Fomesoutra.com
ça soutra!

collection
IRMA

MATHEMATIQUES

1e D.

GEOMETRIE

CEDIC
NEA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

BENGALY
KALIFA

Mathématiques

en classe de 1re D

TOME 2 : GÉOMÉTRIE

Georgette OUEDRAOGO-HADDAD
Phung DOAN
Michel DUHOUX

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain. Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.

A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Première D, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Première D, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.
- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.
- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.

L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

SALIOU TOURE

REMERCIEMENTS

Nous remercions les personnes qui ont participé à l'expérimentation du contenu de cet ouvrage :
Mesdames : GUYON, Inspecteur de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
LECLERC, professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
Messieurs : CANAZZI, professeur au L.C. d'Abidjan,
DOAN, professeur au L.C. de Bingerville,
et dont les suggestions et critiques ont été très précieuses.

Nous remercions également les personnes suivantes qui ont bien voulu lire notre manuscrit et nous faire profiter de leurs remarques pertinentes :
Mesdames : GUYON, Inspecteur de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
VALETTE, Animatrice pédagogique à la S.D.E.A.C.P.,
Messieurs : BOUTTE, Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématiques,
CARPENTIER, Chercheur à l'IRMA,
DUMONCEAU, Chercheur à l'IRMA,
N'DA, Animateur pédagogique à la S.D.E.A.C.P.

Enfin nous remercions tout particulièrement M. BEGHAIN, chercheur à l'IRMA, qui a bien voulu lire notre manuscrit et avec qui nous avons eu de longs et fructueux entretiens qui nous ont permis d'améliorer fortement le contenu et la forme de cet ouvrage.

Les auteurs

III. LIMITE, CONTINUITÉ, DÉRIVATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

- Limite et continuité d'une fonction en un point. (On admettra les théorèmes classiques sur les limites).
- Fonction dérivable en un point, nombre dérivé.
- Interprétation géométrique du nombre dérivé; équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.
- Règles de dérivation de la somme, du produit, du quotient de fonctions dérivables en un point, d'une fonction de la forme $x \longmapsto f(ax + b)$.
- Fonctions dérivables sur un intervalle; fonction dérivée.
- Énoncé du théorème donnant le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle, à partir du signe de $f(x)$.
- Extension de la notion de limite. Notion d'asymptotes parallèles aux axes.

IV. ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS

- Fonctions polynômes.
- Fonctions rationnelles.
  Notion d'asymptote oblique.
- Fonction tangente.
- Utilisation de la représentation graphique pour la résolution d'équations du type :

$$f(x) = g(x);$$

et d'inéquations du types :

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Activités

- Approximation des zéros d'une fonction par la méthode de dichotomie.

V. PRIMITIVES DE FONCTIONS USUELLES

- Primitives des fonctions usuelles : monômes, sinus, cosinus,

$$x \longmapsto \frac{1}{x^n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} - \{1\}.$$

STATISTIQUE

- Variance, écart-type.
- Distribution statistique normale.
- Comparaison de quelques distributions statistiques expérimentales à une distribution normale.

GÉOMÉTRIE

I. GÉOMÉTRIE DU PLAN

- Angles inscrits, polygones réguliers.
- Relations métriques dans le triangle :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

- Applications du produit scalaire et du barycentre (Recherche de lieux géométriques).
- Trigonométrie.
  - Mesures d'un angle orienté.
  - Définition et représentation graphique des fonctions sinus et cosinus de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
  - Formules usuelles de transformations trigonométriques.
  - Résolution d'équations et d'inéquations des types :

$$\sin x = a \quad ; \quad \cos x = a$$
$$\sin x < a \quad ; \quad \cos x < a,$$
$$a \cos x + b \sin x + c = 0;$$

  d'équations et d'inéquations s'y ramenant.
- Similitudes (figures semblables).
- Utilisation des transformations pour la résolution de problèmes variés.
- A partir d'exemples, recherche de la représentation analytique de translations, de symétries centrales, de symétries orthogonales, d'homothéties.

II. GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

- Orthogonalité.
- Projections orthogonales sur un plan, sur une droite.
- Solides usuels :
  parallélépipède, cube, tétraèdre, prisme, pyramide, cylindre, cône de révolution, sphère.
  (On admettra les formules des aires et des volumes de ces solides.)

PLAN DE L'OUVRAGE

ANALYSE

- Fonctions et applications
- Suites numériques
- Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré.
- Système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Limite et continuité. Dérivation.
- Continuité et dérivabilité sur un intervalle. Extension de la notion de limite.
- Étude de fonctions.
- Primitive d'une fonction.
- Statistiques.

GÉOMÉTRIE

- Figures inscrites dans un cercle. Relations métriques dans un triangle.
- Trigonométrie
- Transformation du plan
- Représentation analytique d'une transformation du plan
- Les polyèdres
- L'orthogonalité dans l'espace
- La sphère

SOMMAIRE

1. Figures inscrits dans un cercle
Relations métriques dans un triangle 5
1) Angles réguliers 5
2) Polygones réguliers 15
3) Relations métriques dans un triangle 21
4) Lignes de niveau 25

2. Trigonométrie 40
1) Fonctions sinus et cosinus 40
2) Équations et inéquations trigonométriques 59
3) Formules d'addition et conséquences 75

3. Transformations du plan 95
1) Rotations 95
2) Homothéties 116
3) Similitudes 131

4. Représentation analytique d'une transformation du plan 156
1) Représentation d'une application de $\mathfrak{T}$ dans $\mathfrak{T}$ 156
2) Représentation analytique de quelques transformations du plan 159
3) Exemples d'utilisation de la représentation analytique 170
4) Nature d'une transformation du plan définie par sa représentation analytique .. 178

5. Les polyèdres 193

6. Orthogonalité dans l'espace 198
1) Droites et plans de l'espace $\mathcal{E}$ 199
2) Orthogonalité dans l'espace $\mathcal{E}$..... 203
3) Projections orthogonales..... 224

7. La sphère 247

1 Figures inscrites dans un cercle Relations métriques dans un triangle

Leçon 1 : ANGLES INSCRITS
Leçon 2 : POLYGONES RÉGULIERS
Leçon 3 : RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE
Leçon 4 : LIGNES DE NIVEAU

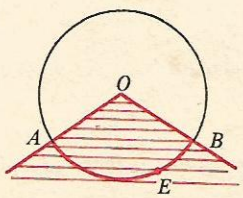
1 Angles inscrits

1) Définitions

Soit (C) un cercle de centre O et A, B deux points distincts de (C).

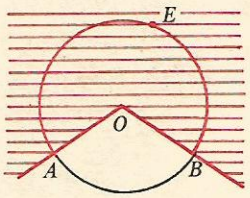
• Les points A et B déterminent deux secteurs angulaires de sommet O et de côtés $[O, A)$, $[O, B)$.
De tels secteurs angulaires sont appelés *secteurs angulaires au centre.*
Si A et B ne sont pas diamétralement opposés, l'un des secteurs est saillant et noté $[OA, OB]$; l'autre est rentrant et noté : rentrant $[OA, OB]$ (voir figures 1 et 2).
Si A et B sont diamétralement opposés, les deux secteurs angulaires correspondants sont plats (figures 3 et 4); ils sont tous deux notés $[OA, OB]$ si cela ne prête pas à confusion.

Fig. 1



$[OA, OB]$

Fig. 2



rentrant $[OA, OB]$

Fig. 3

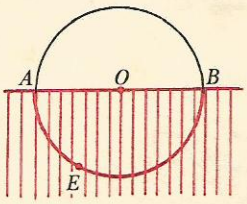
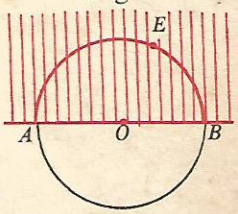


Fig. 4



• Les points A et B déterminent deux arcs d'extrémités A et B.
Considérons à nouveau les figures 1 à 4.

Dans chaque cas, on dit que le secteur angulaire au centre considéré intercepte l'arc $\overset{\frown}{AEB}$ (car, parmi les deux arcs d'extrémités A et B, $\overset{\frown}{AEB}$ est celui qu'il contient).
En général, étant donné un secteur angulaire au centre déterminé par A et B, on dit qu'il *intercepte* l'arc d'extrémités A et B qu'il contient.

• Soit M un point de (C), distinct de A et B.
On dit que le secteur angulaire $[MA, MB]$ est *inscrit dans le cercle* (C) et qu'il *intercepte* l'arc d'extrémités A et B qu'il contient.

Voir les figures 5 et 6 où, dans chaque cas, l'arc intercepté est $\overset{\frown}{AEB}$.

Fig. 5

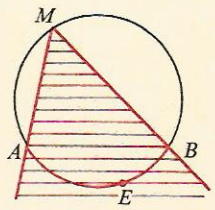
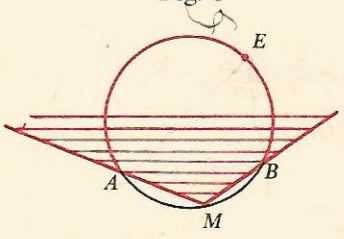


Fig. 6



Par abus de langage, on dit aussi que l'angle $\widehat{AMB}$ est *inscrit dans le cercle* (C) et qu'il *intercepte* l'arc $\overset{\frown}{AEB}$.

• Soit $[AX)$ une demi-droite dont le support est la tangente à (C) en A; la demi-droite $[AX)$ est appelée *demi-tangente* à (C) au point A.
On dit que le secteur angulaire $[AB, AX]$ est *inscrit dans le cercle* (C) et qu'il *intercepte* l'arc d'extrémités A et B qu'il contient.

Voir les figures 7 et 8 où, dans chaque cas, l'arc intercepté est $\overset{\frown}{AEB}$.

Fig. 7

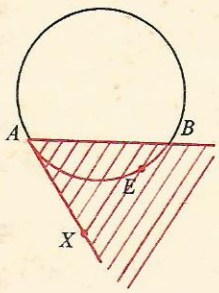
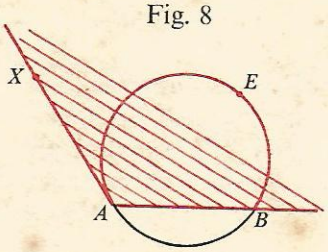
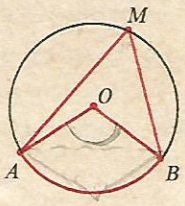


Fig. 8

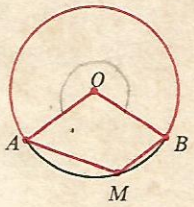


Par abus de langage, on dit aussi que l'angle $\widehat{BAX}$ est *inscrit dans le cercle* (C) et qu'il *intercepte* l'arc $\overset{\frown}{AEB}$.

• Un angle inscrit et un secteur angulaire au centre qui interceptent le même arc sont dits *associés*.
Voir les figures 9.

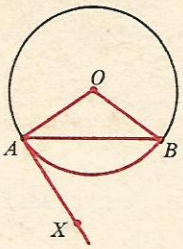


L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et le secteur angulaire $[OA, OB]$ sont associés.

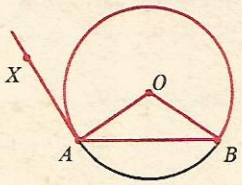


L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et le secteur angulaire rentrant $[OA, OB]$ sont associés.

Fig. 9



L'angle inscrit $\widehat{BAX}$ et le secteur angulaire $[OA, OB]$ sont associés.



L'angle inscrit $\widehat{BAX}$ et le secteur angulaire rentrant $[OA, OB]$ sont associés.

2) Le théorème des angles inscrits

Activités préparatoires

Soit un cercle (C) de centre O et deux points A et B de (C) tels que mes(°) $\widehat{AOB} = 60$ (figure 10).

a) Quelle est la mesure de chacun des deux secteurs angulaires au centre $[OA, OB]$ et rentrant $[OA, OB]$?

b) Soit M_1, M_2, M_3, ... des points de (C) $\cap$ rentrant $[OA, OB]$.

A l'aide d'un rapporteur, déterminer la mesure de chacun des angles inscrits $\widehat{AM_1B}$, $\widehat{AM_2B}$, ...

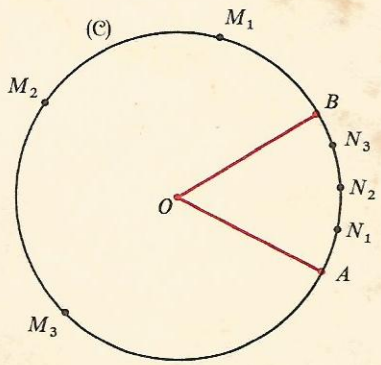


Fig. 10

c) Soit N_1, N_2, N_3, ... des points de $(\mathcal{C}) \cap [OA, OB]$.

A l'aide d'un rapporteur, déterminer la mesure de chacun des angles inscrits $\widehat{AN_1B}$, $\widehat{AN_2B}$, ...

d) Quel lien voyez-vous entre la mesure d'un angle inscrit et celle du secteur angulaire au centre associé?

Théorème des angles inscrits

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure du secteur angulaire au centre associé.

Démonstration

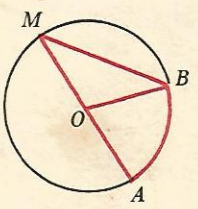
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O.

• Considérons d'abord un angle inscrit $\widehat{AMB}$, où A, B et M sont trois points distincts de $(\mathcal{C})$.

1er cas : [AM] (ou [BM]) est un diamètre

Les mesures étant exprimées en degrés, on a :

Fig. 11



$$\text{mes } \widehat{MOB} = 180 - 2 \text{ mes } \widehat{AMB}$$
(car le triangle MOB est isocèle);

$$\text{mes } \widehat{MOB} = 180 - \text{mes } \widehat{AOB}$$
(car M, O et A sont alignés).

D'où :

$$\text{mes } \widehat{AOB} = 2 \text{ mes } \widehat{AMB}.$$

Finalement :

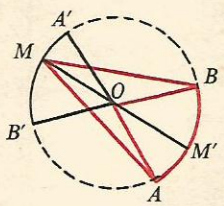
$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ mes } [OA, OB].$$

Ce résultat sera utilisé plusieurs fois dans la suite de la démonstration.

2e cas : [AM] et [BM] ne sont pas des diamètres

Soit A', B' et M' les symétriques respectifs de A, B et M par rapport à O.
On considère plusieurs cas de figures.
Dans chaque cas, M est choisi dans la partie de (C) en trait continu noir.

Fig. 12

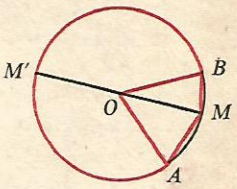


$$\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{AMM'} + \text{mes } \widehat{M'MB}$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes}\,[OA, OM'] + \frac{1}{2}\text{mes}\,[OM', OB].$$

D'où :

$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\text{mes}\,[OA, OB].$$

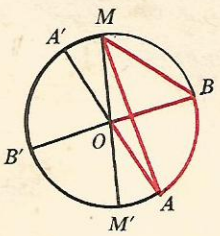
Fig. 13



D'où :

$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\text{mes rentrant}\,[OA, OB].$$

Fig. 14



$$\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{M'MB} - \text{mes } \widehat{M'MA}$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes}\,[OM', OB] - \frac{1}{2}\text{mes}\,[OM', OA]$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes}\,[OA, OB].$$

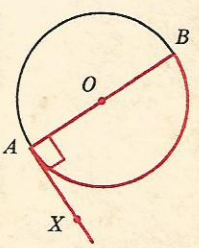
• Considérons ensuite un angle inscrit $\widehat{BAX}$, où A et B sont deux points distincts de (C) et où $[AX)$ est une demi-tangente à (C) en A.

1er cas : [AB] est un diamètre

Il est immédiat que :

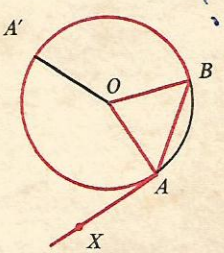
$$\text{mes } \widehat{BAX} = \frac{1}{2}\text{mes}\,[OA, OB].$$

Fig. 15



2e cas : [AB] n'est pas un diamètre

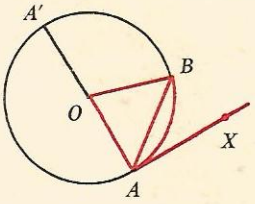
Fig. 16



Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
On distingue deux cas de figure :

$$\text{mes } \widehat{BAX} = \text{mes } \widehat{BAA'} + \text{mes } \widehat{A'AX}$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes}\,[OB, OA'] + \frac{1}{2}\text{mes}\,[OA', OA]$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes rentrant}\,[OA, OB].$$

Fig. 17



$$\text{mes } \widehat{BAX} = \text{mes } \widehat{A'AX} - \text{mes } \widehat{BAA'}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ mes } [OA', OA] - \frac{1}{2} \text{ mes } [OB, OA']$$
$$= \frac{1}{2} \text{ mes } [OA, OB].$$

Remarque. Rappelons que la mesure d'un arc de cercle est égale à la mesure du secteur angulaire au centre qui l'intercepte.
On peut donc aussi énoncer :
La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème des angles inscrits.

> Deux angles inscrits dans un même cercle et interceptant le même arc ont la même mesure (et sont donc isométriques).

Application

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus.
Soit A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C.
Démontrons que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices des angles du triangle $A'B'C'$ (figure 18).

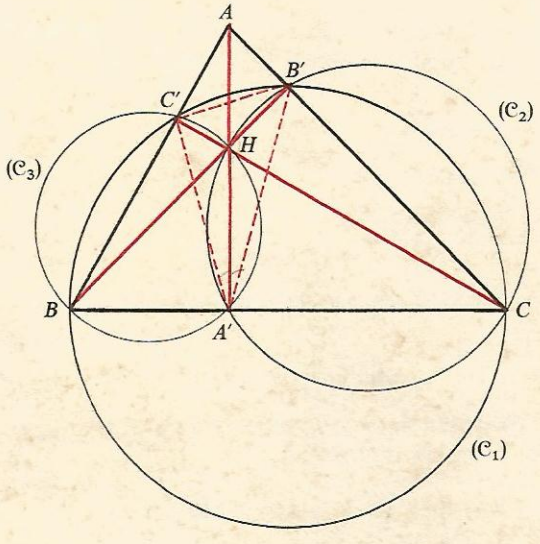


Fig. 18

Notons H l'orthocentre du triangle ABC.
Montrons, par exemple, que (AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$.

• Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de diamètre $[BC]$.

Les angles $\widehat{BB'C}$ et $\widehat{BC'C}$ étant droits, les points B' et C' appartiennent à $(\mathcal{C}_1)$.

Les angles $\widehat{B'CC'}$ (ou $\widehat{B'CH}$) et $\widehat{B'BC'}$ (ou $\widehat{HBC'}$), inscrits dans $(\mathcal{C}_1)$, interceptent le même arc $\widehat{B'C'}$; d'où :

$$\text{mes } \widehat{B'CH} = \text{mes } \widehat{HBC'}.$$

• Soit $(\mathcal{C}_2)$ le cercle de diamètre $[CH]$.

Les angles $\widehat{CA'H}$ et $\widehat{CB'H}$ étant droits, les points A' et B' appartiennent à $(\mathcal{C}_2)$.

Les angles $\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{B'CH}$, inscrits dans $(\mathcal{C}_2)$, interceptent le même arc $\widehat{HB'}$; d'où :

$$\text{mes } \widehat{HA'B'} = \text{mes } \widehat{B'CH}.$$

• Soit $(\mathcal{C}_3)$ le cercle de diamètre $[BH]$.

Les angles $\widehat{BA'H}$ et $\widehat{BC'H}$ étant droits, les points A' et C' appartiennent à $(\mathcal{C}_3)$.

Les angles $\widehat{HA'C'}$ et $\widehat{HBC'}$, inscrits dans $(\mathcal{C}_3)$, interceptent le même arc $\widehat{HC'}$; d'où :

$$\text{mes } \widehat{HA'C'} = \text{mes } \widehat{HBC'}.$$

• Finalement :

$$\text{mes } \widehat{HA'B'} = \text{mes } \widehat{HA'C'}.$$

La droite (AA') est donc bien la bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$.

Exercices

1) Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle.
Soit M un point de l'arc $\widehat{ACB}$, distinct de A, B et C, et plaçons sur la demi-droite $[MA)$ le point N tel que $MN = MB$.
Démontrer que le triangle MNB est équilatéral.

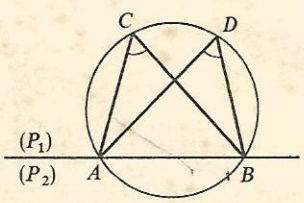
2) Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle.
On suppose que : $\text{mes } \widehat{ABC} = 2 \text{ mes } \widehat{BCA}$.
Par A, on trace la tangente au cercle; elle coupe (BC) en un point D.
Démontrer que le triangle ABD est isocèle.

3) Réciproques partielles du théorème des angles inscrits

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et deux points distincts A et B de $(\mathcal{C})$.
Notons (P_1) et (P_2) les deux demi-plans déterminés par la droite (AB).

a) Soit C un point de $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ et D un point de (P_1), tous deux distincts de A et B.

Fig. 19



Si D appartient à $(\mathcal{C})$ (figure 19), on a :

$$\text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{ADB}.$$

Réciproquement, si mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ADB}$, le point D appartient à (C).
Pour justifier cette affirmation, considérons la figure 20 et notons D' le point d'intersection de $[AD)$ et de (C), autre que A.
Les triangles ADB et $AD'B$ ont un angle commun.
D'autre part :

$$\text{mes } \widehat{ADB} = \text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{AD'B}.$$

D'où :

$$\text{mes } \widehat{ABD} = \text{mes } \widehat{ABD'}.$$

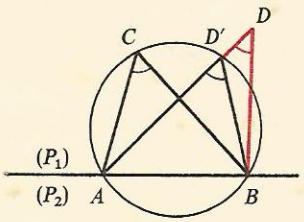


Fig. 20

Or, dans le demi-plan (P_1), il existe un seul angle de sommet B, de côté $[BA)$ et de mesure donnée.
Ainsi $(BD) = (BD')$ et, par conséquent, D appartient à $(BD') \cap (AD')$.
D'où $D = D'$, c'est-à-dire, D appartient à (C).

Le résultat qui vient d'être démontré peut s'énoncer :

> Soit quatre points non alignés A, B, C et D tels que C et D appartiennent à un même demi-plan de bord (AB) et tels que :
>
> $$\text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{ADB}.$$
>
> Alors, les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

b) Soit C un point de $(C) \cap (P_1)$ et E un point de (P_2), tous deux distincts de A et B.
Si $[BE)$ est une demi-tangente à (C) (figure 21), on a :

$$\text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{ABE}.$$

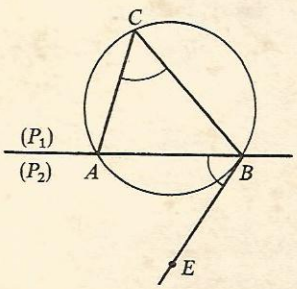


Fig. 21

Réciproquement, si mes $\widehat{ACB}$ = mes $\widehat{ABE}$, alors $[BE)$ est une demi-tangente à $(\mathcal{C})$.
En effet, dans le demi-plan (P_2), il existe un seul angle de sommet B, de côté $[BA)$ et de mesure donnée.

Conclusion :

C étant un point de $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ et E un point de (P_2), tous deux distincts de A et B, la demi-droite $[BE)$ est une demi-tangente à $(\mathcal{C})$ si et seulement si :

$$\text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{ABE}.$$

c) Soit C un point de $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ et D un point de (P_2), tous deux distincts de A et B.

On a : $$\text{mes } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ mes } [OA, OB].$$

Si D appartient à $(\mathcal{C})$, on a aussi :

$$\text{mes } \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \text{ mes rentrant } [OA, OB].$$

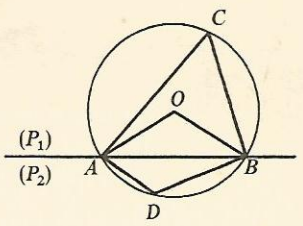


Fig. 22

Les mesures étant exprimées en degrés, on a alors :

$$\text{mes } \widehat{ACB} + \text{mes } \widehat{ADB} = \frac{1}{2}(\text{mes } [OA, OB] + \text{mes rentrant } [OA, OB])$$
$$= 180.$$

Réciproquement, montrons que si :

$$\text{mes } \widehat{ACB} + \text{mes } \widehat{ADB} = 180,$$

alors D appartient à $(\mathcal{C})$.
Soit, en effet, un point quelconque D' de $(\mathcal{C}) \cap (P_2)$, distinct de A et B (figure 23).

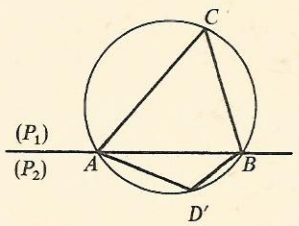


Fig. 23

Par hypothèse, on a :

$$\text{mes } \widehat{ACB} + \text{mes } \widehat{ADB} = 180.$$

Puisque D' appartient à $(\mathcal{C})$, on a aussi :

$$\text{mes } \widehat{ACB} + \text{mes } \widehat{AD'B} = 180.$$

D'où : $$\text{mes } \widehat{ADB} = \text{mes } \widehat{AD'B}.$$

Il résulte de la propriété démontrée en *a*) que A, B, D et D' appartiennent à un même cercle, c'est-à-dire, D appartient à $(\mathcal{C})$.

Les résultats qui viennent d'être démontrés peuvent s'énoncer :

- Deux angles inscrits dans un même cercle et interceptant deux arcs différents de mêmes extrémités sont supplémentaires.
- Soit quatre points non alignés A, B, C et D tels que C et D n'appartiennent pas à un même demi-plan de bord (AB) et tels que :

$$\text{mes}(^\circ)\ \widehat{ACB} + \text{mes}(^\circ)\ \widehat{ADB} = 180.$$

Alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

Exercice Soit un trapèze $ABCD$, de bases $[AB]$ et $[CD]$, inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O.
Soit E le point d'intersection des diagonales du trapèze.
Démontrer que les points A, D, O et E appartiennent à un même cercle.

4) Arcs capables

a) Définition

Soit un cercle $(\mathcal{C})$ et deux points distincts A et B de $(\mathcal{C})$.
La droite (AB) détermine deux demi-plans (P_1) et (P_2).
Considérons un point N de l'arc $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$, distinct de A et B, et posons :

$$\alpha = \text{mes } \widehat{ANB} \quad \text{(en degrés, grades ou radians).}$$

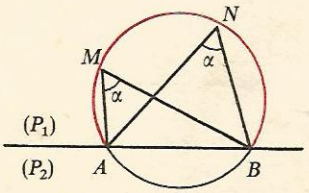


Fig. 24

On sait qu'un point M de (P_1), distinct de A et B, appartient à l'arc $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ si et seulement si mes $\widehat{AMB} = \alpha$.
Pour cette raison, on dit que $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ est un *arc capable de* α degrés, grades ou radians (suivant le cas).

Exercice Sachant que $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ est un arc capable de α degrés, déterminer le nombre β tel que $(\mathcal{C}) \cap (P_2)$ soit un arc capable de β degrés.

b) **Construction d'un arc capable**

Soit A, B deux points distincts du plan et (P_1), (P_2) les deux demi-plans de bord (AB). Étant donné un nombre α strictement compris entre 0 et 180, comment construire un arc capable de α degrés, d'extrémités A et B, et contenu dans (P_1)?

On procède comme suit (figure 25) :

- on construit dans (P_2) la demi-droite $[BE)$ telle que mes(°) $\widehat{ABE} = \alpha$;
- on trace la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (EB);
- on trace la médiatrice (Δ) de $[AB]$;
- on note O le point d'intersection de (D) et (Δ);
- on trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et passant par les points A et B.

L'arc $(\mathcal{C}) \cap (P_1)$ est un arc capable de α degrés. Pourquoi?

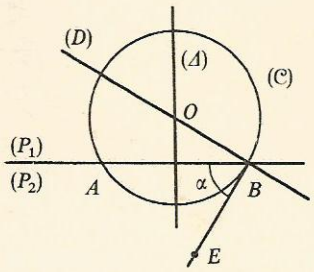


Fig. 25

Exercices

1) Existe-t-il dans (P_1) un autre arc capable de α degrés, d'extrémités A et B?

2) Construire dans (P_2) les arcs capables de 30°, de 60°, de 90°, d'extrémités A et B.

2 Polygones réguliers

Nous rappelons que :

- Un *polygone régulier* est un polygone inscriptible dans un cercle et qui a tous ses côtés de même mesure.
- Le centre du cercle est aussi appelé le *centre du polygone.*
- La distance du centre au support de l'un quelconque des côtés du polygone régulier est appelée l'*apothème du polygone* (on peut montrer que cette distance ne dépend pas du côté choisi).

1) Triangle équilatéral et hexagone régulier

a) Le triangle équilatéral est évidemment un polygone régulier.
Considérons le triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle (C) de centre O et de rayon R (figure 26).

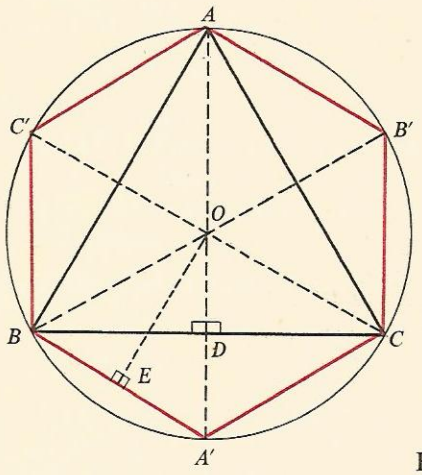


Fig. 26

Notons A', B', C' les symétriques respectifs de A, B, C par rapport à O.
On sait que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont à la fois les médiatrices des côtés et les bissectrices des angles du triangle équilatéral ABC.
Montrer que les triangles AOC', $C'OB$, BOA', $A'OC$, COB', $B'OA$ sont tous équilatéraux.
Le polygone $AC'BA'CB'$ est appelé *hexagone* car il a six côtés.
C'est un hexagone régulier car il est inscrit dans le cercle (C) et tous ses côtés ont la même mesure R (pourquoi?).

b) Calculons, en fonction de R, la mesure du côté et l'apothème du triangle équilatéral ABC.
Le quadrilatère $OBA'C$ est un losange (pourquoi?).
Les diagonales $[BC]$ et $[OA']$ se coupent donc en leur milieu; notons-le D.

L'apothème de ABC, c'est-à-dire OD, est donc égal à $\frac{R}{2}$.

D'autre part, dans le triangle rectangle OBD, on a :

$$BD^2 = OB^2 - OD^2$$
$$= R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}.$$

D'où $BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ et, ensuite, $BC = R\sqrt{3}$.

> La mesure du côté et l'apothème d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon R sont respectivement égaux à $R\sqrt{3}$ et $\frac{R}{2}$.

Exercice Montrer que la mesure de l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

c) Calculons, en fonction de R, la mesure du côté et l'apothème de l'hexagone régulier $AC'BA'CB'$.
On sait déjà que la mesure du côté est égale à R.
Soit E le projeté orthogonal de O sur (BA').
Dans le triangle rectangle BOE, on a :

$$OE^2 = OB^2 - BE^2$$
$$= R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}.$$

L'apothème de l'hexagone, c'est-à-dire OE, est donc égal à $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

La mesure du côté et l'apothème d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R sont respectivement égaux à R et $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Exercice Montrer que la mesure de l'aire de l'hexagone $AC'BA'CB'$ est égale à $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné de rayon R, on place bout à bout six cordes de longueur R au moyen d'un compas.
En joignant de deux en deux les sommets d'un hexagone régulier, on obtient un triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

Exercice Utiliser la méthode de construction ci-dessus pour inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans un cercle donné.

2) Carré et octogone régulier

a) Le carré est évidemment un polygone régulier.
Pour obtenir les sommets d'un carré $ABCD$ inscrit dans le cercle (C) de centre O et de rayon R, il suffit de tracer deux diamètres perpendiculaires (figure 27).

Dans le triangle rectangle AOB, on a :

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2R^2.$$

D'où :
$$AB = R\sqrt{2}.$$

D'autre part, l'apothème du carré $ABCD$ est évidemment égal à la moitié de la mesure du côté.

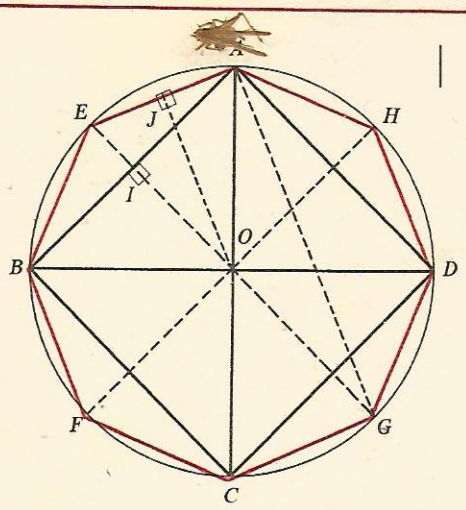


Fig. 27

La mesure du côté et l'apothème d'un carré inscrit dans un cercle de rayon R sont respectivement égaux à $R\sqrt{2}$ et $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

b) Soit $[EG]$ (resp. $[FH]$) le diamètre de $(\mathcal{C})$ dont le support est l'axe médian des droites parallèles (AD) et (BC) (resp. (AB) et (CD)), (figure 27).
Montrer que tous les triangles isocèles :

$$AOE,\quad EOB,\quad BOF,\quad FOC,\quad COG,\quad GOD,\quad DOH,\quad HOA$$

sont isométriques.
Le polygone $AEBFCGDH$ est appelé *octogone* car il a huit côtés.
C'est un octogone régulier car il est inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ et tous ses côtés ont la même mesure (pourquoi?).
Calculons la mesure du côté de cet octogone.
Remarquons d'abord que le triangle EAG est rectangle en A (pourquoi?).
On en déduit :

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EA} = EA^2.$$

Notons I le point d'intersection de (EG) et (AB).
On a aussi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EG} \\ &= EI \times EG \\ &= \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)2R = R^2(2 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

D'où :

$$EA^2 = R^2(2 - \sqrt{2}).$$

La mesure du côté de l'octogone est donc égale à $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
Soit J le projeté orthogonal de O sur (EA).

A l'aide du triangle rectangle AJO, montrer que l'apothème de l'octogone, c'est-à-dire OJ, est égal à $\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

La mesure du côté et l'apothème d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon R sont respectivement égaux à :

$$R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercices

1) Montrer que la mesure de l'aire de l'octogone $AEBFCGDH$ est égale à $2R^2\sqrt{2}$.

2) Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné.

Remarque. Nous n'envisageons ici que des polygones réguliers non croisés. (Un polygone est dit *croisé* s'il possède deux côtés non consécutifs ayant un point commun; sinon il est dit *non croisé*).
Il existe des polygones réguliers croisés.
Par exemple, en joignant de trois en trois les sommets d'un octogone régulier non croisé, on obtient un octogone régulier croisé (étoile à huit branches) : voir figure 28.

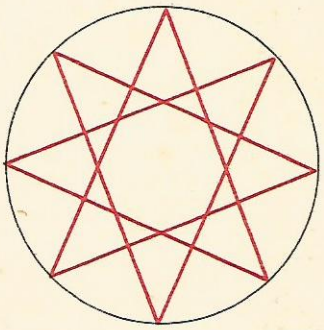


Fig. 28

3) Pentagone régulier

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R (figure 29).
Traçons deux rayons $[OM]$ et $[ON]$ dont les supports sont perpendiculaires.
Soit I le milieu de $[ON]$ et J le point d'intersection de $[MI]$ et du cercle de centre I et de rayon OI.
On place sur (C) les points A et B tels que $MA = MB = MJ$.
On place ensuite sur (C) les points C, D et E tels que $AB = BC = CD = DE$.
On démontre (voir problème 55, page 38) que $DE = EA$.
On obtient ainsi un polygone régulier à cinq côtés, appelé *pentagone régulier*.

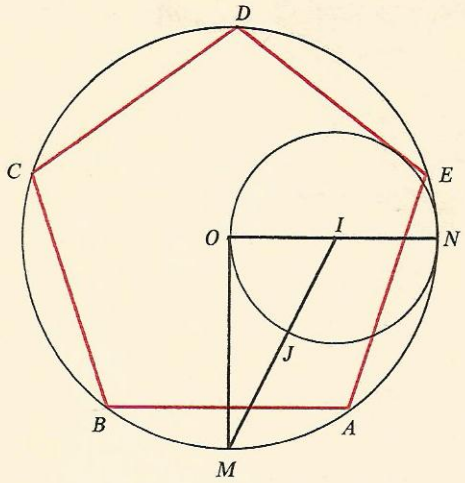


Fig. 29

On démontre (voir problème 55, page 38) que :

La mesure du côté et l'apothème d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R sont respectivement égaux à :

$$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1).$$

Exercices

1) Montrer que la mesure de l'aire du pentagone $ABCDE$ est égale à $\frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Inscrire un pentagone régulier dans un cercle donné.

Remarque. En joignant de deux en deux les sommets d'un pentagone régulier non croisé, on obtient un pentagone régulier croisé (étoile à cinq branches) : voir figure 30.

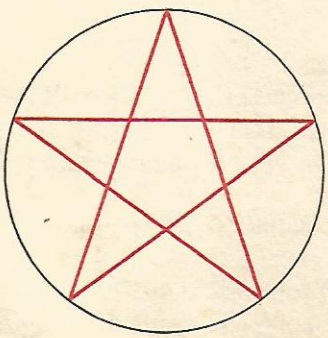


Fig. 30

3 Relations métriques dans un triangle

Soit un triangle ABC (figure 31).
On note respectivement $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
On note respectivement a, b et c la mesure des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

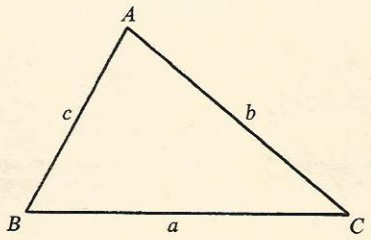


Fig. 31

1) Mesure d'un côté

On a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB};$$
$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$$
$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$$
$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos \hat{A}.$$

D'où :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

De même :

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}. \end{aligned}}$$

Exemple

Calculons a, sachant que $b = 4$, $c = 5$ et mes(°) $\hat{A} = 120$.

On a :

$$a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 120°;$$
$$\cos 120° = \cos (180° - 60°) = - \cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

D'où $a^2 = 61$, c'est-à-dire $a \simeq 7{,}810$.

2) Rayon du cercle circonscrit

Soit respectivement O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
Soit A' le symétrique de A par rapport à O et $\hat{A}'$ l'angle $\widehat{AA'C}$.

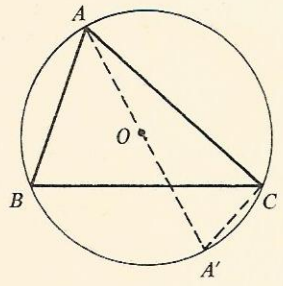


Fig. 32

$\hat{B}$ est aigu

- mes $\hat{A}'$ = mes $\hat{B}$ (pourquoi?).
- D'où : sin $\hat{A}'$ = sin $\hat{B}$.

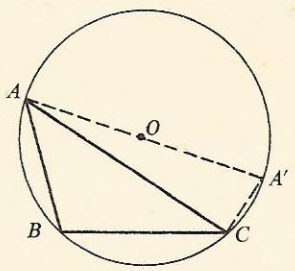


Fig. 33

$\hat{B}$ est obtus

- mes(°) $\hat{A}'$ = 180 − mes(°) $\hat{B}$ (pourquoi?).
- D'où : sin $\hat{A}'$ = sin $\hat{B}$.

Dans les deux cas, l'angle $\widehat{ACA'}$ est droit (pourquoi?).

Dans le triangle rectangle ACA', on a : $\sin \hat{A}' = \dfrac{AC}{AA'}$.

D'où $AA' = \dfrac{AC}{\sin \hat{A}'}$, ou encore : $2R = \dfrac{b}{\sin \hat{B}}$.

Vérifier que si $\hat{B}$ est droit, cette dernière égalité est encore vraie.
On a, bien sûr, deux autres égalités du même type.
Finalement :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Exemple

Sachant que $a = 5$, $c = 4$ et mes(°) $\hat{C} = 45$, calculons la mesure de $\hat{A}$ et le rayon R du cercle circonscrit.

En construisant un triangle ABC correspondant aux données ci-dessus, on trouve deux positions possibles, A_1 et A_2, pour le sommet A.
Vérifions cela par le calcul.

De l'égalité $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$, on déduit :

$$\sin \hat{A} = \frac{a \sin \hat{C}}{c}$$

$$= \frac{5 \sin 45°}{4} \simeq 0{,}884.$$

Or : $0{,}884 \simeq \sin 62{,}129°$.

Il en résulte que, ou bien :

$$\text{mes}(^\circ)\,\hat{A} \simeq 62{,}129 \quad \text{(correspond au sommet } A_1\text{, figure 34)}$$

ou bien :

$$\text{mes}(^\circ)\,\hat{A} \simeq 180 - 62{,}129$$
$$= 117{,}871 \quad \text{(correspond au sommet } A_2\text{, figure 34).}$$

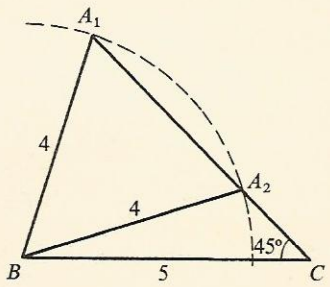


Fig. 34

Les cercles circonscrits aux triangles A_1BC et A_2BC ont le même rayon R tel que :

$$R = \frac{c}{2 \sin \hat{C}}$$
$$= \frac{4}{2 \sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

3) Aire du triangle

Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A du triangle ABC.
On désigne par S la mesure de l'aire du triangle ABC.
On sait que :

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH$$
$$= \frac{1}{2} a \times AH.$$

Pour le calcul de AH, on distingue trois cas.

Dans le triangle rectangle ABH, on a :

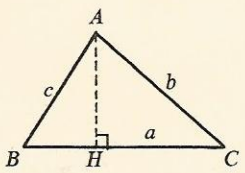


Fig. 35

$\hat{B}$ est aigu

$$AH = AB \times \sin \hat{B}$$
$$= c \sin \hat{B}$$

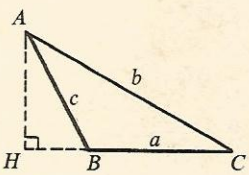


Fig. 36

$\hat{B}$ est obtus

$$AH = AB \times \sin \widehat{ABH}$$
$$= c \sin (180 - \text{mes}(^\circ)\,\hat{B})^\circ$$
$$= c \sin \hat{B}.$$

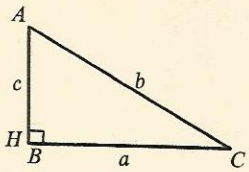


Fig. 37

$$AH = c$$
$$= c \sin 90° = c \sin \hat{B}.$$
$\hat{B}$ est droit

Dans tous les cas, on a donc : $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$.

On a, bien sûr, deux autres égalités du même type.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$
$$= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$
$$= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

Exercice Retrouver les égalités $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ à partir des égalités ci-dessus.

Exemple

Calculons S sachant que $a = 4$, $c = 3$ et mes(°) $\hat{B} = 135$.

On a :
$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$
$$= 6 \sin 135°$$
$$= 6 \sin 45° = 3\sqrt{2}.$$

Exercice

a) Construire un triangle ABC tel que :
$AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 9$ (unité : le cm).

b) Calculer les mesures (en degrés) des trois angles du triangle.

c) Calculer la mesure de l'aire du triangle et le rayon du cercle circonscrit.

d) Calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

4 Lignes de niveau

Considérons le plan $\mathcal{P}$ et une fonction :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M).$$

Soit k un nombre réel quelconque.
La *ligne de niveau k de f* est, par définition, l'image réciproque de k par f.
C'est donc l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

Dans la suite, A et B sont deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.
On suppose que la droite (AB) est munie d'une graduation compatible avec la distance, c'est-à-dire telle que, M et N étant deux points quelconques de (AB), on ait : $|\overline{MN}| = MN$.

1) Lignes de niveau de l'application $M \longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$

Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (AB).

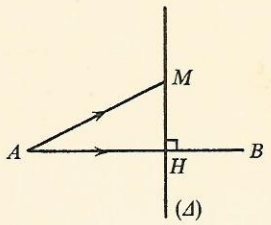


Fig. 38

On sait que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AB} \times \overline{AH}.$$

Étant donné un nombre réel k, on a donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \iff \overline{AB} \times \overline{AH} = k$$
$$\iff \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}.$$

Ainsi, M vérifie $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ si et seulement si son projeté orthogonal sur (AB) est le point H déterminé par $\overline{AH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$.

Conclusion :

> Étant donné deux points distincts A et B et un nombre réel k, la ligne de niveau k de l'application $M \longmapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au point H tel que $\overline{AH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$.

Exercices

Soit deux points A et B tels que $AB = 2$ et l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}.$$

- Construire les lignes de niveau -1, 0, $\frac{1}{2}$ et 2 de f.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $f(M) = -2$; c) $f(M) \geqslant 2$;

b) $f(M) < 0$; d) $-1 \leqslant f(M) \leqslant 2$.

2) Lignes de niveau de l'application $M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Soit O le milieu de $[AB]$ et considérons un point M du plan.
On a successivement :

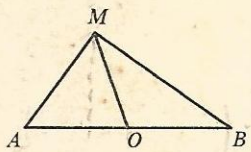


Fig. 39

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= MO^2 - OA^2 \\ &= MO^2 - \frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

Étant donné un nombre réel k, on a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k &\iff MO^2 - \frac{AB^2}{4} = k \\ &\iff MO^2 = k + \frac{AB^2}{4} \\ &\iff d(M, O)^2 = k + \frac{AB^2}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion :

Soit deux points distincts A et B, O le milieu de $[AB]$ et un nombre réel k.
La ligne de niveau k de l'application $M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est :

- Le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$, si $k > -\frac{AB^2}{4}$;
- $\{0\}$ si $k = -\frac{AB^2}{4}$;
- L'ensemble vide si $k < -\frac{AB^2}{4}$.

Exercices

Soit deux points A et B tels que $AB = 2$ et l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

- Construire les lignes de niveau 3 et -1 de f.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $f(M) \leqslant 3$; b) $f(M) \geqslant -1$; c) $-1 \leqslant f(M) \leqslant 3$.

- Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par A.

3) Lignes de niveau de l'application $M \longmapsto MA^2 + MB^2$

Soit O le milieu de $[AB]$ et M un point du plan.

On a successivement :

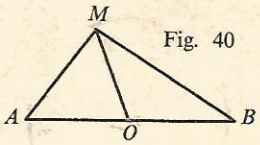


Fig. 40

Fig. 40

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})^2 \\ &= MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + MO^2 \\ &\qquad + OA^2 - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 \\ &= 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}. \end{aligned}$$

Étant donné un nombre réel k, on a donc :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = k &\iff 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = k \\ &\iff MO^2 = \frac{2k - AB^2}{4} \\ &\iff d(M, O)^2 = \frac{2k - AB^2}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion :

Soit deux points distincts A et B, O le milieu de $[AB]$ et un nombre réel k.
La ligne de niveau k de l'application $M \longmapsto MA^2 + MB^2$ est :

- Le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$, si $k > \frac{AB^2}{2}$;
- $\{0\}$ si $k = \frac{AB^2}{2}$;
- L'ensemble vide si $k < \frac{AB^2}{2}$.

Remarque. L'égalité $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ permet de calculer la mesure du « segment-médiane » $[MO]$ du triangle MAB, connaissant les mesures des trois côtés du triangle.

Exercices

Soit un triangle équilatéral ABC de côté de mesure 2.
Soit l'application f : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$M \longmapsto MA^2 + MB^2 - 1.$$

- Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par C.
- Étant donné un nombre réel k, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$f(M) = k \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

4) Lignes de niveau de l'application $M \longmapsto MA^2 - MB^2$

Soit O le milieu de $[AB]$, M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB). On a successivement :

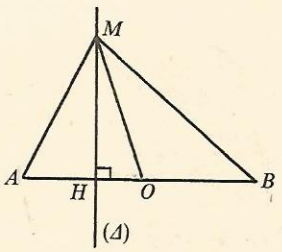


Fig. 41

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})^2 \\ &= MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} - MO^2 - OA^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 4\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 4\overrightarrow{HO} \times \overrightarrow{OA} \\ &= 4\overline{OH} \times \frac{\overline{AB}}{2} \\ &= 2\overline{OH} \times \overline{AB}. \end{aligned}$$

Étant donné un nombre réel k, on a donc :

$$MA^2 - MB^2 = k \iff 2\overline{OH} \times \overline{AB} = k$$
$$\iff \overline{OH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$

Ainsi, M vérifie $MA^2 - MB^2 = k$ si et seulement si son projeté orthogonal sur (AB) est le point H déterminé par $\overline{OH} = \dfrac{k}{2\overline{AB}}$.

Conclusion :

Soit deux points distincts A et B, O le milieu de $[AB]$ et un nombre réel k.
La ligne de niveau k de l'application $M \longmapsto MA^2 - MB^2$ est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au point H tel que $\overline{OH} = \dfrac{k}{2\,\overline{AB}}$.

Exercices

Soit un carré $ABCD$ de côté de mesure 2.
Soit l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto MA^2 - MB^2.$$

- Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par le barycentre I des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -3)$.
- Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Construire la ligne de niveau GB^2 de f.

5) Lignes de niveau de la fonction $M \longmapsto \text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB}$

Observons d'abord que l'ensemble de définition de la fonction

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB}$$

est égal à $\mathcal{P} - \{A, B\}$.
Soit α un élément de l'intervalle $[0; 180]$.
On cherche les points M de $\mathcal{P} - \{A, B\}$ tels que $\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB} = \alpha$.
On distingue trois cas.

1er cas : $\alpha = 0$

Vérifier que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB} = 0 \iff M \in (AB) - [AB].$$

2e cas : $\alpha = 180$

Vérifier que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB} = 180 \iff M \in]AB[.$$

3e cas : $0 < \alpha < 180$

On sait que chacun des deux demi-plans de bord (AB) contient un et un seul arc de cercle capable de α degrés, d'extrémités A et B.

Notons (Γ_1) et $\Gamma_2)$ ces deux arcs capables, les extrémités A et B en étant exclues.

On a alors (pourquoi?) :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB} = \alpha \iff M \in (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2), \qquad \text{(figure 42).}$$

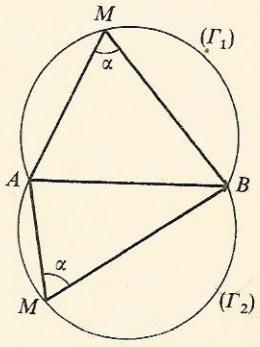


Fig. 42

Conclusion :

Étant donné deux points distincts A et B et un élément α de $[0; 180]$, la ligne de niveau α de la fonction $M \longmapsto \text{mes}(^\circ)\,\widehat{AMB}$ est :

- $(AB) - [AB]$ si $\alpha = 0$;
- $]AB[$ si $\alpha = 180$;
- La récession des deux arcs capables de α degrés, d'extrémités A et B non comprises, si $0 < \alpha < 180$.

Exercices

Soit deux points distincts A et B.

- Construire un arc capable de 30° d'extrémités A et B; notons-le (Γ).
- A tout point de M de (Γ), on fait correspondre l'orthocentre H du triangle MAB.

Déterminer l'ensemble décrit par le point H lorsque M décrit (Γ).

Exercices

1 (1). Soit un triangle ABC tel que mes(°) $\hat{B} = 45$ et mes(°) $\hat{C} = 60$. O étant le centre du cercle circonscrit, calculer les mesures des angles du triangle OBC.

2 (1). Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et A, B deux points distincts de $(\mathcal{C})$, non diamétralement opposés. Les tangentes en A et en B au cercle $(\mathcal{C})$ se coupent en P.

1) Montrer que $PA = PB$.

2) Soit M le point commun à $[PO]$ et $(\mathcal{C})$. Montrer que M est le centre du cercle inscrit dans le triangle PAB.

3 (1). Soit le triangle ABC rectangle en A. Notons A' le second point d'intersection des cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$.

1) Montrer que A' appartient à (BC).

2) Une droite passant par A coupe respectivement les cercles en B' et C'. Montrer que l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est droit.

4 (1). Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point M n'appartenant pas à $(\mathcal{C})$. On trace deux droites distinctes (Δ) et (D) passant par M; (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en A et B; (D) coupe $(\mathcal{C})$ en E et F.
Montrer que :

1) Si M est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$, alors mes $\widehat{AME} = \frac{1}{2}$ (mes (Γ_1) + mes (Γ_2)),

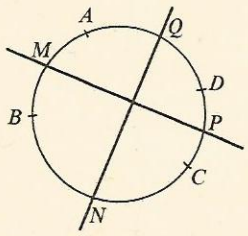
(Γ_1) et (Γ_2) étant respectivement les arcs interceptés par les angles $\widehat{AME}$ et $\widehat{BMF}$.

2) Si M est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$, alors :

$$\text{mes } \widehat{AME} = \frac{1}{2} |\text{mes } (\Gamma_1) - \text{mes } (\Gamma_2)|,$$

(Γ_1) et (Γ_2) étant les deux arcs interceptés par l'angle $\widehat{AME}$.

5 (1). Dans la figure ci-contre, M, N, P, Q sont respectivement les milieux des arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ et $\widehat{DA}$. Utiliser le résultat de la première question de l'exercice 4 pour montrer que (MP) et (ON) sont perpendiculaires.



6 (1). Soit un cercle de centre O et un point A du cercle. A l'intérieur du cercle on prend un point B tel que (OB) et (OA) soient perpendiculaires. La droite (AB) coupe le cercle en un second point C.

1) Utiliser le résultat de la première question de l'exercice 4 pour montrer que :

$$\text{mes } \widehat{AOC} = 2 \text{ mes } \widehat{ABO}.$$

2) La tangente en C au cercle coupe (OB) en D. Montrer que BDC est un triangle isocèle.

7 (1). ABC étant un triangle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $(\mathcal{C})$ en un second point D.

1) Montrer que (OD) est la médiatrice du segment $[BC]$.

2) La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $(\mathcal{C})$ en un second point E; la droite (DE) coupe (AC) et (BC) respectivement en M et N.
Montrer que le triangle CMN est isocèle.

8 (1). ABC étant un triangle inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$, soit H son orthocentre. Montrer que le symétrique de H par rapport au support d'un des côtés du triangle appartient à $(\mathcal{C})$.

9 (1). Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et deux points distincts B et C de $(\mathcal{C})$. Soit A le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. On trace deux cordes $[AH]$ et $[AK]$ telles que (AH) et (AK) coupent (BC) respectivement en D et E, qui appartiennent au segment $[BC]$.

1) Comparer mes $\widehat{AHK}$ et mes $\widehat{AEB}$.

2) Montrer que H, D, E et K appartiennent à un même cercle.

3) Montrer que (AC) et (AB) sont respectivement tangentes aux cercles circonscrits aux triangles ECK et DHB.

10 (1). Soit le carré $ABCD$ et E un point de $[DC]$, distinct de D et de C. La droite (BE) coupe (AD) en F; la droite passant par B et perpendiculaire à (BE) coupe (AD) en K et (DC) en L.

1) Montrer que le quadrilatère $BDEK$ est inscriptible.

Calculer (en degrés) la mesure de l'angle $\widehat{BEK}$.

2) Montrer que $BF = BL$.

11 (1). Soit le triangle ABC rectangle en A. On désigne par D, E et F les points de contact du cercle inscrit dans le triangle avec les droites respectives (BC), (CA) et (AB), et par I le centre du cercle. On trace la droite passant par E et perpendiculaire à la droite (FD) au point J.

Montrer que :

1) JED est un triangle isocèle et (JC) passe par I.

2) Les points A, F, J, I, E appartiennent à un même cercle et l'angle $\widehat{AJC}$ est droit.

12 (1). ABC étant un triangle, on construit les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC' tels que :
A et A' n'appartiennent pas à un même demi-plan de bord (BC) ;
B et B' n'appartiennent pas à un même demi-plan de bord (AC) ;
C et C' n'appartiennent pas à un même demi-plan de bord (AB) ;
Montrer que :

1) Les cercles circonscrits aux triangles BCA', CAB' et ABC' sont concourants en un point M.
2) Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en M.

13 (2). Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et $[AB]$ un diamètre.

a) On construit un arc de cercle de centre B et de rayon BO coupant $(\mathcal{C})$ en C et D. Montrer que ACD est un triangle équilatéral.

b) On construit un arc de cercle de centre A et de rayon AO coupant $(\mathcal{C})$ en E et F, (E appartient à $\widehat{ACB}$). Montrer que $AECBDF$ est un hexagone régulier.

14 (2). Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R. Les tangentes en A et en B se coupent en D.

1) Montrer que ABD est un triangle équilatéral.

2) Calculer et exprimer OD en fonction de R.

15 (2). Soit un triangle ABC inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R et tel que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AB} = 120 \quad \text{et} \quad \text{mes}(^\circ)\,\widehat{BC} = 72.$$

1) Calculer et exprimer AC en fonction de R (on distinguera deux cas).

2) On suppose que C appartient au «grand» arc $\widehat{AB}$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $(\mathcal{C})$ en D et (AC) en E.

a) Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BDO}$.

b) Calculer et exprimer BD et BE en fonction de R.

16 (2). Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon R. On construit les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ en chacun des sommets de l'hexagone.
Les tangentes aux points A et B se coupent en A' ; celles aux points B et C se coupent en B'... ; celles aux sommets F et A se coupent en F'. On obtient le polygone $A'B'C'D'E'F'$.

1) Montrer que $A'B'C'D'E'F'$ est un hexagone régulier.

2) Exprimer en fonction de R l'apothème et la mesure du côté de cet hexagone.

17 (2). Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R. Les droites (AC) et (AE) coupent la droite (BF) respectivement aux points I et J.

1) Montrer que AIJ est un triangle équilatéral et que $BI = IJ = JF$.

2) Exprimer en fonction de R la mesure du côté du triangle AIJ et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

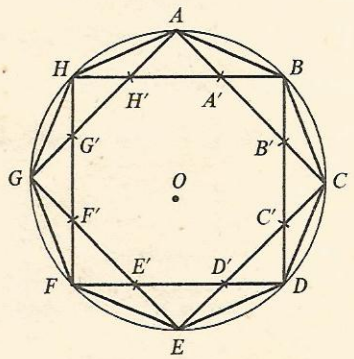
18 (2). Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R, et tel que :

– $[AB]$ soit un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans $(\mathcal{C})$;
– $[CD]$ soit un côté d'un hexagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$;
– le point O appartienne à la bande de bords (AB) et (CD).

1) Faire la figure.

2) Calculer à 0,01 près la mesure de l'aire du cercle $(\mathcal{C})$ sachant que la mesure de l'aire du trapèze est égale à 5.

19 (2). Dans la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un octogone régulier inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R.

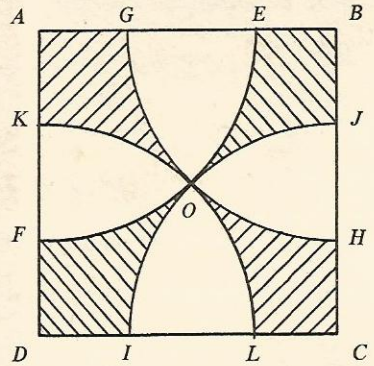


1) Montrer que $A'B'C'D'E'F'G'H'$ est un octogone régulier.

2) Exprimer en fonction de R la mesure du côté de cet octogone.

3) Soit S et S' les mesures respectives des aires des deux octogones $ABCDEFGH$ et $A'B'C'D'E'F'G'H'$.
Calculer le quotient $\dfrac{S'}{S}$.

20 (2). Dans la figure ci-dessous :



– $ABCD$ est un carré de centre O et de côté de mesure ℓ.
– $\overset{\frown}{EOF}$, $\overset{\frown}{GOH}$, $\overset{\frown}{IOJ}$ et $\overset{\frown}{KOL}$ sont respectivement des arcs des cercles de centres A, B, C et D.

1) Montrer que $EJHLIFKG$ est un octogone régulier.

2) Exprimer en fonction de ℓ la mesure de l'aire de cet octogone et celle de la partie hachurée.

21 (3). Deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, l'un de centre O et de rayon R et l'autre de centre O' et de rayon R', se coupent en deux points A et B tels que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{AOO'} = 45, \quad \text{mes}(^\circ)\,\widehat{AO'O} = 30.$$

On pose $OO' = d$.

1) Calculer et exprimer R et R' en fonction de d.

2) $(O'A)$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un second point C. Montrer que $[AC]$ est un côté d'un polygône régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$. Exprimer en fonction de d la mesure du côté de ce polygone.

22 (2). On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R et un côté $[AB]$ d'un polygone régulier de n côtés $(n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\})$ inscrit dans $(\mathcal{C})$. Placer le point C sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de façon que $[AC]$ soit un côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans $(\mathcal{C})$.

1) Montrer que :

a) (CO) et (AB) sont perpendiculaires.

b) $AC^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - AB^2}$.

2) Applications :

a) Exprimer en fonction de R la mesure du côté d'un dodécagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$.

b) Retrouver la mesure du côté d'un triangle équilatéral inscrit dans $(\mathcal{C})$ à partir de la mesure du côté d'un hexagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$.

23 (2). On désigne par c la mesure du côté d'un polygone régulier de n côtés $(n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\})$ inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon R.

1) Exprimer en fonction de n, c et R la mesure de l'aire du polygone.

2) Application : exprimer en fonction de R la mesure de l'aire d'un :

– hexagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$;
– octogone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$;
– pentagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$.

24 (3). On considère un triangle ABC. Calculer BC dans chacun des cas suivants :

a) $AB = 2$, $AC = 3$, mes (rad) $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$;

b) $AB = 5$, mes$(^\circ)\,\widehat{BAC} = 30$, mes$(^\circ)\,\widehat{BCA} = 45$;

c) mes$(^\circ)\,\widehat{BAC} = 50$ et le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal à 5.

25 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Placer les 3 points : $A(-1, 3)$, $B(5, 2)$ et $C(0, -2)$.
Calculer les mesures des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ABC.

26 (3). On considère le triangle ABC et le projeté orthogonal H de A sur (BC). Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) Montrer que $R = \dfrac{AC \times AB}{2AH}$.

2) Application :
Sachant que $AH = 5$, $HB = 3$ et $HC = 2$,
Calculer :

a) R et la mesure de l'aire du triangle ABC;

b) les mesures (en degrés) des angles du triangle ABC (on distinguera deux cas).

27 (3). On considère le triangle ABC tel que :

$$AB = 5, \quad BC = 4, \quad AC = 6.$$

Calculer à 0,01 près :

1) les mesures (en degrés) des trois angles du triangle;

2) les mesures des trois « segments-hauteur » du triangle;

3) les mesures des trois « segments-médiane » du triangle;

4) les rayons respectifs des cercles inscrits et circonscrits.

28 (3). Soit un parallélogramme $ABCD$ tel que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{BAD} = 30, \quad AB = 5 \quad \text{et} \quad AD = 3.$$

Calculer la mesure des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du parallélogramme.

29 (3). Soit un triangle ABC tel que :

$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{ABC} = 45$, $\text{mes}(^\circ)\,\widehat{ACB} = 30$ et $BC = 6$.

Calculer la mesure de l'aire et le périmètre du triangle ABC.

30 (3). On considère un quadrilatère $ABCD$ tel que :

$$AB = 10,\quad \text{mes}(^\circ)\,\widehat{ABC} = 50,\quad BC = 7,$$
$$CD = 5,\quad \text{mes}(^\circ)\,\widehat{BAD} = 70$$

et tel que A et D soient dans le même demi-plan de bord (BC). Calculer à 0,01 près les mesures de $[AC]$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BCD}$, $[AD]$ et $[BD]$.

31 (3). On considère le cercle de centre O et de rayon R. Placer sur le cercle trois points A, B et C tels que $AOBC$ soit un trapèze de bases $[AO]$ et $[BC]$.

1) Montrer que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\widehat{ACB} - \text{mes}(^\circ)\,\widehat{ABC} = 90.$$

2) Montrer que :

$$AB^2 + AC^2 = 4R^2.$$

Indication :

- Utiliser le projeté orthogonal H du point A sur (BC).
- $\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R.$

32 (3). Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R.

1) Construire un triangle ABC inscrit dans $(\mathcal{C})$ tel que :

- $\text{mes}(^\circ)\,\hat{A} = 60$;
- la distance du point A à (BC) est égale à $\dfrac{R}{2}(\sqrt{2}+1)$.

2) Exprimer en fonction de R la mesure de l'aire et le périmètre du triangle ABC.

33 (3). On considère le segment $[BC]$ de mesure a.

