x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4-\sin x}{\cos x+3}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{2\cos x-3}$

Exercice 70 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$
3. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x^2+x}$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x}$

Exercice 71 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$
4. $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ x<0}} \frac{\sqrt{x^2-x}-x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$

Exercice 72 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right)$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+x} - \frac{2-x}{\sqrt{x}}\right)$

Exercice 73 :
Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}-1}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2+3}}$

Exercice 74 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2-\sqrt{x}} - x^2 + x\right)$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 75 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}-2x\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Exercice 76 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-x^2+x+4}{x-3}$

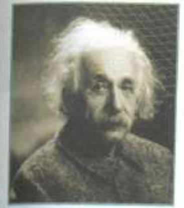
Exercice 77 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{-2x+5}-x^2+4x-5}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x+6}+x^2-3x-3}{2x+1}$

Exercice 78 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

Exercice 79 : Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1-\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

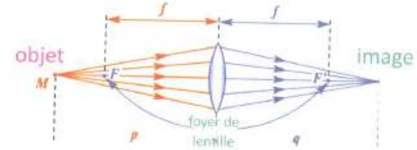
Exercice 80 : **Relativité, vitesse et masse.**
La théorie de la relativité «d'Albert Einsteine» montre que la masse d'un objet en mouvement dépend de sa vitesse par la relation :
$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}}}$
où m_0 est la masse de cet objet au repos :
(C'est-à-dire à $v = 0$)

c est la célérité (vitesse) de la lumière :
$c \simeq 300000 km/s$.
1. Calculer la limite : $\lim\limits_{\substack{v \to c \\ v<c}} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}}}$
2. Interpréter le résultat obtenu.




Exercice 81 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2. On considère les points $A(2;0)$ et $B(0;2)$.
(D) est la droite tangente au cercle (C) en A.
Soit M un point variable sur l'arc $\widehat{AB}$ du cercle (C).
Soit T le point d'intersection des droites (D) et (OM).
On pose $\widehat{AOM} = x$ (en radian) et $AT = f(x)$
1. Faire une figure.
2. Dans quel intervalle varie x ?
3. Déterminer, par lecture graphique, les limites : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$.
4. a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
b) Vérifier les résultats de la question 3).

Exercice 82 : **L'optique et limites**
Pour une lentille convexe dont la distance focale est f, la distance p d'un objet au centre et la distance q de son image au centre sont reliées par la relation : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$.
1. Exprimer q en fonction de p et donner l'ensemble de définition de la fonction $h: p \longmapsto q$.
2. Calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} h(p)$ et $\lim\limits_{p \to f^+} h(p)$
Interpréter les résultats obtenus.



Exercice 83 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soit Ω le point de coordonnées $(3;1)$.
Soit M un point d'abscisse x mobile sur l'axe des abscisses.
Soit M' le point d'intersection de la droite (ΩM) avec l'axe des ordonnées. On pose $f(x) = y_{M'}$ où $y_{M'}$ est l'ordonnée du point M'.
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Conjecturer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$
3. a) Montrer que : $f(x) = \frac{x}{x-3}$
b) Vérifier les résultats des questions 1) et 2).

Les bornes réponses des questions de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	1 / 2	2	2 / 3	1 / 3	2 / 3	2 / 3				

UTILISATION DES LOGICIELS

Utiliser une calculatrice programmable

Objectifs : Une calculatrice programmable est dotée de plusieurs fonctions, par exemple :

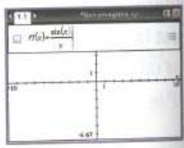
- Le calcul numérique ;
- Le calcul formel (Factorisation, développement, ...) ;
- Résolution d'équations, d'inéquations et systèmes ;
- Statistiques ;
- Limites, dérivation et représentations graphiques ...

Mode d'emploi

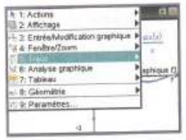
I Pour représenter la courbe de la fonction : $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$, on suit les étapes suivantes :

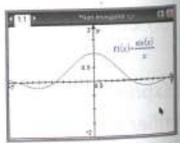
1. En appuyant sur la touche **on**, on obtient l'écran Menu

2. On choisit l'icône **Graphiques** et on écrit l'expression $\frac{\sin x}{x}$ (pour écrire $\sin$, on peut utiliser le raccoursi =trig)

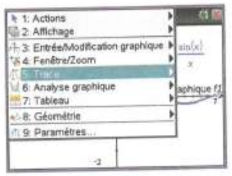


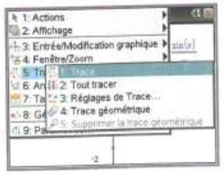
3. Pour ajuster la fenêtre graphique (encadrements de x et de y), on appuie sur menu, puis on choisit 4 : Fenêtre/Zoom ▹ ensuite on choisit 1: Réglages de la fenêtre puis on appuie sur entrer on obtient alors la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$.

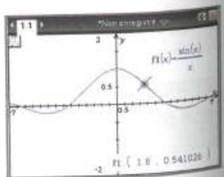




4. Pour lire graphiquement les coordonnées d'un point de la courbe, on appuie sur menu , on choisit 5:Trace ▹ puis 1:Trace on appuie sur entrer et on déplace le curseur * à l'aide des flèches. Au bas de l'écran s'affichent les coordonnées du point.

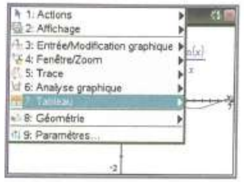


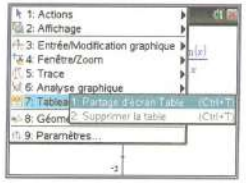




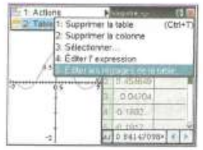
II Pour obtenir un tableau de valeur de $\frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0, on suit les étapes suivantes :

1. Après avoir saisi l'expression de la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$, on appuie sur les touches Ctrl et T, une fenêtre s'ouvre :



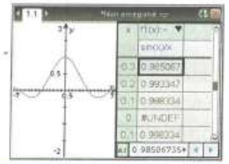


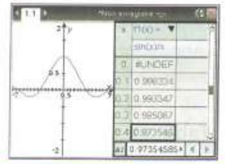
2. Pour choisir la valeur de départ et le pas, on appuie sur la touche menu la fenêtre 1: Action ▹ / 2: Table des valeurs ▹ s'ouvre, choisir 2: Table de valeurs ▹ appuyer ▹ puis choisir 5: Editer les réglages de la table ... appuyer sur entrer



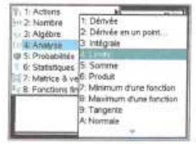
une fenêtre s'ouvre, taper $-0,3$ (par exemple) comme début et 0,1 pour le pas (incrément de la table) puis appuyer sur entrer et le tableau de valeurs s'affiche ; on peut défiler vers le bas (ou vers le haut) pour visualiser les autres valeurs.

Remarque : pour $x = 0$, la calculatrice affiche ⌿UNDEF. Cela veut dire que l'image de 0 est indéfinie ; la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en o.



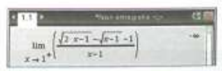


III Pour calculer la limite : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} - 1}{x-1}$ de l'exercice 73, on suit les étapes suivantes :



1. Dans l'ecran menu, on choisit A calculs (où 1 nouveau puis 1: ajouter calculs) on appuie sur menu, on choisit 4: analyse ▹ puis 4:limite et on appuie sur entrer: on obtient la fenêtre : .....

On écrit l'expression de la limite puis on appuie sur entrer et le résultat s'affiche immédiatement.



UTILISATION DES LOGICIELS

Calculatrice scientifique non programmable

1 Calcul classique (Mode 1: COMP, taper1) :

Fractions irreductibles $\frac{\square}{\square}$, racine carré $\sqrt{\square}$, puissance $x^{\square}$, $\cos$, $\sin$ $\tan$.

(Passer d'une forme irréductible à une forme décimale et inversement $S \Leftrightarrow D$).

Exemples : ▸ $\frac{3}{5}-\frac{7}{2}-\frac{13}{6}$ donne $-\frac{181}{40}$ en appuyant sur $S \Leftrightarrow D$, on obtient $-4,525$.

▸ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

▸ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (après avoir choisi le mode radian en appuyant sur SHIFT MODE 4:Rad 4.

2 Résolution d'équations du second degré ou 3ième degré :

Appuyer sur MODE , puis choisir 5:EQN en appuyant sur 5 une fenêtre s'ouvre, choisir $3{:}ax^2+bx+c=0$ en appuyant sur 3 , saisir alors les valeurs de a, b et c puis appuyer sur = et les solutions s'affichent appuyer encore sur = si nécessaire pour afficher la 2ième solution (dans le cas $\Delta > 0$).

3 Résolution d'un système de 2 équations de 1er degré à 2 inconnues :

Appuyer sur MODE , puis choisir 5:EQN en appuyant sur 5 , une fenêtre s'ouvre, choisir $1{:}a_nx+b_ny=c_n$ en appuyant sur 1 ;saisir alors les valeurs de a, b, c, a', b' et c' (en appuyant sur = après chaque saisie) puis appuyer sur = et les solutions s'affichent.

4 Table de valeurs d'une fonction :

Appuyer sur MODE , puis choisir 7:TABLE , écrire ensuite l'expression de la fonction f, (pour la variable X, appuyer sur ALPHA ensuite , un message s'affiche : «Start?» (qui veut dire saisir la valeur de départ (début) après avoir tapé une valeur, appuyer sur = , le message «END?» s'affiche (qui veut dire: donner la valeur finale) ; saisir une valeur qui doit être plus grande que la première puis appuyer sur = , le message «Stept?» s'affiche (qui veut dire: donner le pas), saisir une valeur convenable, puis appuyer sur = , la calculatrice affiche un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle choisi (utiliser les flèches ▼ ou ▲ , pour défiler vers le bas ou vers le haut).

Chapitre 9

LEIBNIZ

C'est grâce au mathématicien LEIBNIZ, que le concept de la dérivation a vu le jour. Il a surtout centré ses recherches sur l'infiniment petit.

Objectifs de la leçon

- Connaître le nombre dérivé d'une fonction numérique en un point.
- Être capable d'interpréter le nombre dérivé géométriquement.
- Déterminer l'équation de la tangente à une courbe en un point.
- Approcher une fonction dérivable en un point par une fonction affine.
- Être capable d'étudier la dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0 et d'interpréter ces résultats géométriquement.
- Connaître une tangente ou une demi-tangente verticale.
- Connaître la fonction dérivée.
- Utiliser les opérations sur les fonctions dérivées.
- Utiliser la fonction dérivée ainsi que son signe pour étudier les variations d'une fonction.
- Utiliser la fonction dérivée pour déterminer les extremums d'une fonction.
- Déterminer les dérivées successives d'une fonction.
- Utiliser la fonction dérivée pour résoudre des problèmes liés à la vie courante.
- Connaître la solution générale de l'équation différentielle $y''+\omega^2y=0$

Le contenu

Capacités attendues

- Approcher une fonction au voisinage de x_0 par une fonction affine.
- Connaître que le nombre dérivé d'une fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de cette fonction au point d'abscisses x_0.
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles.
- Maitriser les techniques de calcul d'une fonction dérivée.
- Déterminer une équation d'une tangente à une courbe en un point et la construire.
- Déterminer la monotonie de la fonction à partir du signe de sa fonction dérivée.
- Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.
- Résoudre des problèmes d'application sur les extremums.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une droite

1. On considère les figures (1) et (2) ci-dessous.

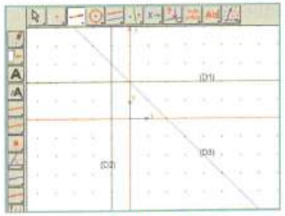


figure 1

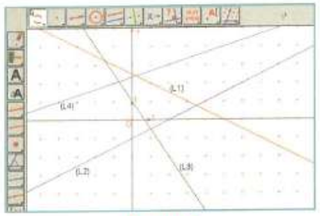


figure 2

a Par une lecture graphique de la figure (1), déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).

b Dans la figure (2), déterminer parmi les droites (L_1) ; (L_2) ; (L_3) et (L_4) celles qui ont un coefficient directeur positif et celles qui ont un coefficient directeur négatif.

c Par une lecture graphique de la figure (2), déterminer le coefficient directeur de chacune des droites (L_1) et (L_4).

2. On munit le plan d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a Déterminer le coefficient directeur de la droite (D) qui passe par les points $A(3;5)$ et $B(2;3)$.

b Déterminer en fonction de h le coefficient directeur de la droite (EM) telle que : $E(3;2)$ et $M(h+3;4)$ où $h \in \mathbb{R}^*$.

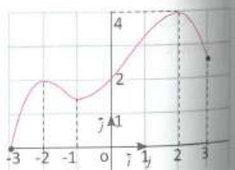
Info :
(D) est une droite dans un repère et $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ deux points de (D) où $x_A \neq x_B$.
La droite (D) a pour coefficient directeur le réel: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Activité 2 Variations d'une fonction - Extremums d'une fonction

La figure ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Déterminer les extremums de la fonction f sur $[-3;3]$.



Activité 3 Taux de variation d'une fonction - Reconnaître des points de la courbe d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. a Déterminer le taux de variation de la fonction f entre 1 et 2.

b Déterminer le taux de variation de la fonction g entre 1 et 4.

2. Déterminer en fonction de h le taux de variation des fonctions f et g entre h et $1+h$, où $h \in \mathbb{R}^{*+}$.

3. Déterminer parmi les points suivants ceux qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction f :
$A(-1;3)$, $B(1;1)$, $C(\sqrt{2};3)$ et $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

4. Déterminer les valeurs de a et b sachant que les points $E(a;2)$ et $F(1;b)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f.

5. Déterminer la relation entre les réels positifs α et β sachant que le point $M(\alpha;\beta)$ appartient à la courbe représentative de la fonction g.

Info :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
$x_1 \in I$, $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$.
Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 4 Vitesse instantanée et nombre dérivé

Une expérience en physique a montré que la chute libre d'un corps sans vitesse initiale (c'est-à-dire $V_0 = 0$ à l'instant $t = 0$) a un mouvement uniforme et défini par la fonction temps : $d = f(t) = 5t^2$ (où t en seconde et $d = f(t)$ en mètre).

1. Montrer que la vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ (où $h \neq 0$ et $t+h > 0$) est : $10t + 5h$.

2. Le mouvement du corps à l'instant $t = 0,5s$ a une vitesse donnée.
Le tableau suivant va vous approcher de la valeur de cette vitesse.

a Recopier et compléter le tableau suivant , sachant que $t = 0,5s$

h	-0,01	-0,001	-0,0001	0,0001	0,001	0,01
$t+h$						
vitesse moyenne entre t et $t+h$						

b En utilisant le tableau, conjecturer la limite de la vitesse moyenne quand h tend vers 0.

3. Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$, puis comparer cette limite au résultat de la question **2. b**

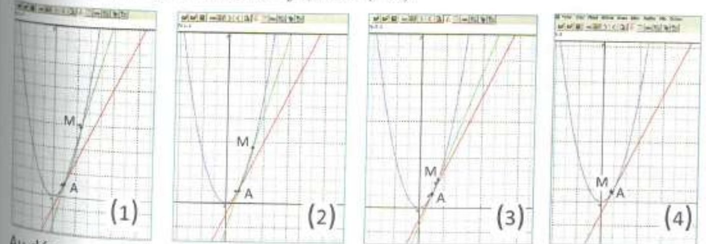
Le nombre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ s'appelle la vitesse instantanée du corps à l'instant $t = 0,5s$ et on l'appelle aussi le nombre dérivé de la fonction f au point $t_0 = 0,5$ et on écrit dans ce cas :
$f'(0,5) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$

Info :
La vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 $(t_1 \neq t_2)$ est le taux de variation de la fonction f entre t_1 et t_2 c'est-à-dire : $\dfrac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$

Info :
Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est un nombre réel, alors on dit que f est dérivable en x_0.
Le nombre $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ qui s'écrit aussi : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'appelle le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 et on le note : $f'(x_0)$

Activité 5 Tangente à une courbe en un point

Le ruban suivant comporte: la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x^2$; la droite (T) d'équation : $y = 2x - 1$ et la droite (AM), où $A(1;1)$ et M un point qui varie sur la courbe de la fonction f.(où $M \neq A$)



Au départ, on a construit la figure (1) en utilisant un logiciel mathématique, et à chaque fois qu'on varie la position du point M sur la courbe de f de façon à s'approcher du point A de plus en plus, on a obtenu les figures (2) ; (3) et (4).

On remarque que la droite (AM) est presque confondue avec la droite (T) chaque fois que le point M s'approche de plus en plus du point A.

1. Observer les figures précédentes, puis déterminer en fonction de h $(h \neq 0)$ le coefficient directeur de la droite (AM) où $M(1+h : f(1+h))$.
2. Déterminer le nombre dérivé de la fonction f en $x_0 = 1$.
3. **a** Lorsque le point M s'approche du point A, le nombre h s'approche de quel nombre?
b Donner la limite du coefficient directeur de la droite (AM) lorsque h tend vers 0.

▸ La droite (T) s'appelle la tangente à la courbe de la fonction f au point $A(1 ; f(1))$.

▸ Le coefficient directeur de la tangente (T) est le nombre dérivé de la fonction f en $x_0 = 1$

4. Vérifier qu'une équation de la droite (T) peut s'écrire sous la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Info :
Une équation de la tangente à la courbe de f au point $A(1 ; f(1))$ s'écrit sous la fome : $y = ax + b$ où a est le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$.

Activité 6 Approximation d'une fonction par une fonction affine

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$,
et soit g, k et ℓ les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = 3x - 2$; $k(x) = -x + 2$ et $\ell(x) = \frac{1}{2}(x+1)$.

1. Calculer $f(1)$; $g(1)$; $k(1)$ et $\ell(1)$.
2. Soit h un nombre réel, calculer: en fonction de h les expressions suivantes : $f(1+h)$; $g(1+h)$; $k(1+h)$ et $\ell(1+h)$

En utilisant le logiciel «Excel», on a obtenu le tableau suivant:

Microsoft Excel - Approximation affine.xls

	A	B	C	D	E	F	G
1	h	-0,1	-0,01	-0,0001	0,0001	0,01	0,1
2	f(1+h)-g(1+h)	0,029	0,000299	2,9999E-08	3,0001E-08	0,000301	0,031
3	f(1+h)-k(1+h)	-0,371	-0,039701	-0,00039997	0,00040003	0,040301	0,431
4	f(1+h)-l(1+h)	-0,221	-0,024701	-0,00024997	0,00025003	0,025301	0,281

En utilisant le tableau précédant, répondre aux questions suivantes :
a Parmi les valeurs contenues dans la colonne B, quelle est celle qui est proche de zéro?
b Même question pour les colonnes C, D, E, F et G.
c En utilisant l'une des fonctions affines g, h ou k, conjecturer la valeur qui peut remplacer $f(1+h)$ avec une marge d'erreur minime. (quand h tend vers 0).

3. Vérifier que : $g(1+h) = f'(1)h + f(1)$

Info :
La fonction affine g est une approximation de la fonction f au voisinage de 1 et on écrit:
$g(1+h) \simeq f(1+h)$
c'est-à-dire:
$(1+h)^3 \simeq 1 + 3h$

Activité 7 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \ ; \ x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5 \ ; \ x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = |x|(x-1)$$

1. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

▸ Dans ce cas on dit que la fonction f est dérivable à droite en 1.
▸ Le nombre 2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en 1, et on écrit : $f'_d(1) = 2$.

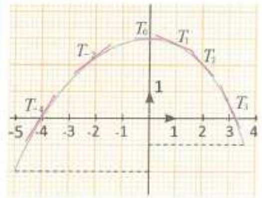
2. Calculer: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

À l'aide de la citation donnée à la question **1.**, exprimer le résultat obtenu et déterminer $f'_g(1)$.

3. **a** Calculer: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$.
b Est-ce que la fonction g est dérivable en 0?

Activité 8 Monotonie d'une fonction et signe du nombre dérivé

Dans la figure ci-contre on a : (C) est la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 4]$ et certaines tangentes à cette courbe (tracées en rouge).



1. **a** Dresser le tableau de variations de la fonction f.
b Que représente le nombre $f(0)$ pour la fonction f ?
c Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_0).
2. **a** Quel est le signe du coefficient directeur de toutes les tangentes (T_1); (T_2) et (T_3)?
b Quel est le signe du coefficient directeur des deux tangentes (T_{-2}) et (T_{-4})?
3. Soit (T) une tangente à la courbe (C) en un point M d'abscisse a tel que $a \in]-5 ; 4[$.

Conjecturer le signe de $f'(x)$ dans les deux cas suivants :
a $a \in]-5 ; 0[$; **b** $a \in]0 ; 4[$.

Activité 9 Introduire l'équation différentielle de type : $y'' + \omega^2 y = 0$.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(3x)$ et $g(x) = \sin(3x)$.

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) + 9f(x) = 0$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g est aussi une solution de l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.
3. Montrer que toute fonction, qui s'écrit sous la forme $x \longmapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$ où α et β sont des nombres réels, est une solution de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$.

On admet que les solutions de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$ où α et β sont des constantes.

LE COURS

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

1- Nombre dérivé

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

▸ On dit que la fonction f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$.

▸ Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a, et il est noté $f'(a)$.

On écrit : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (1)

Ou encore : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (2)

Info : On obtient l'écriture (2) en posant $x - a = h$ dans l'écriture (1).

– **Exemple**: Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto 2x^2$ en $x_0 = 1$.

Soit $x \neq 1$ on a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2(x+1)$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 1} 2(x+1) = 4$ alors $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.

Donc la fonction f est dérivable en $x_0 = 1$ et on a: $f'(1) = 4$.

Info : Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ ou $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite en a alors f n'est pas dérivable en a

2- Interprétation géométrique du nombre dérivé - Tangente à la courbe d'une fonction en un point

DÉFINITION

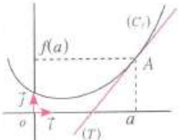
Soit f une fonction dérivable en un point a et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

La droite (T) qui passe par le point $A(a;f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe (C) au point A.

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a.

Une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(a;f(a))$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



Info : Pour prouver cette propriété, il suffit de remarquer que cette tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(a)$ et elle passe par A.

– **Exemple**: Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2x^2$ au point $A(1;f(1))$.

On a : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$ (d'après l'exemple précédent).

Donc, une équation de la tangente (T) est : $y = 4(x-1)+2$, c'est-à-dire : $y = 4x - 2$.

3- Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable en un point a.

▸ La fonction : $u : x \to f'(a)(x-a) + f(a)$ (ou encore la fonction $v : h \to f'(a)h + f(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a.

▸ Le réel $f'(a)h + f(a)$ est l'approximation affine du réel $f(a+h)$ au voisinage de zéro. On écrit : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$.

Info : La fonction u est la meilleure approximation affine de la fonction f au voisinage de a

POUR COMPRENDRE

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - x^3$.

Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = -1$.

Méthode : Pour étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = -1$, on cherche la limite de $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$. Lorsque x tend vers -1.

Soit x un réel tel que $x \neq -1$.

On a : $f(-1) = -1$ et

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= 2x - x^3 + 1 \\ &= x + 1 + x - x^3 \\ &= (x+1)(1 + x(1-x)) \end{aligned}$$

alors : $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{(x+1)(1+x(1-x))}{x+1}$.

$= 1 + x(1-x)$

Or $\lim\limits_{x \to -1}(1 + x(1-x)) = -1$, donc $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -1$.

D'où la fonction f est dérivable en $x_0 = -1$ et on a : $f'(-1) = -1$.

2 Nombre dérivé - Tangente en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$.

1. Montrer que f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

1. **Montrer que f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$**

Soit h un nombre réel non nul, on a :

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{-\sin h - 0}{h} = -\frac{\sin h}{h}$$

Puisque $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ alors $\lim\limits_{h \to 0} -\frac{\sin h}{h} = -1$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = -1$;

c'est-à-dire que la fonction f est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et on a : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

2. **Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$**

On a: $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Or : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ alors

$y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

D'où : $(T) : y = -x + \frac{\pi}{2}$

3 Approximation affine des fonctions : $h \longmapsto (1+h)^2$; $h \longmapsto (1+h)^3$; $h \longmapsto \frac{1}{1+h}$ et $h \longmapsto \sqrt{1+h}$.

1. Déterminer une approximation affine au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes : $h \longmapsto (1+h)^2$; $h \longmapsto (1+h)^3$; $h \longmapsto \frac{1}{1+h}$ et $h \longmapsto \sqrt{1+h}$.
2. En déduire des valeurs approchées de : $\sqrt{1,0008}$ et $\frac{1}{1,006}$.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Soit x un nombre réel tel que $x \neq 1$.

On a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$,

donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.

D'où, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Par suite, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$ donc

$f(1) + hf'(1) = 1 + 2h$.

D'où, la fonction $h \longmapsto 1 + 2h$ est l'approximation affine de $f(1+h) = (1+h)^2$ au voisinage de 0.

On en déduit que : $(1+h)^2 \simeq 1 + 2h$ pour h voisin de 0.

Remarque : On a déjà trouvé que : $(1+h)^3 \simeq 1 + 3h$ pour h voisin de 0 (Activité 6).

On montre aussi que pour h voisin de 0 on a : $\frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$ et $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} -\frac{1}{x} = -1$

2. On a pour h voisin de 0 : $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$, et $\frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$.

Donc : $\sqrt{1,0008} = \sqrt{1+0008} \simeq 1 + \frac{0,0008}{2}$ (on prend $h = 0,0008$)

c'est-à-dire : $\sqrt{1,0008} \simeq 1,0004$.

De même : $\frac{1}{1+0,006} \simeq 1 - 006$, (on prend $h = 0,006$) c'est-à-dire : $\frac{1}{1,006} \simeq 0,994$.

2 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

1- Définitions

DÉFINITION 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;\alpha[$ $(a < \alpha)$.
On dit que f est dérivable à droite en a, s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell.$$

- Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a, et on le note par $f_d'(a)$.
- Et on écrit : $f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Info :
En posant $x = a+h$ on obtient l'expression :
$f_d'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

DÉFINITION 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha;a]$ $(\alpha < a)$.
On dit que f est dérivable à gauche en a, s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell.$$

- Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a, et on le note par $f_g'(a)$.
- Et on écrit : $f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Info :
En posant $x = a+h$ on obtient l'expression :
$f_g'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

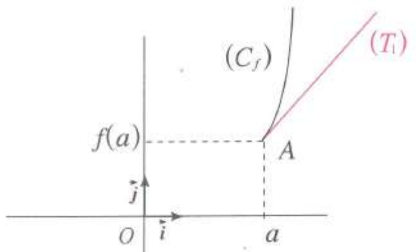
Propriété

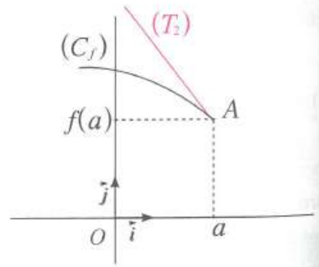
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en a et $f_d'(a) = f_g'(a)$.

Info :
Si f est dérivable en a alors
$f'(a) = f_d'(a) = f_g'(a)$.

2- Interprétation géométrique - Demi-tangente en point d'une courbe

Si f est une fonction dérivable à droite en a (resp à gauche en a) alors, cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f_d'(a)$ (resp $f_g'(a)$).





- Équation de la demi-tangente (T_1) est : $\begin{cases} y = f_d'(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

- Équation de la demi-tangente (T_2) est : $\begin{cases} y = f_g'(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}$

1 Dérivabilité d'une fonction à droite et à gauche en un point

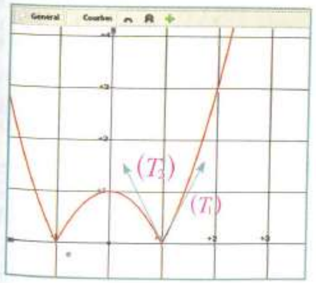
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |x^2-1|$.
1. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$, puis en déduire que f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.
2. Déterminer les coefficients directeurs des deux demi-tangentes à la courbe de la fonction f au point $A(1;f(1))$.

1. Soit x un réel tel que $x \neq 1$.
On a : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{|x^2-1|}{x-1} = \dfrac{|x-1|\times|x+1|}{x-1}$.
- Si $x > 1$ alors $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = x+1$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = 2$.
D'où: f est dérivable à droite en $x_0 = 1$, et on a : $f_d'(1) = 2$.
- Si $0 \leq x < 1$ alors $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -x-1$

Donc: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-x-1) = -2$.
D'où: f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$, et on a : $f_g'(1) = -2$.
- Puisque $f_d'(1) \neq f_g'(1)$ alors la fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

2. On a $f_d'(1) = 2$ donc le coefficient directeur de la demi-tangente (T_1) à la courbe de la fonction f au point $A(1;0)$.
et on a $f_g'(1) = -2$ donc le coefficient directeur de la demi-tangente (T_2) à la courbe de la fonction f au point $A(1;0)$..

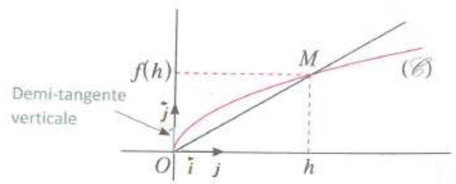


2 Demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.
Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
1. Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$.
2. Soit M un point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse h $(h > 0)$.
a Montrer que le vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}};1\right)$ est un vecteur directeur de la demi-droite $[OM)$.
b En déduire que lorsque h tend vers 0, alors la droite (OM) tend à devenir confondue avec l'axe des ordonnées.

1. Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.
On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, puisque
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.
D'où, la fonction f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$.

2. **a** On a le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur directeur de la direction de la demi-droite $[OM)$.
Or, le couple des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ est $(h;f(0+h)-f(0))$.
Donc $\vec{u}\left(\dfrac{1}{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}};1\right)$ est aussi un vecteur directeur de la droite (OM).
b Lorsque h tend vers 0, alors M se rapproche de plus en plus du point O, et dans ce cas, la première composante du vecteur $\vec{u}$ tend vers 0.
Donc, la droite (OM) tend à devenir confondue avec une droite de vecteur directeur $\vec{j}(0;1)$.
Dans ce cas, l'axe des ordonnées est la direction de la demi-tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.



3 Fonction dérivée d'une fonction

1- Dérivabilité sur un intervalle

DÉFINITION 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.

DÉFINITION 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.
On dit que f est dérivable sur $[a;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b.

> *Info :*
> f dérivable sur I si et seulement si:
> Pour tout réel a de I, il existe un réel ℓ tel que :
> $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$

2- Fonction dérivée

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction qui à tout réel x de I, associe le nombre $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f, elle est notée f' et définie par :

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

> *Info :*
> $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3- Fonction dérivée seconde - Dérivées successives

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la fonction dérivée f' est dérivable sur l'intervalle I, alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f et on la note f''.
Si la fonction f'' est dérivable sur l'intervalle I, alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée 3ème de la fonction f (ou la fonction dérivée d'ordre 3) et on la note f''' ou $f^{(3)}$. (et ainsi de suite)

> *Info :*
> La fonction dérivée d'ordre n de la fonction f où $n \geq 1$ est notée $f^{(n)}$, et on a $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Exemple: Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Déterminons $f'(x)$; $x > 0$.

Pour tous réels x et a de $]0;+\infty[$ tels que : $x \neq a$.

On a : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\dfrac{1}{ax}$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\dfrac{1}{a^2}$

c'est-à-dire: f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

D'où, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

- Déterminons $f''(x)$; $x > 0$.

Pour tous réels x et a de $]0;+\infty[$ tels que : $x \neq a$.

On a : $\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{a^2}}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(ax)^2} = \dfrac{x+a}{(ax)^2}$

Donc : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = \dfrac{2a}{a^4} = \dfrac{2}{a^3}$.

D'où, f' est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

1 Dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x^3$

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et déterminer $f'(x)$.

Soit a un élément de $\mathbb{R}$ et h un élément de $\mathbb{R}^*$.

On a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{h[(a+h)^2 + a(a+h) + a^2]}{h} = (a+h)^2 + a(a+h) + a^2$$

Donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0}((a+h)^2 + a(a+h) + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

c'est-à-dire que la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$.

D'où, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 3x^2$.

2 Dérivée de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

Étudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \sqrt{x}$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

Soit x et a deux éléments de $]0;+\infty[$ tels que $a \neq x$.

On a : $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$,

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

donc, la fonction g est dérivable en a et on a:

$g'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

D'où, la fonction g est dérivable en tout point de l'intervalle $]0;+\infty[$, et on :

$(\forall x \in]0;+\infty[)$; $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Étudions la dérivabilité de la fonction g à droite en 0.

Soit x un réel de $]0;+\infty[$; on a :

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

D'où, la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0.

3 Dérivée de la fonction $L : x \longmapsto \sin x$

Soit L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$L(x) = \sin(x)$.
Montrer que L est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Soit a et h deux réels tels que : $h \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} L(a+h) - L(a) &= \sin(a+h) - \sin(a) \\ &= \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) \\ &= (\cos(h)-1) \times \sin(a) + \sin(h)\cos(a) \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{L(a+h)-L(a)}{h} = \left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) \times \sin(a) + \frac{\sin(h)}{h} \times \cos(a)$$

Et comme : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$, alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(a+h)-L(a)}{h} = 0 \times \sin(a) + 1 \times \cos(a) = \cos a$$

D'où, la fonction L est dérivable en a et on a :
$L'(a) = \cos(a)$.

Ainsi, la fonction $L : x \longmapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$; $L'(x) = \cos(x)$.

4 Fonction dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.

Soit x et x_0 des nombre réels tels que $x \neq x_0$.

On a : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{ax^2+bx+c-ax_0^2-bx_0-c}{x-x_0} = a(x+x_0)+b$

Donc

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0}(a(x+x_0)+b) = 2ax_0 + b$

D'où, f est dérivable en x_0 et on a :
$f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = 2ax + b$.

Déterminons $f''(x)$; $x \in \mathbb{R}$

Soit x et x_0 des nombres réels tels que : $x \neq x_0$

On a : $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{2ax+b-2ax_0-b}{x-x_0} = 2a$,

Donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = 2a$

D'où, f' est dérivable en x_0 et on a : $f''(x_0) = 2a$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) = 2a$

4- Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Fonction dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f:x\longmapsto a; a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f':x\longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto x$	$\mathbb{R}$	$f':x\longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto x^n$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\mathbb{R}$	$f':x\longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f':x\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f:x\longmapsto\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f':x\longmapsto-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$f:x\longmapsto\sin x$	$\mathbb{R}$	$f':x\longmapsto\cos x$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\cos x$	$\mathbb{R}$	$f':x\longmapsto-\sin x$	$\mathbb{R}$

5- Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un réel alors on a :

1) La fonction $f+g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f+g)'=f'+g'$.
2) La fonction kf est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $(kf)'=kf'$.
3) La fonction $f\times g$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$.
4) Si de plus $g(x)\neq 0$ pour tout réel x de I, alors :

- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$.

Résultat: ▸ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▸ Toute fonction rationnelle est dérivable sur un tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+3}$.

▸ f étant une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $D_f=\mathbb{R}$.

▸ La fonction f est le quotient de deux fonctions définies par : $u(x)=x^2$ et $v(x)=x^2+2x+3$.
La dérivée de la fonction u est définie par : $u'(x)=2x$ et celle de la fonction v est définie par : $v'(x)=2x+2$.
Par suite pour tout réel x, on a : $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$=\frac{2x(x^2+2x+3)-x^2(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{2x(x+3)}{(x^2+2x+3)^2}$$

Exemple 2: Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+x\sqrt{x}$.

▸ La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, car les fonctions $x\longmapsto\frac{1}{x}$; $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{3\sqrt{x}}{2}$.

1 Fonctions dérivées

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a $f:x\longmapsto 3x+1$; b $f:x\longmapsto 3x^2+4\sqrt{x}$; c $f:x\longmapsto\frac{3x}{x-1}$.

a La fonction $f:x\longmapsto 3x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; car f est une fonction polynôme.

▸ $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=3\times1+0=3$.

b Les fonctions $u:x\longmapsto 3x^2$ et $v:x\longmapsto 4\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $f=u+v$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, comme somme de deux fonctions dérivables.

▸ $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=3\times 2x+4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$=6x+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

c La fonction $f:x\longmapsto\frac{3x}{x-1}$ est dérivable en tout point de $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$, car c'est une fonction rationnelle.

▸ $(\forall x\in D_f)$; $f'(x)=\frac{(3x)'\times(x-1)-(x-1)'\times 3x}{(x-1)^2}$

$$=\frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})$; $f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$

2 Dérivée de la fonction $x\longmapsto\tan(x)$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan(x)$.
Montrer que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

Soit x un réel de l'intervalle I on a :
$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Puisque les fonctions $x\longmapsto\sin x$ et $x\longmapsto\cos x$ sont dérivables sur I, en plus $\cos x\neq 0$ pour tout réel x de I donc la fonction f est dérivable sur I, comme quotient de deux fonctions dérivables.

Et on a : $f'(x)=\frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)}$

$$=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Et on a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$,
donc $f'(x)=1+\tan^2 x$

D'où : $(\forall x\in I)$; $f'(x)=1+\tan^2 x$.

Remarque : (fonction usuelle)
La fonction tan est dérivable en tout point de $D_{\tan}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et on a :
$(\forall x\in D_{\tan})$; $\tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$.

3 Dérivée de la fonction f^n où $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 2$
on a la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)'=nf^{n-1}\times f'$.

▸ Pour $n=2$; on a $f^2=f\times f$; la fonction f étant dérivable sur I
alors, f^2 est aussi dérivable sur I, et on a :
$(f^2)'=(f\times f)'=f'\times f+f\times f'=2f\times f'$, c'est-à-dire: $(f^2)'=2f^{2-1}\times f'$
Donc, la propriété est vraie pour $n=2$.

▸ Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$.
Supposons que f^n soit dérivable sur I et $(f^n)'=nf^{n-1}\times f'$.
Montrons que f^{n+1} est dérivable sur I et $(f^{n+1})'=(n+1)f^n\times f'$.
On a $f^{n+1}=f^n\times f$, comme les fonctions f^n et f sont dérivables sur I alors f^{n+1} est aussi dérivable sur I,
et on a : $(f^{n+1})'=(f^n\times f)'=(f^n)'\times f+f^n\times f'$.
Et d'après l'hypothèse de récurrence,
on a donc:

$$(f^{n+1})'=(nf^{n-1}\times f')\times f+f^n\times f'.$$
$$=nf^n\times f'+f^n\times f'$$
$$=(n+1)f^n\times f'$$

Donc, la propriété est vraie pour $n+1$.
D'où, pour tout entier naturel n et $n\geq 2$ on a :
La fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)'=nf^{n-1}\times f'$.

LE COURS

6- Dérivées des fonctions : f^n ; $f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) La fonction f^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur I, et on a : $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

2) Si $f(x) \neq 0$ pour tout réel x de I alors la fonction f^n (avec $n \in \mathbb{Z}^*_-$) est dérivable sur I, et on a : $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

Exemple : Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+x+3)^4}$.

Puisque $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2+x+3 \neq 0$ (car le discriminant du trinôme x^2+x+3 est strictement négatif) alors $D_f = \mathbb{R}$.

f étant une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = (x^2+x+3)^{-4}$, on pose $u(x) = x^2+x+3$ donc $u'(x) = 2x+1$.

Par suite $f'(x) = -4u'(x)(u(x))^{-5}$; c'est-à-dire : $f'(x) = -4(2x+1)(x^2+x+3)^{-5}$.

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \dfrac{-4(2x+1)}{(x^2+x+3)^5}$

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux nombres réels $(a \neq 0)$.

Et soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax+b) \in I$.

▸ La fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle J, et on a : $(\forall x \in J)$; $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(2x+1)$.

En considérant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$.

On a : $g(x) = f(2x+1)$, donc $g'(x) = 2f'(2x+1)$.

Et puisque $f'(x) = -\sin x$ alors $g'(x) = -2\sin(2x+1)$.

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = -2\sin(2x+1)$.

Propriété 3

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a : $(\forall x \in I)$; $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Exemple : Déterminons la fonction dérivée de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$.

On a : la fonction $f : x \longmapsto x^2-x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme), et $(\forall x \in \mathbb{R})$; $x^2-x+1 > 0$.

(car le discriminant du trinôme x^2-x+1 est un réel strictement négatif et $a > 0$) ;

Donc : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

POUR COMPRENDRE

1 Fonction dérivée de la fonction f^n, $n \in \mathbb{N}^*$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^5$.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

▸ f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur tout intervalle inclus dans $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

▸ Soit x un réel de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, on a :

$f'(x) = 5\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^4 \times \left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)'$.

Et puisque :

$$\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)' = \frac{(3x-2)'(2x+1)-(3x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{3(2x+1)-2(3x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2}$$

alors, $f'(x) = 5\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^4 \times \dfrac{7}{(2x+1)^2}$.

Donc :

$\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$; $f'(x) = \dfrac{35}{(2x+1)^2} \times \left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^4$

Remarque : a, b, c et d sont des nombres réels tels que : $ad - bc \neq 0$.

La fonction $u : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est dérivable en tout point de $D_u = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Et on a : $(\forall x \in D_u)$; $u'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

2 Dérivée de la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$

Soit g la fonction définie sur $]-\pi;\pi[$ par : $g(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Étudier la dérivabilité de g sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$ puis déterminer la fonction dérivée g'.

Étudions la dérivabilité de g.

On a : la fonction $f : x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{x}{2} \in I$ pour tout réel x de $]-\pi;\pi[$.

Donc, la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$.

Déterminons g'.

On a : $g : x \longmapsto f(ax+b)$ tel que : $a = \frac{1}{2}$; $b = 0$ et $f(x) = \tan x$.

Soit x un réel de $]-\pi;\pi[$: $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ et

$g'(x) = af'(ax+b) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Donc : $(\forall x \in]-\pi;\pi[)$; $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

3 Dérivée de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f puis calculer $f'(x)$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(6;f(6))$.

1. Déterminons D_f.

▸ Soit x un nombre réel; on a :

$x \in D_f \iff x-2 \neq 0$ et $\dfrac{x+2}{x-2} \geq 0$

$\iff x \neq 2$ et $(x+2)(x-2) \geq 0$

$\iff x \in]-\infty;-2] \cup]2;+\infty[$

Donc : $D_f =]-\infty;-2] \cup]2;+\infty[$.

▸ La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x-2}$ est dérivable et strictement positive sur chacun des deux intervalles $]2;+\infty[$ et $]-\infty;-2[$, donc la fonction $f = \sqrt{g}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ respectivement sur $]-\infty;-2[$.

Soit x un réel de $D_f - \{-2\}$,

on a : $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

et $g'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$;

alors $f'(x) = \dfrac{-4}{2(x-2)^2 \times \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}$

Donc : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2 \times \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}$

2. **Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(6;f(6))$:**

On a: $y = f'(6)(x-6) + f(6)$.

or : $f(6) = \sqrt{\dfrac{8}{4}} = \sqrt{2}$ et $f'(6) = \dfrac{-2}{16\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{16}$,

donc, une équation de la tangente (T) est :

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{16}(x-6) + \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{16}x + \dfrac{11\sqrt{2}}{8}$.

D'où $(T) : y = -\dfrac{\sqrt{2}}{16}x + \dfrac{11\sqrt{2}}{8}$.

LE COURS

4 Applications de la dérivation

1- Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur l'intervalle I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I.
- Si f est décroissante sur l'intervalle I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout réel x de I.
- Si f est constante sur l'intervalle I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle I, sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.
- Si la dérivée f' est strictement négative sur l'intervalle I, sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle I.
- Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est une fonction constante sur I.

Exemple : Étudions les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 1$.

Pour tout réel x on a : $f'(x) = 3 \times 5x^4 - 10 \times 3x^2 + 15$

$= 15(x^4 - 2x^2 + 1) = 15(x^2 - 1)^2$

On a : $f'(1) = 0$; $f'(-1) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout réel x de $\mathbb{R} - \{-1;1\}$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

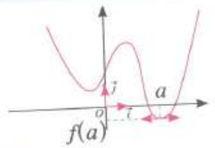
Info : f' s'annule en deux points isolés : 1 et -1

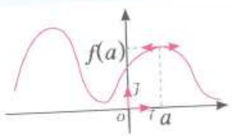
2- Extremums d'une fonction dérivable

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a) = 0$.





Info : Toute valeur maximale ou minimale d'une fonction f est appelée un extremum de la fonction f.

Remarque

Si $f'(a) = 0$ alors $f(a)$ n'est pas nécessairement un extremum local de la fonction f.

Prenons par exemple la fonction $f : x \longmapsto 2x^3$.

On a : $f'(x) = 6x^2$ pour tout réel x, donc f' s'annule en 0. Et pourtant : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f(x) \geq f(0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$; $f(x) \leq f(0)$.

D'où $f(0)$ n'est pas un extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f sur I.

POUR COMPRENDRE

1 Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x) = x\tan^2(x) - \tan(x) + x$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, et on a pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$f'(x) = \tan^2(x) + 2x\tan(x) \times (1 + \tan^2(x)) - 1 - \tan^2(x) + 1$

$= 2x\tan(x) \times (1 + \tan^2(x))$

- Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x\tan(x)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

D'où : $f'(x) > 0$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(0) = 0$

donc : f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)(x\tan(x) - 1) + x = +\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$

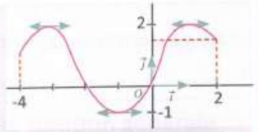
- Le tableau de variations de la fonction f est :

f	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	||
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le tableau de variations de f, on déduit que 0 est la valeur minimale de la fonction f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ c'est-à-dire : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) ; f(x) \geq 0$

2 Déterminer le signe de f' graphiquement.

La courbe (C) tracée ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$



1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en mettant en évidence le signe de f'.
2. Déterminer graphiquement le signe de la fonction f.

1. Puisque f est croissante sur chacun deux intervalles $[-4;-3]$ et $[-1;1]$ alors :

$(\forall x \in [-4;-3]) ; f'(x) \geq 0$

et $(\forall x \in [-1;1]) ; f'(x) \geq 0$

Et comme f est décroissante sur chacun des intervalles $[-3;-1]$ et $[1;2]$ donc :

$(\forall x \in [-3;-1]) ; f'(x) \leq 0$

et $(\forall x \in [1;2]) ; f'(x) \leq 0$

Par conséquent le tableau de variations de la fonction f est :

x	-4		-3		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

2. D'après la courbe de f on a :

x	-4		-2		0		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3 Variations d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est :

$D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

On a : ▸ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$;

▸ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$;

▸ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$ et • $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$

2. Soit x un élément de D_f :

$f'(x) = \frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$

Donc : $f'(x) < 0$ pour tout réel x de $\mathbb{R} - \{1\}$.

D'où, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

5 Équation différentielle: $y'' + \omega^2 y = 0$

DÉFINITION

Soit ω un nombre réel non nul.

- L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.
- Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout réel x, est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Exemple : Les équations suivantes:

$(E_1): y'' + 9y = 0$; $(E_2): y'' + 7y = 0$;

$(E_3): y'' + 16y = 0$ et $(E_4): y'' + \frac{3}{2}y = 0$

sont des équations différentielles.

Propriété

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par: $y: x \longmapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$; où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Remarque

Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, c'est déterminer la solution générale de cette équation.

Exemple 1 : Résolvons l'équation différentielle: $y'' + 4y = 0$.

On a: $\omega^2 = 4$ alors $\omega = -2$ ou $\omega = 2$

On prend par exemple $\omega = 2$ (on peut choisir $\omega = -2$ et ceci ne change pas la solution générale)

Donc, la solution générale de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y: x \longmapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle: $y'' + y = 0.5$ (ici $\omega^2 = 1$)

La solution générale de cette équation est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y: x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x$ où, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- **Équation différentielle particulière:**

Résolution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Si $y'' = 0$ alors y' est une fonction constante.

y' étant une fonction constante .

Donc, les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y: x \longmapsto ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1 Déterminer la solution générale d'une équation différentielle

Résoudre l'équation différentielle: $y'' + 3y = 0$

Pour résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y = 0$ il suffit de déterminer le nombre ω,

on a: $\omega^2 = 3$ alors $\omega = \sqrt{3}$ ou $\omega = -\sqrt{3}$

On prend par exemple $\omega = \sqrt{3}$, donc la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 3y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y: x \longmapsto \alpha\cos(\sqrt{3}x) + \beta\sin(\sqrt{3}x)$

où: $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2 Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle

Déterminer la fonction f vérifiant l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que: $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

On a $\omega^2 = 16$, on prend $\omega = 4$.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par:

$y: x \longmapsto \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On détermine les réels α et β tels que:

$f(x) = \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)$;

$f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

On a : $f(0) = \alpha\cos(0) + \beta\sin(0)$ signifie que $f(0) = \alpha$;

et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \alpha\cos\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) + \beta\sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right)$

signifie que $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \beta$.

Or $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

D'où $f: x \longmapsto \cos(4x) + \sin(4x)$

3 Autre écriture de la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Soit ω un nombre réel non nul.

Montrer que la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ peut s'écrire sous la forme:

$y: x \longmapsto a\cos(\omega x - \varphi)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par:

$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ où: $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On suppose que: $(\alpha;\beta) \neq (0;0)$

On a:

$\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) =$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \times \cos(\omega x) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \times \sin(\omega x)\right)$

Puisque: $-1 \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq 1$; $-1 \leq \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq 1$

et $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1$.

Donc, il existe un nombre réel φ tel que: $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

et $\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Par suite: $\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) =$

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos(\omega x)\cos\varphi + \sin(\omega x)\sin\varphi$

$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\omega x - \varphi)$

Posant $a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,

on obtient une autre écriture de la solution générale à savoir: $y \longmapsto a\cos(\omega x - \varphi)$.

Cette écriture est vérifiée pour le cas: $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

4 Vérifier qu'une fonction est une solution d'une équation différentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = \lambda\cos(-2x + \theta)$ où: $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est une solution de l'équation différentielle: $y'' + 4y = 0$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}$,

on a: $f'(x) = 2\lambda\sin(-2x + \theta)$

et $f''(x) = -4\lambda\cos(-2x + \theta)$

donc: $f''(x) = -4f(x)$

D'où: $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) + 4f(x) = 0$

Par conséquent, la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

EXERCICE RÉSOLU 1 Utiliser la fonction affine tangente dans une approximation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$ par:

$f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x+3}$.

1 Déterminer f' la fonction dérivée de f.

2 Donner une valeur apporchée du nombre $f(1{,}001)$.

1 Calculons $f'(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{-3\}$.

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{-3\}$, car f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Soit x un réel de $\mathbb{R}-\{-3\}$, on a:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)'\times(x+3)-(x+3)'\times(3x^2+2x)}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{(6x+2)(x+3)-(3x^2+2x)}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{6x^2+2x+18x+6-3x^2-2x}{(x+3)^2}=\frac{3x^2+18x+6}{(x+3)^2}$$

Donc: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\})\,;\,f'(x)=\dfrac{3(x^2+6x+2)}{(x+3)^2}$

2 Déterminons une valeur approchée du nombre $f(1{,}001)$.

Pour calculer une valeur approchée du nombre $f(1{,}001)$, on utilise la fonction affine tangente à f en 1, car: $1{,}001=1+0{,}001$.

On a $f'(1)\times 0{,}001+f(1)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de 1, c'est-à-dire: $f(1{,}001)\simeq f'(1)\times 0{,}001+f(1)$

Or $f(1)=\dfrac{5}{4}$ et $f'(1)=\dfrac{27}{16}$

donc: $\dfrac{27}{16}\times 0{,}001+\dfrac{5}{4}=1{,}2516875$

D'où, $f(1{,}001)\simeq 1{,}2516875$

Remarque: On peut calculer $f(1{,}001)$ directement en utilisant la machine à calculer puis on la compare au résultat trouvé.

EXERCICE RÉSOLU 2 Utiliser la valeur minimale d'une fonction pour prouver une inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par:

$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)$

1 Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0;1[$

2 Étudier les variations de la fonction f, puis en déduire la valeur minimale de f sur $]0;1[$.

3 Soit p et q deux réels strictement positifs tels que: $p+q=1$

Montrer que: $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\geq 9$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2).

1 Calculons $f'(x)$ pour tout réel x de $]0;1[$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$.

Soit x un réel de $]0;1[$, on a:

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'\times\left(1+\frac{1}{1-x}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\left(1+\frac{1}{1-x}\right)'$$
$$=-\frac{1}{x^2}\times\left(1+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{(1-x)^2}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{x-2}{x^2(1-x)}+\frac{x+1}{x(1-x)^2}=\frac{4x-2}{x^2(1-x)^2}$$

Donc: $(\forall x\in\,]0;1[)\,;\,f'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{(x(1-x))^2}$

2 Étudions les variations de f:

Soit $x\in\,]0;1[$, on a $(x(1-x))^2>0$ alors le signe $f'(x)$ est le signe de $2x-1$

Donc: ▸ $f'(x)=0$ équivaut à $x=\dfrac{1}{2}$

▸ $f'(x)>0$ équivaut à $x\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

▸ $f'(x)<0$ équivaut à $x\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$

Par conséquent, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.

Déduction:

Soit x un réel de $]0;1[$.

Si $\dfrac{1}{2}\leq x<1$ alors $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq f(x)$ (car f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$).

Si $0<x\leq\dfrac{1}{2}$ alors $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq f(x)$ (car f est décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$).

Et puisque $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=9$ donc $f(x)\geq 9$

D'où: $f(x)\geq 9$ pour tout réel x de $]0;1[$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=9$

C'est-à-dire: 9 est la valeur minimale de f sur $]0;1[$

3 Montrons que: $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\geq 9$

On a: $p+q=1$, $p>0$ et $q>0$ alors $0<p<1$, $0<q<1$.

Et puisque $p+q=1$ alors $q=1-p$; par suite

$\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\geq 9$ équivaut à $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-p}\right)\geq 9$

Donc, il suffit de montrer que: $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-p}\right)\geq 9$

On remarque: $p\in\,]0;1[$ et $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-p}\right)=f(p)$

Or $f(p)\geq 9$, d'après le resultat de la question précedente, donc $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-p}\right)\geq 9$

D'où: $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\geq 9$

EXERCICE RÉSOLU 3 Les proportions d'une casserole économique

Problème : Comment fabriquer une casserole de volume V donné avec le moins de métal possible?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.

L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et $S(x)$ l'aire totale (L'aire totale = l'aire latérale + l'aire du fond).

1 a. Montrer que : $h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

b. Démontrer que : $S(x)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$.

2 a. étudier les variations de la fonction S sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

b. Conclure.

1 a. Montrons que : $h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

La casserole (sons manche) est un cylindre de rayon x et de hauteur h, donc son volume est :

$V=\pi x^2 h$,

donc : $h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

Info

▸ L'aire d'un cylindre = (L'aire de la base) × (La hauteur)

▸ L'aire d'un disque $=\pi\times(\text{rayon})^2$

b. Montrons que : $S(x)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$

▸ L'aire du fond est : πx^2 (c'est un disque).

▸ L'aire latérale = $(2\pi x)\times h$.

Donc : $S(x)=\pi x^2+(2\pi x)\times h$.

Or : $h=\dfrac{V}{\pi x^2}$ (d'après la question 1) a)).

Donc : $S(x)=\pi x^2+(2\pi x)\times\dfrac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$.

D'où : $(\forall x\in\,]0;+\infty[)$; $S(x)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$

2 a. étudions les variations de la fonction S

$(\forall x\in\,]0;+\infty[)$; $S(x)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$.

▸ La fonction $x\longmapsto\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$ est une fonction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $]0;+\infty[$.

D'où, la fonction S est dérivable sur $]0;+\infty[$.

▸ $(\forall x\in\,]0;+\infty[)$; $S'(x)=2\pi x-\dfrac{2V}{x^2}$.

Or : $V=\pi x^2 h$, donc

$(\forall x\in\,]0;+\infty[)$; $S'(x)=2\pi(x-h)$.

Le signe de $S'(x)$ est celui de $x-h$.

$(\forall x\in\,]0;h])$; $S'(x)\leq 0$, donc S est strictement décroissante.

$(\forall x\in[h;+\infty[)$; $S'(x)\geq 0$, donc S est strictement croissante sur $[h;+\infty[$.

Tableau de variations de S :

▸ $\lim\limits_{x\to 0^+}S(x)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0}\pi x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2V}{x}=+\infty$).

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2V}{x}=0$).

▸ $S(h)=\pi h^2+\dfrac{2V}{h}$.

x	0		h		$+\infty$
$S'(x)$		-	0		
S	$+\infty$	↘	$\pi h^2+\dfrac{2V}{h}$	↗	$+\infty$

b. Conclusion :

D'après le tableau de variations, la fonction S admet un minimum absolu atteint pour $x=h$.

Donc, pour fabriquer la casserole avec un minimum de métal, il suffit que le rayon soit égal à la hauteur.

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Toute fonction définie en a est dérivable en a.

2 Toute fonction dérivable en a est définie en a.

3 Le nombre $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la tangente au point $A(a;f(a))$.

4 Si f est dérivable en a alors sa courbe admet une tangente au point $A(a;f(a))$.

5 Les fonctions $x \longmapsto x^2+3$ et $x \longmapsto x^2-1$ ont la même fonction dérivée.

6 Si $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cela signifie toujours que f est dérivable en a.

7 Si f dérivable à droite et à gauche en a alors f est dérivable en a.

8 Si $f'(a)=0$ alors la courbe de f admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment déterminer les extremums d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I ?

2 Comment déterminer les variations d'une fonction f en utilisant la fonction dérivée ?

3 Comment déterminer une valeur approchée au nombre $f(a+h)$ en utilisant la fonction dérivée, où h est proche de 0 ?

4 Comment déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle $y''+9y=0$ telle que $f(0)=1$ et $f'(0)=2$?

5 Citer la technique qui permet de calculer la limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$ en utilisant la dérivabilité.

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Si f est un polynôme de degré $n(n\geq 1)$ alors le degré de sa dérivée est:	$n+1$	n	$n-1$
2 La dérivée de la fonction $x\longmapsto f(ax+b)$ est:	$x\longmapsto bf'(ax+b)$	$x\longmapsto af'(ax+b)$	$x\longmapsto f'(ax-b)$
3 L'approximation affine locale de $h\longmapsto \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{\sqrt{1+h}}$ au voisinage de 0 est:	$\dfrac{h}{2-h}$	0	$\dfrac{h}{2+h}$
4 Si $f(x)=\dfrac{2}{3x+1}$ alors:	$f'(x)=\dfrac{-3}{(3x+1)^2}$	$f'(x)=\dfrac{-6}{(3x+1)^2}$	$f'(x)=\dfrac{2}{3}$
5 Si $f(x)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ alors:	$f'(x)=\frac{1}{2}\sin x$	$f'(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	$f'(x)=-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
6 Si $f(x)=2\sqrt{x-1}$ alors:	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$	$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
7 Dérivée de la fonction $f:x\longmapsto(2x+1)^3$ est:	$f':x\longmapsto 2(2x+1)^2$	$f':x\longmapsto 3(2x+1)^2$	$f':x\longmapsto 6(2x+1)^2$
8 Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente au point $A(a;f(a))$ est:	$y=f'(a)(x-a)+f(a)$	$y=f'(x)(x-a)+f(a)$	$y=f(a)(x-a)+f'(a)$

Exercices d'application

Dérivabilité d'une fonction en un point

Exercice 1 : En utilisant la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x\longmapsto 5x-3$ et $x_0=2$

b) $f:x\longmapsto 3x^2-2x+5$ et $x_0=0$

c) $f:x\longmapsto \frac{1}{3}x^2+4x$ et $x_0=3$

Exercice 2 : En utilisant la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x\longmapsto -\dfrac{3}{x}$ et $x_0=-2$

b) $f:x\longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $x_0=1$

c) $f:x\longmapsto x-\dfrac{1}{x}$ et $x_0=-1$

d) $f:x\longmapsto \sqrt{x}+\dfrac{x}{2}$ et $x_0=4$

Exercice 3 : En utilisant la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction f en x_0, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x\longmapsto \sin x$ et $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

b) $f:x\longmapsto \cos x$ et $x_0=\pi$

c) $f:x\longmapsto \tan x$ et $x_0=0$

Interprétation graphique du nombre dérivé - La fonction affine tangente

Exercice 4 : Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction f au point A d'abscisse x_0, dans chacun des cas suivants:

1. $f:x\longmapsto 2x^2+x-1$ et $x_0=1$
2. $f:x\longmapsto 3x^2+2$ et $x_0=-1$
3. $f:x\longmapsto -\frac{1}{2}x^3+x^2$ et $x_0=2$
4. $f:x\longmapsto \dfrac{x+1}{x+2}$ et $x_0=1$

Exercice 5 : Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction f au point A d'abscisse x_0 ; dans chacun des cas suivants:

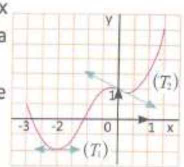
a) $f:x\longmapsto \cos(2x)$ et $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

b) $f:x\longmapsto 3\sin x$ et $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

c) $f:x\longmapsto 2\tan(x)$ et $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 6 : Sur la figure ci-contre, (C) est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$ et deux tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe (C).

Déterminer une équation de chaque tangente.



Exercice 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x+2}$

1. Déterminer la fonction affine tangente à la fonction f en 0.
2. En déduire une valeur approchée du nombre $f(0,0004)$.

Dérivabilité d'une fonction à droite, à gauche en un point- Interprétation géométrique.

Exercice 8 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu, dans chacun cas suivants:

a) $f:x\longmapsto x|x|+1$ et $x_0=0$

b) $f:x\longmapsto |x|+x^2$ et $x_0=0$

c) $f:x\longmapsto x^2+|x-1|$ et $x_0=1$

d) $f:x\longmapsto \sqrt{(x-2)^2}$ et $x_0=2$

e) $f:x\longmapsto |x^2-1|$ et $x_0=-1$

Exercice 9 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et donner un interprétation géométrique du résultat obtenu, dans chacun des cas suivants:

a) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}\ ;x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$ et $x_0=1$

b) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-1}\ ;x\leq 0 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2\ ;x>0 \end{cases}$ et $x_0=0$

Exercice 10 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et donner une interprétation graphique du resultat obtenu, dans un chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto |x^2-5x+6|$ et $x_0 = 2$

b) $f:x \longmapsto \sqrt{|x-2|}$ et $x_0 = 2$

c) $f:x \longmapsto \sqrt{x-1}$ et $x_0 = 1$ (à droite)

Fonctions dérivées:

Exercice 11 : Déterminer la dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto 2x-5$ b) $f:x \longmapsto x^2+\frac{1}{2}x+1$

c) $f:x \longmapsto \frac{1}{3}x^3+x^2+3$

d) $f:x \longmapsto \sqrt{5}x^6-15x^2+1$

Exercice 12 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto 2x^3-\frac{3}{7}x^2+4$ b) $f:x \longmapsto \frac{2x-1}{x^2+x+1}$

c) $f:x \longmapsto \frac{1}{3x}$ d) $f:x \longmapsto x^2\sqrt{x}$

Exercice 13 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto \frac{2}{x+1}$ b) $f:x \longmapsto \frac{2x+3}{x-3}$

c) $f:x \longmapsto \frac{x^2+1}{x+1}$ d) $f:x \longmapsto 2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$

Exercice 14 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto x(2x-1)^5$

b) $f:x \longmapsto (x+1)^3+(2x+1)^2$

c) $f:x \longmapsto (x+1)^3(2x-1)^2$

Exercice 15 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto x^3-x^2+x$ b) $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

c) $f:x \longmapsto x^2\sqrt{x}-5x$ d) $f:x \longmapsto \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

Exercice 16 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto 2x-\frac{5}{x^2+3}$ b) $f:x \longmapsto \frac{1}{x^4}$

c) $f:x \longmapsto \cos^2(x)$ d) $f:x \longmapsto \cos(2x)$

Exercice 17 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ b) $f:x \longmapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$

c) $f:x \longmapsto (x^2+x+3)^3$ d) $f:x \longmapsto x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

Exercice 18 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

1. $f:x \longmapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 2. $f:x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

3. $f:x \longmapsto x\times\cos(x)$ 4. $f:x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$

Exercice 19 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto x\sin(x)$ b) $f:x \longmapsto \tan^3(x)$

c) $f:x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ d) $f:x \longmapsto \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Exercice 20 : Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, puis calculer les limites de la fonction f aux bornes de D et étudier les variations de la fonction f dans chacun des cas suivants: (en utilisant la fonction dérivée).

a) $f:x \longmapsto 2x^2+x-1$ b) $f:x \longmapsto \frac{1}{3}x^3+2x^2-4$

c) $f:x \longmapsto x^3-3x+1$ d) $f:x \longmapsto x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2-2$

Exercice 21 : Calculer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le signe de $f'(x)$, puis déduire les variations de la fonction f, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto \frac{2}{x+1}$ b) $f:x \longmapsto (3x-1)^4$

c) $f:x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ b) $f:x \longmapsto \frac{x^3}{x-1}$

Utiliser la fonction dérivée pour déterminer les extremums d'une fonction:

Exercice 22 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ par: $f(x)=\sin(3x)$

Déterminer les extremums de la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 23 : Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

a) $f(x)=2x^2+x-10$

c) $f(x)=x^3+4x^2-11x+3$

b) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$

d) $f(x)=x^3-3x^2+6$

Exercice 24 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[-2;3]$ par: $f(x)=3x-x^3$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer les extremums de la fonction f sur chacun des intervalles:

$I_1=\left[-\frac{3}{2};0\right]$; $I_2=[-2;0]$ et I

Équation différentielle: $y''+\omega^2y=0$

Exercice 25 : Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y''+8y=0$ b) $y''+4y=0$

c) $y''+y=0$ d) $y''+5y=0$

Exercice 26 : Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $5y''+y=0$ b) $3y''+5y=0$

c) $\frac{3}{4}y''+\frac{2}{5}y=0$ d) $y''+\cos^2(n)y=0$; $n\in\mathbb{N}$.

Exercices de renforcement

Exercice 27 : Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de la fonction f au point d'abscisse x_0, dans chacun des cas suivants:

a) $f:x \longmapsto x^2$ et $x_0=-1$;

b) $f:x \longmapsto x^3$ et $x_0=-2$;

c) $f:x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ et $x_0=1$;

d) $f:x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x_0=4$

Exercice 28 : Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]-\infty;0[$ par: $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\frac{3}{x}$.

Soit (C_f) et (C_g) les représentations graphiques des fonctions f et g respectivement, dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Montrer que (C_f) et (C_g) possèdent des tangentes parallèles au point d'abscisse -1

Exercice 29 : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\cos x$

(C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Montrer que les courbes (C_f) et (C_g) admettent au point d'abscisse 0 la même tangente, dont on déterminera une équation.