1) Construire un triangle ABC tel que :

- $\text{mes}(^\circ)\,\widehat{BAC} = 30$
- la mesure S de l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

2) *a*) Exprimer en fonction de a le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Calculer les mesures (en degrés) des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

34 (3). On considère le triangle ABC. Soit A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Montrer que :

a) $BB'^2 + CC'^2 = \dfrac{1}{4}\left[2AA'^2 + \dfrac{9BC^2}{2}\right]$;

b) si $AA' = 3BA'$, alors :

$$BB'^2 + CC'^2 = AA'^2.$$

35 (3). Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que :

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

36 (3). On considère le rectangle $ABCD$ et un point P à l'« intérieur » du rectangle. Montrer que :

$$PA^2 - PB^2 + PC^2 - PD^2 = 0.$$

37 (4). Soit deux points A et B tels que $AB = a$. Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2a^2?$$

Construire cet ensemble.

38 (4). Soit un triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2$.

39 (4). Soit deux points A et B tels que $AB = 3$. On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M)$$

telle que :

$$f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

1) Soit k un nombre réel. Trouver la ligne de niveau k de f.

2) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$-1 \leqslant f(M) \leqslant 2?$$

40 (4). Soit deux points A et B tels que $AB = 4$. On considère la fonction

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \frac{MA}{MB}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

2) Montrer que :

$$\forall M \in D_f \quad [f(M) = 3]$$
$$\iff (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0.$$

3) Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$, G_2 celui des points $(A, 1)$ et $(B, -3)$.

a) Construire G_1 et G_2.

b) Montrer que :

$$\forall M \in D_f \quad [f(M) = 3] \iff \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0.$$

c) Quel est l'ensemble des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = 3$? Construire cet ensemble.

41 (4). Soit un carré $ABCD$ inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R.
Quel est l'ensemble des points M tels que :

1) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 0$?

2) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2R^2$?

42 (4). Soit un triangle équilatéral ABC dont la mesure du côté est 5. Soit O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit à ce triangle.

1) Calculer le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = -MA^2.$$

43 (4). Soit deux points distincts A et B.

1) *a*) Construire le barycentre G_1 des deux points pondérés :

$$(A, 2) \quad \text{et} \quad (B, -3).$$

b) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})\overrightarrow{AB} = 0?$$

2) *a*) Construire le barycentre G_2 des deux points pondérés :

$$(A, -3) \quad \text{et} \quad (B, 1).$$

b) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0?$$

44 (4). On considère le triangle ABC. Soit A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1) Montrer que les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

2) Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}) = 4AA'^2?$$

45 (4). Soit un rectangle $ABCD$ inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R.
On définit l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto f(M)$$

par :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

1) Soit k un nombre réel. Trouver la ligne de niveau k de l'application f.

2) Déterminer la valeur de k (en fonction de R) pour que la ligne de niveau k passe par le point A.

46 (4). Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle équilatéral ABC dont la mesure du côté est égale à a.

1) Déterminer la position du barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 2, 1, 1.
Faire le dessin.

2) Quel est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

Tracer cet ensemble.

Bac D. Côte d'Ivoire. Juin 1984.

47 (4). Soit un quadrilatère $ABCD$.
On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto MA^2 - MC^2.$$

1) On suppose que :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Montrer que $f(B) = f(D)$ et que (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

2) Réciproquement, on suppose que (BD) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

3) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires.

48 (4). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Placer les points $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$ et $C(2, 2)$. Soit D et E les milieux respectifs de $[AB]$ et $[OC]$.
On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto MA^2 + MB^2 - MC^2 - MO^2.$$

1) Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(O)$.

2) Montrer que, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :

$$f(M) = 2(MD^2 - ME^2) + \frac{17}{2}.$$

3) Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) = -\frac{3}{2}$? Construire cet ensemble.

49 (4). Soit un hexagone régulier *ABCDEF* inscrit dans un cercle de centre *O*. On considère la fonction

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \text{mes}(\circ)\ \widehat{AMO}.$$

1) Calculer $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$, $f(E)$ et $f(F)$.

2) Construire la ligne de niveau 60 de l'application f.

3) Déterminer α pour que la ligne de niveau α de f contienne le milieu K du segment $[BC]$.

50 (4). Soit un pentagone régulier *ABCDE* inscrit dans un cercle de centre *O*.
On considère la fonction

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \text{mes}(\circ)\ \widehat{AMO}.$$

1) Calculer $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ et $f(E)$.

2) Soit K le point d'intersection de (AC) et (BE).

a) Montrer que K appartient à la droite (DO).

b) Calculer $f(K)$.

Problèmes

Construction du cercle inscrit et des cercles exinscrits à un triangle

51. Soit le triangle ABC et son cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ de centre O. La médiatrice de $[BC]$ coupe $(\mathcal{C})$ en M et N (N appartient à l'arc $\overset{\frown}{BAC}$).

1) Montrer que (AM) et (AN) sont deux axes de symétrie de $(AB) \cup (AC)$.

2) Soit I le centre du cercle inscrit $(\mathcal{C}_I)$ dans le triangle ABC.
Montrer que :

a) (BI) passe par le milieu de l'arc $\overset{\frown}{ANC}$.

b) le triangle MBI est isocèle.

3) Soit J le symétrique de I par rapport à M.
Montrer que :

a) $(JB) \perp (BI)$;

b) (JB) est un axe de symétrie de $(BC) \cup (BA)$.

c) (JC) est un axe de symétrie de $(BC) \cup (CA)$.
En déduire que J est le centre d'un cercle $(\mathcal{C}_J)$ tangent aux droites (AB), (BC) et (CA).

4) Trouver deux cercles, autres que $(\mathcal{C}_I)$ et $(\mathcal{C}_J)$, tangents aux droites (AB), (BC) et (CA).

5) *Application :*
Soit un triangle PQR et son cercle circonscrit. A l'aide de la règle et du compas, donner un programme de construction de quatre cercles tangents aux droites (PQ), (QR) et (RP).

Droite de Simson et point de Miquel

52. Soit le triangle ABC inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$.

1) Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct des points A, B et C.
On désigne par D, E et F les projetés orthogonaux respectifs du point M sur (BC), (AC) et (AB).

a) Montrer que :

– les points M, E, D, C appartiennent à un même cercle;
– les points M, E, A, F appartiennent à un même cercle.

b) Comparer les mesures des angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{FEA}$.

c) En déduire que D, E et F sont alignés.

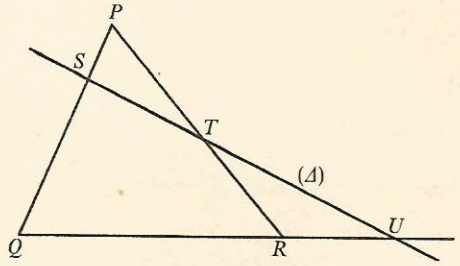
2) Soit N un point du plan distinct des points A, B et C.

On désigne par D', E' et F' les projetés orthogonaux respectifs du point N sur (BC), (AC) et (AB).

a) Montrer que si D', E' et F' sont alignés alors le point N appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Énoncer un théorème reprenant les résultats 1 *c*) et 2 *a*).

3) *Application :*
Soit le triangle PQR. Une droite (Δ) coupe (PQ), (QR) et (RP) respectivement en S, U et T (figure ci-dessous). Montrer que les cercles circonscrits aux triangles PST, TRU, PQR et SQU sont concourants.



53. Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et $[AB]$ un côté d'un hexagone régulier inscrit dans ce cercle. On désigne par (P_1) le demi-plan de bord (AB) contenant le point O et (P_2) l'autre demi-plan de bord (AB). Dans (P_1) on trace deux demi-droites $[AX)$ et $[BY)$ telles que :

$$\text{mes}(^\circ)\,\overset{\frown}{ABY} = \text{mes}(^\circ)\,\overset{\frown}{BAX} = 120.$$

(AX) et (BY) recoupent $(\mathcal{C})$ respectivement en M_1 et M_2.

1) Montrer que :

a) $[AX)$ et $[BY)$ sont deux demi-tangentes au cercle circonscrit (Γ) au triangle AOB.

b) (AX) et (BY) sont respectivement parallèles aux droites (OA) et (OB).

c) (AM_2) et (BM_1) sont respectivement perpendiculaires aux droites (OB) et (OA).

d) (M_1M_2) est tangente en O au cercle (Γ).

2) Placer un point M sur le cercle $(\mathcal{C})$ tel que :

$$M \in \overset{\frown}{M_1M_2} \quad \text{et} \quad M \notin \overset{\frown}{M_1AM_2}.$$

La droite passant par B et parallèle à (AM) coupe $(\mathcal{C})$ en N et les droites (AN) et (BM) se coupent en P.

a) On suppose que M est distinct de M_1 et de M_2.
Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{APB}$. En déduire que P appartient à (Γ).

b) On suppose que M et M_1 sont confondus. Où se trouve le point P sur (Γ)?

c) On suppose que M et M_2 sont confondus. Où se trouve le point P sur (Γ)?

d) Quel est l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $\overset{\frown}{M_1M_2}$?

3) Placer un point R tel que :

$$R \in \overset{\frown}{M_1AM_2}, \quad R \neq A \quad \text{et} \quad R \neq B.$$

La droite passant par B et parallèle à (AR) coupe $(\mathcal{C})$ en S et les droites (AS) et (BR) se coupent en Q.

a) Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AQB}$ (on distinguera deux cas).

b) Quel est l'ensemble décrit par le point Q lorsque R décrit $\overset{\frown}{M_1AM_2} - \{A, B\}$?

54. Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R. Soit $[AB]$ un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans $(\mathcal{C})$. Soit M un point du «grand arc» $\overset{\frown}{AB}$, distinct de A et de B, et soit C et D deux points distincts de la droite (MA) tels que :

$$MC = MD = MB.$$

1) Trouver l'ensemble décrit par le point C et celui décrit par le point D lorsque M décrit l'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$. Construire ces ensembles.

2) On trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) passant par M et respectivement parallèles à (BC) et (BD); (Δ_1) coupe $(\mathcal{C})$ en un second point P et (Δ_2) coupe $(\mathcal{C})$ en un second point Q.

Montrer que P et Q sont «fixes» lorsque M décrit l'arc ouvert $\overset{\frown}{AB}$.

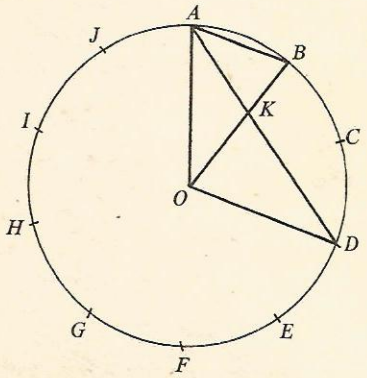
3) Sachant que mes$(^\circ)$ $\overset{\frown}{ABM} = 40$,

a) Calculer les mesures des angles des triangles ABC et ABD;

b) Exprimer en fonction de R les mesures des côtés des triangles AMB, ABC et ABD.

55. I. — *Calcul des mesures des côtés et des apothèmes d'un décagone et d'un pentagone réguliers.*

On partage le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R en 10 arcs isométriques deux à deux : $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}..., \overset{\frown}{JA}$ (figure ci-dessous).



1) Calculer les mesures en degrés des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{ACD}$.

2) Soit K le point d'intersection de (AD) et (OB).

a) Montrer que les triangles AKO, ODK et AKB sont des triangles isocèles.

b) Montrer que les triangles AKO et AOD sont semblables.
En déduire que $AD \times AK = R^2$.

c) Montrer que :

$$AD = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{et} \quad AK = AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

3) Montrer que ADF est un triangle rectangle et que :

$$FD = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

4) $[AB]$ est un côté d'un décagone régulier et $[FD]$ est un côté d'un pentagone régulier inscrits dans $(\mathcal{C})$.

a) Sur la figure donnée, construire ces deux polygones.

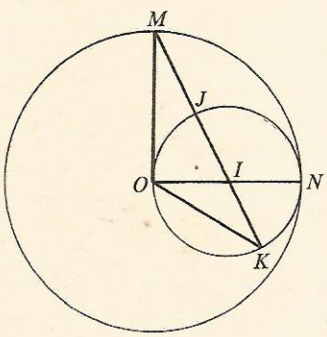
b) Montrer que l'apothème du décagone régulier est égal à $\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ et celui du pentagone régulier est égal à $\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$.

II. — *Construction d'un décagone et d'un pentagone réguliers à l'aide de la règle et du compas.*

On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R.

1re méthode

1) Tracer deux rayons $[OM]$ et $[ON]$ du cercle $(\mathcal{C})$, dont les supports sont perpendiculaires.
Placer I, le point milieu de $[ON]$, et J, K les points d'intersection du cercle de centre I et de rayon IO avec la droite (MI) (le point J appartient au segment $[MI]$).



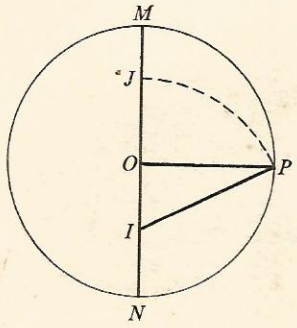
a) Montrer que les deux triangles MOJ et MKO sont semblables. En déduire que $MJ \times MK = R^2$.

b) Montrer que MJ est égal à la mesure du côté d'un décagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$.

c) En déduire un programme de construction d'un décagone régulier et d'un pentagone régulier inscrits dans $(\mathcal{C})$.

2e méthode

2) Soit $[MN]$ un diamètre de $(\mathcal{C})$ et $[OP]$ un rayon de $(\mathcal{C})$ dont les supports sont perpendiculaires. Placer I, le milieu de $[ON]$. On construit un arc de cercle de centre I et de rayon IP coupant $[OM]$ en J.



a) Montrer que OJ et JP sont respectivement égales à la mesure du côté d'un décagone régulier et du côté d'un pentagone régulier inscrits dans $(\mathcal{C})$.

b) En déduire un programme de construction de ces polygones réguliers.

56. Soit deux points A et B tels que $AB = 5$.

I. — On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto 4MA^2 + MB^2$$

1) *a*) Construire le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, 1)$.

b) Calculer $f(G_1)$.

2) En écrivant $\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1M})^2$ et $\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1M})^2$,

a) Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad f(M) = f(G_1) + 5G_1M^2;$$

b) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que :

$$f(M) = 40.$$

Construire (E_1).

II. — On considère l'application

$$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longrightarrow 4MA^2 - MB^2.$$

1) *a*) Construire le barycentre G_2 des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, -1)$.

b) Calculer $g(G_2)$.

2) *a*) Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad g(M) = g(G_2) + 3G_2M^2.$$

b) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que :

$$g(M) = 40.$$

Construire (E_2).

III. — On considère l'application

$$h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$$

où α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

1) Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β). Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad h(M) = h(G) + (\alpha + \beta)GM^2.$$

2) k étant un nombre réel, déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble des points M tels que :

$$h(M) = k.$$

3) Retrouver (E_1) et (E_2).

57. Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1) k étant un nombre réel strictement positif et différent de 1, démontrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} - \{B\} \quad \left[\frac{MA}{MB} = k\right]$$
$$\iff [(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0].$$

2) Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et (B, k) et G_2 celui des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -k)$.

a) Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})$$
$$= (1 - k^2)\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2}.$$

b) En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ est un cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

3) *Application*

Déterminer l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$;

b) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$;

c) $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

2 Trigonométrie

Leçon 1 : FONCTIONS SINUS ET COSINUS
Leçon 2 : ÉQUATION ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES
Leçon 3 : FORMULES D'ADDITION ET CONSÉQUENCES

1 Fonctions sinus et cosinus

1) Rappels et compléments

a) Rappelons la définition du sinus et du cosinus d'un angle orienté, ou d'un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$.
Considérons, dans le plan orienté, un repère orthonormé (O, A, B) de sens direct.
Soit (C) le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1 (figure 1).
A tout point M de (C) correspond l'angle orienté $(\hat{\alpha})$:

$$(\hat{\alpha}) = (\widehat{OA, OM})$$

et l'élément α de $]-\pi, \pi]$:

$$\alpha = \text{MES}(\widehat{OA, OM}).$$

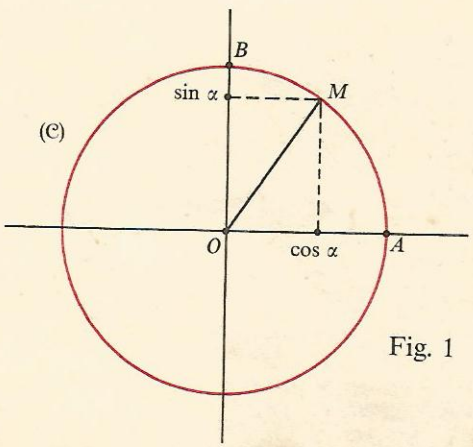


Fig. 1

Le *cosinus* de $(\hat{\alpha})$ ou de α, noté cos $(\hat{\alpha})$ ou cos α, est par définition, l'abscisse du point M dans le repère (O, A, B).
De même, le *sinus* de $(\hat{\alpha})$ ou de α, noté sin $(\hat{\alpha})$ ou sin α, est par définition, l'ordonnée du point M dans le repère (O, A, B).
Rappelons les propriétés suivantes (d'ailleurs immédiates) :

$$\forall \alpha \in]-\pi, \pi] \quad \begin{cases} -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \end{cases}$$

b) Avec les notations ci-dessus, supposons que α appartienne à $]-\pi, \pi[$, c'est-à-dire que $M \neq A'$ (figure 2).

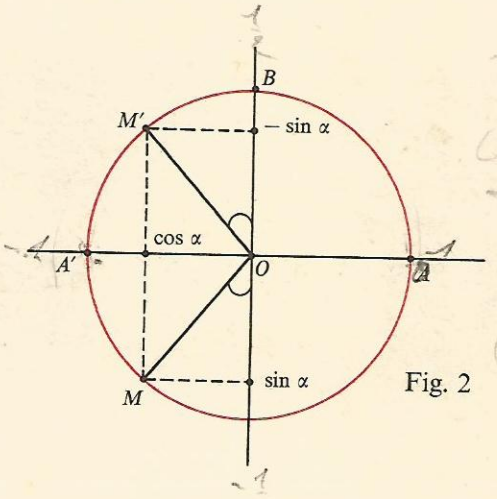


Fig. 2

Soit M' le symétrique de M par rapport à (OA).

Les coordonnées de M étant :

$$(\cos\alpha, \sin\alpha),$$

celles de M' sont :

$$(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

Or : MES $(\widehat{OA, OM'}) = -\alpha$.

Les coordonnées de M' sont donc aussi :

$$(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)).$$

D'où :

$$\forall \alpha \in]-\pi, \pi[\quad \begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \end{cases}$$

c) Supposons que α appartienne à $[0, \pi]$, c'est-à-dire que M appartienne à la partie rouge du cercle (C), figure 3. Soit M' le symétrique de M par rapport à (OB).
Les coordonnées de M' sont :

$$(-\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Or :

$$\text{MES } (\widehat{OA, OM'}) = \pi - \alpha.$$

Les coordonnées de M' sont donc aussi :

$$(\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha)).$$

D'où :

$$\forall \alpha \in [0, \pi] \quad \begin{cases} \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha. \end{cases}$$

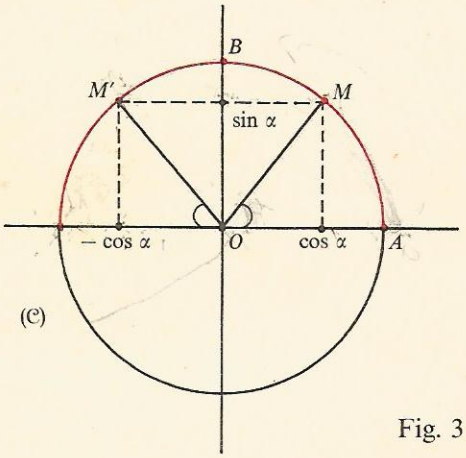


Fig. 3

2) Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus, de $]-\pi, \pi]$ vers $\mathbb{R}$

Soit l'application $f_0 :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sin x.$$

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on se propose de construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_0)$ de f_0.

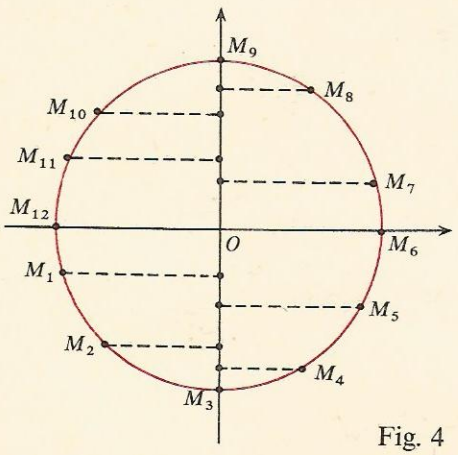


Fig. 4

En considérant le cercle trigonométrique (figure 4), on obtient le tableau de variation de f_0 :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_0(x)$		↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

A l'aide d'une calculatrice ou de tables trigonométriques, compléter le tableau de valeurs de f_0 suivant :

x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f_0(x)$																

Construisons la représentation partielle de f_0 correspondant à ce tableau de valeurs :

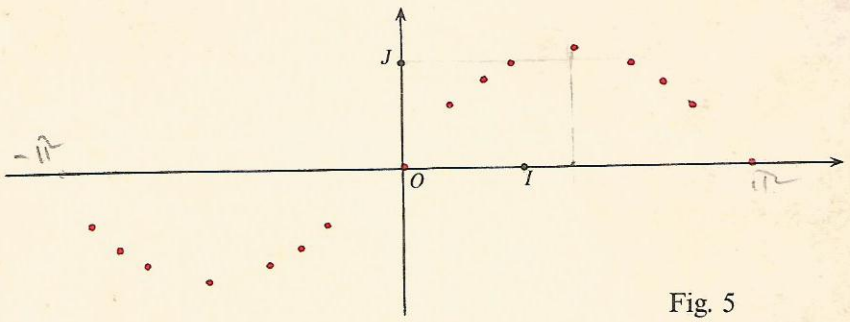


Fig. 5

A l'aide d'un traceur de courbes, permettant d'obtenir des représentations partielles comportant un grand nombre de points, on obtient :

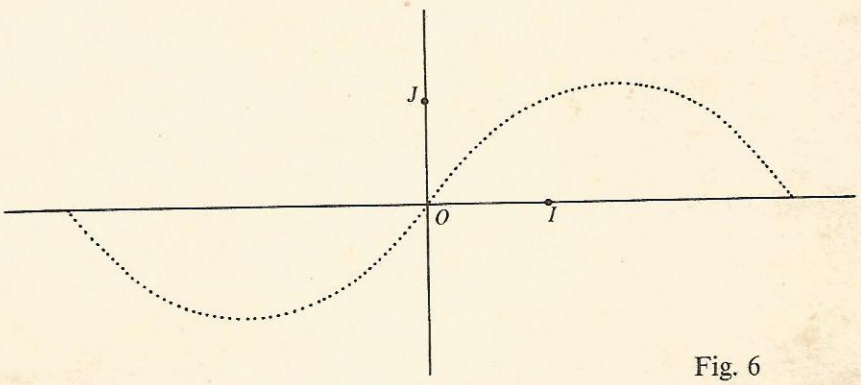


Fig. 6

On admet finalement que la représentation graphique $(\mathcal{C}_0)$ de f_0 est la suivante :

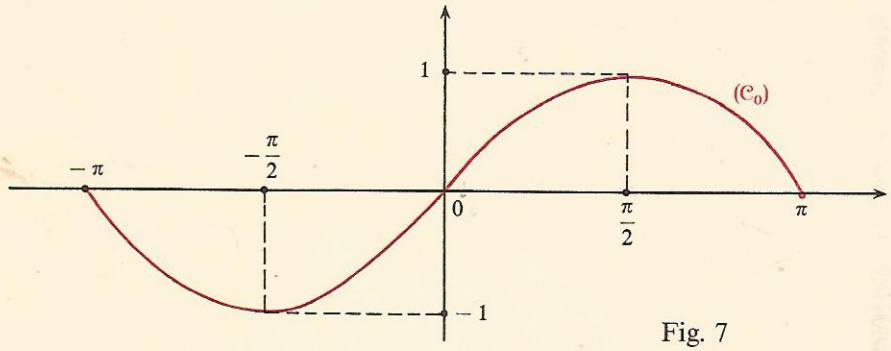


Fig. 7

En procédant de la même façon, on obtient la représentation graphique $(\mathcal{C}'_0)$ de l'application $g_0 :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cos x.$$

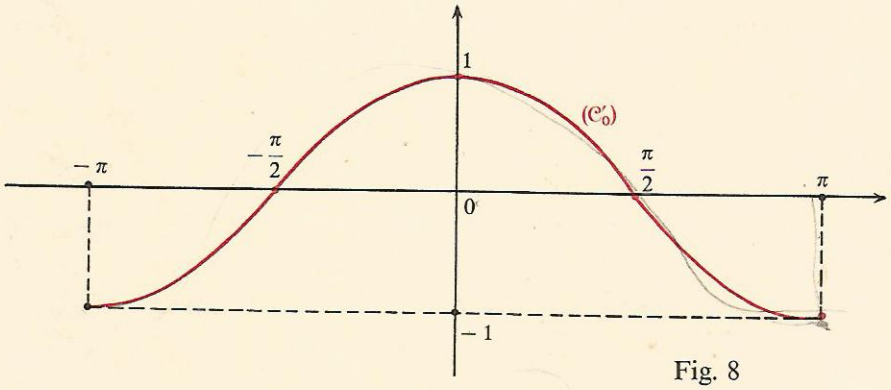


Fig. 8

3) Les mesures d'un angle orienté

a) Considérons la figure 9, où $(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique et (AI) la tangente à $(\mathcal{C})$ en A.
Le point I est choisi dans le demi-plan $[(AA'), B)$ tel que $AI = OA = 1$.
La droite (AI) étant graduée au moyen du repère (A, I), notons I' le point d'abscisse -1 de cette droite.
Soit M un point de $(\mathcal{C})$ et posons :

$$\alpha = \text{MES } (\widehat{OA, OM}).$$

α est un élément de $]-\pi, \pi]$.

Supposons $\alpha \geqslant 0$ pour fixer les idées, ce qui correspond au choix de M sur la figure 9.

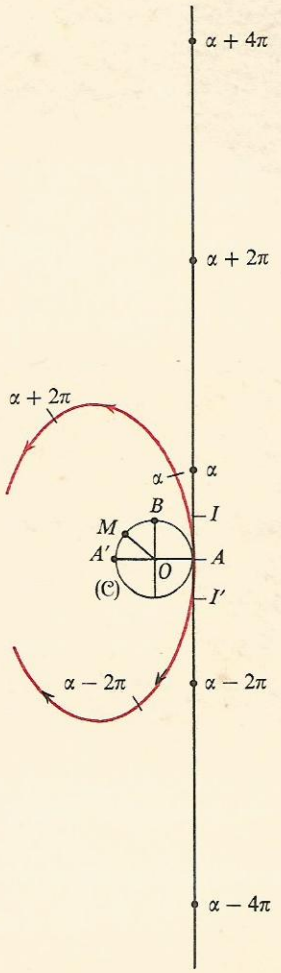


Fig. 9

Imaginons que l'on place un fil sur la droite (AI) et que l'on marque d'un trait les points du fil coïncidant avec les points de (AI), d'abscisses respectives :

$$..., \alpha - 4\pi, \alpha - 2\pi, \alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, ...$$

Enroulons autour du cercle (C), comme suggéré par les flèches rouges de la figure 9, la partie du fil placée sur la demi-droite $[AI)$.
Dans ce mouvement, les points du fil correspondant aux abscisses :

$$\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, ...$$

viennent tous se placer sur le point M (pourquoi?).

Enroulons ensuite autour de (C), comme suggéré par les flèches noires de la figure 9, la partie du fil placée sur la demi-droite $[AI')$.
Dans ce mouvement, les points du fil correspondant aux abscisses :

$$\alpha - 2\pi, \alpha - 4\pi, \alpha - 6, ...$$

viennent aussi se placer sur le point M (pourquoi?).

Ce qui précède est valable pour $\alpha < 0$ mais, dans ce cas, le point d'abscisse α de la droite (AI) appartient à la demi-droite $[AI')$.

On dit que le point M est le *point-image* sur le cercle trigonométrique de chacun des nombres $\alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Le nombre α, élément de $]-\pi, \pi]$ et noté MES $(\widehat{OA, OM})$, est appelé *la mesure principale* (en radians) de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$.
Chacun des nombres $\alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, est appelé *une mesure* (en radians) de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$.

Ces mesures peuvent aussi s'exprimer en degrés ou en grades.

Par exemple, la mesure principale et les mesures de $(\widehat{OA, OM})$, exprimées en degrés, sont respectivement égales à :

$$\frac{180}{\pi}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{180}{\pi}\alpha + k\,360, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Dans la suite, toutes les mesures seront exprimées en radians (sauf avis contraire).

Exercice Calculer 10 mesures (certaines positives et certaines négatives) de chacun des angles orientés dont la mesure principale est :

$$-\frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \pi.$$

b) Considérons à présent le problème inverse : tout nombre réel est-il une mesure d'un angle orienté?
En d'autres termes, étant donné un nombre réel quelconque x, existe-t-il un élément α de $]-\pi, \pi]$ et un élément k de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$x = \alpha + 2k\pi \,?$$

Il revient au même de chercher un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$x - 2k\pi \in]-\pi, \pi].$$

Pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, on a successivement :

$$\begin{aligned} -\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi &\iff 2k\pi - \pi < x \leqslant 2k\pi + \pi \\ &\iff 2k\pi < x + \pi \leqslant 2k\pi + 2\pi \\ &\iff k < \frac{x+\pi}{2\pi} \leqslant k + 1. \end{aligned}$$

Or, on sait que pour tout nombre réel y, il existe un unique élément n de $\mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant y < n + 1$.
En déduire que pour tout nombre réel y, il existe un unique élément k de $\mathbb{Z}$ tel que $k < y \leqslant k + 1$.

Par conséquent, pour tout nombre réel x, il existe un unique élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$k < \frac{x+\pi}{2\pi} \leqslant k + 1.$$

Posant $\alpha = x - 2k\pi$,
on a alors :

$$x = \alpha + 2k\pi, \quad \text{avec } \alpha \in]-\pi, \pi].$$

On a donc établi que :

Tout nombre réel x a un point-image M sur le cercle trigonométrique et est donc une mesure de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$.
La mesure principale de $(\widehat{OA, OM})$ est :

$$x - 2k\pi,$$

où k est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $k < \dfrac{x+\pi}{2\pi} \leqslant k+1$.

Exemple

Calculons la mesure principale de l'angle orienté dont $\dfrac{141\pi}{4}$ est une mesure et plaçons le point-image correspondant sur le cercle trigonométrique.

On a :
$$\frac{\frac{141\pi}{4} + \pi}{2\pi} = \frac{145}{8} = 18{,}125.$$

Comme $18 < 18{,}125 \leqslant 19$, la mesure principale cherchée est égale à $\dfrac{141\pi}{4} - 2k\pi$, où $k = 18$; elle est donc égale à $-\dfrac{3\pi}{4}$.

La figure 10 nous donne la position du point-image M du nombre $\dfrac{141\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

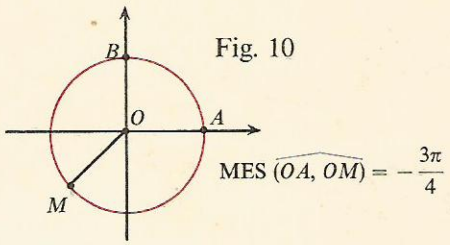


Fig. 10

Exercices Calculer la mesure principale des angles orientés de mesures respectives :

$$\frac{57\pi}{2}, \quad -\frac{57\pi}{2}, \quad -\pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad 1\,000,$$

et placer les points-images sur le cercle trigonométrique.
Dans le dernier cas, on exprimera en degrés la mesure principale de l'angle orienté de mesure 1 000, afin de pouvoir utiliser un rapporteur.

4) Définition et représentation graphique de la fonction sinus, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) D'après ce qui précède, on sait que pour tout nombre réel x, il existe un unique élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$k < \frac{x+\pi}{2\pi} \leqslant k+1,$$

c'est-à-dire tel que :

$$2k\pi - \pi < x \leqslant 2k\pi + \pi.$$

Pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, posons :

$$D_k =]2k\pi - \pi,\ 2k\pi + \pi].$$

Les intervalles D_k sont représentés sur la figure 11.

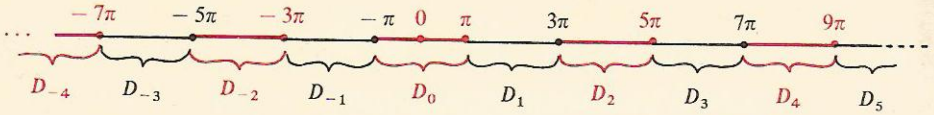


Fig. 11

b) Dans ce qui suit, le plan est supposé muni d'un repère (O, I, J).
On utilisera l'application $f_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sin x$$

dont la représentation graphique $(\mathcal{C}_0)$ est donnée par la figure 7.

- Soit x un élément de D_1.

On a :

$$\pi < x \leqslant 3\pi.$$

D'où $-\pi < x - 2\pi \leqslant \pi$, c'est-à-dire :

$$x - 2\pi \in D_0.$$

On peut donc considérer l'application $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_0(x - 2\pi).$$

D'après le Tome 1, on sait que la représentation graphique $(\mathcal{C}_1)$ de f_1 est telle que :

$$(\mathcal{C}_1) = t_1(\mathcal{C}_0),$$

où t_1 est la translation de vecteur $2\pi \cdot \overrightarrow{OI}$ (figure 12).

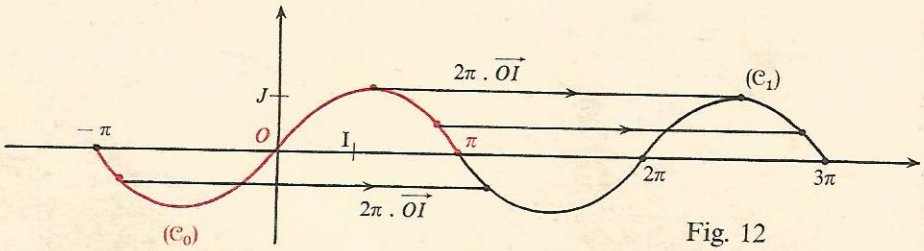


Fig. 12

• Soit x un élément de D_2.
On a : $3\pi < x \leqslant 5\pi$.

D'où $-\pi < x - 4\pi \leqslant \pi$, c'est-à-dire :

$$x - 4\pi \in D_0.$$

On peut donc considérer l'application $f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f_0(x - 4\pi)$.

On sait que la représentation graphique $(\mathcal{C}_2)$ de f_2 est telle que :

$$(\mathcal{C}_2) = t_2(\mathcal{C}_0),$$

où t_2 est la translation de vecteur $4\pi \,.\, \overrightarrow{OI}$ (figure 13).

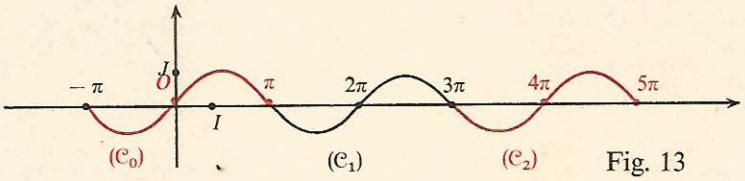


Fig. 13

• Soit x un élément de D_{-1}.
On a : $-3\pi < x \leqslant -\pi$.

D'où $-\pi < x + 2\pi \leqslant \pi$, c'est-à-dire :

$$x + 2\pi \in D_0.$$

On peut donc considérer l'application $f_{-1} : D_{-1} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f_0(x + 2\pi)$.

$(\mathcal{C}_{-1})$ désignant la représentation graphique de f_{-1}, on a :

$$(\mathcal{C}_{-1}) = t_{-1}(\mathcal{C}_0),$$

où t_{-1} est la translation de vecteur $-2\pi \,.\, \overrightarrow{OI}$ (figure 14).

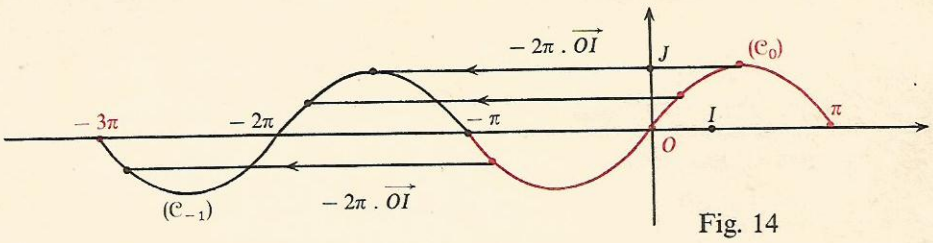


Fig. 14

• Plus généralement, considérons un élément quelconque k de $\mathbb{Z}$.
Soit x un élément de D_k.
On a : $2k\pi - \pi < x \leqslant 2k\pi + \pi$.

D'où $-\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi$, c'est-à-dire :

$$x - 2k\pi \in D_0.$$

On peut donc considérer l'application $f_k : D_k \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_0(x - 2k\pi)$$

($\mathcal{C}_k$) désignant la représentation graphique de f_k, on a :

$$(\mathcal{C}_k) = t_k(\mathcal{C}_0),$$

où t_k est la translation de vecteur $2k\pi \cdot \overrightarrow{OI}$.

• On définit finalement une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en imposant que, pour chaque élément k de $\mathbb{Z}$, f coïncide avec f_k sur D_k.
La représentation graphique ($\mathcal{C}_f$) de f est donc la réunion des ($\mathcal{C}_k$), où k décrit $\mathbb{Z}$ (figure 15).

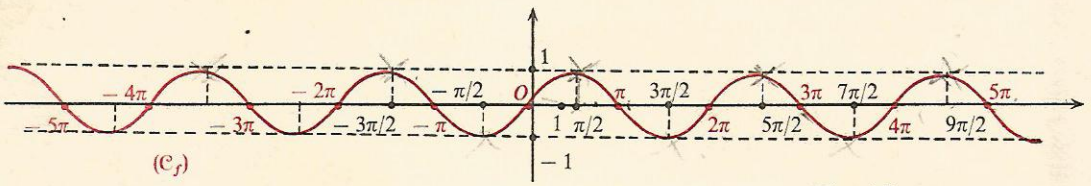


Fig. 15

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que, étant donné un nombre réel quelconque x, on a :

$$f(x) = f_0(x - 2k\pi),$$

où k est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $2k\pi - \pi < x \leqslant 2k\pi + \pi$.

Autrement dit, f associe à chaque nombre réel x le sinus de l'angle orienté dont x est une mesure.

Dorénavant, l'application f s'appellera fonction *sinus*, elle sera notée « sin » au lieu de f et, pour chaque nombre réel x, on écrira sin x au lieu de $f(x)$.
On dira que sin x est le *sinus de x*.
En résumé :

> La fonction sinus est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque nombre réel x, associe le sinus de l'angle orienté dont x est une mesure (en radians).
> La représentation graphique de la fonction sinus est donnée par la figure 15.

c) Pour calculer le sinus d'un nombre réel, il suffit de savoir calculer le sinus d'un angle orienté ou, ce qui revient au même, d'un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$.
En classe de Seconde, nous avons appris à calculer le sinus d'un élément α de $]-\pi, \pi]$.
Rappelons comment procéder :

– Si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on consulte une table trigonométrique.

On sait aussi que :

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

– Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on utilise l'égalité :

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha).$$

Comme $\pi - \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on est ramené au cas précédent.

– Si $\alpha \in]-\pi, 0[$, on utilise l'égalité :

$$\sin \alpha = -\sin (-\alpha).$$

Comme $-\alpha \in]0, \pi[$, on est ramené à l'un des deux cas précédents.

Remarque. La plupart des calculatrices fournissent immédiatement la valeur de sin x quel que soit le nombre réel x.

Exemple

Calculons le sinus de $\frac{340\pi}{3}$.

On cherche d'abord la mesure principale de l'angle orienté dont $\frac{340\pi}{3}$ est une mesure; vérifier qu'elle est égale à $-\frac{2\pi}{3}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned}\sin \frac{340\pi}{3} &= \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\sin \frac{2\pi}{3}\\ &= -\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Exercices

1) Calculer le sinus des nombres réels suivants :

$$-\pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad -\frac{7\pi}{2}, \quad 1\,515\pi, \quad \frac{29\pi}{3}, \quad \frac{19\pi}{6}, \quad 1\,000.$$

2) Utiliser la figure 15 pour déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations :

$$\begin{aligned}&x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = 0;\\ &x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = 1;\\ &x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = -1.\end{aligned}$$

5) La fonction cosinus, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

La fonction *cosinus*, notée « cos », est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\cos x = \cos (x - 2k\pi),$$

où k est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $2k\pi - \pi < x \leqslant 2k\pi + \pi$.

Le cosinus d'un nombre réel x est donc le cosinus de l'angle orienté dont x est une mesure (en radians).

En procédant comme pour la fonction sinus, on obtient la représentation graphique de la fonction cosinus :

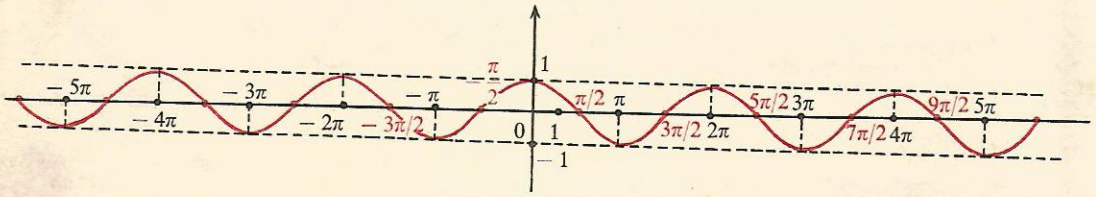


Fig. 16

Exercices

1) Calculer le cosinus des nombres réels suivants :

$$-\pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad -\frac{7\pi}{2}, \quad 1\,515\pi, \quad \frac{29\pi}{3}, \quad \frac{19\pi}{6}, \quad 1\,000.$$

2) Utiliser la figure 16 pour déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 0;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = 1;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = -1.$$

6) Opérations sur les angles orientés

a) **Rappels**

Soit $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés (figure 17).
Soit $([OX), [OY))$ un représentant quelconque de $(\hat{\alpha})$ et soit $([OY), [OZ))$ le représentant de $(\hat{\beta})$ de côté origine $[OY)$.

On a : $(\hat{\alpha}) = \widehat{(OX, OY)}$ et $(\hat{\beta}) = \widehat{(OY, OZ)}$.

Rappelons que :

- L'opposé $-(\hat{\alpha})$ de $(\hat{\alpha})$ est l'angle orienté $\widehat{(OY, OX)}$.
- La somme $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$ est l'angle orienté $\widehat{(OX, OZ)}$.
- La différence $(\hat{\alpha}) - (\hat{\beta})$ est l'angle orienté $(\hat{\alpha}) + [-(\hat{\beta})]$.

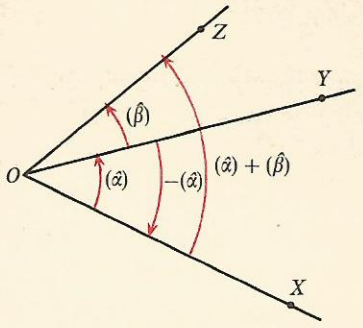


Fig. 17

b) **Mesures de l'angle orienté opposé**

Soit x une mesure quelconque et α la mesure principale de $(\hat{\alpha})$; α appartient à $]-\pi, \pi]$. Il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$.

- Si $\alpha \neq \pi$, alors $-\alpha$ est la mesure principale de $-(\hat{\alpha})$.

L'égalité $-x = -\alpha - 2k\pi$ montre que $-x$ est une mesure de $-(\hat{\alpha})$.

- Si $\alpha = \pi$, alors π est la mesure principale de $-(\hat{\alpha})$.

Les égalités :

$$\begin{aligned} -x &= -\pi - 2k\pi \\ &= \pi - 2(k+1)\pi \end{aligned}$$

montrent que $-x$ est une mesure de $-(\hat{\alpha})$.

Par conséquent :

> Si x est une mesure d'un angle orienté, alors $-x$ est une mesure de l'angle orienté opposé.

c) **Mesures d'une somme d'angles orientés**

Activité préparatoire

Soit α et β les mesures principales respectives de deux angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$. Au moyen d'un rapporteur, vérifier que $\alpha + \beta$ est une mesure (non nécessairement principale) de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$, dans chacun des cas suivants :

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{2\pi}{3}$;

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{6}$;

$\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$;

$\alpha = -\frac{2\pi}{3}$, $\beta = -\frac{5\pi}{6}$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

On démontre et nous admettrons que :

> Si x et y sont respectivement des mesures de deux angles orientés, alors $x + y$ est une mesure de la somme de ces angles orientés.

Exemple

Soit $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés dont $\frac{32\pi}{3}$ et $-\frac{19\pi}{6}$ sont des mesures respectives.
Calculons la mesure principale de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

On sait que :

$$\frac{32\pi}{3} - \frac{19\pi}{6} = \frac{15\pi}{2}$$

est une mesure de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

En déduire que $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$.

Observons que la somme des mesures principales de $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

est une mesure de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$, mais n'est pas sa mesure principale.
Cela est illustré par la figure 18.

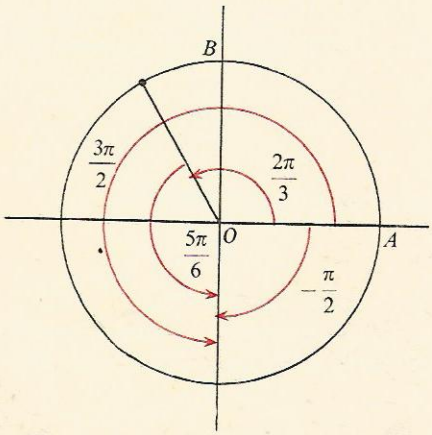


Fig. 18

Exercice

Soit α et β les mesures principales respectives de deux angles orientés $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\beta})$.
Montrer que la mesure principale de $(\hat{\alpha}) + (\hat{\beta})$ est l'un des trois nombres suivants :

$$\alpha + \beta - 2\pi, \quad \alpha + \beta, \quad \alpha + \beta + 2\pi.$$

7) Quelques propriétés des fonctions sinus et cosinus

a) Démontrons les propriétés suivantes :

(1)	$\forall x \in \mathbb{R}$		$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
(2)	$\forall x \in \mathbb{R}$		$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
(3)	$\forall x \in \mathbb{R}$		$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$
(4)	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall k \in \mathbb{Z}$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

• *Démonstration de (1), (2) et (3)*

Soit x un nombre réel quelconque.
Soit M le point-image de x sur le cercle trigonométrique (figure 19).

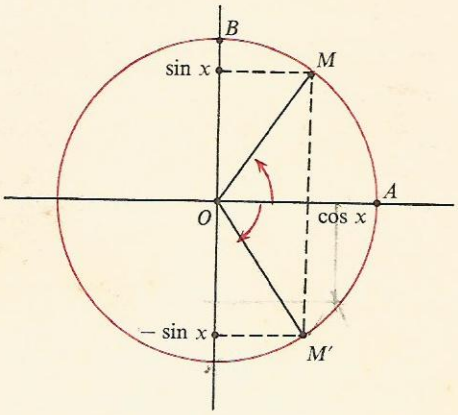


Fig. 19

Les cosinus et sinus de x sont les cosinus et sinus de l'angle orienté $\widehat{(OA, OM)}$.
Ce sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère (O, A, B).

D'où : $\quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Soit M' le symétrique de M par rapport à (OA).
Les coordonnées de M sont :

$$(\cos x, -\sin x).$$

Or : $\quad \widehat{(OA, OM')} = -\widehat{(OA, OM)}.$

M' est donc le point-image de $-x$ et, par conséquent, les coordonnées de M' sont aussi :

$$(\cos(-x), \sin(-x)).$$

D'où : $\quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$

• *Démonstration de (4)*

Soit x un nombre réel et k un élément de $\mathbb{Z}$.
Alors x et $x + 2k\pi$ sont deux mesures du même angle orienté (justifier).

D'où : $\quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$

Remarques

• Les égalités (3) signifient que la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

• Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et un nombre réel T strictement positif.
On dit que f est *périodique, de période* T, si :

$$\forall x \in D_f \quad [x + T \in D_f \boxed{\text{et}} \; x - T \in D_f \boxed{\text{et}} \; f(x + T) = f(x)].$$

Si f est périodique, de période T, on a :

$$\forall x \in D_f \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x + kT) = f(x).$$

Les égalités (4) ci-dessus expriment que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période 2π.

Exercices Démontrer les égalités suivantes au moyen des égalités (2), (3) et (4) ci-dessus :

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$;

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = \sin(x - \pi)$;

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) = 0$.

b) Démontrons les propriétés suivantes :

(5) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$

(6) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$

(7) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

(8) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

• *Démonstration de (5)*

Soit x un nombre réel quelconque et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique (figure 20).

Soit M' le symétrique de M par rapport au point O.

Les coordonnées de M et M' sont respectivement :

$$(\cos x, \sin x) \quad \text{et} \quad (-\cos x, -\sin x).$$

Puisque : $\quad \widehat{(OA, OM)} + \widehat{(OM, OM')} = \widehat{(OA, OM')},$

$x + \pi$ est une mesure de $\widehat{(OA, OM')}$.

Les coordonnées de M' sont donc aussi :

$$(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x)).$$

D'où : $\quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x.$

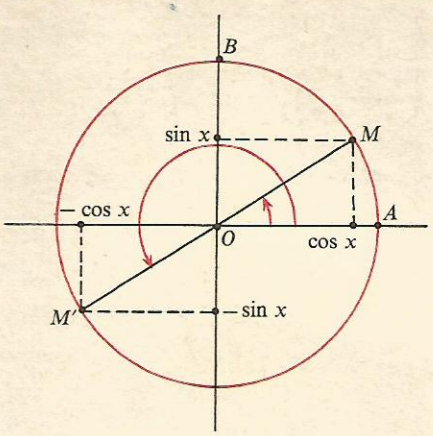


Fig. 20

• *Démonstration de (6)*

On obtient les égalités (6) en remplaçant x par $-x$ dans les égalités (5) (compte tenu des égalités (3)).

• *Démonstration de (7)*

Soit x un nombre réel quelconque et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique (figure 21).

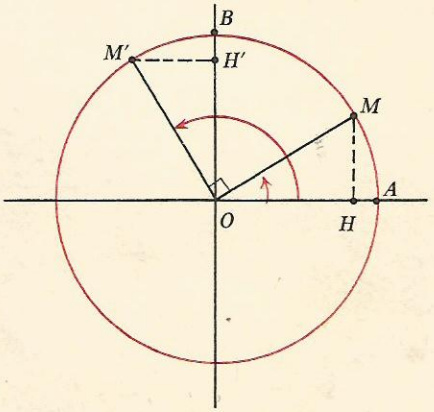


Fig. 21

H étant le projeté orthogonal de M sur (OA), on a donc :

$$\cos x = \overline{OH}, \qquad \sin x = \overline{HM}.$$

Soit M' le point du cercle trigonométrique tel que :

$$\text{MES } (\widehat{OM, OM'}) = \frac{\pi}{2}.$$

$x + \frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté :

$$(\widehat{OA, OM}) + (\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{OA, OM'}).$$

H' étant le projeté orthogonal de M' sur (OB), on a donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\overline{H'M'}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\overline{OH'}.$$

La rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$ transforme respectivement les points O, A et M en les points O, B et M'.
Elle transforme aussi le point H en le point H' (justifier).
D'où : $\qquad OH'=OH, \qquad H'M'=HM.$
Finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\overline{H'M'}=-\overline{HM}=-\sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\overline{OH'}=\overline{OH}=\cos x.$$

• *Démonstration de (8)*

On obtient les égalités (8) en remplaçant x par $-x$ dans les égalités (7).

Remarque. L'égalité :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

montre que la représentation graphique de la fonction cosinus est l'image de celle de la fonction sinus par la translation de vecteur $\left(-\frac{\pi}{2}\right).\overrightarrow{OI}$ (comparer les figures 15 et 16).

Exercices

1) Utiliser les égalités (4), (5) et (6) pour montrer que les nombres :

$$\frac{103\pi}{6}, \quad -\frac{35\pi}{6}, \quad -\frac{293\pi}{6}, \quad \frac{23\pi}{6}$$

ont, deux à deux, des sinus égaux ou opposés.
Même question pour les cosinus.

2) Simplifier :

$$\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\cos(x+5\pi)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x),$$

$$\frac{\sin(\pi+x)\,.\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\,.\,\cos(3\pi-x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

2 Équations et inéquations trigonométriques

1) Équation «sin $x = a$»

Soit a un nombre réel et considérons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = a.$$

Soit $S(E)$ l'ensemble des solutions de (E).
Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), notons $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction sinus et (Δ) la droite d'équation $y = a$ (voir les figures 22, 25 et 27, où $OJ = 2OI$).
Résoudre (E) revient à chercher les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Δ).
On distingue cinq cas.

1er cas : $a \notin [-1, 1]$

Dans ce cas, $S(E) = \varnothing$ puisque $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, quel que soit le nombre réel x (voir figure 22).

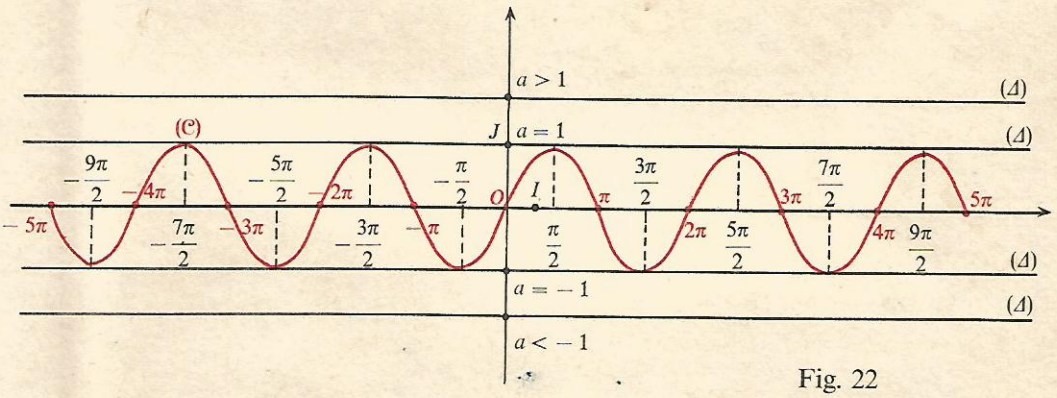


Fig. 22

2e cas : $a = 1$

On voit directement sur la figure 22 que :

$$S(E) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Toutes ces solutions ont le même point-image M sur le cercle trigonométrique (figure 23).

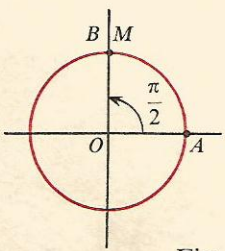


Fig. 23

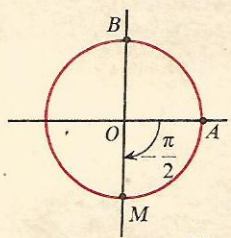


Fig. 24

3e cas : $a = -1$

On voit directement sur la figure 22 que :

$$S(E) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Toutes ces solutions ont le même point-image M sur le cercle trigonométrique (figure 24).

4e cas : $a \in [0, 1[$

• On voit, figure 25, que $]-\pi, \pi]$ contient deux solutions distinctes de (E) qui, en fait, appartiennent à $[0, \pi]$.
Soit α l'une de ces solutions : $\sin \alpha = a$.
D'après la figure 25, il semble que l'autre solution soit $\pi - \alpha$.
Vérification :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = a.$$

D'où : $$S(E) \cap]-\pi, \pi] = \{\alpha, \pi - \alpha\}.$$

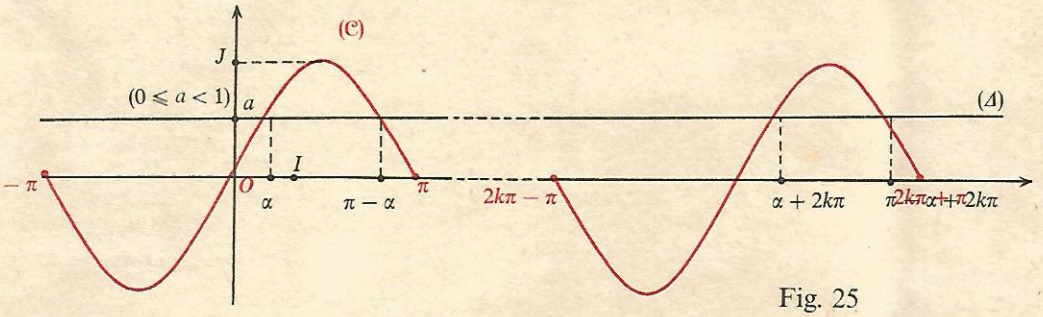


Fig. 25

• La figure 25 montre aussi que chaque intervalle $]2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$, $(k \in \mathbb{Z})$, contient deux solutions distinctes de (E).

Or : $$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha = a,$$
$$\sin(\pi - \alpha + 2k\pi) = \sin(\pi - \alpha) = a.$$

Comme $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ appartiennent à $]2k\pi - \pi,\ 2k\pi + \pi]$, on a :

$$S(E) \cap]2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi] = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi\}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

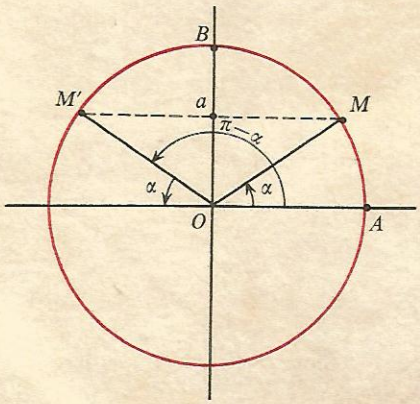


Fig. 26

• Finalement :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

A ces solutions correspondent deux points-images distincts M et M' sur le cercle trigonométrique (figure 26).

5e cas : $a \in]-1, 0[$

On voit, figure 27, que $]-\pi, \pi]$ contient deux solutions distinctes de (E) qui, en fait, appartiennent à $]-\pi, 0[$.
Soit α l'une de ces solutions : $\sin \alpha = a$.

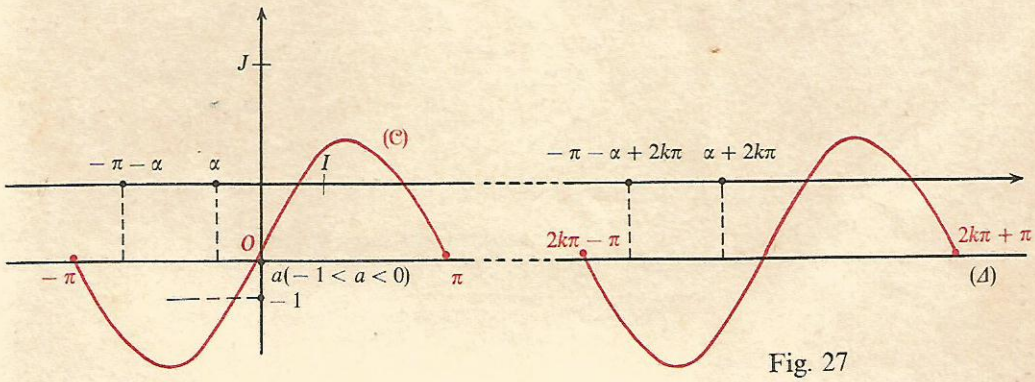


Fig. 27

D'après la figure 27, il semble que l'autre solution soit $-\pi - \alpha$.
Vérification :

$$\begin{aligned}\sin(-\pi-\alpha) &= -\sin(\pi+\alpha)\\ &= \sin\alpha = a.\end{aligned}$$

D'où : $S(E) \cap]-\pi, \pi] = \{\alpha, -\pi-\alpha\}$.

En continuant comme au quatrième cas, on obtient :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Observons que :

$$\begin{aligned}\{-\pi-\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} &= \{-\pi-\alpha+2\pi+2(k-1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{\pi-\alpha+2k'\pi \mid k'\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

A ces solutions correspondent deux points-images distincts M et M' sur le cercle trigonométrique (figure 28).

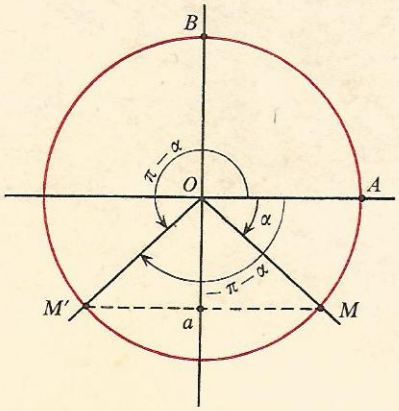


Fig. 28

En remarquant que les cas 2 à 5 peuvent être regroupés, on obtient :

Équation : $(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = a.$

- Si $a \notin [-1, 1]$: $S(E) = \varnothing$.
- Si $a \in [-1, 1]$, soit α une solution de (E) appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Alors :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Supposons que a appartienne à $[-1, 1]$.
u étant une solution quelconque de l'équation (E), vérifier que l'on a aussi :

$$S(E) = \{u + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - u + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

En déduire que :

Deux nombres réels u et v vérifient $\sin u = \sin v$ si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$u = v + 2k\pi \quad \boxed{\text{ou}} \quad u = \pi - v + 2k\pi.$$

Exemple 1

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\frac{\pi}{3}$ est un élément de $]-\pi, \pi]$ tel que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S(E) = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

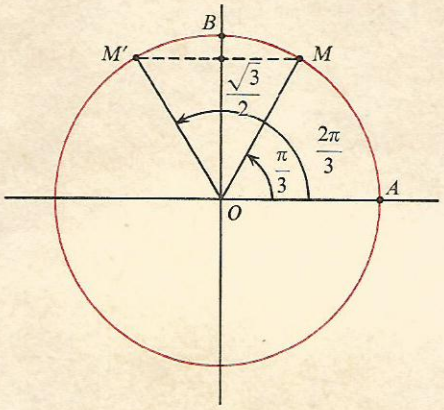


Fig. 29

Les points-images correspondants sont indiqués sur la figure 29.

Exemple 2

Résolvons graphiquement l'équation :

$$(E) \qquad x \in [-2\pi, 5\pi], \qquad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et vérifions algébriquement les résultats trouvés.

Considérons la figure 30, où (C) est la représentation graphique de la restriction à $[-2\pi, 5\pi]$ de la fonction sinus, et où (Δ) est la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

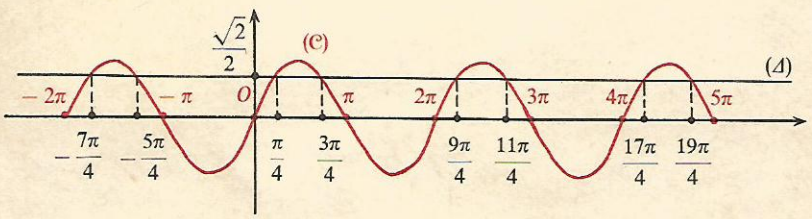


Fig. 30

La droite (Δ) coupe (C) en huit points; leurs abscisses sont les solutions de (E).

Remarquons que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après la figure 30, on a :

$$S(E) = \left\{ -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{19\pi}{4} \right\}.$$

Pour la vérification algébrique, remarquons d'abord que :

$$S(E) = \left[\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right] \cap [-2\pi, 5\pi].$$

Or, pour un élément quelconque k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$-2\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 5\pi \iff -\frac{9\pi}{4} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{19\pi}{4}$$

$$\iff -\frac{9}{8} \leqslant k \leqslant \frac{19}{8}$$

$$\iff k \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

En donnant à k les valeurs -1, 0, 1 et 2, on obtient les solutions :

$$-\frac{7\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{17\pi}{4}.$$

Ces quatre solutions ont le même point-image M sur le cercle trigonométrique (figure 31).
De même, pour un élément quelconque k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$-2\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 5\pi \iff -\frac{11\pi}{4} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{17\pi}{4}$$

$$\iff -\frac{11}{8} \leqslant k \leqslant \frac{17}{8}$$

$$\iff k \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$

En donnant à k les valeurs -1, 0, 1 et 2, on obtient les solutions :

$$-\frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{11\pi}{4}, \quad \frac{19\pi}{4}.$$

Ces quatre solutions ont le même point-image M' sur le cercle trigonométrique (figure 31).