Exercice 30 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^2}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0=0$.

Exercice 31 : Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-\cos 3x}{\sin x} \\ g(0)=0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Montrer que g est dérivable en $x_0=0$, et que $g'(0)=\frac{9}{2}$
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0.

Exercice 32 :On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=x\sin(2x)+a|x|$, où a est un réel.

1. Montrer que la fonction g est dérivable à droite en 0 et à gauche en 0.
2. Déterminer le réel a pour que g soit dérivable en 0.
3. On suppose que: $a=0$.

Calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

Exercice 33 : En utilisant la notion de dérivée, déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$ 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sin x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 2\sin x - 1}{x}$

Exercice 34 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 3x + 1 ; x > 0 \\ f(x) = ax + 1 ; x \le 0 \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit dérivable en 0.

Exercice 35 : Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par:

$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} \\ g(1) = g(-1) = 0 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Étudier la dérivabilité de g en $x_0 = 1$ et en $x_1 = -1$.

Exercice 36 : Calculer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f: x \longmapsto (1 - x)\sqrt{1 - x}$ **b)** $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

c) $f: x \longmapsto \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$ **d)** $f: x \longmapsto \cos^2(x) - \cos x$

Exercice 37 : Calculer la fonction dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants:

a) $f: x \longmapsto (\sqrt{x} + 2)^3$ **b)** $f: x \longmapsto \sqrt{2 + \cos x}$

c) $f: x \longmapsto \dfrac{\cos(2x + 1)}{x}$ **d)** $f: x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

Exercice 38 : Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^2(x) - 3}{x - \frac{\pi}{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos(x) - \sqrt{2}}{\tan^2(x) - 1}$

Exercice 39 : En utilisant la notion de la dérivée, calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+2)^{2017} - 1}{x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(2x)}{x - \pi}$

Étude des variations d'une fonction

Exercice 40 : Étudier les variations de la fonction f ; dans chacun des cas suivants:

a) $f: x \longmapsto \dfrac{2x - 1}{x}$ **b)** $f: x \longmapsto \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

c) $f: x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **d)** $f: x \longmapsto \dfrac{3}{x^2 - 9}$

Exercice 41 : Étudier les variations de la fonction f ; dans chacun des cas suivants:

a) $f: x \longmapsto -x^3 + x^2 + 5x + 1$ **b)** $f: x \longmapsto x^4 - 4x^3$

c) $f: x \longmapsto -x^3 + x^2 - x$ **d)** $f: x \longmapsto (x^2 + 1)^3$

e) $f: x \longmapsto \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **f)** $f: x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Exercice 42 : Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0; 10]$.
Recopier et compléter le tableau suivant:

x	0		2		7		10
signe de $f'(x)$	‖						
f	‖ $+\infty$	↘	3	↗	5	↘	1

Exercice 43 : Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $I = [-2; 5]$
Recopier et compléter le tableau suivant:

x	-2		0		1		5
signe de $f'(x)$							
f	-4	↗	1	↘	-2	↗	3

Exercice 44 : Parmi les trois propositions 1., 2. et 3. ci-dessous; déterminer celle qui est convenable au tableau suivant:

x	0		2		5		8
signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	0
f							

1. $f(0) = 10$; $f(2) = 5$; $f(5) = 2$ et $f(8) = 3$.
2. $f(0) = 0$; $f(2) = -1$; $f(5) = 5$ et $f(8) = 3$
3. $f(0) = \sqrt{2}$; $f(2) = 2$; $f(5) = 5$ et $f(8) = 3$

Exercice 45 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 8x$.
Existe-t-il des points de la courbe de la fonction f pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses?

Exercice 46 : Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2x^2 + x$.
Déterminer le point de la courbe (C) pour lequel la tangente a un coefficient directeur égal à 6.

Utiliser les variations d'une fonction pour montrer une inégalité

Exercice 47 : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par: $f(x) = \sin(x) - x$.
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire que: $\sin(x) \le x$ pour tout réel x de $[0; \pi]$.

Exercice 48 : En utilisant les variations de deux fonctions que l'on déterminera ; montrer que ;
$\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right) ; x - \dfrac{x^3}{6} \le \tan(x) \le 2x$

Exercice 49 : Montrer que:
$(\forall x \in [0; +\infty[) ; x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x$

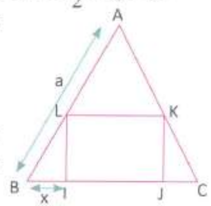
Exercice 50 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - x + 1$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation: $y = 2x$.

Exercice 51 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2\cos(3x) + 5\sin(3x)$.
1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.
2. Vérifier que: $f''(x) + 9f(x) = 0$ pour tout réel x.
3. Résoudre l'équation différentielle $(E): y'' + 9y = 0$
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \lambda\cos(3x + \theta)$ où λ et θ sont des réels.
Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E).

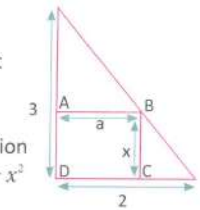
Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 52 : L'aire d'un rectangle est égale à 81 m².
Déterminer les dimensions de ce rectangle pour que son périmètre soit minimal.

Exercice 53 : On a dans la figure ci-contre: ABC est un triangle équilatéral de côté a et I est un point de $[BC]$ tel que $BI < \frac{a}{2}$. J, K et L sont des points des côtés du triangle ABC tels que $LKJI$ soit un rectangle.
On pose $BI = x$
Comment peut-on choisir x pour que l'aire du rectangle $LKJI$ soit maximale?



Exercice 54 : Voir la figure ci-contre, puis:
1. Calculer a en fonction x.
2. Déterminer x pour que l'aire du rectangle $ABCD$ soit maximale.



Exercice 55 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 1 - x^2$.
1. Tracer (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
2. Soit M_0 un point de (C) d'abscisse x_0 qui vérifie $0 < x_0 < 1$ et (Δ_0) est la tangente à la courbe (C) au point M_0.
(Δ_0) coupe les axes du repère aux points A et B.
a) Montrer que l'aire du triangle OAB est:
$S_{x_0} = \dfrac{(1 + x_0^2)^2}{4x_0}$
b) Déterminer la valeur de x_0 pour laquelle l'aire du triangle OAB soit minimale.

Exercice 56 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par:

EXERCICES

$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}-1-\dfrac{x^2}{2}$

1. Montrer que:

$f''(x)=\dfrac{(1-\cos x)(\cos^2 x+2\cos x+2)}{\cos^3 x}$

pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2. a) Déterminer les variations de f' sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer $f'(0)$ puis en déduire le signe de f'.

3. a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) En déduire une comparaison entre $\dfrac{1}{\cos x}$ et $1+\dfrac{x^2}{2}$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Dérivées successives

Exercice 57 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

1. Déterminer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$, où $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f
3. Vérifier le résultat par récurrence.

Dérivabilité et géométrie

Exercice 58 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On considère les points: $A(3;3)$, $B(1;-1)$, $C(0;2)$.

Le but de cet exercice est la recherche d'un point M appartenant à l'axe des abscisses pour quel'expression suivante: $MA^2+MB^2+2MC^2$ soit minimale.

1. Soit x une abscisse du point M.
Montrer que $MA^2+MB^2+2MC^2=4x^2-8x+28$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=4x^2-8x+28$
Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'expression $MA^2+MB^2+2MC^2$ soit minimale, puis déterminer cette valeur minimale.

Exercice 59 : Une fenêtre est composée d'un rectangle $ABCD$ et d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$ (voir figure).

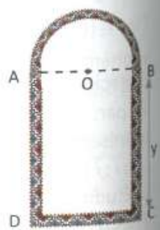
Soit x le rayon du demi-cercle et y est la distance BC.
(x et y sont exprimés en métre). Le périmètre de la fenêtre est égale à 5 m.

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs de x et y pour que la fenêtre ait une aire maximale.

1. Déterminer y en fonction de x, puis en déduire les valeurs de x pour lesquelles $y\geq 0$
2. Soit S l'aire de la fenêtre.
Montrer que: $S=5x-\dfrac{4+\pi}{2}\times x^2$
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{5}{2+\pi}\right]$ par: $f(x)=5x-\dfrac{4+\pi}{2}\times x^2$.

a) Étudier les variations de la fonction f.

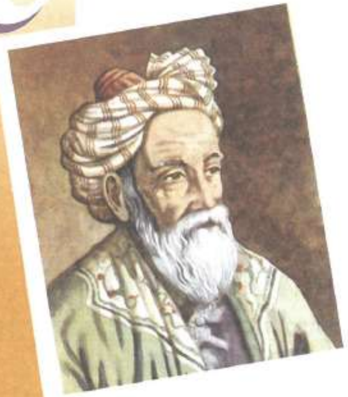
b) En déduire les valeurs de x et y pour que la fenêtre ait un aire maximale.



les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	1	2	1	2	2	1	1	3		

Chapitre 10



Omar Khayyâm

Omar Khayyâm (1048-1123), poète et mathématicien perse, résout géométriquement les équations du 3ème degré.
L'équation $x^3=3x+1$ devient $x^2-3=\dfrac{1}{x}$ et les solutions sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et d'une hyperbole.

Objectifs de la leçon

- Reconnaître une branche infinie d'une courbe;
- Reconnaître et déterminer les asymptotes:
  - Parallèles à l'axe des abscisses;
  - Parallèles à l'axe des ordonnées;
  - Obliques;
- Déterminer les branches paraboliques;
- Reconnaître et étudier la concavité d'une courbe;
et recherche des points d'inflexion;
- Utiliser la dérivée seconde pour déterminer les points d'inflexion;
- Reconnaître et rechercher les centres et les axes de symétrie d'une courbe;
- Utiliser les courbes pour résoudre des équations et des inéquations;
- Utiliser les études de fonctions pour résoudre des problèmes de la vie courante ou d'autres matières.

Le contenu

Capacités attendues

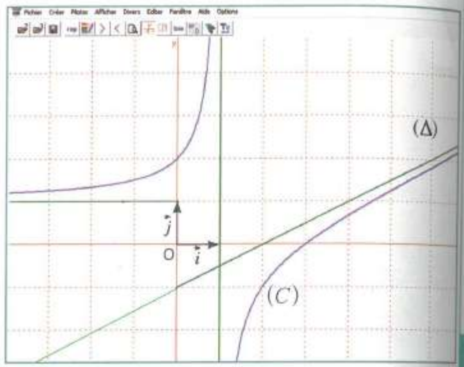
- Résolution graphique des équations et des inéquations.
- Utiliser de la périodicité et les éléments de symétrie pour réduire l'ensemble d'étude d'une fonction,
- Utilisation du signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité et la détermination des points d'inflexion.
- Etude et le tracé des fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles.
- Etude et tracé des fonctions trigonomédriques simples.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PÉLIMINAIRES

Activité 1 Utilisation d'une représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (voir figure).



En utilisant la représentation graphique de f répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

3. Résoudre graphiquement :

a L'équation : $f(x)=0$.

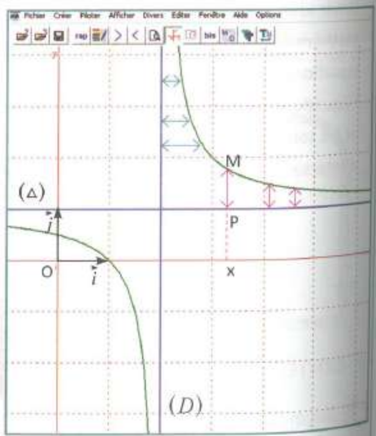
b L'inéquation : $f(x)>0$.

4. Étudier la position relative de (C) et la droite (Δ).

ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 2 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses - Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par: $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ et soit (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Δ) est la droite d'équation: $y=1$ et (D) la droite d'équation: $x=2$.



1. Donner les équations des deux asymptotes à la courbe (C).

2. Soit x un élément de $]2;+\infty[$; et $M(x;f(x))$ un point de (C) et $P(x;1)$ un point de la droite (Δ).

a Montrer que $PM=f(x)-1$.

b Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-1)=0$.

On en déduit que la courbe s'approche de plus en plus de la droite (Δ) chaque fois que x est assez grand (x tend vers $+\infty$).

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

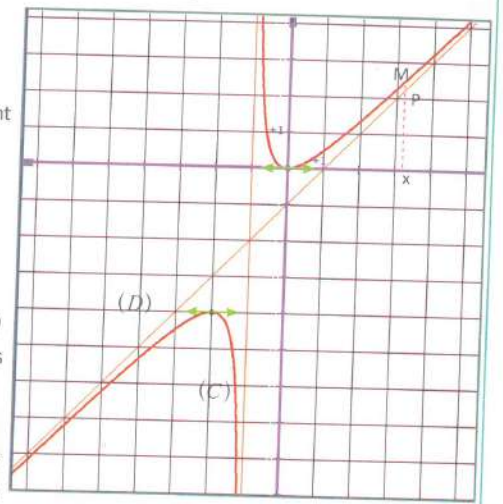
On dit que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote parallèle à l'axe des abscisses à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$

La fonction f admet une limite infinie à droite en 2; on dit que la droite d'équation $x=2$ est une asymptote(parallèle à l'axe des ordonnées) à la courbe (C) de la fonction f.

Activité 3 Asymptote oblique

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Soit (C) la courbe de f dans le plan muni d' un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, et (D) la droite d'équation : $y=x-1$.



1. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Montrer que : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{-1\}$.

3. Soit x un élément de $]1;+\infty[$; et $M(x;f(x))$ un point de la courbe (C) et $P(x;x-1)$ un point de (D).

a Montrer que : $PM=f(x)-(x-1)$.

b Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1))=0$.

Graphiquement :

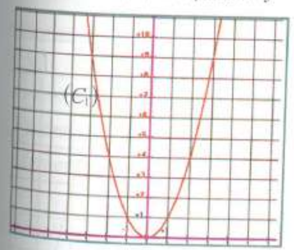
La limite « $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1))=0$ » signifie que la courbe (C) s'approche de plus en plus de la droite (D) chaque fois que x prend des valeurs positives de plus en plus grandes (x tends vers $+\infty$).

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1))=0$

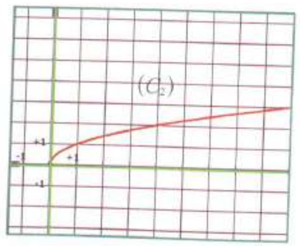
On dit que la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

Activité 4 Branches infinies

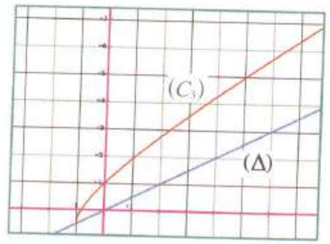
En utilisant un logiciel mathématique on a construit les trois courbes (C_1) ; (C_2) et (C_3) des fonctions f ; g et h et la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$.



$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x^2$



$(\forall x\in[0;+\infty[);\ g(x)=\sqrt{x}$



$(\forall x\in[-1;+\infty[);h(x)=\frac{1}{2}x+\sqrt{x+1}$

1. En utilisant les courbes précédentes, répondre aux questions suivantes :

a Est-ce que les trois courbes admettent des asymptotes parallèles aux axes du repère au voisinage de $+\infty$?

b Est-ce que les trois courbes (C_1) ; (C_2) et (C_3) admettent des asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$?

2. **a** Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

On dit que la courbe (C_1) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

On dit que la courbe (C_2) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

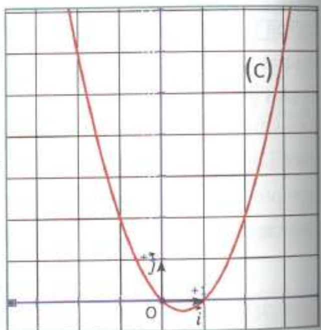
c Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\frac{1}{2}x\right)=+\infty$

On dit que la courbe (C_3) admet une branche parabolique de direction

La droite (Δ) d'équation : $y=\frac{1}{2}x$ au voisinage de $+\infty$.

Activité 5 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-x$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



a Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b Soit x_0 de $\mathbb{R}$ .Montrer que l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse x_0 est $y=(2x_0-1)x-x_0^2$.

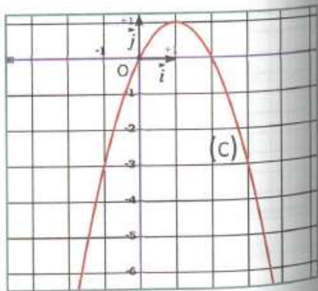
c Vérifier que : $f(x)-[(2x_0-1)x-x_0^2]=(x-x_0)^2$.

d Déterminer la position de la courbe (C) et la tangente (T).

On a toutes les tangentes à la courbe (C) sont situées sous la courbe .

On dit que la concavité de la courbe (C) est dirigée vers les ordonnées positives).(convexe)

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^2+2x$ et (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



a Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

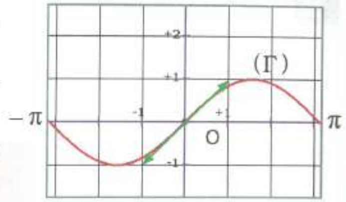
b Soit x_0 de $\mathbb{R}$; montrer que l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse x_0 est : $y=(-2x_0+2)x+x_0^2$.

c Étudier la position de la courbe (C) et la tangente (T)

On a : toutes les tangentes à la courbe (C) sont situées au dessus de (C) ; on dit que la courbe (C) est concave ou la concavité de la courbe (C) est dirigée vers les ordonnées négatives.

d Quelle est la concavité de la courbe (C) ?

3. Soit (Γ) la courbe de la fonction sin sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ (Voir figure).



a Déterminer l'intervalle sur lequel (Γ) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.

b Déterminer l'intervalle sur lequel (Γ) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.

On dit que le point $O(0;0)$ est un point d'inflexion car la courbe (C) traverse la tangente en ce point.

Activité 6 Axe de symétrie - Centre de symétrie

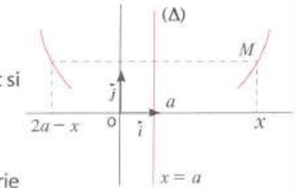
Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D et (C) sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Info : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Axe de symétrie

Soit (Δ) une droite d'équation $x=a$.

On dit que la droite (Δ) est un axe de symétrie de la courbe (C); si le symétrique de tout point M de (C) par rapport à (Δ) est aussi un point de la courbe (C).



a Soit $M(x;y)$ un point de la courbe (C) et $M'(x';y')$ son symétrique par rapport à (Δ) .

Montrer que : $y'=y$ et $x'=2a-x$.

b Montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie pour (C) si et seulement si pour tout réel x de D on a :

$$(2a-x)\in D \quad \text{et} \quad f(2a-x)=f(x)$$

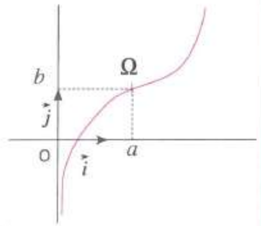
c Application : Montrer que la droite d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2+4x-5$.

2. Centre de symétrie

Info : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Soit $\Omega(a;b)$ un point du plan.

On dit que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si le symétrique de tout point M de (C) par rapport à Ω est aussi un point de la courbe (C).



a Soit $M(x;y)$ un point de (C) et $M'(x';y')$ son symétrique par rapport à Ω.

Montrer que : $x'=2a-x$ et $y'=2b-y$

b Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si : pour tout réel x de D on a :

$$(2a-x)\in D \quad \text{et} \quad f(2a-x)+f(x)=2b$$

c Application : En utilisant le résultat de la question (b), montrer que le point $\Omega(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$.

1 Les Asymptotes

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- Branche infinie d'une courbe (de fonction)

DÉFINITION

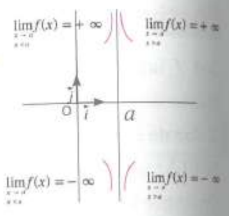
Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C) sa courbe représentative. on dit que (C) admet une branche infinie si l'un des coordonnées d'un point de (C) tend vers l'infini.

2- Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$

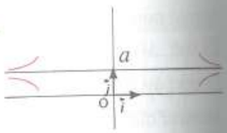
alors on dit que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe (C).



3- Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ alors, on dit que la droite d'équation $y=a$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$)



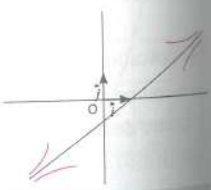
4- Asymptote oblique

Dans ce paragraphe, f étant une fonction de la variable réelle x qui admet une limite infinie au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$).

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$)

où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, on dit alors que la droite d'équation: $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$)



Propriété 1

La droite d'équation $y=ax+b$ $(a\neq0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que $f(x)=ax+b+h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$)

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

On a : $f(x)=x+1+h(x)$ où $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout réel x.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$,alors la droite d'équation: $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Propriété 2

La droite d'équation $y=ax+b$ $(a\neq0)$ est une asymptote oblique à la courbe de f si et seulement si $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right)$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$).

1 Asymptotes parallèles aux axes du repère

Soit f une fonction numérique définie par son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+	‖	-
f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D, puis en déduire les asymptotes à (C) la courbe représentative de f.

1. D'après le tableau de variations de f on a :
$D=\mathbb{R}-\{-1;3\}=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

2. D'après une lecture sur le tableau de variations de f on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (C) parallèle à l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$

Donc, la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à (C) parallèle à l'axe des ordonnées.

- On a : $\lim\limits_{x\to3} f(x)=+\infty$

Donc, la droite d'équation $x=3$ est une asymptote à la courbe de f.

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Donc, la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

2 Détermination de l'asymptote oblique

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$.

a Déterminer les réels a ; b et c tels que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{2\})$; $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

b En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$.

Montrer que la courbe de la fonction g admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

1. **a** Soit x un réel de $\mathbb{R}-\{2\}$ On a :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$
$$=\frac{ax^2+(-2a+b)x+(-2b+c)}{x-2}$$

Alors :
$$x^2-x+1=ax^2+(-2a+b)x+(-2b+c)$$

Donc : $\begin{cases}a=1\\-2a+b=-1\\-2b+c=1\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\end{cases}$

Ainsi : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}); f(x)=x+1+\dfrac{3}{x-2}$

b Soit x un réel de $\mathbb{R}-\{2\}$, on pose:
$h(x)=\dfrac{3}{x-2}$ donc $f(x)=x+1+h(x)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ alors, la droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction f au voisinage $+\infty$.

2. Montrons que la courbe de g admet une asymptote ablique au voisinage de $-\infty$.

On utilise la propriété 2 :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

On a : $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x^3+2x+3}{x^3+x}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}1=1=a$

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-ax)$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x)$

On a : $g(x)-x=\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}-x$
$=\dfrac{x+3}{x^2+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)-x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0=b$

alors, la droite d'équation $y=x$ $(a=1;b=0)$ est une asymptote oblique à la courbe de g au voisinage de $-\infty$.

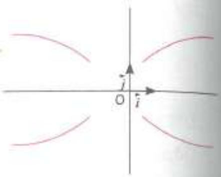
2 Branches paraboliques

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f de la variable réelle x, qui admet une limite infinie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

DÉFINITION

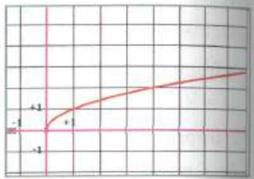
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ $\left(\text{ou }\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0\right)$ alors, on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (ou au voisinage de $-\infty$).



Exemples :

La représentation graphique de la fonction f définie par : $f:x\mapsto\sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

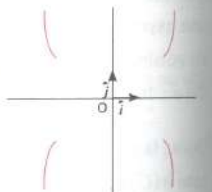
En effet: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$



2- Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ alors on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



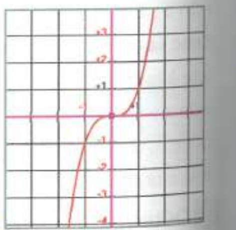
Exemple :

Soit la fonction définie par : $f:x\longmapsto x^3$; on a : au voisinage de $+\infty$,on a:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

et :au voisinage de $-\infty$ on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

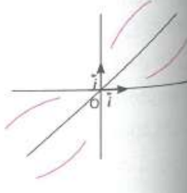
Donc, la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



3- Branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ ou $a\neq 0$

DÉFINITION

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ où $a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=-\infty$ alors, on dit que la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$.



Remarque

On a la même définition au voisinage de $-\infty$

1 Détermination d'une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par:

$$f(x)=2-\sqrt{x+1}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\sqrt{x+1}=-\infty$

2. Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{2-\sqrt{x+1}}{x}=\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}$

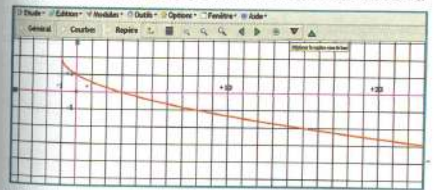
$=\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}=\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Donc, la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Le logiciel ARCHIMEDE clarifi le résultat obtenu



2 Détermination d'une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x)=x^3-2x^2$

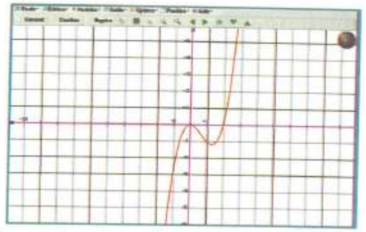
1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2. Étudier la branche infinie de la courbe (C) de f au voisinage de $-\infty$

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

2. Soit $x\in]-\infty;0[$; on a : $\frac{f(x)}{x}=x^2-2x$;

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

d'où, la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



3 Détermination d'une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ $(a\neq 0)$

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\sqrt{x}-x$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Déterminer la branche infinie de la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

1. On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=-\infty$

remarque : $x\geqslant 0$; $x=(\sqrt{x})^2$: et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

2. Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x}-x}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$ Donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ $(a=-1)$

Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$;

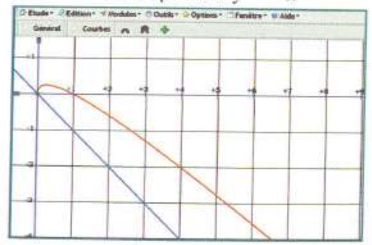
c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=+\infty$

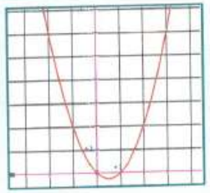
D'où, la courbe (C) de f admet au voisinage $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=-x$

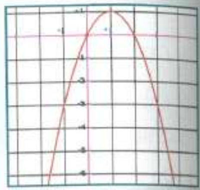


3 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

1- Concavité d'une courbe

DÉFINITION





Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et (C) sa courbe représentative.

▸ On dit que la courbe (C) de f admet **une concavité dirigée vers les ordonnées positives,** si (C) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

▸ On dit que la courbe (C) de f admet **une concavité dirigée vers les ordonnées négatives,** si (C) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

2- Points d'inflexion

DÉFINITION

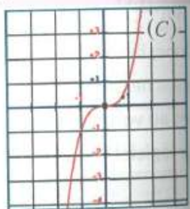
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; $x_0 \in I$ et (C) la courbe représentative de f ; on dit que $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque

Un point d'inflexion est un point de (C) où la courbe (C) change de concavité.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et (C) sa courbe (voir figure);
On remarque (d'après la courbe) que sur $[0;+\infty[$ la concavité de (C) est dirigée vers les ordonnées positives, et sur l'intervalle $]-\infty;0]$ la concavité de (C) est dirigée vers les ordonnées négatives, donc le point $O(0;0)$ est un point d'inflexion pour (C).



3- Concavité et dérivée seconde

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et (C) sa courbe représentative et $x_0 \in I$.

▸ Si f'' est positive sur l'intervalle I, alors la courbe (C) admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.

▸ Si f'' est négative sur l'intervalle I, alors la courbe (C) admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.

▸ Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe ; alors le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

4 Axe et symétrie - Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un ensemble D et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

▸ La droite (Δ) d'équation $x=a\ (a\in\mathbb{R})$ est **un axe de symétrie** de la courbe (C) si et seulement si: $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

▸ Le point $\Omega(a;b)$ $(a\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R})$; est **un centre de symétrie** de la courbe (C) si et seulement si: $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

1 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la concavité de la courbe (C) de f en précisant les deux points d'inflexion.

1. f est une fonction polynôme, donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+1$
Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f''(x)=x^2-4$

2. Étudions la concavité de (C) et déterminons les points d'inflexion
Étudions le signe de $f''(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$;

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

D'après le tableau de signe de $f''(x)$, on déduit que :

▸ la concavité de (C) est dirigée vers les ordonnées positives sur $]-\infty;-2]$ et sur $[2;+\infty[$.

▸ la concavité de (C) Sur $[-2,2]$ est dirigée vers les ordonnées négatives.

▸ f'' s'annule en changeant de signe en $x_0=2$ et en $x_1=-2$; donc, les deux points $A(-2;f(-2))$ et $B(2;f(2))$ sont deux points d'inflexion de (C)
C'est-à-dire: $A(-2;-8)$ et $B(2;-4)$

2 Centre de symétrie

Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par :
$\left(\forall x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$; $f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{2x-1}$

▸ Montrons que la condition $(\forall x\in D);(2a-x)\in D$ est vérifiée
C'est-à-dire : $(\forall x\in D);(1-x)\in D$
Soit $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
on a:

$x>\frac{1}{2}\Rightarrow -x<-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 1-x<\frac{1}{2}$
$\Rightarrow (1-x)\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$
$\Rightarrow (1-x)\in D$

▸ Soit $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$
on a: $x<\frac{1}{2}\Rightarrow -x>-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 1-x>\frac{1}{2}$
$\Rightarrow (1-x)\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
$\Rightarrow (1-x)\in D$

Dans les deux cas : $(\forall x\in D);(1-x)\in D$
Montrons que :
$(\forall x\in D)$; $f(1-x)+f(x)=2b=-1$
Soit $x\in D$; on a :

$$\begin{aligned}f(1-x)+f(x)&=\frac{2(1-x)^2-3(1-x)+3}{2(1-x)-1}+\frac{2x^2-3x+3}{2x-1}\\&=\frac{2x^2-x+2}{1-2x}+\frac{2x^2-3x+3}{2x-1}\\&=\frac{-2x^2+x-2+2x^2-3x+3}{2x-1}\\&=\frac{-2x+1}{2x-1}=-1\end{aligned}$$

Donc : $(\forall x\in D)$; $f(1-x)=-1-f(x)$
D'où: le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

3 Axe de symétrie

Montrer que la droite (D) d'équation: $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction $f:x\mapsto \sin x$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

En utilisant la même procédure que dans l'exercice précédent.
On vérifie que $(\forall x\in[0;\pi]);(\pi-x)\in[0;\pi]$
Soit $x\in[0;\pi]$
On a : $\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(\pi-x)=\sin x$
Donc, la droite d'équation: $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la fonction $\sin$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.

Plan d'étude d'une fonction:

Pour étudier une fonction numérique on suit généralement les étapes suivantes :

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f ;

2 Étudier la parité, la périodicité de f rechercher des centres ou des axes de symétrie puis déterminer son ensemble d'étude ;

3 Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition ;

4 Étudier la dérivabilité de f sur D_E (ensemble d'étude);

5 Étudier les variations de f ;

a. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f ;

b. Étudier le signe de f' (s'il est compliqué, on peut utiliser d'autres méthodes ; décomposition, fonctions auxiliaires, variations de f' ....)

c. En déduire les variations de f et donner le tableau de variations de f.

Pour tracer la courbe représentative de f ; souvent on suit les étapes suivantes :

6 Étudier les branches infinies;

7 Étudier les positions relatives de la courbe de f par rapport aux asymptotes s'ils existent;

8 Déterminer s'il existe des points d'intersection de la courbe de f avec les axes du repère;

9 Déterminer les tangentes à la courbe de f en des points particuliers ;

10 Étudier la concavité de la courbe (C) de f, et déterminer les points d'inflexion s'ils existent en calculant la dérivée seconde.

11 Construire la courbe de f

a. Souvent on choisit un repère orthonormé

b. Construire les tangentes et les asymptotes

c. Construire la courbe de f en tenant compte de la concavité.

EXEMPLE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ et (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Étudier f et construire (C) la courbe de f

1 Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

2 Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

La fonction f est une fonction polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

▸ Tableau de variations de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		+	0	-	0	+	

On en déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

3 Étude des branches infinies de (C) :

La courbe (C) admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Or $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

Donc: (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

4 Calculons $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$:

f est une fonction polynôme, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

La fonction f'' s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe ; donc le point $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

5 Équation de la tangente au point d'inflexion:

On a : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

D'où: l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est :

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$(T) : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

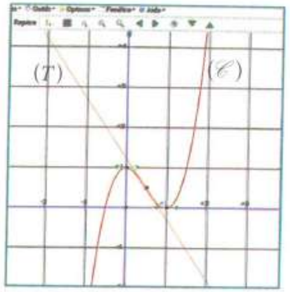
6 A est un centre de symétrie de la courbe (C).

$$\begin{aligned} f(1-x) &= 2(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 1 \\ &= 2(1 - 3x + 3x^2 - x^3) - 3(1 - 2x + x^2) + 1 \\ &= 2 - 6x + 6x^2 - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 1 \\ &= -2x^3 + 3x^2 = 1 - (2x^3 - 3x^2 + 1) = 1 - f(x) \end{aligned}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; (1-x) \in \mathbb{R}$ et $f(1-x) = 1 - f(x)$

Donc, le point A est un centre de symétrie de (C).

7 La courbe (C) : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$



EXEMPLE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1}$; étudier f et tracer (C_f) la courbe de f.

1 Déterminons l'ensemble de définition de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $x \in D \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \neq 0$

résolvons l'équation : $x^2 - 2x + 1 = 0$

on a: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow x = 1$

donc : $x \in D \Longleftrightarrow x \neq 1$

$\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$

D'où : $D =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2 Calculons les limites de f aux bornes de D

▸ Calculons $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$

On a :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1}\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} 3 = 3$

▸ Calculons $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to1} (x^2 - 2x + 1) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to1} (3x^2 - 4x) = -1$

Et $(\forall x \in D) ; x^2 - 2x + 1 > 0$ donc :

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$

3 Les branches infinies

On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 3$ donc la droite d'équation: $y = 3$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

Donc la droite d'équation : $x = 1$ est une asymptote à la courbe de f.

4 Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in D$:

▸ f est une fonction dérivable en tout point de D

Et on a : pour tout x de D :

$$f'(x) = \frac{(6x-4)(x-1)^2-(3x^2-4x)(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)[(3x-2)(x-1)-(3x^2-4x)]}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$(\forall x \in D)\,;\ f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

Tableau de variations de f

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-2(x-1)(x-2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

D'où, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
f	3	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

5 Déterminons le point d'inflexion de (C_f)

▸ Calculons $f''(x)$:

On a f est une fonction deux fois dérivable en tout point de D et on a :

$$(\forall x \in D)\,;\ f'(x) = \frac{-2(x-2)}{(x-1)^3}$$

D'où : $(\forall x \in D)$; on a :

$$f''(x) = -2 \times \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^6}$$
$$= -2\,\frac{(x-1)^2(x-1-3x+6)}{(x-1)^6}$$
$$= \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4}$$

Ainsi, $(\forall x \in D)\,; f''(x) = \dfrac{2(2x-5)}{(x-1)^4}$

Le signe de $f''(x)$ sur D est celui de $2x-5$ d'où, le tableau de signe de f'' est le suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	

le point d'abscisse $\frac{5}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe de f.

6 Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

Il suffit de résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur D

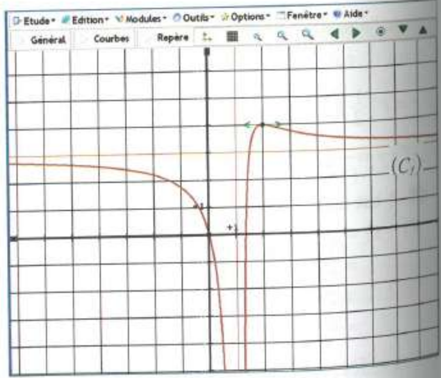
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

$A\left(\frac{4}{3};0\right)$ et $O(0;0)$ sont les deux points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses

Or $0 \in D$

et $f(0) = 0$, donc O est le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.

7 Construction de (C_f)



EXERCICE RÉSOLU 1 Étude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et à gauche en -1 ; puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

3 a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D - \{-1;2\}$.

b. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout x de $]-\infty;-1[$.

Montrer que $f'(x) < 0$ pour tout x de $]2;+\infty[$; puis dresser le tableau de variations de f.

4 a. Montrer que la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b. Tracer la courbe (C_f).

1 a. Déterminons l'ensemble de définition de f :

Soit x un réel, on a : $x \in D \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$

puisque les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont -1 et 2 alors :

$$x \in D \Longleftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in\ ]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$$

Donc : $D =]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

b. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2} = +\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + 1 - \sqrt{x^2-x-2}) = -\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

▸ **Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$:**

Soit x un élément de $[2;+\infty[$:

On a :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2-x-2} + 1$$
$$= \frac{(x-\sqrt{x^2-x-2})(x+\sqrt{x^2-x-2})}{x+\sqrt{x^2-x-2}} + 1$$
$$= \frac{x+2}{x+\sqrt{x^2-x-2}} + 1$$
$$= \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)} + 1$$
$$= \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} + 1$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

2 Étudions la dérivabilité de f à droite en 2 :

Soit x un élément de $]2;+\infty[$; on a :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}-3}{x-2}$$
$$= \frac{x-2-\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x-2}$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}} \quad (\text{car } x-2>0)$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

puisque : $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = +\infty$ alors

$\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\left(1-\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right) = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 2

Interprétation géométrique :

La courbe (C_f) admet une demi-tangente (verticale dirigée vers le bas) au point d'abscisse 2 et d'ordonnée $f(2) = 3$ d'équation : $\begin{cases} x = 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$

▸ Étude de la dérivabilité de f à gauche en -1.

Soit $x \in]-\infty;-1[$:

On a : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x+1-\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}$

$= 1-\dfrac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x+1}$

$= 1+\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2}}$

$= 1+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

info :
On a : $x+1<0$
donc : $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=+\infty$ alors :

$\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=+\infty$

donc :

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(1+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\right)=+\infty$

D'où : f n'est pas dérivable à gauche en -1

Interprétation géométrique :

La courbe de f admet au point d'abscisse -1 et d'ordonnée 0 une demi tangente (verticale dirigée vers le bas) d'équation : $\begin{cases} x=-1 \\ y\leq 0\end{cases}$

3 a. **Calculons $f'(x)$ pour tout x de $D-\{-1;2\}$.**

On a : la fonction : $u:x\mapsto x^2-x-2$ est dérivable sur $]2;+\infty[$ et $u(x)>0$; pour tout x de $]2;+\infty[$.

Donc, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]2;+\infty[$, et on a la fonction $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $]2;+\infty[$.

Donc, la fonction f est dérivable sur $]2;+\infty[$,

De la même manière; on montre que f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Soit x de $D-\{-1;2\}$; on a :

$f'(x)=1-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

Donc :

$(\forall x\in D-\{-1;2\})\,;\, f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$

b. Si $x<-1$ alors : $-2x+1>3$; donc :

$-2x+1>0$

d'où : $2\sqrt{x^2-x-2}-2x+1>0$

Ainsi : $f'(x)>0$ pour tout x de $]-\infty;-1[$.

▸ Si $x>2$, on a :

$f'(x)=\dfrac{(2\sqrt{x^2-x-2}-(2x-1))(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$

$=\dfrac{4x^2-4x-8-(4x^2-4x+1)}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$

$=\dfrac{-9}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}$

Comme $2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1)>0$ alors :

$\dfrac{-9}{2\sqrt{x^2-x-2}(2\sqrt{x^2-x-2}+(2x-1))}<0$

Donc : $f'(x)<0$ pour tout x de $]2;+\infty[$.

le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+			-
f	$-\infty$ ↗	0	3	↘ $\frac{3}{2}$

4 a. **Asymptote oblique :**

Soit x un élément de $]-\infty;-1[$; on a :

$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=x+1-\sqrt{x^2-x-x-2}-2x-\frac{1}{2}$

$=-(x+\sqrt{x^2-x-2})+\frac{1}{2}$

$=-\left(\dfrac{(\sqrt{x^2-x-2}+x)(\sqrt{x^2-x-2}-x)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}\right)+\frac{1}{2}$

$=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}+\dfrac{1}{2}$

puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=1$

alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=1$

et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

d'où :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}+\dfrac{1}{2}=0$

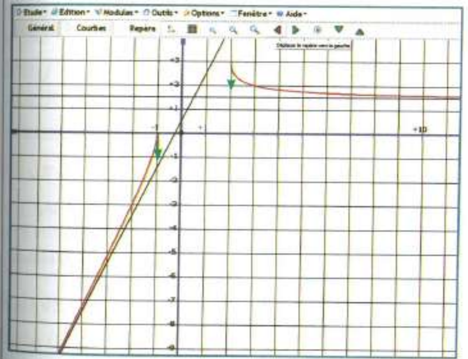
Conclusion :

On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)=0$;

donc, la droite d'équation : $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b. Construction de (C_f) :



EXERCICE RÉSOLU 2 Étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$

1 a. Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b. Vérifier que π est une période de f.

c. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur l'ensemble $E=\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

2 Dresser le tableau de variations de f sur E.

3 Soit (C) la courbe de la restriction de f à $D\cap\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a. Étudier la concavité de (C).

b. Tracer la courbe (C).

1 a. **Déterminons D l'ensemble de définition de f :**

Soit $x\in\mathbb{R}$; on a : $x\in D\iff\cos 2x\neq 0$

or $\cos 2x=0\iff 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

$\iff x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}$

donc : $x\in D\iff x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}$

Ainsi : $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

b. **Vérifions que π est une période de f :**

Soit x un élément de D ; on a : $\cos 2x\neq 0$ et $\cos(2(x+\pi))=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$

donc : $\cos(2(x+\pi))\neq 0$

d'où : $(x+\pi)\in D$.

Soit x un élément de D ; on a :

$f(x+\pi)=\dfrac{\sin^2(x+\pi)}{\cos(2(x+\pi))}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}=f(x)$

Donc : $(\forall x\in D)\,;(x+\pi)\in D$ et $(\forall x\in D)\,;f(x+\pi)=f(x)$

D'où : le nombre π est une période de f.

c. **Détermination de l'ensemble d'étude :**

on a : $(\forall x\in D)\,;-x\in D\,;f(-x)=f(x)$

donc : f est une fonction paire.

De plus π est une période de f ; d'où il suffit d'étudier f sur :

$D\cap\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]=\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

et puisque la fonction f est paire, il suffit de l'étudier sur :

$E=D\cap\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\cap\mathbb{R}^+=\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

2 **Tableau de variations de f :**

La fonction f est dérivable en tout point de D. (comme rapport de deux fonctions dérivables en

EXERCICES RÉSOLUS

tout point de D).

Soit x un élément de D ; on a :

$$f'(x) = \frac{2\sin(x)\cos(x)\cos(2x)+2\sin(2x)\sin^2 x}{\cos^2 2x}$$
$$= \frac{\sin(2x)(1-2\sin^2 x)+2\sin(2x)\sin^2 x}{\cos^2 2x}$$
$$= \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$$

Donc : $(\forall x \in D)$; $f'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$

d'où: le signe de $f'(x)$ sur E est celui de $\sin 2x$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin 2x$	0	$+$		$+$	0

Or $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin^2 x = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos 2x = 0$

et si $0 < x < \frac{\pi}{4}$ alors : $\cos 2x > 0$ (car $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$)

Si $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$; alors: $\cos x < 0$

donc : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	||	$+$	0
f	0 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

3 a. Étude de la concavité de (C) :

Calcul de f'' :

La fonction f est deux fois dérivable en tout point de D; et on a pour tout x de D;

$$f''(x) = \frac{2\cos(2x)\cos^2(2x)+4\cos(2x)\sin^2(2x)}{\cos^4 2x}$$
$$= \frac{2\cos(2x)(\cos^2(2x)+2\sin^2(2x))}{\cos^4 2x}$$
$$= \frac{2\cos(2x)(1+\sin^2(2x))}{\cos^4(2x)}$$

d'où : le signe de $f''(x)$ sur $D\cap\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est le même que celui de $\cos 2x$.

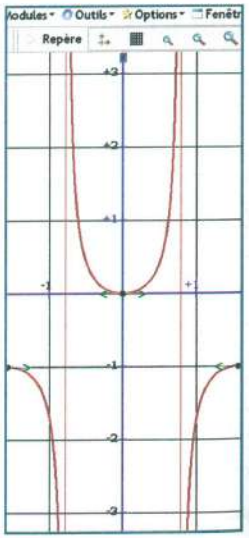
donc:

x	$-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	-	+	-
Concavité de (C)	∩	∪	∩

b. **Courbe de** f :

▸ La fonction f est paire, donc la courbe (C) de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

▸ de plus la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est une asymptote à (C) et la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{4}$ est une asymptote (C).



Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble D et $(\mathscr{C})$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Quand disons-nous que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$?

2 Quand disons-nous que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

3 Peut-on avoir une courbe qui admet deux asymptotes: l'une oblique et l'autre horizontale au voisinage de $+\infty$?

4 Interpréter $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 2$ graphiquement ?

5 Quand disons-nous que $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$.

a) Une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 3x$?

b) Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses?

6 Si $f''(x_0) = a$ alors, peut-on dire que le point $A(x_0;f(x_0))$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment peut-on étudier la position relative d'une courbe et son asymptote oblique?

2 Comment peut-on montrer que la droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ (de deux méthodes différentes)?

3 Comment peut-on montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est une direction asymptotique?

4 Comment peut-on montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$?

5 Comment peut-on montrer que le point $\Omega(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un ensemble D et $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Si $(\forall x \in D)$; $f(x) = \frac{3x^2-4x}{x^2-2x+1}$ alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote d'équation :	$x = 3$	$y = 3$	$x = 1$
2 Si $(\forall x \in D)$; $f(x) = x + \frac{x+1}{x-2}$ alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique d'équation :	$y = x$	$y = x+1$	$y = x-1$
3 Si $(\forall x \in D)$; $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$ alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une :	asymptote oblique	branche parabolique la droite direction $(D): y = 2x$	branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
4 Si $(\forall x \in D)$; $f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet :	une seule asymptote	deux asymptotes	trois asymptotes
5 La courbe représentative de la fonction: $x \mapsto \cos x \sin x$ admet un axe de symétrie sur l'intervalle $[0;\pi]$ d'équation :	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{6}$
6 La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ admet un centre de symétrie de coordonnées :	$x = -1$ et $y = 0$	$x = 1$ et $y = 2$	$x = 2$ et $y = 1$
7 La courbe de la fonction $x \mapsto 2x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 10x^3$ admet un point d'inflexion; ses coordonnées sont :	$x = 0$ et $y = 0$	$x = -1$ et $y = 4$	$x = 1$ et $y = -10$

Exercices d'application

Les branches infinies

Exercice 1 : Étudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ de la courbe de f dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = x^3 + x + 1$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{x-1}$
4. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

Exercice 2 : Déterminer s'il existe des asymptotes verticalesà la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-2}$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$

Exercice 3 : Déterminer s'il existe des asymptotes horizontales à la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$
3. $f(x) = 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

Étude de la concavité - points d'inflexion

Exercice 4 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$

1. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la concavité de la courbe de f.

Exercice 5 : Soit f la fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-1;+\infty[$.
2. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]-1;+\infty[$.
3. Étudier la concavité de la courbe de f.

Exercice 6 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
Étudier la concavité de la courbe de f.

Exercice 7 : Déterminer les points d'inflexion, s'ils existent, de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^3 + x$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$
4. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Exercice 8 : Étudier la concavité de la courbe de la fonction dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 4x^2 + 3x$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{x-1}$
4. $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$

Construction de la courbe d'une fonction

Exercice 9 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^3 + x^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
4. Étudier les branches infinies de (C_f).
5. Tracer la courbe (C_f).

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Étudier les branches infinies de (C_f).
2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un point d'inflexion pour (C_f).
4. a) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point Ω.
b) Tracer (T) et (C_f).

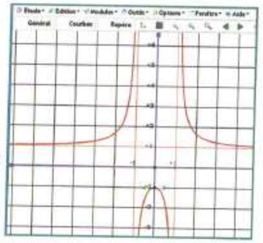
Exercice 11 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3. Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x) - (x+2))$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
4. Étudier les variations de f.
5. Tracer (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

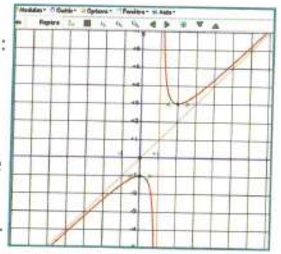
Lecture de la courbe d'une fonction

Exercice 12 : En utilisant la courbe représentative de f (voir figure), déterminer :



1. l'ensemble de définition.
2. les branches infinies de la courbe de f.
3. les variations de f.

Exercice 13 : En utilisant la courbe d'une fonction f (voir figure), déterminer :



1. l'ensemble de définition de f.
2. les branches infinies de la courbe de f.
3. les variations de f.

Eléments de symétrie

Exercice 14 : On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est une fonction paire.
3. Que peut-on déduire de la courbe de f.

Exercice 15 : 1. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = x + 1 - \dfrac{4}{x-2}$.
Montrer que le point $A(2;3)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.
2. On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :
$h(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{13}{12}$
Montrer que le point $B\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de h.

Exercice 16 : Montrer que la courbe de la fonction f définie sur $[0;2\pi]$ par :
$f(x) = \cos 2x$ admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

Exercices de renforcement

Exercice 17 : Étudier dans chaque cas la fonction f et tracer la courbe (C_f) de f :

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$
3. $f(x) = |x| + x^2$
4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$
6. $f(x) = x^3 + x^2$

Exercice 18 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x^4 - x^2$;
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.
b) Étudier les branches infinies de (C_f).
c) Tracer (C_f).

Exercice 19 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-2}$;
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
b) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$(\forall x \in D_f);\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
b) Dresser le tableau de variations de f.
4. a) Étudier les branches infinies de (C_f).
b) Tracer (C_f).

Exercice 20 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$.
et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f.
4. Étudier les branches infinies de (C_f).
5. Tracer (C_f).

Exercice 21 : Tracer l'allure de la courbe d'une fonction f vérifiant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

et : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x) = 0$

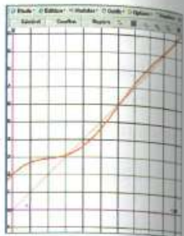
Exercice 22 : Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans chacun des cas suivants:

1. $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$
3. $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$
4. $f(x) = \sin x \cos^2 x$

Exercice 23 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 2\dfrac{\sin 2x}{x}$.
On a utilisé le logiciel ARCHIMEDE pour tracer sa courbe dans le plan muni un repère orthonormé.
Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Utilisation des variations

Exercice 24 : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$



1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
3. En déduire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 \geq 5$$

Études de fonctions

Exercice 25 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x^2}$

1. En utilisant le logiciel Archimède, construire (C_f) la courbe de f.
2. Déterminer les deux asymptotes de (C_f).
3. a) Calculer $f'(x)$.
b) Donner une équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = -2$.

Exercice 26 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = |x| + \dfrac{3x}{3+x^2}$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. a) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
b) Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que (C_f) admet deux asymptotes que l'on déterminera.
5. On suppose que :
$(\forall x \in \mathbb{R}^*);\ f''(x) = \dfrac{6x(x^2-9)}{(3+x^2)^3}$
Étudier la concavité de (C_f).
6. Tracer la courbe (C_f).

Exercice 27 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = \dfrac{5x^2 + 8x + 4}{(x+2)^2}$
Soit (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;i;j)$.

1. a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. a) Montrer que :
$(\forall x \in D_f);\ f'(x) = \dfrac{4(3x+2)}{(x+2)^3}$
et $f''(x) = \dfrac{-24x}{(x+2)^4}$
b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. a) Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).
b) Étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = 5$.
c) Étudier la concavité de (C_f) en précisant que (C_f) admet un point d'inflexion A que l'on déterminera.
d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point A.
e) Tracer (T) et (C_f).

Exercice 28 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :
$f(x) = x + 1 - \dfrac{x+1}{x^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b) Étudier les branches infinies de (C_f).
2. a) Montrer $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
c) Montrer que : $f''(x) = \dfrac{-2(x+3)}{x^4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ en déduire que (C_f) admet un point d'inflexion J que l'on déterminera.
3. a) Déterminer les points l'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.
b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$.
4. Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 29 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = 3(x-1) + \dfrac{1}{(x-1)^3}$
Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
3. a) Montrer que f est dérivable en tout point de D et que :
$(\forall x \in D);\ f'(x) = \dfrac{3(x^2-2x)(x^2-2x+2)}{(x-1)^4}$
b) Étudier les variations de f sur $]1;+\infty[$.
4. a) Montrer que le point $A(1;0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
b) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote oblique que l'on déterminera.
c) Tracer la courbe (C_f).
5. Résoudre graphiquement l'inéquation :
$f(x) - 3x + 2 \geq 0;\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 30 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$
et soit (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer les réels a et b tels que
$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = a + \dfrac{bx}{x^2+1}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $\Omega(0;3)$.
c) Étudier la position relative de (C_f) et (T).
4. Montrer que le point $\Omega(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_f).
5. Tracer (C_f) et (T).

Exercice 31 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x|x-3|}{x+1}$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 3$ et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
3. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f - \{3\}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Étudier les branches infinies de (C_f).
7. Tracer la courbe (C_f).
8. En utilisant la courbe (C_f), construire les courbes des fonctions g et h définies par :

a) $g(x) = -f(x)\,;\, x \in D_g$

b) $h(x) = |f(x)|\,;\, x \in D_h$

Exercice 32 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \frac{2x+6}{x+1}$ et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. **a)** Vérifier que :
$(\forall x \in D_f)\,;\, f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$

b) Étudier les branches infinies de (C_f).

c) Étudier la position relative de (C_f) et son asymptote oblique.

3. Montrer que : $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ pour tout x de D_f, puis dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que : $(\forall x \in D_f)\,;\, f''(x) = \left(\frac{2}{x+1}\right)^3$ puis étudier la concavité de (C_f).
5. Déterminerune équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
6. Tracer (C_f) et (T).
7. On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 6}{1 - |x|}$

Montrer que h est paire puis tracer (C_h) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Fonctions périodiques

Exercice 33 : On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier les variations de f.
2. Tracer la courbe (C_f).
3. Résoudre graphiquement l'équation : $m + \cos x(1 - \sin x) = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 34 : 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x + 2\sin x - 2$

a) Vérifier que 2π est une période de f.

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

2. **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et vérifier que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. En utilisant les questions précédentes montrer que : $f(x) \le -\frac{3}{4}$ pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$.
4. Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Exercice 35 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2. **a)** Montrer que : $(\forall x \in D)\,;\, f'(x) = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. **a)** Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique que l'on déterminera.

b) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation : $y = x - 2$.

4. **a)** Montrer que le point $A(0;-4)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

b) Tracer la courbe (C_f).

5. En utilisant (C_f) construire les courbes des deux fonctions g et h définies par :

a) $g(x) = f(|x|)$

b) $h(x) = f(-|x|)$

6. Soit $m \in \mathbb{R}$; discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 36 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = x + 2 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$, puis interpréter géometriquement le resultat.

2. **a)** Montrer que :
$f'(x) = \frac{(x+1)^2[(x-1)^2+2]}{x^4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. **a)** Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,;\, f''(x) = -\frac{12(x+1)}{x^5}$ puis étudier la concavité de (C_f).

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ).

4. **a)** Écrire une équation de la tangente (D) à (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (D).

5. En utilisant la courbe (C_f) ; déterminer suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation :
$x^4 + (2-m)x^3 - 2x - 1 = 0$

Exercice 37 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 2(x-2)\sqrt{x} - x$ et soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.
3. **a)** Montrer que : $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer $f(2)$, $f(3)$ puis tracer (C_f) (unité 2cm).
5. Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation : $f(\sin t) = m\,;\, t \in [0;\pi]$

Exercice 38 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$.

c) Étudier les branches infinies de (C_f) et déterminer la position relative de (C_f) et son asymptote oblique (Δ).

2. **a)** Montrer que :
$(\forall x \in D)\,;\, f'(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3. **a)** Montrer que le point $\Omega(-1;-2)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

b) Tracer la courbe (C_f).

4. Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation
$f(x) = m + 1$

Exercice 39 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonomé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'on peut étudier f sur l'intervalle $I = [0;2\pi]$.
2. Montrer que :
$(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = 4\cos x(1-\sin x)$
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Écrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
5. Calculer $f''(x)$ et écrire $f''(x)$ en fonction de $\sin x$.
6. Déterminer les points d'inflexion de (C_f).
7. Tracer la courbe (C_f) sur $[-2\pi;4\pi]$.

Exercice 40 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$$
et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. **a)** Déterminer D l'ensemble de définition de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis déduire les branches infinies de (C_f).
c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = 1$.
2. Étudier les variations de f.
3. **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2.
b) Tracer la courbe (C_f).

Exercice 41 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2+1}\ ; x \le 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{2} \quad ; x > 0 \end{cases}$$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat.
3. **a)** Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$.
b) Étudier les variations de f.
4. **a)** Étudier les branches infinies de (C_f).
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1.
c) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse négatif.
d) Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
$\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}6\ ;\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$
$\sqrt{10} \simeq 3{,}1$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0{,}7$
5. Résoudre suivant les valeurs de m l'équation $(x \in \mathbb{R});|f(x)| = m$.

Exercice 42 : I) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par:
$g(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$; où a et b sont deux réels.
Déterminer les réels a et b pour que la courbe de g admet au point $I(0;3)$ une tangente d'équation $y = 4x+3$.

II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer les réels α et β tels que :
$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2+1}$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).
5. Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la tangente au point $I(0;3)$.
6. Montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_f).
7. Tracer la courbe (C_f) (unité graphique 2cm).

III)
1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = \frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$
a) Exprimer $h(x)$ en fonction de $f(x)$.
b) Construire la courbe de la fonction h.
2. Soit m un paramètre réel. Déterminer en utilisant la courbe de f le nombre de solutions de l'équation : $x^2(3-m)+4x+3-m = 0$
3. Même question pour l'équation :
$x^4(3-m)+4x^2+3-m = 0$

Exercice 43 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x^2+4|x|}{\sqrt{x^2-1}}$
et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$; puis donner une interprétation géometrique du résultat.
4. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+4$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
c) Étudier la position relative de (C_f) et son asymptote oblique (Δ) sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
5. a) Montrer que pour tout x de $]1;+\infty[$;
$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$
b) Dresser le tableau de variations de f sur $]1;+\infty[$.
6. Tracer la courbe (C_f) (unité graphique $0{,}5cm$).

Exercice 44 : Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par :
$$f(x) = x - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}$$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
c) Étudier la position de (C_f) par rapport la droite (Δ) sur $[1;+\infty[$.
3. **a)** Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
b) Montrer que :
$(\forall x \in]1;+\infty[);\ f'(x) = \frac{(x^2-2)(x^4+x^2+2)}{x^2(x^2\sqrt{x^2-1}+2)\sqrt{x^2-1}}$
c) Dresser le tableau de variations de f sur $[1;+\infty[$.
4. Tracer la courbe (C_f).
5. Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation:
$(x \in \mathbb{R});\ f(x) = mx;\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 45 : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$f(x) = x + 2 - \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$
et soit (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

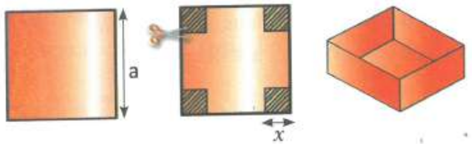
1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction de f.
2. **a)** Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
b) Étudier les branches infinies de (C_f).
3. **a)** Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $D_f - \{0\}$, puis dresser le tableau de variations de f.
4. **a)** Calculer $f(-1)$.
b) En déduire les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.
5. Construire (C_f).

EXERCICES

Exercice 46 : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
3. Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
4. Tracer la courbe (C_f).

Exercice 47 : On veut construire à l'aide d'une plaque métallique carrée de côté a,
une boîte sans couvercle et sous forme d'un parallélépipède rectangle, en enlevant des carrés de côté x (voir figure).
Déterminer la valeur x pour laquelle le volume de la boîte soit maximal.



Exercice 48 : Soit ABC un triangle isocèle en C de base $AB=12cm$ et de hauteur $CH=9cm$.
On construit un rectangle $MNPQ$ tel que :
$N\in[AB]$; $M\in[AB]$; $P\in[BC]$ et $Q\in[AC]$.
On pose : $AM=x$ et $S(x)$ l'aire du rectangle $MNPQ$.
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x tel que : $0\le x\le 12$ et $f(x)=\sqrt{S(x)}$.

1. Calculer $f(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer la valeur de x pour que $f(x)$ soit maximale.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 12.
4. Construire (C_f) la courbe representative de f sur $[0;12]$.

Exercice 50 : On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :
$f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

1. **a)** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$.
2. **a)** Montrer que la fonction f est dérivable à gauche en $x_0=0$.
b) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de f.
3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
a) Montrer que : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$
b) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.
c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

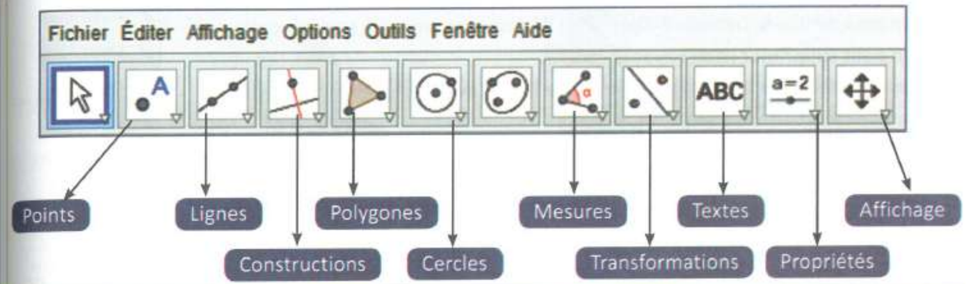
les bonnes réponses des questions de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	2 / 3	2	2	3	1	2	1 / 3			

UTILISATION DES LOGICIELS

Tice-Geogebra

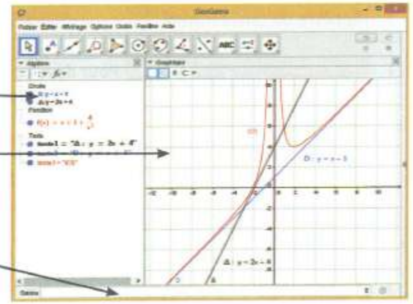
Fichier Editer Affichage Dispositions Outils Fenétre Aide



Présentation

L'écran par défaut est partagé en plusieurs parties:

- La barre des menus ;
- La barre des outils ;
- La fenêtre **«Algèbre»**
(Elle donne la liste de tous les éléments, visibles ou non);
- La fenêtre **«Graphique»**;
- Le **champ de saisie** ;
On peut faire apparaître avec le menu Affichage
- La fenêtre **«Tableur»** ;
- La fenêtre **«Calcul formel»** ;
- La liste des **fonctions** et celle des commandes,
Obtenue en cliquant sur.



Menu déroulant de chaque icône

Lorsque l'on clique sur le petit triangle blanc situé en bas à droite d'une icône, on obtient le menu de cette icône. Les différents outils contenus dans cette icône apparaissent.

Utiliser les aides du logiciel

- En s'approchant d'objets déjà construits, le logiciel affiche un **message** concernant cet objet.
- Le logiciel affiche à droite des icônes une **aide** qui indique comment utiliser l'outil.
- En utilisant l'outil Parallèle, le message est **«Parallèle** point [créé ou non] et segment, droite, demi-droite ou vecteurs [créés]». On peut alors faire un clic gauche sur un point, puis sur une droite: la droite parallèle à la première droite et passant par ce point se construit.

UTILISATION DES LOGICIELS

Le menu contextuel

Tous les objets créés possèdent un menu contextuel: on l'ouvre par un clic droit sur l'objet, soit dans la fenêtre «Graphique», soit dans la fenêtre «Aglèbre».

- On peut **afficher ou cacher** l'objet.
- On peut afficher ou cacher son nom.
- On peut activer la **trace** de l'objet : il laisse une trace en se déplaçant.
- On peut **supprimer** l'objet avec Effacer.
- On peut modifier la taille, la couleur... de l'objet avec Propriétés ...

Construire un curseur

- Le curseur permet de faire varier un nombre ou un angle.
- Pour créer un curseur, sélectionner l'outil de la boîte des propriétés, puis cliquer sur le graphique.
- Dans la fenêtre qui s'ouvre, on peut définir les paramètres de ce curseur. L'incrément est le pas selon lequel augmente la variable de min à max.

Calcul formel avec Geogebra

Fenêtre de calcul formel	Sélectionner Calcul formel dans le menu Affichage
Développer une expression	Pour développer l'expression $(x-1)(x+2)$: Développer $[(x-1)(x+2)]$.
Factoriser une expression	Pour factoriser l'expression x^2-3x+2:
Résoudre une équation ou une inéquation	Pour résoudre l'équation $x^2-5x-3=0$: Pour résoudre l'inéquation $3x^2+2x\geq 0$: Pour résoudre le système $\begin{cases}2x-y=1\\x+3y=4\end{cases}$
Calculer une dérivée	Pour dériver la fonction $f{:}x\longmapsto 3x^5$:

Commandes utiles

Arrondi	Dans le menu Options, cette commande permet de préciser le nombre de décimales ou de chiffres significatifs affichés à l'écran.
Saisir l'expression d'une fonction	Pour entrer la fonction telle que $f(x)=x^2$, Saisie: f(x)=x^2 Pour entrer la fonction g définie sur l'intervalle $[1;5]$ par $g(x)=x^4$, Saisie: g(x)=Fonction[x^4, 1, 5]
Construire la tangente à une courbe	La commande Tangente $[A,f]$ permet de tracer la tangente en A à la courbe représentative de la fonction f.
Créer un point défini comme intersection de deux courbes	Sélectionner Intersection dans l'icône Points. Ensuite, cliquer sur l'un, puis sur l'autre des objets dont le point est l'intersection.
Créer un polygone régulier	Polygone régulier dans l'icône polygones créer un polygone régulier à partir de deux sommets déjà définis et du nombre de côtés.

Chapitre 11

Euclide

Le philosophe Euclide est considéré comme le premier qui a relié deux points par un segment, ce qui représente pour lui une distance. Mais un couple de points, porte des informations plus significatives, il détermine une distance, une direction et un sens.
Parmi les mathématiciens qui ont abordé la notion de vecteur, on cite «Grassman» et «Hamilton».
On utilise la notion de vecteur dans plusieurs domaines, notamment la physique, l'économie, la photographie et l'informatique.