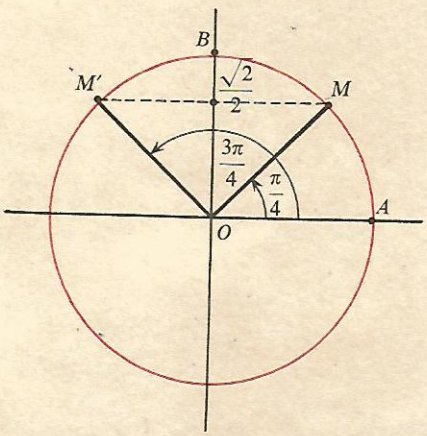


Fig. 31

Exemple 3

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Comme $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, l'équation (E) s'écrit encore :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6}.$$

Un nombre réel x est solution de cette équation si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou tel que :

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

De la première égalité, on déduit :

$$x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

De la seconde égalité, on déduit :

$$x = \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$S(E) = \left\{ \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour chaque élément k de $\mathbb{Z}$, il existe un élément k' de $\mathbb{Z}$ tel que :

- ou bien $k = 3k'$ (k est un multiple de 3),
- ou bien $k = 3k' + 1$ (k est un multiple de 3, plus 1),
- ou bien $k = 3k' + 2$ (k est un multiple de 3, plus 2).

Suivant le cas, on a donc respectivement :

$$\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{5\pi}{36} + 2k'\pi;$$

$$\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi = \frac{29\pi}{36} + 2k'\pi;$$

$$\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{5\pi}{36} + \frac{4\pi}{3} + 2k'\pi = \frac{53\pi}{36} + 2k'\pi.$$

Les solutions $\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont donc des mesures de l'un des trois angles orientés de mesures respectives :

$$\frac{5\pi}{36}, \quad \frac{29\pi}{36}, \quad \frac{53\pi}{36}.$$

(Les mesures principales sont : $\frac{5\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}, -\frac{19\pi}{36}$.)

A ces solutions correspondent donc trois points-images M_1, M_2 et M_3 sur le cercle trigonométrique (figure 32).

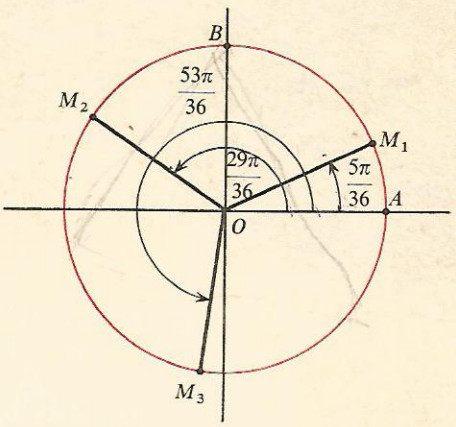


Fig. 32

Vérifier que les points M_1, M_2 et M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Montrer de même que les solutions $\frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures de l'un des trois angles orientés de mesures respectives $\frac{13\pi}{36}, \frac{37\pi}{36}, \frac{61\pi}{36}$.

Calculer les mesures principales.

Placer les trois points-images correspondants M'_1, M'_2 et M'_3 sur le cercle trigonométrique et vérifier qu'ils sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exemple 4

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-3x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Un nombre réel x est solution de (E) si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$2x - \frac{\pi}{3} = -3x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou tel que :

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 3x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

De la première égalité, on déduit :

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

De la seconde égalité, on déduit :

$$x = -\frac{7\pi}{6} - 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ce qui, posant $k' = -k$, peut encore s'écrire :

$$x = -\frac{7\pi}{6} + 2k'\pi, \quad (k' \in \mathbb{Z}).$$

D'où :

$$S(E) = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que les solutions $\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures de l'un des cinq angles orientés de mesures respectives :

$$\frac{\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{10}, \quad \frac{13\pi}{10}, \quad \frac{17\pi}{10}.$$

Placer sur le cercle trigonométrique les cinq points-images correspondant à ces solutions et vérifier qu'ils sont les sommets d'un pentagone régulier.

Les solutions $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, ont toutes le même point-image sur le cercle trigonométrique.

Exercices Résoudre les équations trigonométriques :

$x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in \mathbb{R}$, $\quad \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x \in [-2\pi, 3\pi]$, $\quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

$x \in \mathbb{R}$, $\quad \sin 2x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) Équation « cos $x = a$ »

Soit a un nombre réel et considérons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = a.$$

Soit, relativement à un repère orthogonal (O, I, J), la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction cosinus et la droite (Δ) d'équation $y = a$ (figures 33 et 36).
Pour la résolution de (E), on distingue quatre cas.

1er cas : $a \notin [-1, 1]$

Dans ce cas, $S(E) = \varnothing$.

2e cas : $a = 1$

On voit directement sur la figure 33 que :

$$S(E) = \{ 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \}.$$

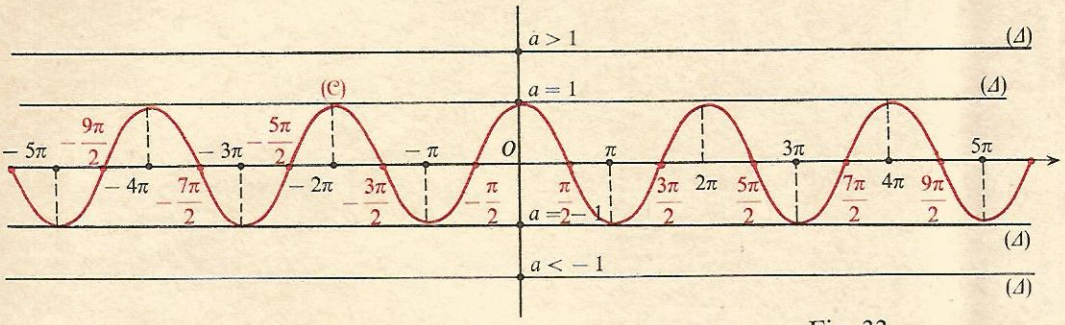


Fig. 33

Toutes ces solutions ont le même point-image M sur le cercle trigonométrique (figure 34).

3e cas : $a = -1$

On voit directement sur la figure 33 que :

$$S(E) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Toutes ces solutions ont le même point-image M sur le cercle trigonométrique (figure 35).

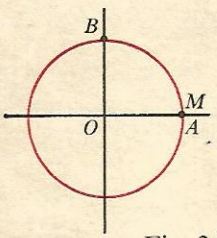


Fig. 34

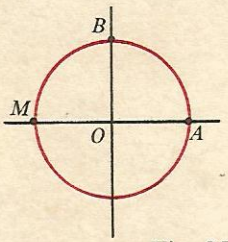


Fig. 35

4e cas : $a \in]-1, 1[$

• On voit, figure 36, que $]-\pi, \pi]$ contient deux solutions distinctes de (E).
Soit α l'une de ces solutions : $\cos \alpha = a$ ($\alpha \neq \pi$, car $a \neq -1$).
D'après la figure 36, il semble que l'autre solution soit $-\alpha$.

Vérification : $\cos(-\alpha) = \cos \alpha = a.$

D'où : $S(E) \cap]-\pi, \pi] = \{\alpha, -\alpha\}.$

• La figure 36 montre aussi que chaque intervalle $]2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$, $(k \in \mathbb{Z})$, contient deux solutions distinctes de (E).

Or : $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha = a,$

$\cos(-\alpha + 2k\pi) = \cos(-\alpha) = a.$

Comme $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ appartiennent à $]2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi]$, on a :

$$S(E) \cap]2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi] = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi\}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

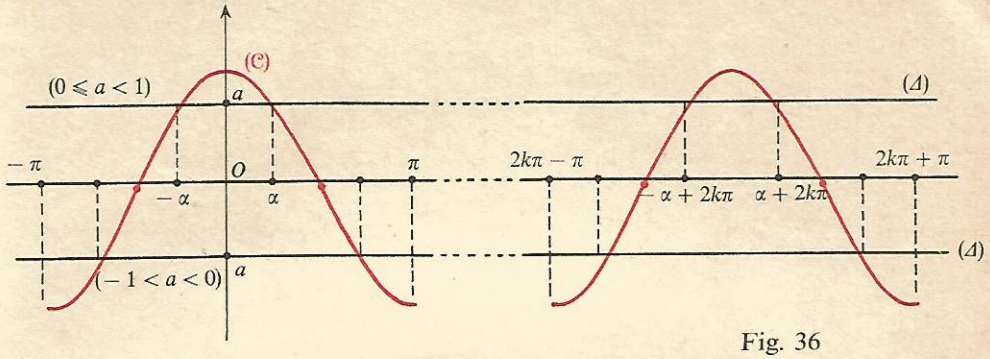


Fig. 36

- Finalement :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

A ces solutions correspondent deux points-images distincts M et M' sur le cercle trigonométrique (figure 37).

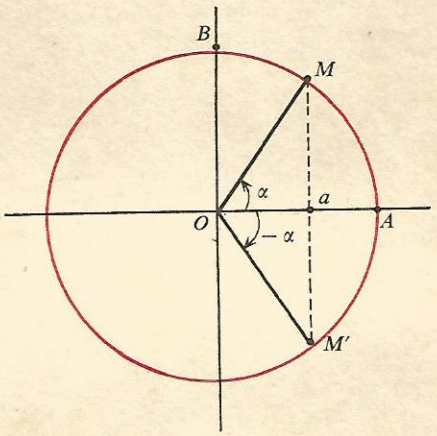


Fig. 37

En remarquant que les cas 2 à 4 peuvent être regroupés, on obtient :

Équation : $(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = a.$

- Si $a \notin [-1, 1]$: $S(E) = \varnothing$.
- Si $a \in [-1, 1]$, soit α une solution de (E) appartenant à $]-\pi, \pi]$.

Alors :

$$S(E) = \{\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Supposons que a appartienne à $[-1, 1]$.
u étant une solution quelconque de l'équation (E), vérifier que l'on a aussi :

$$S(E) = \{u + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

En déduire que :

Deux nombres réels u et v vérifient $\cos u = \cos v$ si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$u = v + 2k\pi \quad \boxed{\text{ou}} \quad u = -v + 2k\pi.$$

Exemple 1

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Comme $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, l'équation (E) s'écrit encore :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Un nombre réel x est solution de cette équation si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que :

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou tel que :

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

De la première égalité, on déduit :

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

De la seconde égalité, on déduit :

$$x = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D'où :

$$S(E) = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que les solutions $\frac{\pi}{3} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures l'un des deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

Placer sur le cercle trigonométrique les points-images correspondants et vérifier qu'ils sont diamétralement opposés.

Montrer que les solutions $k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures de l'un des deux angles orientés de mesures respectives 0 et π.

Exemple 2

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \cos 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

D'où :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right).$$

L'équation (E) peut donc encore s'écrire :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos 3x = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right).$$

Montrer que :

$$S(E) = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{12} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Vérifier que les solutions $\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures de l'un des quatre angles orientés de mesures respectives $\frac{5\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}$.

Placer les points-images correspondants sur le cercle trigonométrique.

Vérifier que les solutions $-\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des mesures de l'un des deux angles orientés de mesures respectives $-\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$. Placer les points-images correspondants sur le cercle trigonométrique.

Exercices

Résoudre les équations trigonométriques :

$$x \in [-2\pi, 2\pi], \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x.$$

3) Exemples d'inéquations trigonométriques

Exemple 1

Résolvons l'inéquation :

$$(I) \qquad x \in [-2\pi, 2\pi], \qquad \sin x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la restriction à $[-2\pi, 2\pi]$ de la fonction sinus et (Δ) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$, relativement à un repère orthogonal (figure 38).

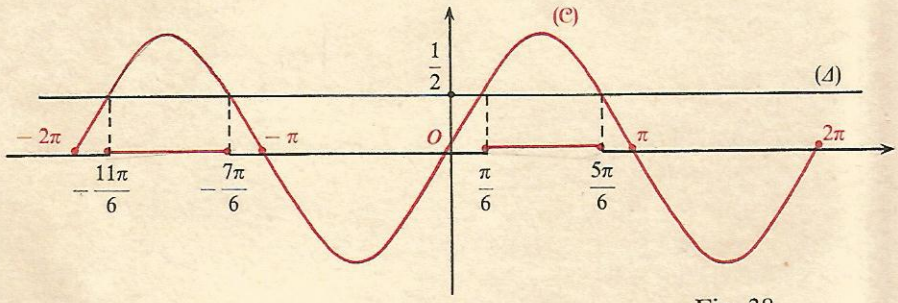


Fig. 38

La droite (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en quatre points dont les abscisses sont les solutions de l'équation :

$$x \in [-2\pi, 2\pi], \qquad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Vérifier que ces solutions sont :

$$-\frac{11\pi}{6}, \qquad -\frac{7\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{5\pi}{6}.$$

La figure 38 montre que l'ensemble $S(I)$ des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S(I) = \left[-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Exemple 2

Résolvons l'inéquation :

$$(I) \qquad x \in [-\pi, \pi], \qquad \sin 3x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soit x un nombre réel quelconque et posons $X = 3x$.

On a : $\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \iff -3\pi \leqslant 3x \leqslant 3\pi$

$$\iff -3\pi \leqslant X \leqslant 3\pi.$$

x est donc solution de l'inéquation (I) si et seulement si X est solution de l'inéquation :

$$(I') \qquad X \in [-3\pi, 3\pi], \qquad \sin X \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soit (C) la représentation graphique de la restriction à $[-3\pi, 3\pi]$ de la fonction sinus et (Δ) la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, relativement à un repère orthogonal (figure 39).

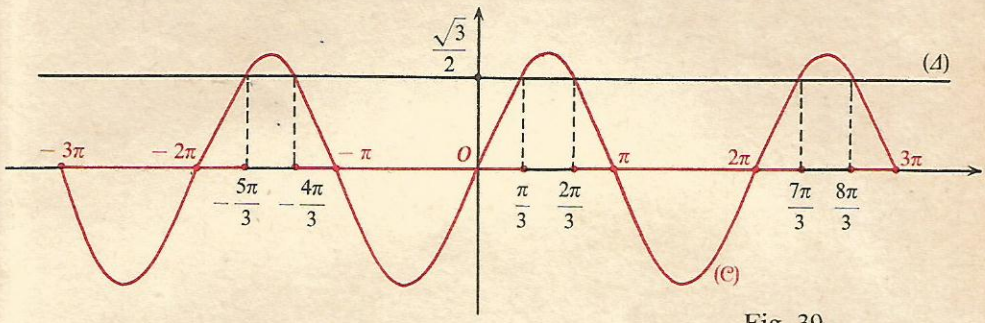


Fig. 39

La droite (Δ) coupe (C) en six points dont les abscisses sont les solutions de l'équation :

$$X \in [-3\pi, 3\pi], \qquad \sin X = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vérifier que ces solutions sont :

$$-\frac{5\pi}{3}, \quad -\frac{4\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{7\pi}{3}, \quad \frac{8\pi}{3}.$$

La figure 39 montre que :

$$S(I') = \left[-3\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right[.$$

Or : $$X \in \left[-3\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \iff x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{9}\right]$$

et de même pour chacun des intervalles dont la réunion est $S(I')$.
Finalement :

$$S(I) = \left[-\pi, -\frac{5\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{9}, \pi\right].$$

Exemple 3

Résolvons le système d'inéquations :

$$(\Sigma) \qquad x \in [-\pi, 2\pi], \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, considérons (figure 40) :

- la représentation graphique (C) de la restriction à $[-\pi, 2\pi]$ de la fonction cosinus;
- la droite (Δ) d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

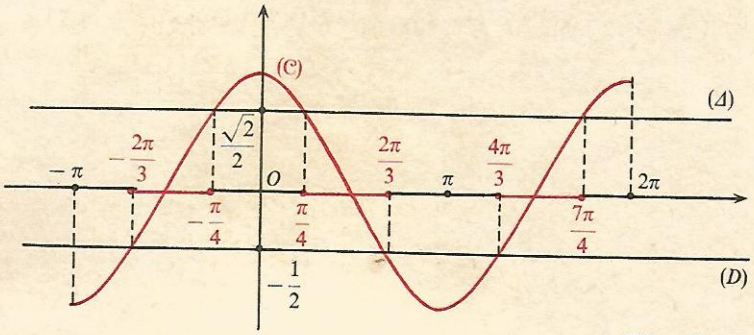


Fig. 40

La droite (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en trois points dont les abscisses sont :

$$-\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4} \quad \text{(vérifier).}$$

La droite (D) coupe $(\mathcal{C})$ en trois points dont les abscisses sont :

$$-\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \quad \text{(vérifier).}$$

La figure 40 montre que :

$$S(\Sigma) = \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

Exercices

1) Résoudre les inéquations trigonométriques :

$x \in [0, 2\pi]$, $\quad \sin 2x + \frac{1}{2} \leqslant 0$;

$x \in [-\pi, \pi]$, $\quad 2\cos x - \sqrt{3} \geqslant 0$;

$x \in \mathbb{R}$, $\quad \sqrt{2}\sin x + 1 \leqslant 0$.

2) Résoudre le système d'inéquations :

$$x \in [-2\pi, 2\pi], \quad \begin{cases} \cos x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

3 Formules d'addition et conséquences

1) Formules d'addition

Nous démontrons les égalités suivantes, dites «formules d'addition».

(1)	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\forall y \in \mathbb{R}$	$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
(2)			$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
(3)			$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
(4)			$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

• *Démonstration de (1)*

— Soit x et y deux nombres réels.
Plaçons sur le cercle trigonométrique les points-images respectifs M et N des nombres x et y (figure 41).
On a :

$$\begin{aligned}\widehat{(OA, OM)} - \widehat{(OA, ON)} &= \widehat{(ON, OA)} + \widehat{(OA, OM)} \\ &= \widehat{(ON, OM)}.\end{aligned}$$

$x - y$ est donc une mesure de l'angle orienté $\widehat{(ON, OM)}$.

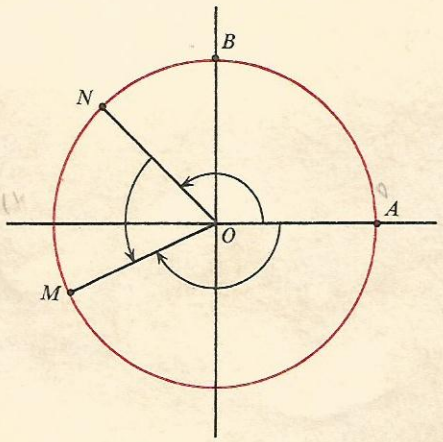


Fig. 41

Par conséquent :

$$\cos(x-y) = \cos \widehat{(ON, OM)}.$$

— les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ admettent respectivement :

$$(\cos x, \sin x), \qquad (\cos y, \sin y)$$

pour couples de coordonnées dans la base orthonormée $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

D'où :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

– D'autre part, on a aussi :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{ON}\| \cos (\widehat{MON})$$
$$= \cos (\widehat{MON}).$$

Or : $\quad \text{MES } (\widehat{ON, OM}) = \text{mes } (\widehat{MON})$

ou $\quad \text{MES } (\widehat{ON, OM}) = -\text{mes } (\widehat{MON}).$

D'où : $\quad \cos (\widehat{ON, OM}) = \cos (\widehat{MON}).$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos (\widehat{ON, OM}).$$

– Finalement :

$$\cos (x - y) = \cos (\widehat{ON, OM})$$
$$= \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$$
$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

• *Démonstration de (2)*

Pour tous nombres réels x et y, on a :

$$\cos (x + y) = \cos (x - (-y))$$
$$= \cos x \cos (-y) + \sin x \sin (-y)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

• *Démonstration de (3)*

Rappelons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Pour tous nombres réels x et y, on a donc :

$$\sin (x + y) = \cos \left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right]$$
$$= \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right]$$
$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y$$
$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

• *Démonstration de (4)*

Pour tous nombres réels x et y, on a :

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin(x+(-y)) \\ &= \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.\end{aligned}$$

Exemple

Calculons les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$, sachant que :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a : $\qquad \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$

D'où :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3});$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3});$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1);$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Exercices Simplifier :

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right),$$
$$\sin(x-y)\cos(x+y) - \sin(x+y)\cos(x-y).$$

2) Formules de multiplication par 2

En prenant $x = y$ dans les formules d'addition (2) et (3), on obtient :

$$\begin{array}{ll} (5) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ (6) & \qquad\quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{array}$$

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

D'où :

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1; \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1, \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{array}{ll} (7) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \\ (8) & \qquad\quad \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \end{array}$$

Exemple

Calculons les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{8}$, sachant que :

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il résulte des égalités (7) et (8) ci-dessus que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

D'autre part, comme $\frac{\pi}{8}$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que :

$$\cos \frac{\pi}{8} \geqslant 0, \qquad \sin \frac{\pi}{8} \geqslant 0.$$

D'où : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$

Exercices

1) Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$, sachant que :

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Comparer les résultats obtenus avec ceux de l'exemple, page 41.

2) En écrivant $3x = 2x + x$, démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \cos 3x = 4\cos^2 x - 3\cos x$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

3) Formules de Simpson

Soit x et y deux nombres réels quelconques.
En additionnant et soustrayant membre à membre les égalités :

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$

on obtient :

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y,$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y.$$

En additionnant et soustrayant membre à membre les égalités :

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$

on obtient :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y,$$
$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y.$$

D'où :

différence ou somme

(9)	$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall y\in\mathbb{R}$	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
(10)		$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$
(11)		$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
(12)		$\cos x\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

Posons :

$$\begin{cases} p = x + y \\ q = x - y. \end{cases}$$

En additionnant et soustrayant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$x = \frac{p+q}{2},$$

$$y = \frac{p-q}{2}.$$

Les égalités (9) à (12) peuvent donc être réécrites sous la forme :

(13) $\forall p \in \mathbb{R} \quad \forall q \in \mathbb{R} \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

(14) $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

(15) $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

(16) $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Les égalités (13) à (16) sont appelées « formules de Simpson ».

Exemple 1

Étant donné des nombres réels x et y, montrons que :

$$\cos (x+y) \cos (x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

En utilisant l'égalité (9), on obtient :

$$\cos (x+y) \cos (x-y) = \frac{1}{2} [\cos [(x+y)+(x-y)] + \cos [(x+y)-(x-y)]]$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2y)$$

$$= \frac{1}{2} [(2 \cos^2 x - 1) + (1 - 2 \sin^2 y)] \quad \text{(d'après (7) et (8))}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Exemple 2

Transformons en produit l'expression $1 + 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

On a successivement :

$$1 + 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left[\frac{1}{2} + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2 \left[2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos (-x)\right] \quad \text{(d'après (13)}$$

$$= 4 \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Exercices

1) Transformer en produit :

$$\sin 2x + \sin 6x,$$
$$\cos 5x - \cos 4x.$$

2) Transformer en une somme ou une différence :

$$2 \cos x \cos 3x,$$
$$\sin (x + y) \cos (x - y),$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right).$$

4) Quelques applications

a) Étant donné un nombre réel quelconque x, montrons que :

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

En utilisant l'égalité (8), on obtient :

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos^2 2x - 2 \cos 2x). \end{aligned}$$

Or :

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \quad \text{(d'après (7)).}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1 + \cos 4x}{2} - 2 \cos 2x\right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x. \end{aligned}$$

Exercice Démontrer une formule analogue pour $\cos^4 x$.

b) Transformons en produit l'expression :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

D'après l'égalité (15), on a :

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x \\ &= 2 \sin 2x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \sin 2x\left(\cos x + \cos \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Or, d'après l'égalité (13), on a :

$$\cos x + \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Finalement :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \sin 2x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice Transformer en produit l'expression :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

c) Soit α, β et γ les mesures respectives, en radians, des trois angles (non orientés) d'un triangle.
Montrons que :

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Puisque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, on a :

$$\alpha = \pi - (\beta + \gamma).$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin [\pi - (\beta + \gamma)] \\ &= \sin (\beta + \gamma) \\ &= 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \text{(d'après (6)).}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \quad \text{(d'après (15)).}$$

D'où :

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2}\left[\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \gamma}{2}\right].$$

Or, $\dfrac{\beta + \gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$ et, par conséquent :

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

En utilisant l'égalité (13), on obtient :

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2\cos\frac{\beta+\gamma+\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma-\beta+\gamma}{4}$$
$$=2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Finalement :

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Exercice α, β et γ ayant la même signification que ci-dessus, montrer que :

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

5) Équation «$a\cos x+b\sin x=c$»

Exemple préliminaire

Résolvons l'équation :

$$(E)\qquad x\in\mathbb{R},\qquad \cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}.$$

L'équation (E) est successivement équivalente à chacune des équations suivantes :

$$x\in\mathbb{R},\qquad \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On sait résoudre cette dernière équation.
Vérifier que :

$$S(E)=\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Plus généralement, étant donné des nombres réels a, b et c tels que $(a, b)\neq(0, 0)$, considérons l'équation :

$$(E)\qquad x\in\mathbb{R},\qquad a\cos x+b\sin x=c.$$

Observons que :
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1.$$

Cela montre que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est le couple de coordonnées d'un point M appartenant au cercle trigonométrique (figure 42).

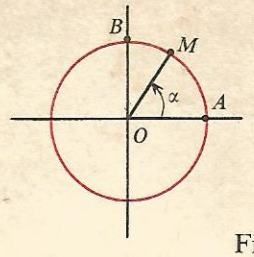


Fig. 42

Soit α une mesure quelconque de l'angle orienté $(\widehat{OA, OM})$.
On a :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

L'équation (E) est successivement équivalente à chacune des équations suivantes :

$$x\in\mathbb{R}, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On est donc ramené à un type d'équation déjà étudié.

Exemple

Résolvons l'équation :

$$(E) \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = -3.$$

On a : $\quad a = 3, \qquad b = -\sqrt{3}.$

D'où : $\quad \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{3}.$

L'équation (E) est équivalente à l'équation :

$$x\in\mathbb{R}, \qquad \frac{3}{2\sqrt{3}}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin x = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

qui s'écrit encore :

$$x\in\mathbb{R}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Remarquons que : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

L'équation (E) est donc équivalente à l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

qui s'écrit encore :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vérifier que :

$$S(E) = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Exercices

Résoudre les équations trigonométriques :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2};$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x - \sin x = 1;$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x + 3 \sin x = \frac{1}{2}.$$

Pour la dernière équation, on utilisera une table trigonométrique ou une calculatrice.

Exercices

1 (1). Étant donné une mesure x d'un angle orienté, trouver un élément α de $]-\pi, \pi]$ et un élément k de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$x = \alpha + 2k\pi$$

dans chacun des cas suivants :

$x = \dfrac{-11\pi}{6}$; $x = \dfrac{37\pi}{3}$; $x = \dfrac{17\pi}{2}$;

$x = \dfrac{7\pi}{6}$; $x = \dfrac{-41\pi}{4}$; $x = 151\pi$;

$x = \dfrac{-28\pi}{3}$; $x = \dfrac{58\pi}{3}$; $x = -25\pi$.

2 (1). Étant donné une mesure x d'un angle orienté, placer le point-image correspondant sur le cercle trigonométrique dans chacun des cas suivants :

$x = \dfrac{-119\pi}{12}$; $x = 47{,}3$;

$x = 2\,562$; $x = 27{,}5\pi$.

3 (1). Calculer les valeurs exactes des sinus et cosinus des nombres réels suivants :

$\dfrac{37\pi}{3}$; $\dfrac{-41\pi}{4}$; $\dfrac{58\pi}{3}$;

$\dfrac{-11\pi}{6}$; $\dfrac{17\pi}{2}$; 151π.

4 (1). Calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

$-1\,200°$; $870°$; $-315°$; $2\,490°$.

5 (1). Écrire en extension les ensembles suivants :

1) $\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap [-2\pi, 5\pi]$;

2) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left[-5\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$;

3) $\left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap [0, 8\pi]$.

6 (1). Compléter le tableau suivant :

	Une mesure d'un angle orienté							
en radians	$\dfrac{2\pi}{3}$		$\dfrac{-32\pi}{3}$					$\dfrac{-79\pi}{6}$
en degrés		150		1 500		$-1\,920$		
en grades					$\dfrac{3\,700}{3}$		-850	

7 (1). Soit $(\hat{x})$ et $(\hat{\beta})$ deux angles orientés.

1) Calculer la mesure principale de $(\hat{x}) + (\hat{\beta})$ dans chacun des cas suivants :

a) MES $(\hat{x}) = \dfrac{2\pi}{3}$ et MES $(\hat{\beta}) = -\dfrac{3\pi}{4}$;

b) $\dfrac{58\pi}{3}$ et $-\dfrac{41\pi}{4}$ sont respectivement des mesures de $(\hat{x})$ et $(\hat{\beta})$.

2) Calculer les mesures principales de $(\hat{x})$ et $(\hat{\beta})$, sachant que :

$$\text{MES } (\hat{x}) + \text{MES } (\hat{\beta}) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{MES } (\hat{x}) \cdot \text{MES } (\hat{\beta}) = -\frac{\pi^2}{9}.$$

8 (1). x étant un nombre réel, démontrer les égalités suivantes :

1) $2\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = 1 - (\sin x - \cos x)^2$;

2) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\sin x \cdot \cos x$;

3) $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$;

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

9 (1). x étant un nombre réel, calculer :

1) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$;

2) $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^2 x$;

3) $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

10 (1). Résoudre le système d'équations :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x\sin t + y\cos t = a \\ x\cos t - y\sin t = b. \end{cases}$$

Calculer : $x^2 + y^2$.

11 (1). x étant un nombre réel tel que $\sin x = \dfrac{2}{3}$, calculer $\cos x$.

12 (1). x étant un nombre réel tel que :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad \text{et} \quad \cos x = 0{,}3$$

calculer $\sin x$.

13 (1). La *tangente* d'un nombre réel x tel que $\cos x \neq 0$ est notée $\tan x$ et est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1) Montrer que :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2) Calculer $\sin x$ et $\cos x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;

b) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

14 (1). x étant un nombre réel, exprimer en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ les nombres suivants :

1) $A = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;

2) $B = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$;

3) $C = \sin(x - 5\pi) + \cos(x + 5\pi)$;

4) $D = \dfrac{\cos^2\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}$.

15 (1). x étant un nombre réel, calculer :

1) $\sin(x + \pi) - \sin(x - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x - 5\pi)$;

2) $\sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $\dfrac{\cos(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

16 (1). x étant un nombre réel tel que $\cos x > 0$, et $\sin x = 0{,}273$, calculer :

$$\sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

17 (2). Résoudre les équations suivantes :

1) $x \in \left[-2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $x \in [0, 5\pi]$, $\sin\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$;

4) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(5x - \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

5) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Dans chaque cas, on placera les points-images des solutions sur le cercle trigonométrique.

18 (2). Même question :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \sin 2x \cdot \sin x = 0$;

2) $x \in \mathbb{R}$, $4\sin^2 2x - 1 = 0$;

3) $x \in [0, 4\pi]$, $3 - 4\sin^2\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

19 (2). Résoudre les équations suivantes :

1) $x \in \mathbb{R}$, $2\cos 3x = 3$;

2) $x \in [-\pi, 4\pi]$, $\cos\left(-5x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

3) $x \in [-3\pi, 2\pi]$, $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) = 0$;

4) $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{5}\right)$;

5) $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

6) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

20 (2). Même question :

1) $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\sin x + 2\cos 3x \cdot \sin x = 0$;

2) $x \in \mathbb{R}$, $2 - 3\cos^2 2x = 0$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

21 (2). Même question :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$;

2) $x \in \mathbb{R}$, $2\sin^2 x - (2 + \sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 0$;

4) $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1 = 0$.

22 (2). 1) x étant un nombre réel quelconque, montrer que :

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$$

2) Sachant que :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2},$$

calculer $\sin x$ et $\cos x$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x - \sin x = \sqrt{2}.$$

23 (2). Résoudre chacune des équations suivantes, dépendant du paramètre m :

1) $x \in \mathbb{R}$, $m \sin 2x - 2 = 0$;

2) $x \in [-\pi, \pi]$, $(m-1)\cos x + 2 = 0$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \dfrac{m^2 - 1}{m(m-3)}$.

24 (2). Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \sin^2 x + (m-1)\sin x - 1 = 0,$$

dépendant du paramètre m.

25 (2). Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $2\cos x - 1 \geqslant 0$;

2) $x \in [-\pi, 3\pi]$, $\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 1 \leqslant 0$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x \leqslant 0$.

26 (2). Même question :

1) $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\sin^2 x - \dfrac{1}{2} \leqslant 0$;

2) $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x(2\sin x - 1) \leqslant 0$;

3) $x \in [0, 2\pi]$, $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geqslant 0$;

4) $x \in \mathbb{R}$, $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leqslant 0$.

27 (2). Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $\begin{cases} \sin x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2\sin x + 1 \geqslant 0; \end{cases}$

2) $x \in [0, 3\pi]$, $\begin{cases} \sin 2x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos 3x \geqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

28 (3). x, y et z étant trois nombres réels, démontrer les égalités suivantes :

1) $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;

2) $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 2 + 2\cos(x-y)$;

3) $\cos x \cdot \sin(x-z) + \cos y \cdot \sin(z-x) + \cos z \cdot \sin(x-y) = 0$.

29 (3). Simplifier :

1) $\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cos 3x$;

2) $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right) + \cos x$;

3) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

30 (3). En écrivant $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, calculer le sinus et le cosinus de $\dfrac{5\pi}{12}$.

31 (3). x et y étant deux nombres réels tels que :

$$\sin x = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$\cos y = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right],$$

1) Calculer $\cos x$ et $\sin y$;

2) Calculer $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$, $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$.

32 (3). x et y étant deux nombres réels tels que :

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \cos y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2},$$

1) Calculer $\cos 2x$ et $\sin 2x$;

2) Calculer $\cos 2y$ et $\sin 2y$.

33 (3). x étant un nombre réel tel que :

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1),$$

calculer $\cos 2x$ et en déduire la valeur de x.

34 (3). Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

2) Montrer que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = 2.$$

35 (3). Soit :

$$A = 4\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3,$$

avec : $x \in]-\pi, \pi]$.

1) Exprimer A en fonction de $\cos 2x$.

2) Déterminer x pour que $A = \dfrac{1}{2}$.

36 (3). Résoudre l'équation :

$$x \in [-2\pi, 2\pi], \quad \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$$

en utilisant une des deux méthodes ci-après.

1re méthode

- Revoir l'égalité :

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

(page 81).

- Montrer que :

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

- Résoudre l'équation donnée.

2e méthode

- Montrer que :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

- Résoudre l'équation donnée.

37 (3). Transformer en une somme ou une différence :

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

38 (3). Transformer en un produit :

1) $\sin x + \cos\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos 2x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x$;

4) $\sin 2x - \cos 3x + \cos 5x$;

5) $\sqrt{3} + 2\sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$.

39 (3). Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\cos 2x + \cos x}{\sin 2x + \sin x}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

2) Montrer que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

40 (3). Résoudre les équations suivantes :

1) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$;

2) $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x - \sin x + \sin 3x = 0$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \cos 2x = 0$;

4) $x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = 3$;

5) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 3$.

Problèmes

41. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

1) Soit la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cos\left[x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

où k est un nombre entier donné.
Montrer que g est impaire. Trouver des centres de symétrie de $(\mathcal{C})$.

2) Soit la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cos(x + k\pi)$$

où k est un nombre entier donné.
Montrer que h est paire. Trouver des axes de symétrie de $(\mathcal{C})$.

3) Soit $(\mathcal{C}')$ la représentation graphique de la fonction sinus.

a) Montrer que $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par une translation que l'on déterminera.

b) Trouver des centres de symétrie et des axes de symétrie de $(\mathcal{C}')$.

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

42. Soit l'application

$$f : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O, I, J).

1) La fonction f est-elle périodique? Justifier.

2) Soit la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Quel est l'ensemble de définition D_g de g?

b) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g dans le repère (O, I, J).

c) Construire $(\mathcal{C}_f)$ à partir de $(\mathcal{C}_g)$ (on pourra utiliser un papier calque).

3) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation :

$$x \in D_f, \quad f(x) = \frac{1}{2}.$$

4) Trouver l'image réciproque de $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par f.

43. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm).

1) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2\cos x$$

à partir de celle de la fonction cosinus.

2) On considère la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

dont la représentation graphique dans le repère (O, I, J) est $(\mathcal{C}_g)$.

a) g est-elle périodique? Justifier.

b) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation que l'on déterminera.

c) Construire $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

4) Trouver des centres de symétrie et des axes de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$.

44. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 4 cm).
Soit l'application

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin 2x.$$

1) Trouver deux applications g et h telles que :

$$f = g \circ h.$$

2) A l'aide des représentations graphiques de g et h et de la droite d'équation $y = x$, construire point par point la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3) Soit l'application

$$r : \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \quad r(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) Construire la représentation graphique de r à partir de $(\mathcal{C}_f)$ (on pourra utiliser un papier calque).

4) Résoudre l'inéquation :

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \quad r(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

45. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2 \sin 2x + 1}.$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f?

2) *a*) La fonction f est-elle paire? impaire? Justifier.

b) Montrer que f est périodique de période π.

3) Trouver l'image réciproque de $\frac{1}{2}$ par f.

4) Trouver l'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ par f.

46. Montrer que la formule :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

permet de retrouver toutes les formules suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$

2) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

47. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\sin 3x - \sin x}{x \sin x}.$$

1) *a*) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

b) f est-elle impaire? paire? justifier.

c) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

2) Déterminer l'image réciproque de 0 par f.

3) Étudier le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

48. On considère l'équation :

$(E) \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \sin 3x + 2\cos^2 x + \sin x = 0.$

1) Factoriser $\sin 3x + \sin x$.

2) Résoudre l'équation (E) et placer les points-images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3) Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2\cos^2 x}{\sin 3x + \sin x}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

b) f est-elle paire? impaire? justifier.

c) f est-elle périodique? justifier.

d) Montrer que $\forall x \in D_f \quad |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$.

e) Résoudre l'équation :

$$(F) \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

49. Soit le système d'équations :

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in [-\pi, \pi]^2, \quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \,.\, \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

1) Montrer que :

a) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \,.\, \sin y$;

b) le système (Σ) est équivalent au système suivant :

$$(\Sigma') \quad (x, y) \in [-\pi, \pi]^2, \quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos(x-y) = 0. \end{cases}$$

2) Résoudre (Σ).

50. Soit le système d'équations :

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in [-\pi, \pi]^2 \quad \begin{cases} \cos x \,.\, \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \\ \sin x \,.\, \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{cases}$$

1) Montrer que le système (Σ) est équivalent au système suivant :

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in [-\pi, \pi]^2, \quad \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

2) Résoudre (Σ).

Exercices proposés à l'examen probatoire de Côte d'Ivoire

51. Soit la fonction polynôme P définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 4x^3 - 3x - 1.$$

1) *a*) Calculer $P(1)$ puis factoriser $P(x)$ en un produit de binômes du premier degré.

b) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 0.$$

2) Soit l'équation :

$$(E) \quad x \in [0, 2\pi], \quad 4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0.$$

a) Résoudre cette équation;

b) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des solutions de (E).

Juin 1985 — Série B

52. Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{2}{1+2\sin 2x}\right).$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Démontrer que f est périodique de période π.

3) Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et placer les points-images des solutions sur le cercle trigonométrique.

4) Résoudre l'inéquation : $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) > 1$

(on pourra remarquer que pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $(1 - \sin 2x)(1 + 2\sin 2x)$ est positif ou nul).

Juin 1985 — Série C

53. 1) Démontrer, en utilisant le développement de $\sin(4x + x)$, l'égalité :

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

2) Démontrer que $\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0.$$

3) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0$$

en utilisant la question 1.

4) Résoudre l'équation :

$$X \in \mathbb{R}, \quad 16X^5 - 20X^3 + 5X = 0.$$

5) En remarquant que $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, déduire des questions précédentes la valeur de $\sin \frac{\pi}{5}$.

Juin 1985 — Série D

54. Soit deux nombres réels x et y appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1) *a*) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

b) Calculer $\cos x$.

c) Calculer $\sin y$; quelle est la valeur de y?

2) *a*) Calculer $\cos(x + y)$, $\sin(x + y)$.

b) Calculer $\cos(x - y)$, $\sin(x - y)$; en déduire la valeur de x.

Série B — Session de remplacement 1985

55. On rappelle les formules suivantes; quels que soient les nombres réels p et q, on a :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$

Soit la fonction

$$f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}.$$

1) Résoudre l'équation :

$$x \in [0, 2\pi[, \quad (1 + 2\cos 2x) \cdot \cos 3x = 0.$$

2) Transformer en un produit la somme $\cos x + \cos 5x$.

3) Déduire des questions précédentes l'ensemble de définition D de f.

4) Montrer que, quel que soit l'élément x de D, on a :

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}.$$

5) Résoudre l'équation :

$$x \in D \cap [0, 2\pi[, \quad f(x) = 0.$$

Juin 1984 — Série B

56. Soit f la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2f(x) = 8x^3 - 6x - 1.$$

1) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Représenter les points-images de ces solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$. En déduire les solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

(On donnera les solutions sous forme de cosinus.)

3) Résoudre l'inéquation :

$$x \in]-\pi, \pi], \quad 4\cos^3 x - 3\cos x - \frac{1}{2} < 0.$$

Juin 1984 — Série C

57. 1) *a*) Vérifier que :

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Résoudre l'équation :

$$X \in \mathbb{R}, \quad 2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

c) Résoudre l'inéquation :

$$X \in \mathbb{R}, \quad 2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

2) Déduire de la question 1) la résolution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points-images des solutions de l'équation précédente.

3) Déduire de la question 1) la résolution de l'inéquation :

$$x \in [0, 2\pi], \quad 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points-images des solutions de l'inéquation précédente.

Juin 1984 — Série D

58. 1) Mettre $4 - 2\sqrt{3}$ sous forme d'un carré; puis résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0.$$

2) Résoudre l'inéquation :

$$x \in [0, 2\pi[, \quad 4(1 - \sin^2 x) - 2(1 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} < 0.$$

Représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Juin 1984 — Série E

59. 1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes (on posera $x^2 = y$) :

a) $x \in \mathbb{R}, \quad 8x^4 - 6x^2 + 1 = 0,$

b) $x \in \mathbb{R}, \quad 8x^4 - 6x^2 + 1 < 0.$

2) Résoudre :

a) $x \in]-\pi, \pi], \quad 8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 = 0;$

b) $x \in]-\pi, \pi], \quad 8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 < 0.$

Représenter chacun des deux ensembles de solutions trouvés sur le cercle trigonométrique.

Série C — Session de remplacement 1984

60. 1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $y \in \mathbb{R}, \quad 2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0;$

b) $y \in \mathbb{R}, \quad 2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant 0.$

2) Utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \quad -2\cos^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 = 0;$

b) $x \in \mathbb{R}, \quad -2\cos^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 \leqslant 0.$

Série D — Session de remplacement 1984

61. 1) Résoudre l'équation suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

(On pourra transformer $\sin x + \sin 3x$ en produit). Placer sur le cercle trigonométrique les points-images de ses solutions.

2) En déduire la résolution de l'inéquation :

$$x \in [0, 2\pi[, \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0.$$

Juin 1983 — Série C

62. 1) Calculer $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.

2) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 4x^2 + 2x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{6} = 0.$$

3) En déduire la résolution de l'équation :

$$y \in [0, 2\pi[, \quad -4\sin^2 y + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos y - \sqrt{6} + 4 = 0$$

et placer sur le cercle trigonométrique les points-images des solutions de cette équation.

Juin 1983 — Série D

63. 1) Résoudre l'équation suivante :

$$x \in [-\pi, \pi[, \quad \sin x + \cos x = -1.$$

2) Après avoir vérifié que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1,$$

résoudre l'équation suivante :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x + \cos x = 0.$$

Juin 1983 — Série E

64. 1) x et y étant deux nombres réels quelconques, factoriser :

$$\cos(x + y) + \cos(x - y).$$

2) Trouver les couples solutions du système suivant :

$$(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Série D — Session de remplacement 1983

65. 1) Résoudre l'équation :

$$x \in [0, 2\pi[, \quad 2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0.$$

2) Résoudre l'inéquation :

$$x \in [0, 2\pi[, \quad 2\sin^2 x + 7\cos x - 5 < 0.$$

Juin 1982 — Série C

66. Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

et représenter ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Série C — session de remplacement 1982

67. On donne, x étant un nombre réel :

$$E_1 = \sin x + \sin 3x - \sqrt{3}\sin 2x,$$
$$E_2 = \cos 3x + \cos x - \sqrt{3}\cos 2x.$$

1) Mettre la somme $\sin x + \sin 3x$ sous forme d'un produit.

2) Mettre E_1 et E_2 sous forme de produits.

3) Utiliser les factorisations précédentes pour résoudre l'équation :

$$(E) \quad x \in [-\pi, \pi], \quad E_1 + E_2 = 0.$$

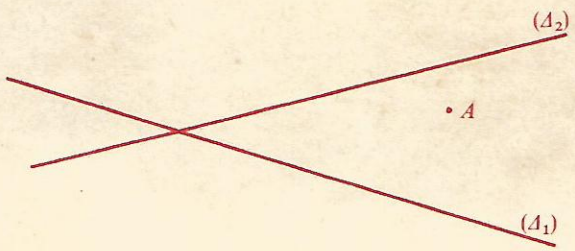
4) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des solutions de (E).

Série D — Session de remplacement 1982

3 Transformations du plan

Leçon 1 : ROTATIONS
Leçon 2 : HOMOTHÉTIES
Leçon 3 : SIMILITUDES

On donne un point A et deux droites (Δ_1) et (Δ_2) comme l'indique la figure ci-dessous. Construire un carré $ABCD$ tel que les sommets B et D appartiennent respectivement à (Δ_1) et à (Δ_2).



1 Rotations

1) Généralités sur les transformations du plan

- On rappelle que :

– un point A du plan $\mathcal{P}$ est dit *invariant* par une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ si :

$$f(A) = A.$$

– Une partie E du plan $\mathcal{P}$ est dite *globalement invariante* par une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ si :

$$f(E) = E.$$

- **Définition**

> On appelle *transformation du plan*, toute bijection du plan sur lui-même.

– Donner des exemples de transformations du plan.

2) Généralités sur les rotations (rappels)

a) Définition

Étant donné un point O et un angle orienté $(\hat{\alpha})$, on appelle *rotation de centre O et d'angle orienté* $(\hat{\alpha})$, l'application :

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que : pour $M = O$, $M' = O$

pour $M \neq O$, $OM' = OM$ et $(\widehat{OM, OM'}) = (\hat{\alpha})$.

α étant la mesure principale de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$, par souci d'alléger le langage, la rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$ sera appelée *rotation de centre O et d'angle orienté* α. Cette rotation est souvent notée $r_{(O,\alpha)}$ ou tout simplement r.

b) Propriétés

– Toute rotation d'angle orienté non nul admet un unique point invariant, son centre.
– La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.
– Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants ou égaux.
– Toute rotation est donc un déplacement.

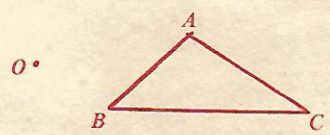
Par conséquent :

Toute rotation **conserve :**

– La distance de deux points
– l'alignement des points
– le parallélisme des droites
– l'orthogonalité des droites
– la mesure des angles
– le barycentre des points pondérés.

Exercices

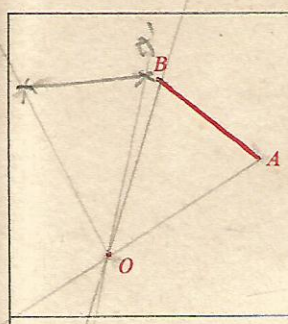
1) On donne un point O et le triangle ABC.



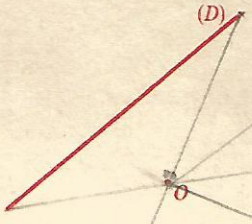
Construire l'image $A'B'C'$ de ABC par la rotation de centre O et d'angle orienté α, dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *b*) $\alpha = \frac{-\pi}{4}$ *c*) $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

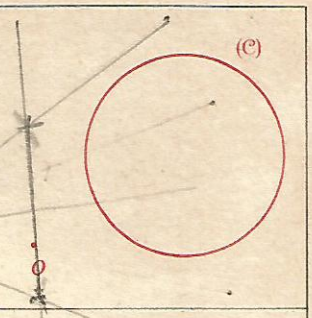
2) Soit un carré $ABCD$. Trouver une rotation d'angle orienté non nul qui laisse ce carré globalement invariant.



Construire l'image de $[AB]$ par la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$.



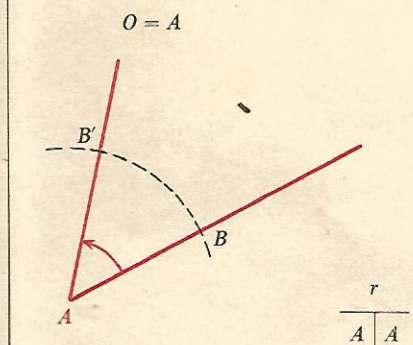
Construire l'image de (D) par la rotation $r\left(O, -\frac{\pi}{6}\right)$.



Construire l'image de (C) par la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

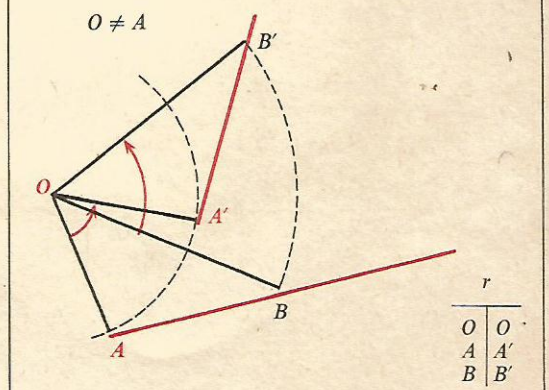
3) Angles orientés et rotation

On donne un point O et une demi-droite $[AB)$.
Construisons, dans chacun des cas suivants, l'image de $[AB)$ par la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.



On sait que :

$$MES(\widehat{AB, AB'}) = \frac{\pi}{3}$$



Comment décrire la position relative de la demi-droite $[AB)$ et de son image $[A'B')$?

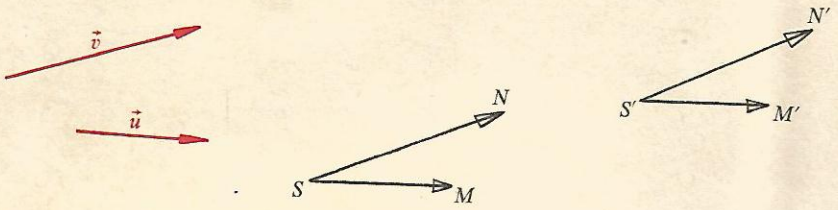
Nous sommes amenés à définir l'angle orienté d'un couple de demi-droites n'ayant pas nécessairement la même origine.

a) Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

Activité préparatoire

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Considérons deux points distincts S et S'.
On sait qu'il existe des points M, N, M', N' tels que :

$$\overrightarrow{SM} = \vec{u} \; ; \quad \overrightarrow{SN} = \vec{v}$$
$$\overrightarrow{S'M'} = \vec{u}; \quad \overrightarrow{S'N'} = \vec{v}.$$



Montrer que :

$$\widehat{(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN})} = \widehat{(\overrightarrow{S'M'}, \overrightarrow{S'N'})}.$$

Définition

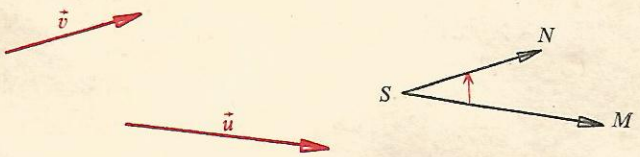
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et l'on note :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

l'angle orienté :

$$\widehat{(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN})}$$

où : (S, M) et (S, N) sont respectivement des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN})}; \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{SM} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SN} = \vec{v}.$$

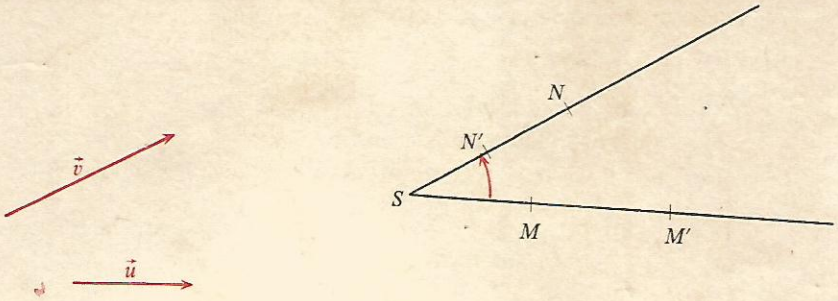
- Notons que :

si : $\quad \vec{u}_1 = \alpha\vec{u} \quad$ et $\quad \vec{v}_1 = \beta\vec{v}$

avec $\quad \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad$ et $\quad \beta \in \mathbb{R}_+^*$

alors : $\quad \widehat{(\vec{u}_1, \vec{v}_1)} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}.$

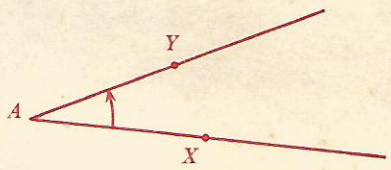
$$\overrightarrow{SM} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SM'} = \alpha\vec{u} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\overrightarrow{SN} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SN'} = \beta\vec{v} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$



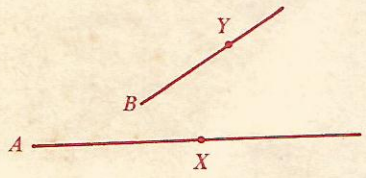
b) **Angles orientés d'un couple de demi-droites**

On appelle *angle orienté d'un couple de demi-droites* ($[AX)$, $[BY)$), l'angle orienté du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où (A, X) et (B, Y) sont respectivement des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

On le note $(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY})$ ou $(\widehat{AX, BY})$.



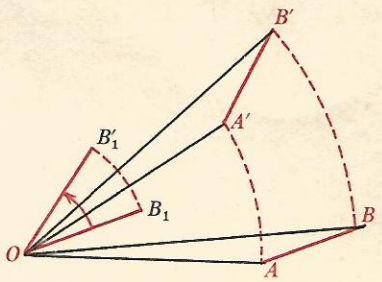
$(\widehat{AX, AY}) = (\widehat{\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}})$



l'angle orienté du couple $([AX), [BY))$ est $(\widehat{\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BY}})$.

c) **Angles orientés et rotation**

On donne une rotation r de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.
Soit A et B deux points distincts du plan, A', B' leurs images respectives par r.



Considérons le point B_1 tel que :

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AB}.$$

Soit B'_1 l'image de B_1 par r.

On a :

r	
O	O'
A	A'
B	B'
B_1	B'_1

$OABB_1$ étant un parallélogramme, son image $OA'B'B'_1$, par la rotation r est aussi un parallélogramme.
(Justifier.)
Donc : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'_1}$.

Par conséquent : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB'_1}})$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\hat{\alpha})$.

Théorème

A et B étant deux points distincts du plan, A' et B' leurs images respectives par une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha})$, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\hat{\alpha}).$$

4) Diverses déterminations d'une rotation

a) Par définition :

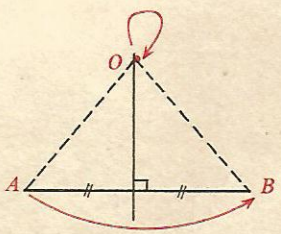
Une rotation est déterminée par la donnée de son centre et de son angle orienté.

b) Étant donné trois points distincts O, A, A' cherchons s'il existe une rotation de centre O et qui applique A sur A'.

- Si $OA \neq OA'$, il n'existe aucune rotation de centre O qui applique A sur A'.
- Si les points O, A, A' sont distincts et tels que :

$$OA = OA',$$

la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{OA, OA'})$ est la seule rotation qui applique A sur A'.



En conclusion

Une rotation est déterminée par la donnée de son centre, un point distinct de son centre et son image.

O, A, A' étant trois points distincts tels que :

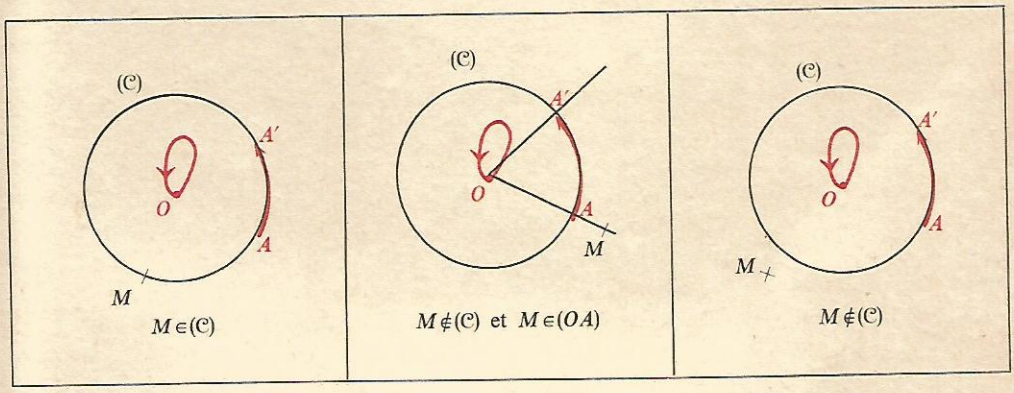
$$OA = OA'.$$

On peut considérer la rotation de centre O qui applique A sur A'.

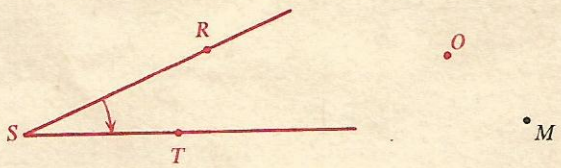
• *Construction de l'image d'un point*

– On donne un cercle (C) de centre O.

Soit A et A' deux points distincts de (C).
Considérons la rotation de centre O qui applique A sur A'.
Donner un programme de construction de l'image M' d'un point quelconque M, dans chacun des cas suivants.



– On donne un point O et un angle orienté $(\hat{\alpha})$ par son représentant $([SR), [ST))$.
Donner un programme de construction de l'image M' d'un point quelconque M par la rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.



Exercice

On considère le carré $ABCD$ de centre O.
Donner l'angle orienté de chacune des rotations suivantes :

r_1 : rotation de centre O qui applique A sur B
r_2 : rotation de centre O qui applique A sur C
r_3 : rotation de centre O qui applique D sur C.

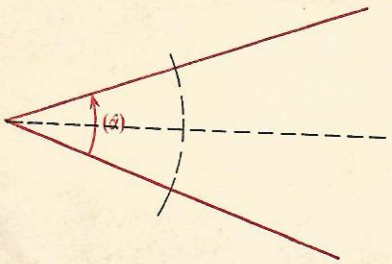
c) Étant donné deux points distincts A et A' et un angle orienté non nul $(\hat{\alpha})$ de mesure principale α, cherchons s'il existe une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha})$ qui applique A sur A'.

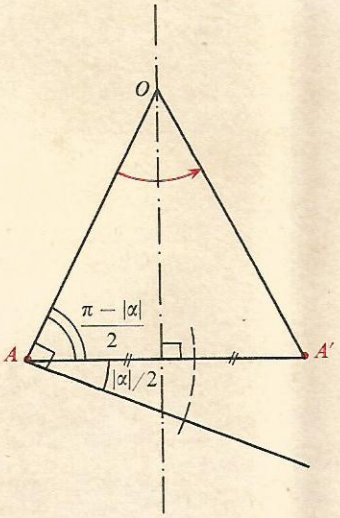
— S'il existe une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha})$ qui applique A sur A', le centre O de cette rotation est l'un des points d'intersection de la médiatrice de $[AA']$ et des demi-droites $[AX)$ et $[AY)$ telles que :

$$\text{mes}\,(\widehat{A'AX}) = \text{mes}\,(\widehat{A'AY}) = \frac{\pi - |\alpha|}{2}.$$

La condition : $\quad\quad$ « $(\widehat{OA, OA'}) = (\hat{\alpha})$ »

permet de choisir celui qui convient.





— Donner un programme de construction du centre O de cette rotation.
(On pourra utiliser l'arc capable.)

En conclusion

Une rotation est déterminée par la donnée de son angle orienté, d'un point et son image.

A et A' étant deux points distincts, $(\hat{\alpha})$ un angle orienté non nul, on peut considérer la rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha})$ qui applique A sur A'.

Exercice On donne deux points distincts A et B.

Construire le centre O de la rotation d'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$, qui applique A sur B.

d) Étant donné quatre points distincts A, B, A', B', cherchons s'il existe une rotation qui applique :

A sur A' et B sur B'.

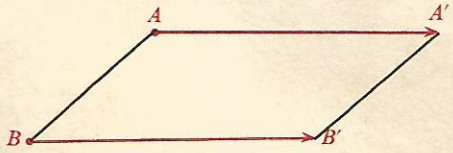
- Si $AB \neq A'B'$, il n'existe aucune isométrie qui applique A sur A' et B sur B'.
- Supposons $AB = A'B'$.

On sait qu'il existe un déplacement et un seul qui applique :

A sur A' et B sur B'.

Ce déplacement est une translation si et seulement si :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}.$$



– Par conséquent,

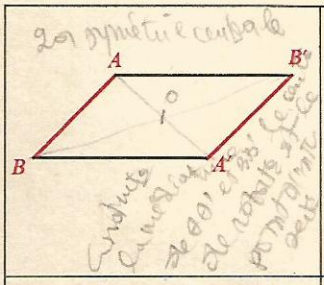
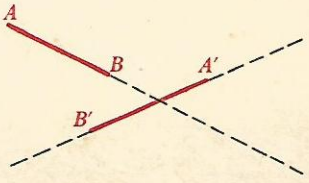
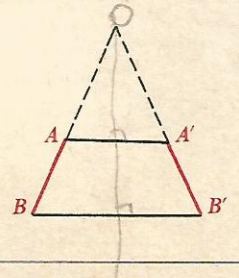
si $AB = A'B'$ et $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$

il existe une rotation et une seule qui applique :

A sur A' et B sur B'.

– Donner dans chacun des cas ci-dessous, un programme de construction du centre O de la rotation qui applique :

A sur A' et B sur B'.

		
$AB'A'B$ est un parallélogramme.	$AB = A'B$? (AB) et $(A'B')$ sont sécants.	$AA'B'B$ est un trapèze isocèle.

Conclusion

Une rotation est déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.

A, B, A', B' étant quatre points distincts tels que :

$$AB = A'B'; \qquad \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'},$$

on peut considérer la rotation qui applique :

A sur A' et B sur B'.

Exercice

Étant donné deux demi-droites $[AX)$ et $[BY)$, on sait qu'il existe un unique déplacement qui applique :

$$[AX) \quad \text{sur} \quad [BY).$$

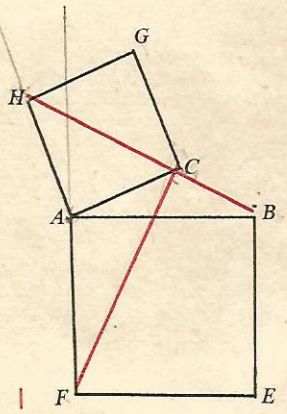
A quelles conditions ce déplacement est-il une rotation?
Donner un programme de construction du centre de cette rotation.

5) Exemples d'utilisation des rotations dans des activités géométriques

a) Utiliser les rotations pour démontrer une propriété

Exemple

On donne deux segments $[AB]$ et $[AC]$ de supports distincts.
On construit les carrés $ABEF$ et $ACGH$ comme l'indique la figure ci-dessous.
Montrons que les droites (CF) et (BH) sont perpendiculaires.



Soit r la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

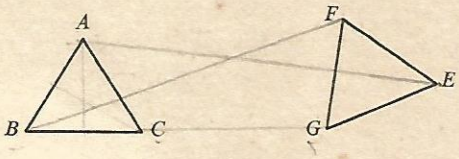
On a :

	r
A	A
C	H
F	B

La rotation r applique donc $[CF]$ sur $[HB]$.
Par suite :

$(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{HB})$ est l'angle orienté de r.
(CF) et (HB) sont donc perpendiculaires.

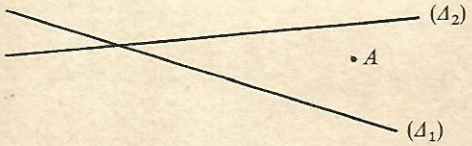
Exercice On donne deux triangles équilatéraux isométriques ABC et EFG.
Montrer que les médiatrices des segments $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$ sont concourantes.



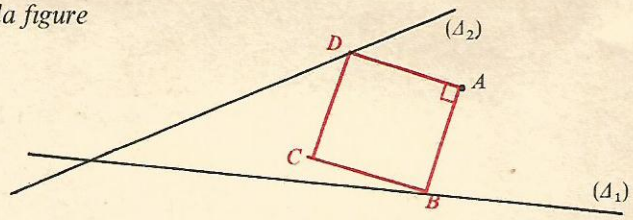
b) **Utiliser les rotations pour construire une figure**

Exemple

On donne un point A et deux droites (Δ_1) et (Δ_2) comme l'indique la figure ci-dessous.
Construisons un carré $ABCD$ tel que les sommets B et D appartiennent respectivement à (Δ_1) et à (Δ_2).



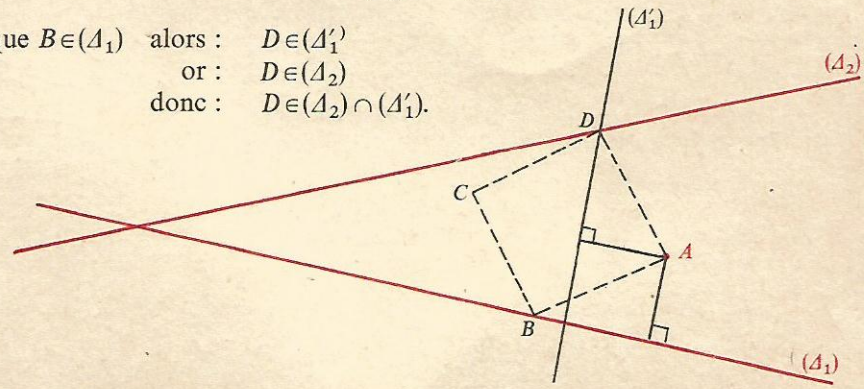
— *Analyse de la figure*



On considère la rotation r, de centre A qui applique B sur D.

r	
A	A
B	D
(Δ_1)	(Δ'_1)

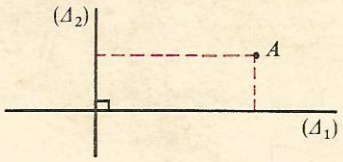
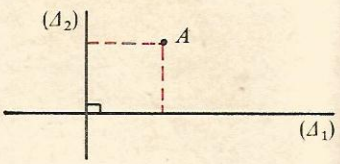
Puisque $B \in (\Delta_1)$ alors : $D \in (\Delta'_1)$
or : $D \in (\Delta_2)$
donc : $D \in (\Delta_2) \cap (\Delta'_1)$.



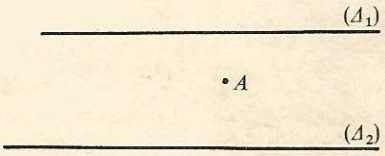
— *Construction du carré ABCD*

Donner le programme de construction de (Δ'_1) puis du carré $ABCD$.
Justifier chaque étape de ce programme.

— Examiner les cas ci-dessous où les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

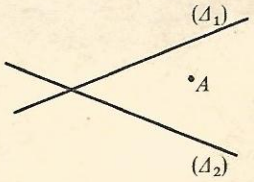
	
le point A n'est pas équidistant des droites (Δ_1) et (Δ_2)	le point A est équidistant des droites (Δ_1) et (Δ_2)

— Envisager le cas où les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles (se référer au cas de la figure ci-dessous).



Exercice

On donne un point A et deux droites (Δ_1) et (Δ_2) comme l'indique la figure ci-contre.



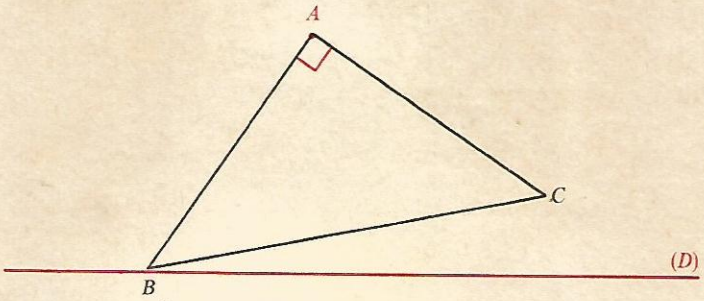
Construire deux triangles équilatéraux dont un sommet est A et dont les deux autres sommets appartiennent l'un à (Δ_1) et l'autre à (Δ_2).

c) Utiliser les rotations pour rechercher un ensemble de points

Exemple

On donne une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
Soit B un point quelconque de (D).

— Construire le triangle rectangle isocèle en A tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.
— Cherchons l'ensemble décrit par le point C lorsque le point B décrit la droite (D).



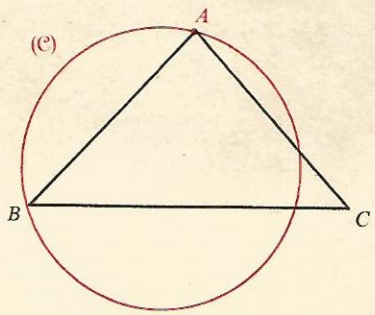
Le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, lorsque le point B décrit la droite (D), son image C décrit la droite (D') image de (D) par la rotation r.

– Construire la droite (D').

Exercice

Dans l'exemple ci-dessus, on remplacera la droite (D) par un cercle $(\mathcal{C})$ passant par A.



Trouver l'ensemble décrit par C lorsque B décrit $(\mathcal{C}) - \{A\}$.

6) Composition d'une rotation et d'une translation (Activités)

a) On donne un vecteur $\vec{u}$ par un représentant (A, B), un angle orienté $(\hat{\alpha})$ par un représentant $([SR), [ST))$ et un point O.
Considérons la translation t de vecteur $\vec{u}$ et la rotation r de centre O d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

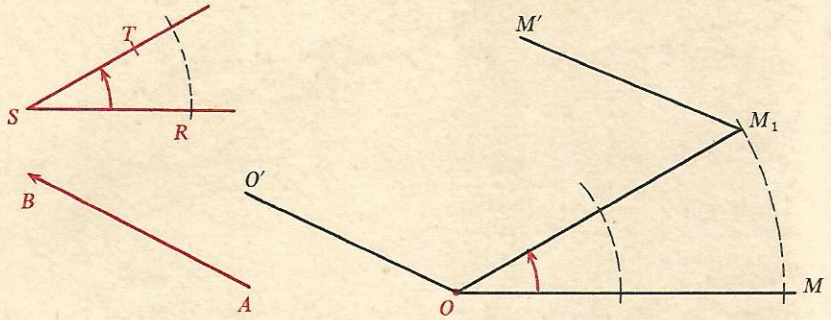
• On veut caractériser la transformation $t \circ r$.

– On sait que la composée de deux déplacements est un déplacement.
Donc $t \circ r$ est un déplacement.
Soit M un point quelconque du plan.
Désignons par M_1 l'image de M par r.
On a :

r	
O	O
M	M_1

t	
O	O'
M_1	M'

$t \circ r$	
O	O'
M	M'



— Montrer que $t \circ r$ n'est pas une translation, en déduire que $t \circ r$ est une rotation.

— Montrons que l'angle orienté de la rotation $t \circ r$ est celui de la rotation r.
En effet, l'angle orienté de la rotation $t \circ r$ est :

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}})$$

et on a : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}})$. Justifier.
$= (\hat{\alpha})$

• Montrer de même que $r \circ t$ est une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

Théorème

Soit t une translation et r une rotation d'angle orienté non nul $(\hat{\alpha})$.
Les transformations $t \circ r$ et $r \circ t$ sont des rotations d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

• Dans le cas de la figure ci-dessus, construire le centre Ω de la rotation $t \circ r$.

Exercice

On donne un triangle équilatéral ABC.
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et r la rotation de centre A qui applique B sur C.
On sait que $t \circ r$ est une rotation.
Caractériser cette rotation.

b) **Décomposition d'une rotation en translation et en rotation de centre donné**

On donne une rotation r de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.
Soit Ω un point distinct de O.
Soit r' la rotation de centre Ω et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

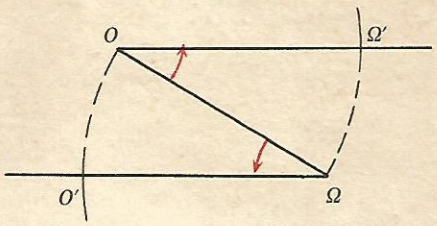
• Montrons qu'il existe une translation t_1 telle que $r = t_1 \circ r'$.
Désignons par Ω' l'image de Ω par r et par O' l'image de O par r'.
On a :

r	
O	O
Ω	Ω'

$O\Omega = O\Omega'$

r'	
O	O'
Ω	Ω

$\Omega O = \Omega O'$



donc $O\Omega' = O'\Omega$.

Les triangles $\Omega O\Omega'$ et $O\Omega O'$ sont isométriques (Justifier); on en déduit que :

$$O'O = \Omega\Omega'.$$

Le quadrilatère $OO'\Omega\Omega'$ est donc un parallélogramme.

Par suite : $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$.

On a alors :

r'	
O	O'
Ω	Ω

t_1	
O'	O
Ω	Ω'

$t_1 \circ r$	
O	O
Ω	Ω'

$t_1 \circ r'$ est donc la rotation de centre O qui applique Ω sur Ω', c'est donc la rotation r :

$$r = t_1 \circ r'.$$

• Montrer de même qu'il existe une translation t_2 telle que :

$$r = r' \circ t_2.$$

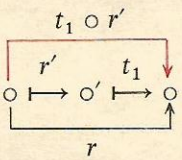
Théorème

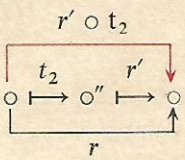
Soit r une rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$, Ω un point distinct de O.
Il existe deux translations t_1 et t_2 telles que :

$$r = t_1 \circ r' \quad \text{et} \quad r = r' \circ t_2.$$

où r' est la rotation de centre Ω et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.

Remarque :





Exercice

On donne un triangle équilatéral ABC.
Considérons la rotation r de centre A qui applique B sur C et la rotation r' de centre B qui applique C sur A.

Trouver deux translations t_1 et t_2 telles que :

$$r = t_1 \circ r', \quad \text{et} \quad r = r' \circ t.$$

7) Composition de deux rotations (Activités)

a) Composée de deux rotations de même centre

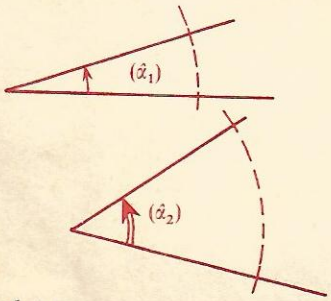
On donne les rotations :

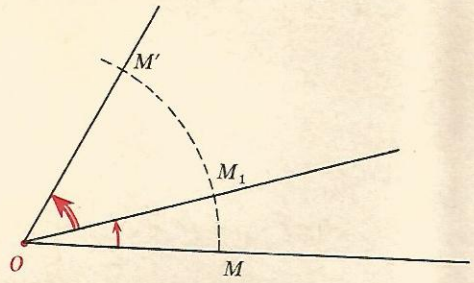
- r_1 de centre O, d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1)$
- r_2 de centre O, d'angle orienté $(\hat{\alpha}_2)$.

On veut caractériser la transformation $r_2 \circ r_1$.

Soit M un point quelconque du plan, distinct de O.
Désignons par :

- M_1, l'image de M par r_1
- M', l'image de M_1 par r_2.





On a alors :

r_1		r_2		$r_2 \circ r_1$	
O	O	O	O	O	O
M	M_1	M_1	M'	M	M'

$$OM_1 = OM \quad \text{et} \quad (\widehat{OM, OM_1}) = (\hat{\alpha}_1)$$
$$OM' = OM_1 \quad \text{et} \quad (\widehat{OM_1, OM'}) = (\hat{\alpha}_2)$$

Par conséquent :

$$OM' = OM$$
$$(\widehat{OM, OM'}) = (\widehat{OM, OM_1}) + (\widehat{OM_1, OM'})$$
$$= (\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$$

$r_2 \circ r_1$ est donc la rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.

- Montrer de même que $r_1 \circ r_2$ est la rotation de centre O et d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.

Théorème

La composée de deux rotations de même centre O est une rotation de centre O. Son angle orienté est la somme des angles orientés des rotations données.

Cas particulier

La composée de deux rotations de même centre et d'angles orientés opposés est l'application identique du plan.

Théorème

L'ensemble des rotations de centre O, muni de la composition, est un groupe commutatif.

Énoncer les cinq propriétés résumées par ce théorème.

Exercice

Trouver la transformation f dans chacun des cas suivants :

a) $r_2 \circ r_1 = f$

b) $f \circ r_2 = r_1$

c) $r_1 \circ f \circ r_2 = r_3$

où r_1, r_2, r_3 sont des rotations de même centre O et d'angles orientés respectifs :

$$\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{\pi}{2}.$$

b) **Composée de deux rotations de centres différents**

On donne deux points distincts O_1 et O_2 et deux angles orientés $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$. Soit r_1 la rotation de centre O_1 et d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1)$, r_2 la rotation de centre O_2 et d'angle orienté $(\hat{\alpha}_2)$.

• On veut caractériser la transformation $r_2 \circ r_1$.
On sait qu'il existe une translation t telle que :

$$r_2 = t \circ r'_2$$

où r'_2 est la rotation de centre O_1 et d'angle orienté $(\hat{\alpha}_2)$.
Par suite : $r_2 \circ r_1 = t_0(r'_2 \circ r_1)$.

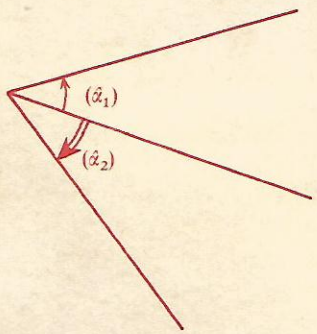
Notons que r_1 et r'_2 sont des rotations de même centre O_1 et d'angles orientés respectifs $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$.
Par conséquent :

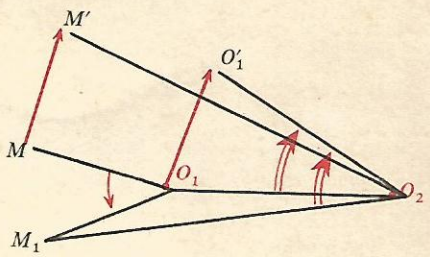
– Si $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ est l'angle orienté nul,

$$r'_2 \circ r_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

donc : $r_2 \circ r_1 = t$

Illustration graphique



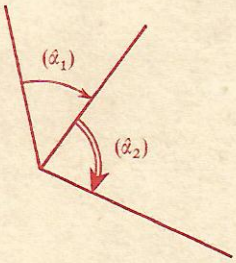


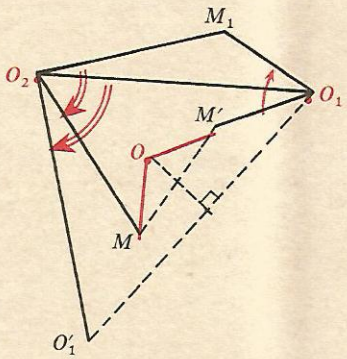
on a :

$$\begin{aligned} M_1 &= r_1(M) \\ M' &= r_2(M_1) \\ O'_1 &= r_2(O_1) \\ \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{O_1O'_1}. \end{aligned}$$

– Si $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ est un angle orienté non nul, $r'_2 \circ r_1$ est alors une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.

Illustration graphique





$M_1 = r_1(M)$
$M' = r_2(M_1)$
$O'_1 = r_2(O_1)$

on a : $(OM, OM') = (\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.

• Montrer de même que $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$.

Théorème

La composée de deux rotations de centres différents et d'angles orientés respectifs $(\hat{\alpha}_1)$ et $(\hat{\alpha}_2)$ non nuls est :

– Une translation si la somme des angles orientés $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ est nulle.
– Une rotation d'angle orienté $(\hat{\alpha}_1) + (\hat{\alpha}_2)$ si cette somme est non nulle.

Exercice

On donne deux points distincts A et B.
Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$, r_2 la rotation de centre B et d'angle orienté $(\hat{\alpha})$.
Caractériser la transformation $r_2 \circ r_1$ dans chacun des cas suivants :

a) $\text{MES}(\hat{\alpha}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\text{MES}(\hat{\beta}) = +\dfrac{\pi}{4}$

b) $\text{MES}(\hat{\alpha}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\text{MES}(\hat{\beta}) = -\dfrac{\pi}{6}$

c) $\text{MES}^{(\circ)}(\hat{\alpha}) = 74$ et $\text{MES}^{(\circ)}(\hat{\beta}) = -74$.

8) Composition d'une rotation et d'une symétrie orthogonale (Activités)

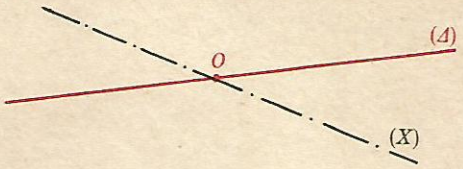
a) On donne une droite (Δ) et un point O de (Δ).
Soit r une rotation d'axe (Δ).

• Montrons que $s \circ r$ est une symétrie orthogonale.

On sait qu'il existe une droite (X) passant par O telle que :

$$r = s \circ s'$$

s' étant la symétrie orthogonale d'axe (X).



Par suite : $s \circ r = s_0(s_0 s')$

$s \circ r = s'$.

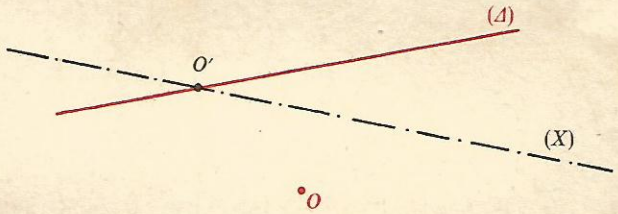
• Montrer de même que $r \circ s$ est une symétrie orthogonale ayant pour axe une droite passant par O.

Théorème

La composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et d'une rotation ayant pour centre un point O de (Δ), est une symétrie orthogonale.
L'axe de cette symétrie est une droite passant par O.

b) On donne une droite (Δ) et un point O n'appartenant pas à (Δ).
Soit r une rotation de centre O et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

• Montrons que $s \circ r$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.



Soit O' un point de (Δ) et soit r' la rotation de centre O' et de même angle orienté que celui de r.
On sait alors qu'il existe une translation t de vecteur non nul, telle que :

$$r = r' \circ t.$$

On obtient donc successivement :

$$s \circ r = \underline{s \circ r'} \circ t$$

$$s \circ r = s' \quad \circ t$$

où s' est une symétrie orthogonale (ayant pour axe une droite (X) passant par O').

• Montrer de même que $r \circ s$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

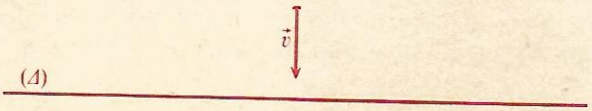
Théorème

La composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à (Δ) est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

c) Nous nous proposons donc d'étudier la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

On donne une droite (Δ) et un vecteur non nul $\vec{v}$.
Désignons par s la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et par t la translation de vecteur $\vec{v}$.
Étudions $s \circ t$ et $t \circ s$.
Notons que $s \circ t$ et $t \circ s$ sont des retournements (Justifier).

- *1er cas : $\vec{v}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (Δ).*



– On sait qu'il existe une symétrie orthogonale s' telle que :

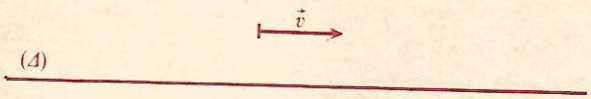
$t = s \circ s'$, l'axe (Δ') de s' est parallèle à (Δ).

On a donc : $s \circ t = s \circ (s \circ s')$

$$\boxed{s \circ t = s'}$$

– De même $t \circ s$ est une symétrie orthogonale s'' d'axe (Δ'') parallèle à (Δ).
– Dans le cas de la figure ci-dessus, construire les droites (Δ') et (Δ'').

- *2e cas : $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (Δ)*

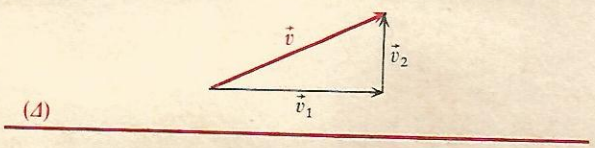


Montrer qu'il n'existe aucun point du plan qui soit invariant par $s \circ t$. $s \circ t$ n'est donc pas une symétrie orthogonale.

Montrer que :

$$\boxed{s \circ t = t \circ s}$$

- *3e cas : $\vec{v}$ est ni orthogonal ni colinéaire à un vecteur directeur de (Δ)*



Posons : $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ colinéaire à un vecteur directeur de (Δ)
$\vec{v}_2$ orthogonal à un vecteur directeur de (Δ).

Par suite : $s \circ t = s \circ (t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1})$

$= (s \circ t_{\vec{v}_2}) \circ t_{\vec{v}_1}$

$s \circ t = s' \circ t_{\vec{v}_1}$

s' étant une symétrie orthogonale ayant pour axe une droite (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}_1$.
$s' \circ t_{\vec{v}_1}$ est appelé *symétrie glissée* d'axe (Δ') et de vecteur $\vec{v}_1$.

Définition

Soit (Δ) une droite et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (Δ).
On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{v}$, la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{v}$.

d) **Synthèse sur les isométries**

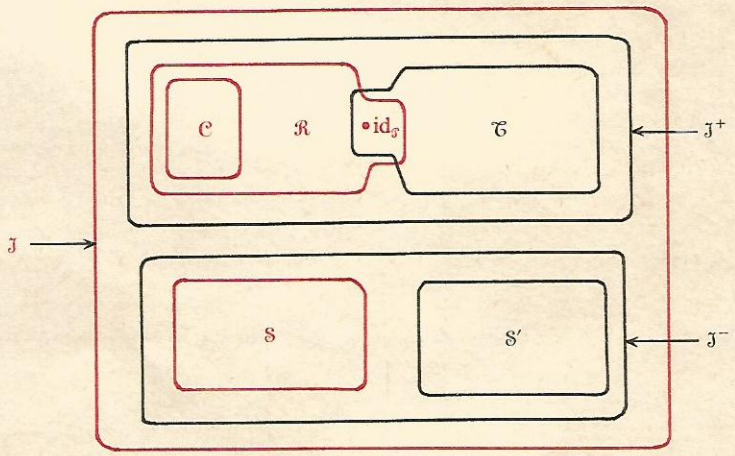
On a vu en classe de Seconde que tout retrournement est la composée de trois symétries orthogonales, c'est-à-dire d'une symétrie orthogonale et d'un déplacement.

Donc, tout retournement est :

- soit la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation
- soit la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.

D'où la conclusion :

Un retrournement du plan est :
- Soit une symétrie orthogonale.
- Soit une symétrie glissée.



On a désigné par :

$\mathcal{J}$: l'ensemble des isométries
$\mathcal{J}^+$: l'ensemble des déplacements
$\mathcal{J}^-$: l'ensemble des retournements
$\mathcal{R}$: l'ensemble des rotations
$\mathcal{C}$: l'ensemble des symétries centrales
$\mathcal{T}$: l'ensemble des translations
$\mathcal{S}$: l'ensemble des symétries orthogonales
$\mathcal{S}'$: l'ensemble des symétries glissées.

Déplacements		Rotations	Applications identique de $\mathcal{P}$	Translations
Retournements	Symétries orthogonales			Symétries glissées
Ensemble des points invariants	1 droite	1 point	le plan	Φ

2 Homothéties

1) Rappels

Définition

Étant donné un point O et un nombre réel non nul k, on appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application :

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

L'homothétie de centre O et de rapport k peut être notée $h_{(O,k)}$ ou tout simplement h.

Propriété fondamentale

h étant une homothétie de rapport k, M' et N' étant les images respectives de deux points quelconques M et N, on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}.$$

2) Composition d'une homothétie et d'une translation (Activités)

a) On donne un vecteur $\vec{u}$ par son représentant (A, B), un point O et un nombre réel k non nul et différent de 1.
Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ et h l'homothétie de centre O, de rapport k.

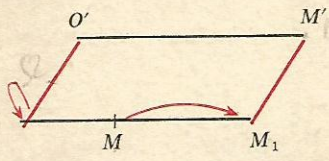
• Montrons que la transformation $t \circ h$ est une homothétie de rapport k.
Soit M un point quelconque du plan.

h	
O	O
M	M_1

t	
O	O'
M_1	M'

$t \circ h$	
O	O'
M	M'

On a : $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM_1}$ donc : $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OM}$





— *Recherche des points invariants par $t \circ h$*

Nous venons de voir que quel que soit le point M, son image M' par $t \circ h$ est telle que :

$$\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Tout point de $\mathcal{F}$, invariant par $t \circ h$ est donc solution de l'équation :

$$M \in \mathcal{F}, \quad \overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{OM}$$

c'est-à-dire de l'équation :

$$M \in \mathcal{F}, \quad \overrightarrow{MO'} - k\overrightarrow{MO} = \vec{0}.$$

Nous avons vu en classe de Seconde que cette équation admet une solution unique lorsque k est différent de 1 : le barycentre des points pondérés $(0', 1)$ et $(0, -k)$. Soit Ω ce barycentre.

h	
M	M_1
O	O
Ω	Ω_1

t	
M_1	M'
O	O'
Ω_1	Ω

$t \circ h$	
M	M'
O	O'
Ω	Ω

On a : $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega_1 M_1} = \overrightarrow{\Omega M'}$ donc : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

— *Nature de la transformation $t \circ h$*

Quel que soit le point M, son image M' par $t \circ h$ est telle que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

$t \circ h$ est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

- Montrer de même que la transformation $h \circ t$ est une homothétie de rapport k.

Théorème

Soit t une translation et h une homothétie de rapport k différent de 1.
Les transformations $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties de rapport k.

Activité

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et h une homothétie de centre O et de rapport k différent de 1.

- Précisons la position du centre Ω de l'homothétie $t \circ h$.

On a :

h	
O	O
Ω	Ω_1

$\overrightarrow{O\Omega_1} = k\overrightarrow{O\Omega}$

t	
O	O'
Ω_1	Ω

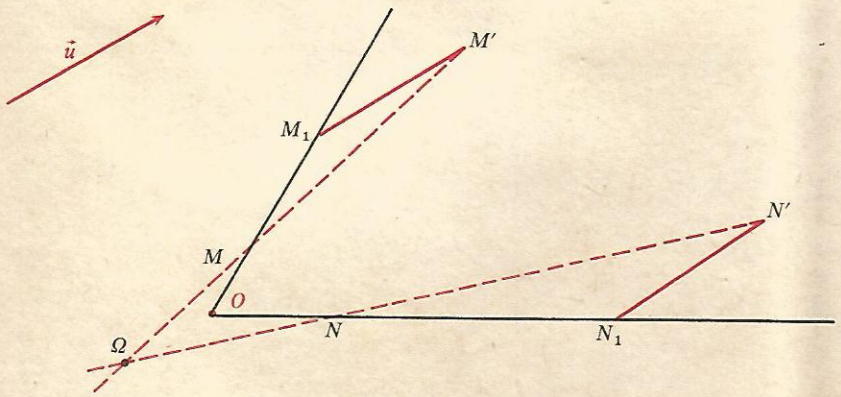
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega} = \vec{u}$

Par suite :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{O\Omega_1} \\ &= \overrightarrow{O\Omega} - k\overrightarrow{O\Omega} \\ &= (1-k)\overrightarrow{O\Omega}\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{1-k}\vec{u}.$$

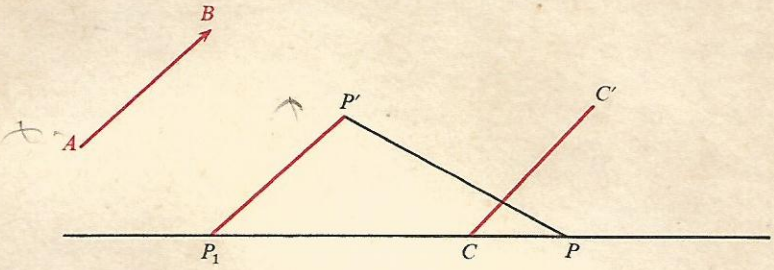


- Montrer de même que le centre ω de l'homothétie $h \circ t$ est tel que :

$$\overrightarrow{O\omega} = \frac{k}{1-k}\vec{u}.$$

Exemple

On donne trois points distincts A, B et C.
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre C et de rapport -3.
On sait que $t \circ h$ est une homothétie de rapport -3.
Précisons le centre Ω de cette homothétie.



Désignons par C' l'image de C par la translation t.
Soit P un point n'appartenant pas à (CC').
Désignons par P_1 l'image de P par h et par P' l'image de P_1 par t.

h	
C	C
P	P_1

t	
C	C'
P_1	P'

$t \circ h$	
C	C'
P	P'

$t \circ h$ est donc l'homothétie qui applique C sur C' et P sur P'; son centre est le point d'intersection Ω des droites (CC') et (PP').

On a successivement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega C'} &= -3\overrightarrow{\Omega C} \\ \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{CC'} &= -3\overrightarrow{\Omega C} \\ \overrightarrow{CC'} &= -4\overrightarrow{\Omega C} \\ \overrightarrow{\Omega C} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \end{aligned} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$$

Exercice

1) On donne trois points distincts O, A et B.
t désignant la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.
Construire les images de O, A et B par $t \circ h$, puis par $h \circ t$.
Construire le centre de chacune de ces homothéties.

2) On donne trois points A, B et C, distincts et alignés.
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et h l'homothétie de centre B qui applique C sur A.
Construire les images de A, B, C et d'un point M quelconque, par $t \circ h$, puis par $h \circ t$.
Construire le centre de chacune de ces homothéties.

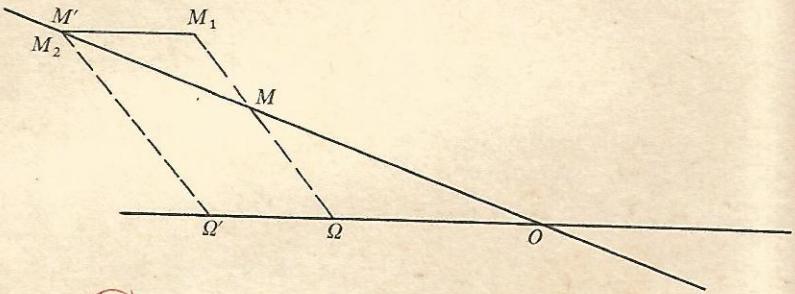
b) **Décomposition d'une homothétie en translation et en homothétie de centre donné**

On donne une homothétie de centre O et de rapport k différent de 1.
Soit Ω un point distinct de O.
Soit h' l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

- Montrer qu'il existe une translation t_1 telle que :

$$h = t_1 \circ h'.$$

Soit M un point quelconque du plan.
Désignons par Ω' et M' les images respectives de Ω et M par h.
Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



h	
O	O
Ω	Ω'
M	M'

h	
Ω	Ω
M	M_1

t_1	
Ω	Ω'
M	M_2

$\overrightarrow{\Omega'M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ — $\overrightarrow{\Omega M_1} = k\overrightarrow{\Omega M}$ — $\overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{\Omega' M_2}$

$\overrightarrow{\Omega M_2} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\overrightarrow{\Omega'M'} = \overrightarrow{\Omega' M_2}$

$M' = M_2$

Donc :

$$h = t_1 \circ h'.$$

- Montrer de même qu'il existe une translation t_2 telle que :

$$h = h' \circ t_2.$$

Théorème

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k, Ω un point distinct de O.
Il existe deux translations t_1 et t_2 telles que :

$$h = t_1 \circ h' \quad \text{et} \quad h = h' \circ t_2$$

où h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Activité

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k, Ω un point distinct de O.

• Exprimons, en fonction de k et $\overrightarrow{\Omega O}$, le vecteur $\vec{u}_1$ de la translation t_1 telle que :

$$h = t_1 \circ h'$$

où h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

On a :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \overrightarrow{\Omega\Omega'} \\ &= \overrightarrow{O\Omega'} - \overrightarrow{O\Omega} \\ &= k\overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{O\Omega} \\ &= (k-1)\overrightarrow{O\Omega} \\ \vec{u}_1 &= (1-k)\overrightarrow{\Omega O}. \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{O\Omega'} = k\overrightarrow{O\Omega}$.

• Montrer de même que le vecteur $\vec{u}_2$ de la translation t_2 telle que :

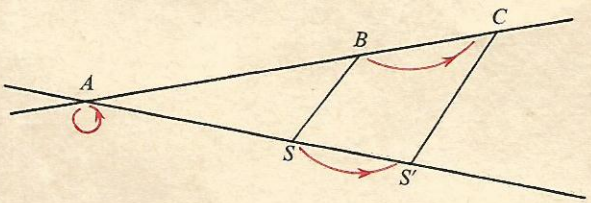
$$h = h' \circ t_2$$

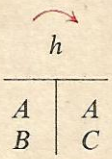
vérifie :

$$\vec{u}_2 = \frac{1-k}{k}\overrightarrow{\Omega O}.$$

Exemple

On donne trois points distincts alignés A, B, C et un point S.
Soit h l'homothétie de centre A qui applique B sur C.
Exprimons cette homothétie comme composée d'une translation t et d'une homothétie de centre S.





Soit h' l'homothétie de centre S et de même rapport que h.
Cherchons une translation t_1 telle que :

$$h = t_1 \circ h'.$$

Désignons par S' l'image de S par h.

h	
S	S
A	A
B	C

h'	
S	S

t_1	
S	$\square$

Pour que : $h = t_1 \circ h'$.

la translation t_1 doit nécessairement donner pour image de S le point S'.

Donc t_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{SS'}$.

- Trouver le vecteur de la translation t_2 telle que $h = h' \circ t_2$.

Exercice

1) Trouver le vecteur $\vec{u}$ de la translation t telle que :

$$h = t \circ h'.$$

h étant l'homothétie de centre A et de rapport -3 et h' l'homothétie de centre B et de même rapport -3 ($A \neq B$).

2) h étant une homothétie de centre O et de rapport k, t une translation de vecteur $\vec{u}$, caractériser la transformation f telle que :

$$h = f \circ t \quad \text{ou} \quad h = t \circ f.$$

3) Composition de deux homothéties

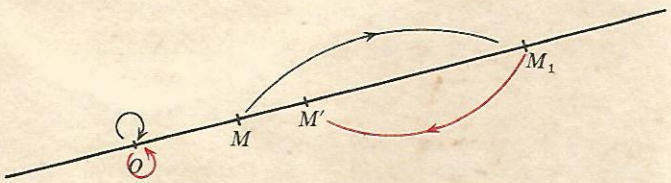
a) Composée de deux homothéties de même centre

On donne un point O et deux nombres réels k_1 et k_2 non nuls et différents de 1. Soit h_1 l'homothétie de centre O et de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport k_2.

- On se propose de trouver la nature de la transformation $h_2 \circ h_1$.

Soit M un point quelconque du plan.

Désignons par M_1 l'image de M par h_1 et par M' l'image de M_1 par h_2.



h_1	
O	O
M	M_1

h_2	
O	O
M_1	M'

$h_2 \circ h_1$	
O	O
M	M'

On a : $\overrightarrow{OM_1} = k_1 \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'} = k_2 \overrightarrow{OM_1}$, donc : $\overrightarrow{OM'} = k_1 k_2 \overrightarrow{OM}$.

– Si $k_1 k_2 = 1$, $h_2 \circ h_1$ est l'application identique,

– Si $k_1 k_2 \neq 1$, $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre O de rapport $k_1 k_2$.

• Montrer que : $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

Théorème

La composée de deux homothéties de même centre O est une homothétie de centre O. Son rapport est égal au produit des rapports des deux homothéties données.

Théorème

L'ensemble des homothéties de centre O, muni de la composition, est un groupe commutatif.

Énoncer les cinq propriétés résumées par ce théorème.

Exercice Caractériser la transformation f, dans chacun des cas suivants :

a) $h\left(0;-\frac{1}{2}\right) \circ h\left(0,\frac{4}{3}\right) = f$

b) $f \circ h\left(0,-\frac{2}{3}\right) = h\left(0,\frac{1}{4}\right)$

c) $h\left(0,\frac{1}{2}\right) \circ f \circ h\left(0,-\frac{3}{4}\right) = h\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

b) **Composée de deux homothéties de centres différents.**

On donne deux points distincts O_1, O_2 et deux nombres réels k_1, k_2 non nuls et différents de 1.
Soit h_1 l'homothétie de centre O_1, de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O_2, de rapport k_2.

• On veut caractériser la transformation $h_2 \circ h_1$.

On sait que h_2 peut s'écrire comme composée d'une homothétie h'_2 de centre O_1, de rapport k_2 et d'une translation t :

$$h_2 = t \circ h'_2.$$

On a donc :

$$h_2 \circ h_1 = t \circ (h'_2 \circ h_1).$$

– Supposons : $k_1 k_2 = 1$.

$h'_2 \circ h_1$ est alors l'application identique et :

$$h_2 \circ h_1 = t.$$

– Supposons : $k_1 k_2 \neq 1$.

$h'_2 \circ h_1$ est alors l'homothétie h de centre O_1, de rapport $k_1 k_2$ et :

$$h_2 \circ h_1 = t \circ h.$$

On sait que $t \circ h$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$, par suite il en est de même de $h_2 \circ h_1$.

• Montrer de même que $h_1 \circ h_2$ est :
une translation, si $k_1 k_2 = 1$
une homothétie de rapport $k_1 k_2$, si $k_1 k_2 \neq 1$.

Théorème

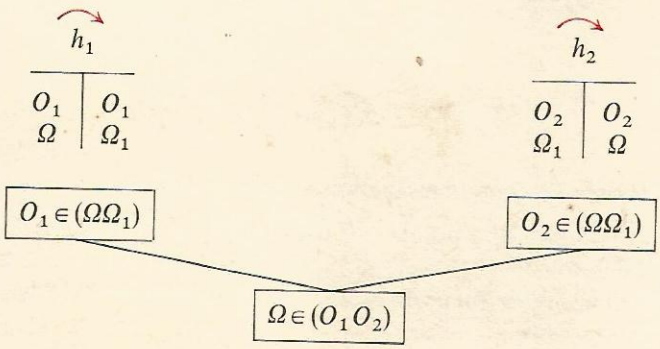
La composée de deux homothéties de centres différents et de rapports respectifs k_1 et k_2 différents de 1 est :

- une translation, si $k_1 k_2 = 1$
- une homothétie de rapport $k_1 k_2$, si $k_1 k_2 \neq 1$.

• *Lien entre les éléments caractéristiques de la transformation $h_2 \circ h_1$ et les données O_1, O_2, k_1 et k_2.*

Lorsque $k_1 k_2$ est différent de 1, le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$, le centre de l'homothétie h_1 et celui de l'homothétie h_2 sont alignés.

En effet, Ω étant le centre de $h_2 \circ h_1$ et Ω_1 l'image de Ω par h_1, on a :

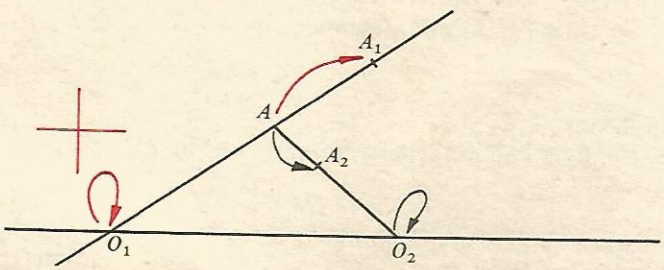


Exemple

On donne les points O_1, O_2, A, distincts et non alignés et les points A_1, A_2 distincts et tels que :

$$A_1 \in (O_1 A) \quad \text{et} \quad A_2 \in (O_2 A).$$

Considérons les homothéties :
h_1, de centre O_1 qui applique A sur A_1
h_2, de centre O_2 qui applique A sur A_2.



On se propose de trouver les éléments caractéristiques de la transformation $h_2 \circ h_1$.
Désignons par O'_1 et A' les images respectives de O_1 et A_1 par h_2.
On a :

h_1	
O_1	O_1
A	A_1

h_2	
O_1	O'_1
A_1	A'
O_2	O_2
A	A_2

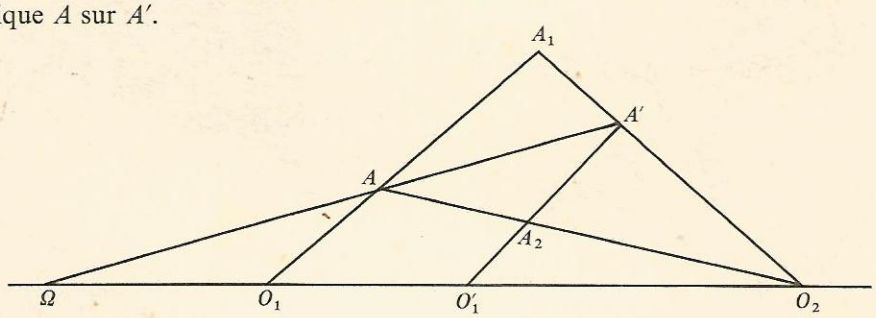
$h_2 \circ h_1$	
O_1	O'_1
A	A'

La transformation $h_2 \circ h_1$ applique :

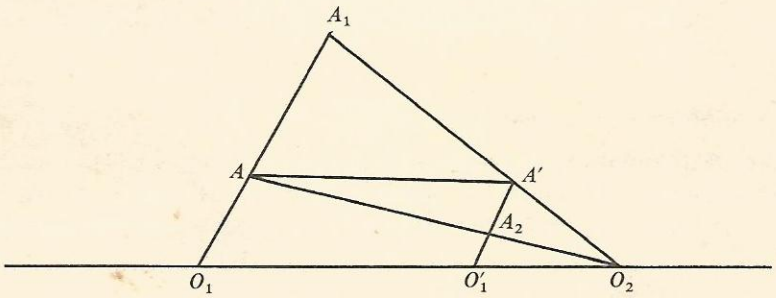
$$O_1 \text{ sur } O'_1 \quad \text{et} \quad A \text{ sur } A'.$$

Considérons alors les droites $(O_1O'_1)$ et (AA').
Les points O_2, O_1 et O'_1 étant alignés (car $O'_1 = h_2(O_1)$) on peut alors considérer les droites (O_1O_2) et (AA').

– Si (O_1O_2) et (AA') sont sécantes en Ω, $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre Ω qui applique A sur A'.



– Si (O_1O_2) et (AA') sont parallèles, $h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.



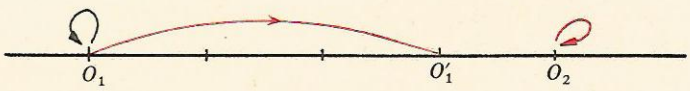
c) Dans les exemples qui suivent, nous verrons comment exprimer les éléments caractéristiques de la transformation $h_2 \circ h_1$ en fonction des données O_1, O_2, k_1 et k_2.

Exemple 1

On donne deux points distincts O_1 et O_2.
Soit h_1 l'homothétie de centre O_1 de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O_2 de rapport $\frac{1}{4}$.

On sait que $h_2 \circ h_1$ est une translation.
Exprimons le vecteur $\vec{u}$ de la translation $h_2 \circ h_1$ en fonction de O_1O_2.

Soit O'_1 l'image de O_1 par h_2.



h_1	
O_1	O_1

h_2	
O_1	O'_1
O_2	O_2

$h_2 \circ h_1$	
O_1	O'_1

$h_2 \circ h_1$ est la translation qui applique O_1 sur O'_1.

On a :

$$\overrightarrow{O_2O'_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{O_2O_1}$$

$$\overrightarrow{O_1O'_1} - \overrightarrow{O_1O_2} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\overrightarrow{O_1O'_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Exemple 2

On donne deux points distincts O_1 et O_2.

Soit h_1 l'homothétie de centre O_1 de rapport $\frac{3}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre O_2 de rapport -2.

On sait que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport -3.

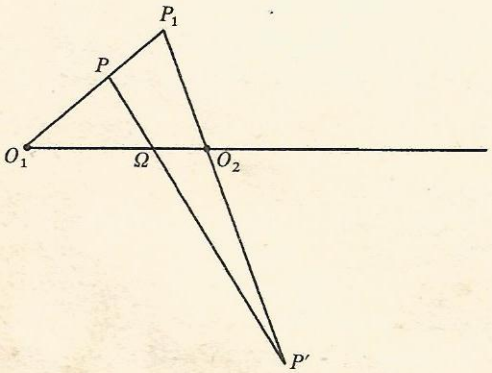
Précisons la position du centre Ω de l'homothétie $h_2 \circ h_1$ en fonction des données O_1, O_2.

— *Construction du point Ω*

Soit P un point du plan n'appartenant pas à (O_1O_2).

Désignons par P_1 l'image de P par h_1 et par P' l'image de P_1 par h_2.

Les points O_1, O_2 et Ω étant alignés, Ω est le point d'intersection des droites (O_1O_2) et (PP').



h_1	
O_1	O_1
P	P_1

h_2	
O_2	O_2
P_1	P'

$h_2 \circ h_1$	
Ω	Ω
P	P'

— *Exprimons* $\overrightarrow{O_1\Omega}$ *en fonction de* $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Désignons par Ω_1 l'image de Ω par h_1 :

h_1	
O_1	O_1
Ω	Ω_1

h_2	
O_2	O_2
Ω_1	Ω

$h_2 \circ h_1$	
Ω	Ω

$$\overrightarrow{O_1\Omega_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O_1\Omega} \quad ; \quad \overrightarrow{O_2\Omega} = -2\overrightarrow{O_2\Omega_1}$$

Exprimons $\overrightarrow{O_1\Omega}$ en fonction de $\overrightarrow{O_1O_2}$.

On a : $\overrightarrow{O_2\Omega} = -2\overrightarrow{O_2\Omega_1}$.

On obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1\Omega} - \overrightarrow{O_1O_2} &= -2\overrightarrow{O_1\Omega_1} - \overrightarrow{O_1O_2} \\
&= -2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{O_1\Omega} - \overrightarrow{O_1O_2}\right) \\
&= -3\overrightarrow{O_1\Omega} + 2\overrightarrow{O_1O_2} \\
4\overrightarrow{O_1\Omega} &= 3\overrightarrow{O_1O_2} \\
\overrightarrow{O_1\Omega} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{O_1O_2}.
\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{O_1\Omega_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{O_1\Omega}$

Exercice

On donne deux points distincts A et B.
Caractériser les transformations suivantes :

$h_{(A;2)} \circ h_{(B;-2)}$

$h_{(A;3)} \circ h_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

$h_{(A;-3)} \circ h_{\left(B;\frac{1}{4}\right)}$.

4) Exemples d'utilisation de la décomposition ou de la composition d'homothéties

a) Image, par une homothétie, d'un représentant d'un angle orienté

On donne $([AB), [AC))$ un représentant de l'angle orienté $(\hat{\alpha})$. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

h	
A	A'
B	B'
C	C'

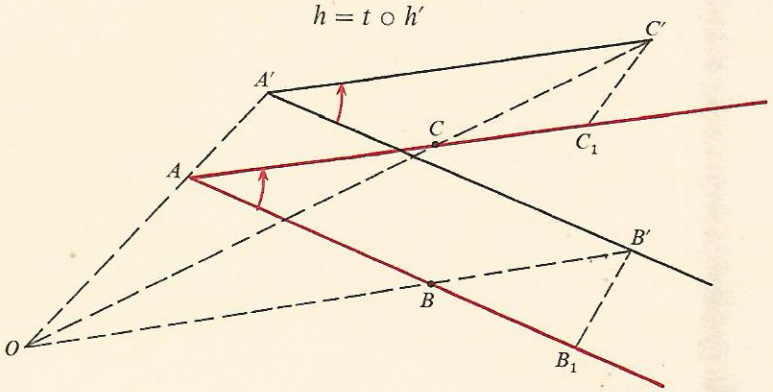
$([A'B'), [A'C'))$ est l'image par h du représentant $([AB), [AC))$ de l'angle $(\hat{\alpha})$; c'est un représentant d'un angle orienté qu'on notera $(\hat{\alpha}')$.

On se propose de comparer $(\hat{\alpha})$ et $(\hat{\alpha}')$.

• *Supposons* $k > 0$.

Soit h' l'homothétie de centre A, de rapport k et t la translation telle que :

$$h = t \circ h'$$



h'

A	A
B	B_1
C	C_1

on a : $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(AB_1, AC_1)}$

car : $[AB) = [AB_1)$ et $[AC) = [AC_1)$.

t

A	A'
B_1	B'
C_1	C'

on a : $\widehat{(AB_1, AC_1)} = \widehat{(A'B', A'C')}$

car t est un déplacement.

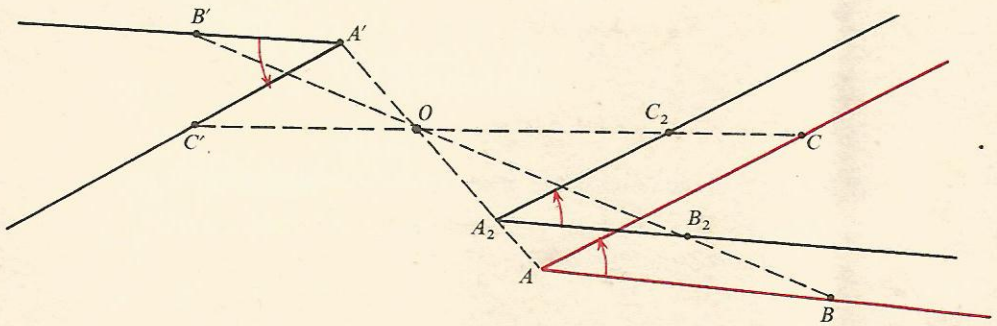
donc : $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(A'B', A'C')}$.

• *Supposons* $k < 0$

Soit s la symétrie centrale de centre O :

$$s \circ h = h''$$

h'' étant l'homothétie de centre O et de rapport strictement positif $(-k)$.



h

A	A'
B	B'
C	C'

s

A'	A_2
B'	B_2
C'	C_2

h''

A	A_2
B	B_2
C	C_2

D'après ce qui précède :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(A_2B_2, A_2C_2)}$$

s étant un déplacement :

$$\widehat{(A'B', A'C')} = \widehat{(A_2B_2, A_2C_2)}.$$

Par suite :

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(A'B', A'C')}.$$

Théorème

L'image d'un représentant d'un angle orienté par une homothétie est un représentant du même angle orienté.

On dit aussi que :
Toute homothétie conserve l'orientation du plan.

b) **Utiliser la composition d'homothéties pour démontrer une propriété**

Exemple 1

On donne trois cercles $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et de rayons respectifs R_1, R_2, R_3.
On suppose O_1, O_2, O_3 distincts et non alignés et R_1, R_2, R_3 distincts.
Soit Ω_1 et Ω'_1 les centres respectifs des homothéties h_1 et h'_1 de rapports respectifs $\frac{R_3}{R_2}$ et $-\frac{R_3}{R_2}$ qui appliquent $(\mathcal{C}_2)$ sur $(\mathcal{C}_3)$.
Soit Ω_2 et Ω'_2 les centres respectifs des homothéties h_2 et h'_2 de rapports respectifs $\frac{R_3}{R_1}$ et $-\frac{R_3}{R_1}$ qui appliquent $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_3)$.
Soit Ω_3 et Ω'_3 les centres respectifs des homothéties h_3 et h'_3 de rapports respectifs $\frac{R_2}{R_1}$ et $-\frac{R_2}{R_1}$ qui appliquent $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

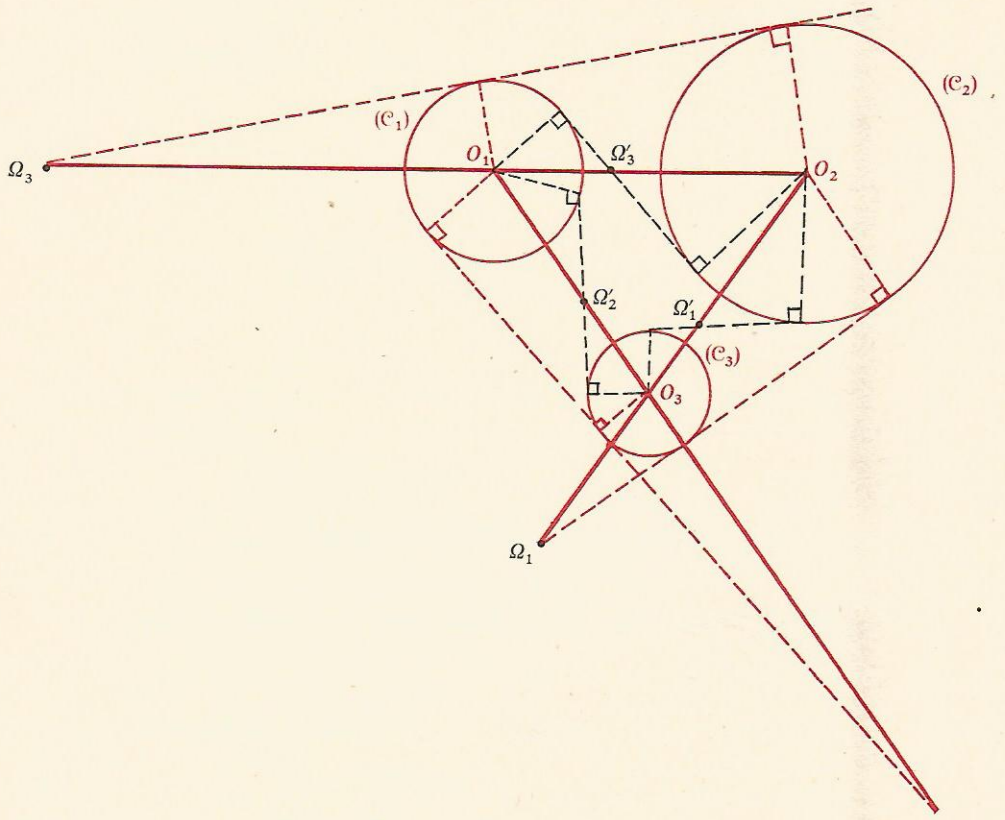
• Montrons que les points Ω_1,Ω_2, Ω_3 sont alignés.

On a :

$$h_1(\mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}_3); \quad h'_1(\mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}_3)$$
$$h_2(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}_3); \quad h'_2(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}_3)$$
$$h_3(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}_2); \quad h'_3(\mathcal{C}_1) = (\mathcal{C}_2).$$

Par suite : $h_1 \circ h_3(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_3$.

$h_1 \circ h_3$ est l'homothétie qui applique O_1 sur O_3 et ayant pour rapport le produit des rapports $\frac{R_3}{R_2}$ et $\frac{R_2}{R_1}$.



$h_1 \circ h_3$ est donc l'homothétie qui applique O_1 sur O_3 et ayant pour rapport $\dfrac{R_3}{R_1}$.

Par suite : $$h_1 \circ h_3 = h_2.$$

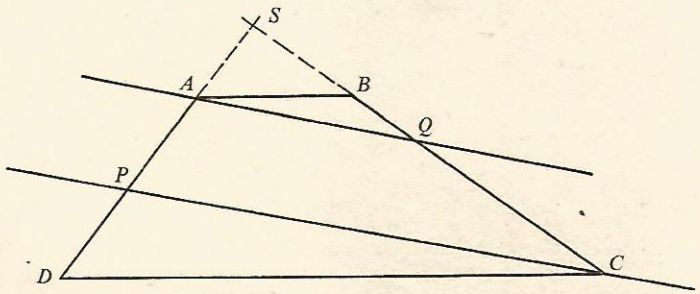
Les centres Ω_1, Ω_3, Ω_2 respectifs des homothéties h_1, h_3, $h_1 \circ h_3$ sont alignés.

• Montrer de même que les points Ω_1, Ω'_2, Ω'_3 sont alignés.

Dans l'ensemble $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3\}$,
trouver tous les sous-ensembles formés de trois points alignés.

Exemple 2

On donne un trapèze $ABCD$ tel que (AB) soit parallèle à (CD).
Soit P un point de (AD). La droite parallèle à (CP) qui passe par A coupe (BC) en Q.



• Montrons que les droites (BP) et (DQ) sont parallèles.

Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, considérons l'homothétie h_1 qui applique D sur A et C sur B.
De même soit h_2 l'homothétie qui applique A sur P et Q sur C.

h_1	
D	A
C	B

h_2	
A	P
Q	C

h_1 et h_2 sont des homothéties de même centre S, point d'intersection des droites (AD) et (BC).

On a :

$h_2 \circ h_1$	
D	P

$h_1 \circ h_2$	
Q	B

Le groupe des homothéties de même centre étant commutatif, on a :

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 = h$$

h	
D	P
Q	B

On en déduit alors que les droites (DQ) et (PB) sont parallèles.

3 Similitudes

1) Définition — Propriétés

a) Exemple introductif

On donne un point O et une droite (Δ).
Soit h, l'homothétie de centre O, de rapport -2 et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

• On se propose d'étudier la transformation $s \circ h$.

Soit M et N deux points quelconques du plan.
On a :

h	
M	M_1
N	N_1

$M_1N_1 = 2MN$

s	
M_1	M'
N_1	N'

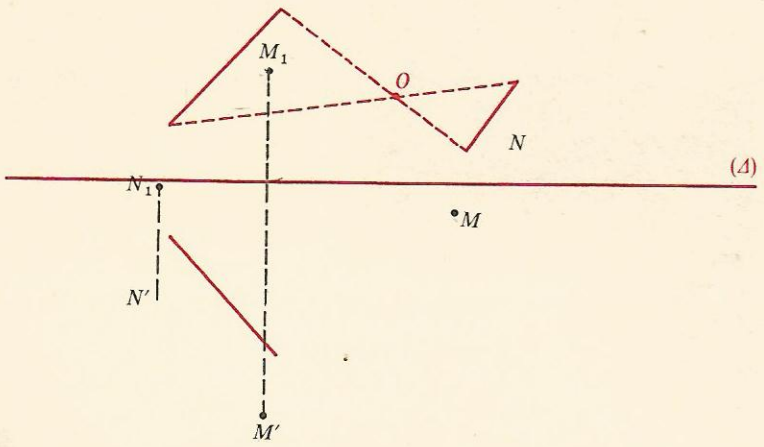
$M'N' = M_1N_1$

Par suite :

$s \circ h$

M	M'
N	N'

$M'N' = 2MN.$



La transformation $s \circ h$ « multiplie par 2 la distance de deux points quelconques du plan ».

On dit que $s \circ h$ est une *similitude* de rapport 2.

• Montrer de même que la transformation $h \circ s$ est une similitude de rapport 2. Construire les images de O respectivement par $s \circ h$ et $h \circ s$. Les transformations $s \circ h$ et $h \circ s$ sont-elles égales?

b) **Définition**

Soit k un nombre réel strictement positif.
On appelle similitude du plan, de rapport k, toute bijection du plan sur lui-même telle que, étant donné deux points quelconques M et N, d'images respectives M' et N', on ait :

$$d(M', N') = k\,d(M, N).$$

Exemples

Toute isométrie est une similitude de rapport 1.

• Soit h une homothétie de rapport k.
Soit M et N deux points quelconques d'images respectives M' et N' par h.

On sait que :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

donc :

$$M'N' = |k|\, MN.$$

Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

• Montrer que :

Toute composée d'isométrie et d'homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

c) Propriété fondamentale

On sait que, h étant une homothétie de rapport k et i une isométrie, $h \circ i$ et $i \circ h$ sont des similitudes de rapport $|k|$.
Réciproquement, on donne un nombre réel k strictement positif et soit S une similitude de rapport k.
Choisissons un point O du plan et soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

L'application réciproque de h est l'homothétie h^{-1} de même centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

• Soit M et N deux points quelconques du plan.

h^{-1}	
M	M_1
N	N_1

S	
M_1	M'
N_1	N'

$S \circ h^{-1}$	
M	M'
N	N'

On a : $M_1N_1 = \frac{1}{k}MN$ $\quad M'N' = kM_1N_1$ $\quad$ donc : $M'N' = MN$

$S \circ h^{-1}$ est donc une isométrie. Désignons-la par i :

$$S \circ h^{-1} = i.$$

Par suite :

$$S = i \circ h.$$

• Montrer de même que la transformation $h^{-1} \circ S$ est une isométrie i' telle que :

$$S = h \circ i'.$$

Théorème

Soit S une similitude de rapport k.
Étant donné une homothétie h de rapport k, il existe deux isométries i et i' telles que :

$$S = i \circ h \quad \text{et} \quad S = h \circ i'.$$

Remarque

Toute similitude est une transformation du plan.

Exercice

On donne un point O.

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

Choisissons un point O_1 du plan et soit h l'homothétie de centre O_1, de rapport 2.

Considérons la similitude S telle que :

$$S = r \circ h.$$

Choisissons un point O_2 distincts de O_1 et soit h' l'homothétie de centre O_2, de rapport 2.

Trouver l'isométrie i telle que :

$$S = i \circ h'.$$

i est-elle égale à r?

On remarquera que, dans la décomposition d'une similitude, l'isométrie dépend du choix du centre de l'homothétie.

d) Autres propriétés

Les autres propriétés de la similitude sont des conséquences de la propriété fondamentale.

Toute similitude de rapport k :

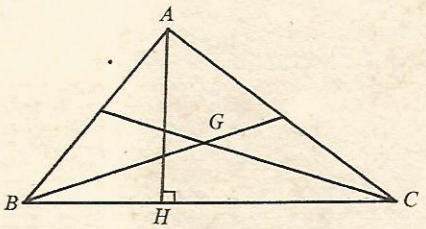
Conserve
- l'alignement des points
- le parallélisme des droites
- l'orthogonalité des droites
- la mesure des angles
- le barycentre des points pondérés.

Multiplie
- les longueurs par le rapport k
- les mesures d'aires par le carré du rapport k.

Exercices

1) On donne deux points O et Ω. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et r la rotation de centre Ω et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

Considérons le triangle ABC.



a) Construire les points A', B', C' images respectives de A, B, C par la similitude $h \circ r$.

Comparer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Donner un programme de construction de G', image de G par $h \circ r$.

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Donner un programme de construction de la droite (D'), image de (AH) par $h \circ r$.

2) On donne une droite (Δ) et un point O n'appartenant pas à (Δ). Soit h l'homothétie de centre O, de rapport -2 et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
Considérer le triangle ABC et reprendre les questions $a)$, $b)$ et $c)$ de l'exercice 1.

2) Similitudes directes, similitudes indirectes

a) Définition

On sait qu'une similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.
Puisqu'une homothétie conserve l'orientation du plan on en déduit que :

– La composée d'une homothétie et d'un déplacement conserve l'orientation du plan.
Pour cette raison, toute similitude qui est la composée d'une homothétie et d'un déplacement est appelée *similitude directe.*

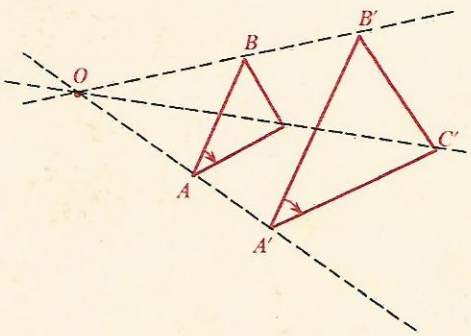
– La composée d'une homothétie et d'un retournement ne conserve pas l'orientation du plan.
Pour cette raison, toute similitude qui est la composée d'une homothétie et d'un retournement est appelée *similitude indirecte.*

Exemple

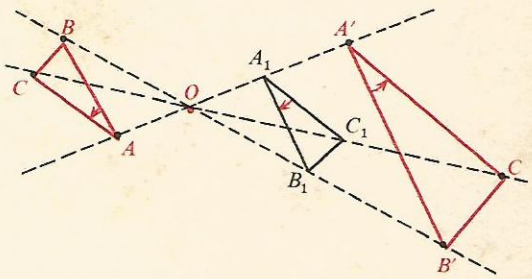
Toute homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$.

En effet, soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

• Si $k > 0$; $h = h \circ \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.



• Si $k < 0$; $h = h' \circ s$
h' étant l'homothétie de centre O de rapport strictement positif $-k$ et s la symétrie centrale de centre O.



b) Décomposition d'une similitude directe et d'une similitude indirecte

• *Une similitude directe* S de rapport k est :

– soit la composée d'une homothétie de rapport k et d'une rotation;
– soit la composée d'une homothétie h de rapport k et d'une translation t.

Dans ce second cas on a :

$$S = t \circ h$$

Par suite : $S = h'$

où h' est une homothétie de même rapport k,

ou encore : $S = \mathrm{id}_{\mathscr{P}} \circ h'$.

Puisque $\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$ est une rotation (de centre quelconque, d'angle orienté nul), on en conclut que :

> Toute similitude directe de rapport k est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k.

• *Une similitude indirecte* S de rapport k est :

– soit la composée d'une homothétie de rapport k et d'une symétrie orthogonale;
– soit la composée d'une homothétie h de rapport k et d'une symétrie glissée $s \circ t$.

Dans ce second cas on a :

$$S = (s \circ t) \circ h$$

Par suite : $S = s \circ (t \circ h)$

$$S = s \circ h'$$

où h' est une homothétie de même rapport k.

> Toute similitude indirecte de rapport k est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie de rapport k.

c) Images de figures simples

Exemple 1

On donne deux points distincts O et Ω.

h étant l'homothétie de centre O, de rapport $-\frac{3}{2}$ et r la rotation de centre Ω, d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$, construisons l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la similitude directe $r \circ h$.