Objectifs de la leçon

- Reconnaitre l'égalité de deux vecteurs dans l'espace;
- Relier une somme de deux vecteurs dans l'espace par un parallélogramme;
- Reconnaitre et utiliser la somme deux vecteurs dans l'espace;
- Utiliser la relation de Chasles;
- Reconnaître la mutiplication d'un vecteur par un scalaire.

Le contenu

1. **Égalité de deux vecteurs.**
2. **Somme de deux vecteurs.**
3. **Colinéarité de deux vecteurs - Définition vectorielle d'une droite**
4. **Définition vectorielle d'un plan - Vecteurs coplanaires.**

Capacités attendues

- Maîtriser des régles de calcul vectoriel dans l'espace.
- Identifier et exprimer la colinéarité de deux vecteurs dans l'espace.
- Appliquer la colinéarité et la coplanarité des vecteurs dans la résolution des problèmes géométriques.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Alignement de trois points-colinéairité de deux vecteurs

Soit $ABCD$ un parallélogramme

1. Construire les points E et K tels que: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB}$.

2. **a** Écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b En déduire que les points C, E et K sont alignés.

3. Soit F le milieu du segment $[AD]$.

Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$, en déduire la nature du quadrilatère $BCEF$.

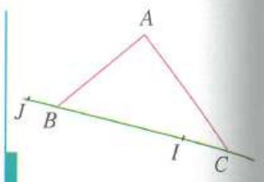
Activité 2 Définition vectorielle d'une droite

Soit ABC un triangle. I et J sont deux points de la droite (BC) (voir figure)

1. En utilisant les points de la figure, déterminer trois vecteurs directeurs de la droite (BC).

2. Déterminer un vecteur directeur de la droite passant par A et parallèle à la droite (BC).

3. Quel est l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BC}$ où $k \in \mathbb{R}$?



ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 3 Vecteurs de l'espace

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. **a** En considérant les plans (ABC) et (AEH), vérifier que

$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur du plan et aussi un vecteur de l'espace.

b On a: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$. Donner un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AD}$.

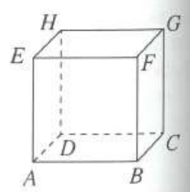
2. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$

a Écrire $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b Écrire $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c En déduire $\overrightarrow{EC}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

> *info :* Toutes les propriétés vectorielles dans le plan, restent valables dans l'espace.



Activité 4 Égalité de deux vecteurs - Vecteurs coplanaires

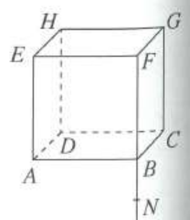
Soit $ABCDEFGH$ un cube et N un point de la droite (BF) (voir figure).

1. En utilisant les points de la figure, donner:

a Deux vecteurs ayant la même direction, même sens et même norme.

b Deux vecteurs ayant la même direction et la même norme, mais ils n'ont pas le même sens.

c Trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FB}$.



2. Montrer que les points A, C, G et E sont coplanaires.
(c'est-à-dire: ils appartiennent au même plan)

On dit dans ce cas que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

3. Montrer que les points C, E, G et H ne sont pas coplanaires.

On dit dans ce cas que les vecteurs $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ ne sont pas coplanaires

4. En utilisant les points de la figure, donner trois vecteurs coplanaires, et trois vecteurs non coplanaires.

> *info :* Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont aussi coplanaires

> *info :* Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont aussi non coplanaires

Activité 5 Colinéarités de deux vecteurs-Définition vectorielle d'une droite dans l'espace.

Soit $ABCDEFGH$ un parallèlipipède rectangle et (Δ) une droite passant par les points E et C.

1. Montrer que la droite (Δ) est incluse dans le plan (AEG).

Dans la suite de l'activité, on pose: $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

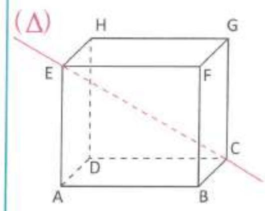
2. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ).

3. On considère les points P, Q et R tels que:

$\overrightarrow{AP} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{7}{3}\vec{i} + \frac{7}{3}\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k}$ et $\overrightarrow{GR} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

a Montrer que $\overrightarrow{EP} = -2\vec{u}$ et $\overrightarrow{EQ} = \frac{7}{3}\vec{u}$.

b Montrer que les points P, Q et R appartiennent à la droite (Δ).



Activité 6 Définition vectorielle d'un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre P et R sont deux points de l'espace tels que:
$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure et montrer que $(RP) \parallel (AC)$

2. En déduire que le point R appartient au plan (ABC).

3. Soit E et F deux points de l'espace, x et y deux réels tels que:
$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB}$.

Montrer que le point E appartient au plan (ABC) (Utiliser le point F).

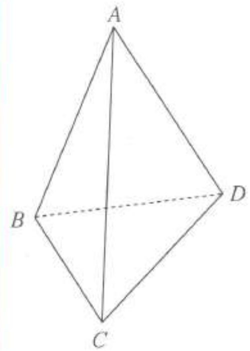
4. Soit M un point du plan (ABC).

M_1 et M_2 sont deux points de l'espace tels que:

- M_1 est le projeté du point M sur (AB) parallèlement à (AC).
- M_2 est le projeté du point M sur (AC) parallèlement à (AB).

Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

5. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ où x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

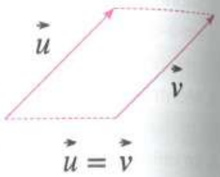


LE COURS

1 Égalité de deux vecteurs

Éléments caractéristiques d'un vecteur

Soit A et B deux points différents de l'espace. Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors:
- La direction du vecteur $\vec{u}$ est la droite (AB).
- Le sens du vecteurs $\vec{u}$ est celui de A vers B.
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est la distance AB, et on écrit: $\|\vec{u}\| = AB$.



Remarque
- Pour tout point A de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction et sa norme est nulle; $\overrightarrow{AA}$ est appelé le vecteur nul, et on écrit: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point A de l'espace, il existe un et un seul point M de l'espace tel que: $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

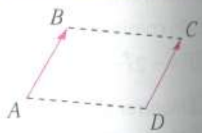
DÉFINITION

On dit que deux vecteurs sont égaux, s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Info :
si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$
alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Propriété

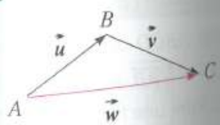
Soit $ABCD$ un quadrilatère dans l'espace on a:
$ABCD$ parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



2 Somme de deux vecteurs

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ tel que:
Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, alors: $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$,
et on écrit: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

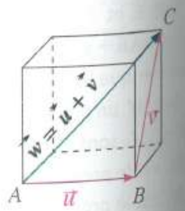


Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Opposé d'un vecteur

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace.
- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ et le vecteur qui a la même direction, et la même norme que le vecteur $\vec{u}$, mais il est de sens contraire au vecteur $\vec{u}$.
- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$



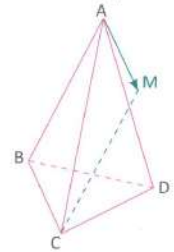
- Pour tous points A et B de l'espace on a: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

POUR COMPRENDRE

1 Égalité de deux vecteurs - Raisonnement par l'absurde

Soit $ABCD$ un tétraèdre
1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$.
3. Montrer que $M \notin (ACD)$.

1. On a: $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur de l'espace et A un point de l'espace,
donc, il existe un point unique M, tel que: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$
(c'est-à-dire $AMCB$ est un parallélogramme).



2. **Montrons que** $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$
Puisque: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$, alors le quadrilatère $AMCB$ est un parallélogramme.
D'où $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$
3. **Montrons que** $M \notin (ACD)$
Utilisons un raisonnement par l'absurde.
Supposons que $M \in (ACD)$ c'est-à-dire
$D \in (AMC)$. (1)
Puisque: $AMCB$ est un parallélogramme alors
$B \in (AMC)$. (2)
de (1) et (2) on en déduit que les points A, M, B et C appartiennent tous au plan (ABC).
Ce qui contredit le fait que $ABCD$ est un tétraèdre.
Par conséquent $M \notin (ACD)$.

2 Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points non alignés.
1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si pour tout point M de l'espace on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
2. Soit E et F deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
Montrer que le quadrilatère $BCFE$ est un parallélogramme.

1. Soit M un point de l'espace.
On a:
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme}$$
D'où, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ pour tout point M de l'espace.
2. **Montrons que** $BCFE$ **est un parallélogramme**
on a: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
et puisque: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$
alors: $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{BC}$
D'où: le quadrilatère $BCFE$ est un parallélogramme

3 Utiliser de la relation de Chasles

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace
1. Simplifier: $\vec{u} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

1. Simplifions $\vec{u} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
on a: $\vec{u} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
donc: $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
d'où: $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$
par suite $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$
(car $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$)
Conclusion: $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$

Info :
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$
(Relation de Chasles)

2. **Montrons que** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
On a: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$
donc: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$
d'où: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ (car $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$)
par suite, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

3 Colinéarité de deux vecteurs-Définition vectorielle d'une droite

1- Multiplication d'un vecteur par un réel

DÉFINITION

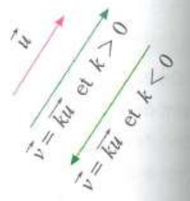
- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $\vec{v}$ noté $k.\vec{u}$, ou simplement $k\vec{u}$, et qui verifie les conditions suivantes:

- $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
- $\vec{v}$ a le même sens que celui de $\vec{u}$ si $k>0$, et de sens contraire de $\vec{u}$ si $k<0$
- $\|\vec{v}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$

On écrit $\vec{v}=k\vec{u}$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k on pose: $0.\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{0}=\vec{0}$



Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' on a:

- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
- $1.\vec{u}=\vec{u}$
- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $k\vec{u}=\vec{0}\iff k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

2- Colinéarité de deux vecteurs - alignement de trois points

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Info :
Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

Conséquences

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

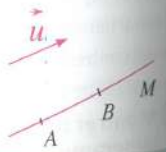
- ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) $\iff$ (A,B et C sont alignés).
- ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) $\iff$ $(AB)\,/\!/\,(CD)$.

3- Définition vectorielle d'une droite de l'espace

DÉFINITION

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

Tout vecteur non nul et colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB).



Propriété

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ où $k\in\mathbb{R}$, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, cette droite est notée $D(A;\vec{u})$.

Remarque

On a: $D(A,\vec{u})=\{M\in(\mathscr{E})\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\,;k\in\mathbb{R}\}$

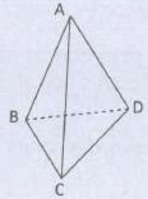
1 Colinéairité de deux vecteurs

Soit $ABCD$ un tétraèdre

On considère les points M,N,P et Q tels que:

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$,

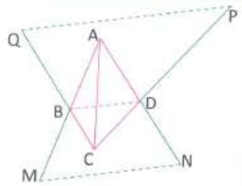
$\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$



1. Construire la figure.
2. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

1. La figure

Construisons les points M,N,P et Q en utilisant les éléments caractéristiques d'un vecteur: direction, sens et norme et le produit d'un vecteur par un réel.



Exemple: Pour la construction du point M.

- On a: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ donc A,B et M sont alignés (la direction)
- $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens (car $2>0$)
- $\|\overrightarrow{AM}\|=2\times AB$

2. **Écrivons $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$**

On a: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$ (Relation de Chasles)

$$\begin{aligned}&=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\\&=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\\&=2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})\\&=2\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$.

On a aussi: $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}$ (Relation de Chasles)

$$\begin{aligned}&=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}\\&=3(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})\\&=3\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

Donc: $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{DB}=-3\overrightarrow{BD}$.

3. **Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.**

Puisque $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$

Alors: $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$ et $-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BD}$

Donc: $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

D'où: les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires.

2 Définition vectorielle d'une droite

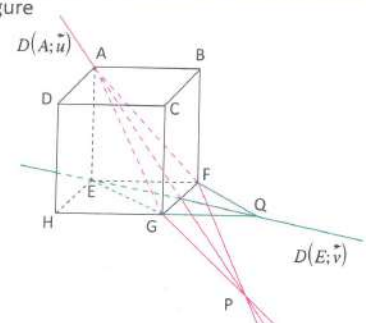
Soit $ABCDEFGH$ un cube.

on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EF}$

On considère les droites $D(A;\vec{u})$ et $D(E;\vec{v})$.

1. Faire une figure contenant les droites $D(A;\vec{u})$ et $D(E;\vec{v})$.
2. Montrer que les droites $D(A;\vec{u})$ et $D(E;\vec{v})$ passent par le point I milieu du segment $[FG]$.

1. la figure



$D(A,\vec{u})$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}$

Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}$

On construit le parallélogramme $AGPF$.

La droite $D(A;\vec{u})$ passe par les points A et P.

De la même façon, on construit la droite $D(E;\vec{v})$ qui passe par les points E et Q tel que $\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$.

2. **Montrons que $D(A;\vec{u})$ et $D(E;\vec{v})$ passent par le point I milieu du segments $[FG]$.**

Puisque I est le milieu de $[FG]$, alors

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AG})$ (propriété du milieu d'un segment).

donc: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\vec{u}$, d'où $I\in D(A;\vec{u})$ **(1)**

de même: $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EF})$ (propriété du milieu d'un segment)

donc: $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}\vec{v}$, d'où $I\in D(E;\vec{v})$ **(2)**

de (1) et (2) on déduit que les droites $D(A,\vec{u})$ et $D(E,\vec{v})$ passent par le point I milieu du segment $[FG]$.

4 Définition vectorielle d'un plan - Les vecteurs coplanaires

1- Définition vectorielle d'un plan

DÉFINITION

Soit (P) un plan de l'espace et A, B et C sont trois points non alignés du plan (P).

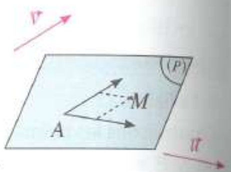
On dit que (P) est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Info : $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan (P).

Conséquences

Deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A définissent un plan unique noté: (P), (ce plan passe par A et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs)

On écrit $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v})$.



2- Vecteurs coplanaires

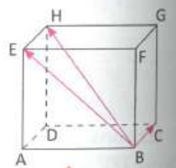
DÉFINITION

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

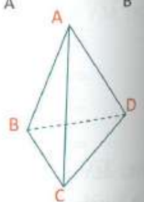
On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires**, s'il existe quatre points **coplanaires** A, B, C et D tels que: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Exemple 1: Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

On a: les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires car les points B, C, E et H sont coplanaires .



Exemple 2: Si $ABCD$ est un tétraèdre, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.



Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace.

les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Info : $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{u}$ sont coplanaires

Conséquences

Soit A, B, C et M des points de l'espace.

S'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

alors, les points A, B, C et M sont coplanaires.

1 Montrer qu'un point appartient à un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Montrer que M appartient au plan (ABC).

Pour montrer que le point M appartient au plan, (ABC) il suffit de trouver deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

on a: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

donc: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d'où: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

et puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires , alors : $M \in P(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

c'est-à-dire que : M appartient au plan (ABC)

2 Définition vectorielle d'un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} - x\overrightarrow{MD} + (y+1)\overrightarrow{DM} = \vec{0}$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Soit M un point de l'espace.

On a: $x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} - x\overrightarrow{MD} + (y+1)\overrightarrow{DM} = \vec{0}$ équivaut à:

$x(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DM}) + y(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + y\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$

équivaut à:

$x(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM}) + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$

équivaut à:

$x\overrightarrow{DB} + y\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$ équivaut à:

$\overrightarrow{DM} = -x\overrightarrow{DB} - y\overrightarrow{DC}$

et puisque les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{DM} = (-x)\overrightarrow{DB} + (-y)\overrightarrow{DC}$

alors: $M \in P(D;\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})$

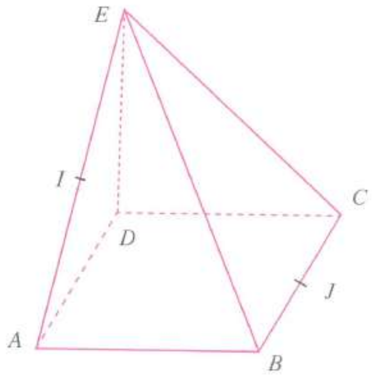
d'où : l'ensemble des points M demandé est le plan (BCD).

3 Coplanairité de trois vecteurs

Soit $EABCD$ une pyramide de base le rectangle $ABCD$

I et J sont respectivement les milieux des segments $[AE]$ et $[BC]$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.



D'après la relation de Chasles

on a: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ (1)

et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}$ (2)

de (1) et (2) on déduit que:

$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ}$

et puisque: I est le milieu du segment $[AE]$ et J est le milieu du segment $[BC]$

alors: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$

d'où: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$

par suite: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

donc: les vecteurs $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

4 Colinéarité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. α et β sont deux nombres réels.

Montrer que si $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ alors $\alpha = \beta = 0$

Utilisons un raisonnement par l'absurde

Supposons que $\alpha \neq 0$

Puisque : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, alors: $\vec{u} = \frac{-\beta}{\alpha}\vec{u}$

donc: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui contredit le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d'où: $\alpha = 0$

Par suite: $\beta\vec{v} = \vec{0}$

Donc: $\beta = 0$ (car $\vec{v} \neq \vec{0}$, si non: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront colinéaires).

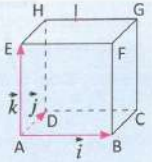
EXERCICES RÉSOLUS

EXERCICE RÉSOLU 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=\vec{k}$

Soit I le point défini par: $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$.



1 Montrer que le vecteur $\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).

2 Soit (Δ) la droite passant par le point G et parallèle à la droite (AI) et M le point tel que : $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BG}$.

Montrer que $M\in(\Delta)$.

1 Montrons que le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).

Pour montrer que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AI), il suffit de montrer que:

▸ $\vec{u}\neq\vec{0}$ et que $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Supposons que $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}=\vec{0}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AE}$

d'où: les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.

Par suite, les points A,B,D et E sont coplanaires, et ceci est impossible (car $ABCDEFGH$ est un cube).

donc $\vec{u}\neq\vec{0}$

▸ On a: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HI}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$

et puisque: $ABCDEFGH$ est un cube, alors $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}=\vec{i}$

d'où: $\overrightarrow{AI}=\vec{k}+\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{i}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\vec{u}$

par suite: $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

ainsi: $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).

2 Montrons que $M\in(\Delta)$

On a: la droite (Δ) passe par le point G et parallèle à la droite (AI).

donc: la droite (Δ) passe par le point G et de vecteur directeur $\vec{u}$.

c'est-à-dire $(\Delta)=D(G;\vec{u})$

Montrons que $M\in(\Delta)$.

On a: $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BG}$

Or $ABCDEFGH$ estuncube,donc: $\overrightarrow{GF}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{j}$

et $\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{AE}=-\vec{k}$

et on a: $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$

donc: $\overrightarrow{BG}=\vec{j}+\vec{k}$

d'où: $\overrightarrow{GM}=-\vec{j}+(-\vec{k})+\frac{2}{3}\vec{i}+3(\vec{j}+\vec{k})$

par suite: $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

$=\frac{2}{3}(\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k})$

$=\frac{2}{3}\vec{u}$

Donc: $M\in D(G;\vec{u})$

c'est-à-dire: M appartient à la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{u}$

d'où: $M\in(\Delta)$

EXERCICE RÉSOLU 2 Utiliser le raisonnement par l'absurde

Soit $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires: a,b et c sont trois nombres réels.

1 Montrer que $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}\Longrightarrow a=b=c=0$

2 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

1 Montrons que $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}\Longrightarrow a=b=c$

Utilisons un raisonnement par l'absurde.

Soit a,b et c trois réels tels que $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}$

supposons que: $a\neq 0$

alors: $\vec{i}=\left(-\frac{b}{a}\right)\vec{j}+\left(-\frac{c}{a}\right)\vec{k}$

d'où: les vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires ce qui est contradictoire avec les données.

d'où: $a=0$

On montre de la même façon que $b=0$ et $c=0$

Conclusion $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}\Longrightarrow a=b=c=0$

2 Montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

alors, il existe un réel a tel que $\vec{u}=a\vec{v}$

d'où: $(\exists a\in\mathbb{R})\,;2\vec{i}+\vec{k}=a(3\vec{i}-\vec{j})$

c'est-à-dire: $(\exists a\in\mathbb{R});(2-3a)\vec{i}+a\vec{j}+\vec{k}=\vec{0}$

et puisque $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et d'aprés 1) on en déduit que $2-3a=0$, $a=0$ et $1=0$ ce qui impossible, donc notre supposition est fausse, par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Est-il vrai que:
A,B,C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires?

2 Est-il vrai que:
Si les points A,B,C et D sont coplanaires, alors pour tout point O de l'espace.
On a: $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont coplanaires?

3 Donner la définition vectorielle d'une droite de l'espace.

4 Dans quel cas deux vecteurs de l'espace sont colinéaires?

5 Dans quel cas trois vecteurs de l'espace sont coplanaires?

6 Est-il vrai que: pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ on a $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{0}$ sont coplanaires?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles? (En utilisant les vecteurs).

2 Comment montrer que trois points sont alignés? (En utilisant les vecteurs)

3 Comment montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme? (En utilisant les vecteurs)

4 Comment montrer que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires?

5 Comment montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

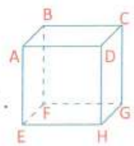
(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires . Si $x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{0}$ alors	$x=-y$	$x=y=0$	$x=0$ ou $y=0$
2 Soit $ABCD$ un tétraèdre et x et y deux éléments de $\mathbb{R}^*$ si $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BD}$ alors	$E\in(BCD)$	les points A,B,C et E sont coplanaires	$(AE)\parallel(BCD)$
3 Soit ABC un triangle Les droites $D(A;\overrightarrow{BC})$ et (BC) sont:	Confondues	Strictement parallèles	Sécantes
4 Soit B un point du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ on a: la droite $D(B;-\vec{u})$	Coupe le plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ au point B	Strictement parallèle au plan $P(A,\vec{u};\vec{v})$	est incluse dans le plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$
5 Soit $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Les vecteurs $\vec{i}+\vec{j};-\vec{i}+\vec{k}$ et $-\vec{j}+\vec{k}$ sont des vecteurs:	coplanaires	non coplanaires	égaux
6 Soit $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. Les vecteurs $4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k};-3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ sont des vecteurs:	coplanaires	deux à deux colinéaires	non coplanaires

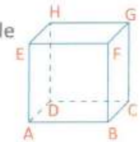
Exercices d'application

Simplification des expressions vectorielles

Exercice 1 : Soit $ABCDEFGH$ un cube.
M,N,P,Q et R sont des points de l'espace tels que: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$,
$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{AF}$,
$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FH}$,
$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{HE}$.
Parmi les points M,N,P,Q et R, déterminer ceux qui représentent un sommet du cube.

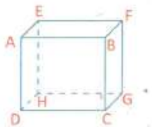


Exercice 2 : Soit $ABCDEFGH$ un cube, I est un point du segment $[HG]$ et J est un point du segment $[GC]$.
Déterminer un vecteur d'origine le point A et égal au vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants:



1. $\vec{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{HI}$.
2. $\vec{u}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{AD}$.
3. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GJ}$.

Exercice 3 : Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
simplifier les expressions suivantes:
$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$.



Exercice 4 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
Construire les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$

Exercice 5 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
Construire les points E et F tels que:
$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

Exercice 6 : Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
construire les points M et N tels que:
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$

Exercice 7 : Soit A,B,C et D quatre points de l'espace.
On pose: $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MD}$.
Montrer que le vecteur $\vec{u}$ ne dépend pas du point M.

Exercice 8 : Soit A,B,C et D quatre points de l'espace.
Montrer que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

Exercice 9 : Soit A,B,C et D quatre points de l'espace.
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si, pour tout point M de l'espace on a: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

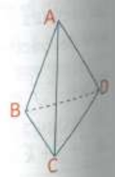
Vecteurs colinéaires - Définition vectorielle d'une droite

Exercice 10 : Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

Exercice 11 : Soit $OABC$ un tétraèdre et I le milieu du segment $[BC]$.
1. Écrire le vecteur $\overrightarrow{OI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M qui vérifient:
$\overrightarrow{BM}=(x+1)\overrightarrow{BA}+x\overrightarrow{AD}$ où x est un réel.
Montrer que (Δ) est une droite dont on déterminera un vecteur directeur.

Exercice 12 : Soit $ABCD$ un tédraèdre et (Δ) l'ensemble des points M qui vérifient :
$\overrightarrow{BM}=(x+1)\overrightarrow{BA}+x\overrightarrow{AD}$ où $x\in\mathbb{R}$.
Montrer que (Δ) est une droite parallèle à la droite (BD).

Exercice 13 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. I et J sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[CD]$.
Soit E et F les points définis par :



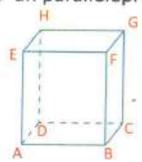
$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
1. Montrer que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.
2. En déduire que la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

Exercice 14 : Soit $ABCD$ un tétraèdre et G est le point défini par $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
M et N sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[AD]$.
Montrer que les points M,N et G sont alignés.

Exercice 15 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. M et N sont les points de l'espace définis par:
$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}$.
1. Montrer que les points B,C et M sont alignés.
2. Montrer que $(MN)\mathbin{/\!/}(CD)$.

Exercice 16 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
On considère les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$
Montrer que le quadrilatère $MBNC$ est un parallélogramme.

Exercice 17 : Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. (voir figure).



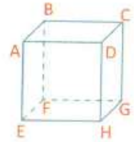
1. Montrer que:
$\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{FH}=\vec{0}$.
2. Montrer que: $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HA}=\vec{0}$.
3. Montrer que:
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.
4. Montrer que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.
5. Montrer que les vecteurs : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires.
6. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

Vecteurs coplanaires - Définition vectorielle d'un plan

Exercice 18 : Soit A,B et C trois points de l'espace distincts deux à deux.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.

Exercice 19 : Soit A,B et C trois points de l'espace.
On considère les points M et N tels que:
$\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$
Les points A,B,C,M et N sont-ils coplanaires?

Exercice 20 : Soit $ABCDEFGH$ un cube. I et J sont deux points tels que $I\in[EF]$ et $J\in[FG]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont-ils coplanaires?



Exercice 21 : Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point de l'espace tel que: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
1. Écrire $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Exercice 22 : Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$;
$\vec{v}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{CF}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB}$
1. Montrer que: $\vec{u}=\overrightarrow{AG}$, $\vec{v}=2\overrightarrow{AE}$ et $\vec{w}=2\overrightarrow{AB}$
2. Est-ce-que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires?

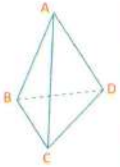
Exercice 23 : Soit $ABCD$ un tétraèdre et M un point tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$.
Le point I est le milieu du segement $[AD]$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ID},\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Exercice 24 : Soit $OABC$ un tétraèdre.
On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont coplanaires.

Exercice 25 : Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[AD]$ et $[BC]$.
1. Montrer que le quadrilatère $IJGH$ est un parallélogramme.
2. En déduire que G appartient au plan (HIJ).

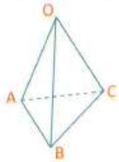
Exercices de renforcement

Exercice 26 : Soit $ABCD$ un tétraèdre, G est le centre de gravité du triangle ABC et I est le milieu du segment $[AD]$.
On considère le point E tel que $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.



1. Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}$.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

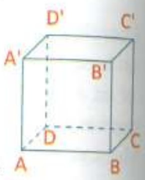
Exercice 27 : Soit $OABC$ un tétraèdre et I est le milieu du segment $[OA]$.
On considère les points E et F tels que: $3\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



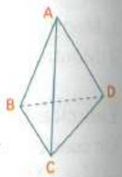
Exercice 28 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
P,Q,R et S sont des points de l'espace tels que: $2\overrightarrow{RC}-5\overrightarrow{RD}=\vec{0}$, $5\overrightarrow{SD}+4\overrightarrow{SA}=\vec{0}$
$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ et $4\overrightarrow{QB}-3\overrightarrow{QC}=\vec{0}$
1. Écrire $\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{SQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
2. a) En déduire que: $\overrightarrow{SR}+\frac{20}{9}\overrightarrow{SP}-\frac{2}{9}\overrightarrow{SQ}=\vec{0}$
b) Étudier la coplanairité des points P,Q,R et S.

Exercice 29 : Soit $ABCD$ un tétraèdre, I est le milieu du segment $[AD]$ et G est le centre de gravité du triangle ABC.
On considère le point E tel que le quadrilatère $BECD$ est un parallélogramme de centre le point O.
1. a) Montrer que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
b) Écrire les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
c) En déduire que les points $I;G$ et E sont alignés.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BO}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 30 : On considère dans l'espace un cube $ABCDA'B'C'D'$.
Les points E,F et I sont respectivement les milieux des segments $[AB]$,$[A'D']$ et $[AA']$.
Soit M le milieu du segment $[EF]$.
1. Montrer que: $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
2. Montrer que: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$, en déduire que: $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{B'D}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA'}$.
4. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{B'D}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires.



Exercice 31 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les point I,J et O sont respectivement les milieux des segments $[AB]$,$[CD]$ et $[IJ]$.
1. Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
2. Soit G le centre de gravité du triangle BCD.
Montrer que: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DA}$



Exercice 32 : Soit ABC un triangle dans l'espace. Les points I,J et K sont repectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Montrer que: pour tout point M de l'espace on a: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MK}$

Exercice 33 : Soit $ABCD$ un tétraèdre I et E sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[AD]$.
Soit G le centre de gravité du triangle BCD et $\vec{u}$ le vecteur défini par: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

Exercice 34 : Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
Montrer que la droite de vecteur directeur $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$ est parallèle au plan dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exercice 35 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$

1. Montrer que: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$
2. Montrer que: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD})$

Exercice 36 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
E,F,G et H sont des points de l'espace tels que: $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB};\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FD};\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}$.
1. Montrer que: $\overrightarrow{EH}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}$
2. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Montrer que: les droites (GH) et (EF) sont sécantes.

Exercice 37 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les points I,J,K et L sont respectivement les milieux des segments $[AD]$,$[BC]$,$[AC]$ et $[BD]$.
1. Montrer que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{KI}$.
2. Montrer que: les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

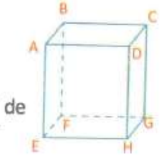
Exercice 38 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. I,J et G sont les points de l'espace définis par:
J est le milieu du segement $[CD]$; I est le milieu du segment $[AJ]$ et G est le centre de gravité du triangle BCD.
1. Montrer que les droites (AG) et (BI) sont sécantes.
2. Déterminer le point d'intersection H des droites (AG) et (BI).

Exercice 39 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.
On considère les points M,N,P et Q tels que:
- M et N sont respectivement les milieux des segements $[AB]$ et $[CD]$.
- $\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{NQ}-4\overrightarrow{MQ}$.

1. Montrer que: $\overrightarrow{NQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}$.
2. En déduire que les points P,D et A sont alignés.

Exercice 40 : Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les points I,J,K et L sont respectivement les milieux des segments $[AE]$,$[AB]$,$[EH]$ et $[KJ]$.
1. a) Montrer que: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.
b) Montrer que: $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les plans (ABC) et (IJK) sont sécants suivant une droite (Δ) dont on déterminera un point et un vecteur directeur.

Exercice 41 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. I et J sont les points définis par:
$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$
1. Peut-on avoir $I=J$?
2. Montrer que pour tout point M de l'espace on a: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$



Exercice 42 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.
On considère un point S de l'espace n'appartenant pas au plan (ABC), et le point E tel que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}=3\overrightarrow{AE}$
1. a) Montrer que: $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BS}=3\overrightarrow{BE}$
b) En déduire que les points B,D,S et E sont coplanaires.
2. Montrer que: $\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OE}$

Exercice 43 : Soit $ABCD$ un tétraèdre et E le point défini par: $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$.
F et G sont deux points de l'espace tels que $EBCF$ et $FDAG$ soient des parallélogrammes.
1. Montrer que: $\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$.
2. Étudier la coplanairité des points B,C,D et G.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

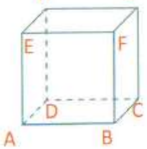
Exercice 44 : Soit A,B,C et I quatre points non coplanaires.
Soit A',B' et C' les symétriques respectifs des points A,B et C par rapport au point I.
1. Montrer que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AA'}$.
2. Soit M un point de l'espace.
Montrer que:
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}=6\overrightarrow{MI}$.

Exercice 45 : Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube.
(voir figure)

EXERCICES

Les points E, F et I sont les milieux réspectifs des segments $[AB], [A'D']$ et $[AA']$.

M étant le milieu du segment $[EF]$.



1. Montrer que: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
2. Montrer que: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$, en déduire que: $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
3. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IEF).

Exercice 46 : Soit $ABCDEFGH$ un cube.

I, J, K et L sont respectivement les milieux des segements $[AE], [AB]$, $[EH]$ et $[JK]$

1. **a)** Montrer que: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
   b) Montrer que: $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les plans (ABC) et (IJK) sont sécants suivant une droite (Δ) dont on précisera un point et un vecteur directeur.

Exercice 47 : Soit $ABCD$ un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB}$

1. **a)** Montrer que: $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NB}$
   b) En déduire que: $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{JN} - 4\overrightarrow{IN}$.
   c) Montrer que les points I, J, M et N sont coplanaires.
2. **a)** Montrer que: $(DN) \parallel (JB)$.
   b) En déduire que: $(DN) \parallel (AIJ)$.