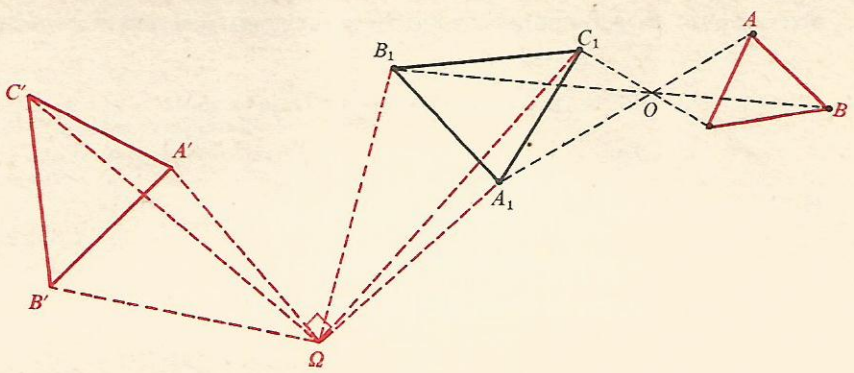
h	
A	A_1
B	B_1
C	C_1

r	
A_1	A'
B_1	B'
C_1	C'

$r \circ h$	
A	A'
B	B'
C	C'

– Comparer le sens des triplets (A, B, C) et (A', B', C').
– Soit M un point du plan.

Construire l'image M' de M par la similitude $r \circ h$.



Exemple 2

On donne un point O et une droite (Δ).

h étant l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{2}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ), construisons l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la similitude indirecte $h \circ s$.

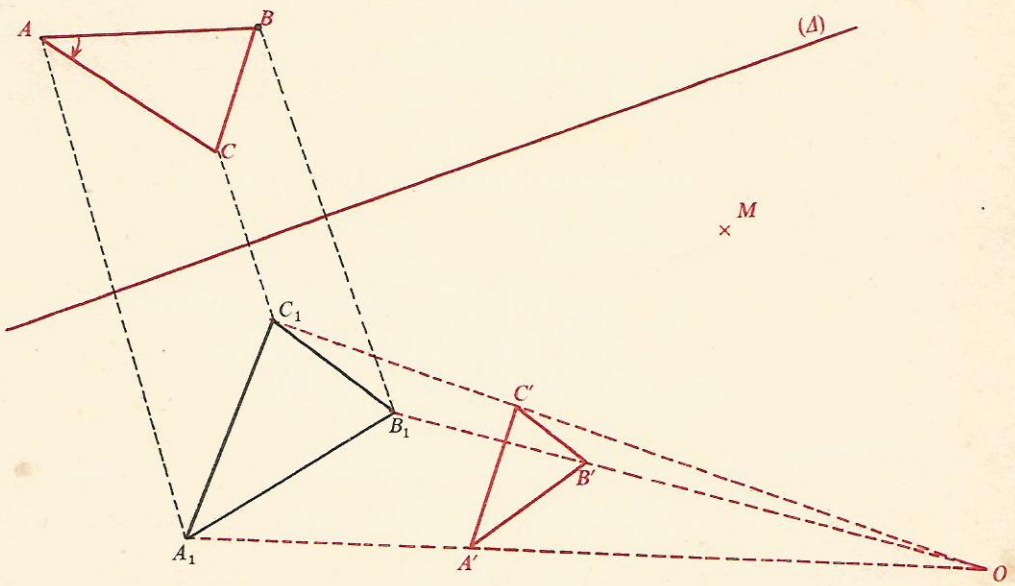
s	
A	A_1
B	B_1
C	C_1

h	
A_1	A'
B_1	B'
C_1	C'

$h \circ s$	
A	A'
B	B'
C	C'

– Comparer le sens des triplets (A, B, C) et (A', B', C').
– Soit M un point du plan.

Construire l'image M' de M par la similitude $h \circ s$.



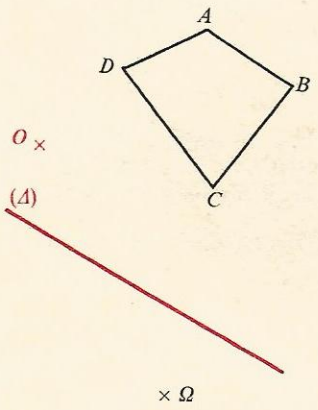
Exercices

On donne une droite (Δ) et deux points distincts O et Ω n'appartenant pas à (Δ).

Soit h l'homothétie de centre O de rapport $-\frac{1}{2}$, r la rotation de centre Ω d'angle orienté 60°, et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
Considérons le quadrilatère $ABCD$.
Construire l'image du quadrilatère $ABCD$,

a) par la similitude directe $h \circ r$

b) par la similitude indirecte $s \circ h$.



3) Figures semblables

a) **Définition**

On a vu en activité en classe de Seconde que :

> Deux parties du plan E et F sont dites *semblables* s'il existe une homothétie qui transforme l'une en une figure isométrique à l'autre.

C'est-à-dire :

Deux parties du plan E et F sont dites semblables s'il existe une homothétie h telle que :

$$F \text{ iso } h(E)$$

or :

$$F \text{ iso } h(E) \iff \left[\begin{array}{c}\text{il existe une isométrie } i \text{ telle que} \\ F = i \circ h(E)\end{array}\right].$$

Puisque $i \circ h$ est une similitude, on a :

Définition

> Deux parties du plan E et F sont dites *semblables* s'il existe une similitude qui transforme l'une en l'autre.

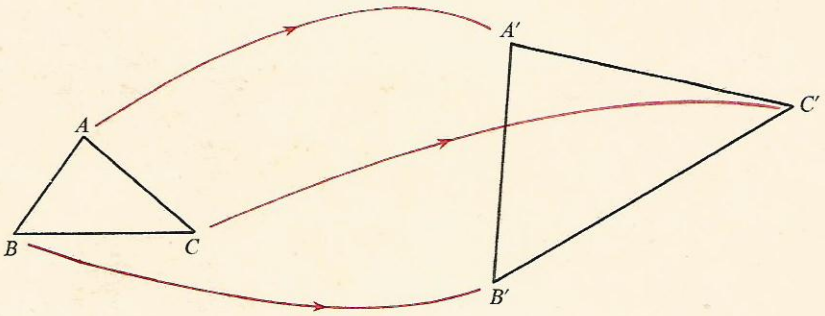
Exercice Montrer que deux pentagones réguliers sont semblables.

b) **Les triangles semblables**

Soit S une similitude de rapport k.
Soit A, B, C trois points distincts non alignés d'images respectives A', B', C' par la similitude S.
On a :

S	
A	A'
B	B'
C	C'

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k; \qquad \text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{A}' \quad \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{B}'.$$



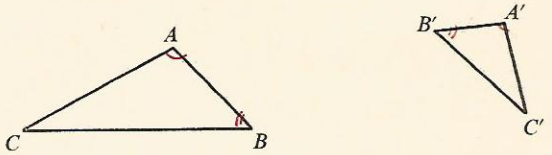
Réciproquement, chacun des trois critères suivants permet de reconnaître deux triangles semblables.

Premier critère

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :

$$\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{A}' \quad \text{et} \quad \text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{B}',$$

ils sont semblables.



Exercice

1) Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Montrer que les triangles ABC et HBA sont semblables.

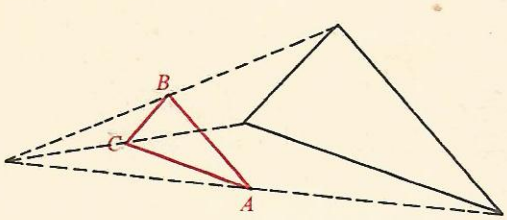
2) Montrer que deux triangles équilatéraux sont semblables.

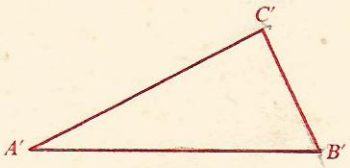
Deuxième critère

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

ils sont semblables.





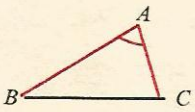
Exercice Montrer que deux triangles rectangles isocèles sont semblables.

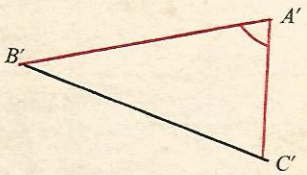
Troisième critère

Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que :

$$\text{mes } \hat{A} = \text{mes } \hat{A}' \quad \text{et} \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$$

Ils sont semblables.





Exercice On donne un triangle ABC.
Soit D un point de (AB) et E un point de (AC) tels que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.
Montrer que les triangles ABC et ADE sont semblables.

c) Détermination d'une similitude

Exemple introductif

On donne deux triangles semblables ABC et $A'B'C'$ tels que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = 2.$$

On veut trouver une similitude S qui applique :

A sur A'; B sur B' et C sur C'.

• soit h l'homothétie de centre A, de rapport 2 tel que :

h

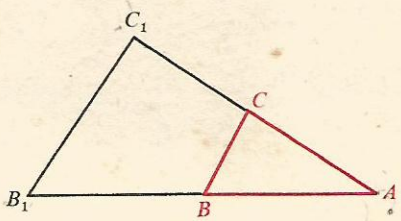
A	A
B	B_1
C	C_1

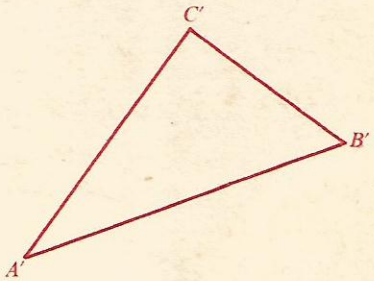
Les triangles AB_1C_1 et $A'B'C'$ sont isométriques et :

$$AB_1 = A'B', \qquad B_1C_1 = B'C', \qquad C_1A = C'A'.$$

Il existe donc une isométrie i qui applique :

$$A \text{ sur } A'; \qquad B_1 \text{ sur } B' \quad \text{et} \quad C_1 \text{ sur } C'.$$





• Dans le cas de la figure ci-dessus :

– Caractériser l'isométrie i.

– Soit O un point du plan distinct de A. Désignons par h' l'homothétie de centre O de rapport 2.
Trouver l'isométrie i' telle que $i' \circ h'$ applique :

$$A \text{ sur } A', \qquad B \text{ sur } B' \quad \text{et} \quad C \text{ sur } C'.$$

– Soit M un point quelconque du plan. Construire l'image M' de M par $i \circ h$ et l'image M'' de M par $i' \circ h'$. Que constate-t-on?

On démontre et nous admettrons que :

> Une similitude est déterminée par la donnée de 3 points distincts non alignés et leurs images.

Exercice

Soit $ABCD$ un carré de centre O.

– Montrer que les triangles OAB et DAC sont rectangles isocèles donc semblables.

– Caractériser la similitude S qui applique :

$$O \text{ sur } D, \qquad A \text{ sur } A \quad \text{et} \quad B \text{ sur } C.$$

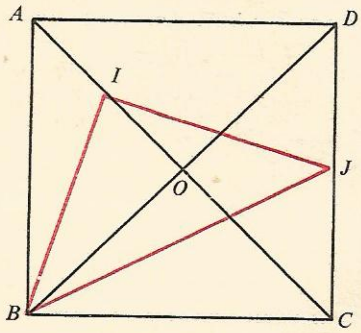
– Caractériser la similitude S' qui applique O sur D, A sur C et B sur A.

4) Exemples d'utilisation des similitudes dans des activités géométriques

a) Utiliser les similitudes pour démontrer une propriété

Exemple

On donne un carré $ABCD$ de centre O.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AO]$ et $[DC]$. Montrons que BIJ est un triangle rectangle isocèle.



Les propriétés élémentaires d'un carré nous donnent :

$$BD = BA\sqrt{2}$$
$$BC = BO\sqrt{2}$$
$$\text{MES } (\widehat{BA, BD}) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\text{MES } (\widehat{BO, BC}) = -\frac{\pi}{4}.$$

Soit h l'homothétie de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et r la rotation de centre B, d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

On a :

	$r \circ h$
B	B
A	D
O	C
I	J

Justifier.

Par suite :

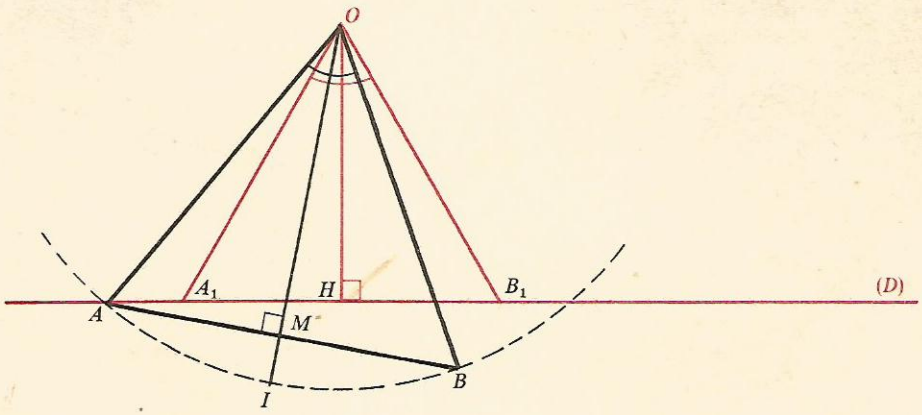
$$BJ = BI\sqrt{2}$$
$$\text{MES } (\widehat{BI, BJ}) = -\frac{\pi}{4}.$$

Conclusion
BIJ est un triangle isocèle et rectangle en I.

b) **Utiliser les similitudes pour rechercher un ensemble de points**

Exemple

On donne une droite (D) et un point O n'appartenant pas à (D).
Soit A un point quelconque de (D).
Construire le triangle équilatéral OAB tel que le triplet (O, A, B) soit de sens direct.
Cherchons l'ensemble décrit par le milieu M de $[AB]$, lorsque le point A décrit la droite (D).



Soit I le point de la demi-droite $[OM)$ tel que :

$$OI = OA.$$

Considérons :

– la rotation r de centre O qui applique A sur I
– l'homothétie h de centre O qui applique I sur M.

Soit S la similitude $h \circ r$.

r	
O	O
A	I

h	
O	O
I	M

$h \circ r$	
O	O
A	M

M est l'image de A par la similitude S. Par conséquent, lorsque le point A décrit la droite (D), le point M image de A par S, décrit la droite (D') image de (D) par S.
Notons que (D') passe par le point H, projeté orthogonal de O sur (D).
Il suffit en effet de constater qu'il existe deux points A_1 et B_1 sur (D) tels qu'on ait :

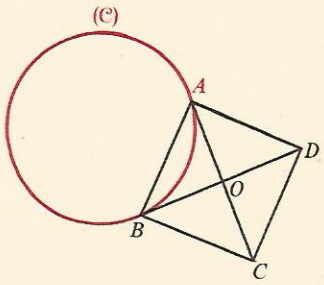
H milieu de $[A_1B_1]$
(O, A_1, B_1) de sens direct
OA_1B_1 équilatéral.

• Construire la droite (D').

• Trouver la mesure principale de l'angle orienté de la rotation r et le rapport de l'homothétie h.

Exercice

On donne un cercle (C) et un point A sur ce cercle.
Soit B un point quelconque de (C) $- \{A\}$.
Construire le carré $ABCD$ tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.
Quel est l'ensemble décrit par le centre O du carré $ABCD$, lorsque le point B décrit (C) $- \{A\}$.



c) Utiliser les similitudes pour construire une figure

Exemple

On donne le cercle (C) de centre O et la droite (Δ).
Construisons un triangle ABC inscrit dans (C) dont les mesures des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ sont proportionnels à 2, 3, 4 et dont l'orthocentre appartient à la droite (Δ).

Pour réaliser cette onstruction, nous utiliserons le programme dont les étapes sont les suivantes :

1) Construire le triangle $A_1B_1C_1$ tel que :

$$A_1B_1 = 2; \qquad B_1C_1 = 3; \qquad C_1A_1 = 4.$$

2) Construire le cercle (C_1) de centre O_1, circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

3) Choisir un point A_2 du cercle (C) tel que (O_1A_1) et (OA_2) soient parallèles et construire l'image $A_2B_2C_2$ de $A_1B_1C_1$ par l'homothétie qui applique :

$$O_1 \text{ sur } O \quad \text{et} \quad A_1 \text{ sur } A_2.$$

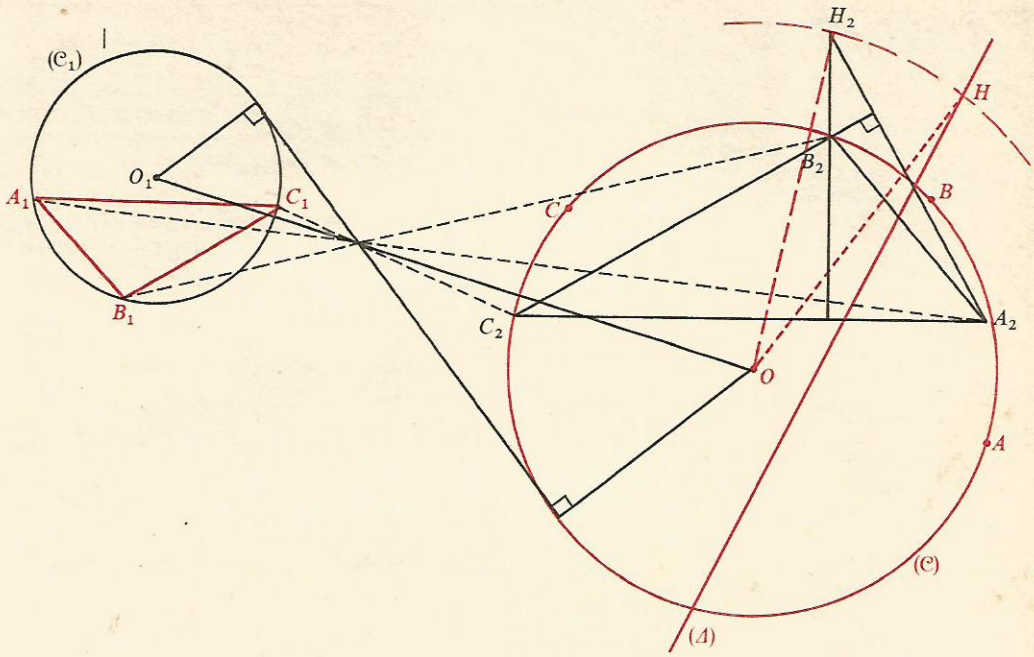
4) Construire l'orthocentre H_2 du triangle $A_2B_2C_2$.

5) Construire l'image ABC de $A_2B_2C_2$ par la rotation de centre O et qui applique H_2 sur H, H étant le point de (Δ) tel que :

$$OH_2 = OH.$$

- Donner les programmes de construction de chacune des 5 étapes ci-dessus.
- Vérifier que le triangle ABC répond à la question.
- Caractériser la transformation du plan qui applique :

$$A_1B_1C_1 \quad \text{sur} \quad ABC.$$



Remarque

— Une *homothétie* permet de ramener les dimensions d'une figure à des *dimensions données.*

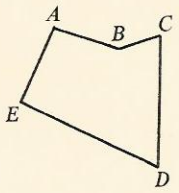
— Une *isométrie* permet de situer une figure à un *emplacement donné.*

Exercice

On donne un polygone $ABCDE$ et un segment $[IR]$ (voir figure ci-dessous).

— Construire le polygone $IJKRS$ semblable à $ABCDE$ et tel que les triplets (A, B, C) et (I, J, K) soient de sens contraires.

— Caractériser la similitude qui applique $ABCDE$ sur $IJKRS$.





Exercices

1 (1). Soit *I* et *J* les milieux respectifs des côtés [*AB*] et [*AC*] du triangle équilatéral *ABC*.
Trouver le centre et l'angle orienté de chacune des rotations qui appliquent :

a) [*AB*] sur [*AC*]

b) [*IB*] sur [*JA*].

2 (1). Soit *I*, *J*, *K*, *H* les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*] du carré *ABCD*.
Trouver le centre et l'angle orienté de chacune des rotations qui appliquent :

a) [*AI*] sur [*CJ*]

b) [*IB*] sur [*KC*]

c) [*AI*] sur [*CK*]

d) [*BI*] sur [*DH*]

e) [*AI*] sur [*BJ*]

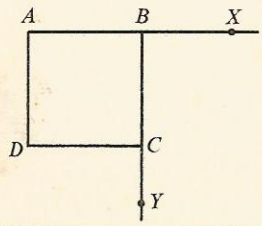
f) [*IC*] sur [*HB*].

3 (1). On donne deux points distincts *A* et *B*.
Construire le centre de la rotation qui applique *A* sur *B* et dont l'angle orienté est :

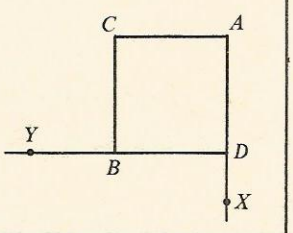
a) $\frac{2\pi}{3}$ *b*) $-\frac{\pi}{2}$

c) 30° *d*) $-120°$.

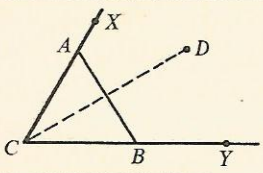
4 (1). Dans chacun des cas suivants, construire le centre de la rotation qui applique la demi-droite [*AX*) sur la demi-droite [*BY*). Préciser la mesure principale de son angle orienté, puis construire les images des points *C* et *D* par cette rotation.

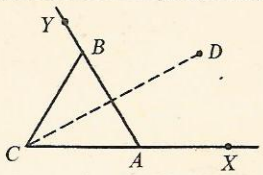


ABCD est un carré



ACBD est un carré



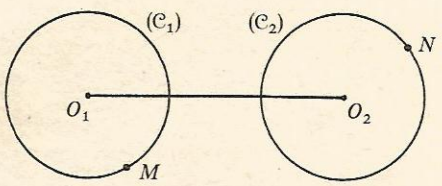


ABC est un triangle équilatéral.
D est le symétrique de *C* par rapport à (*AB*).

5 (1). On considère un carré *ABCD* de centre *E* tel que :
la mesure du côté du carré est égale à $\sqrt{2}$;
MES $(\widehat{AB, AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit *F* un point de [*BC*] tel que $BF = 1$.
Trouver le centre et l'angle orienté de la rotation qui applique *A* sur *B* et *E* sur *F*.

6 (1). On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de même rayon et de centres distincts respectifs O_1 et O_2. Soit *M* un point de $(\mathcal{C}_1)$ et *N* un point de $(\mathcal{C}_2)$ (voir figure). Trouver le centre et l'angle orienté de la rotation qui applique *M* sur *N* et $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.



7 (1). On donne un triangle ABC tel que $AB < AC$.
Soit M un point quelconque de $[AB]$ et soit N le point de $[AC]$ tel que $BM = CN$.
Montrer que, lorsque le point M décrit le segment $[AB]$, la médiatrice de $[MN]$ passe par un même point Ω.
Préciser ce point.

8 (1). On donne deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de même rayon et de centres distincts respectifs O et O'.
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C})$ et soit N le point de $(\mathcal{C}')$ tel que $\text{MES}\ (\widehat{OM, O'N}) = \frac{\pi}{2}$.
Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$, la médiatrice de $[MN]$ passe par un même point Ω.
Préciser ce point.

9 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère le point $A(-1, 0)$ et la droite (Δ) d'équation $y = 1$. Soit M un point de (OJ). La droite passant par M et parallèle à (IJ) coupe (Δ) en N.
Montrer que (MI) et (NA) sont perpendiculaires.

10 (1). On considère un triangle isocèle ABC, rectangle en A. Soit P un point de $[BC]$.
On désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de P sur (AB) et (AC).
Montrer que, lorsque le point P décrit le segment $[BC]$, les points M et N sont équidistants du milieu D de $[BC]$.

11 (1). 1) On considère un carré $MNPQ$, une droite (Δ) passant par Q et une droite (Δ') passant par M et coupant (Δ) en A.
La droite (Δ'') parallèle à (Δ), passant par N, coupe (Δ') en B; la droite (Δ''') parallèle à (Δ'), passant par P, coupe (Δ'') et (Δ), respectivement en C et D.

a) Montrer que le parallélogramme $ABCD$ et le carré $MNPQ$ ont le même centre de symétrie O.

b) Construire l'image de la droite (AB) par la rotation de centre O et d'angle orienté $(\widehat{MN, MQ})$.

2) Soit $EFGH$ un parallélogramme; construire un carré $RSTU$ tel que :

$$R \in (EF),\quad S \in (FG),\quad T \in (GH) \quad \text{et} \quad U \in (HE).$$

12 (1). On considère deux points A et O tels que $OA = 6$.
Construire un triangle équilatéral ABC tel que $OB = 5$ et $OC = 2$. Combien de possibilités a-t-on pour construire un tel triangle?

13 (1). On considère le triangle ABC, rectangle en A.
Construire une droite (Δ), parallèle à (BC), qui coupe (AB) et (AC) respectivement en deux points M et N tels que $BM = AN$.

14 (1). Soit A et A' deux points donnés. On considère toutes les rotations qui donnent pour image de A, le point A'. Quel est l'ensemble des images d'un point B donné, par chacune de ces rotations?

15 (1). On donne un cercle $(\mathcal{C})$ et un point P n'appartenant à $(\mathcal{C})$.
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C})$.

1) Donner un programme de construction du triangle PMN tel que :

$$PN = PM \quad \text{et} \quad \text{MES}\ (\widehat{NP, NM}) = \frac{\pi}{6}.$$

2) Trouver l'ensemble décrit par le point N lorsque le point M décrit $(\mathcal{C})$.

16 (1). On donne une droite (Δ) et un point A n'appartenant à (Δ). Soit B un point quelconque de (Δ). Construire le triangle équilatéral ABC tel que l'angle orienté $(\widehat{AB, AC})$ ait pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$. Quel est l'ensemble décrit par le point C lorsque le point B décrit (Δ)?

17 (1). On donne un point C et un angle orienté $(\hat{x})$, de mesure principale $\frac{\pi}{2}$. On désigne par r la rotation de centre C et d'angle orienté $(\hat{x})$.

1) Trouver l'ensemble des points M du plan dont l'image M' par r vérifie $MM' = k$, k étant un nombre réel strictement positif donné.

2) Soit (Δ) une droite ne passant pas par C.
Trouver l'ensemble des points M du plan dont l'image M' par r est telle que

$$(MM') /\!/ (\Delta).$$

18 (1). Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Par un point M de la droite (BC), on mène la droite parallèle à (AB) qui coupe (AC) en D et la droite parallèle à (AC) qui coupe (AB) en E.

1) Montrer qu'il existe une rotation et une seule qui applique B sur A et E sur D.

2) Quelle est l'image de A par cette rotation?

3) Montrer que la médiatrice de $[ED]$ passe par le même point lorsque M décrit la droite (BC).

19 (1). On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et deux droites (D) et (D') perpendiculaire en O.
Soit M et M' deux points du cercle $(\mathcal{C})$ tels que :

$$\text{MES}\ (\widehat{OM, OM'}) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit H le point d'intersection de la droite parallèle à (D) passant par M et de la droite parallèle à (D') en M'.
La droite (HM) coupe (D') passant par K.

1) *a*) Trouver l'image K' de K par la rotation de centre O qui applique M sur M'.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $OKHK'$?

2) Quel est l'ensemble décrit par le point H lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$?

20 (1). On donne un triangle équilatéral ABC.

Soit r_1, r_2, r_3 les rotations d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ et ayant respectivement pour centre les points A, B et C.

— Caractériser les transformations :

$$r_3 \circ r_2 \circ r_1 ; \quad r_3 \circ r_2^{-1} \circ r_1 ; \quad r_3 \circ r_2 \circ r_1^{-1}.$$

21 (1). On donne un triangle ABC.

Soit r_1 et r_2 les rotations d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ et ayant respectivement pour centre les points B et C.
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

— Caractériser la transformation :

$$r_2 \circ t \circ r_1.$$

22 (1). ABC étant un triangle, la transformation :

$$s_{(BC)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(AB)},$$

peut-elle être une symétrie orthogonale?

23 (1). On donne un carré $ABCD$.

Soit r_1, r_2, r_3, r_4 les rotations d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ et ayant respectivement pour centre les points A, B, C et D.

— Caractériser la transformation :

$$r_4 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1.$$

24 (1). On donne un rectangle $ABCD$.
Caractériser la transformation :

$$s_{(AB)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(DA)}.$$

25 (1). On donne trois points A, B, C tels que :

$$\text{MES } \widehat{(AB, AC)} = \frac{\pi}{3}.$$

Soit (Δ) la droite perpendiculaire à (AB) en A.
On considère la transformation f telle que :

$$f = t \circ s_{(AC)} \text{ D } s_{(\Delta)},$$

t étant la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

— Construire les images respectives des points A, B, C, M par la transformation f (M est un point du plan n'appartenant pas aux droites (AB), (AC) et (Δ)).
— Caractériser la transformation f.

26 (1). On donne un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, de diamètre $[AB]$.
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C})$ distinct de A et de B.
On désigne par (D) la tangente en B au cercle $(\mathcal{C})$ et par (Δ) la médiatrice de $[AM]$.

Soit E l'intersection de (D) avec la tangente en M à $(\mathcal{C})$, soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OE}$ et soit F l'image de A par t.

a) Montrer que F est un point de la droite (AM).

b) Montrer qu'il existe un déplacement qui applique :

$$E \text{ sur } O \quad \text{et} \quad F \text{ sur } M.$$

Caractériser ce déplacement.

c) On considère la transformation f telle que :

$$f = t \circ s_{(\Delta)}.$$

Construire les images des points O, A, B, E, F et M par f. Caractériser f.

27 (1). On donne un carré $ABCD$ de centre O et tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.
Soit r la rotation de centre O qui applique A sur B et soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

— Caractériser les transformations :

$$r \circ t, \quad t \circ r.$$

28 (2). On considère le triangle ABC et son centre de gravité G. Soit M le milieu de $[BC]$.
On désigne par h l'homothétie de centre G qui applique A sur M et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) Trouver $h \circ t(B)$, $h \circ t(C)$, $t \circ h(B)$ et $t \circ h(C)$.

2) Trouver la nature et préciser les éléments caractéristiques de chacune des transformations $h \circ t$ et $t \circ h$.

29 (2). On considère :

— le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre O_1 et de rayon R;
— le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre O_2 et de rayon $\frac{R}{2}$.

Soit O le centre de l'homothétie h de rapport positif qui applique $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

1) *a*) Construire le point O;
b) Calculer OO_1 et OO_2 (en fonction de O_1O_2).

2) On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

a) Trouver $h \circ t(O_1)$, $h \circ t(O_2)$, $t \circ h(O_1)$, $t \circ h(O_2)$.

b) Trouver la nature et préciser les éléments caractéristiques de chacune des transformations $h \circ t$ et $t \circ h$.

30 (2). Étant donné un point O et un vecteur non nul $\vec{u}$, on considère l'homothétie h de centre O, de rapport $\frac{2}{3}$ et la translation t de vecteur $\vec{u}$.

1) Caractériser la transformation f dans chacun des cas suivants :

a) $h = f \circ t$; *b*) $h = t \circ f$.

2) Montrer que :

a) $h^{-1} \circ t \circ h$ est une translation dont on déterminera le vecteur;

b) $t \circ h \circ t^{-1}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

31 (2). On considère le carré $ABCD$. Soit E le milieu de $[AB]$ et G le point d'intersection de (AC) et (DE).

1) Soit h l'homothétie de centre A qui applique G sur C. Calculer le rapport de cette homothétie.

2) Soit h' l'homothétie de centre B et de même rapport que h. Caractériser la transformation f dans chacun des cas suivants :

$$a)\ h = f \circ h';\quad b)\ = h' \circ f.$$

32 (2). On considère deux points distincts A et B. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -2)$. On désigne par :

- m l'homothétie de centre G qui applique A sur B;
- s_A et s_B les symétries de centres respectifs A et B.

Caractériser chacune des transformations suivantes :

a) $s_A \circ s_B \circ h$;

b) $h \circ s_A \circ s_B$;

c) $s_A \circ h \circ s_B$.

33 (2). On considère deux points distincts A et B. On désigne par :

- h l'homothétie de centre A et de rapport m $(m \neq 0)$;
- h' l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1) Déterminer m pour que $h' \circ h$ soit une translation. Exprimer le vecteur de cette translation en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) Dans le cas où $h' \circ h$ est une homothétie déterminer, suivant les valeurs de m, le centre et le rapport de cette homothétie.

34 (2). On considère trois points distincts A, B et C tels que :

$$B \in [AC] \quad \text{et} \quad AC = 3AB.$$

On désigne par :

h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$;

h' l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

1) Caractériser la transformation f telle que :

$$h' \circ f = h.$$

2) On désigne par h'' l'homothétie de centre C et de rapport k $(k \neq 0)$. Déterminer k pour que $h'' \circ h$ soit une homothétie de centre B. Quel est le rapport de cette homothétie?

35 (2). On considère deux points distincts A et B.

1) Soit l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que M' soit le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -2)$ et $(M, 1)$.
Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

2) On considère l'application

$$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que M' soit le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(M, -1)$.
Montrer que g est une homothétie que l'on caractérisera.

3) Caractériser chacune des transformations $g \circ f$ et $f \circ g$.

36 (2). On donne un point O du plan $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et un nombre réel non nul k.
On considère l'application

$$f_{\vec{v},k} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que $\overrightarrow{OM'} = \vec{v} + k\overrightarrow{OM}$.

1) *a*) Vérifier que $f_{\vec{v},k}$ est une transformation du plan.

b) Caractériser chacune des applications suivantes :

$$f_{\vec{0},k};\quad f_{\vec{v},1};\quad f_{\vec{0},1}.$$

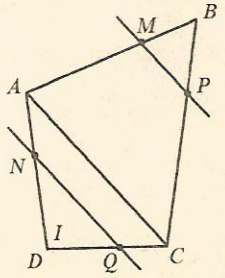
2) On suppose que $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $k \neq 1$.

a) Montrer que $f_{\vec{v},k}$ admet un unique point invariant.

b) Vérifier que $f_{\vec{v},k}$ est une homothétie que l'on caractérisera.

37 (2). On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2. Donner un programme de construction d'un cercle $(\mathcal{C})$ qui soit tangent *extérieurement* à la fois aux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

38 (2). On considère un quadrilatère $ABCD$ (voir figure). Soit M un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$.



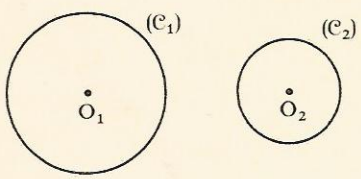
La droite parallèle à (AC) qui passe par M coupe (BC) en P; la droite parallèle à (AC) qui passe par N coupe (DC) en Q. Montrer que si $NQ \neq MP$, alors les trois droites (MN), (PQ) et (BD) sont concourantes.

39 (2). On considère un trapèze $ABCD$ tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$, K le point d'intersection de (AC) et (BD) et L le point d'intersection de (AD) et (BC). Montrer que I, J, K et L sont alignés.

40 (3). On considère deux droites (D_1) et (D_2). A étant un point de (D_1) et B un point de (D_2), trouver une similitude qui applique A sur B et (D_1) sur (D_2).

41 (3). Soit deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centres distincts et de rayons différents. Trouver une similitude indirecte S qui applique $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

42 (3). On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 (voir figure).



Trouver un point Ω du cercle de diamètre $[O_1O_2]$ tel que $\dfrac{\Omega O_2}{\Omega O_1} = \dfrac{R_2}{R_1}$. Trouver une similitude S qui applique Ω sur Ω et $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

43 (3). $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. Trouver une similitude directe S dans chacun des cas suivants :

a) $S(A) = A$ et S applique (CE) sur (BE);

b) $S(A) = A$ et S applique (CE) sur (CF);

c) $S(A) = A$ et S applique (CE) sur (BC).

44 (3). On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 2AB$ et tel que la mesure principale de l'angle $\widehat{(AB, AD)}$ soit égale à $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M le milieu de $[BC]$.

1) Trouver une similitude S qui applique A sur B et B sur C. Quel est le rapport de cette similitude?

2) Trouver une similitude S' qui applique A sur M et B sur D. Quel est le rapport de cette similitude?

45 (3). On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sécants en A et B, de centres respectifs O_1 et O_2. Soit M un point de $(\mathcal{C}_1)$; la droite (MB) coupe $(\mathcal{C}_2)$ en N.

1) Montrer que les deux triangles AO_1O_2 et AMN sont semblables (utiliser l'un des critères de similitude de deux triangles).

2) Caractériser la similitude S qui applique A sur A, O_1 sur O_2 et M sur N.

2) Caractériser la similitude S qui applique A sur A, O_1 sur O_2 et M sur N.

46 (3). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Placer les points $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ et $D(2, 2)$.
Montrer qu'il existe une homothétie h et une rotation r, de même centre O, telles que $h \circ r$ applique A sur C et B sur D. Déterminer le rapport de h et l'angle orienté de r.

47 (3). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère la droite (D) d'équation $y - x = 0$ et le point $A(-2, 2)$. On construit un cercle $(\mathcal{C})$ passant par O et A; $(\mathcal{C})$ coupe (OJ) et (D) respectivement aux points M et N.

1) Montrer que :

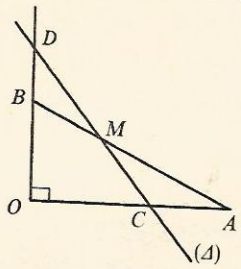
a) (OA) et (D) sont perpendiculaires.

b) AMN est un triangle rectangle isocèle.

2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (OJ). Caractériser la similitude S telle que :

$$S(A) = A, \quad S(O) = H \quad \text{et} \quad S(N) = M.$$

48 (3). On considère le triangle AOB, rectangle en O. Soit M un point de $[AB]$. Une droite (Δ) passant par M coupe (OA) en C et (OB) en D.



Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre O_1, circonscrit au triangle MCA, et $(\mathcal{C}_2)$ le cercle de centre O_2, circonscrit au triangle MBD. On désigne par N le second point commun de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

1) Montrer que les triangles NAB, NCD et NO_1O_2 sont semblables deux à deux.

2) Caractériser la similitude S qui applique N sur N, A sur B et C sur D.

49 (3). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère un point M de (OI) et un point N de (OJ) tels que :

$$\overline{OM} = 4\cos^2 t \quad \text{et} \quad \overline{ON} = 4\sqrt{3}\sin^2 t,$$

où t est un paramètre appartenant à $[0, \pi[$.

1) Soit A la position du point M lorsque $t = 0$. Calculer $\overline{OA}$.

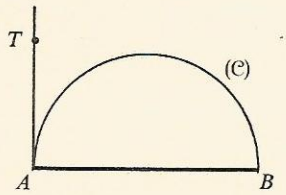
2) Montrer que si $t \neq 0$, le quotient $\dfrac{ON}{AM}$ ne dépend pas de t.

3) On suppose $t \neq 0$. Soit K le second point commun au cercle de diamètre $[OA]$ et à celui

passant par O, M et N. Caractériser la similitude S qui applique K sur K, A sur O et M sur N.

50 (3). On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point A n'appartenant pas au cercle. On trace une droite (Δ) passant par A et distincte de (AO); (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en M et N. Montrer que les rayons des deux cercles respectivement circonscrits aux triangles OAM et OAN sont égaux.

51 (3). Soit un demi-cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$. On trace la demi-tangente $[AT)$ à $(\mathcal{C})$ (voir figure). Soit M un point de $(\mathcal{C})$.



Placer le point N tel que :

- si $M \neq A$, alors $M \in [AN]$ et $MN = MB$;
- si $M = A$ alors $N \in [AT]$ et $MN = MB$.

a) Montrer que si M et B sont distincts, alors le triangle MBN est un triangle rectangle isocèle.

b) Trouver l'ensemble décrit par N lorsque M décrit $(\mathcal{C})$. Construire cet ensemble.

52 (3). On considère un losange $ABCD$ tel que $AB = BD$ et tel que le triplet (A, B, D) soit de sens direct.

1) Construire $ABCD$.

2) On suppose que B décrit une droite (Δ) ne passant pas par A. Caractériser l'ensemble décrit par C et tracer cet ensemble.

Problèmes

53. On donne un cercle $(\mathcal{C})$ et un point A n'appartenant pas à $(\mathcal{C})$. Soit B un point quelconque de $(\mathcal{C})$.

1) Construire le point C tel que ABC soit un triangle isocèle et tel que l'angle $\widehat{(AB, AC)}$ ait pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$.

2) Quel est l'ensemble décrit par le point C lorsque le point B décrit le cercle $(\mathcal{C})$?

3) Soit H le milieu de $[BC]$ et B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que B' appartient à la médiatrice de $[BC]$.

b) Trouver une similitude qui applique A sur lui-même et B sur H.

4) Quel est l'ensemble décrit par le point H lorsque le point B décrit le cercle $(\mathcal{C})$?

54. Le plan $\mathcal{P}$ est orienté.
On considère un triangle quelconque ABC tel que le triplet (A, B, C) soit de sens direct.
Soit A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle.
On construit :

- le triangle isocèle BCP, rectangle en P et tel que $\text{MES } \widehat{(PC, PB)} = \frac{\pi}{2}$;
- le triangle isocèle CAQ, rectangle en Q et tel que $\text{MES } \widehat{(QA, QC)} = \frac{\pi}{2}$;
- le triangle isocèle ABR, rectangle en R et tel que $\text{MES } \widehat{(RB, RA)} = \frac{\pi}{2}$.

1) Soit $r_{C'}$ la rotation de centre C' et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Construire l'image $(\mathcal{F}_1)$ par $r_{C'}$ du triangle $C'A'R$.

b) Montrer que le triangle $B'QA'$ est l'image de $(\mathcal{F}_1)$ par une translation dont on déterminera le vecteur.

c) En déduire la nature du triangle $A'QR$.

2) On considère la rotation $r_{A'}$ de centre A' et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Quelle est l'image par $r_{A'}$ du triangle $A'PQ$? Justifier.

b) Montrer que (CR) et (PQ) sont perpendiculaires.

3) *a*) Construire l'image $(\mathcal{F}_2)$ du triangle $A'B'P$ par la rotation $r_{A'}$.

b) Trouver la translation qui applique $(\mathcal{F}_2)$ sur le triangle $C'RB'$. En déduire la nature du triangle $B'RP$.

c) On considère la rotation $r_{B'}$ de centre B' et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Quelle est l'image par $r_{B'}$ du triangle $B'QR$? En déduire l'orthogonalité des deux droites (AP) et (QR).

4) En procédant de manière analogue, montrer que (BQ) et (RP) sont perpendiculaires.

5) Que peut-on dire des trois droites (AP), (BQ) et (CR) ?

55. Le plan $\mathcal{P}$ est orienté.
On considère un carré $ABCD$ tel que :

$$AB = a$$

$$\text{MES } \widehat{(AB, AD)} = \frac{\pi}{2}$$

Soit M un point de $[AD]$ distinct de A. Le cercle (Γ) circonscrit au triangle AMC coupe (AB) en N.

1) Montrer que :

a) (CM) et (CN) sont perpendiculaires;

b) $CM = CN$.

2) *a*) Montrer que, lorsque M décrit $[AD] - \{A\}$, le point N est l'image de M par une même rotation dont on déterminera le centre et l'angle orienté.

b) En déduire que $DM = BN$ et que $AM + AN = 2a$.

3) Soit I le milieu de $[MN]$.

a) Construire l'image M_1 de M par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que I est l'image de M_1 par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Trouver l'ensemble (Δ) décrit par I lorsque le point M décrit $[AD] - \{A\}$. Construire (Δ).

4) On désigne par :

r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Soit C' l'image de C par $r' \circ r$. Montrer que $r' \circ r$ est une rotation dont le centre est l'orthocentre du triangle ACC'.

b) Soit M' l'image de M par $r' \circ r$. Trouver l'ensemble (Δ') décrit par M' lorsque M décrit $[AD) - \{A\}$. Construire (Δ').

56. On considère trois points A, B et C dans le plan orienté $\mathcal{P}$.
On désigne respectivement par r_A, r_B et r_C les rotations de centres A, B et C et de même angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.
On pose : $\mathcal{C} = r_C \circ r_B \circ r_A$.

* *Détermination de la transformation* $\mathcal{C}$

1) *a*) Montrer que $r_B \circ r_A$ est une rotation dont on déterminera l'angle orienté.

b) Construire l'image de A par $r_B \circ r_A$. En déduire le centre Ω de la rotation $r_B \circ r_A$.

2) On pose : $r_\Omega = r_B \circ r_A$.

a) Montrer que $r_C \circ r_\Omega$ est une translation.

b) Construire l'image Ω' de Ω par $r_C \circ r_\Omega$. En déduire le vecteur de la translation $r_C \circ r_\Omega$.

c) Construire les images de A, B et C par τ.

** *Un autre procédé pour déterminer* $\mathcal{C}$

1) *a*) Construire la droite (Δ) passant par A telle que :

$$r_A = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)}.$$

$S_{(AB)}$ et $S_{(\Delta)}$ désignent respectivement les symétries orthogonales d'axes (AB) et (Δ).

b) Construire la droite (Δ') passant par B telle que :

$$r_B = S_{(\Delta')} \circ S_{(AB)}.$$

$S_{(\Delta')}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ').

c) Retrouver le centre Ω et l'angle orienté de la rotation $r_B \circ r_A$.

2) En procédant de manière analogue pour les rotations r_Ω et r_C, retrouver le fait que τ est une translation. Préciser le vecteur de cette translation.

*** *Utilisation du centre* Ω *de la rotation* r_Ω

Dans la suite, les points A et B sont donnés et on veut déterminer l'ensemble des points C tels que la transformation $\mathcal{C}$ vérifie une certaine propriété.

1) Quel est l'ensemble des points C tels que $\mathcal{C}$ soit l'application identique du plan? Justifier.

2) Soit M' l'image par $\mathcal{C}$ d'un point M. d étant un nombre réel strictement positif donné, quel est l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points C tels que $MM' = d$?

Indications

a) montrer que $\Omega\Omega' = MM'$ $\quad(\Omega' = \mathcal{C}(\Omega))$;

b) exprimer $C\Omega$ en fonction de d;

c) en déduire $(\mathcal{C})$.

3) Soit M' l'image par $\mathcal{C}$ d'un point M. (D) étant une droite donnée, quel est l'ensemble (Γ) des points C tels que $(MM') /\!/ (D)$?

Indications

a) montrer que $(\Omega\Omega') /\!/ (MM')$ $\quad(\Omega' = \mathcal{C}(\Omega))$;

b) calculer MES $(\widehat{\Omega C, \Omega\Omega'})$;

c) en déduire (Γ).

57 On considère deux points distincts A et B.

1) Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$, G_2 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -2)$.

a) Construire G_1 et G_2.

b) Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB}) = 0.$$

c) Trouver l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 2.$$

Construire cet ensemble.

2) *a*) Construire les arcs capables de $\frac{\pi}{3}$ radians d'extrémités A et B.

b) Trouver l'ensemble (Γ) des points M tels que :

$$\text{MES } (\widehat{MA, MB}) = -\frac{\pi}{3}.$$

3) Soit Ω le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Γ). Montrer qu'il existe une homothétie h de rapport 2 et une rotation r d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ telles que $h \circ r$ applique Ω sur Ω et B sur A.

4) Soit S la similitude directe $h \circ r$ et M le milieu de $[AB]$.

a) Construire l'image N de M par S;

b) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{BM, AN})$;

c) Montrer que les deux triangles ΩBM et ΩAN sont semblables.

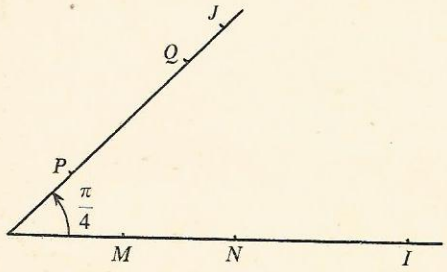
58 On considère deux demi-droites $[OI)$ et $[OJ)$ telles que :
MES $(\widehat{OI, OJ}) = \frac{\pi}{4}$. Soit M et N deux points de $[OI)$, P et Q deux points de $[OJ)$ tels que $MN = 2$ et $PQ = 2\sqrt{2}$ (voir figure).

1) Soit Ω_1 le second point commun aux deux cercles respectivement circonscrits aux triangles OMP et ONQ. Montrer que :

a) les triangles $\Omega_1 MP$ et $\Omega_1 NQ$ sont semblables;

b) les triangles $\Omega_1 PQ$ et $\Omega_1 MN$ sont semblables;

c) il existe une homothétie h et une rotation r de même centre Ω_1 telles que $h \circ r$ applique M sur P et N sur Q.



2) Soit Ω_2 le second point commun aux deux cercles respectivement circonscrits aux triangles OMQ et ONP. Montrer que :

a) les triangles Ω_2MQ et Ω_2NP sont semblables;

b) les triangles Ω_2PQ et Ω_2NM sont semblables;

c) il existe une similitude S qui applique Ω_2 sur Ω_2, M sur Q et N sur P.

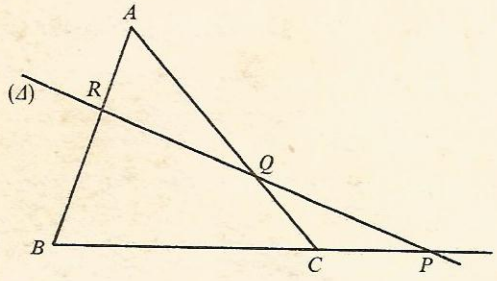
3) Soit A et B les milieux respectifs de $[MN]$ et $[PQ]$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OAB.

a) Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A\Omega_1B}$. En déduire que Ω_1 appartient à $(\mathcal{C})$.

b) Comparer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A\Omega_2B}$. En déduire que Ω_2 appartient à $(\mathcal{C})$.

59 Théorème de Ménélaüs

I) On considère le triangle ABC. Une droite (Δ) coupe (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q et R (voir figure).



On désigne par :

- h l'homothétie de centre P qui applique C sur B,
- h' l'homothétie de centre R qui applique B sur A.

1) Montrer que $h' \circ h$ est une homothétie h'' dont on déterminera le centre et le rapport.

2) Montrer que :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

II) Réciproquement, on considère le triangle ABC et trois points P, Q et R appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et tels que :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

1) Soit P' le point d'intersection de (RQ) et (BC).
Montrer que $\dfrac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$.

2) *a*) Montrer que P' et P sont confondus. En déduire que P, Q et R sont alignés.

b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que trois points P, Q et R appartenant respectivement aux supports (BC), (CA) et (AB) des trois côtés d'un triangle ABC soient alignés.

III) **Application**

On considère le triangle ABC. Une droite (Δ) coupe (BC), (CA) et (AB) respectivement en P, Q et R. On désigne par :

- P' le symétrique de P par rapport au milieu de $[BC]$;
- Q' le symétrique de P par rapport au milieu de $[CA]$;
- R' le symétrique de R par rapport au milieu de $[AB]$.

Montrer que P', Q', R' sont alignés.

60 Droite et cercle d'Euler relativement à un triangle

I) On considère un triangle quelconque ABC. On désigne par :

- A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$;
- O le centre du cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ au triangle ABC;
- H l'orthocentre du triangle ABC;
- G le centre de gravité du triangle ABC;
- Ω le centre du cercle circonscrit (Γ) au triangle $A'B'C'$.

* *Droite d'Euler*

On considère l'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1) *a*) Déterminer $h(A)$, $h(B)$, $h(C)$;
b) Quel est l'image de $(\mathcal{C})$ par h? Justifier.
c) Montrer que $\overrightarrow{G\Omega} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GO}$.

2) *a*) Déterminer $h(H)$.
b) Montrer que $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$;
c) En déduire que G, H, O et Ω sont alignés.

3) Préciser la position du point Ω par rapport aux points O et H. Montrer que H est le centre de l'homothétie h' de rapport positif qui applique $(\mathcal{C})$ sur (Γ). (La droite (OH) est appelée droite d'Euler.)

* *Cercle d'Euler*

4) Soit A_1 le projeté orthogonal du point A sur (BC) et K le second point commun de $(\mathcal{C})$ et (AH).

a) Déterminer $h'(K)$. En déduire que le point A_1 appartient au cercle (Γ).

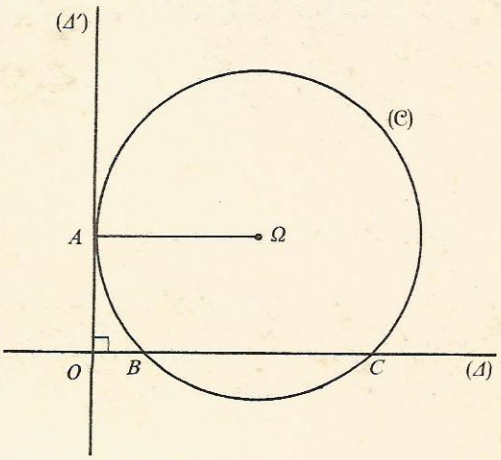
b) Soit B_1 et C_1 les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (AC) et (AB). Montrer que B_1 et C_1 appartiennent au cercle (Γ).

5) *a*) Soit α, β et γ les milieux respectifs de $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. Montrer que α, β et γ appartiennent au cercle (Γ).
(Le cercle (Γ) est appelé cercle d'Euler.)

II) Applications

1) On considère le triangle PQR, rectangle en P. Trouver la droite d'Euler et le cercle d'Euler relativement au triangle PQR.

2) Soit deux droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en O; A étant un point de (Δ'), $(\mathcal{C})$ est un cercle tangent en A à la droite (Δ') et $(\mathcal{C})$ coupe (Δ) en B et C (voir figure).



a) Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est le symétrique du point A par rapport à O.

b) Montrer que le cercle d'Euler relativement au triangle ABC est tangent à la droite (Δ'). Construire ce cercle.

4 Représentation analytique d'une transformation du plan

Leçon 1 : REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE APPLICATION DE $\mathcal{P}$ DANS $\mathcal{P}$

Leçon 2 : REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS DU PLAN

Leçon 3 : EXEMPLES D'UTILISATION DE LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

Leçon 4 : NATURE D'UNE TRANSFORMATION DU PLAN DÉFINIE PAR SA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

1 Représentation analytique d'une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
On donne des points :

$$A_1(-1; 4); \qquad A_2(0; 7{,}3); \ldots$$

On veut trouver les coordonnées des images respectives :

$$A'_1; \qquad A'_2; \ldots$$

de ces points par la symétrie centrale de centre le point $\Omega(4; 3)$.

Plus généralement, étant donné :

- une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$,
- des points $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$; ...

on se propose d'établir une méthode pratique pour trouver les coordonnées des images par f de ces points.

1) Représentation analytique d'une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$

Rappelons que l'application

$$C : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto (x, y)$$

où (x, y) est le couple des coordonnées de M,
est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Cette remarque va nous permettre d'étudier analytiquement certaines applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

a) *Exemple introductif*

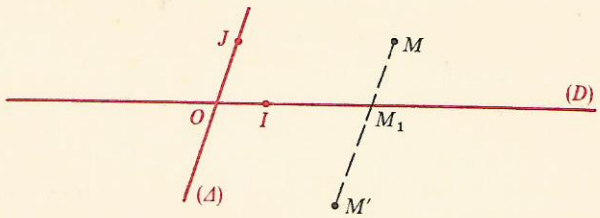
On donne deux droites (D) et (Δ), sécantes en O.
Considérons l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que $\overrightarrow{M_1M'} = -2\overrightarrow{M_1M}$;

où M_1 est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ).

– On se propose de trouver les coordonnées de l'image d'un point quelconque, le plan étant préalablement muni d'un repère.



• *Choix du repère*

Considérons le repère (O, I, J) formé du point O, d'un point I de (D) distinct de O et d'un point J de (Δ) distinct de O.

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.
$M_1(x, 0)$ est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ).

On a :

$$M' = f(M) \iff \overrightarrow{M_1M'} = -2\overrightarrow{M_1M}$$

$$M' = f(M) \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y. \end{cases}$$

– L'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

est appelée *la représentation analytique* de f, relativement au repère (O, I, J).

– Trouver les coordonnées des points :

$$A(5;2,3); \qquad B(0;2,3); \qquad C(-3;4); \qquad E(7;0).$$

b) Plus généralement :

• Soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
Considérons l'application φ telle que :

$$\varphi = C \circ f \circ C^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xmapsto{f} & M' \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ (x,y) & \xrightarrow{\varphi} & (x',y') \end{array}$$

(x, y) est le couple des coordonnées de M
(x', y') est le couple des coordonnées de M'.
On dit que φ est *la représentation analytique* de f, *relativement au repère* (O, I, J).
Ainsi, à chaque application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, on peut associer sa représentation analytique φ telle que :

$$\varphi = C \circ f \circ C^{-1}.$$

• Réciproquement, chaque application φ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est la représentation analytique de l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que :

$$f = C^{-1} \circ \varphi \circ C.$$

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned} C \circ f \circ C^{-1} &= C \circ (C^{-1} \circ \varphi \circ C) \circ C^{-1} \\ &= (C \circ C^{-1}) \circ \varphi \circ (C \circ C^{-1}) \\ &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \circ \varphi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \\ C \circ f \circ C^{-1} &= \varphi. \end{aligned}$$

Définir analytiquement une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, relativement à un repère (O, I, J), c'est exprimer x' et y' en fonction de x et y; x' et y' étant les coordonnées de l'image par f d'un point de coordonnées x, y.

• *Remarque*

Une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est bijective si et seulement si sa représentation analytique φ, relativement à un repère, est une bijection de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

En effet,

$$\varphi = C \circ f \circ C^{-1} \quad \text{et} \quad f = C^{-1} \circ \varphi \circ C.$$

– Si f est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$, $C \circ f \circ C^{-1}$ est aussi une bijection de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

– Réciproquement, si φ est une bijection de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $C^{-1} \circ \varphi \circ C$ est aussi une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{array}$$

2) Représentation analytique de la composée de deux applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$

Théorème

Étant donné deux applications f_1 et f_2 de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, ayant respectivement pour représentations analytiques φ_1 et φ_2, relativement à un repère (O, I, J), $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est, relativement à ce repère, la représentation analytique de $f_2 \circ f_1$.

En effet :

$$\varphi_1 = C \circ f_1 \circ C^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = C \circ f_2 \circ C^{-1}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1 &= (C \circ f_2 \circ C^{-1}) \circ (C \circ f_1 \circ C^{-1}) \\ &= C \circ f_2 \circ (C^{-1} \circ C) \circ f_1 \circ C^{-1} \\ &= C \circ (f_2 \circ f_1) \circ C^{-1}. \end{aligned}$$

Exercice

On donne deux droites (D) et (Δ), sécantes en O.
Considérons les applications

$$f_1 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \quad M \longmapsto M'$$

telle que :

$$\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1M}$$

où M_1 est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ)

$$f_2 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \quad M \longrightarrow M'$$

telle que :

$$\overrightarrow{M_2M'} = 3\overrightarrow{M_2M}$$

où M_2 est le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (D).

- Choisir un repère.
- Trouver la représentation analytique de f_1 et celle de f_2.
- En déduire celle de $f_2 \circ f_1$.

2 Représentation analytique de quelques transformations du plan

1) Translation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Considérons la translation t de vecteur $\vec{u}$.

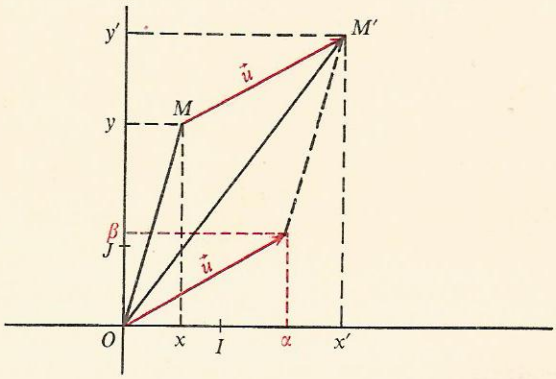
Soit $M(x, y)$ et $M'(x'y')$ deux points quelconques du plan.

— *Traduction vectorielle de t :*

$$M' = t(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

ou encore :

$$M' = t(M) \iff \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$$



— *Traduction analytique de t*

$$M' = t(M) \iff \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}.$$

L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}.$$

est, relativement au repère (O, I, J), la représentation analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Exercices

1) Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne les points $A(1; 5)$ et $B(-2; 3)$.

Trouver la représentation analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Trouver la nature de l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{3} \\ y' = y + 2 \end{cases}.$$

2) Symétrie centrale

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) On donne le point $A(a, b)$.
Considérons la symétrie centrale s_A de centre A.

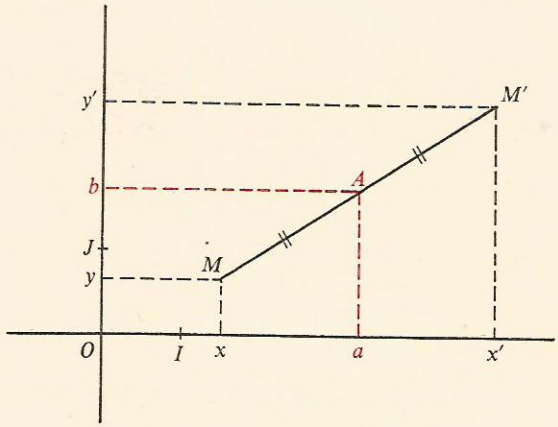
Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.

– *Traduction vectorielle de* s_A

$$M' = s_A(M) \iff \overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$$

ou encore :

$$M' = s_A(M) \iff \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OA}$$



– *Traduction analytique :*

$$M' = s_A(M) \iff \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

L'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

est, relativement au repère (O, I, J), la représentation analytique de la symétrie centrale de centre $A(a, b)$.

Exercices Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, J, J).

1) Trouver la représentation analytique de la symétrie centrale de centre $A(-1; 4)$.

2) Quelle est la nature de l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique, l'application :

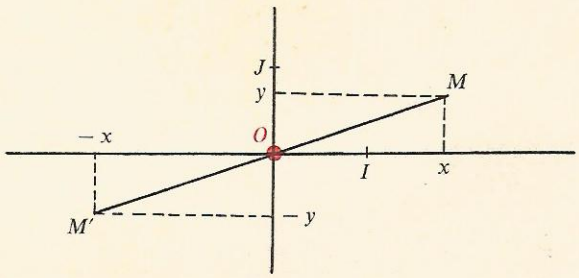
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 6 \end{cases}$.

b) **Cas particulier : Symétrie centrale de centre O**

$$M' = s_0(M) \iff \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

$$M' = s_0(M) \iff \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



Exercice

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On donne le point $A(2, -1)$.
On désigne par s_A la symétrie centrale de centre A et $t_{2\overrightarrow{AO}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{AO}$.

a) Trouver la représentation analytique de chacune des transformations ci-dessous :

$$s_A ; \quad t_{2\overrightarrow{AO}} ; \quad t_{2\overrightarrow{AO}} \circ s_A ; \quad s_A \circ t_{2\overrightarrow{AO}}.$$

b) En déduire la nature de chacune des transformations :

$$t_{2\overrightarrow{AO}} \circ s_A \quad \text{et} \quad s_A \circ t_{2\overrightarrow{AO}}.$$

3) Symétrie orthogonale

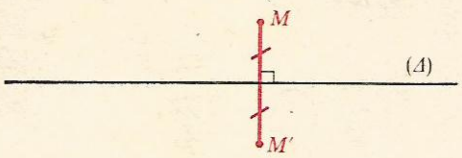
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) On donne la droite (Δ).
Considérons la symétrie orthogonale $s_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points distincts du plan, n'appartenant pas à (Δ).
On sait que :

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \iff (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [MM'].$$

Ceci nous permet d'obtenir une traduction vectorielle, puis une traduction analytique de $s_{(\Delta)}$.



Exemple 1

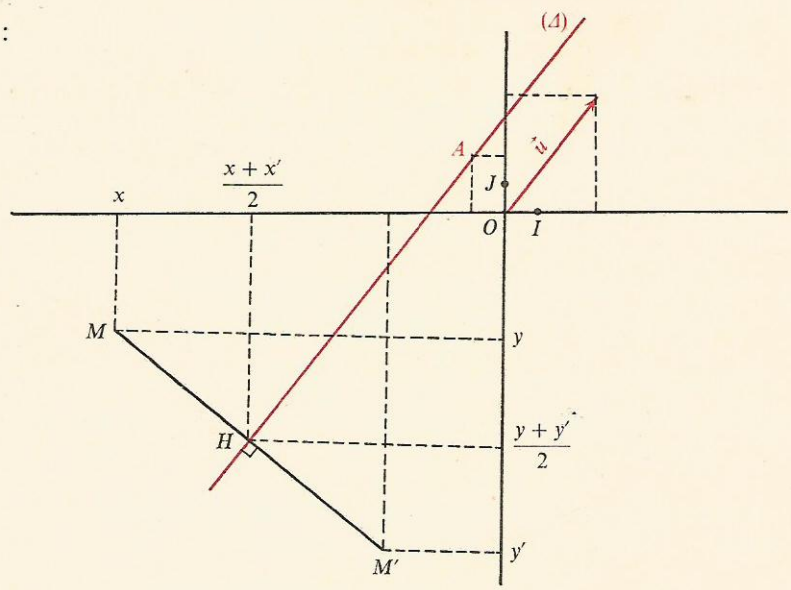
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la droite (Δ) passant par le point $A(-1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4)$.
On veut trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale $s_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan $\mathcal{P}$.
Désignons par H le milieu de $[MM']$.

— *Traduction vectorielle de* $s_{(\Delta)}$

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \iff \begin{cases} \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0 \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Justifier :



— *Traduction analytique de* $s_{(\Delta)}$:

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{x + x'}{2} + 1 & 3 \\ \frac{y + y'}{2} - 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ 3(x' - x) + 4(y' - y) = 0 \end{cases}$$

On veut exprimer x' et y' en fonction de x, y.
Résolvons donc le système :

$$(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 4\left(\frac{x + x'}{2} + 1\right) - 3\left(\frac{y + y'}{2} - 2\right) = 0 \\ 3(x' - x) + 4(y' - y) = 0. \end{cases}$$

On obtient successivement les systèmes équivalents :

$$(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2x' - \frac{3}{2}y' = -2x + \frac{3}{2}y - 10 \\ 3x' + 4y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x' = -7x + 24y - 80 \\ 25y' = 24x + 7y + 60 \end{cases}$$

L'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{16}{5} \\ y' = \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y + \frac{12}{5} \end{cases}$$

est, relativement au repère (O, I, J), la représentation analytique de la symétrie orthogonale $s_{(\Delta)}$.

Exemple 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne la droite (Δ) d'équation :

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

On veut trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale $s_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).

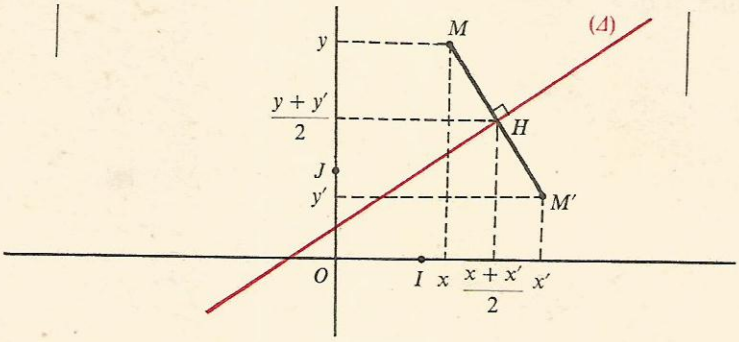
Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.
Désignons par H le milieu de $[MM']$.

La droite (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(3; 2)$.

— *Traduction vectorielle de* $s_{(\Delta)}$

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} H \in (\Delta) \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0. \end{cases}$$

Justifier.



— *Traduction analytique de* $s_{(\Delta)}$

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \iff \begin{cases} 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - 3\left(\frac{y+y'}{2}\right) + 1 = 0 \\ 3(x'-x) + 2(y'-y) = 0. \end{cases}$$

Résoudre le système :

$$(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \begin{cases} (x+x') - \frac{3}{2}(y+y') + 1 = 0 \\ 3(x'-x) + 2(y'-y) = 0. \end{cases}$$

En déduire la représentation analytique de $s_{(\Delta)}$.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale dont l'axe est la droite (Δ) passant par le point $A(-0{,}5; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -3)$.
Trouver les images des points O, I, J par cette symétrie orthogonale $s_{(\Delta)}$.

2) Trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale ayant pour axe,

a) la droite d'équation :

$$-x + 2y + 3 = 0$$

b) la droite passant par les points :

$$A(1; 2) \quad \text{et} \quad B(-3; 4).$$

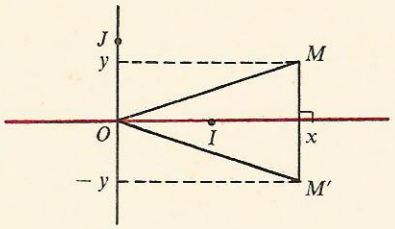
b) Cas particuliers

Dans les cas particuliers ci-dessous, on obtient directement une traduction analytique de la symétrie orthogonale considérée.

• *Symétrie orthogonale d'axe (OI)*

Montrer que :

$$M' = s_{(OI)}(M) \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$



D'où :

L'application :
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

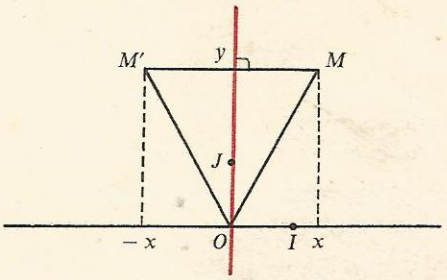
telle que :
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

est, relativement à un repère orthogonal (O, I, J), la représentation analytique de la symétrie orthogonale d'axe (OI).

• *Symétrie orthogonale d'axe (OJ)*

Montrer que :

$$M' = s_{(OJ)}(M) \iff \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$



D'où :

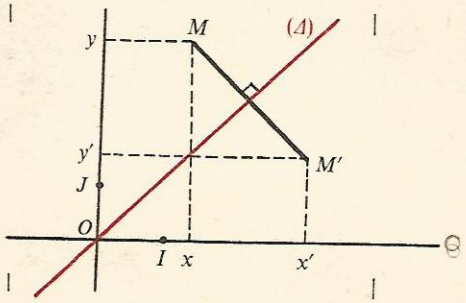
L'application :
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

est, relativement à un repère orthogonal (O, I, J), la représentation analytique de la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

• *Symétrie orthogonale ayant pour axe la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$

(Δ) étant la droite d'équation : $y = x$,



Montrer que :

$$M' = s_{(\Delta)}(M) \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$$

L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

est, relativement au repère orthonormé (O, I, J), la représentation analytique de la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite d'équation $y = x$.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite d'équation :

a) $y = -x$

b) $x = a$; $a \in \mathbb{R}$

c) $y = b$; $b \in \mathbb{R}$.

2) On donne les points $A(-1; 3)$, $B(1; 0)$ et le vecteur $\vec{u}(1; -2)$.
On désigne par (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

— Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont sécantes en A.

— Trouver la représentation analytique de chacune des transformations suivantes :

$s_{(AB)}$: symétrie orthogonale d'axe (AB)

$s_{(\Delta)}$: symétrie orthogonale d'axe (Δ).

— En déduire la représentation analytique de chacune des transformations :

$$s_{(AB)} \circ s_{(\Delta)}; \qquad s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}.$$

4) Homothéties

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) On donne un nombre réel non nul k et un point $\Omega(a, b)$ du plan.
Considérons l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.

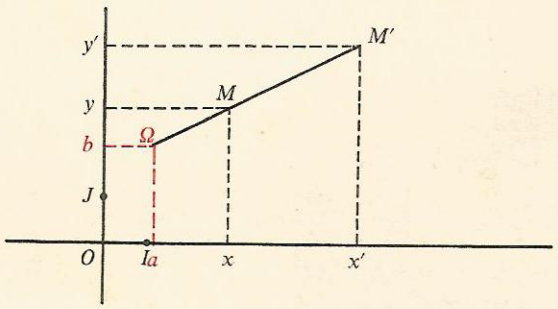
Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.

— *Traduction vectorielle de h*

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$$

ou encore :

$$M' = h(M) \iff \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} + (1 - k)\overrightarrow{OA}.$$



— *Traduction analytique de h*

$$M' = h(M) \iff \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b. \end{cases}$$

L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$$

est, relativement au repère (O, I, J), la représentation analytique de l'homothétie de centre $\Omega(a, b)$ et de rapport k.

Exercice

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

— Trouver la représentation analytique de l'homothétie h de centre $\Omega(2; -1)$ et de rapport -3.

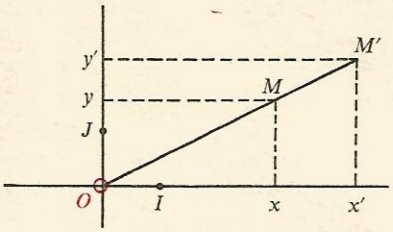
— Trouver les images par h des points suivants :

O, I, J et $B(3; 1)$.

Vérifier graphiquement les résultats obtenus.

b) **Cas particuliers**

• *Homothétie de centre O*



En faisant :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

On obtient l'énoncé suivant :

L'application :
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

est, relativement au repère (O, I, J), la représentation analytique de l'homothétie de centre O et de rapport k.

Exercices

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point $\Omega(-1; 1)$.

— Trouver la représentation analytique de l'homothétie h de centre O et de rapport 3 et celle de l'homothétie h' de centre Ω et de rapport -2.
— En déduire la représentation analytique de la transformation $h' \circ h$.

2) On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - 2 \\ y' = \dfrac{1}{3}y + 4. \end{cases}$$

Montrer que f est la composée d'une homothétie h de centre O et d'une translation t.
Préciser le rapport de l'homothétie h et le vecteur de la translation t.
En déduire la caractérisation de f.

• Retrouver des résultats déjà connus en considérant les représentations analytiques des homothéties ayant pour centre un point quelconque du plan et pour rapport 1 ou -1.

3 Exemples d'utilisation de la représentation analytique

1) Utiliser la représentation analytique d'une application du plan dans lui-même, pour trouver l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ invariants par f

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Considérons l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (x', y') \end{array}$$

telle que : $\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases}$

On veut trouver l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ invariants par f.

Soit $A(\alpha, \beta)$ un point de plan $\mathcal{P}$.

$$A \text{ est invariant par } f \iff \left[\begin{array}{c} A \text{ est solution de l'équation :} \\ M \in \mathcal{P}, \quad f(M) = M \end{array}\right]$$

d'où :

$$A \text{ est invariant par } f \iff \left[\begin{array}{l} (\alpha, \beta) \text{ est solution du système :} \\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \begin{cases} x = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}. \end{array}\right]$$

Chercher l'ensemble des points du plan invariants par f, revient à résoudre le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + (b_2 - 1)y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (x', y') \end{array} \quad \text{telle que :} \quad \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 3. \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) dont on déterminera une équation.

b) M étant un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que (D) est la médiatrice de $[MM']$.

c) Quelle est la nature de f?

2) On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{array}{l}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}\\(x,\,y)\longmapsto(x',\,y')\end{array}\quad\text{telle que :}\quad\begin{cases}x'=-2x+5\\y'=-2y-7.\end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe un unique point Ω invariant par f.

b) M étant un point quelconque du plan et M' son image par f, montrer que $\overrightarrow{\Omega M'}=-2\overrightarrow{\Omega M}$.

c) En déduire la nature de f.

2) Utiliser la représentation analytique d'une transformation f du plan pour trouver l'image par f d'une courbe

Exemple 1

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit (C) la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{array}{l}\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}\\x\longmapsto\sqrt{x}\end{array}$$

(C) est la courbe caractérisée par :

$$\begin{cases}y=\sqrt{x}\\x\geqslant 0.\end{cases}$$

On veut trouver l'image (C') de (C) par la symétrie orthogonale s, ayant pour axe la droite d'équation :

$$y=x.$$

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.

On sait que :

$$M'=s(M)\iff\begin{cases}x'=y\\y'=x.\end{cases}$$

Par ailleurs :

$$M\in(C)\iff[y=\sqrt{x}\ \boxed{\text{et}}\ x\geqslant 0].$$

Par suite :

$$M\in(C)\iff[x'=\sqrt{y'}\ \boxed{\text{et}}\ y'\geqslant 0]$$

et :

$$M\in(C)\iff[x'^2=y'\quad\boxed{\text{et}}\ x'\geqslant 0]$$

or s étant une bijection, on a :

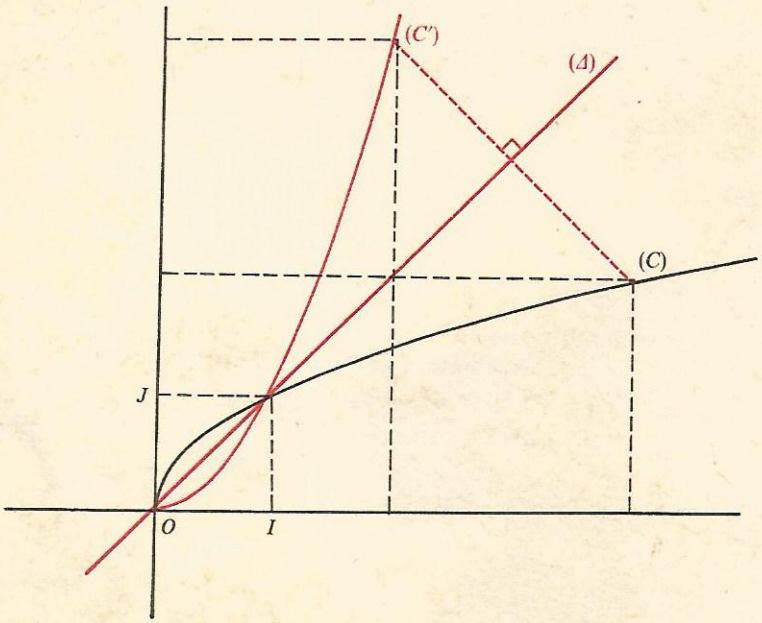
$$M \in (C) \iff M' \in (C').$$

Par conséquent :

$$M' \in (C') \iff [y' = x'^2 \boxed{\text{et}}\ x' \geqslant 0]$$

(C') est donc la courbe caractérisée par :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$



Exemple 2

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit (D) la droite d'équation :

$$x + y - 3 = 0.$$

On veut trouver l'image (D') de (D) par la transformation f de $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 1) + 1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1). \end{cases}$$

Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points quelconques du plan.

— Montrer que le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 1) + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) \end{cases}$$

admet une solution unique (x, y) telle que :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 1) \\ y = \frac{-\sqrt{2}}{2}(x' - y' - 1) \to 1. \end{cases}$$

Ainsi :

$$M' = f(M) \iff \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 1) + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1) \end{cases}$$

ou encore :

$$M' = f(M) \iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y' - 1) \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y' - 1) + 1. \end{cases}$$

Or :

$$M \in (D) \iff x + y - 3 = 0.$$

Par suite :

$$M \in (D) \iff y' - \sqrt{2} = 0.$$

De plus :

$$M \in (D) \iff M' \in (D').$$

Par conséquent :

$$M' \in (D') \iff y' = \sqrt{2}$$

(D') est donc la droite d'équation :

$$y = \sqrt{2}.$$

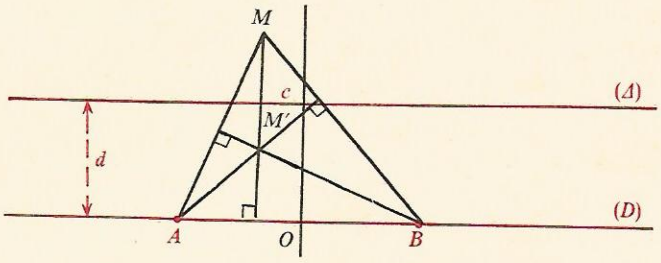
Exemple 3

On donne deux droites disjointes du plan, (D) et (Δ).
Soit d la distance des deux droites parallèles (D) et (Δ)
A et B deux points de (D) tels que :

$$AB = 2d.$$

On considère l'application f de $\mathcal{P} - (AB)$ dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M de $\mathcal{P} - (AB)$ associe le point M', orthocentre du triangle MAB.
On veut trouver, l'image (Δ') de (Δ) par f.

— *Choix d'un repère orthonormé et représentation analytique de f*



Soit O le milieu de $[AB]$

C le point de (Δ) tel que (OC) soit la médiatrice de $[AB]$,

(O, B, C) est un repère orthonormé.

Relativement à ce repère, les points A, B, C ont respectivement pour couple de coordonnées :

$$(-1, 0); \qquad (1; 0); \qquad (0, 1).$$

Soit $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{S} - (AB)$; on a alors $y \neq 0$.

Soit $M'(x', y')$ un point quelconque de $\mathcal{S}$.

$$\left[\begin{array}{l} M' \text{ est l'orthocentre} \\ \text{de } MAB \end{array}\right] \Longleftrightarrow [\overrightarrow{MM'} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AM'} \,.\, \overrightarrow{BM} = 0].$$

Or $\overrightarrow{AM'}$ a pour coordonnées : $(x' + 1; y')$

$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées : $(x - 1; y)$.

Par suite, on obtient successivement :

$$M' = f(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ (x' + 1)(x - 1) + yy' = 0; \quad y \neq 0 \end{cases}$$

$$M' = f(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ x^2 - 1 + yy' = 0; \quad y \neq 0 \end{cases}$$

$$M' = f(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1 - x^2}{y}; \quad y \neq 0. \end{cases}$$

La représentation analytique de f, relativement au repère orthonormé (O, B, C), est l'application :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (x', y') \end{array}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1 - x^2}{y}. \end{cases}$$

— *Image de (Δ) par f*

(Δ) est la droite d'équation :

$$y = 1.$$

Par suite, on obtient successivement :

$$M \in (\Delta) \iff [y = 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}]$$

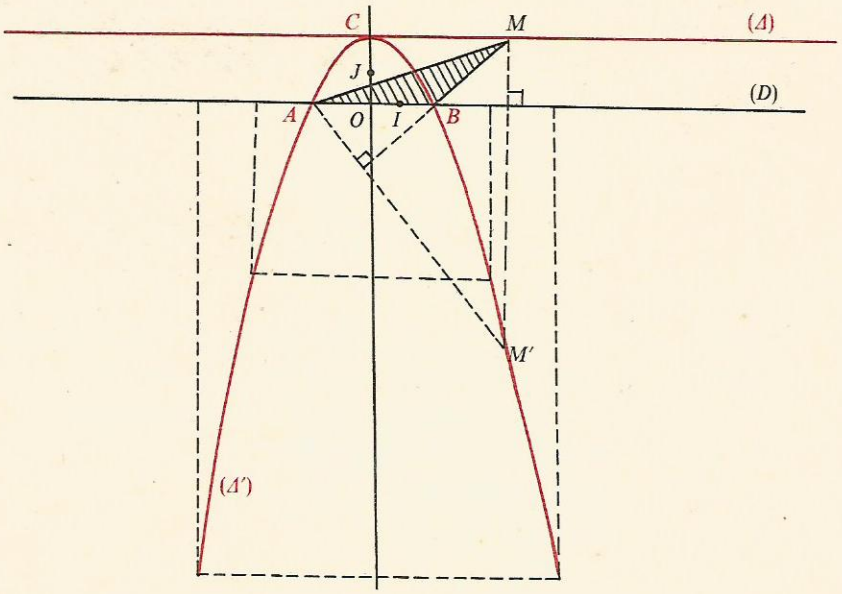
$$M \in (\Delta) \iff [y' = -x'^2 + 1 \text{ et } x' \in \mathbb{R}]$$

$$M \in (\Delta) \iff M' \in (\Delta').$$

Par conséquent :

(Δ') est donc la parabole d'équation :

$$y = -x^2 + 1.$$



Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) On donne la parabole (P) d'équation :

$$y = (x + 1)(x - 3)$$

et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1; 4) dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Trouver l'image (P') de (P) par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2) On donne la droite (D) passant par $A(0; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (1; 2) dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Trouver l'image (D') de (D) par la transformation f ayant pour représentation analytique l'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x - \dfrac{1}{4}y. \end{cases}$$

3) Utiliser la représentation analytique d'une transformation du plan pour démontrer une propriété

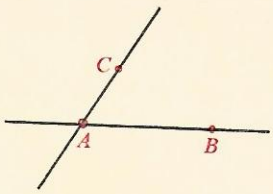
Composée de deux homothéties

On donne deux points distincts du plan A et B, deux nombres réels non nuls k et k'.
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport k,
h' l'homothétie de centre B et de rapport k'.

On veut trouver la nature de la transformation $h' \circ h$.

Nous voulons, ici, par une étude analytique, retrouver des résultats déjà obtenus au chapitre 3.

- *Choix d'un repère et représentation analytique de $h' \circ h$*



– Soit C un point n'appartenant pas à la droite (AB). (A, B, C) est un repère du plan. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est la base de $\mathfrak{V}$ associée au repère (A, B, C).

– Montrer que les représentations analytiques des homothéties h et h', relativement à (A, B, C), sont respectivement les applications

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

$$\varphi' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = k'x + (1 - k') \\ y' = k'y. \end{cases}$

La représentation analytique de $h' \circ h$ relativement à (A, B, C) est donc l'application

$$\varphi' \circ \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = k'kx + (1 - k') \\ y' = k'ky. \end{cases}$

- *Nature de la transformation $h' \circ h$*

Les coordonnées des points de $\mathfrak{F}$ invariants par $h' \circ h$, sont solutions du système :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = k'kx + (1 - k') \\ y = k'ky \end{cases}$$

c'est-à-dire du système :

$$(S) \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (1 - k'k)x = 1 - k' \\ (1 - k'k)y = 0. \end{cases}$$

— *Supposons* $k'k \neq 1$

Le système (S) admet une solution unique :

$$\left(\frac{1-k'}{1-k'k}; 0\right).$$

La transformation $h' \circ h$ admet donc un unique point invariant :

$$\Omega\left(\frac{1-k'}{1-k'k}; 0\right).$$

Soit : $M(x, y)$ un point quelconque du plan
$M'(x', y')$ l'image de M par $h' \circ h$.

$\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées :

$$\left(x - \frac{1-k'}{1-kk'}; y\right)$$

$\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour coordonnées :

$$\left(x' - \frac{1-k'}{1-kk'}; y'\right).$$

Puisque :
$$\begin{cases} x' = k'kx + (1-k') \\ y' = k'ky. \end{cases}$$

On a :
$$x' - \frac{1-k'}{1-k'k} = k'kx + (1-k') - \frac{1-k'}{1-k'k}$$

$$= k'kx + \frac{-k'k(1-k')}{1-k'k}.$$

Par suite :
$$\begin{cases} x' - \dfrac{1-k'}{1-k'k} = k'k\left(x - \dfrac{1-k'}{1-k'k}\right) \\ y' = k'ky \end{cases}$$

d'où :
$$\overrightarrow{\Omega M'} = k'k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

Si $k'k \neq 1$, $h' \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k'k$.
Ω appartient à la droite (AB) et $\dfrac{1-k'}{1-k'k}$ est l'abscisse de Ω, relativement au repère (A, B).

— *Supposons* $k'k = 1$

La représentation analytique de $h' \circ h$, relativement à (A, B, C), est l'application

$$\varphi' \circ \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = x + 1 - k' \\ y' = y. \end{cases}$$

Soit : $M(x, y)$ un point quelconque du plan
$M'(x', y')$ l'image de M par $h' \circ h$.

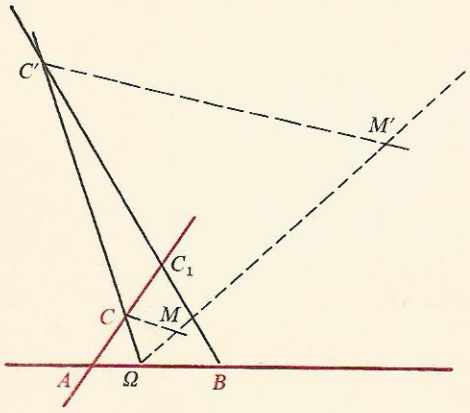
On a : $\begin{cases} x' - x = 1 - k' \\ y' - y = 0 \end{cases}$

d'où : $\overrightarrow{MM'} = (1 - k')\overrightarrow{AB}$.

Si $k'k = 1$, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1 - k')\overrightarrow{AB}$.

- *Constructions*

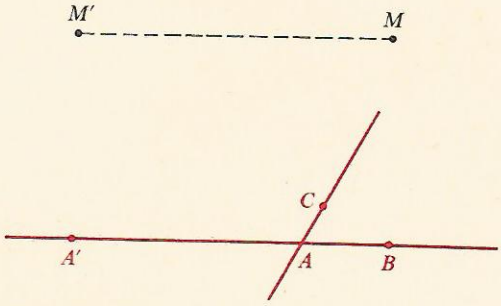
$k = 2$; $k' = 3$



$h' \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 6.

où : $\Omega \in (AB) \cap (CC')$
$C_1 = h(C)$
$C' = h'(C_1) = h' \circ h(C)$.

$k = \frac{1}{3}$; $k' = 3$



$h' \circ h$ est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{AB}$.

où : $\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AB}$
$A' = h' \circ h(A)$.

4 Nature d'une transformation du plan définie par sa représentation analytique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'utiliser la représentation analytique d'une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ pour reconnaître si cette application est une transformation, une isométrie, une similitude...
Nous préciserons, éventuellement, la nature des isométries et des similitudes trouvées.

Considérons l'application f de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases}$$

1) Conditions pour que l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soit la représentation analytique d'une transformation du plan

On sait que :

$$f \text{ est bijective} \iff \varphi \text{ est bijective.}$$

Or :

$$\varphi \text{ est bijective} \iff \left[\begin{array}{l} (x', y') \text{ étant un couple quelconque de } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{ le système :} \\ \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \\ \text{admet une solution unique.} \end{array} \right]$$

D'où le théorème :

L'application :
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \Longleftrightarrow (x', y')$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

est la représentation analytique d'une transformation de $\mathfrak{P}$ si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercice Le plan $\mathfrak{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Montrer que l'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \Longleftrightarrow (x', y')$$

telle que :
$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases}$$

est la représentation analytique d'une application non bijective de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$.

2) Condition pour que l'application φ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ soit la représentation analytique d'une isométrie

Rappelons que :

f est une isométrie $\iff$ [f est une transformation de $\mathcal{P}$ qui conserve la distance de deux points quelconques.]

f est un déplacement $\iff$ [f est une isométrie qui conserve l'orientation de trois points non alignés.]

Exemple 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Considérons l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ (x, y) &\longmapsto (x', y')\end{aligned}$$

telle que : $\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1. \end{cases}$

On veut reconnaître la nature de l'application f.

– Montrer que l'application f est bijective.

– La transformation f est-elle une isométrie?

Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points quelconques du plan.
Désignons par $M'_1(x'_1, y'_1)$ et $M'_2(x'_2, y'_2)$ leurs images respectives.
On a :

$$\begin{aligned}[d(M'_1, M'_1)]^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2\\ &= [(-y_2 + 3) - (-y_1 + 3)]^2 + [(x_2 + 1) - (x_1 + 1)]^2\\ &= (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2\\ &= [d(M_1, M_2)]^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall (M_1, M_2)\in\mathcal{P}\times\mathcal{P} \qquad d[f(M_1), f(M_2)] = d(M_1, M_2)$$

f est donc une isométrie.

• Par une étude graphique précisons la nature de f.

– L'isométrie f est-elle un déplacement?

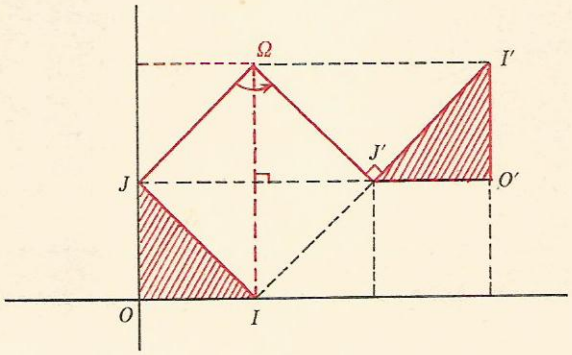
Considérons les trois points non alignés O, I, J.
Soit O', I', J' leurs images respectives par f.

On obtient :

$$O'(3;\,1); \qquad I'(3;\,2); \qquad J'(2;\,1).$$

Construisons ces points :

f	
O	O'
I	I'
J	J'



Les triplets (O, I, J) et (O', I', J') sont de même sens; f est donc un déplacement.

– Précisons la nature du déplacement f.

f n'est pas une translation car $\overrightarrow{OO'} \neq \overrightarrow{II'}$.

f est donc une rotation.

Le centre Ω de cette rotation est le point d'intersection des médiatrices de $[II']$ et $[JJ']$; c'est le point de coordonnées (1; 2).

$(\widehat{\Omega J, \Omega J'})$ est l'angle orienté de cette rotation. Il a pour mesure principale $\frac{II}{2}$.

• Vérifier par le calcul que :

– Ω est l'unique point invariant par f.

– Quel que soit le point M d'image M' par f, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont orthogonaux.

Exemple 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Considérons l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y. \end{cases}$$

On veut reconnaître la nature de l'application f.

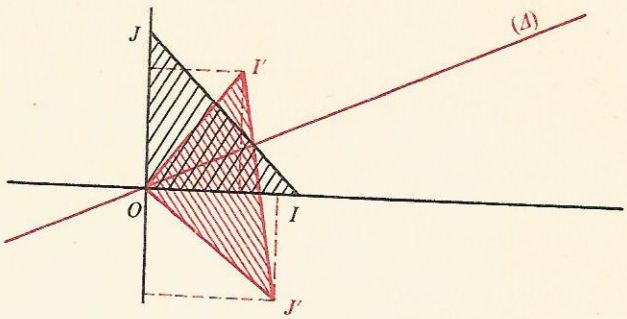
– Montrer que f est une isométrie.

– Par une étude graphique précisons la nature de l'isométrie f.

On obtient :

$$\overset{f}{\curvearrowright}\quad \left[\begin{array}{c|c} O & O \\ I & I' \\ J & J' \end{array}\right] \qquad I'\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right); \qquad J'\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right).$$

Construisons ces points.



Les triples (O, I, J) et (O, I', J') sont de sens contraires; f est donc un retournement.

Puisque : $$OI = OI' \quad \text{et} \quad OJ = OJ',$$

on en déduit que le point O appartient à la médiatrice commune (Δ) des segments $[II']$ et $[JJ']$.

Par ailleurs, on sait que la symétrie orthogonale d'axe (Δ) applique :

$$O \text{ sur } O, \qquad I \text{ sur } I' \quad \text{et} \quad J \text{ sur } J'.$$

Par conséquent, f est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

– Trouver l'équation de (Δ).

Exercices

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants, trouver la nature de l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2. \end{cases}$

3) Condition pour que l'application φ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ soit la représentation analytique d'une similitude

Rappelons que :

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ est une similitude} \\ \text{de rapport } k \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ «multiplie par } k\text{» la distance} \\ \text{de deux points quelconques.} \end{array}\right]$$

Exemple

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Considérons l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (x', y') \end{array}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{5}(3x + 4y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{5}(4x - 3y). \end{cases}$$

On veut reconnaître la nature de l'application f.

– Montrer que l'application f est bijective.

– Montrons que la transformation f n'est pas une isométrie.

Pour cela, O' et I' étant respectivement les images par f, de O et I, comparons OI et $O'I'$.
On obtient :

$$O' = O \quad \text{et} \quad I'\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}; \frac{4\sqrt{2}}{5}\right).$$

Par suite :

$$OI = 1 \quad \text{et} \quad OI' = \sqrt{2}$$
$$OI' = \sqrt{2}OI.$$

La transformation f «multiplie» la distance de O à I par $\sqrt{2}$.

– La transformation f est-elle une similitude?

Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points quelconques, $M'_1(x'_1, y'_1)$ et $M'_2(x'_2, y)$ leurs images respectives par f.
Comparons $d(M_1, M_2)$ et $d(M'_1, M'_2)$.
On obtient successivement :

$$\begin{aligned} [d(M'_1, M'_2)]^2 &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 \\ &= \frac{2}{25}[(3x_1 + 4y_1) - (3x_2 + 4y_2)]^2 + \frac{2}{25}[(4x_1 - 3y_1) - (4x_2 - 3y_2)]^2 \\ &= \frac{2}{25}[3(x_1 - x_2) + 4(y_1 - y_2)]^2 + \frac{2}{25}[4(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)]^2 \\ &= 2[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)]^2 \\ &= 2[d(M_1, M_2)]^2. \\ d(M'_1, M'_2) &= \sqrt{2}\, d(M_1, M_2). \end{aligned}$$

f est donc une similitude de rapport $\sqrt{2}$.

• Désignons par J' l'image de J par f.

Comparer le sens des triplets (O, I, J) et (O, I', J').
Dire si la similitude f est directe ou indirecte.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère l'application f de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ ayant pour représentation analytique, l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') \end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y \\ y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y. \end{cases}$$

Quelle est la nature de f?

Exercices

1 (1). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que :

- le milieu du segment $[MM']$ appartient à OJ),
- le point M' appartient à la parabole d'équation $y = x^2$.

1) M étant un point du plan, donner un programme de construction de son image M' par f.

2) Trouver la représentation analytique de f.

3) Quel est l'ensemble image de f? Justifier.

4) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par f.

2 (1). Mêmes questions pour l'application

$$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que M' soit le barycentre des points pondérés $(O, 2)$, $(I, 1)$ et $(M, 1)$.

3 (1). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x - 2y. \end{cases}$

1) Trouver $f(O)$, $f(I)$ et $f(J)$.

2) Montrer que f est une transformation du plan.

3) Déterminer la transformation réciproque de f.

4) On considère la droite (Δ) d'équation $y = x$. Trouver l'image de (Δ) par f.

4 (1). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

- $\varphi(-1, y) = \left(-1, \frac{y}{2}\right)$;
- pour $(x, y) \neq (-1, y)$,

$$x' = \frac{2x}{1 + x} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2y}{1 + x}.$$

1) Trouver $f(O)$, $f(I)$, $f(J)$ et $f(K)$, où K est le symétrique de I par rapport à O.

2) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par f.

3) Trouver les images respectives de (OI) et (OJ) par f.

5 (1). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
On considère deux applications f_1 et f_2 de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant respectivement pour représentations analytiques les applications

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x'; y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y + 1, \end{cases}$

et :

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x; y) \longmapsto (x'; y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = x + y^2. \end{cases}$

1) f_1 est-elle une transformation du plan? Justifier.

2) Trouver l'image réciproque du point O par f_2. f_2 est-elle une transformation du plan? Justifier.

3) Trouver la représentation analytique de chacune des applications :

$$f_2 \circ f_1 \quad \text{et} \quad f_1 \circ f_2.$$

6 (1). Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x. \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble des points du plan invariants par f.

2) Montrer qu'il existe deux droites (D) et (Δ), globalement invariantes par f.

3) Trouver la représentation analytique de $f \circ f$. Quelle est la nature de $f \circ f$?

7 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Trouver, dans chacun des cas suivants, la représentation analytique de la translation de vecteur $\vec{v}$:

1) $\vec{v}$ a pour couple de coordonnées $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$;

2) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points du plan de couple de coordonnées respectives :

$$(-2, 4) \quad \text{et} \quad (2, -1);$$

3) $\vec{v} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IJ} + 5\overrightarrow{OJ}$;

4) $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$. (On pourra prendre la première coordonnée m de $\vec{v}$ comme paramètre.)

8 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère la droite (D) d'équation $2x - y + 3 = 0$ et la translation f de vecteur $\vec{v}$.

1) Déterminer $\vec{v}$ sachant que :

- $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x - 2y = 0$;
- l'image de (D) par f est la droite (Δ) d'équation :

$$2x - y - 3 = 0.$$

2) Trouver la représentation analytique de f.

9 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Trouver la nature de l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = x - \dfrac{3}{2} \\ y' = y + 1. \end{cases}$

10 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

et la translation f de vecteur $\vec{v}$.

1) Déterminer $\vec{v}$ sachant que l'image de $(\mathcal{C})$ par f est le cercle $(\mathcal{C}')$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0.$$

2) Trouver $f(O)$, $f(I)$, $f(J)$.

11 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$, le point $A(-1, 1)$ et la translation f de vecteur $\vec{v}(\alpha, \beta)$.
Déterminer $\vec{v}$ sachant que $\|\vec{v}\| = 1$ et l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par f passe par A.

12 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Trouver la représentation analytique de la symétrie de centre A dans chacun des cas suivants :

1) A a pour coordonnées $(-1, 2)$;

2) A est le point d'intersection des deux droites d'équations respectives :

$$2x - y + 4 = 0 \quad \text{et} \quad -3x + 2y - 9 = 0;$$

3) A est l'image du point I par la translation de vecteur $\vec{v}(-5; 1)$;

4) A est le centre du cercle d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

13 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) Trouver la représentation analytique de la symétrie centrale s qui applique le point A de coordonnées $(-2, 3)$ sur le point B de coordonnées $(3, 1)$.

2) On considère la droite (D) d'équation $-2x + 3y - 1 = 0$.
Trouver l'image de (D) par s.

14 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Trouver la nature de l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' + x = 3 \\ y' + y = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

15 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 5 \end{cases}$

1) Trouver la nature de f.

2) On considère la translation t qui applique le point I sur le point J.

a) Trouver la représentation analytique de $f \circ t$. Quelle est la nature de cette application?

b) Trouver une application h de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que $t \circ h = f$. Quelle est sa représentation analytique?

16 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) dans chacun des cas suivants :

1) (Δ) passe par le point I et admet le vecteur $\vec{u}(-1, 2)$ pour vecteur directeur;

2) (Δ) passe par les points $A(1, 2)$ et $B(3, 1)$;

3) une équation de (Δ) est $2x - y + 2 = 0$;

4) (Δ) passe par O et est perpendiculaire à la droite d'équation $x - 3y + 2 = 0$.

17 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit s la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite (D) d'équation $y - 2x = 0$.

1) Trouver la représentation analytique de s;

2) Trouver les coordonnées des points I' et J', images respectives de I et J par s.

3) On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon 1. Trouver une équation de $(\mathcal{C}')$, image de $(\mathcal{C})$ par s.

18 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

et : $$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0.$$

1) Déterminer le centre et le rayon de chaque cercle.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont symétriques par rapport à une droite (Δ).

3) Trouver la représentation analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

19 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) *a*) Trouver la représentation analytique de chacune des symétries orthogonales $s_{(OJ)}$ et $s_{(IJ)}$.

b) En déduire la représentation analytique de $s_{(OJ)} \circ s_{(IJ)}$.

2) On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

a) Construire l'image (P') de (P) par $s_{(OJ)} \circ s_{(IJ)}$.

b) Trouver une équation de (P') relativement au repère (O, I, J).

20 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Trouver la représentation analytique de l'homothétie de centre $\Omega(1, 2)$ et de rapport -3.

2) On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$. Trouver une équation de (P'), image de (P) par cette homothétie.

21 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère l'homothétie h qui applique :

$I(1, 0)$ sur $K(3, 1)$

et : $A(2, -2)$ sur $B(0, 7)$.

1) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h.

2) Donner la représentation analytique de h.

22 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère l'homothétie h de centre Ω et de rapport 5 qui applique le point $A(2, 4)$ sur le point $B(6, 8)$.

1) Donner la représentation analytique de h.

2) On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Donner la représentation analytique de $h \circ t$ et celle de $t \circ h$.

23 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la droite (D) d'équation $2x - y + 3 = 0$, le point $\Omega(0, -2)$ et l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.

1) Calculer k, puis donner la représentation analytique de h sachant que l'image de (D) par h est la droite (D') d'équation $4x - 2y + 5 = 0$.

2) On considère l'homothétie h' de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$. Donner la représentation analytique de $h' \circ h$ et celle de $h \circ h'$.

24 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$$

et : $$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0.$$

1) Déterminer les coordonnées du centre Ω de l'homothétie h de rapport positif transformant le cercle $(\mathcal{C})$ en le cercle $(\mathcal{C}')$.

2) On désigne par s la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

a) Trouver la représentation analytique de $s \circ h$;

b) Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par $s \circ h$.

25 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère deux homothéties :
l'homothétie h de centre $A(1, 2)$ et de rapport $\frac{5}{3}$;
l'homothétie h' de centre $B(5, 4)$ et de rapport $\frac{1}{3}$.

1) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie $h' \circ h$.

2) On considère l'homothétie h'' de centre B et de rapport $\frac{5}{3}$.
Trouver la représentation analytique de la translation t telle que $h'' = t \circ h$.

26 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère le point $A(-1, 2)$ et la droite (D) d'équation $2x - y + 4 = 0$.

1) Vérifier que A appartient à (D).

2) Donner la représentation analytique de chacune des transformations suivantes :

a) la symétrie orthogonale s d'axe (D);

b) l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

3) En déduire la représentation analytique de la similitude $h \circ s$.

27 (4). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2. \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Trouver les images respectives par f des points O, I et J. En déduire que f est un retournement.

3) Trouver la nature de f.

28 (4). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 4. \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Trouver les images respectives par f des points O, I, J.
En déduire que f est un déplacement.

3) Trouver la nature de f :

a) par une étude géométrique;

b) par le calcul.

29 (4). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3. \end{cases}$

1) f est-elle une isométrie? Justifier.

2) Montrer que f admet un seul point invariant A dont on déterminera les coordonnées.

3) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et $M'(x', y')$ son image par f. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de x et y. En déduire que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

30 (4). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x + 5 \\ y' = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}. \end{cases}$

1) Montrer que f est bijective. Déterminer la représentation analytique de f^{-1}.

2) Montrer que f est la composée d'une homothétie h de centre 0 et d'une translation t. Déterminer la rapport de h et le vecteur de la translation t.

3) En déduire la nature de f. Donner ses éléments caractéristiques.

31 (4). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}(x\sqrt{3} - y) \\ y' = \frac{3}{2}(x + y\sqrt{3}). \end{cases}$

1) Montrer que f est bijective. Quelle est la représentation analytique de f^{-1}? Quel est l'antécédent du point $A(3, 3\sqrt{3})$?

2) Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points quelconques; soit $M'_1(x'_1, y'_1)$ et $M'_2(x'_2, y'_2)$ leurs images respectives par f.

a) Comparer $d(M_1, M_2)$ et $d(M'_1, M'_2)$.

b) En déduire la nature de f.

Problèmes

32. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon IO.
Soit l'application :

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que :

- $f(0) = 0$;
- $\forall M \in \mathcal{P} - \{0\}$, M' est le milieu du segment $[ON]$, où N est le second point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OM).

* *Étude géométrique*

1) M étant un point du plan, construire son image M' par f.

2) Trouver l'image par f de chacun des ensembles suivants :

a) la droite (OI);

b) la droite (OJ).

3) *a*) Trouver l'ensemble image de f.

b) f est-elle injective? surjective? justifier.

4) Trouver l'ensemble des points du plan invariants par f.

5) On considère le point $A(2, 1)$. Trouver l'image par f du segment $[JA]$.

** *Étude analytique*

1) Montrer que la représentation analytique de f est l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

- $\varphi(0, 0) = (0,0)$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$

$$x' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

2) A l'aide de l'application φ retrouver :

a) l'image par f de chacune des droites (OI) et (OJ);

b) l'ensemble image de f;

c) l'ensemble des points du plan invariants par f;

d) l'image par f du segment $[JA]$.

33. Le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que :

- $f(0) = 0$;
- $\forall M \in \mathcal{P} - \{0\}$ O, M et M' sont alignés et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 4$.

* *Étude géométrique*

1) M étant un point du plan, donner un programme de construction de son image M' par f.

2) Trouver l'image par f :

a) des points I et J;

b) des droites (OI) et (OJ).

3) f est-elle bijective? Si oui, quelle est sa bijection réciproque?

4) Trouver l'ensemble des points du plan invariants par f.

5) Soit M et N deux points distincts de O; soit M' et N' leurs images respectives par f.
On suppose que les points O, M, N ne sont pas alignés.

a) Montrer que les triangles OMN et $OM'N'$ sont semblables.

b) En déduire que M, N, M', N' appartiennent à un même cercle.

6) On considère la droite (Δ) d'équation $x = 1$ et l'image I' par f du point I. On désigne par (Γ) le cercle de diamètre $[OI']$. Montrer que l'image de (Δ) par f est $(\Gamma) - \{0\}$.

** *Étude analytique*

1) M étant un point distinct de O et M' étant son image par f, montrer que :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

2) En déduire la représentation analytique φ de f.

3) A l'aide de l'application φ, retrouver :

a) l'image par f des points I et J;

b) l'image par f des droites (OI) et (OJ);

c) l'image par f de la droite (Δ) d'équation $x = 1$;

d) l'ensemble des points du plan invariants par f.

4) Trouver la représentation analytique de l'application réciproque de f.

5) Trouver l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

34. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère deux droites (D) et (Δ) d'équations respectives :

$$x - y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x = 1.$$

1) Déterminer le point d'intersection Ω de (D) et (Δ).

2) Trouver la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\Omega J, \Omega I)}$.

3) Trouver la représentation analytique de chacune des transformations suivantes :

a) la symétrie $s_{(D)}$ d'axe (D) ;

b) la symétrie $s_{(\Delta)}$ d'axe (Δ) ;

c) la composée $s_{(\Delta)} \circ s_{(D)}$.

4) En déduire la représentation analytique de la rotation r de centre Ω et d'angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{2}$.

5) Trouver l'image par r du cercle circonscrit au triangle ΩIJ. Construire cette image.

6) On considère deux points $K(-1, -2)$ et $L(-1, 0)$.

a) Déterminer l'homothétie h qui applique O sur K et J sur L.

b) Trouver la représentation analytique de $h \circ r$.

c) Trouver l'image par $h \circ r$ du cercle circonscrit au triangle OIJ. Construire cette image.

35. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1. \end{cases}$

1) Montrer que f est bijective. Déterminer sa bijection réciproque. Quelle est l'application $f \circ f$?

2) Déterminer l'image par f de chacune des figures suivantes :

a) la droite (Δ) d'équation :

$$2x - y + 3 = 0;$$

b) le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0.$$

3) Montrer que l'ensemble des points du plan invariants par f est une droite (D) dont on donnera une équation relativement au repère (O, I, J).

4) Montrer que f est une isométrie.

5) Quelles sont les images par f des points O, I et J? En déduire que f est un retournement.

6) Trouver la nature de f.

7) On considère l'homothétie h de centre J et de rapport 3.

a) Trouver la représentation analytique de h et celle de $f \circ h$.

b) Quelle est la nature de $f \circ h$?

c) Déterminer les coordonnées de l'image par $f \circ h$ de chacun des points O, I et J.

36. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

1) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.
On désigne par α la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$.
En écrivant $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, exprimer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OJ}$ en fonction de x et y, puis montrer que :

$$\begin{cases} x = OM \cos \alpha, \\ y = OM \sin \alpha. \end{cases}$$

2) Soit $M'(x', y')$ l'image du point $M(x, y)$ par la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que :

$$\begin{cases} x' = OM \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \\ y' = OM \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

b) En développant $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, exprimer x' et y' en fonction de x et y.

c) Trouver la représentation analytique de la rotation r.

3) On considère la rotation r' de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{3}$.

a) Trouver la représentation analytique de r'.

b) Déterminer l'image par r' de la droite (D) d'équation :

$$x - 2y + 4 = 0.$$

c) Déterminer l'image par r' du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$x^2 - 4x + y^2 = 0.$$

4) On considère l'homothétie h de centre O et de rapport -2.

a) Trouver la représentation analytique de $h \circ r'$ et celle de $r' \circ h$. Ces transformations sont-elles égales?

b) Construire l'image par $h \circ r'$ du cercle $(\mathcal{C})$ et celle de la droite (D).

5) Trouver la représentation analytique de la similitude directe, composée de la rotation de centre O, d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ et de l'homothétie de centre O, de rapport -2.

37. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère deux points $\Omega_1(-2, 1)$ et $\Omega_2(4, 4)$, et deux nombres réels k_1 et k_2 tels que :

$$k_1 = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{m}{m-2},$$

où : $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

On désigne respectivement par h_1 et h_2 l'homothétie de centre Ω_1, de rapport k_1 et l'homothétie de centre Ω_2, de rapport k_2.

* *Étude géométrique*

1) Déterminer la nature de $h_2 \circ h_1$ dans chacun des cas suivants :

a) $m = 1$;

b) $m = -1$.

2) On suppose que $m = -1$.
Construire l'image par $h_2 \circ h_1$ de chacun des ensembles suivants :

a) la droite (OI) ;

b) la droite (OJ) ;

3) Trouver la valeur de m pour que $h_2 \circ h_1$ soit une translation.
Déterminer le vecteur de cette translation.

** *Étude analytique*

1) On suppose que $m = -1$; trouver la représentation analytique φ de $h_2 \circ h_1$.

2) A l'aide de l'application φ :

a) trouver les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$;

b) déterminer les images de (OI) et (OJ) par $h_2 \circ h_1$;

c) déterminer l'image par $h_2 \circ h_1$ du cercle circonscrit au triangle OIJ.

3) Trouver la représentation analytique de $h_2 \circ h_1$ dans le cas général.
Suivant les valeurs de m, préciser la nature de $h_2 \circ h_1$ et ses éléments caractéristiques.

38 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthormé (O, I, J).

* On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 1. \end{cases}$

1) Déterminer les images par f des points O, I et J.
f est-elle une isométrie? Justifier.

2) Trouver l'ensemble des points du plan invariants par f.

3) Montrer que f est bijective.
Quelle est la représentation analytique de f^{-1}.

4) Déterminer l'image (D') par f de la droite (D) d'équation $x + y - 2 = 0$.
Construire (D').

5) Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points quelconques; soit $M'_1(x'_1, x'_2)$ et $M'_2(x'_2, y'_2)$ leurs images respectives par f.

a) Comparer $d(M_1, M_2)$ et $d(M'_1, M'_2)$;

b) En déduire la nature de f.

** On considère l'application g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

1) Déterminer les images par g des points O, I et J.

2) Trouver l'ensemble des points du plan invariants par g.

3) Montrer que g est bijective.
Quelle est la représentation analytique de g^{-1}?

4) Déterminer l'image par g du cercle circonscrit au triangle OIJ.

5) Soit $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ deux points quelconques; soit $M'_1(x'_1, y'_1)$ et $M'_2(x'_2, y'_2)$ leurs images respectives par g.

a) Comparer $d(M_1, M_2)$ et $d(M'_1, M'_2)$.

b) Montrer que g est une rotation dont on déterminera son centre et son angle orienté.

6) On considère le point $\Omega(-1, 0)$ et l'homothétie h de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$.

a) Trouver la représentation analytique de h et celle de $h \circ g$.

b) Vérifier que $h \circ g = f$. (f est l'application étudiée dans *.)

39. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
* On considère deux points $A(2, 0)$ et $B(0, 2)$.
Soit P un point du segment $[AB]$. On désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de P sur (OI) et (OJ).

1) Montrer que $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{ON}\|$ et que MES $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{ON}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

2) Trouver le centre et l'angle orienté de la rotation r qui applique A sur O et M sur N.

3) Soit P' l'image de P par r. Trouver l'ensemble décrit par P' lorsque P décrit le segment $[AB]$. Construire cet ensemble.

4) Montrer que le cercle circonscrit au triangle OAB est globalement invariant par r.

** On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2. \end{cases}$

1) Trouver les images par f des points A, O et B.

2) Pour tout point P du segment $[AB]$, montrer que l'image par f du point M est le point N.

3) Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle orienté.
f et r sont-elles égales? Justifier (r est la rotation trouvée dans *).

40. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

* On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ayant pour représentation analytique l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

1) Trouver les images par f des points O, I et J.

2) Déterminer l'image par f de la droite (OI). Construire cette image.

3) Montrer que l'ensemble des points du plan, invariants par f, est une droite (D) dont on précisera une équation. Construire (D).

4) Soit $M(x, y)$ un point n'appartenant pas à (D) et $M'(x', y')$ son image par f.

a) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à (D).

b) Montrer que (MM') garde la même direction lorsque M décrit $\mathcal{P} - (D)$.

c) En déduire une construction de M', connaissant le point M.

** On considère la droite (Δ) d'équation $x - 2y + 2 = 0$.
Soit l'application

$$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que :

- le milieu du segment $[MM']$ appartient à (Δ);
- $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur directeur de la droite (D) obtenue dans *.

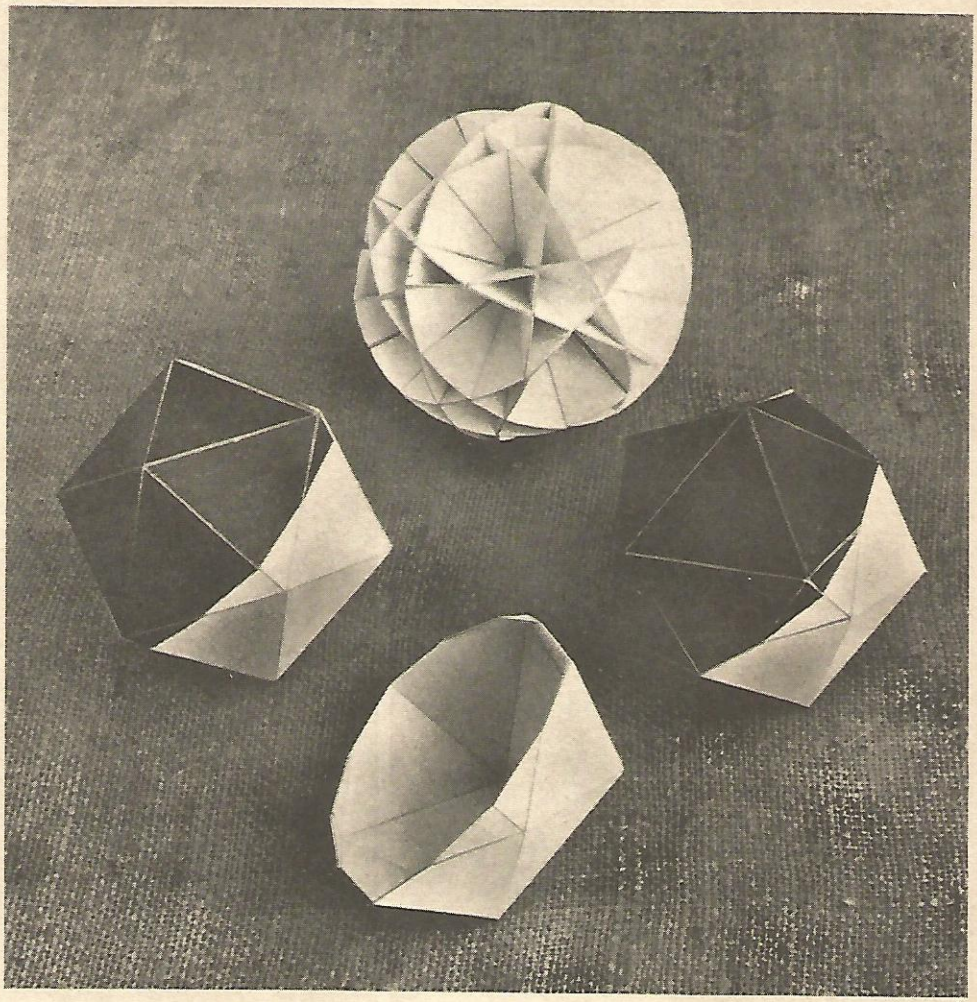
1) Trouver la représentation analytique de g et celle de $g \circ f$ (f est l'application étudiée dans *).

2) Reconnaître l'application $g \circ f$:

a) par une étude géométrique;

b) en utilisant sa représentation analytique.

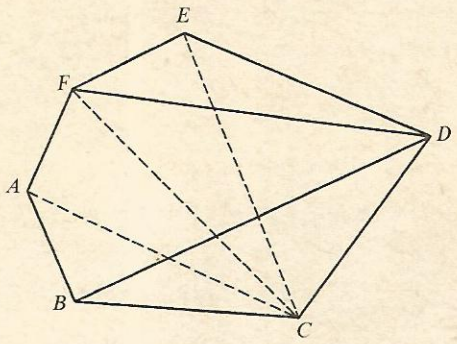
5 Les polyèdres



Extrait de A. Holden – Formes, espaces et symétries. CEDIC.

1 Les polyèdres

• Nous nous proposons dans cette leçon, de **présenter** des *polyèdres*, solides limités par des *faces* planes. Nous désignerons par *arête* tout segment commun à deux faces et par *sommet* tout point commun à plusieurs arêtes.



ABCDEF est un polyèdre, il a :

– sept faces qui sont :

les six triangles : *ABC*, *ACF*, *FCE*, *ECD*, *FDE*, *BCD*
le quadrilatère *ABDF*;

– onze arêtes qui sont :

$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, ...

– six sommets qui sont :

A, B, C, D. E, F.

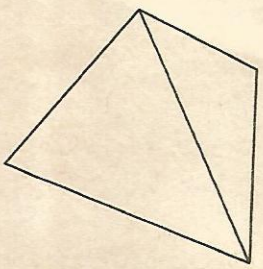
• Nous appellerons *section plane* d'un polyèdre, l'intersection d'un plan avec la surface qui délimite ce polyèdre.

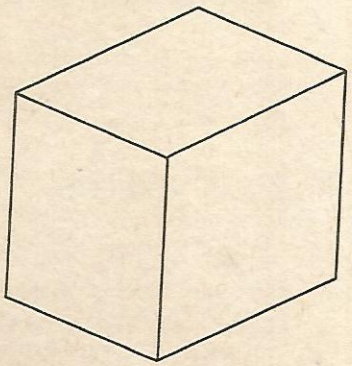
• Le *tétraèdre*, *l'hexaèdre*, *l'octaèdre*, le *dodécaèdre*, *l'icosaèdre* sont des polyèdres qui ont respectivement 4, 6, 8, 12 et 20 faces.

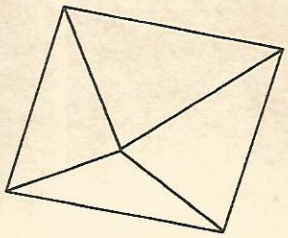
• Un polyèdre est dit *convexe* s'il est entièrement situé d'un même côté du plan d'une quelconque de ses faces.

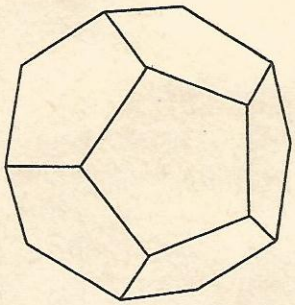
• Chacun des cinq polyèdres convexes ci-dessous possède les propriétés suivantes :

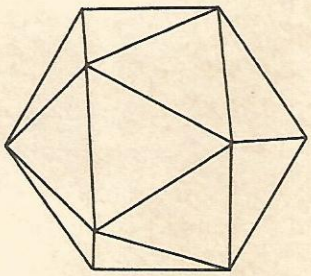
– ses faces sont des polygones réguliers « isométriques »,
– chacun de ses sommets appartient à un même nombre de faces.





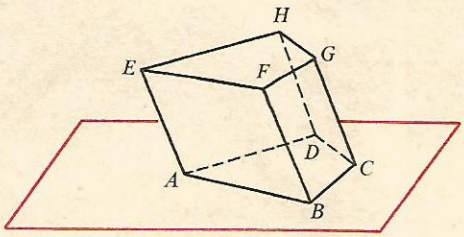






2 Les prismes et les pyramides

a) • *ABCDEFGH* est un *prisme*

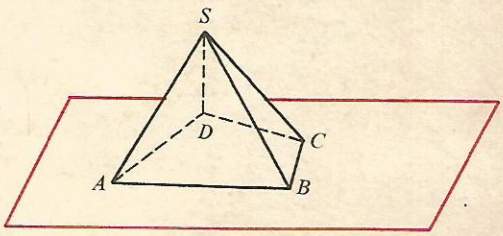


— *Ses bases : ABCD* et *EFGH* sont des polygones inclus dans des plans parallèles.

— *Ses faces latérales : EABF, FBCG, GCDH* et *HDAE* sont des parallélogrammes.

— *Ses arêtes latérales :* [*EA*], [*FB*], [*GC*] et [*HD*] sont donc des segments de même mesure et de supports parallèles.

• *SABCD* est une *pyramide*

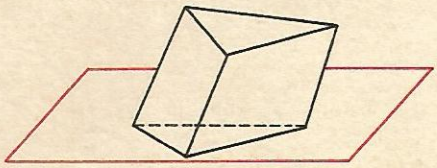


— *Sa base ABCD* est un polygone.

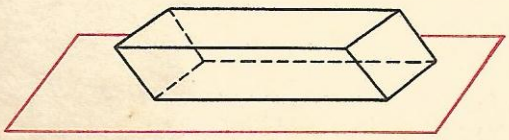
— *Ses faces latérales : SAB, SBC, SCD* et *SDA* sont des triangles.

— *Son sommet S* est le point d'intersection de ses *arêtes latérales :* [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*].

b) • Un prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, ... suivant que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones...



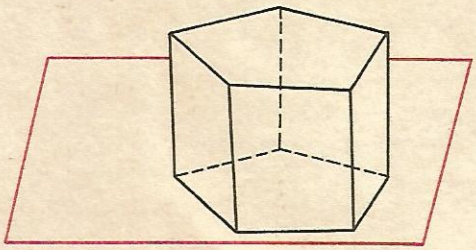
Un parallélépipède est un prisme dont les 6 faces sont des parallélogrammes.



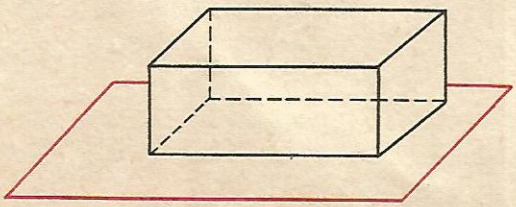
c) • *Prisme droit*

– Le prisme peut être *droit* ou *oblique* suivant que ses faces latérales sont des rectangles ou non.

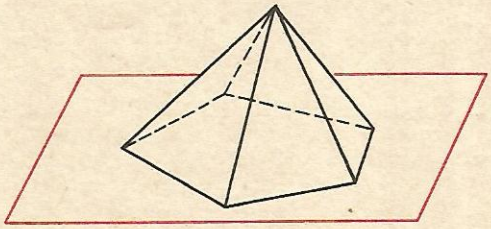
– Un prisme droit dont les bases sont des polygones réguliers est un prisme *régulier*.



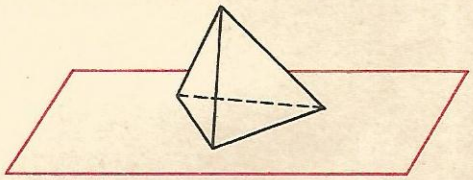
– Un parallélépipède dont les 6 faces sont des rectangles est un *parallélépipède rectangle*.



• Une pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*... suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone...

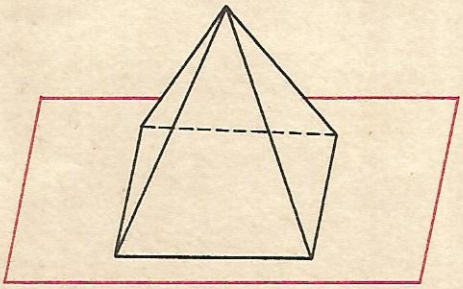


Un tétraèdre est une pyramide dont les 4 faces sont des triangles.

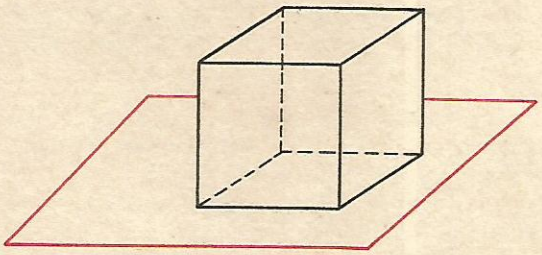


• *Pyramide régulière*

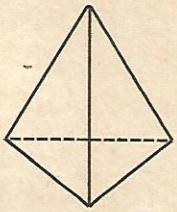
– Une pyramide dont la base est un polygone régulier et les arêtes latérales ont la même mesure est une pyramide *régulière*.



— Un parallélépipède rectangle dont les 6 faces sont des carrés est un *cube*.



— Une pyramide régulière dont les faces sont des triangles équilatéraux est un *tétraèdre régulier*.



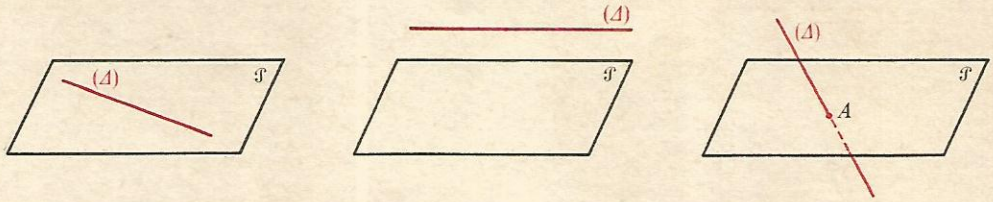
6 Orthogonalité dans l'espace

Leçon 1 : DROITES ET PLANS DE L'ESPACE
Leçon 2 : ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE
Leçon 3 : PROJECTION ORTHOGONALE



1 Droites et plans de l'espace $\mathcal{E}$ (rappels)

1) Positions relatives d'une droite et d'un plan



$(\Delta) \subset \mathcal{P}$ $\quad$ $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \varnothing$

La droite (Δ) est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

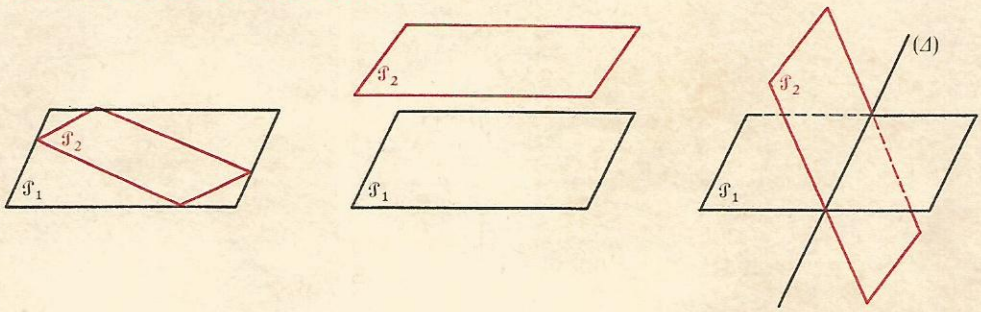
$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$

La droite (Δ) est sécante au plan $\mathcal{P}$.