Exercice 48 : Soit $ABCD$ un quadrilatère et I est le milieu du segment $[AC]$

Montrer que: $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si pour tout point M de l'espace on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$

Exercice 49 : Soit $ABCD$ un tetraèdre.

A', B', C' et D' sont respectivement les centres de gravité des triangles $BCD; ACD, ABD$ et ABC.

1. Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.
2. Montrer que $(BD) \parallel (B'D')$.

Exercice 50 : Soit ABC un tétraèdre.

B', C', D' et A' sont les points tels que: $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

G et G' sont réspectivement les centres de gravité des triangles BCD et $B'C'D'$.

Montrer que les points A, A', G et G' sont alignés.

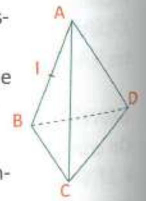
Exercice 51 : Soit $ABCD$ un tétraèdre.

Soit P le milieu du segment $[AM]$ où M est un point qui varie dans le plan (BCD).

Montrer que le point P appartient à un plan fixe lorsque M varie dans le plan (BCD).

Exercice 52 : Soit $ABCD$ un tétraèdre et I est le milieu du segment $[AB]$.

1. **a)** Construire le point E sachant que le quadrilatère $CAIE$ est un parallélogramme.
   b) Construire le point F sachant que le quadrilatère $DBIF$ est un parallélogramme.
2. Montrer que la droite (EF) passe par le milieu du segment $[CD]$.
3. Soit M, N et K les points tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et K est le milieu du segment $[MN]$.
   Montrer que le point K est le centre de gravité du triangle BCD



les bonnes réponses du paragraphe **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	2	3	2	3	2	1				

Chapitre 12

Descartes (1596-1650)

La géométrie analytique dans le plan a été élaborée par les deux mathématiciens : Descartes et Fermat.

Après Descartes et Fermat, cette géométrie va se developper et se généraliser dans l'espace grâce aux mathématiciens Wallis, Newton et Euler.

Objectifs de la leçon

- Reconnaître une base et un repère dans l'espace;
- Reconnaître les coordonnées d'un point, et d'un vecteur dans l'espace;
- Reconnaître les coordonnées de la somme de deux vecteurs, les coordonnées du produit d'un vecteur par un réel;
- Reconnaître les coordonnées du milieu d'un segment;
- Reconnaître et calculer le déterminant de trois vecteurs;
- Utiliser le déterminant pour savoir si trois vecteurs sont colinéaires et si quatres points sont coplanaires;
- Reconnaître et déterminer une représentation paramétrique d'une droite dans l'espace;
- Étudier les positions relatives de deux droites dans l'espace;
- Reconnaître et déterminer une représentation paramétrique d'un plan;
- Reconnaître et déterminer une équation cartésienne d'un plan;
- Étudier les positions relatives de deux plans;
- Utiliser le déterminant pour trouver l'équation cartésienne d'un plan;
- Reconnaître et déterminer des équations cartésiennes d'une droite;
- Déterminer les positions relatives d'une droite et d'un plan;
- Utiliser la géométrie analytique de l'espace pour résoudre des problèmes géométriques.

Le contenu

1. Coordonnées d'un point - coordonnées d'un vecteur.
2. Déterminant de trois vecteurs.
3. Représentation paramétrique d'une droite.
4. Représentation paramétrique d'un plan - Équation cartésienne d'un plan.
5. Équations cartésiennes d'une droite.

Capacités attendues

- Traduire des notions et propriétés de la géométrie affine et vectorielle à l'aide des coordonnées.
- Démontrer la colinéarité de deux vecteurs.
- Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires.
- Choisir la représentation adéquate (équation cartésienne ou représentation paramétrique) pour étudier les positions relatives des droites et plans, et pour interpréter ces résultats.

ACTIVITÉS

ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Activité 1 Les vecteurs dans l'espace

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I et J sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AD]$.

On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=\vec{k}$

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires.

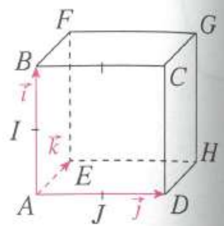
2. **a** Vérifier que : $\overrightarrow{EF}=\vec{i}$, $\overrightarrow{EG}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

b Montrer que : $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}-\overrightarrow{IJ}$

c Que peut on conclure pour les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EG}$?

3. Soit M un point de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{9}{4}\overrightarrow{EF}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$.

Écrire en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ chacun des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BJ}$, puis en déduire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.



ACTIVITÉS D'INTRODUCTION

Activité 2 Base - Repère - Coordonnées d'un vecteur

Soit $ABCDEFGH$ un cube,

1. **a** Montrer que les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires, puis en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires.

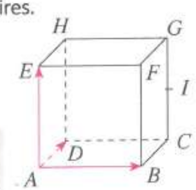
b Déterminer un repère de l'espace dont l'origine est D .

2. Soit I le milieu du segment $[CG]$.

a Montrer que : $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Le triplet $\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$ est appelé le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

b Déterminer le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.



Info :
Le triplet $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.
▸ Le quadriplet $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
▸ A est l'origine du repère.

Activité 3 Coordonnées d'un point

Soit O un point de l'espace, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Soit (Δ) la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$.

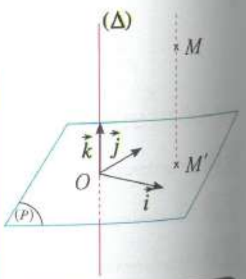
Soit (P) le plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

M étant un point du plan (voir figure en face).

1. Recopier la figure dans le cahier, puis construire la droite (Δ') passant par M est parallèle à (Δ).

2. Vérifier que (Δ') coupe le plan (P) en un point M'.

3. Montrer qu'il existe un nombre réel z tel que $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$.
(remarquer que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$)



Info :
On dit que M' est le projeté de M sur (P) parallèlement à (Δ).

4. **a** Montrer qu'il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}+y\vec{j}$

b Déduire que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

▸ x , y et z sont respectivement : l'abscisse, l'ordonnée, le côte du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

▸ $(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

▸ $(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base (ou relativement à la base) $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et on écrit : $M(x;y;z)$ et $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$

Info :
▸ $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.
▸ Le triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé base de l'espace.
▸ Le quadriplet $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé repère de l'espace.

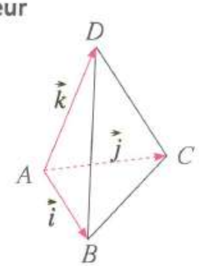
Activité 4 Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On pose $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{k}$.

1. Vérifier que le quadriplet $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère de l'espace.

2. Déterminer les coordonnées des points A , B , C et D dans le repère $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

3. Déterminer les triplets de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.



Dans toute la suite, l'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Activité 5 Colinéarité de deux vecteurs - Alignement de trois points

Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace tels que x, y, z, x', y' et z' sont des nombres réels non nuls.

1. **a** Montrer que: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$

b Montrer que: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$ et $yz'-zy'=0$

2. Soit $P(1;2;1)$, $Q(3;6;7)$, $R(2;4;4)$ et $S(5,1,2)$ quatre points de l'espace.

a En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que P , Q et R sont alignés.

b Est-ce que les points Q, R et S sont alignés?

Info :
Les nombres $xy'-x'y$, $xz'-zx'$ et $yz'-zy'$ sont notés respectivement
$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$

Activité 6 Le déterminant de trois vecteurs

Soit $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs de l'espace.

1. On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires et non colinéaires deux à deux.

a Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\begin{cases} x=ax'+bx'' \\ y=ay'+by'' \\ z=az'+bz'' \end{cases}$

b Montrer que : $x'y''-y'x''\neq 0$ ou $x'z''-z'x''\neq 0$ ou $y'z''-z'y''\neq 0$

2. On suppose que $x'y''-y'x''\neq 0$

Info :
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires signifie qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w}$

a Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} ax' + bx'' = x \\ ay' + by'' = y \end{cases}$ où a et b sont les inconnues.

b En déduire que: $x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'') = 0$

Qu'on peut écrire: $x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$

3. Est-ce que les points $A(1;2;3)$, $B(2;0;1)$, $C(3;1;3)$ et O sont coplanaires?

Info :
Le nombre $x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'z'')$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on le note $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

ou $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

Activité 7 Représentation paramétrique d'une droite

On considère les points $A(1;2;-1)$, $B(-1;3;1)$, $C(5;0;-5)$ et $E(1;3;0)$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

Montrer que: $M \in (AB) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ (1)

On dit que le système (1) est une **représentation paramétrique** de la droite (AB)

2. Montrer que: $C \in (AB)$.

3. Est-ce que le point E appartient à la droite (AB)?

4. Soit (Δ) une droite passant par le point $N(a;b;c)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ où $(\alpha;\beta;\gamma) \neq (0;0;0)$.

Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Info :
$(AB): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$
le système (1)

Activité 8 Représentation paramétrique d'un plan - Équation cartésienne d'un plan

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(-1;3;1)$ et $C(3;3;-1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

Montrer que : $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\exists (t;t') \in \mathbb{R}^2) / \begin{cases} x = 1 - 2t + 2t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 - 2t + 4t' \end{cases}$ (2)

On dit que le système (2) est une **représentation paramétrique** du plan (ABC).

3. En déduire que $M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow x + 6y + 2z - 19 = 0$

L'équation $x + 6y + 2z - 19 = 0$ est appelée une **équation cartésienne** du plan (ABC)

Info :
▸ Le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que: $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ où $(t;t') \in \mathbb{R}^2$

Info :
$\begin{cases} x = 1 - 2t + 2t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 - 2t + 4t' \end{cases} ; (t;t') \in \mathbb{R}^2$
système (2)

Activité 9 Système d'équations cartésiennes d'une droite

On considère dans l'espace la droite (Δ) passant par le point $A(1;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;2;3)$.

1. Montrer que le système : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

2. Vérifier que : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

la relation trouvée est appelée **système d'équations cartésiennes** de la droite (Δ).

3. Soit (D_1) et (D_2) deux droites définies par :

$(D_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ et $(D_2): \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} ; (t' \in \mathbb{R})$

a Montrer que: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} \\ z = 4 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite (D_1).

b Montrer que: $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de la droite (D_2).

4. Soit (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ tel que $abc \neq 0$.

Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (D).

Activité 10 Positions relatives de deux plans

Soit (P_1), (P_2) et (P_3) trois plans définis respectivement par les équations cartésiennes : $x + y - z + 1 = 0$, $x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $x + y - z + 2 = 0$.

Soit (D) la droite définie par sa représentation paramétrique: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$(S_1) : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ et $(S_2): \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

2. En déduire que l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2) est la droite (D), et que les plans (P_1) et (P_3) sont parallèles.

Activité 11 Droites non coplanaires

On considère dans l'espace les droites (D_1) et (D_2) définies par leurs représentations paramétriques :

$(D_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$; $(D_2): \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 3 - k \\ z = 1 + k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}(-1;2;-2)$ et $\vec{v}(4;-1;1)$ sont respectivement deux vecteurs directeurs de (D_1) et (D_2).

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système: $\begin{cases} 1 + 4k = 1 - t \\ 3 - k = -1 + 2t \\ 1 + k = 1 - 2t \end{cases}$ où k et t sont les inconnues.

3. Déduire, des questions précédentes que les droites (D_1) et (D_2) se sont pas coplanaires.

1 Coordonnées d'un point dans un repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

1- Base et repère dans l'espace

DÉFINITION

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.

- Le triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé une base de l'espace.
- Le quadriplet $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est appelé un repère de l'espace.

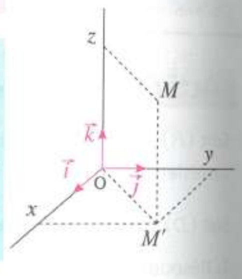
Remarque

Quatre points non coplanaires O, A, B et C déterminent une base de l'espace. Par exemple $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$, et un repère de l'espace par exemple $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

Propriété

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M de l'espace, il existe unique triplet $(x;y;z)$ de réels que: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



- Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- x est l'abscisse du point M , y est l'ordonnée du point M , z est la côte du point M , et on écrit: $M(x;y;z)$ ou $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$.
- Le triplet $(x;y;z)$ est appelé triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et on note $\vec{u}(x;y;z)$.

Info :

La notation $\vec{u}(x;y;z)$ se note aussi: $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2- Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$ - coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ - coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

- Soit $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'une base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et λ un réel.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

2. $\vec{u} + \vec{v}(x + x' ; y + y' ; z + z')$.

3. $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y, \lambda z)$.

- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ et I le milieu du segment $[AB]$.

4. Le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ est: $(x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$.

5. Le triplet de coordonnées du point I est: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

1 Coordonnées d'un point

On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ le point M $(1;-2;3)$.
On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

1. Montrer que le quadrilatère $OM'IJ$ est un parallélogramme.
2. Montrer que le quadrilatère $OKMM'$ est un parallélogramme.

1. On a : $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} = \vec{i} - 2\vec{j}$, donc: $\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{JI}$
D'où: le quadrilatère $OM'I\,J$ est un parallélogramme.
2. On a : $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}' = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} - \vec{i} + 2\vec{j}$
C'est-à-dire : $\overrightarrow{M'M} = 3\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, donc : le quadrilatère $OKMM'$ est un parallélogramme.

2 Coordonnées d'un vecteur - Coordonnées d'un point

On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$.

1. **a** Déterminer les coordonnées des points M et N et du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
b Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[MN]$.
2. On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
a Montrer que le quadriplet $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est un repère de l'espace.
b Déterminer les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

1. **a** ▸ **Coordonnées du point M**

On a : $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
Donc: le triplet de coordonnées du point M est $(1;1;1)$, c'est-à-dire: $M(1;1;1)$

▸ **Coordonnées du point N**

On a : $\overrightarrow{MN} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, et d'après la relation de Chasles on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$

Donc: $\overrightarrow{ON} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} + \overrightarrow{OM}$

$= \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$= 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$

Donc: $\left(2;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ est le triplet de coordonnées du point N ; c'est à dire $N\left(2;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

▸ **Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$**

On a : $\overrightarrow{MN} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$.
Donc: $\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ c'est-à-dire $\overrightarrow{MN}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

b Coordonnées du point I milieu du segment $[MN]$

Soit $(x_I;\ y_I;z_I)$ le triplet de coordonnées du point I

On a : $x_I = \dfrac{1+2}{2}$, $y_I = \dfrac{1+\frac{3}{2}}{2}$ et $z_I = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}$.

Donc, le triplet de coordonnées du point I est: $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$ c'est-à-dire $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$.

2. **a Montrons que $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est un repère de l'espace,**

Il suffit de montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors, il existe deux nombres réels α et β tels que: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
On a :

$$\begin{aligned} \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} &\Longleftrightarrow \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta(\vec{i} + \vec{j}) \\ &\Longleftrightarrow \vec{i} + j + \vec{k} = (\alpha + \beta)\vec{i} + \beta\vec{j} + 0\vec{k} \\ &\Longleftrightarrow \alpha + \beta = 1 \text{ et } \beta = 1 \text{ et } 1 = 0 \end{aligned}$$

Et ceci est impossible (car $1 \neq 0$)
Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
D'où, $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est un repère de l'espace.

b Coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

Soit $(x;y;z)$ le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.
On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$,
donc : $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
C'est-à-dire $x\vec{i} + y(\vec{i} + \vec{j}) + z(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
D'où : $(x + y + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Finalement: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

D'où : $x = 0$, $y = 0$ et $z = 1$ c'est-à-dire : $M(0;0;1)$

Remarque : Généralement les coordonnées d'un point M de l'espace changent si on change de repère.

Dans toute la suite, l'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

2 Déterminant de trois vecteurs

1- Condition de colinéarité de deux vecteurs

Propriété 1

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non nuls.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$

Info :
A, B et C sont alignés Signifie que: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Remarque

Si tous les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Info :
Les nombres $ab' - a'b$, $ac' - ca'$ et $bc' - cb'$ se notent respectivement $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ et ils sont appelés: déterminants extraits des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété 2

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de l'espace
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si: $ab' - ba' = 0$, $ac' - ca' = 0$ et $bc' - cb' = 0$

Conséquences

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de l'espace,
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$

2- Vecteurs coplanaires

DÉFINITION

Soit $\vec{u}(a;b;c)$, $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a'';b'';c'')$ trois vecteurs de l'espace.
Le nombre réel $a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et on le note $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

Info :
Les points A, B, C et D sont coplanaires signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

On écrit aussi : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

Info :
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires signifie que $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$

Exemple: On considère les vecteurs : $\vec{u}(1,1,0)$, $\vec{v}(1,0,1)$ et $\vec{w}(0;1;1)$

On a: $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$, donc : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$.

D'où : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

1 Points alignés - vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}(1;-1;2)$, $\vec{v}(-2;2;-4)$ et $\vec{w}(1;1;2)$ trois vecteurs de l'espace.
1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
3. Soit $A(1;2;1)$, $B(2;1;3)$ et $C(-1;4;-3)$ et $D(2;3;3)$ quatre points de l'espace.
   a. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
   b. Est-ce que les points A, B et D sont alignés?

1. **Montrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**
On a : $-\frac{2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2ème méthode:

On calcule les déterminants extraits des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On a : $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - (-1)\times(-2) = 0$

et $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Les trois déterminants extraits sont tous nuls.
Donc: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. **Montrons que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires**
On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$
L'un des déterminants extrait est non nul, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

3. a. **Montrons que les points A, B et C sont alignés.**
On a : $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$.
Donc: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Et puisque: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

b. **Étudions l'alignement des points A, B et D**
On a : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$
Et comme $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires,
alors les points A, B et D ne sont pas alignés.

2 Vecteurs Coplanaires - points coplanaires

On considère les vecteurs $\vec{u}(1;m;1)$, $\vec{v}(2;-1;m)$ et $\vec{w}(1;m;0)$
où m est un paramètre réel.
1. Pour quelle valeur de m, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires? ne sont pas coplanaires?
2. Soit $A(2;3;4)$; $B(3;4;5)$, $C(4;2;5)$ et $D(3;4;4)$ quatre points de l'espace.
Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

1. Dans quel cas les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires?
On a :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & -1 & m \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -m^2 + m^2 + 2m + 1 = 2m + 1$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

donc :
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si $m = -\frac{1}{2}$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si $m \neq -\frac{1}{2}$

2. **Montrons que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.**
On a : $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}(2;-1;1)$ et $\overrightarrow{AD}(1;1;0)$
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires
On a :

$$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Donc : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) \neq 0$
D'où : les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
Remarquer que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ pour $m = 1$

3 Représentation paramétrique d'une droite

DÉFINITION

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

Info : Une droite de l'espace admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemple :

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$ où $A(1;1;1)$ et $\vec{u}(1;2;3)$

Positions relatives de deux droites

Propriété

Soit $(D) = D(A;\vec{u})$ et $(\Delta) = D(B;\vec{v})$ deux droites de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \in (\Delta)$ ou $B \in (D)$ alors (D) et (Δ) sont confondues.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (\Delta)$ alors (D) et (Δ) sont strictement parallèles .
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) = 0$ alors (D) et (Δ) sont sécantes (se coupent en un point).
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ alors (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

Remarque

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non nuls.

On considère les droites (D): $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$ et (Δ): $\begin{cases} x = x_B + a't' \\ y = y_B + b't' \\ z = z_B + c't' \end{cases}$; $(t' \in \mathbb{R})$

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $(D) /\!/ (\Delta)$
2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors:

a) (D) et (Δ) sont sécantes si et seulement si le système : (S) $\begin{cases} x_A + at = x_B + a't' \\ y_A + bt = y_B + b't' \\ z_A + ct = z_B + c't' \end{cases}$ ayant pour inconnues t et t' admet une solution unique.

b) (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires si et seulement si le système (S) n'admet aucune solution.

Exemple : On considère les deux droites (D) et (Δ) définies par:

(D): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ et (Δ): $\begin{cases} x = 4k \\ y = 6k \\ z = 2k \end{cases}$; $(k \in \mathbb{R})$

On verifie que les deux droites sont strictement parallèles. $O \in (\Delta)$ et $O \notin (D)$ et les vecteurs directeurs de (D) et (Δ) sont colinéaires.

1 Représentation paramétrique d'une droite - Positions relatives de deux droites

Soit (D) la droite définie par la représentation param

$\begin{cases} x = \\ \\ \end{cases}$

et les points $A(2;-1;0)$; $B(2;1;2)$ et $C(3;-3;1)$

1. Est-ce que le point A appartient à (D)?
2. Donner un vecteur directeur de (D).
3. a Donner une représentation paramétrique de la droite (BC).
   b Étudier la position relative des droites (BC) et (D).

1. **Vérifions si $A \in (D)$?**

$(A \in D) \Longleftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R})$ *tel que* $\begin{cases} 2 = 1 - t & (1) \\ -1 = 3 + 4t & (2) \\ 0 = 1 + t & (3) \end{cases}$

De l'équation (1) on trouve $t = -1$

La valeur $t = -1$, vérifie les deux équations (2) et (3)

D'où: $A \in (D)$

2. **Déterminons un vecteur directeur de (D)**

Les coefficients du paramètre t dans le système $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases}$ sont -1; 4 et 1

Donc: $\vec{u}(-1;4;1)$ est un vecteur directeur de la droite la droite (D).

3. a **Déterminons une représentation paramétrique de (BC)**

On a : $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ et $B(2;1;2)$

Donc $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 4k \\ z = 2 - k \end{cases}$, $(k \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (BC).

b **Étudions la position relative des droites (D) et (BC)**

On a : $\overrightarrow{BC} = -\vec{u}$, donc: $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs colinéaires.

Donc: les droites (D) et (BC) sont parallèles (car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont leurs vecteurs directeurs).

Pour savoir si $(BC) = (D)$ ou (BC) est strictement parallèle à (D), on résout le système à deux inconnues t et k : $\begin{cases} 2 + k = 1 - t \\ 1 - 4k = 3 + 4t \\ 2 - k = 1 + t \end{cases}$

Ce système équivaut à: $\begin{cases} k + t = -1 \\ 4k + 4t = -2 \\ k + t = 1 \end{cases}$

C'est-à-dire: $\begin{cases} k + t = -1 \\ k + t = -\frac{1}{2} \\ k + t = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible

D'où: (D) et (BC) sont strictement parallèles.

2ème méthode: Il suffit de prouver qu'un point de (BC) n'appartient pas à la droite (D), par exemple $B \notin (D)$ et $B \in (BC)$.

2 Position relative de deux droites

Soit (D) et (Δ) deux droites définies par :

(D): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \,;\, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$; (Δ) : $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -1 + 2k \,;\, (k \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - k \end{cases}$

Étudier la position relative des droites (D) et (Δ)

On a : $\vec{u}(1;-1;1)$ et $\vec{v}(1;2;-1)$ sont deux vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (Δ).

Et on a : $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

D'où, les droites (D) et (Δ) sont sécantes ou bien non coplanaires; pour en savoir;

résolvons le système : (S): $\begin{cases} 3 + k = 1 + t \\ -1 + 2k = 1 - t \\ 3 - k = 1 + t \end{cases}$

(S) équivaut à : $\begin{cases} t - k = 2 & (1) \\ t + 2k = 2 & (2) \\ t + k = 2 & (3) \end{cases}$

Le système formé par les deux équations (1) et (3) a pour solution $t = 2$ et $k = 0$

Et puisque: le couple $(2,0)$ vérifie l'équation (2), alors: le couple $(2;0)$ est la solution unique du système (S).

On remplace t par 2 dans la représentation paramétrique de la droite (D) on trouve le point d'intersection $A(3;-1;3)$ des droites (D) et (Δ).

(On peut remplacer k par 0 dans la représentation paramétrique de (Δ)).

4 Représentation paramétrique d'un plan - Équation cartésienne d'un plan

1- Représentation paramétrique d'un plan

DÉFINITION

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non colinéaires.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$; $((t;t') \in \mathbb{R}^2)$ est appelé une représentation paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Info : Un plan admet une infinité de représentations paramétriques

2- Équation cartésienne d'un plan

DÉFINITION

Soit A un point de l'espace. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. L'équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit sous la forme $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des réels tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

Info : $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ signifie que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$

Remarque

L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté: $P(A;\vec{u};\vec{v})$

Info : Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes

Propriété

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient: $ax+by+cz+d=0$ tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ est un plan.

3- Positions relatives de deux plans

Propriété

Soit $(P) = P(A;\vec{u};\vec{v})$ et $(Q) = P(B;\vec{u}';\vec{v}')$ deux plans de l'espace.

- Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}') = 0$ et $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}') = 0$ alors (P) et (Q) sont confondus ou strictement parallèles.
- Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u}') \neq 0$ ou $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v}') \neq 0$ alors (P) et (Q) se coupent suivant une droite.

Remarque

Soit (P) et (P') deux plans définis par leurs équations cartésiennes: $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ où $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ et $(a';b';c') \neq (0;0;0)$.

1. Les plans (P) et (P') se coupent suivant une droite si et seulement si $ab'-ba' \neq 0$ ou $ac'-ca' \neq 0$ ou $bc'-cb' \neq 0$.
2. Les plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$.
3. Les plans (P) et (P') sont confondus si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que : $a' = ka$ et $b' = kb$ et $c' = kc$ et $d' = kd$.

1 Représentation paramétrique et équation cartésienne d'un plan

On considère les points $A(2;-1;2)$; $B(1;1;3)$ et $C(-1;2;2)$

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

1. **Vérifions que des points A, B et C ne sont pas alignés**

On a : $\overrightarrow{AB}(-1;2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$

Et puisque: $\frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{3}$, alors: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc: les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **Donnons une représentation paramétrique du plan (ABC)**

Puisque le plan (ABC) passe par le point $A(2;-1;2)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}(-1;2;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$

Alors, le système: $\begin{cases} x = 2-t-3t' \\ y = -1+2t+3t' \\ z = 2+t \end{cases}$; $(t;t') \in \mathbb{R}^2$

est une représentation paramétrique du plan (ABC).

3. **Donnons une équation cartésienne du plan (ABC).**

soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace:

$M(x;y;z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -3 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x-3y+3z-3=0$$

D'où: $x+y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 Positions relatives de deux plans

On considère le point $D(1;1;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(1;-1;2)$

Soit (Q) le plan défini par l'équation cartésienne suivante $x+y-z+1=0$

1. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point D, et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Déterminer la position relative des plans (P) et Q.

1. **Donnons une équation cartésienne du plan (P)**

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.On a :

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont vecteurs coplanaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{DM};\vec{u};\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

C'est-à-dire: $3x-y-2z-2=0$

2. **Déterminons la position relative des plans (P) et Q.**

Pour déterminer la position relative des plans (P) et (Q), on résout le système: $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 3x-y-2z-2=0 \end{cases}$

Si on pose $z=t$, on trouve le système :

$$\begin{cases} x+y=t-1 & (1) \\ 3x-y=2t+2 & (2) \\ z=t & (3) \end{cases}$$

Des équations (1) et (2) on déduit que : $x = \frac{3}{4}t+\frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{4}t-\frac{5}{4}$

D'où, le système: $\begin{cases} x = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}t \\ y = -\frac{5}{4}+\frac{1}{4}t \\ z = t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point $N\left(\frac{1}{4};\frac{-5}{4};0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};1\right)$.

Finalement, (P) et Q se coupent suivant la droite (Δ) qui passe par $N\left(\frac{1}{4};\frac{-5}{4};0\right)$ et de vecteur directeur: $\vec{w}\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};1\right)$.

5 Deux équations cartésiennes d'une droite

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Soit (D) une droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

▸ Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors: le système: $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ est appelé : équations cartésiennes de la droite (D).

▸ Si l'un des nombres (un seul) a ou bien b ou bien c est nul (par exemple $a=0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$) alors, le système $\begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c} \end{cases}$ est appelé : équations cartésiennes de la droite (D).

▸ Si deux de ces nombres sont nuls (par exemple $a=0$ et $b=0$ et $c \neq 0$) alors le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé équations cartésiennes de la droite (D).

Exemple 1:

Soit (D_1) la droite passant par le point $A(3;2;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;4;3)$ on a :
$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+4}{3}$ sont deux équations cartésiennes de la droite (D_1).

Exemple 2:

Soit (D_2) la droite passant par $B(1;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1;2;0)$.
On a : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}$ et $z=2$ sont deux équations cartésiennes de la droite (D_2).

Positions relatives d'une droite et d'un plan - Étude analytique

Propriété

Soit une droite $(D)=D(A;\vec{w})$ et un plan $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

▸ Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A \in (P)$, alors $(D) \subset (P)$

▸ Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ et $A \notin (P)$, alors (D) est strictement parallèle à (P)

▸ Si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) \neq 0$, alors (D) perce le plan (P)

Exemple :

Soit (P) le plan défini par l'équation cartésienne : $x+y-z+1=0$ et (D) la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \ ; \quad (t \in \mathbb{R}) ; \\ z=1+2t \end{cases}$

Pour étudier l'intersection de (D) et (P) on résout le système : $(S)\begin{cases} x+y-z+1=0 & (1) \\ x=1+t & (2) \\ y=1-t & (3) \\ z=1+2t & (4) \end{cases}$

On remplace respectivement x, y et z par $1+t$, $1-t$ et $1+2t$ dans l'équation (1) on obtient :
$1+t+1-t-1-2t+1=0$; D'où $t=1$

Après remplacement dans les équations : (2), (3) et (4) on trouve le triplet (2;0;3) solution du système (S)

Donc (D) perce le plan (P) au point $M(2;3;0)$

1 Étudier la position relative d'une droite et d'un plan

Soit (D) la droite définie par les équations cartésiennes: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{4}$ et (P) le plan défini par la représentation paramétrique suivante
$\begin{cases} x=3+\gamma+\mu \\ y=-1-\gamma+2\mu \, ; (\gamma;\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z=1+\gamma+3\mu \end{cases}$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).
2. Vérifier que le vecteur $\vec{u}(2;1;4)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et que les vecteurs $\vec{v}(1;-1;1)$ et $\vec{w}(1;2;3)$ sont deux vecteurs directeurs du plan (P), puis montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (P), puis étudier la position relative du plan (P) et la droite (D).

1. **Déterminons une représentation paramétrique de la droite** (D)

1ère méthode:

Des deux équations de la droite (D), on déduit que :

▸ Le vecteur $\vec{u}(2;1;4)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

▸ Le point $A(1;-1;-2)$ est un point de la droite (D)

D'où: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \ ; (t \in \mathbb{R}) \\ z=-2+4t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

2ème méthode : Si on pose $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{4}=t$ on déduit que :
$x=1+2t$, $y=t-1$ et $z=4t-2$

D'où: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \ ; (t \in \mathbb{R}) \\ z=-2+4t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

2. Dans la représentation paramétrique du plan (P) le coefficient de γ et μ sont les coordonnées des vecteurs directeurs du plan (P). Donc, les vecteurs directeurs du plan (P) sont $\vec{v}(1;-1;1)$ et $\vec{w}(1;2;3)$.

▸ **Montrons que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :**

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10-2+12=0$$

Donc: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
ce qui signifie : (D) est strictement parallèle au plan (P), ou (D) est incluse dans le plan (P).

3. ▸ **Équation cartésienne du plan** (P) **:**

On a : $\vec{v}(1;-1;1)$ et $\vec{w}(1;2;3)$ sont deux vecteurs directeurs du plan (P).

▸ Le plan (P) passe par le point $B(3;-1;1)$.
Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

On a : $M \in (P) \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{BM};\vec{v};\vec{w})=0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow (x-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

D'où : $5x+2y-3z-10=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

▸ Déterminons la position relative de la droite (D) et le plan (P) :

Résolvons le système : (S): $\begin{cases} 5x+2y-3z-10=0 \ (1) \\ x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-2+4t \end{cases}$

Écrivons x, y et z en fonction de t dans l'équation (1).

On obtient :
$5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)-10=0$

C'est-à-dire : 1=0 ce qui est impossible, donc le système n'admet pas de solution.

D'où : la droite (D) est strictement parallèle au plan.

EXERCICE RÉSOLU 1 Montrer que trois droites concourantes

On considère dans l'espace un tétraèdre $ABCD$.

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[BJ]$.

M et N sont deux points de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

On muni l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

1 Déterminer les coordonnées des points I, J, K, M et N dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$.

2 Déterminer une représentation paramètrique de chacune des droites (IJ), (AK) et (MN).

3 Montrer que les trois droites (IJ), (AK) et (MN) se coupent en un point L dont on déterminera ses coordonnées.

1 Les coordonnées des points I, J, K, M et N

▸ On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

C'est à dire : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{AD}$

D'où: le triplet $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ est celui des coordonnées du point I .Ainsi : $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$

▸ Puisque J est le milieu du segment $[CD]$; alors :

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

D'où : $\overrightarrow{AJ}=0\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C'est à dire : $J\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

▸ On a : K est le milieu du segment $[BJ]$,

donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

D'où : $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

▸ On a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, c'est-à-dire:

$\overrightarrow{AM}=0\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

D'où : $M\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$

▸ On a : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

D'où: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

Ainsi : $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+0\overrightarrow{AD}$

Donc : $N\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$

2 ▸ Déterminons une représentation paramétrique de la droite (IJ)

On a : $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $J\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ donc : $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

et puisque la droite (IJ) passe par le point $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ alors :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \\ z=\frac{1}{2}t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (IJ).