Dans l'espace une droite est :

ou bien { sécante / parallèle } à un plan.

2) Positions relatives de deux plans



$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ $\quad$ $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Dans l'espace, deux plans sont :

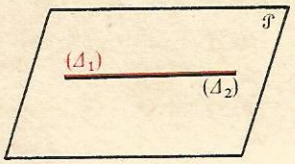
ou bien { sécants / parallèles.

3) Positions relatives de deux droites de $\mathcal{E}$

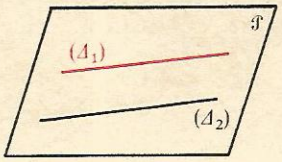
Définition

Si deux droites de l'espace sont incluses dans un même plan, on dit qu'elles sont coplanaires.

- **Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont coplanaires.**

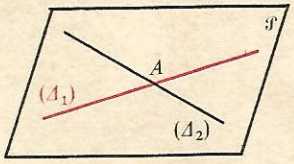


$(\Delta_1) = (\Delta_2)$



$(\Delta_1) \subset \mathcal{P}$; $(\Delta_2) \subset \mathcal{P}$
$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \Phi$

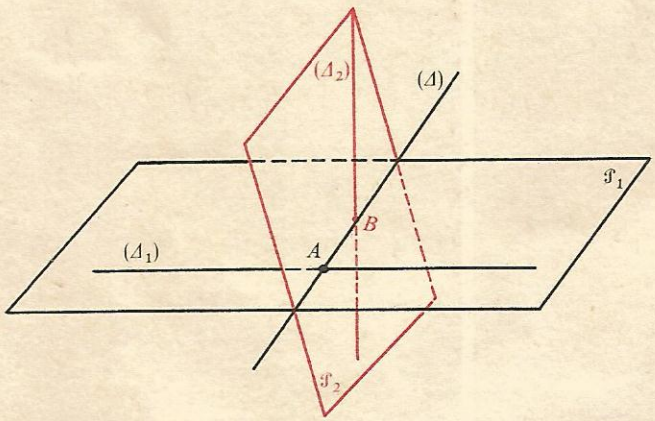
Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles.



$(\Delta_1) \subset \mathcal{P}$; $(\Delta_2) \subset \mathcal{P}$
$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{A\}$

Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes.

- **Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.**



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$
$\{A\} = (\Delta_1) \cap \mathcal{P}_1$
$\{B\} = (\Delta_2) \cap \mathcal{P}_2$
$(\Delta_1) \subset \mathcal{P}_1$
$(\Delta_2) \subset \mathcal{P}_2$

Dans l'espace, deux droites sont :

ou bien
- coplanaires
  - parallèles
  - sécantes
- non coplanaires.

Définition

(*D*) étant une droite de l'espace, on appelle direction de la droite (*D*), l'ensemble des droites de l'espace qui sont parallèles à (*D*).

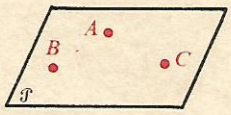
Montrer que :

– La relation : « ... est parallèle à ... » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des droites de l'espace.
– Les classes d'équivalence sont les directions de droites.

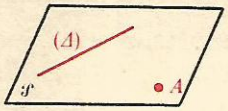
4) Détermination d'un plan, d'une droite de $\mathcal{E}$

– Un plan est déterminé par :

ou
- trois points non alignés
- une droite et un point ne lui appartenant pas
- deux droites sécantes
- deux droites parallèles et disjointes.



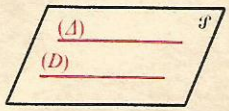
A, *B*, *C* non alignés



$A \notin (\Delta)$



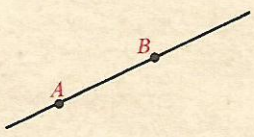
$(\Delta) \cap (D) = \{A\}$



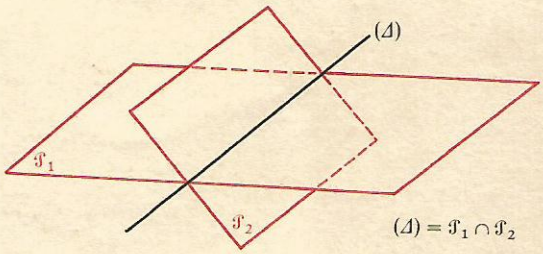
$(\Delta) \cap (D) = \varnothing$
$(\Delta) \parallel (D)$

– Une droite est déterminée par :

ou
- deux points distincts
- deux plans sécants.



$(\Delta) = (AB)$

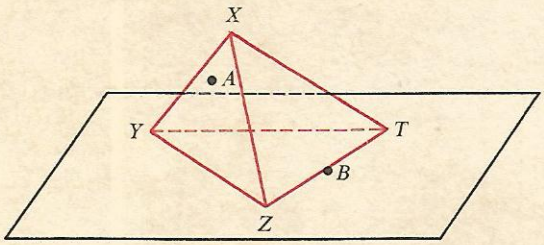


$(\Delta) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Exercices 1) *a*) On donne deux droites non coplanaires (D_1) et (D_2) et un point *A* n'appartenant pas à $(D_1) \cup (D_2)$.

– Montrer qu'il existe 0 ou 1 droite (D) passant par A et sécante à (D_1) et à (D_2).
– Donner un programme de construction de cette droite lorsqu'elle existe.

b) **Application :** $XYZT$ est un tétraèdre.

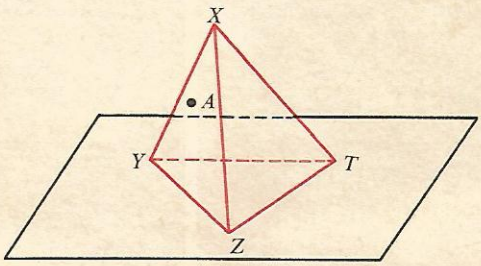


Donner la droite passant par A sécante à (XZ) et à (YT) dans chacun des cas suivants :

– $A \in (XYZ)$
– $B \in (ZT)$ et $A \in (XBY)$.

2) On donne un plan $\mathcal{P}$ et un point A n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. Construire le plan passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$.

b) **Application :** $XYZT$ est un tétraèdre.



$(YZT) = \mathcal{P}$
$A \in (XYZ)$

– Construire un plan $\mathcal{P}'$ passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$.
– Dans le cas de la figure ci-dessus, tracer la droite d'intersection de ce plan $\mathcal{P}'$ avec le plan de la face XZT du tétraèdre $XYZT$.

3) On donne deux droites non coplanaires.
Montrer qu'il existe un unique plan contenant l'une de ces droites et parallèle à l'autre.
Donner un programme de construction de ce plan.

4) Montrer que :

a) Si une droite (D) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, tout plan sécant à $\mathcal{P}$ et contenant (D) coupe le plan $\mathcal{P}$ suivant une droite parallèle à (D).

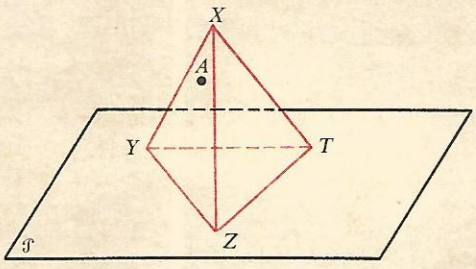
b) Si deux plans sécants sont parallèles à une même droite, leur intersection est parallèle à cette droite.

c) Si deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contiennent respectivement deux droites parallèles (D_1) et (D_2), alors leur intersection est parallèle à ces droites.

5) *a*) On donne un plan $\mathcal{P}$, une droite (D) et un point A n'appartenant pas à $(D) \cup \mathcal{P}$.
Construire une droite passant par A, parallèle à $\mathcal{P}$ et sécante à (D).
Combien de droites peut-on construire?
Envisager les cas suivants :

- (D) et $\mathcal{P}$ sont sécants,
- (D) est incluse dans $\mathcal{P}$,
- (D) et $\mathcal{P}$ sont disjoints.

b) **Application :** $XYZT$ est un tétraèdre.



$\mathcal{P} = (YZT)$
$(D) = (XT)$
$A \in (XYZ)$

2 Orthogonalité dans l'espace $\mathcal{E}$

Dans ce paragraphe nous utiliserons comme support intuitif un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ réalisé en carton.

1) Distance dans l'espace

a) Introduction

• En classe de Quatrième, on a défini une distance dans le plan $\mathcal{P}$.
C'est une application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque bipoint (M, N), associe un nombre réel noté $d(M, N)$ et qui possède les propriétés suivantes :

Quels que soient les points M, N, P du plan $\mathcal{P}$:

$$d(M, N) \geqslant 0$$
$$[d(M, N) = 0] \iff [M = N]$$
$$d(M, N) = d(N, M)$$
$$d(M, N) \leqslant d(M, P) + d(P, N).$$

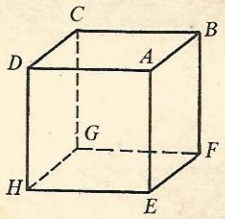
De plus dans le plan $\mathcal{P}$, le théorème de Pythagore permet d'affirmer que :

$$\left[\begin{array}{l}MNP \text{ est un triangle} \\ \text{rectangle en } P\end{array}\right] \iff [d^2(M, N) = d^2(M, P) + d^2(N, P)].$$

• Nous admettrons qu'on peut définir dans l'espace une distance qui, dans chaque plan, possède les propriétés énoncées ci-dessus. Cette distance est donc une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$.

b) **Distance et perspective cavalière**

Le dessin ci-dessous représente le parallélépipède $ABCDEFGH$ ayant toutes ses arêtes de même mesure.



Comparer sur la figure la mesure des arêtes $[AB]$ et $[AD]$.
On vérifie ainsi que :

La perspective cavalière ne conserve pas la distance.

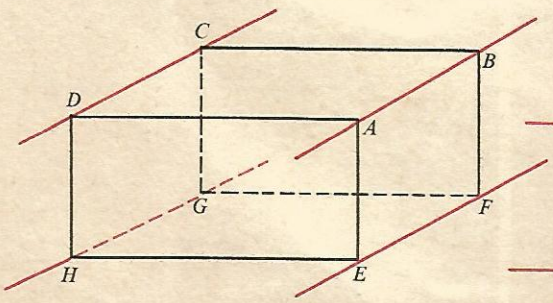
En géométrie de l'espace, il ne nous est donc pas possible de conjecturer certaines propriétés, en effectuant des mesures sur une figure.

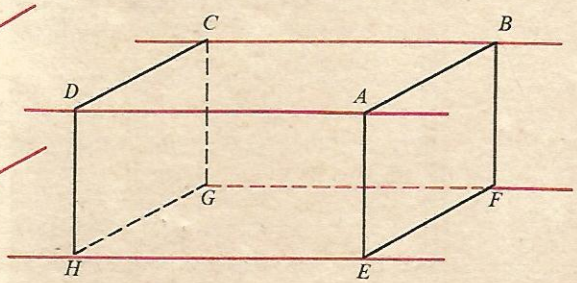
2) Droites orthogonales

a) **Activité préparatoire 1 : directions orthogonales**

On donne le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
Considérons dir (EF) et dir (DA).

- (AB), (CD), (EF), (GH) sont des droites de dir (EF)
- (BC), (DA), (FG), (HE) sont des droites de dir (DA).





Parmi ces droites de dir (DA), deux sont coplanaires avec (AB) : ce sont les droites (BC) et (DA).

Dans le plan (ABD) :
(AB) est perpendiculaire à (BC)
(AB) est perpendiculaire à (DA). (Justifier.)

La considération d'autres exemples permet de remarquer que :

(L_1) désignant une droite de dir (DA)
(L_2) désignant une droite de dir (EF),

si (L_1) et (L_2) sont coplanaires, ces deux droites sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

— Plus généralement,

Étant donné deux directions distinctes de droites, δ et λ; désignons par :

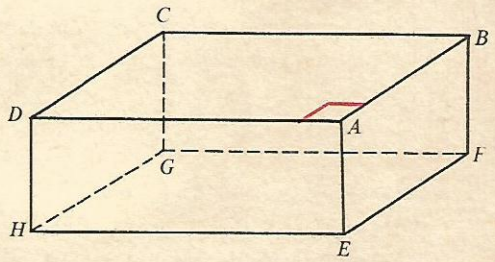
— M un point quelconque de l'espace
— (D_M) la droite de δ passant par M
— (Δ_M) la droite de λ passant par M
— $\mathcal{P}_M$ le plan déterminé par les deux droites (D_M) et (Δ_M), sécantes en M.

On dit que *la direction δ est orthogonale à la direction λ* lorsque, pour tout point M de l'espace, (D_M) est perpendiculaire à (Δ_M) dans le plan $\mathcal{P}_M$.

Notons que si δ est orthogonale à λ, λ est orthogonale à δ.
Nous dirons que *les directions de droites δ et λ sont orthogonales.*

Remarque

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.



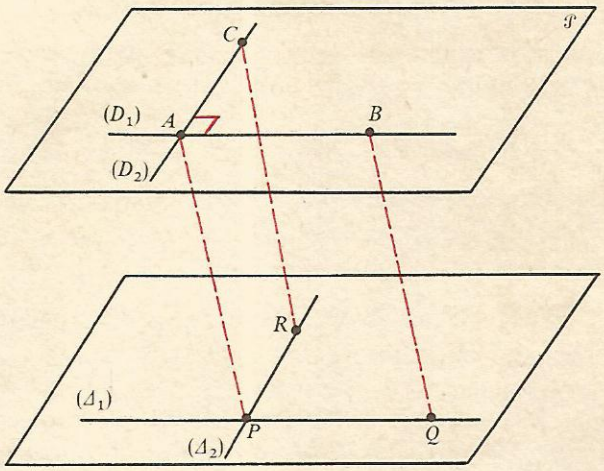
Sur la figure ci-dessus, l'angle dessiné en rouge représente l'angle droit BAD. On voit clairement que la perspective cavalière ne conserve pas les angles. C'est pourquoi, sur le dessin représentant une figure de l'espace, il est préférable de faire ressortir la perpendicularité de deux droites par le symbole ⌐.

La définition de l'orthogonalité de deux directions est d'une utilisation malaisée. Les propriétés suivantes permettent de caractériser deux directions orthogonales :

b) **Activité préparatoire 2 : Comment obtenir deux directions orthogonales?**

Montrons que :

Si (D_1) et (D_2) sont deux droites perpendiculaires dans un plan $\mathcal{P}$, alors dir (D_1) et dir (D_2) sont orthogonales.



Soit (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en A et perpendiculaires dans le plan $\mathcal{P}$ qu'elles déterminent.
Soit P un point quelconque de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.
On désigne respectivement par (Δ_1) et (Δ_2) les droites de dir (D_1) et de dir (D_2) qui passent par P.
Soit : B un point de (D_1) distinct de A.
C un point de (D_2) distinct de A.

Dans le plan $\mathcal{P}$, le triangle ABC est rectangle en A et on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Dans le plan déterminé par les deux droites parallèles (D_1) et (Δ_1), on désigne par Q l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AP}$.
Les propriétés de cette translation permettent d'écrire :

$$AB = PQ; \qquad (AP) /\!/ (BQ); \qquad (\Delta_1) = (PQ).$$

Dans le plan déterminé par les deux droites parallèles (D_2) et (Δ_2), désignons par R l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AP}$.
Les propriétés de cette translation permettent d'écrire :

$$AC = PR; \qquad (AP) /\!/ (CR); \qquad (\Delta_2) = (PR).$$

Par conséquent : $(BQ) /\!/ (CR)$. (Justifier.)

Dans le plan déterminé par les droites parallèles disjointes (BQ) et (CR) $CBQR$ est un parallélogramme. (Justifier.)
Or :

$$AB = PQ$$
$$AC = PR$$
$$CB = RQ$$
$$AB^2 + AC^2 = CB^2.$$

Par suite :

$$PQ^2 + PR^2 = RQ^2.$$

Dans le plan déterminé par les droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2), le triangle PQR est rectangle en P. (Justifier.)

Les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont donc perpendiculaires.

Notons que si le point P appartient au plan $\mathcal{P}$, les propriétés de la géométrie du plan permettent de montrer aisément que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

En conclusion, quel que soit le point P, dir (D_1) et dir (D_2) sont telles que (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires dans le plan que ces deux droites sécantes déterminent.

dir (D_1) et dir (D_2) sont donc orthogonales.

c) **Activité préparatoire 3 : Comment reconnaître deux directions orthogonales?**

A titre d'exercice, on pourra démontrer que :

> Une direction δ est orthogonale à une direction λ s'il existe une droite de δ et une droite de λ qui soient coplanaires et perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

Exercice On donne le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

- Montrer que dir (AE) est orthogonale à dir (DC).
- Trouver deux directions distinctes orthogonales à dir (GF).

d) **Droites orthogonales**

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, les droites (AD) et (EF) appartiennent respectivement à deux directions orthogonales. (Justifier.)

On dira que ces *droites sont orthogonales.*

Définition

> On dit que deux droites (D) et (Δ) sont orthogonales lorsque dir (D) et dir (Δ) sont orthogonales.

On note $(D) \perp (\Delta)$.
La propriété suivante se déduit aisément de la définition.

Propriété

> Si deux droites sont orthogonales, toute droite parallèle à l'une est orthogonale à toute droite parallèle à l'autre.

Remarques

– Deux droites orthogonales peuvent être non coplanaires.

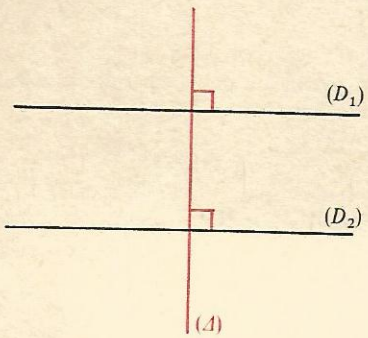
– Deux droites perpendiculaires dans un plan sont orthogonales.

– On se gardera d'étendre à l'espace les propriétés, dans le plan, des droites orthogonales.

Par exemple :

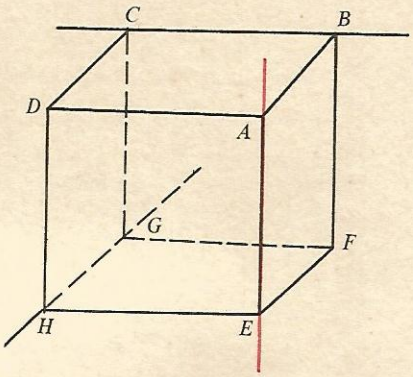
attention

dans le plan $\mathcal{P}$



Les droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires à (Δ), sont parallèles.

dans l'espace $\mathcal{E}$



Les droites (CB) et (HG) sont orthogonales à (AE).
Les droites (CB) et (HG) sont-elles parallèles?

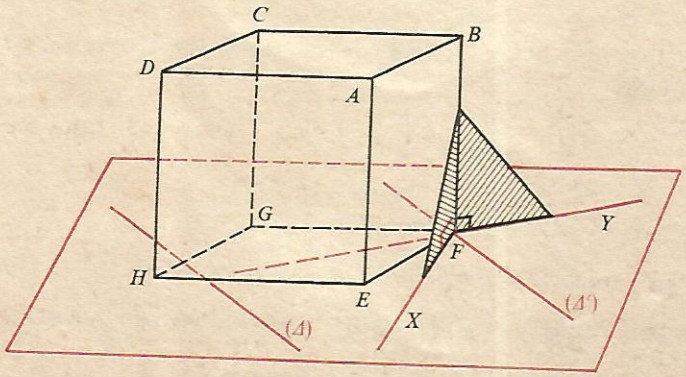
Exercice Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, trouver six droites orthogonales à (AB). Justifier.

3) Droites et plans orthogonaux

a) Définitions

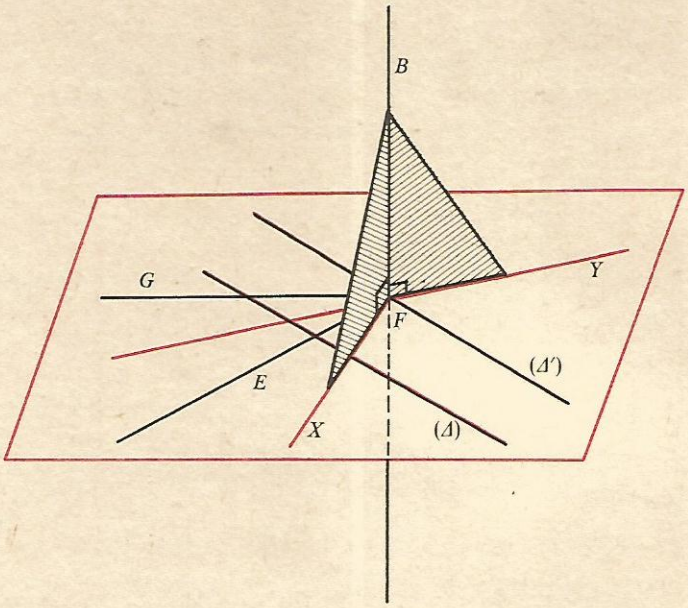
Observons le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ réalisé en carton.

– On sait que les droites (FG) et (FE) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (BF).



$(FG) \perp (BF)$
$(FE) \perp (BF)$.

— A l'aide d'une équerre placée comme l'indique la figure ci-dessous, on peut vérifier que toute droite du plan (FGE) passant par F est perpendiculaire à la droite (BF).



$(FX) \subset$ plan (FGE)
$(FY) \subset$ plan (FGE)
$(\Delta) \subset$ plan (FGE)
$(\Delta') \parallel (\Delta)$; $F \in (\Delta')$

$(FB) \perp (FX)$
$(FB) \perp (FY)$.

— De plus, (Δ) étant une droite quelconque du plan (FGE), considérons la droite (Δ') passant par F et parallèle à (Δ).

On sait que (Δ') est perpendiculaire à (BF), par conséquent la droite (Δ) est orthogonale à la droite (BF).

En conclusion, la droite (BF) est orthogonale à toute droite du plan (FGE).

On dira que : *la droite (BF) est orthogonale au plan (FGE).*

Définition

On dit qu'une droite (Δ) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

On note $(\Delta) \perp \mathcal{P}$.

Remarques

• Dans l'espace, nous avons vu qu'une droite et un plan ne peuvent être que sécants ou parallèles.
Si une droite (Δ) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, elle ne peut être parallèle à ce plan. (Justifier.)
Elle est donc sécante en un point A à ce plan.

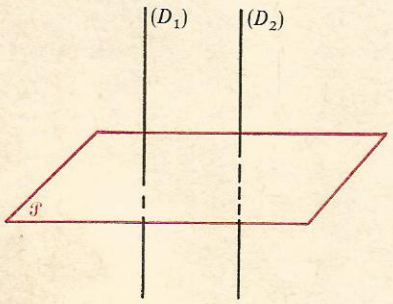
On dira que : *La droite (Δ) est orthogonale en A au plan $\mathcal{P}$.*

• Si une droite (Δ) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, on dira aussi que le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite (Δ).

b) **Conséquences de la définition**

Les propriétés qui suivent sont des conséquences de la définition et pourront être démontrées à titre d'exercice.

Si une droite est orthogonale à un plan, toute droite parallèle à cette droite est orthogonale à ce plan.



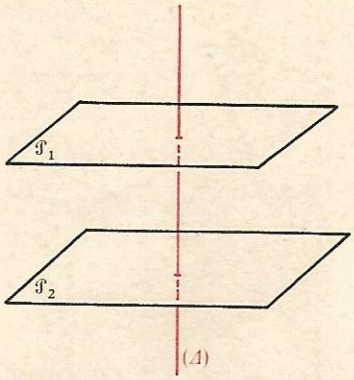
$(D_1) \perp \mathcal{P}$; $(D_1) \parallel (D_2)$

$$\left[\begin{array}{c}(D_1) \perp \mathcal{P} \\ \boxed{\text{et}} \\ (D_1) \parallel (D_2)\end{array}\right] \Longrightarrow [(D_2) \perp \mathcal{P}]$$

ou encore :

— Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Si un plan est orthogonal à une droite, tout plan parallèle à ce plan est orthogonal à cette droite.



$(\Delta) \perp \mathcal{P}_1$; $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

$$\left[\begin{array}{c}(\Delta) \perp \mathcal{P}_1 \\ \boxed{\text{et}} \\ \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2\end{array}\right] \Longrightarrow [(\Delta) \perp \mathcal{P}_2]$$

ou encore :

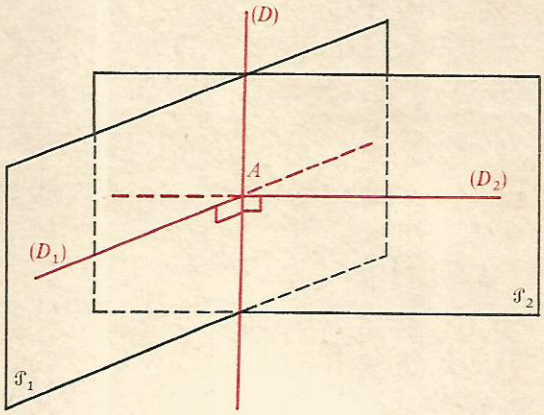
— Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

c) **Critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan**

• **Activité préparatoire :**

Comment obtenir un plan orthogonal à une droite en un point?

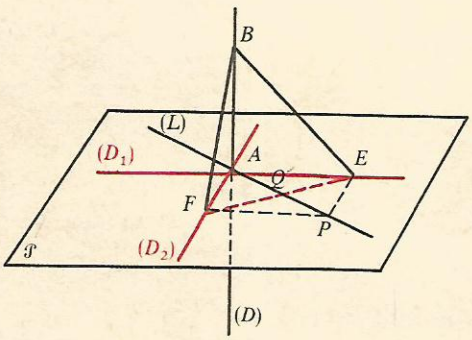
On donne une droite (D) et un point A de (D).
On veut construire un plan $\mathcal{P}$ tel que la droite (D) soit orthogonale à $\mathcal{P}$ en A.
Considérons deux plans distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant (D).
Construisons respectivement dans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires à (D) en A.
Les droites (D_1) et (D_2) sécantes en A, déterminent un plan $\mathcal{P}$.



$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = (D)$
$(D_1) \subset \mathcal{S}_1$; $(D_1) \perp (D)$; $(D_1) \cap (D) = \{A\}$
$(D_2) \subset \mathcal{S}_2$; $(D_2) \perp (D)$; $(D_2) \cap (D) = \{A\}$.

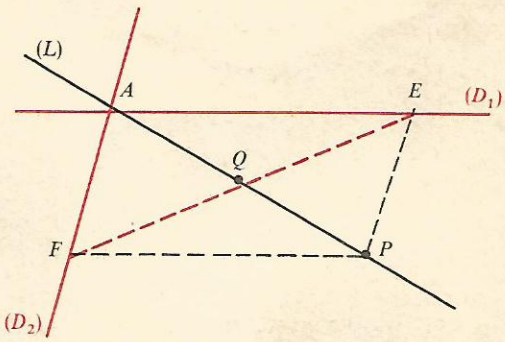
– Montrons que la droite (D) est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathcal{S}$ passant par A.

Soit (L) une droite du plan $\mathcal{S}$ passant par A; B un point de (D) et P un point de (L), tous deux distincts de A.



$(D) \cap \mathcal{S} = \{A\}$
$(L) \subset \mathcal{S}$
$B \in (D)$
$P \in (L)$.

Dans le plan $\mathcal{S}$,



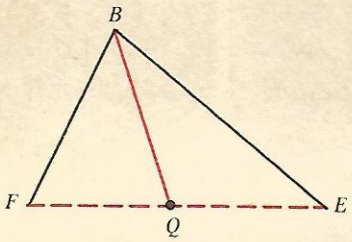
E est le projeté de P sur (D_1) parallèlement à (D_2);
F est le projeté de P sur (D_2) parallèlement à (D_1).

Ainsi, $AEPF$ est un parallélogramme; désignons par Q son centre de symétrie.

En utilisant le produit scalaire dans le plan $\mathcal{P}$, on peut montrer que :

$$AQ^2 = \frac{AE^2}{2} + \frac{AF^2}{2} - \frac{EF^2}{4}. \qquad (1)$$

Dans le plan (BEF),



en utilisant le produit scalaire dans le plan (BEF), on peut montrer que :

$$BQ^2 = \frac{EB^2}{2} + \frac{BF^2}{2} - \frac{EF^2}{4}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) permettent d'obtenir :

$$BQ^2 - AQ^2 = \frac{BE^2 - AE^2}{2} + \frac{BF^2 - AF^2}{2}. \qquad (3)$$

Les triangles ABF et ABE étant rectangles en A, on a :

$$BE^2 - AE^2 = AB^2$$
$$BF^2 - AF^2 = AB^2$$

En appliquant le théorème de Pythagore respectivement dans les plans (ABF) et (ABE).

Puis par substitution dans l'égalité (3), on obtient :

$$BQ^2 - AQ^2 = AB^2$$

ou encore :

$$BQ^2 = AB^2 + AQ^2.$$

Les droites (D) et (L) sécantes en A déterminent un plan dans lequel le triangle BAQ est rectangle en A. (Justifier.)
Dans ce plan, les droites (D) et (L) sont donc perpendiculaires.
Donc, la droite (D) est perpendiculaire à toute droite de $\mathcal{P}$ passant par A.

– Montrons que la droite (D) est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.

Soit (Δ) une droite quelconque du plan $\mathcal{P}$.
Dans le plan $\mathcal{P}$, il existe une droite passant par A et parallèle à (Δ); désignons-la par (Δ').
D'après la conclusion précédente, (D) est perpendiculaire à (Δ').

Par conséquent (D) est orthogonale à (Δ).
La droite (D) est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$, elle est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

– D'où la conclusion :

> Si une droite est perpendiculaire à deux droites sécantes en un de ses points, elle est orthogonale au plan que ces deux droites déterminent.

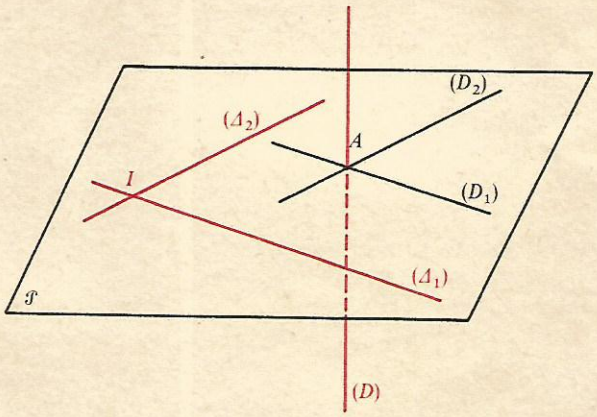
• *Comment reconnaître un plan orthogonal à une droite?*

La conclusion précédente va permettre de démontrer que :

> Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes, elle est orthogonale au plan que ces deux droites déterminent.

En effet :

Soit une droite (D) orthogonale à deux droites (Δ_1) et (Δ_2) sécantes en un point I.
Montrons que la droite (D) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ que les deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2) déterminent.



dir (D) n'est pas représentée dans le plan $\mathcal{P}$ car, dans un plan, il n'existe pas de droite perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.
La droite (D) n'est donc pas parallèle au plan $\mathcal{P}$; elle est sécante à ce plan.
Soit A le point d'intersection de (D) et $\mathcal{P}$.
Dans le plan $\mathcal{P}$, soit (D_1) et (D_2) les droites passant par A et respectivement parallèles à (Δ_1) et (Δ_2).

Montrer que la droite (D) est perpendiculaire aux droites (D_1) et (D_2).

On en déduit que la droite (D) est orthogonale au plan que les deux droites sécantes (D_1) et (D_2) déterminent; c'est-à-dire au plan $\mathcal{P}$.

Exercice On donne un cube $ABCDEFGH$.
Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACE).

d) **Propriétés**

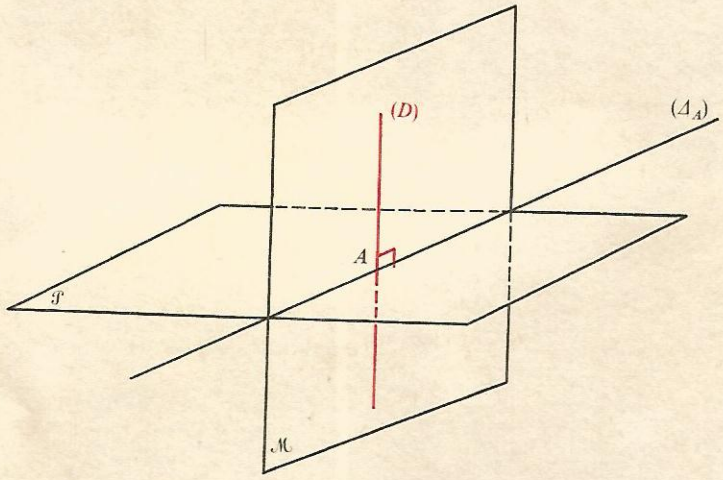
• **Activité préparatoire :**

Quelles sont les directions de droites qui sont représentées dans un plan orthogonal à une droite donnée?

Soit un plan $\mathcal{P}$ et soit (D) une droite orthogonale à ce plan.

– Par définition de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, toute direction de droite représentée dans le plan $\mathcal{P}$ est orthogonale à dir (D).

– Inversement, toute direction orthogonale à dir (D) est-elle représentée dans $\mathcal{P}$?



Soit δ une direction de droite orthogonale à dir (D).
Désignons par A le point d'intersection de la droite (D) avec le plan $\mathcal{P}$; et par (Δ_A) la droite de δ, qui passe par A.

On a :

$$(D) \perp (\Delta_A).$$

Les droites (D) et (Δ_A), sécantes en A déterminent un plan $\mathcal{M}$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$, distincts et ayant le point A en commun, sont sécants suivant une droite qui passe par A.

Cette droite étant incluse dans $\mathcal{P}$, est orthogonale à (D). D'autre part, cette droite est incluse dans $\mathcal{M}$: c'est, dans ce plan, la droite perpendiculaire à (D) menée par A c'est-à-dire, la droite (Δ_A).

La direction δ est représentée dans le plan $\mathcal{P}$.

En conclusion :

> Étant donné une droite (D) et un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à cette droite, une direction de droites est orthogonale à dir (D) si et seulement si cette direction est représentée dans $\mathcal{P}$.

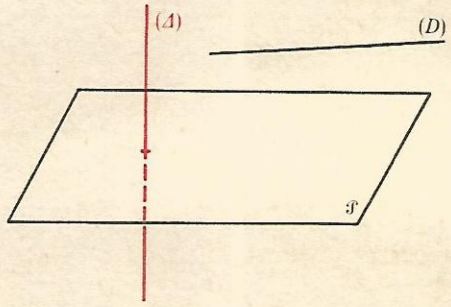
Cette conclusion permet de démontrer aisément les théorèmes qui suivent :

• **Théorème 1**

Si deux droites orthogonales sont telles que l'une est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, alors l'autre est parallèle à ce plan.

En effet :

Soit un plan $\mathcal{P}$.
Soit (D) et (Δ) deux droites orthogonales telles que (Δ) soit orthogonale à $\mathcal{P}$.
Montrons que (D) est parallèle à $\mathcal{P}$.



$(\Delta) \perp (D)$
$(\Delta) \perp \mathcal{P}$

Puisque : $(\Delta) \perp \mathcal{P}$

toute direction orthogonale à dir (Δ) est représentée dans $\mathcal{P}$; en particulier dir (D) qui est orthogonale à dir (Δ) est représentée dans ce plan.

On en déduit : $(D) /\!/ \mathcal{P}$.

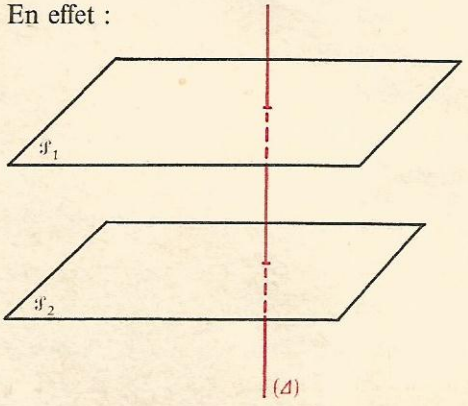
Donc :

$$\left[\begin{array}{c}(\Delta) \perp (D) \\ \boxed{\text{et}} \\ (\Delta) \perp \mathcal{P}\end{array}\right] \Longrightarrow [(D) /\!/ \mathcal{P}].$$

• **Théorème 2**

Si deux plans sont orthogonaux à une droite, ils sont parallèles.

En effet :



Soit une droite (Δ).
Soit deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ orthogonaux à (Δ).
Montrons que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

$(\Delta) \perp \mathcal{P}_1$
$(\Delta) \perp \mathcal{P}_2$

Soit δ_1 et δ_2 deux directions distinctes orthogonales à dir (Δ).
Ces deux directions sont représentées à la fois dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$.
Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc parallèles. (Justifier.)

Donc :

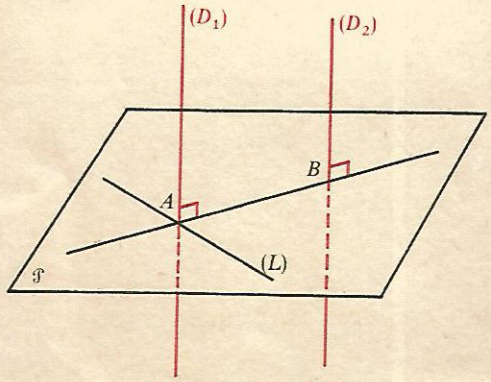
$$\left[\begin{array}{c}(\Delta) \perp \mathcal{P}_1 \\ \boxed{\text{et}} \\ (\Delta) \perp \mathcal{P}_2\end{array}\right] \Longrightarrow [\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2].$$

- **Théorème 3**

> Si deux droites sont orthogonales à un même plan, elles sont parallèles.

En effet :

Soit un plan $\mathcal{P}$.
Soit deux droites (D_1) et (D_2) orthogonales à $\mathcal{P}$.
Montrons que les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.



$(D_1) \perp \mathcal{P}$
$(D_2) \perp \mathcal{P}$

Désignons respectivement par A et B, les points d'intersection des droites (D_1) et (D_2) avec le plan $\mathcal{P}$.
Supposons $A \neq B$.

– Dans le plan $\mathcal{P}$, soit (L) la droite perpendiculaire à (AB) en A.

La droite (L) est orthogonale à (AB) et (D_2). (Justifier.)

La droite (L) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{L}$ déterminé par la droite (D_2) et le point A; elle est donc orthogonale au plan $\mathcal{L}$.

La droite (D_1) est une droite du plan $\mathcal{L}$. (Justifier.)

– Dans le plan $\mathcal{L}$, les droites (D_1) et (D_2) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB). (Justifier.)

Les droites (D_1) et (D_2) sont donc parallèles.

Le cas « $A = B$ » se ramène au précédent en considérant une droite (D_3) orthogonale à $\mathcal{P}$ en un point C distinct de A.

On obtient alors :

$$(D_1) /\!/ (D_3) \quad \text{et} \quad (D_2) /\!/ (D_3).$$

Par suite : $(D_1) /\!/ (D_2)$.

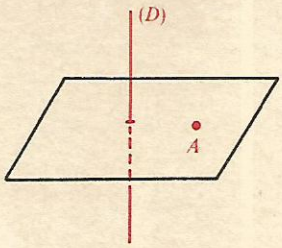
Montrer alors que : $(D_1) = (D_2)$.

Donc :

$$\left[\begin{array}{c}(D_1) \perp \mathcal{P} \\ \boxed{\text{et}} \\ (D_2) \perp \mathcal{P}\end{array}\right] \Longrightarrow [(D_1) /\!/ (D_2)].$$

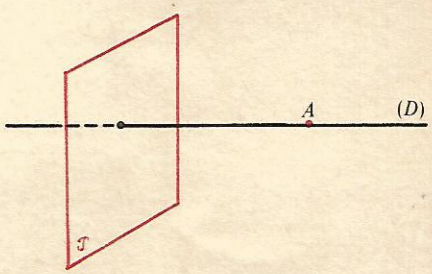
Remarque. Les propriétés précédentes permettent de montrer que :

Par un point, on peut mener un et un seul plan orthogonal à une droite donnée.



$A \in \mathcal{P}$
$\mathcal{P} \perp (D)$

Par un point, on peut mener une et une seule droite orthogonale à un plan donné.



$A \in (D)$
$(D) \perp \mathcal{P}$

Exercices

1) On donne deux droites orthogonales.
Montrer qu'il existe un unique plan contenant l'une et orthogonal à l'autre.
Envisager les cas suivants :

- les droites sont sécantes
- les droites sont disjointes.

Donner un programme de construction de ce plan.

2) Soit un plan $\mathcal{P}$ et une droite (D) non orthogonale à $\mathcal{P}$.
Soit A un point de $\mathcal{P}$.
Montrer qu'il existe une unique droite passant par A incluse dans $\mathcal{P}$ et orthogonale à (D).
Envisager les cas suivants :

- (D) et $\mathcal{P}$ sont parallèles,
- (D) et $\mathcal{P}$ sont sécants.

Donner un programme de construction de cette droite.

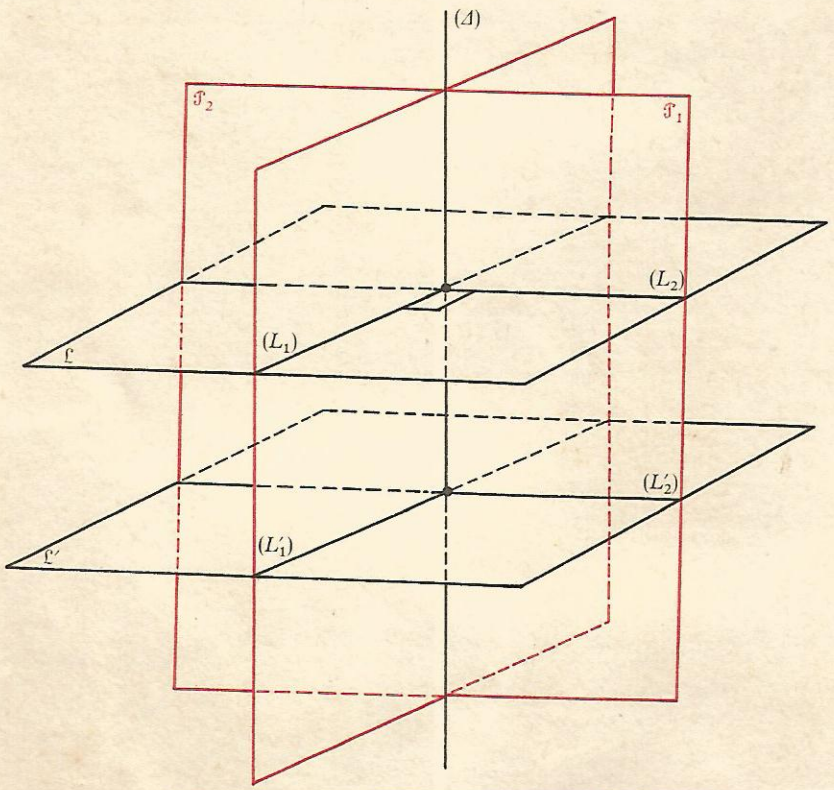
4) Plans perpendiculaires

a) Définitions

● **Activité préparatoire**

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant une droite (Δ).

— Considérons un plan $\mathcal{L}$ orthogonal à la droite (Δ).
Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{L}$ sont sécants. (Justifier.)
Désignons par (L_1) la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{L}$.
De même, les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{L}$ sont sécants et désignons par (L_2) leur droite d'intersection.
Les droites (L_1) et (L_2) sont deux droites sécantes du plan $\mathcal{L}$.



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$
$\mathcal{L} \perp (\Delta)$; $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}_1 = (L_1)$; $\mathcal{L} \cap \mathcal{P}_2 = (L_2)$
$\mathcal{L}' \perp (\Delta)$; $\mathcal{L}' \cap \mathcal{P}_1 = (L'_1)$; $\mathcal{L}' \cap \mathcal{P}_2 = (L'_2)$.

Considérons le cas où (L_1) et (L_2) sont perpendiculaires dans le plan $\mathcal{L}$.
Soit un plan $\mathcal{L}'$ distinct de $\mathcal{L}$ et orthogonal à la droite (Δ).

$\mathcal{L} /\!/ \mathcal{L}'$; pourquoi?

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont tous deux sécants à $\mathcal{L}'$; pourquoi?

Posons : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{L}' = (L'_1)$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{L}' = (L'_2)$.

On a : $(L_1) /\!/ (L'_1)$ et $(L_2) /\!/ (L'_2)$; Justifier.

Puisque : $(L_1) \perp (L_2)$.

On a : $(L'_1) \perp (L'_2)$.

Conclusion

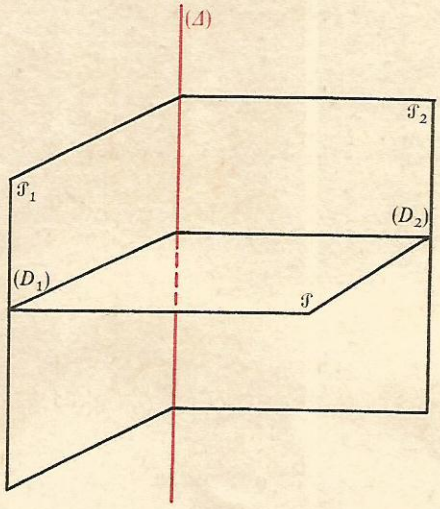
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ étant deux plans sécants suivant la droite (Δ); si un plan orthogonal à (Δ) coupe $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivant deux droites perpendiculaires, alors il en est de même de tout plan orthogonal à (Δ).

Cette conclusion nous conduit à la définition suivante.

• **Définition**

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant la droite (Δ).
Lorsqu'un plan orthogonal à (Δ) coupe les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ suivant deux droites perpendiculaires, on dit que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

On note $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$.



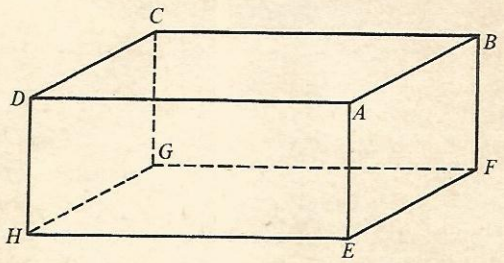
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$
$\mathcal{P} \perp (\Delta)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = (D_1)$
$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P} = (D_2)$

Remarque. Si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires on dira aussi que :

$\mathcal{P}_1$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}_2$;

$\mathcal{P}_2$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$;

Exemple.
On donne le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
– Considérons les plans (AEH) et (AEF) sécants suivant la droite (AE).
Le plan (HEF) est orthogonal à la droite (AE). Justifier.
Le plan (HEF) est sécant respectivement aux plans (AEH) et (AEF) suivant les droites (EH) et (EF).



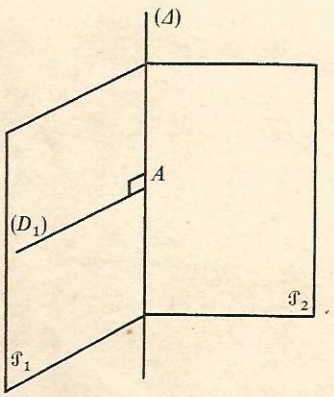
Or dans le plan (HEF), les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires :
les plans (AEH) et (AEF) sont donc perpendiculaires.

– Montrer de même que les plans (ABC) et (CDH) sont perpendiculaires.

b) **Critère de perpendicularité de deux plans**

• **Activité préparatoire**

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant une droite (Δ). Soit (D_1) une droite de $\mathcal{P}_1$ orthogonale à $\mathcal{P}_2$ au point A.
Montrons qu'il existe dans $\mathcal{P}_2$ une droite orthogonale à $\mathcal{P}_1$.



$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = (\Delta)$
$(D_1) \subset \mathcal{P}_1$
$(D_1) \perp \mathcal{P}_2$

Considérons la droite (D_2) incluse dans $\mathcal{P}_2$ et perpendiculaire en A à (Δ).

$(D_2) \perp (\Delta)$
$(D_2) \perp (D_1)$, Justifier.
Donc : $(D_2) \perp \mathcal{P}_1$, Justifier.

Conclusion :

Si un plan $\mathcal{P}_1$ contient une droite orthogonale à un plan $\mathcal{P}_2$, alors le plan $\mathcal{P}_2$ contient une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.

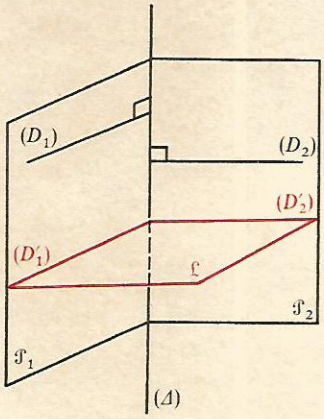
• **Comment reconnaître deux plans perpendiculaires?**

Si deux plans sont tels que l'un contient au moins une droite orthogonale à l'autre, alors ces deux plans sont perpendiculaires.

En effet :

On donne deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}$, tels qu'il existe dans $\mathcal{P}_1$ une droite (D_1) orthogonale à $\mathcal{P}_2$.
L'activité précédente nous montre qu'il existe alors une droite (D_2) dans $\mathcal{P}_2$ orthogonale à $\mathcal{P}_1$.
Montrons que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

Soit $\mathcal{L}$ un plan parallèle à (D_1) et (D_2).



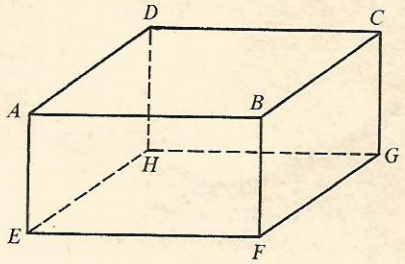
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$
$(D_1) \subset \mathcal{P}_1$; $(D_1) \perp \mathcal{P}_2$
$(D_2) \subset \mathcal{P}_2$; $(D_2) \perp \mathcal{P}_1$

On pose : $(D'_1) = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_1$
$(D'_2) = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_2$.

On a : $(D'_1) \parallel (D_1)$ et $(D'_2) \parallel (D_2)$. Justifier :
$\mathcal{L} \perp (\Delta)$. Justifier.
$(D'_1) \perp (D'_2)$. Justifier.

Donc : $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$.

Exemple.
On donne le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.



On a :

$(AE) \perp (ABC)$. Justifier.

Le plan (AEB) contenant la droite (AE) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

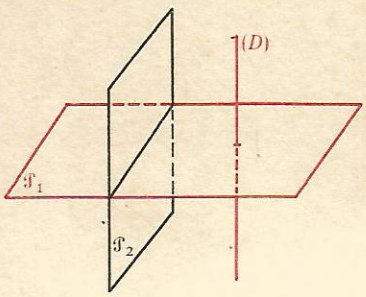
De même le plan (AEH) est perpendiculaire au plan (ABC).

c) **Propriétés**

- Comme exercice, on pourra démontrer les propriétés suivantes :

Théorème 1

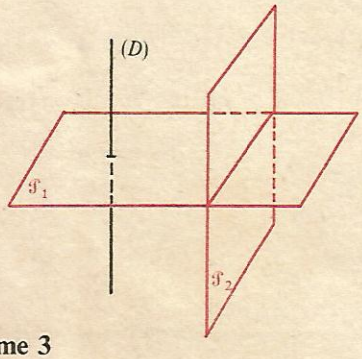
Si une droite est orthogonale à un plan $\mathcal{P}_1$, tout plan parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_1$.



$$\left[\begin{array}{c}(D) \perp \mathcal{P}_1 \\ \boxed{\text{et}} \\ (D) /\!/ \mathcal{P}_2\end{array}\right] \Longrightarrow [\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2].$$

Théorème 2

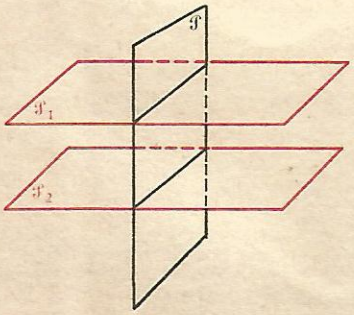
Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.



$$\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \\ \boxed{\text{et}} \\ (D) \perp \mathcal{P}_1\end{array}\right] \Longrightarrow [(D) /\!/ \mathcal{P}_2].$$

Théorème 3

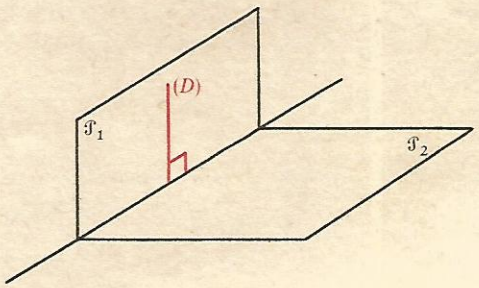
Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.



$$\left[\begin{array}{c}\mathcal{P}_1 /\!/ \mathcal{P}_2 \\ \boxed{\text{et}} \\ \mathcal{P} \perp \mathcal{P}_1\end{array}\right] \Longrightarrow [\mathcal{P} \perp \mathcal{P}_2].$$

Théorème 4

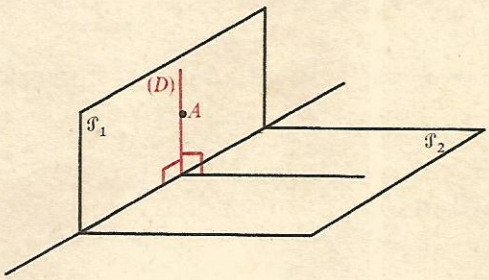
Si deux plans sont perpendiculaires et si l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à leur intersection alors cette droite est orthogonale à l'autre plan.



$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta) \\ (D) \subset \mathcal{P}_1 \\ (D) \perp (\Delta) \end{bmatrix} \Longrightarrow [(D) \perp \mathcal{P}_2].$$

Réciproquement :

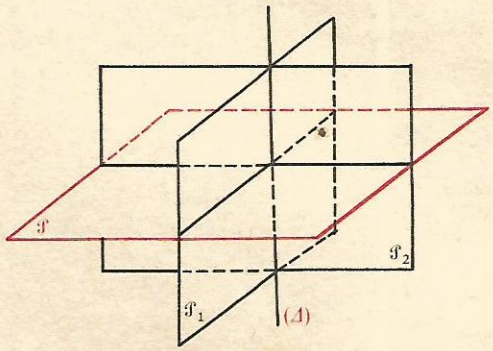
Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires et si d'un point de $\mathcal{P}_1$ on mène la droite orthogonale à $\mathcal{P}_2$ alors cette droite est incluse dans $\mathcal{P}_1$.



$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \\ A \in \mathcal{P}_1 \\ A \in (D) \\ (D) \perp \mathcal{P}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow [(D) \subset \mathcal{P}_1].$$

Théorème 5

Si un plan est perpendiculaire à deux plans sécants, il est perpendiculaire à leur intersection.



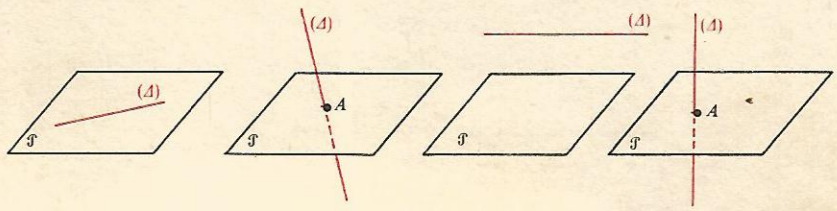
$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta) \\ \mathcal{P} \perp \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P} \perp \mathcal{P}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\mathcal{P} \perp (\Delta)].$$

Exercices

1) On donne un plan $\mathcal{P}$ et un point A.
Construire la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$.

2) On donne une droite (D) et un point A.
Construire le plan passant par A et orthogonal à (D).

3) On donne un plan $\mathcal{P}$ et une droite (Δ).
Donner un programme de construction d'un plan contenant (Δ) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ dans chacun des cas ci-dessous. Combien de plans peut-on construire?



$(\Delta) \subset \mathcal{P}$ | $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$ | $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \phi$ | $(\Delta) \perp \mathcal{P}$

4) On donne une droite (D), un plan $\mathcal{P}$ et un point A n'appartenant pas à $(D) \cup \mathcal{P}$.
Construire une droite passant par A, parallèle à $\mathcal{P}$ et orthogonale à (D).

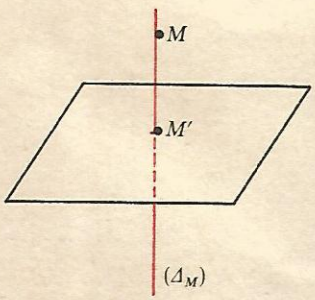
5) On donne un plan $\mathcal{P}$, une droite (D) et un point A.
Construire un plan passant par A parallèle à (D) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3 Projections orthogonales

1) Projection orthogonale sur un plan

a) Définition

On donne un plan $\mathcal{P}$.
Soit M un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$.
On sait qu'il existe une unique droite (Δ_M) passant par M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Désignons par M' le point d'intersection de (Δ_M) avec le plan $\mathcal{P}$.



$M \in (\Delta_M)$
$(\Delta_M) \perp \mathcal{P}$
$(\Delta_M) \cap \mathcal{P} = \{M'\}$

On peut alors définir une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ en associant à tout point M de $\mathcal{E}$ le point M' de $\mathcal{P}$.
Cette application est appelée *projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur le plan $\mathcal{P}$*. Le point M' est appelé *le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$*.

Définition

Étant donné un plan $\mathcal{P}$, on appelle projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, l'application

$$p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que M' soit le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{P}$.

Quels que soient les points M et M' de l'espace $\mathcal{E}$

$$\left[\begin{array}{c} M' \text{ est le projeté} \\ \text{orthogonal de } M \\ \text{sur le plan } \mathcal{P} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \text{signifie que} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{Si } M \in \mathcal{P}, & M' = M \\ \text{Si } M \notin \mathcal{P}, & M' \in \mathcal{P} \text{ et } (MM') \perp \mathcal{P} \end{array}\right]$$

b) **Propriétés**

- On déduit de la définition que :

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ invariants par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

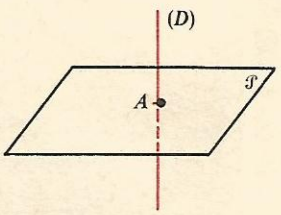
- Image d'une droite

L'image d'une droite (D) par la projection orthogonale sur un plan $\mathcal{P}$ est :
- un singleton si (D) est orthogonale à $\mathcal{P}$
- une droite si (D) n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$.

Démonstration

On donne une droite (D) et un plan $\mathcal{P}$.
Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

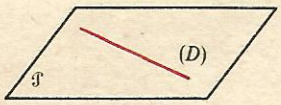
- Si (D) est orthogonale en A au plan $\mathcal{P}$, alors :



$p(D) = \{A\}$, Justifier.

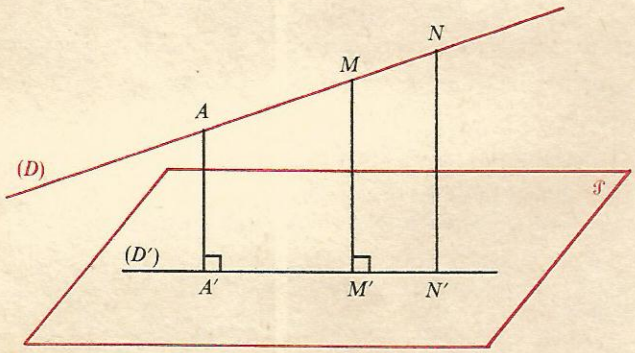
$(D) \perp \mathcal{P}$
$(D) \cap \mathcal{P} = \{A\}$

– Si (D) est incluse dans $\mathcal{P}$, alors :



$$P(D) = (D)$$
$$\boxed{(D) \subset \mathcal{P}}$$

– Supposons (D) non orthogonale à $\mathcal{P}$ et non incluse dans $\mathcal{P}$.
Soit A un point de (D) n'appartenant pas à $\mathcal{P}$
A' le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
La droite (D) et le point A' déterminent un plan $\mathcal{L}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$. (Justifier.)
Désignons par (D') la droite d'intersection des plans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$.



• Montrons que tout point de (D) a pour projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$, un point de (D').
Soit M un point quelconque de (D).
Dans le plan $\mathcal{L}$, soit M' le projeté orthogonal de M sur (D');

– si $M \in \mathcal{P}$, $M' = M$
– si $M \notin \mathcal{P}$, $(MM') \parallel (AA')$
par suite $(MM') \perp \mathcal{P}$. (Justifier.)

M' est donc le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

• Montrons que tout point de (D') est le projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ d'un point de (D).
Soit N' un point de (D').
Dans le plan $\mathcal{L}$, N' est le projeté orthogonal sur (D') d'un point N de (D);

– si $N' \in (D)$, $N = N'$
– si $N' \notin (D)$, $(NN') \perp (D')$

par suite : $(NN') \perp \mathcal{P}$. (Justifier.)

N' est donc le projeté orthogonal de N sur $\mathcal{P}$.

par conséquent :

$$P(D) = (D')$$

Exercices 1) On donne un plan $\mathcal{P}$ et une droite (D) parallèle à $\mathcal{P}$.
Montrer que l'image de (D) par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ est une droite parallèle à (D).

2) On donne un plan $\mathcal{P}$ et deux droites (D_1) et (D_2) parallèles et non orthogonales à $\mathcal{P}$.

– Montrer que les images de (D_1) et de (D_2) par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ sont parallèles.

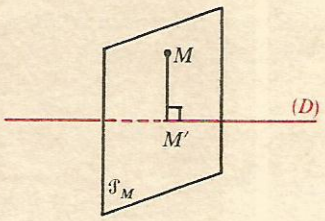
3) On donne un plan $\mathcal{P}$ et un parallélogramme $ABCD$.

– Étudier la nature de l'image de $ABCD$ par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.

2) Projection orthogonale sur une droite

a) Définition

On donne une droite (D).
Soit M un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$.
On sait qu'il existe un unique plan $\mathcal{P}_M$ passant par M et orthogonal à la droite (D).
Désignons par M' le point d'intersection de $\mathcal{P}_M$ avec la droite (D).



$M \in \mathcal{P}_M$
$\mathcal{P}_M \perp (D)$
$\mathcal{P}_M \cap (D) = \{M'\}$

On peut alors définir une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ en associant à tout point M de $\mathcal{E}$ le point M' de (D).
Cette application est appelée *projection orthogonale* de $\mathcal{E}$ *sur la droite* (D). Le point M' est appelé le *projeté orthogonal du point* M *sur la droite* (D).

Définition

Étant donné une droite (D), on appelle projection orthogonale sur (D), l'application

$$p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto M'$$

telle que M' soit le point d'intersection de la droite (D) avec le plan passant par M et orthogonal à (D).

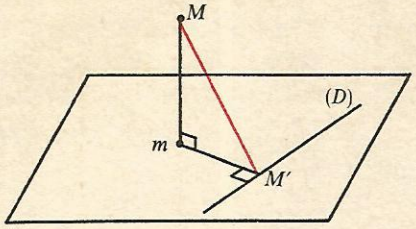
Quels que soient les points M et M' de l'espace $\mathcal{E}$.

[M' est le projeté orthogonal de M sur la droite (D)] ⟺ signifie que [Si $M \in (D)$, $M' = M$; Si $M \notin (D)$; $M' \in (D)$ et $(MM') \perp (D)$].

b) Projection orthogonale sur un plan et projection orthogonale sur une droite incluse dans ce plan

On donne un plan $\mathcal{P}$ et une droite (D) incluse dans $\mathcal{P}$.

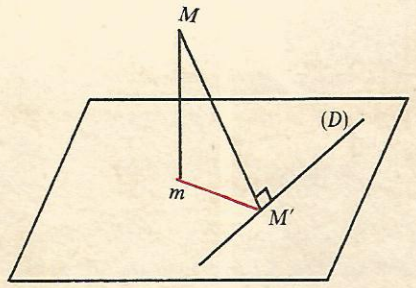
• Soit M un point quelconque de l'espace, m son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ et M' le projeté orthogonal de m sur (D).