▸ Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AK) :

On a : la droite (AK) passe par $A(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

$$\text{Donc : }\begin{cases} x=\frac{1}{2}t' \\ y=\frac{1}{4}t' ;(t'\in\mathbb{R}) \\ z=\frac{1}{4}t' \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (AK).

▸ Déterminons une représentation paramétrique de la droite (MN) :

On a : la droite (MN) passe par le point $M\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{MN}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$$\text{Donc : }\begin{cases} x=\frac{2}{3}t'' \\ y=\frac{1}{3}t'' \\ z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t'' \end{cases} ;(t''\in\mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (MN).

3 Montrons que les droites (IJ); (AK) et (MN) se coupent en un point L :

▸ Déterminons l'intersection des droites (IJ) et (AK) :

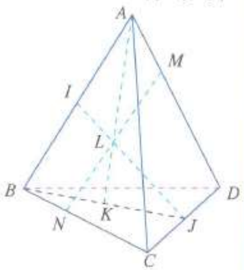
Soit L le point d'intersection des droites (IJ) et (AK).

les coordonnées de L sont les solutions du système.

$$(S):\begin{cases} \frac{1}{2}t'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4}t'=\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4}t'=\frac{1}{2}t \end{cases}$$

Et on a: $(S)\iff\begin{cases} t'=1-t \\ t'=2t \end{cases} \iff\begin{cases} t+2t=1 \\ t'=2t \end{cases} \iff\begin{cases} t=\frac{1}{3} \\ t'=\frac{2}{3} \end{cases}$

Remplaçons t par $\frac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de la droite (IJ) on trouve $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.



De la même façon, on montre que les droites (IJ) et (MN) se coupent au point $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.

Remarque : On peut tout simplement vérifier que L est un point de la droite (MN).

Donc, les droites (IJ), (AK) et (MN) se coupent au point $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.

EXERCICE RÉSOLU 2 Étudier la position relative de deux plans.

On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les plans (P_m) et (P) définis respectivement par les équations cartésiennes: $x+2y+\frac{1}{2}mz-1=0$ et $2x+4y-z-3=0$, où m est un paramètre réel.

Étudier suivant les valeurs de m la position relative des plans (P_m) et (P).

Pour étudier la position relative des plans (P_m) et (P), on résout le système :

$$(S):\begin{cases} 2x+4y-z-3=0 \\ x+2y+\frac{1}{2}mz-1=0 \end{cases}$$

Si on pose $x=t$, le système (S) s'écrit :

$$\begin{cases} 4y-z=3-2t \\ 2y+\frac{1}{2}mz=1-t \\ x=t \end{cases}$$

Déterminons y et z en fonction de m et t.

Résolvons le système $(S')\begin{cases} 4y-z=3-2t \\ 2y+\frac{1}{2}mz=1-t \end{cases}$

On a : $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2}m \end{vmatrix}=2m+2$; $\Delta_z=\begin{vmatrix} 4 & 3-2t \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}=-2$

et $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3-2t & -1 \\ 1-t & \frac{1}{2}m \end{vmatrix}=\left(\frac{3}{2}m+1\right)-(1+m)t$

▸ Si $\Delta=0$: c'est-à-dire : $m=-1$

alors, le système (S') n'admet pas de solutions (car $\Delta_z\neq 0$).

D'où les plans (P_m) et (P) sont strictement parallèles.

▸ Si $\Delta\neq 0$ $(m\neq -1)$

On a : $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-2}{2m+2}=\frac{-1}{m+1}$

et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(3m+2)-2(m+1)t}{4(m+1)}=\frac{3m+2}{4(m+1)}-\frac{1}{2}t$

$$\text{donc : }\begin{cases} x=t \\ y=\frac{3m+2}{4(m+1)}-\frac{1}{2}t ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=\frac{-1}{m+1} \end{cases}$$

Donc l'intersection des plans (P_m) et (P) est la droite (D_m) qui passe par le point $A_m\left(0;\frac{3m+2}{4(m+1)};\frac{-1}{m+1}\right)$ et de vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

EXERCICE RÉSOLU 3 Étudier la position relative d'une droite et un plan

On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ le plan (P_m) d'équation cartésienne $x+y+mz-1=0$ où m est un paramètre réel.

Et soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$

Étudier suivant les valeurs de m la position relative de la droite (D) et le plan (P_m).

▸ Pour étudier la position relative du plan (P_m) et la droite (D), on résout le système

$$\begin{cases} x=1+t & (1) \\ y=1-t & (2) \\ z=1+2t & (3) \\ x+y+mz-1=0 & (4) \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z en fonction de t dans l'équation (4).

On trouve : $1+t+1-t+m(1+2t)-1=0$

c'est-à-dire : $1+m+2mt=0$

d'où : $2mt=-1-m$ (5)

▸ Si $m=0$ l'équation devient $0t=-1$.

Le système n'admet pas de solutions.

Donc: la droite (D) est strictement parallèle à (P_0).

▸ Si $m\neq 0$, alors : $t=-\frac{1+m}{2m}$

D'où : $x=1-\frac{1+m}{2m}=\frac{m-1}{2m}$;

$y=1+\frac{1+m}{2m}=\frac{3m+1}{2m}$ et $z=1-\frac{m+1}{m}=-\frac{1}{m}$

C'est-à-dire : (D) perce le plan (P_m) au point $I_m\left(\frac{m-1}{2m};\frac{3m+1}{2m};-\frac{1}{m}\right)$.

Je teste mes apprentissages

Je teste mes connaissances

1 Analytiquement, comment exprimer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires?

2 A l'aide des coordonnées, comment exprimer que trois points sont alignés?

3 Donner la condition nécessaire pour que l'équation $ax+by+cz+d=0$ soit une équation d'un plan.

4 Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$.

5 Est-ce que le système $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$;$(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique d'un plan?

Je teste mes techniques et mes méthodes

1 Comment peut-on montrer que quatre points $A(x_A;y_A;z_A)$; $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$ et $D(x_D;y_D;z_D)$ ne sont pas coplanaires?

2 Comment peut-on déterminer deux vecteurs directeurs d'un plan défini par une équation cartésienne?

3 Est-ce qu'on peut étudier les positions relatives de deux plans à partir du système formé par leurs équations cartésiennes seulement?

4 Comment peut-on étudier l'intersection d'une droite et d'un plan dans l'espace?

QCM

Je m'entraîne à faire des choix

(Les réponses sont données à la fin de la dernière page d'exercices)

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s)	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
1 Pour les points $A(1;1;0)$, $B(-1;1;1)$ et $C(3;1;-1)$ on a :	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2 Les points $A(1;2;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3;1;-1)$ et $D(1;3;-1)$ sont :	alignés	coplanaires	non coplanaires
3 Le plan $(P):z=0$ a pour vecteurs directeurs	$\vec{i}$ et $\vec{j}$	$\vec{i}$ et $\vec{k}$	$\vec{j}$ et $\vec{k}$
4 Le plan $(P):x+y=0$ est parallèle à une droite ayant pour vecteur directeur :	$\vec{i}-\vec{j}$	$\vec{i}+\vec{j}$	$\vec{j}-\vec{k}$
5 Une représentation paramétrique à la droite passant par $A(1;2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;1;2)$ est :	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=1+k \\ y=2-k \\ z=1-2k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=-1-\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=5+2\alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$
6 L'intersection des plans $(P_1):x=0$ et $(P_2):y=0$ est la droite définie par la représentation paramétrique suivante:	$\begin{cases} x=t \\ y=t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=k\ (k\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0\ (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=\alpha \end{cases}$
7 L'intersection des plans $(P_1):2x+y-z-7=0$ et $(P_2):2x+3y+z-1=0$ est :	Le plan $(P):4x+4y-8=0$	Le plan $(P):2y-2z+5=0$	la droite $(D):x-1=1-y=z+4$
8 L'intersection des plans $(P_1):x+y+z-3=0$ $(P_1):x+2y-z-2=0$ et $(P_2):x-y-z-1=0$ est :	La droite $(D):\begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$;$(t\in\mathbb{R})$	La droite $(D):\begin{cases} x=4-3k \\ y=-1+2k \\ z=k \end{cases}$;$(k\in\mathbb{R})$	Le point $A(1;1;1)$

EXERCICES

Exercices d'application

Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur

Exercice 1 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(1;2;-3)$, $B(2;5;3)$ et $C(1;-4;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $-2\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$; $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$
et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

Exercice 2 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $E(3;-4;0)$, $F(-5;2;4)$ et $G(1;4;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[EF]$.
2. Déterminer les coordonnées du point H, sachant que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 3 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(3;-3;2)$, $B(1;2;3)$ et $M(2;x;y)$.

1. Déterminer x et y sachant que le point M est le milieu du segment $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point N sachant que A est le milieu du segment $[BN]$.

Exercice 4 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(-2;1;5)$, $B(1;-3;0)$ et $C(2;2;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point M défini par: $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point N défini par : $3\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NB}$.
3. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[MN]$.
4. Déterminer les coordonnées du point D symétrique du point C par rapport au point I.

Colinéarités de deux vecteurs - vecteurs coplanaires

Exercice 5 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points A, B et C.
Étudier l'alignement des points A, B et C dans chacun des cas suivants :

1. $A(-2;5;2)$, $B(3;4;-1)$ et $C(1;2;0)$.
2. $A(-2;0;1)$, $B(4;3;0)$ et $C(0;-3;2)$.
3. $A(-5;2;3)$, $B(7;5;4)$ et $C(-29;-4;1)$.

Exercice 6 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(1;2;3)$, $B(0;3;2)$ et $M(4;x;y)$.
Déterminer x et y sachant que les points A, B et M sont alignés.

Exercice 7 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(2;3;1)$, $B(3;;5;-1)$ et $C(m-1;2m-3;m)$où m est un paramètre réel.
Étudier suivant les valeurs du paramètre m l'alignement des points A, B et C.

Exercice 8 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(1;1;2)$; $\vec{v}(1;0;1)$ et $\vec{w}(2;m+1;3-m)$ où m est un paramètre réel.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

Exercice 9 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(1;1;1)$; $\vec{v}(-2;1;1)$; $\vec{w}(0;1;2)$; $\vec{x}(0;3;3)$ et $\vec{y}(1;m;2)$.

1. Montrer que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{x}$ sont coplanaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
3. Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{y}$ soient coplanaires.

Exercice 10 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(1;1;0)$; $\vec{v}(1;0;1)$ et $\vec{w}(0;1;1)$.

1. Montrer que $B'(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Soit le vecteur $\vec{x}(1;1;1)$
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $B'(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$.

Exercice 11 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(1;0;2)$; $\vec{v}(3;-1;0)$ et $\vec{w}(1;1;1)$.
1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
3. On donne les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}-\vec{v}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=-\vec{v}+\vec{w}$.
Montrer que $OABC$ est un tétraèdre.

Exercice 12 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(1;2;3)$, $B(0;2;1)$ et $C(-2;1;3)$.
1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer la valeur de m sachant que le point $M(3;1;m)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 13 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(1;3;2)$, $B(0;2;1)$ et $C(-2;1;3)$.
1. Étudier l'alignement des points A, B et C.
2. Donner une relation entre x et y pour que les points A, B, C et $D(3;x;y)$ soient coplanaires.

Droite dans l'espace

Exercice 14 : L'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Déterminer dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$:
1. $A(2;-1;1)$ et $\vec{u}(4;3;1)$.
2. $A(-3;2;-1)$ et $\vec{u}(-2;1;-1)$.
3. $A(0;1;-1)$ et $\vec{u}(4;0;-1)$.
4. $A(0;-1;0)$ et $\vec{u}(3;0;0)$.

Exercice 15 : L'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Déterminer dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (AB) :
1. $A(1;2;-1)$ et $B(-1;1;0)$
2. $A(1;-1;3)$ et $B\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$
3. $A(-2;2;3)$ et $B\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3};1\right)$
4. $A\left(\frac{1}{3};0;\frac{4}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{2}{3};0;1\right)$

Exercice 16 : Déterminer dans chaque cas une représentation paramétrique et deux équations cartésiennes de la droite (D) :
1. (D) est la droite passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;0)$.
2. (D) est la droite passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;4;3)$.
3. (D) est la droite passant par les deux points $A(-1;4;3)$ et $B(2;4;3)$.
4. (D) est la droite passant par le point $A(1;2;3)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 17 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D).
1. $(D)=D(A;\vec{u})$ où : $A(1;-1;1)$ et $\vec{u}(1;3;-2)$.
2. (D) est la droite passant par les points $A(1;-1;1)$ et $B\left(\frac{1}{2};3\frac{3}{2}\right)$.
3. (D) est la droite passant par $A(2;2;2)$ et parallèle à la droite (Δ) telle que :
$(\Delta):\begin{cases} x=3 \\ y=1+2t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=5-3t \end{cases}$

Exercice 18 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et parallèle à (D) :
1. $A(1;2;3)$ et $(D):\begin{cases} x=1-t \\ y=-3-3t\ ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$
2. $A(-1;0;4)$ et $(D):\begin{cases} x=3+k \\ y=k \quad ;(k\in\mathbb{R}) \\ z=-3+2k \end{cases}$
3. $A(2;-3;1)$ et $(D):\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=1+\alpha \quad ;(\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=-1+3\alpha \end{cases}$
4. $A(-1;1;4)$ et $(D):\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \quad ;(\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=4-2\lambda \end{cases}$

Exercice 19 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D) définie par les deux équations cartésiennes.
1. $(D): x-5=y-2=\frac{z-1}{2}$
2. $(D): \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=z-1$
3. $(D):\begin{cases} x-y-2=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$
4. $(D):\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases}$
5. $(D):\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$

Exercice 20 : Déterminer dans chaque cas deux équations cartésiennes de la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$:
1. $A(1;1;1)$ et $\vec{u}(2;3;-2)$.
2. $A(1;2;3)$ et $\vec{u}(1;2;0)$.
3. $A(-1;-2;3)$ et $\vec{u}(1;0;0)$.

Exercice 21 : Déterminer dans chaque cas deux équations cartésiennes de la droite (AB).
1. $A(1;1;1)$ et $B(2;3;4)$.
2. $A(1;-1;1)$ et $B(2;1;1)$.
3. $A(-2;2;3)$ et $B(-2;-1;3)$.
4. $A(3;2;0)$ et $B(3;2;-1)$.

Exercice 22 : Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est:
$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t\ ;(t\in\mathbb{R}). \\ z=3-t \end{cases}$
1. Est-ce que les points $E(0;3;2)$, $F(0;1;3)$ et $G(-4;7;0)$ appartiennent à la droite (D)?
2. Donner deux équations cartésiennes de la droite (D).

Exercice 23 : Écrire dans chaque cas deux équations cartésiennes de la droite (D) définie par sa représentation paramétrique:
1. $(D):\begin{cases} x=3-2t \\ y=-2+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+4t \end{cases}$
2. $(D):\begin{cases} x=3 \\ y=3+2t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-2+t \end{cases}$
3. $(D):\begin{cases} x=1-2t \\ y=4-t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$
4. $(D):\begin{cases} x=1-4k \\ y=2+k \quad ;(k\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$

Exercice 24 : Soit (D) la droite définie par les deux équations cartésiennes :
$\frac{x-1}{3}=\frac{2-y}{2}=z-3$.
1. Est-ce que les points $E(4;0;4)$; $F(7;0;1)$ et $G(-2;4;0)$ appartiennent à la droite (D)?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercice 25 : Soit (D) la droite définie par le système: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$
Donner une représentation paramétrique de la droite (D).

Plan dans l'espace

Exercice 26 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (P).
1. (P) est le plan passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-1;0)$ et $\vec{v}(-3;2;1)$.
2. (P) est le plan passant par les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(3;2;-1)$.

Exercice 27 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
1. $A(1;1;2)$; $\vec{u}(1;2;1)$ et $\vec{v}(-1;1;1)$.
2. $A(1;2;1)$; $\vec{u}(1;2;1)$ et $\vec{v}(1;-2;1)$.
3. $A(-1;3;2)$; $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(1;-1;1)$.
4. $A(4;3;2)$; $\vec{u}(1;0;0)$ et $\vec{v}(0;0;1)$.

Exercice 28 : Donner dans chaque cas une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (ABC):
1. $A(1;1;1)$; $B(1;-1;1)$ et $C(3;-2;4)$.
2. $A(-2;1;0)$; $B(3;-4;5)$ et $C(1;2;3)$.
3. $A(1;0;0)$; $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$.
4. $A(1;1;0)$; $B(1;0;1)$ et $C(0;1;1)$.

Positions relatives des plans et des droites dans l'espace

Exercice 29 : L'espace étant rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Étudier dans chaque cas les positions relatives des droites (D) et (D'):

1. $(D):\begin{cases}x=1-t\\ y=2\\ z=3+2t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ et $(D'):\begin{cases}3x+2y+5z=0\\ x-y+3=0\end{cases}$

2. $(D):\begin{cases}x=1-t\\ y=2+t\\ z=3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ et $(D'):\begin{cases}x=-1+2k\\ y=-k\\ z=3+k\end{cases};(k\in\mathbb{R})$

3. $(D):\begin{cases}x-y=0\\ 3x-z-2=0\end{cases}$ et $(D'):\begin{cases}x-z+1=0\\ y+1=0\end{cases}$

Exercice 30 : L'espace étant rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les droites (Δ) et (Δ') définies par :

$(\Delta):\begin{cases}x=1+3t\\ y=2+2t\\ z=-3-2t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ et $(\Delta'):\begin{cases}x=2+3k\\ y=-1+2k\\ z=3-2k\end{cases};(k\in\mathbb{R})$

1. Montrer que (Δ) est strictement parallèle à (Δ').
2. Donner une équation cartésienne du plan (P) défini par les droites (Δ) et (Δ').

Exercice 31 : On considère les points $A(1;2;-1)$ et $B(-1;4;0)$ et la droite (D_m) définie par la représentation paramétrique suivante :
$\begin{cases}x=1+t\\ y=m-2t\,;(t\in\mathbb{R})\\ z=1+3t\end{cases}$ où m est un paramètre réel.
1. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et B.
2. Étudier suivant les valeurs de m l'intersection des droites (D) et (D_m).

Exercice 32 : Soit (Δ) la droite passant par $A(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;3)$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
2. Est-ce que les points $E(-2;6;-8)$, $F(-1;4;0)$ et $G(0;0;2)$ appartiennent à la droite (Δ)?
3. Étudier la position relative de la droite (Δ) avec chacun des plans (xOy), (xOz) et (yOz).

Exercice 33 : Soit (D) la droite passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;-1)$.
1. Donner une représentation paramétrique de la droite (D).
2. Étudier la position relative de la droite (D) avec chacun des plans:
$(P): 2x-2y-z=0$; $(Q): 2x+y+2z+1=0$
$(R): 2x-y+6z-18=0$.

Exercice 34 : Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(-1;0;2)$ et parallèle aux deux plans:
$(P): 3x-y+z-5=0$ et $(Q): x+y+z=0$.

Exercice 35 : Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(1;2;1)$ et contenant la droite (Δ) définie par :
$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\,;(t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases}$

Exercice 36 : On considère les droites (D) et (Δ) définies de la façon suivante :
$(D):\begin{cases}x=1+\frac{3}{2}t\\ y=2+t\\ z=-3-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$
et $(\Delta):\begin{cases}x=\alpha\\ y=6-\frac{1}{2}\alpha\\ z=-3-\frac{1}{2}\alpha\end{cases};(\alpha\in\mathbb{R})$
1. Montrer que (D) et (Δ) se coupent en un point I que l'on déterminera.
2. Donner une équation cartésienne du plan contenant les droites (D) et (Δ).

Exercice 37 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les deux plans (P) et (Q) tels que :
$(P): 3x-2y+z-6=0$
et $(Q):\begin{cases}x=3-3t+5t'\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{cases};(t;t')\in\mathbb{R}^2$
1. Donner une représentation paramétrique du plan (P).
2. Donner une équation cartésienne du plan (Q).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (Q).

Exercice 38 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le plan (P) passant par le point $A(1;0;-1)$ et de deux vecteurs directeurs $\vec{u}(3;1;1)$ et $\vec{v}(1;-3;1)$ et la droite (Δ) qui passe par le point $C(3;9;0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1;-4;1)$.
Soit (Q) le plan passant par le point $B(-2;1;3)$ et contenant la droite (Δ).
1. Donner une représentation paramétrique du plan (P).
2. Donner une équation cartésienne du plan (Q).
3. Déterminer la position relative des plans (P) et (Q).

Exercices de renforcement

Exercice 39 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les droites (D) et (Δ) définies par :
$(D):\begin{cases}x=1-t'\\ y=1+2t'\\ z=-2+t'\end{cases};(t'\in\mathbb{R})$ et $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=6+t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$
1. Vérifier que le point $A(0;2;7)$ est un élément de (Δ), et déterminer un vecteur directeur de (Δ).
2. Montrer que: (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.
3. Montrer que $x-y+2z-12=0$ est une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $B(12;0;0)$ et contenant la droite (Δ).
4. Montrer que la droite (D) perce le plan (P) en un point dont on déterminera les coordonnées.
5. Donner une représentation paramétrique du plan parallèle à (Δ) et contenant la droite (D).

Exercice 40 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(-1;3;-1)$, $B(2;1;-2)$ et $C(-2;1;2)$.
On pose : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.
1. Montrer que les points A, B, C et O ne sont pas coplanaires.
2. Soit E et F deux points tels que : $\overrightarrow{BF}=\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$ et $\overrightarrow{AE}=\vec{v}-\vec{w}$.
a) Montrer que : $(EF)//(BC)$.
b) Vérifier que A est le milieu du segment $[BF]$.
c) Quelle est la nature du quadrilatère $AEBC$?
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x+y-z-2=0$.
a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (ABC).
b) Donner deux équations cartésiennes de la droite (Δ) passant par le point E et parallèle à la droite (AC).
c) Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

Exercice 41 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(0;1;1)$.
Soit (D) la droite d'équations cartésiennes:
$\begin{cases}x-y+2=0\\ y-z=0\end{cases}$
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par O et parallèle à la droite (D).
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 42 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $A(1;1;1)$ et $B(3;-1;1)$ et le vecteur $\vec{u}(-1;1;0)$.
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
2. Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (Δ) passant par le plan A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
3. Soit (P) le plan d'équation cartésienne: $2x+3y-z-2=0$.
a) Vérifier que $B\in(P)$.
b) Déterminer l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).
c) Donner deux vecteurs directeurs du plan (P).

Exercice 43 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, les points $A(1;1;2)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;0;2)$.
1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+2t\\ z=-2-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

Montrer que (Δ) perce le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 44 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le plan (P) d'équation cartésienne $x+3y-z+2=0$ et le plan (Q) défini par la représentation paramétrique suivante :
$$\begin{cases} x=t-t' \\ y=1+2t \\ z=-1+t+2t' \end{cases} ;(t;t')\in\mathbb{R}^2$$
1. a) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection des plans (P) et (Q).
2. Écrire deux équations cartésiennes de la droite (Δ) passant par $A(1;-2;2)$ et parallèle à la droite (D).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan défini par les droites (D) et (Δ).

Exercice 45 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ et les droites (D_1) et (D_2) définies $(D_1):\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ et $(D_2):\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$
Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui coupe les droites (D_1) et (D_2).

Exercice 46 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les droites $(D): 2x=3y=6z$;
$(D_1):\begin{cases} x=0 \\ z=4 \end{cases}$ et $(D_2):\begin{cases} y=0 \\ z=-4 \end{cases}$
Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (Δ) qui est parallèle à (D) et coupe les droites (D_1) et (D_2).

Exercice 47 : L'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les droites (D_1) et (D_2) définies par $(D_1):\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$
et $(D_2):\begin{cases} x-2z+3=0 \\ y=0 \end{cases}$ et le point $A(1;1;2)$.

Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (Δ) qui passe par le point A et coupe les droites (D_1) et (D_2).

Exercice 48 : L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère le plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z+3=0$ et le plan (Q) défini par la représentation paramétrique suivante :
$$\begin{cases} x=3\alpha+\beta \\ y=-2+\alpha+2\beta ;(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=1+4\alpha+2\beta \end{cases}$$
1. Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs du plan (P).
2. a) Montrer que les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
b) Donner une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercice 49 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(3;2;-1)$ et $B(-4;5;0)$ et le vecteur $\vec{u}(3;2;-1)$.
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
2. Soit (P) le plan qui passe par les points A et B et admettant $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ comme vecteurs directeurs.
M est le point défini par $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{u}$.
a) Montrer que $M\in(P)$.
b) Déterminer les coordonnées du point M.

Exercice 50 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ la droite (Δ) et le plan (P) tels que : $(\Delta):\begin{cases} 5x-3y-2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$
et $(P): 4x-3y+7z-7=0$
1. Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ).
2. Montrer que le plan (P) contient la droite (Δ).

Exercice 51 : On considère dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ les points $A(1;2;-1)$, $B(3;2;0)$, $C(2;1;-1)$, $D(1;0;4)$ et $E(-1;1;1)$.
1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Montrer que les points A, D et E ne sont pas

alignés.
2. a) Montrer que les plans (ABC) et (ADE) se coupent suivant une droite (Δ).
b) Déterminer un vecteur directeur de (Δ).

Exercice 52 : Déterminer dans chaque cas une représentation paramétrique de la droite (D).
1. La droite (D) passe par le point $A(-1;0;2)$ et parallèle aux plans (P) et (Q) tels que :
$(P): 3x-2y+z-5=0$ et $(Q): x-y+z=0$
2. La droite (D) passe par le point $A(1;1;1)$, coupe la droite (Δ) et parallèle au plan (P) tel que : $(\Delta):\begin{cases} x=3-2t \\ y=-2+t ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-3t \end{cases}$ et $(P): x+y+z=0$

Exercice 53 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient :
1. $(2x+y-z+2)^2+(x+2y-z-4)^2=0$
2. $(2x+y-z+2)^2-(x+2y-z-4)^2=0$

Exercice 54 : L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les vecteurs $\vec{u}(-2;3;-1)$, $\vec{v}(1;-1;-2)$ et $\vec{w}(4;-2;-18)$.
1. Déterminer les nombres x et y sachant que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
2. En déduire que le point $M(5;-1;-14)$ appartient au plan passant par $A(1;1;4)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercices de synthèse et d'approfondissement

Dans toute la suite, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Exercice 55 : On considère les points $A(1;0;2)$, $B(1;1;3)$, $C(0;1;2)$ et $E(1;1;1)$.
Soit (Δ) la droite définie par la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x=2t \\ y=-t ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=1+3t \end{cases}$
1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).
2. Soit (P) le plan passant par E et parallèle au plan (ABC).
a) Donner une équation cartésienne du plan (P).
b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (Δ) et le plan (P).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par le point E ; coupe la droite (Δ) et parallèle au plan (ABC).

Exercice 56 : On considère le vecteur $\vec{u}(-1;1;2)$ et les points $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$ et $C(3;2;2)$.
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites (Δ) et (BC).
b) Déterminer la position relative des droites (Δ) et (BC).
3. Soit (P) le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.
Donner une équation cartésienne du plan (P).
4. Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $x-y+z+1=0$.
Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.

Exercice 57 : On considère les vecteurs $\vec{u}(0;2;1)$ et $\vec{v}(1;1;1)$.
1. a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
b) Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point O et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit (Q) le plan défini par l'équation cartésienne suivante : $2x+2y-4z+1=0$.
Montrer que : $(P)//(Q)$.

Exercice 58 : On considère la droite (D) et le plan (P) définis par :
$(D):\begin{cases} x=2t \\ y=3+2t ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=0 \end{cases}$; $(P): x+y+z=0$
Soit A le point tel que $A(1;1;1)$.

EXERCICES

1. a) Vérifier que : $A \notin (D)$
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) qui passe par A et contient la droite (D).
2. a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan (P).
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ), intersection des plans (P) et (Q).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point A et coupe la droite (D) et parallèle au plan (P).
4. Soit (D') la droite définie par :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + k \; ; (k \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - k \end{cases}$$
a) Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.
b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ') qui passe par O et coupe les droites (D) et (D').

Exercice 59 : Pour tout réel m on associe la droite (D_m) passant par le point $A(1;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(m-2;1-m;2m+3)$.
1. Donner une représentation paramétrique de la droite (D_m).
2. Déterminer la valeur de m sachant que la droite (D_m) est parallèle au plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z+1=0$.
3. a) Montrer qu'il existe un plan unique (Q) contenant les droites (D_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

Exercice 60 : On considère les droites (Δ_1) et (Δ_2) définies par :
$$(\Delta_1) : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \; ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - t \end{cases} \text{ et } (\Delta_2) : \begin{cases} x = -5 + 7k \\ y = 2 - k \\ z = 2k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$$
1. Montrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas coplanaires.
2. a) Montrer qu'il existe une seule droite (D) passant par O et coupe les droites (Δ_1) et (Δ_2).
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

Exercice 61 : On considère l'ensemble (P_m) des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $(m+1)x+(2-m)y+2mz=0$ où m est un paramètre réel.
1. Montrer que pour tout réel m, on a (P_m) est un plan.
2. Montrer que tous les plans (P_m) contiennent une droite fixe (Δ) dont on déterminera une représentation paramétrique.
3. Soit (Q) le plan d'équation $x-y+2z=0$. Étudier suivant les valeurs de m la position relative des plans (P_m) et (Q).

Exercice 62 : On considère les points $A(1;0;1)$, $B(p;2;1)$ et les vecteurs $\vec{u}(m+2;m;1)$ et $\vec{v}(-1;-3;1)$ où m et p sont deux paramètres réels.
Soit (D) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et (Δ) la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
Étudier suivant les valeurs des paramètres p et m les positions relatives des droites (D) et (Δ).

Exercice 63 : On considère le point $A(4;3;-2)$ et le vecteur $\vec{u}(p;2;1)$ et le plan (P_m) définis par : $mx+3y-(m+1)z+7=0$ où m et p sont deux paramètres réels.
1. Écrire une représentation paramétrique de la droite (D_p) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Étudier suivant les valeurs des paramètres m et p les positions relatives de la droite (D_p) et le plan (P_m).

les bonnes réponses de la rubrique **« Je m'entraîne à faire des choix »**

Question n°:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse n°:	1	2	1	1	2 / 3	3	3	3		

INDICATIONS DE SOLUTIONS

1 Notions de logiques

38

▸ Si l'un des nombres n ou p est pair, alors le produit np est pair.

▸ Si n et p sont impairs, alors : $\exists(k;k') \in \mathbb{N}^2 ; n = 2k+1$ et $n' = 2k'+1$.
donc : $n^2 - p^2 = 4[k(k+1) - k'(k'+1)]$
Or le produit de deux entiers naturels consécutifs est pair : $(\forall m \in \mathbb{N}) ; m(m+1)$ est pair.
Donc : $\exists(a;b) \in \mathbb{N}^2 ; k(k+1) = 2a$ et $k'(k'+1) = 2b$.
D'où : $n^2 - p^2 = 8(a-b)$, ce qui signifie que $n^2 - p^2$ est un multiple de 8.

41

1) On a : $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$
Donc : $4|xy| \leq |x+y|^2 + |x-y|^2$
D'où : $|xy| \leq \frac{1}{2}z^2$.
2) On a : $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|xy|$
▸ Si $xy \geq 0$, alors : $|xy| = xy$
Donc : $(|x|+|y|)^2 = (x+y)^2 = |x+y|^2$
Or : $|x+y| \leq z$ et $(|x|+|y|)^2 \leq z^2$
D'où : $|x|+|y| \leq z$
▸ Si $xy < 0$, alors : $|xy| = -xy$
Donc : $(|x|+|y|)^2 = (x-y)^2 = |x-y|^2$
Or : $|x-y| \leq z$, donc : $(|x|+|y|)^2 \leq z^2$
D'où : $|x|+|y| \leq z$

42 Raisonnement par récurrence

▸ Pour $n = 5$
$2^5 = 32$ et $5^2 = 25$ donc : $2^5 > 5^2$
▸ Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $2^n > n^2$
Montrons que : $2^{n+1} > (n+1)^2$
$2^n > n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > 2n^2$
Reste à montrer que : $2n^2 \geq (n+1)^2$
Or : $2n^2 - (n+1)^2 = n(n-2) - 1$ et $n \geq 5$, donc : $n-2 > 3$
D'où : $2n^2 > (n+1)^2$, et par suite $2^{n+1} > (n+1)^2$.
Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n \geq 5 \Rightarrow 2^n > n^2$.

51

1) $\forall(x;y) \in ([0;1])^2 ; |f(x)-f(y)| \geq |x-y|$
Pour : $x = 1$ et $y = 0$, alors : $|f(1)-f(0)| \geq 1$ (1)
Or : $f(0) \in [0;1]$ et $f(1) \in [0;1]$
donc : $-1 \leq f(1)-f(0) \leq 1$
d'où : $|f(1)-f(0)| \leq 1$ (2)
D'après (1) et (2), $|f(1)-f(0)| = 1$
donc : $f(1)-f(0) = 1$ ou $f(1)-f(0) = -1$
c'est-à-dire : $f(1) = 1+f(0)$ ou $f(1) = f(0)-1$
Donc : $(f(0) = 0 \; et \; f(1) = 1)$ ou $(f(0) = 1 \; et \; f(1) = 0)$
2) a) On a : $f(0) = 0$ donc : $f(1) = 1$.
On a : $\forall(x;y) \in ([0;1])^2 ; |f(x)-f(y)| \geq |x-y|$
Pour $y = 0$; $(\forall x \in [0;1]) ; |f(x)| \geq |x|$
Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; f(x) \geq x$ (3)
b) Pour $y = 1$; $(\forall x \in [0;1]) ; |f(x)-1| \geq |x-1|$
et comme $f(x) \leq 1$ et $x \leq 1$,
alors : $-(f(x)-1) \geq -(x-1)$, soit : $f(x) \leq x$
Donc : $(\forall x \in [0;1]) ; f(x) \leq x$ (4)
D'après (3) et (4), $(\forall x \in [0;1]) ; f(x) = x$.

2 Généralité sur les fonctions

7

1) Montrer l'inégalité en utilisant $|a-b| \leq |a|+|b|$.
2) Montrer que : $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1+x^4} \geq 0$ et $x^4+1-x^2 \geq 0$.
3) En déduire que : $|f(x)| \leq \frac{3}{2}$, puisque : $-\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$.

12

On a : $f(1)-f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{1+x^4}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{1}{2} - \frac{x^2}{x^4+1} \geq 0$
Donc f admet un minimum absolu atteint en 1.

16

1) $D_{gof} = \mathbb{R}^*$ et $D_{fog} = \mathbb{R} - \{1\}$
2) $gof(x) = \frac{3x^2+3}{x^2}$

26

1) $f([-3;1]) = [-1;0]$ et $f([-4;5]) = [-2;2]$
2) $f([-3;5]) = [-2;0]$ et $f(]-4;5[) =]-2;2[$

32

1) $D_f = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$
2) Remarquer que : $f(2) = 0$ et $x-1 > 0$ puis comparer $(\sqrt{2x-3})^2$ et $(x-1)^2$.

3 Suites numériques

46

$$v_n = 3 + \frac{2}{u_n}$$
$$v_{n+1} = 3 + \frac{2(4-u_n)}{4u_n}$$
$$= 3 + \frac{2}{u_n} - \frac{1}{2}$$
$$= v_n - \frac{1}{2}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, v_n = 1-\frac{1}{2}n$

▶ $v_n = 3+\frac{2}{u_n} \Rightarrow \frac{2}{u_n} = v_n - 3$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{v_n-3} = \frac{2}{-\frac{1}{2}n-2}$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, u_n = -\frac{4}{n+4}$

58

1) a) $u_1 = \frac{3}{16}$ et $u_2 = \frac{33}{256}$

b) Par récurrence

▶ La propriété est vraie pour $n=0$.

▶ Soit $n\in\mathbb{N}$; on suppose que : $0<u_n\leq\frac{1}{4}$

Montrons que : $0<u_{n+1}\leq\frac{1}{4}$

$$0<u_n\leq\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<u_n+\frac{1}{2}\leq\frac{3}{4}\\ 0<u_n\leq\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 0<u_n\left(u_n+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{3}{16}<\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0<u_{n+1}<\frac{1}{4}$$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N}) ; 0<u_n\leqslant\frac{1}{4}$

c) $u_{n+1}-u_n = u_n\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$

$0<u_n\leq\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2}<u_n-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{4}$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, u_{n+1}-u_n<0$

D'où (u_n) est strictement décroissante.

2) a) $u_n>0$ et $\frac{1}{2}<u_n+\frac{1}{2}\leq\frac{3}{4}$

Donc : $u_n\left(u_n+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{3}{4}u_n$

D'où : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, u_{n+1}\leq\frac{3}{4}u_n$.

b) On a : $(\forall k\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_{k+1}\leq\frac{3}{4}u_k$

En écrivant cette relation pour : $k=0; k=1;...; k=n-1$ et en multipliant membre à membre et après simplification, on obtient : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_n\leq u_0\left(\frac{3}{4}\right)^n$

et comme $u_0<1$, alors : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence.

60

1) a) $u_1 = \frac{1}{3}$

b) Raisonnement par récurrence.

▶ Monotonie de (u_n) :

$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)}{u_n^2+1}$ donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n+1}{u_n^2+1}$

$u_n>1\Rightarrow u_n^2>u_n$

$$\Rightarrow u_n^2+1>u_n+1$$

$$\Rightarrow \frac{u_n+1}{u_n^2+1}<1$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1\\ u_n>0\end{array}\right\}\Rightarrow u_{n+1}<u_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Donc (u_n) est strictement décroissante.

Remarque : On peut aussi étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}(1-u_n)$ comme $u_n>1$, alors $1-u_n<0$

donc : $u_{n+1}<u_n$.

2) a) $u_{n+1}-1 = \frac{1}{u_n^2+1}(u_n-1)$

$u_n>1\Rightarrow\frac{1}{u_n^2+1}<\frac{1}{2}$

Donc : $u_{n+1}-1<\frac{1}{2}(u_n-1)$ **(1)**

b) La relation **(1)** peut s'écrire :

$(\forall k\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_{k+1}-1<\frac{1}{2}(u_k-1)$ **(2)**

En appliquant la relation (2) pour : $k=0$; $k=1$; ...; $k=n-1$, et en multipliant membre à membre et après simplification, on obtient $(\forall k\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut aussi utiliser un raisonnement par récurrence.

3) On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\, 0<u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $(\forall k\in\mathbb{N})\,;\, 1<u_k\leq 1+\left(\frac{1}{2}\right)^k$

En écrivant cette relation pour : $k=0$; $k=1$; ... ; $k=n-1$ et en additionnant membre à membre,

on obtient : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\, n<\sum_{k=0}^{n-1}u_k\leq n+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Sachant que : $1+\frac{1}{2}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

et $\underbrace{1+1+...+1}_{n\ fois} = n\times 1 = n$.

64

1) $u_0 = 2000$ et $u_1 = 1700$.

2) On a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.

Donc : $\forall n\in\{0;1;...;10\}$; $u_n = 2000\times(0,85)^n$

3) $u_{10} = 2000\times(0,85)^{10}\simeq 393,75$

4) $u_{11} = u_{10}+\frac{15}{100}u_{10} = 1,15u_{10}\simeq 452,81$.

5) $u_{12} = 1,15u_{11} = (1,15)^2u_{10}$

$$= (1,15)^2\times(0,85)^{10}\times 2000$$

6) $n\geq 11$

$u_{n+1} = 1,15u_n$

$$= u_{11}\times(1,15)^{n-11}$$
$$= u_{10}\times(1,15)^{n-10}$$
$$= 2000\times(0,85)^{10}\times(1,15)^{n-10}$$

4 Barycentre

33

▶ Pour déterminer l'ensemble E_1, considérer le point G barycentre des points $(A;1)$; $(B;-3)$ et $(C;1)$.

Alors : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GM}$

Or : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

Donc : $M\in E_1 \Longleftrightarrow GM = BA$.

D'où : E_1 est le cercle de centre G et de rayon AB.

▶ Pour déterminer l'ensemble E_2, considérer G_1 barycentre des points $(A;5)$; $(B;1)$ et $(C;2)$.

G_2 barycentre des points $(A;3)$; $(B;4)$ et $(C;1)$.

Donc : $5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC} = 8\overrightarrow{MG_1}$ et $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 8\overrightarrow{MG_2}$.

D'où : $M\in E_2 \Longleftrightarrow MG_1 = MG_2$

Donc : E_2 est la médiatrice de $[G_1G_2]$.

▶ Pour déterminer l'ensemble E_3, considérer G barycentre des points $(A;2)$; $(B;1)$ et $(C;-1)$.

Alors : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

Soit I le milieu de $[BC]$,

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IB}$

Donc : $M\in E_3 \Longleftrightarrow MG = IB$

D'où E_3 est le cercle de centre G et de rayon IB.

▶ Pour déterminer l'ensemble E_4, considérer G barycentre des points $(A;2)$; $(B;2)$ et $(C;-1)$.

Alors : $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Donc : $M\in E_4 \Longleftrightarrow (\exists k\in\mathbb{R})\,;\, \overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{BC}$

D'où E_4 est la droite passant par G et parallèle à la droite (BC).

47

▶ G barycentre de $(M;1)$ et $(P;-a)$, donc G barycentre de $(M;-1)$ et $(P;a)$.

▶ K barycentre de $(M;1)$ et $(N;a)$.

▶ O milieu de $[NP]$ donc O barycentre de $(N;a)$ et $(P;a)$.

On peut dire aussi que O est le barycentre des points $(N;a)$, $(P;a)$, $(M;-1)$ et $(M;1)$.

Donc, d'après l'associativité du barycentre, O est le barycentre de $(G;a-1)$ et $(K;a+1)$ ce qui signifie que les points O, G et K sont alignés.

5 Expression analytique du produit scalaire

5

1) On a : $\vec{u}.\vec{v} = -2m$, donc : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow m = 0$

2) On a : $\vec{u}.\vec{v} = 2m-3$, donc : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

9

$\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

1) $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{10}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -10$.

Donc : $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -1$

2) $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

13

1) $\overrightarrow{AB}(4;7)$; $\overrightarrow{BC}(8;-1)$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $AB = CD = AD = BC = \sqrt{65}$.

2) $ABCD$ est un losange.

18

(Δ) est la médiatrice de $[AB]$.

$M\in(\Delta) \Longleftrightarrow AM = BM$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+25} = \sqrt{(x+3)^2+1}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{19}{10} = 1,9$$

22

1) $(D){:}x-3y+2=0$ **2)** $(D){:}x+y-3=0$

3) $(D){:}2x-1=0$ **4)** $(D){:}y+1=0$

27

1) $d(A;(D)) = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ **2)** $d(A;(D)) = 2$

3) $d(A;(D)) = \frac{1}{2}$ **4)** $d(A;(D)) = 1$

31

1) $(\mathscr{C}){:}x^2+y^2-5=0$

2) $(\mathscr{C}){:}x^2+y^2-4x+6y=0$

3) $(\mathscr{C}){:}x^2+y^2+6x-8y+7=0$

4) $(\mathscr{C}){:}x^2+y^2+6x+4y-59=0$

40

1) $\overrightarrow{AB}(3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-3)$, donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

D'où : $(AB)\perp(AC)$.

2) $(OB){:}3x-4y=0$ et $d(A;(OB)) = 1$.

52

1) Le centre du cercle (C) est $\Omega(1;0)$, son rayon est $r=1$. $d(\Omega;(D)) = 1 = r$, donc : (D) est tangente au cercle (C).

2) Le centre du cercle (C) est $\Omega(-3;1)$, son rayon est $r=2$.

$d(\Omega;(D)) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ et $\frac{4\sqrt{5}}{5}<r$, donc (D) coupe le cercle (C) en deux points distincts.

61

1) $(BC){:}2x-y+3=0$

2) a) $(D){:}x+2y-6=0$

b) $H(0;3)\in(D)$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$.

3) Le centre du cercle (Γ) est $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ milieu de $[AB]$; le rayon de (Γ) est $IH = \frac{\sqrt{10}}{2}$; donc une équation de (Γ) est : $x^2+y^2-x-3y=0$.

6 Calcul trigonométrique

46

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{9}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}=\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}\times\cos\frac{\pi}{9}}$$
$$=\frac{2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}\right]}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)}=4$$

55

1) $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha.\cos\alpha$
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$
$\sin(2\alpha)=\frac{1}{2}$ et $0\leq 2\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

Donc : $2\alpha=\frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire : $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

2) L'équation proposée est équivalente à

$\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

59

1) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos(x).(2\cos(2x)-1)$

On remplace $\cos 3x$ par l'expression précédente dans $f(x)$ et on obtient : $f(x)=\cos(2x)(2\cos(x)-1)$.

2) Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont :

$\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $f(x)=\cos(2x)(2\cos x-1)$
$$=(2\cos^2x-1)(2\cos x-1)$$
$$=4\cos^3x-2\cos^2x-2\cos x+1$$

4) $f(x)=1\iff\cos x(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$
$$\iff\cos x=0\ ou\ \cos x=1\ ou\ \cos x=\frac{1}{2}$$

7 Rotation

7

Soit Ω le centre de la rotation r et α son angle.

▸ $\begin{cases}r(C)=B\\ r(A)=D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Omega C=\Omega B\\ \Omega A=\Omega D\end{cases}$

Donc Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AD]$ et $[BC]$.

▸ $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DB})\equiv\alpha[2\pi]$ et $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$, donc :

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA})\equiv\alpha[2\pi]$.

Or $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA})=\pi+(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})[2\pi]$ et

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA})=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$; d'où : $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

11

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
$r(M)=B$ et $r(C)=N$, donc : $CM=BN$ (La rotation conserve la distance).

16

$(r(A)=A'\ et\ r(C)=C')\Rightarrow(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{A'C'})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{BC})\equiv(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})[2\pi]$
$$\equiv-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$\equiv 0[2\pi]$$
Donc : $(A'C')//(BC)$.

8 Limites

22

1) Soit $x\in[2;+\infty[$, $|f(x)-3|=\left|\frac{3+\sin x}{x-1}\right|$

or $|3+\sin x|\leq 4$, donc : $|f(x)-3|\leq\frac{4}{|x-1|}$

$x\geq 2\Rightarrow\frac{4}{x-1}\leq\frac{8}{x}$

Donc : $(\forall x\in[2;+\infty[);|f(x)-3|\leq\frac{8}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

52

1) $x>2$

$\sqrt{4x^2+2x-1}-x+3=x\left[\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{3}{x}\right]$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-x+3)=+\infty$

2) Au voisinage de $+\infty$:

$\sqrt{2x^2+3x-7}+1-5x=x\left[\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+\frac{1}{x}-5\right]$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3x-7}+1-5x)=-\infty$.

56

1) $D=[-1;0[\cup]0;1]$

2) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, on obtient :

$(\forall x\in D);f(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

3) choisir l'expression adéquate de $f(x)$ pour chaque limite.

▸ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=-\infty$ ▸ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$

▸ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}f(x)=-1$ ▸ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=1$

58

1) $D=\mathbb{R}^*$

2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

78

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\frac{1}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=1$

9 Dérivation

4

1) $y=5x-3$ **2)** $y=-6x-1$

3) $y=-2x+4$ **4)** $y=\frac{1}{9}x+\frac{5}{9}$

18

1) $f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$ **2)** $f'(x)=\frac{-x-1}{2\sqrt{x(x-1)^3}}$

3) $f'(x)=\cos x-x\sin x$ **4)** $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

33

1) On pose : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\cos x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=-\sin x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) On pose : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=2\sin x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=2\cos x$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

3) On pose : $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);f(x)=\tan x$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right);f'(x)=1+\tan^2x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$$

4) En considérant la fonction $f:x\mapsto\cos^2x-2\sin x$ et en procédant de la même façon, on obtient :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2x-2\sin x-1}{x}=f'(0)=-2$

46

$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=4x+1$

Donc : $f'(x)=6\iff x=\frac{5}{4}$

D'où : la tangente de coefficient directeur 6 est appliquée au point d'abscisse $\frac{5}{4}$.

10 Représentation graphique d'une fonction

10

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

2) a) $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=3x^2-6x$

b)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

c) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

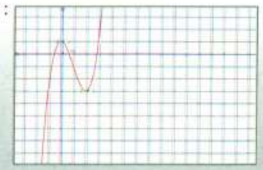
3) $(\forall x\in\mathbb{R});f''(x)=6x-6$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
Concavité de (C)		$\cap$		$\cup$	

Le point $\Omega(1;-1)$ est le point d'inflexion de (C).

4) a) $(T):y=-3x+2$

b) Courbe de f :



19

1) a) $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

b) $a=1$; $b=-1$ et $c=4$

$(\forall x\in D_f);f(x)=x-1+\frac{4}{x-2}$

2) ▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ▸ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

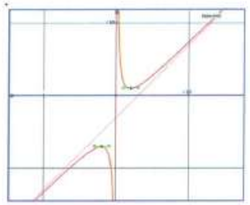
▸ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=-\infty$ ▸ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=+\infty$

3) a) $(\forall x \in D_f) : f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

4) a) $(D_1) : x = 2$ est une asymptote verticale à (C_f).
$(D_2) : y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

b) Courbe de f :



11 Vecteurs dans l'espace

11

1) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

2) $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = x(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Donc : $\overrightarrow{AM} = 2x.\overrightarrow{OI}$

D'où : (E) est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$.

16

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NC}$

23

$\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ID}$

Donc : $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont coplanaires.

26

1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2) $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}$

$3\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}$

Donc : $\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$, les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont donc colinéaires.

27

$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

Donc : $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{EI}$

12 Géométrie analytique dans l'espace

6

Les points A, C et M sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

C'est-à-dire : $\frac{3}{-1} = \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1}$

Donc : $x = -1$ et $y = 6$.

9

1) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x}) = 0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{x}$ sont coplanaires.

2) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 3 \neq 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

3) On obtient $m = 2$.

30

1) $\vec{u}(3;2;-2)$ est un vecteur directeur des deux droites (Δ) et (Δ') ; et comme $A(2;-1;3) \in (\Delta')$ et $A \notin (\Delta)$, alors (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

2) $(P) : 6x - 20y - 11z + 1 = 0$

39

1) Pour $t = 1$, on obtient $A \in (\Delta)$.

2) $\vec{u}(-1;1;1)$ et $\vec{v}(-1;2;1)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (Δ) et (Δ').

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et $\det(\vec{u};\vec{v};\overrightarrow{AB}) \neq 0$, donc : (Δ) et (Δ') sont non coplanaires.

3) $(1-t) - (1+t) + 2(6+t) - 12 = 0$

Donc : $(\Delta) \subset (P)$.

4) La droite (D) coupe le plan (P) au point $C(17;-31;-18)$.

5) Soit (Q) le plan tel que : $(Q) // (\Delta)$ et $(D) \subset (Q)$.

$$(Q) : \begin{cases} x = 1 - t + t' \\ y = 1 + t + 2t' \\ z = -2 + t + t' \end{cases} ; (t;t') \in \mathbb{R}^2$$

L'ESSENTIEL DU COURS

RACINES ET FACTORISATION ET SIGNE

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c des réels)
(a non nul)

$\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant)

$\Delta > 0$

P admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

pour tout réel x ;
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

(si $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$ x_1		x_2 $+\infty$
$P(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a

$\Delta = 0$

P admet une seule racine : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

pour tout réel x ;
$P(x) = a(x - x_0)^2$

x	$-\infty$ $\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	Signe de a

$\Delta < 0$

P n'admet pas de racine réelle

x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de a

▸ La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est une parabole de sommet $S\left(\frac{-b}{2a};P\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

L'ESSENTIEL DU COURS

1 GÉNERALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

• Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
- On dit que f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.
- On dit que f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

• Extremums d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un élément de l'intervalle I.

- On dit que $f(a)$ est **la valeur maximale** (ou le maximum) de f sur l'intervalle I, si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- On dit que $f(a)$ est **la valeur minimale** (ou le minimum) de f sur l'intervalle I, si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.

• Composée de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g.

On pose : $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

La fonction numérique h définie sur D par : $h(x) = g(f(x))$ est appelée **composée** des fonctions f et g dans cet ordre. Elle est notée: gof (se lit : g rond f)

- $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$
- $D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

2 LE CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

• formules trigonométriques

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ ▸ $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$
- $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \alpha)$
- tel que: $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

L'ESSENTIEL DU COURS

3 LES LIMITES

• Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	

• Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

• Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g}(x)$	$\dfrac{1}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

• Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $\ell < 0$	$+\infty$ ou $\ell > 0$	$+\infty$ ou $\ell > 0$	$-\infty$ ou $\ell < 0$	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

• Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle

- Soit P et Q deux fonctions polynômes et x_0 un réel.
  - $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$
- Si ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes P et Q,

alors :
- $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^n}{bx^m}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax^n}{bx^m}$

• limites trigonométriques

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

L'ESSENTIEL DU COURS

4 LES SUITES

Soit n_0 un entier naturel et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

• Raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement :

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on suit les étapes suivantes :

- **Première étape:** l'initialisation : vérifier que P_{n_0} est vraie.
- **Deuxième étape:** l'hérédité : montrer que si P_n est vraie pour un entier quelconque fixé $n \geq n_0$, alors P_{n+1} est vraie.
- **Troisième étape:** conclure que pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie.

• Suite majorée; suite minorée; suite bornée :

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique définie sur I.

- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I); u_n \leq M$.
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I); u_n \geq m$.
- La suite $(u_n)_{n \in I}$ est **bornée** si il elle est majorée et minorée: C'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $n \in I$; $m \leq u_n \leq M$.
- $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si: $(\exists k \in \mathbb{R})$; $(\forall n \in I)|$; $u_n| \leq k$

• Sens de variations d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite définie sur I.

- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **croissante** si et seulement si : $(\forall n \in I); u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **strictement croissante** si et seulement si : $(\forall n \in I); u_{n+1} > u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **décroissante** si et seulement si : $(\forall n \in I); u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **strictement décroissante** si et seulement si : $(\forall n \in I); u_{n+1} < u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite **constante** si et seulement si : $(\forall n \in I); u_{n+1} = u_n$

• Suite arithmétique - Suite géométrique

	(u_n) **est une suite arithmétique de raison** r	(u_n) **est une suite géométrique de raison** q
Définition	$(\forall n \in I)$; $u_{n+1} = u_n + r$	$(\forall n \in I)$; $u_{n+1} = qu_n$
u_n **en fonction de** n	$u_n = u_p + (n-p)r$ pour tout n et p de I	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ pour tout n et p de I
Somme	$S_n = \begin{pmatrix}\text{nombre}\\ \text{de termes}\end{pmatrix} \times \frac{(1^{er}\text{ terme + dernier terme})}{2}$	$(q \neq 1)$; $S_n = \begin{pmatrix}1^{er}\text{ terme de}\\ \text{la somme}\end{pmatrix} \times \frac{1-(q)^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1-q}$
Autrement :		
	▸ $\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n}_{n\ termes} = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ ▸ Le nombre de termes dans une somme est égale à: (Dernier indice- le premier indice + 1).	▸ Si $q \neq 1$; $\underbrace{u_1 + u_2 + ... + u_n}_{n\ termes} = u_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$ ▸ Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante donc : $u_1 + u_2 + ... + u_n = nu_1$
	▸ $\underbrace{u_p + u_{p+1} + ... + u_m}_{(m-p+1)\ termes} = \frac{(m-p+1)(u_p + u_m)}{2}$	▸ $\underbrace{u_p + u_{p+1} + ... + u_m}_{(m-p+1)\ termes} = u_p \frac{(1-q^{m-p+1})}{1-q}$ si $q \neq 1$
	Cas particulier : ▸ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$	cas particulier: ▸ $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; si $q \neq 1$

L'ESSENTIEL DU COURS

5 LE BARYCENTRE

• le barycentre de deux points

Propriété et définition

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que $a + b \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Le point G s'appelle **le barycentre** des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$.

Propriété

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tels que : $a + b \neq 0$.

G est le barycentre des deux points pondérés $(A;a);(B;b)$

si et seulement si pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$

Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$, alors les coordonnées de

G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{a+b} \end{cases}$

• le barycentre de trois points

Propriété et définition

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés tels que : $a + b + c \neq 0$.

Il existe un et un seul point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$.

Propriété de l'homogénéité

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$, alors pour tout réel k non nul; G est aussi le barycentre des points pondérés $(A;ka)$; $(B;kb)$ et $(C;kc)$.

Propriété caractéristique

Soit $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ des points pondérés du plan tels que $a + b + c \neq 0$ et G un point du plan.

G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$ si, et seulement si, pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$; $(B;b)$ et $(C;c)$, alors les coordonnées du point

G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$

L'ESSENTIEL DU COURS

6 DÉRIVATION

• Dérivabilité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

▸ On dit que la fonction f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$.

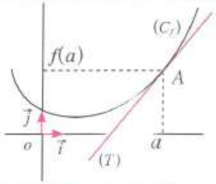
▸ Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a, et il est noté $f'(a)$.

On écrit : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (1)

Ou encore : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (2)

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a.
Une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(a;f(a))$ est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



4- Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction dérivée f'	Fonction f
$u'+v'$	$u+v$
$u'-v'$	$u-v$
$\alpha u'$	$\alpha u (\alpha \in IR)$
$u'v+uv'$	uv
$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$
$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u}$
$nu'u^{n-1}$	u^n $(n \in \quad -\{1\})$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$

Fonction dérivée f'	Fonction f
0	k
a	$ax+b$
nx^{n-1}	$x^n (n \in IN^*)$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$-\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$af'(ax+b)$	$f(ax+b)$

• Équation différentielle: $y''+\omega^2 y=0$

Soit ω un nombre réel non nul.
La solution générale de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par: $y: x \longmapsto \alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$; où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

7 ROTATION

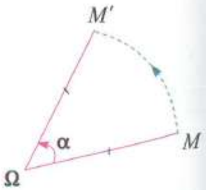
Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et α un nombre réel.
La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan qui, à tout point M du plan, associe le point M' défini par :

▸ Si $M=\Omega$ alors $M'=\Omega$

▸ Si $M \neq \Omega$ alors $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

▸ La rotation conserve:

• La distance; • L'alignement; • Le barycentre; • Le milieu.



L'ESSENTIEL DU COURS

8 PRODUIT SCALAIRE

• Rappel

▸ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

▸ **Relation d'Al-Kashi:**
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$

▸ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$
où C' et D' sont les projetés orthonogonaux respectifs de C et D sur (AB)

▸ Soit I le milieu de $[AB]$; pour tout point M du plan $MA^2+MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

▸ **Règles de calculs:**

• $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$
• $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
• $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
• $\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$
• $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
• $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}$

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

▸ si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors: $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

▸ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et o est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$, alors:

$$\begin{cases} \cos o = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2}} \\[2ex] \sin o = \dfrac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|v\|} = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

▸ si la droite (D) a une équation: $ax+by+c=0$
alors: $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).
et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).

▸ soit: $A(x_A;y_A)$ et $(D): ax \in by \in c = 0$
La distance entre le point A et la droite (D).
est: $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

▸ **Cercle:**

• Le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r $(r>0)$ a pour équation: $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$

• L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que:
$x^2+y^2-2ax-2b+c=0$
est un cercle si et seulement si
$a^2+b^2-c>0$
et son rayon est $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$

• Soit $A \neq B$
M appartient au cerle de diamétre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

• son rayon est $r = \dfrac{AB}{2}$

• son centre est Ω le milieu de $[AB]$.

L'ESSENTIEL DU COURS

9 GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

• Vecteurs colinéaires

▸ Soit $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs de l'espace,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$

• Vecteurs coplanaires

▸ Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

▸ Déterminant de trois vecteurs : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$

• Représentation paramétrique d'une droite

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique

de la droite $D(A;\vec{u})$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

• Représentation paramétrique d'un plan

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ deux vecteurs non colinéaires.

Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$; $((t;t') \in \mathbb{R}^2)$ est appelé une représentation

paramétrique du plan $P(A;\vec{u};\vec{v})$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• Équation cartésienne d'un plan

▸ L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté: $P(A;\vec{u};\vec{v})$

▸ L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient: $ax + by + cz + d = 0$ tels que $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ est un plan.

LEXIQUE

A	Angle d'une rotation	زاوية دوران
	Approximation d'une fonction numérique	تقريب دالة عددية
	Asymptote oblique	مقارب مائل
	Asymptote parallèle à l'axe des abscisses	مقارب موازي لمحور الأراتيب
	Asymptote parallèle à l'axe des ordonnés	مقارب موازي لمحور الأفاصيل
	Axe de symétrie d'une courbe	محور تماثل منحنى
B	Barycentre	مرجح
	Base	أساس
	Branche infinie	فرع لا نهائي
	Branche parabolique	فرع شلجمي
C	Centre de symétrie d'une courbe	مركز تماثل منحنى
	Centre d'une rotation	مركز دوران
	Colinéarité	استقامية متجهتين
	Composée de deux fonctions	مركب دالتين
	Concavité d'une courbe	تقعر منحنى
	Conjonction de deux propositions	عطف عبارتين
	Côte	أنسوب
D	Dérivabilité d'une fonction en un point	قابلية اشتقاق دالة في نقطة
	Dérivation à droite	الاشتقاق على اليمين
	Dériveés successives	المشتقات المتتالية
	Déterminant de trois vecteurs	محددة ثلاث متجهات
	Deux vecteurs directeurs d'un plan	مستوى موجه بمتجهتين
	Disjonction de deux propositions	فصل عبارتين
	Distance d'un point à une droite	مسافة نقطة عن مستقيم
	Distance entre deux points	مسافة بين نقطتين
E	Equation cartésienne d'un plan	معادلة ديكارتية لمستوى
	Equation différentielle	معادلة تفاضلية
	Equation d'un cercle	معادلة دائرة
	Equation d'une demi-tangente	معادلة نصف مماس
	Equation d'une droite	معادلة مستقيم
	Equation d'une tangente à un cercle	معادلة مماس لدائرة
	Equation d'une tangente à une courbe	معادلة مماس لمنحنى
	Equations cartésiennes d'une droite	معادلتان ديكارتيتان لمستقيم
	Equivalence de deux propositions	تكافؤ عبارتين
	Extérieur d'un cercle	خارج دائرة
	Extremums d'une fonction	مطاريف دالة
F	Fonction bornée	دالة المحدودة
	Fonction majorée	دالة المكبورة
	Fonction minorée	دالة المصغورة
	Fonction périodique	دالة دورية
	Fonction propositionnelle	دالة عبارية
	Formule de cos	صيغة $\cos\theta$
	Formule de sin	صيغة $\sin\theta$
I	Implication	استلزام عبارتين
L	La fonction dérivée	الدالة المشتقة
	La fonction dérivée seconde	الدالة المشتقة الثانية
	La rotation	الدوارن
	La rotation réciproque	الدوران العكسي
	Le premier terme	الحد الأول
	Le terme général	الحد العام
	L'expression analytique du produit scalaire	الصيغة التحليلية للجداء السلمي
	Limite à droite	نهاية على اليمين
	Limite à gauche	نهاية على اليسار
	Limite d'une fonction	نهاية دالة
	Limite infinie	نهاية لا منتهية
M	Monotonie de la composée de deux fonctions	رتابة مركب دالتين
	Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.	ضرب متجهة في عدد حقيقي
N	Négation d'une proposition	نفي عبارة
	Nombre dérivé	العدد المشتق
	Norme d'un vecteur	منظم متجهة
O	Opérations sur les fonctions dérivées	عمليات على الدوال المشتقة
	Opposé d'un vecteur	مقابل متجهة
	Ordonnée	أرتوب
P	Point d'inflexion d'une courbe	نقطة انعطاف منحنى
	Points coplanaires	نقط مستوائية
	Points non coplanaires	نقط غير مستوائية
	Positions relatives	الأوضاع النسبية
	Proposition	العبارة
Q	Quadriplet	مربوع
	Quantificateur existentiel	المكمم الوجودي
	Quantificateur universel	المكمم الكوني
R	Raison d'une suite	أساس متتالية
	Raisonnement par contraposée	الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس
	Raisonnement par disjonction des cas	الاستدلال بفصل الحالات
	Raisonnement par équivalence	الاستدلال بالتكافؤ
	Raisonnement par l'absurde	الاستدلال بالخلف
	Raisonnement par récurrence	الاستدلال بالترجع
	Représentation paramétrique	تمثيل بارامتري
S	Sens d'un vecteur	منحى متجهة
	Suite arithmétique	متتالية حسابية
	Suite géométrique	متتالية هندسية
	Suite numérique	متتالية عددية
	Suite récurrente	متتالية ترجعية
T	Terme d'une suite	حد متتالية
	Transformation de	تحويل cos (a-b)
	Transformation de produits en sommes	تحويل جداءات إلى مجاميع
	Transformation de sommes en produits	تحويل مجاميع إلى جداءات
	Triplet	مثلوث
V	Vecteur normal à une droite	متجهة منظمية على مستقيم
	Vecteurs coplanaires	متجهات مستوائية

BIBLIOGRAPHIE

1- En arabe:

- الميثاق الوطني للتربية والتكوين، المملكة المغربية، الرباط (1999).
- في رحاب الرياضيات، السنة الأولى من سلك البكالوريا مسالك العلوم التجريبية-ا لعلوم و التكنولوجيا الميكانيكية-العلوم و التكنولوجيا الكهربائية. الدار العالمية للكتاب - مكتبة السلام الجديدة، الدار البيضاء. طبعة 2014.

2- En français:

- BOUVIER, A. & col. : Didactique des mathématiques, le dire et le faire, Nathan (Paris 1986).
- Collection Dimathème, Mathématiques Analyses probabilités 1re S. Didier, 2001.
- Collection FRACTALE. Analyse, 1re SE, Bordas, 1995.
- Collection FRACTALE. Géométrie, 1re S, Bordas, 1991.
- Maths Terminale S, Didier, 2002.
- Collection Terracher 1re S. Analyse Hachette, livre 2001.
- Collection Terracher 1re S. Géométrie Hachette, livre 2001.
- DECLIC Maths Terminale S, Hachette, 1998.
- Math 1erS. Edition, Belin, 2001.
- Transmath 1re ES, Nathan, 2005.
- Symbole. Maths 1er S . Belin. 2011.
- Transmath 1re S, Nathan, 2001,2011.

maxi MATHS

LIBRAIRIE ES-SALAM AL-JADIDA

31/34 Place My Youssef - Habouss - Casablanca
Tel.: 05-22-30-40-16 / 05-22-30-37-11
Fax: 05-22-44-10-47
E-mail: lib.essalam@gmail.com
lib.essalam@hotmail.fr - lib.essalam@menara.ma
www.librairieessalam.com

Prix de vente public:
145,00Dh

ISBN 978-9954-682-33-3

9 789954 682333

rotaco IMPRIMERIE