Montrer que le projeté orthogonal de m sur (D) est le projeté orthogonal de M sur (D).

$$\left[\begin{array}{l} m \in \mathcal{P};\quad M' \in (D) \\ (mM) \perp \mathcal{P} \\ (mM') \perp (D) \end{array}\right] \Longrightarrow [(MM') \perp (D)].$$

• Soit M un point quelconque de l'espace, M' son projeté orthogonal sur (D) et m son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.



Montrer que le projeté orthogonal de M sur (D) est le projeté orthogonal de m sur (D).

$$\left[\begin{array}{l} M' \in (D);\quad m \in \mathcal{P} \\ (MM') \perp (D) \\ (Mm) \perp \mathcal{P} \end{array}\right] \Longrightarrow [(mM') \perp (D)].$$

3) Repérage dans l'espace

a) Repères orthogonaux; coordonnées d'un point

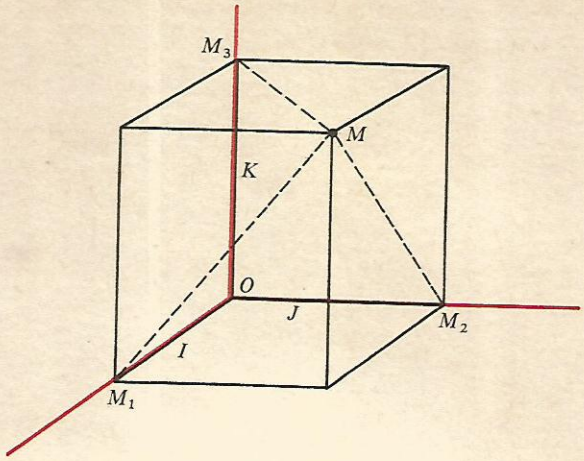
• **Définition**

– Un repère (O, I, J, K) est dit *orthogonal* si :

$$(OI) \perp (OJ) \quad \text{et} \quad (OJ) \perp (OK) \quad \text{et} \quad (OK) \perp (OI).$$

– Un repère (O, I, J, K) est dit *orthonormé* s'il est orthogonal et si de plus :

$$OI = OJ = OK = 1.$$



• **Comment trouver les coordonnées d'un point de l'espace $\mathcal{E}$, l'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J, K)?**

Soit M un point quelconque de l'espace.

– Nous avons vu en classe de Seconde que pour obtenir les coordonnées du point M relativement au repère (O, I, J, K), on mène par M les plans $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ parallèles respectivement aux plans (OKJ), (OIK) et (OJI).
Les plans $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ coupent respectivement les droites (OI), (OJ) et (OK) aux points M_1, M_2 et M_3.

x étant l'abscisse du point M
y son ordonnée
z sa côte,

on a alors :

$$x = \overline{OM_1}; \qquad y = \overline{OM_2}; \qquad z = \overline{OM_3}.$$

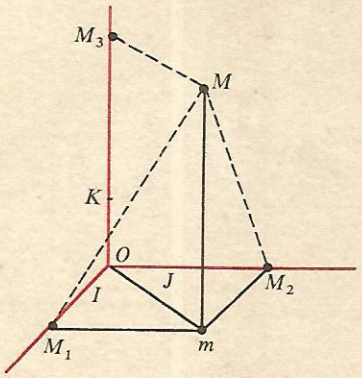
– Montrer que les points M_1, M_2, M_3 sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites (OI), (OJ), (OK).

Dans le cas où le point M n'appartient à aucun des plans (OIJ), (OJK) et (OKI), on peut obtenir ses coordonnées en procédant comme suit :

– Construire le point m projeté orthogonal de M sur le plan (OIJ);
– *dans le plan (OIJ)*, construire les projetés orthogonaux M_1 et M_2 du point m respectivement sur les droites (OI) et (OJ);
– *dans le plan (OMm)*, construire sur la droite (OK) le point M_3 tel que :

$$(MM_3) \,//\, (Om).$$

M_1, M_2, M_3 sont les projetés orthogonaux du point M respectivement sur les droites : (OI), (OJ) et (OK). (Justifier.)



Exercice Placer dans l'espace muni d'un repère orthogonal, les points suivants :

$A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$; $C(2; -3; -1)$.

b) **Caractérisation analytique de certains sous-ensembles de l'espace.**

- *Activité 1*

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthogonal (O, I, J, K), placer les points ayant pour coordonnées :

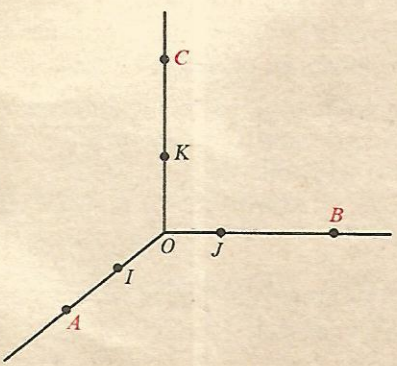
$(2; 0; 0)$, $(0; -1; 0)$, $(0; 0; 3)$.

Plus généralement, on constate que a, b, c étant des nombres réels quelconques :

- $A(a; 0; 0)$ est un point de la droite (OI)
- $B(0; b; 0)$ est un point de la droite (OJ)
- $C(0; 0; c)$ est un point de la droite (OK).

Réciproquement :

- tout point de (OI) a une ordonnée et une côte nulles
- tout point de (OJ) a une côte et une abscisse nulles
- tout point de (OK) a une abscisse et une ordonnée nulles.



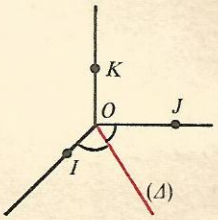
Conclusion

Soit M un point quelconque de l'espace, soit (x, y, z) les coordonnées de M.
On a alors :

$$[M \in (OI)] \iff [y = 0 \text{ et } z = 0]$$
$$[M \in (OJ)] \iff [z = 0 \text{ et } x = 0]$$
$$[M \in (OK)] \iff [x = 0 \text{ et } y = 0].$$

Exercice

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K).



Considérons la droite (Δ) bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.
Soit M un point quelconque de (Δ).
Trouver la côte de M.
Exprimer l'abscisse de M en fonction de son ordonnée.
Trouver une caractérisation analytique de la droite (Δ).

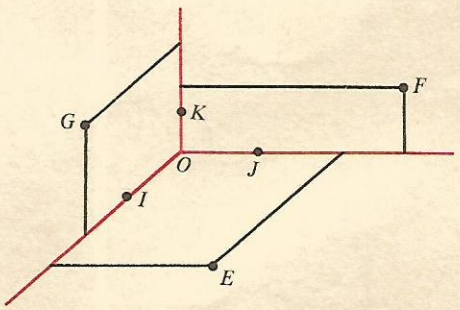
- *Activité 2*

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthogonal (O, I, J, K), placer les points ayant pour coordonnées :

$$(-2; 1; 0), \quad (0; 3; 2), \quad (-1; 0; -3).$$

Plus généralement, on constate que a, b, c étant des nombres réels quelconques :

- $E(a; b; o)$ est un point du plan (OIJ)
- $F(o; b; c)$ est un point du plan (OJK)
- $G(a; o; c)$ est un point du plan (OKI).



Réciproquement :

- tout point de (OIJ) a une côte nulle
- tout point de (OJK) a une abscisse nulle
- tout point de (OKI) a une ordonnée nulle.

Conclusion

Soit M un point quelconque de l'espace,
soit (x, y, z) les coordonnées de M.
On a alors :

$$[M \in (OIJ)] \iff [z = 0]$$
$$[M \in (OJK)] \iff [x = 0]$$
$$[M \in (OKI)] \iff [y = 0].$$

Exercice

Quel est, dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

a) $z = 0$ et $x > 0$

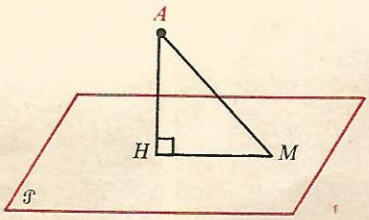
b) $z = 0$ et $x > 0$ et $y \leqslant 0$

c) $x = 0$ et $y = 0$ et $z < 0$.

4) Quelques distances particulières

a) Distance d'un point à un plan

On donne un plan $\mathcal{P}$ et un point A.
Désignons par H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.



Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$.

Montrer que :

$$d(A; H) \leqslant d(A; M).$$

Définition

On appelle distance d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ la distance de ce point à son projeté orthogonal H sur $\mathcal{P}$.

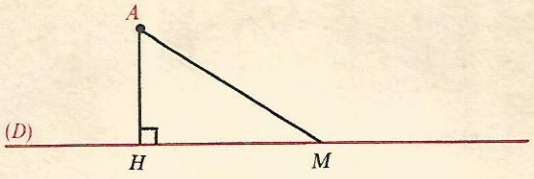
On note : $d(A; \mathcal{P})$

et on a : $d(A; \mathcal{P}) = d(A, H)$.

Exercice Trouver l'ensemble des points de l'espace situés à une distance d d'un plan $\mathcal{P}$.

b) **Distance d'un point à une droite**

On donne une droite (D) et un point A.
Désignons par H le projeté orthogonal de A sur (D).



Soit M un point quelconque de (D).

Montrer que :

$$d(A; H) \leqslant d(A; M).$$

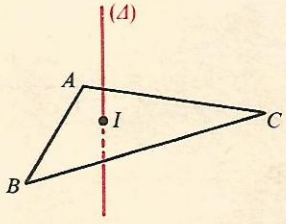
Définition

On appelle distance d'un point A à une droite (D), la distance de ce point à son projeté orthogonal H sur (D).

On note : $d(A; (D))$

et on a : $d(A; (D)) = d(A, H)$.

Exercice On donne un triangle ABC.

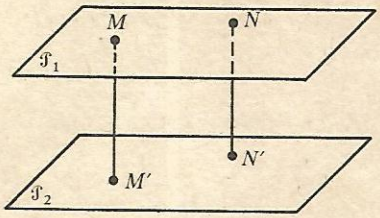


Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC.
Montrer que la droite orthogonale en I au plan (ABC) est l'ensemble des points de l'espace équidistants des côtés du triangle ABC.

c) **Distance de deux plans parallèles**

On donne deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Montrer que tous les points du plan $\mathcal{P}_1$ sont situés à la même distance du plan $\mathcal{P}_2$ (et tous les points du plan $\mathcal{P}_2$ sont situés à la même distance du plan $\mathcal{P}_1$).



Définition

On appelle distance de deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, la distance d'un point de $\mathcal{P}_1$ au plan $\mathcal{P}_2$.

d) **Activité : distance de deux droites non coplanaires**

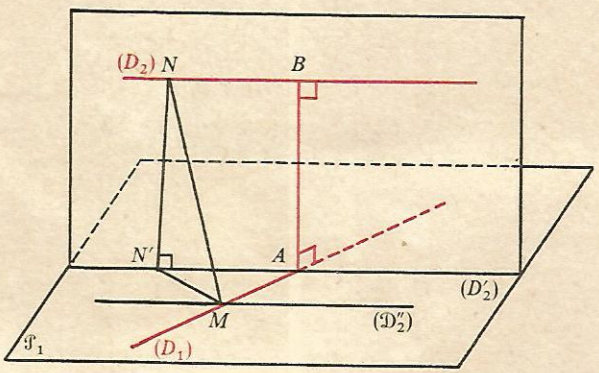
On donne deux droites non coplanaires (D_1) et (D_2).

Il existe un unique plan $\mathcal{P}_1$ contenant (D_1) et parallèle à (D_2); (justifier).

(D_2) étant parallèle à $\mathcal{P}_1$, sa projetée orthogonale sur $\mathcal{P}_1$ est une droite (D'_2) parallèle à (D_2), (justifier).

(D'_2) et (D_1) sont donc sécantes, (justifier).
Soit A leur point d'intersection.

Désignons par B le projeté orthogonal de A sur (D_2).



La droite (AB) est perpendiculaire aux droites (D_1) et (D_2), (justifier).

- Montrons que (AB) est l'unique droite perpendiculaire à (D_1) et à (D_2).

Soit M un point quelconque de (D_1) et N un point quelconque de (D_2) tels que M soit différent de A ou N soit différent de B.

Le projeté orthogonal N' de N sur $\mathcal{P}$ appartient à (D'_2), (justifier).
Soit (D''_2) la droite passant par M et parallèle à (D_2).
Supposons : $(NM) \perp (D_1)$ et $(NM) \perp (D_2)$

alors : $(NM) \perp (D_1)$ et $(NM) \perp (D''_2)$

par suite : $(NM) \perp \mathcal{P}_1$, ce qui est faux car :

$$(NN') \perp \mathcal{P}_1 \quad \boxed{\text{et}} \quad N' \neq M \quad \text{(justifier).}$$

La droite (NM) n'est donc pas perpendiculaire à (D_1) et à (D_2).

D'autre part, dans le triangle $NN'M$, rectangle en N' on a :

$$d(N, N') < d(M, N)$$

or : $d(N, N') = d(A, B)$ justifier

donc : $d(A, B) < d(M, N)$.

Conclusion

Étant donné deux droites non coplanaires (D_1) et (D_2), il existe un point unique A de (D_1) et un point unique B de (D_2) tels que (AB) soit perpendiculaire à (D_1) et à (D_2). On a alors :

$$\forall M \in (D_1) \quad \forall N \in (D_2) \quad d(A, B) \leqslant d(M, N).$$

— On dit que $d(A, B)$ est la *distance* des droites (D_1) et (D_2).

On note : $d((D_1); (D_2)) = d(A, B)$.

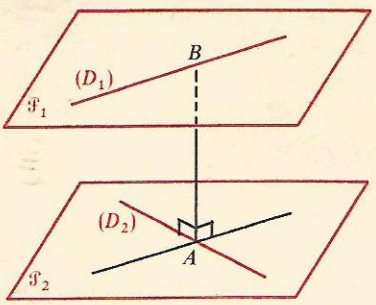
• Soit $\mathcal{P}_2$ le plan contenant (D_2) et parallèle à (D_1).

Montrer que :

$$(AB) \perp \mathcal{P}_2 \quad \boxed{\text{et}} \quad (AB) \perp \mathcal{P}_1.$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = d(A, B).$$

La distance de deux droites non coplanaires est égale à la distance des deux plans parallèles qui les contiennent.



$$\left[\begin{array}{l}(D_1) \subset \mathcal{P}_1 \\ (D_2) \subset \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \ /\!/ \ \mathcal{P}_2\end{array}\right] \Longrightarrow \left[d((D_1), (D_2)) = d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2).\right]$$

Exercice

On donne un cube $ABCDEFGH$ tel que :

$$AB = 2.$$

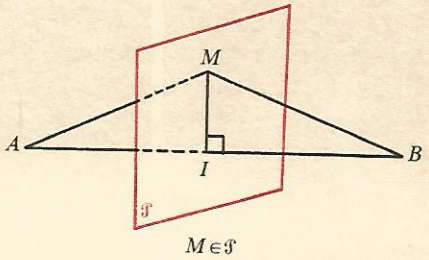
— Trouver la droite perpendiculaire à (DB) et à (EG).
— Quelle est la distance de ces deux droites.

5) Plan médiateur d'un segment, axe d'un cercle

a) Plan médiateur d'un segment

On donne un segment $[AB]$ de milieu de I.
Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (AB) en I.
Montrons que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B.

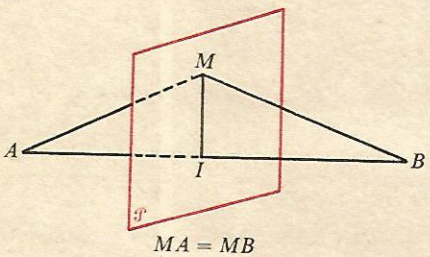
- Montrons que tout point du plan $\mathcal{P}$ est équidistant de A et de B.



$M \in \mathcal{P}$

On sait que I est équidistant de A et de B.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de I.
Dans le plan (ABM) la droite (MI) est la médiatrice de $[AB]$ (justifier).
Donc : $MA = MB$.

- Montrons que tout point équidistant de A et de B appartient à $\mathcal{P}$.



$MA = MB$

Soit M un point de l'espace tel que :

$MA = MB$.

– Si $M \in (AB)$ alors $M = I$.

Donc : $M \in \mathcal{P}$.

– Supposons $M \notin (AB)$.

Dans le plan (MAB) le triangle MAB est isocèle en M.

Donc : $(MI) \perp (AB)$.

I est le projeté orthogonal de M sur (AB).

Donc : $M \in \mathcal{P}$.

Définition

On appelle plan médiateur d'un segment, le plan perpendiculaire au support de ce segment et passant par le milieu de ce segment.

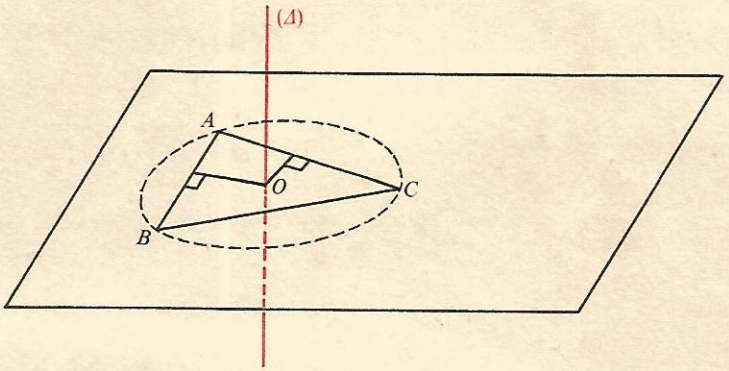
Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points de l'espace, équidistants de A et de B.

Exercice On donne deux triangles isocèles.
ABE et ABF de base commune $[AB]$ et non situés dans le même plan.
Montrer que les droites (AB) et (EF) sont orthogonales.

b) **Axe d'un cercle**

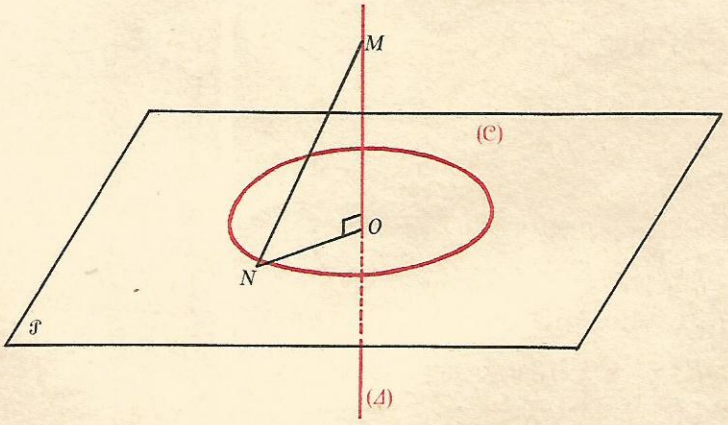
- *Activité préparatoire*

Montrer que l'ensemble des points de l'espace, équidistants des sommets d'un triangle ABC est la droite passant par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC et orthogonale au plan (ABC).



- On donne un cercle (℃) de centre O inclus dans un plan $\mathcal{P}$.

Désignons par (Δ) la droite passant par O et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



– Soit M un point de (Δ).
Montrer que M est équidistant de tous les points du cercle $(\mathcal{C})$.

– Réciproquement, montrer que tout point de l'espace, équidistant des points du cercle $(\mathcal{C})$ appartient à (Δ).

Définition

On appelle axe d'un cercle la droite orthogonale au plan de ce cercle en son centre

L'axe d'un cercle est l'ensemble des points de l'espace équidistants de tous les points de ce cercle.

Exemple

Le sommet d'une pyramide régulière appartient à l'axe du cercle circonscrit à sa base.

Exercices

1 (1). Construire une figure correspondant à la légende suivante :

$\mathcal{P}$ désigne un plan;
(D_1) et (D_2) désignent deux droites;
$(D_1) \parallel (D_2)$; $(D_1) \cap \mathcal{P} = \{A\}$; $(D_2) \cap \mathcal{P} = \{B\}$;
$C \notin (D_1) \cup (D_2) \cup \mathcal{P}$.

Représenter sur cette figure les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec le plan défini par C et (D_1) et le plan défini par C et (D_2).

2 (1). On considère deux droites non coplanaires (D) et (Δ). Soit deux points distincts A et B de (Δ) et un point M de (D).
On désigne par G le centre de gravité du triangle MAB.
Trouver l'ensemble décrit par G lorsque M décrit (D).
Construire cet ensemble.

3 (1). Construire une figure correspondant à la légende suivante :

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$ désignent quatre plans;
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta)$; $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_3$;
$\mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4 = (D)$; $\mathcal{P}_2 \parallel \mathcal{P}_4$.

Montrer que (Δ) et (D) sont parallèles.

4 (1). Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un trapèze $ABCD$ tel que (AB) et (CD) soient parallèles. Soit S un point n'appartenant pas au plan $\mathcal{P}$. On désigne respectivement par M et N les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

1) Déterminer la position relative des plans (SMN), (SAC) et (SBD).

2) Soit :

$$\{I\} = (AD) \cap (BC); \quad \{J\} = (MC) \cap (AN);$$
$$\{K\} = (MD) \cap (BN).$$

a) Montrer que I, J et K sont alignés et que I est le milieu de $[JK]$.

b) Déterminer la position relative des plans (SMN), (SBC), (SAD) et (SJK).

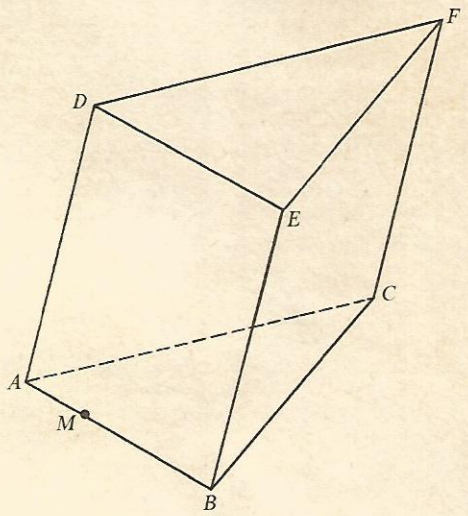
c) Déterminer la position relative des plans (SJK), (SAB) et (SCD).

5 (1). Soit un tétraèdre $ABCD$. Par un point M de $]AC[$ on mène le plan $\mathcal{P}$ parallèle à (AB) et (CD). Le plan $\mathcal{P}$ est sécant aux droites (BC), (BD) et (AD) respectivement en N, P et Q.

1) Faire une figure. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

2) Soit R un point de $]AB[$ et S un point de $]CD[$. Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}$, (SAB) et (RCD).

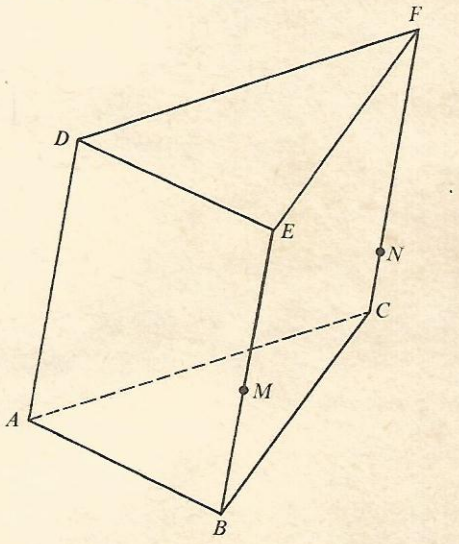
6 (1). $ABCDEF$ est un prisme. Soit M un point de $]AB[$.



1) Par M on mène un plan $\mathcal{P}$ parallèle à (AD). Construire les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les plans (ABE), (ADF), (DEF), (ABC) et (BCE).

2) Par M on mène le plan $\mathcal{P}'$ parallèle au plan (ADC).
Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}'$, (EAC) et (BDE).

7 (1). $ABCDEF$ est un prisme. Soit M un point de $]BE[$ et N un point de $]CF[$.



1) *a*) Construire :

— les droites d'intersection (Δ_1) et (Δ_2) du plan (AMN) respectivement avec les plans (ABC) et (DEF) ;

— les droites d'intersection (Δ_3) et (Δ_4) du plan (DMN) respectivement avec les plans (ABC) et (DEF).

b) Montrer que :

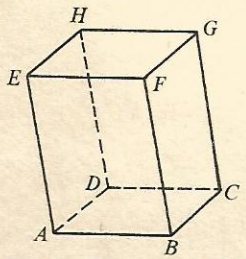
— (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles ;
— (Δ_3) et (Δ_4) sont parallèles.

2) (Δ_1) et (Δ_2) déterminent le plan $\mathcal{P}$;
(Δ_3) et (Δ_4) déterminent le plan $\mathcal{P}'$.

a) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

b) Quelle est l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

8 (1). $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.



a) Montrer que les deux plans (AFH) et (GBD) sont parallèles.

b) Soit I, J, K et L les points d'intersection des diagonales respectivement dans les parallélogrammes $ADHE$, $ABFE$, $BCGF$ et $CDHG$.
Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

9 (2). Montrer que dans un prisme droit les supports des arêtes latérales sont orthogonales aux plans contenant les bases du prisme.

10 (2). Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un losange $ABCD$. On désigne par O le point d'intersection de (AC) et (BD) et par (Δ) la droite orthogonale en O au plan $\mathcal{P}$.
Soit S un point de (Δ), distinct de O.
Montrer que :

a) la droite (AC) est orthogonale aux droites (SB) et (SD) ;

b) la droite (BD) est orthogonale aux droites (SA) et (SC) ;

c) les plans (SBD) et (SAC) sont perpendiculaires.

11 (2). $ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les centres respectifs des deux carrés $ABCD$ et $EFGH$.
Montrer que :

a) (IJ) est orthogonale aux plans (ABC) et (EFG) ;

b) les plans (AEC) et (BDF) sont perpendiculaires.

12 (2). Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle ABC.
On désigne par H l'orthocentre du triangle et par (Δ) la droite orthogonale en H au plan $\mathcal{P}$. Soit D un point de (Δ), distinct de H.

Montrer que :

a) les plans (ADH) et (BCD) sont perpendiculaires ;

b) les supports des côtés opposés du tétraèdre $ABCD$ sont orthogonaux deux à deux.

13 (2). Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un point A extérieur au cercle. On construit deux droites (AB) et (AC) tangentes respectivement en B et C au cercle $(\mathcal{C})$. Soit (Δ) la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ en O et soit S un point de (Δ), distinct de O.

Montrer que :

1) — les plans (SOB) et (SAB) sont perpendiculaires ;
— les plans (SOC) et (SAC) sont perpendiculaires.

2) — les droites (SA) et (BC) sont orthogonales ;
— les plans (SAO) et (SBC) sont perpendiculaires.

14 (2). Soit un plan $\mathcal{P}$ et deux droites non coplanaires (D_1) et (D_2).

1) On suppose que (D_1) et (D_2) sont parallèles à $\mathcal{P}$.

a) Construire le plan $\mathcal{P}_1$ contenant (D_1) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Construire la droite d'intersection (Δ_1) de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$.

b) Construire le plan $\mathcal{P}_2$ contenant (D_2) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Construire la droite d'intersection (Δ_2) de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$.

c) Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants. Construire leur droite d'intersection (Δ).

d) Quelle est la position de la droite (Δ) par rapport au plan $\mathcal{P}$ et par rapport aux droites (D_1) et (D_2) ?

2) On suppose que $(D_1) \cap \mathcal{P} = \{I\}$ et $(D_2) \cap \mathcal{P} = \{J\}$.
Existe-t-il une droite sécante aux droites (D_1) et (D_2) et orthogonale au plan $\mathcal{P}$? Justifier.

15 (2). Dans un plan $\mathcal{P}$ on considère un rectangle $ABCD$.
On désigne par (D_1), (D_2) et (D_3) les droites orthogonales au plan $\mathcal{P}$ respectivement en B, C et D.
Soit M un point de (D_3).

1) Montrer que le plan (ABM) et le plan $\mathcal{P}'$ défini par C et (D_1) sont perpendiculaires. Construire l'intersection (Δ) de ces deux plans.

2) Dans le plan $\mathcal{P}'$ on construit la droite (Δ') perpendiculaire en B à (Δ) ; la droite (Δ') coupe (D_2) en N.

Montrer que :

a) (BN) et (AM) sont orthogonales.

b) AMN est un triangle rectangle.

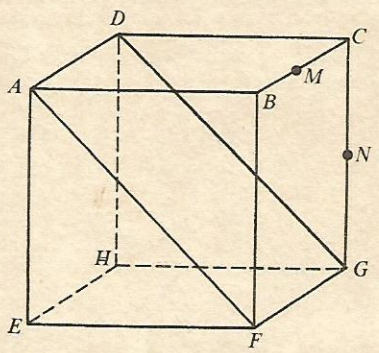
16 (3). On considère un plan $\mathcal{P}$ et un point M de l'espace. Soit M' le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}$.

Montrer que :

a) $\forall A \in \mathcal{P} \quad \forall B \in \mathcal{P} \quad [M'A = M'B] \iff [MA = MB]$.

b) $\forall A \in \mathcal{P} \quad \forall B \in \mathcal{P} \quad [M'A < M'B] \iff [MA < MB]$.

17 (3). $ABCDEFGH$ est un cube.



a) Construire le projeté orthogonal sur le plan (AGF) de chacun des points B, H, C, E.

b) Soit M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[CG]$. Construire les projetés orthogonaux de M et N sur le plan (AGF).

18 (3). Soit un plan $\mathcal{P}$ et un carré $ABCD$ tels que les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) soient sécants et non perpendiculaires.
On désigne par A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et D sur $\mathcal{P}$.

1) On suppose que (AB) est parallèle à $\mathcal{P}$. Faire une figure. Montrer que $A'B'C'D'$ est un rectangle.

2) On suppose que (AC) est parallèle à $\mathcal{P}$. Faire une figure. Montrer que $A'B'C'D'$ est un losange.

19 (3). On considère la pyramide régulière $SABCDEF$, de sommet S et de base $ABCDEF$. Cette base est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O.

a) Montrer que (SO) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ contenant la base de la pyramide.

b) Soit A' un point de $]SA[$. Par A' on mène un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}'$ est sécant aux droites (SB), (SC), (SD), (SE) et (SF) respectivement en B', C', D', E', F'. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'E'F'$?

20 (3). Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant la droite (Δ). Du point O de (Δ) on mène le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à (Δ). On désigne par (OX) et (OY) les intersections respectives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avec le plan $\mathcal{P}$.

a) Soit M un point de (OY) et M' le projeté orthogonal du point M sur $\mathcal{P}_1$. Montrer que M' appartient à (OX).

b) Soit E un point de (Δ), distinct de O. Montrer que mes $\widehat{MEM'}$ < mes $\widehat{MOM'}$.

21 (3). Soit un plan $\mathcal{P}$ et une droite (D) sécants et non orthogonaux.
On désigne par I le point d'intersection de (D) et $\mathcal{P}$.
Soit M un point de (D), distinct de I et M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

Démontrer que :

$$\forall N \in \mathcal{P} - \{I, M'\} \quad \text{mes } \widehat{MIN} > \text{mes } \widehat{MIM'}.$$

22 (3). Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans sécants suivant la droite (Δ) et M un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. On désigne par E et F les projetés orthogonaux respectifs de M sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

a) Montrer que (Δ) et le plan (MEF) sont orthogonaux.

b) Soit N le point d'intersection de (Δ) et du plan (MEF). Que peut-on dire des mesures des angles $\widehat{EMF}$ et $\widehat{ENF}$? (envisager deux cas).

23 (3). Soit deux points distincts A et B d'un plan $\mathcal{P}$. M étant un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, on désigne par E et F les projetés orthogonaux du point M respectivement sur $\mathcal{P}$ et (AB).

1) Montrer que :

$$[\mathcal{P} \perp (MAB)] \iff [E = F].$$

2) Supposons que E et F soient distincts. On désigne par :

α : la mesure de l'angle $\widehat{MFE}$;
S : la mesure de l'aire du triangle MAB;
S' : la mesure de l'aire du triangle EAB.

Montrer que :

$$S' = S \cos \alpha.$$

24 (3). On considère un triangle ABC. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Par A', B' et C' on mène les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ respectivement orthogonaux aux droites (BC), (AC) et (AB).

Montrer que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivant une droite (Δ) qui est orthogonale au plan (ABC).

25 (3). $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

a) Trouver la droite perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

b) Soit *a* la mesure du côté du tétraèdre. Exprimer en fonction de *a* la distance des deux droites (*AB*) et (*CD*).

26 (3). Soit trois demi-droites [*OX*), [*OY*) et [*OZ*), dont les supports sont perpendiculaires deux à deux, et n'appartenant pas à un même plan. Soit un point *A* de]*OX*), un point *B* de]*OY*) et un point *C* de [*OZ*). On désigne par *D* le projeté orthogonal du point *C* sur (*AB*).

1) Montrer que le plan (*ABC*) et le plan défini par *D* et (*OZ*) sont perpendiculaires.

2) Soit *H* le projeté orthogonal du point *O* sur le plan (*ABC*).

a) Montrer que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.

b) Trouver l'ensemble décrit par le point *H* lorsque *C* décrit la demi-droite [*OZ*).

27 (3). Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé (*O, I, J, K*), placer le point *A* (0; 0; 2). On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par *A* et orthogonal à la droite (*OK*).

1) Soit *M* un point de l'espace, de côte *z*.

a) Montrer que :

$$[M \in \mathcal{P}] \iff [z = 2].$$

b) En déduire l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \boxed{\text{et}} \\ z = 2. \end{cases}$$

2) Déterminer l'ensemble des points *M* de l'espace ayant pour abscisse -3 et pour côte 2. Construire cet ensemble.

28 (3). Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé (*O, I, J, K*), placer le point *A* (2; 2; 3). On désigne par *B, C* et *D* les projetés orthogonaux du point *A* respectivement sur (*OI*), (*OJ*) et (*OK*).

1) Trouver les coordonnées des points *B, C* et *D*.

2) Soit *H* l'orthocentre du triangle *BCD*.

a) Montrer que *H* est le projeté orthogonal du point *O* sur le plan *BCD*.

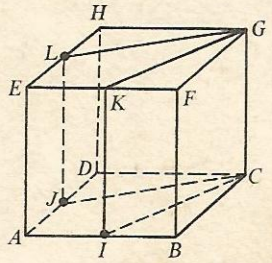
b) Trouver les coordonnées du point *H*.

3) Soit *L* le milieu de [*BC*] et soit *A'* le projeté orthogonal du point *A* sur (*DL*).

a) Montrer que *A'* est le projeté orthogonal du point *A* sur le plan (*BCD*).

b) Calculer la distance du point *A* au plan (*BDC*).

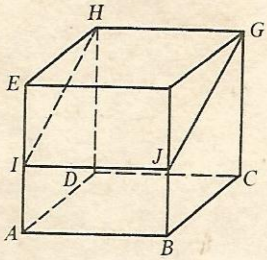
29 (3). *ABCDEFGH* est un cube. *I, J, K* et *L* sont respectivement les milieux de [*AB*], [*AD*], [*EF*] et [*EH*].



Montrer que le volume du prisme *AICJEKGL* est égal à la moitié de celui du cube.

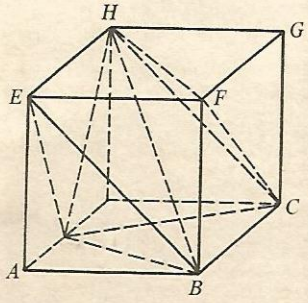
30 (3). *ABCDEFGH* est un cube dont *a* est la mesure du côté. Soit *I* et *J* deux points tels que :

$$I \in [AE], \quad J \in [BF], \quad EI = FJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Exprimer le volume du solide *ABCDIJGH* en fonction de *a*.

31 (3). *ABCDEFGH* est un cube dont *a* est la mesure du côté.



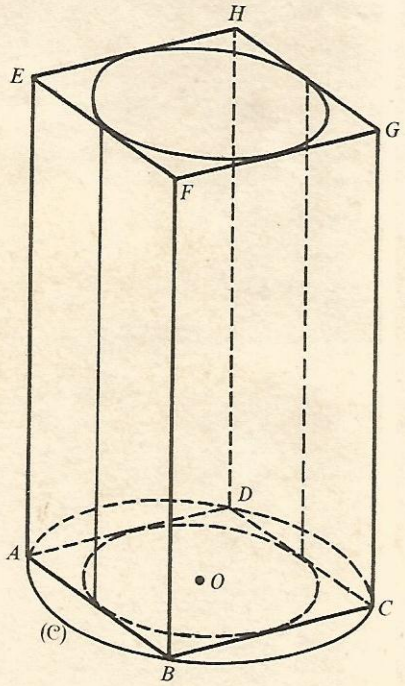
Soit *I* le milieu de [*AD*]. Exprimer en fonction de *a* le volume de chacun des solides suivants :

a) la pyramide de sommet *H* et de base *BIDC*;

b) la pyramide de sommet *F* et de base *BCHE*;

c) la pyramide de sommet *I* et de base *BCHE*.

32 (3). *ABCDEFGH* est un prisme droit dont la base *ABCD* est un carré inscrit dans le cercle (C) de centre *O* et de rayon *R*, et dont la hauteur est égale à 2*R*.



Exprimer en fonction de *R*.

a) le volume du prisme;

b) le volume du cylindre Γ «inscrit» dans le prisme;

c) la mesure de l'aire de la surface latérale du cylindre Γ.

Problèmes

33. Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et un diamètre $[AB]$ de ce cercle. Soit M un point de $(\mathcal{C})$, distinct de A et de B. Soit (D_1) et (D_2) deux droites non coplanaires telles que (D_1) soit orthogonale en A au plan $\mathcal{P}$ et (D_2) soit sécante en B au plan $\mathcal{P}$.

1) Montrer que :

a) (BM) et le plan $\mathcal{P}_1$, défini par M et (D_1), sont orthogonaux;

b) le plan $\mathcal{P}_1$ et le plan $\mathcal{P}_2$, défini par M et (D_2), sont perpendiculaires.

2) Soit (Δ) la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Un plan $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$, est sécant aux droites (D_1), (D_2) et (Δ), respectivement en A', B' et M'.
Montrer que :

a) $(B'M')$ et (BM) sont parallèles.

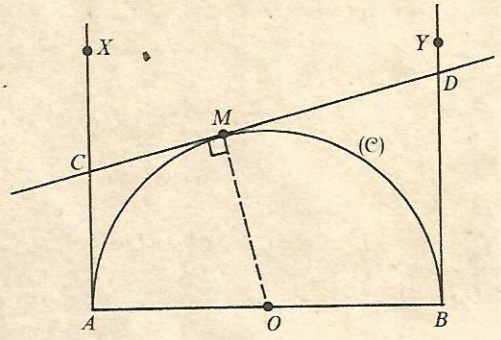
b) $(B'M')$ et $\mathcal{P}_1$ sont orthogonaux.

c) $A'B'M'$ est un triangle rectangle.

3) Un plan $\mathcal{P}''$, orthogonal à (D_2), est sécant aux droites (D_1), (D_2) et (Δ) respectivement en A'', B'' et M''.
Montrer que :

a) l'intersection de $\mathcal{P}''$ et $\mathcal{P}_1$ est orthogonale à $\mathcal{P}_2$;

b) $A''B''M''$ est un triangle rectangle.



34. I. Dans la figure ci-dessus :

- $(\mathcal{C})$ est un demi-cercle, de centre O, de rayon R et de diamètre $[AB]$; $(\mathcal{C})$ est inclus dans le plan $\mathcal{P}$.
- $[AX)$ et $[BY)$ sont deux demi-tangentes à $(\mathcal{C})$.
- C est un point de $[AX)$ et D un point de $[BY)$ tels que (CD) soit tangente en M à $(\mathcal{C})$.

1) Montrer que :

a) les triangles CAM et DBM sont isocèles;

b) le triangle COD est rectangle;

c) $AC \times BD = R^2$.

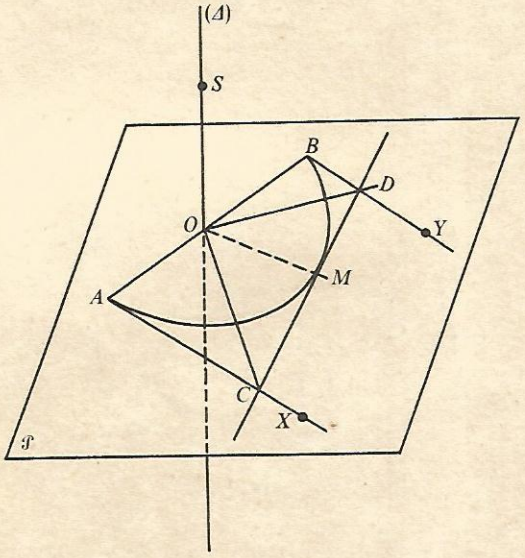
2) On suppose que $CD = \dfrac{5R}{2}$.

Exprimer en fonction de R :

a) AC, BD, AM et BM;

b) la mesure de l'aire du trapèze $ACDB$.

II. On désigne par (Δ) la droite orthogonale en O à $\mathcal{P}$. Soit S un point de (Δ) distinct de O.



1) Montrer que :

a) La droite (CD) et le plan (SOM) sont orthogonaux;

b) les deux plans (SOC) et (SOD) sont perpendiculaires.

2) *a*) Montrer que le plan (SAB) est perpendiculaire aux plans (SAC) et (SBD).

b) Construire l'intersection des deux plans (SAC) et (SBD).

c) Construire la droite perpendiculaire aux deux droites (AX) et (SB).

3) On suppose que $SO = R\sqrt{3}$ et $AC = 2R$.

Exprimer en fonction de R :

a) la distance du point O au plan (SCD);

b) la mesure de l'aire totale et le volume de la pyramide $SACDB$.

35. Dans un plan $\mathcal{P}$, on considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R. Soit $[AB]$ un diamètre de $(\mathcal{C})$ et M un point de $(\mathcal{C})$, distinct de A et de B. On

désigne par (Δ) la droite orthogonale en B au plan $\mathcal{P}$ et soit S un point de (Δ).

1) Montrer que :

a) SMA est un triangle rectangle;

b) le plan (SMA) et le plan défini par M et (Δ) sont perpendiculaires.

2) Soit C le projeté orthogonal du point M sur (AB).
Montrer que :

a) (MC) et (SA) sont orthogonales;

b) le plan (SMC) et le plan défini par A et (Δ) sont perpendiculaires.

3) Soit D le projeté orthogonal du point B sur (SM).

a) Si S et B sont confondus, où se trouve le point D?

b) Si S et B ne sont pas confondus, montrer que (BD) est orthogonale au plan (SMA).

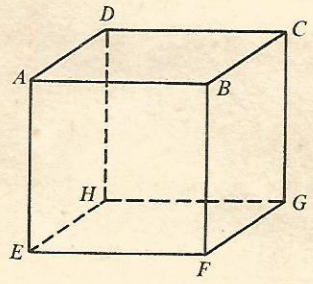
c) Trouver l'ensemble des points décrit par D lorsque S décrit la droite (Δ).
Construire cet ensemble.

4) On suppose que $[BM]$ est un côté d'un hexagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$ et que $SB = BM$.

a) Exprimer en fonction de R le volume du tétraèdre $SABM$.

b) D étant le projeté orthogonal du point B sur (SM), exprimer en fonction de R le volume du tétraèdre $ABSD$ et la distance du point S au plan (ABD).

36. $ABCDEFGH$ est un cube dont a est la mesure du côté. Soit I le point d'intersection de (AH) et (DE).



1) Montrer que les plans (AGI) et (DEG) sont perpendiculaires. Quel est l'intersection de ces plans?

2) Soit A' le projeté orthogonal du point A sur (GI).

a) Montrer que A' est le projeté orthogonal du point A sur le plan (DEG).

b) Montrer que, dans le plan (AGI), les deux triangles $AA'I$ et GHI sont semblables.

Exprimer en fonction de a la distance du point A au plan (DEG).

c) Montrer que $IA' = \frac{1}{3} IG$.

d) Montrer que les plans (AFC) et (DEG) sont parallèles.
Exprimer la distance de ces plans en fonction de a.

3) Soit J le milieu de $[DG]$ et C' le projeté orthogonal du point C sur le plan (DEG).

a) Montrer que C' appartient à (EJ) et $JC' = \frac{1}{3} EJ$.

b) Trouver l'image de (AC) par la projection orthogonale sur le plan (DEG). Cette image est-elle parallèle à (AC)? Justifier.

4) Soit K le centre de gravité du triangle DEG.

a) Montrer que K appartient à (BH) et que K est le projeté orthogonal commun des points B et H sur le plan (DEG).

b) Exprimer en fonction de a la distance du point B au plan (DEG) et celle du point H à ce plan.

5) Trouver le projeté orthogonal du point F sur le plan (DEG).
Exprimer en fonction de a la distance du point F au plan (DEG).

37. On considère un tétraèdre $ABCD$. Soit M un point de $]BC[$.
Par M on mène le plan $\mathcal{P}$ parallèle à (AB) et (CD). $\mathcal{P}$ est sécant aux droites (BD), (AD) et (AC) respectivement en N, P et Q.

• On suppose que le tétraèdre $ABCD$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} AB = BC = CD = a; \\ (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$$

1) Montrer que $MNPQ$ est un rectangle.

2) On pose $BM = x$.

a) Exprimer la mesure S de l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de a et x.

b) Étudier les variations de la fonction

$$f :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto S.$$

c) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O, I, J).

d) Déterminer la position du point M du segment $]BC[$ pour que S soit égale à $\frac{3a^2}{8}$.

•• On suppose que le tétraèdre $ABCD$ est régulier; soit a la mesure du côté. On désigne par K et L les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1) Montrer que :

a) (AB) est orthogonale au plan (CKD); en déduire que (AB) et (CD) sont orthogonales.

b) (KL) est orthogonale au plan (MNP).

2) On pose $BM = x$.

a) Exprimer en fonction de a et x le volume V de la pyramide $KMNPQ$ de sommet K et de base $MNPQ$.

b) Étudier les variations de la fonction

$$g :]o, a[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto V.$$

c) Construire la représentation graphique de g dans un autre repère orthogonal (O', I', J').

d) Déterminer la position du point M du segment $]BC[$ pour que V soit égale à $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

38. $SABCDEF$ est une pyramide régulière de sommet S dont la base $ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R. La distance du sommet S au plan $\mathcal{P}$ de la base est égale à $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que S est équidistant des supports des côtés de l'hexagone $ABCDEF$.
Exprimer en fonction de R la distance commune de S à ces droites.

2) Exprimer en fonction de R :

a) le volume de la pyramide $SABCDEF$;

b) le volume du cône dont S est le sommet et dont le cercle inscrit dans l'hexagone $ABCDEF$ est la base.

3) Soit C' un point de $]SC[$. Par C' on mène un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à (CD) et non parallèle à $\mathcal{P}$. Construire les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}'$ avec les plans (SAB), (SBC), (SCD), (SDE), (SEF), (SFA) et $\mathcal{P}$.

4) Soit M un point de $[SO]$ tel que $SM = \dfrac{1}{3}SO$.

Par M on mène le plan $\mathcal{P}''$ parallèle à (CD) et (DE); $\mathcal{P}''$ est sécant aux droites (SA), (SB), (SC), (SD), (SE) et (SF) respectivement en G, H, I, J, K et L.

a) Quelle est la nature du polygone $GHIJKL$?

b) Exprimer en fonction de R le volume du solide $ABCDEFGHIJKL$.

39. $SABC$ est un tétraèdre tel que :

– ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R; soit $\mathcal{P}$ le plan du cercle;
– (SO) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$;
– $SO = R$.

Soit A', B' et C' les points tels que :

$$A' \in [SA], \quad SA' = \frac{2}{3}SA;$$

$$B' \in [SB], \quad SC' = \frac{1}{2}SB;$$

$$C' \in [SC], \quad SC' = \frac{1}{2}SC.$$

1) Construire la droite d'intersection du plan $(A'B'C')$ avec $\mathcal{P}$.

2) Dans le plan $\mathcal{P}$ on trace la droite (Δ) passant par O et parallèle à (AB).
Montrer que le plan défini par C' et (Δ) est le plan médiateur du segment $[SC]$.

3) Soit H le milieu de $[BC]$ et E le projeté orthogonal du point A' sur (SH).
Montrer que :

a) les plans (SAH) et (SBC) sont perpendiculaires;

b) la droite $(A'E)$ est orthogonale au plan (SBC).

4) Exprimer en fonction de R :

a) la distance du point A' au plan $(SB'C')$;

b) le volume du tétraèdre $SA'B'C'$;

c) le volume du solide $ABCA'B'C'$.

40. $ABCD$ est un tétraèdre régulier dont a est la mesure du côté.

1) Exprimer en fonction de a le volume V du tétraèdre $ABCD$.

2) B', C' et D' sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Soit V' le volume du tétraèdre $AB'C'D'$. Calculer $\dfrac{V'}{V}$.

3) C'' et D'' sont respectivement les milieux de $[BC]$ et $[BD]$. Soit V'' le volume du prisme $BC''D''B'C'D'$. Calculer $\dfrac{V''}{V}$.

4) Exprimer en fonction de a le volume du solide $CC''C'DD''D'$.

7 La sphère



Photo ESA.

1) Définition

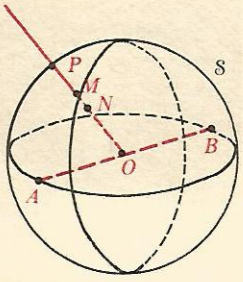
Étant donné un point O et un nombre réel strictement positif r, on appelle sphère de centre O et de rayon r, l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ tels que :

$$d(O, M) = r.$$

Notation.
On désigne par $\mathcal{S}(O, r)$, ou tout simplement par $\mathcal{S}$, la sphère de centre O et de rayon r.

Vocabulaire.
A et B étant deux points de la sphère $\mathcal{S}(O, r)$ tels que O soit le milieu de $[AB]$, $[AB]$ est un *diamètre* et $[OA]$ un *rayon* de la sphère $\mathcal{S}(O, r)$.

(Par abus de langage, *rayon* désigne aussi bien un segment que la mesure de ce segment.)



$M \in \mathcal{S}$
$P \notin \mathcal{S}$
$N \notin \mathcal{S}$

$$[M \in \mathcal{S}(O, r)] \iff [d(O, M) = r].$$

N est tel que : $d(O, N) < r$.
N est un *point intérieur* à la sphère $\mathcal{S}(O, r)$.

P est tel que : $d(O, P) > r$.
P est un *point extérieur* à la sphère $\mathcal{S}(O, r)$.

Remarque :
— On appelle boule de centre O et de rayon $r (r > O)$, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :

$$d(O, r) \leqslant r.$$

— On désigne par $\mathcal{B}_{(O,r)}$, ou tout simplement par $\mathcal{B}$, la boule de centre O et de rayon r. On dit alors que $\mathcal{B}_{(O,r)}$ est la boule associée à la sphère $\mathcal{S}_{(O,r)}$.
— On parlera, de préférence, de l'aire de la sphère et du volume de la boule.

2) Diverses déterminations d'une sphère

a) Par définition, une sphère est déterminée par la donnée d'un point, son centre et d'un nombre réel strictement positif, son rayon.

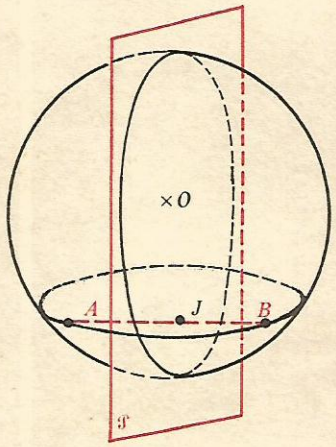
b) Une sphère peut être déterminée par un diamètre $[AB]$: c'est la sphère qui a pour centre le milieu O de $[AB]$ et pour rayon OA.

c) Montrons qu'une sphère peut aussi être déterminée par quatre points non coplanaires.

● *Activité 1*

Sphères passant par deux points distincts

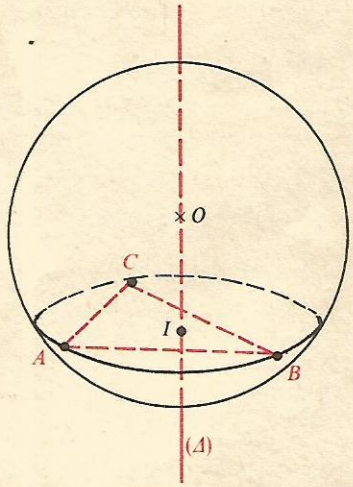
On donne deux points distincts A et B.
Montrer que tout point du plan médiateur de $[AB]$ est centre d'une sphère passant par A et B.



● *Activité 2*

Sphères passant par trois points non alignés

On donne trois points non alignés A, B, C.
Montrer que tout point de l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC est centre d'une sphère passant par A, B et C.

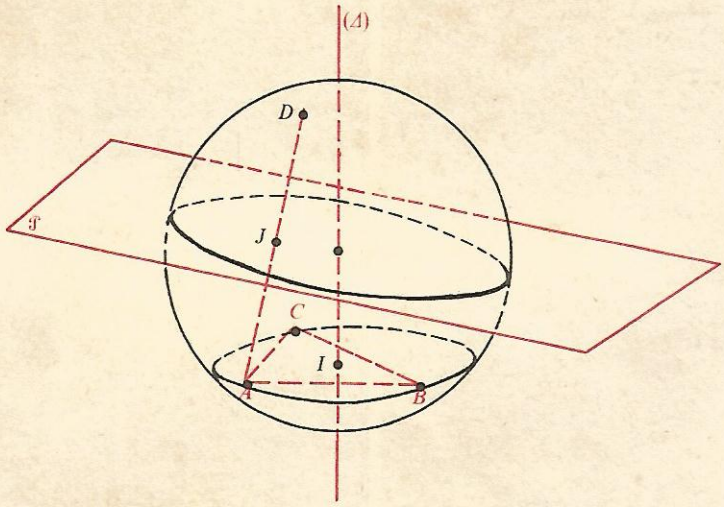


• *Activité 3*

Sphère passant par quatre points non coplanaires

On donne quatre points non coplanaires A, B, C, D.
Peut-on trouver une sphère qui passe par ces quatre points?

Si une telle sphère existe, son centre appartient nécessairement à l'axe (Δ) du cercle circonscrit au triangle ABC et au plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AD]$.



— Les quatre points A, B, C, D étant non coplanaires montrer que (Δ) est sécante à $\mathcal{P}$ en un point O.
On a alors :

$$OA = OB = OC = OD.$$

La sphère de centre O et de rayon OA passe donc par les points A, B, C et D; c'est la seule. (Pourquoi)?

Conclusion

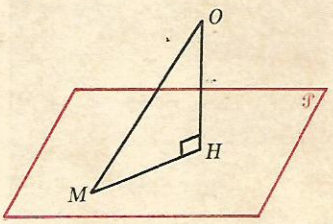
Il existe une et une seule sphère passant par quatre points non coplanaires A, B, C et D.
On dira que cette sphère est *circonscrite* au tétraèdre $ABCD$.

3) Positions relatives d'une sphère et d'un plan

On donne une sphère $\mathcal{S}$ de centre O, de rayon r et un plan $\mathcal{P}$.
On se propose d'étudier l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$.

Plusieurs cas sont à envisager.
Désignons par H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$ et par d la distance du point O au plan $\mathcal{P}$ $(d = OH)$.

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.



Le triangle OHM étant rectangle en H,

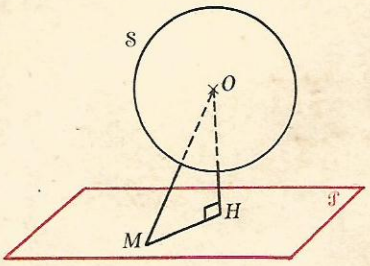
$$OM^2 = OH^2 + HM^2.$$

Cette égalité permet d'écrire :
quel que soit le point M du plan,

$$OM \geqslant d.$$

a) $\boxed{d > r}$. Dans le cas où la distance d du centre de la sphère au plan $\mathcal{P}$ est strictement supérieure au rayon r de la sphère, il n'existe aucun point du plan situé à une distance r de O.

$$\boxed{\text{Si } \quad d > r, \quad \text{alors} \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \varnothing.}$$

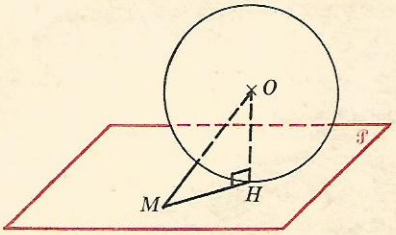


Tout point M du plan $\mathcal{P}$ étant tel que $OM > r$, est extérieur à la sphère $\mathcal{S}$.

b) $\boxed{d = r}$. Dans le cas où la distance d du centre de la sphère au plan $\mathcal{P}$ est égale au rayon r, seul le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$ est un point commun au plan $\mathcal{P}$ et à la sphère $\mathcal{S}$.

$$\boxed{\text{Si } \quad d = r, \quad \text{alors} \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}.}$$

Tout point du plan $\mathcal{P}$ autre que H est extérieur à la sphère $\mathcal{S}$.
Le plan $\mathcal{P}$ est dit « tangent » à la sphère $\mathcal{S}$ au point H.



c) $\boxed{d < r}$. Dans le cas où la distance d du centre de la sphère au plan $\mathcal{P}$ est strictement inférieure au rayon r :

- le point H est un point du plan $\mathcal{P}$, intérieur à la sphère; il en est de même des points M du plan tels que :

$$HM < \sqrt{r^2 - d^2}.$$

- Tout point M du plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$HM = \sqrt{r^2 - d^2}$$

est commun à la sphère et au plan; en effet, dans ce cas :

$$OM = r. \quad \text{(Justifier).}$$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est l'ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ situés à la distance $\sqrt{r^2 - d^2}$ du point H; c'est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$ inclus dans $\mathcal{P}$.

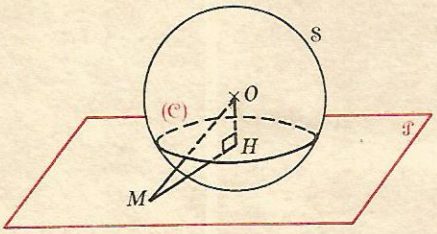
- Tout point M du plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$HM > \sqrt{r^2 - d^2}$$

est extérieur à la sphère.

$$\boxed{\text{Si } \quad d < r, \quad \text{alors} \quad \mathcal{P} \cap \mathcal{S} = (\mathcal{C})}$$

($(\mathcal{C})$ désignant le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$, inclus dans $\mathcal{P}$).



- On appelle *section plane* d'une sphère $\mathcal{S}$ l'intersection de la sphère et d'un plan.

— En résumé,

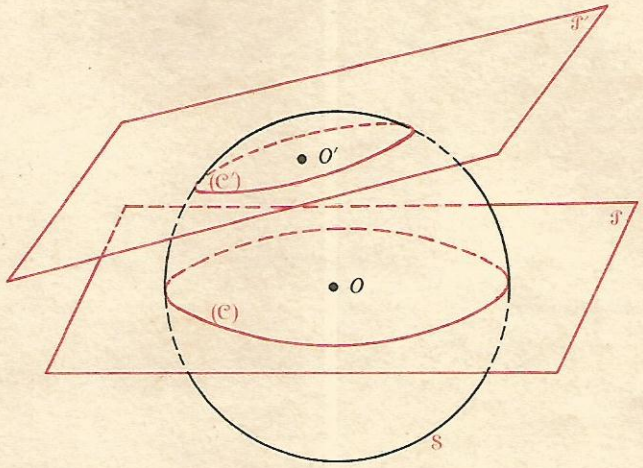
la section plane d'une sphère

est : soit l'ensemble vide,
soit un singleton,
soit un cercle.

selon que la distance du centre de la sphère au plan est strictement supérieure, égale ou strictement inférieure au rayon de la sphère.

Définition

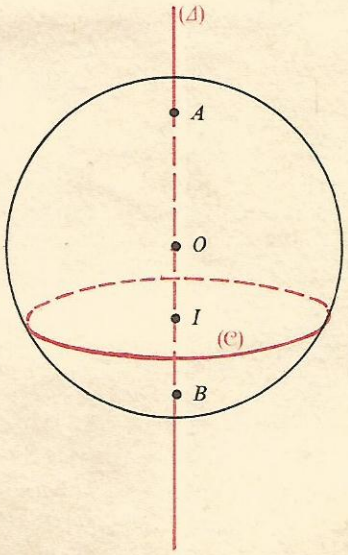
Tout cercle, intersection de la sphère et d'un plan est appelé *grand cercle* ou *petit cercle* suivant que ce plan passe ou ne passe pas par le centre de la sphère.



$O \in \mathcal{P}$
$O' \in \mathcal{P}'$ et $O' \notin \mathcal{P}$.

Définition

• On appelle pôles d'un cercle $(\mathcal{C})$ de la sphère $\mathcal{S}$ les deux points d'intersection de la sphère avec l'axe du cercle $(\mathcal{C})$.

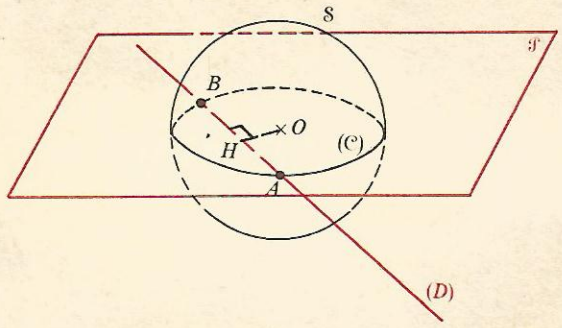


$\mathcal{S} \cap (\Delta) = \{A, B\}$.
$(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$

4) Positions relatives d'une droite et d'une sphère

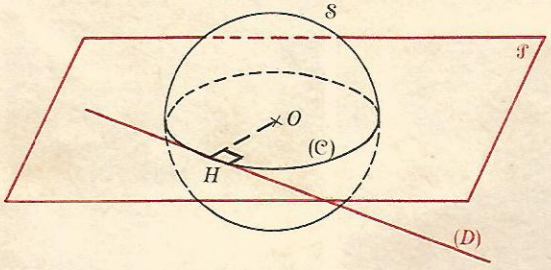
On donne une sphère $\mathcal{S}$ de centre O, de rayon r et une droite (D) ne passant pas par O. Désignons par H le projeté orthogonal de O sur (D) et par d la distance du point O à la droite (D). $(d = OH.)$

Le point O et la droite (D) déterminent un plan $\mathcal{P}$.
$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est alors un grand cercle $(\mathcal{C})$.
On est donc ramené à étudier, dans le plan $\mathcal{P}$, les positions relatives de la droite (D) et du grand cercle $(\mathcal{C})$.



$d < r$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, (D) est sécante à $(\mathcal{C})$ en A et B.
On dit alors que :
la droite (D) est *sécante* à la sphère $\mathcal{S}$ en A et B.
Le segment $[AB]$ est appelé *corde* de la sphère :

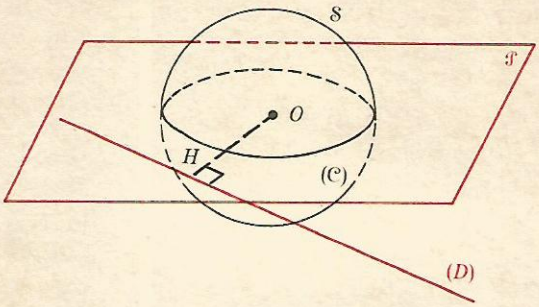


$d = r$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, (D) est tangente à $(\mathcal{C})$ en H.
On dit alors que :
la droite (D) est *tangente* à la sphère $\mathcal{S}$ en H.

On a :

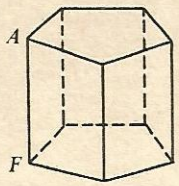
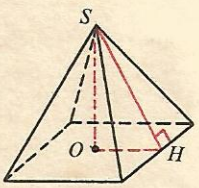
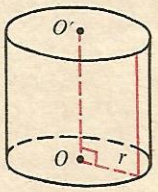
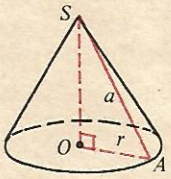
$$\mathcal{S} \cap (D) = \{H\}$$
et
$$(OH) \perp (D).$$



$d > r$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, (D) est extérieure à $(\mathcal{C})$.
On dit que :
la droite (D) est *extérieure* à la sphère $\mathcal{S}$.

Solides usuels
Formulaires

Nature du solide	S : Aire latérale	V : Volume
Prisme droit  h : hauteur $h = AF$ p : périmètre de la base s : aire de la base	$S = ph$	$V = sh$
Pyramide régulière  h : hauteur $h = SO$ a : apothème $a = SH$ p : périmètre de la base s : aire de la base	$S = \frac{1}{2} pa$	$V = \frac{1}{3} sh$ (valable aussi pour une pyramide non régulière).
Cylindre de révolution  h : hauteur $h = OO'$ r : rayon de la base	$S = 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Cône de révolution  h : hauteur $h = SO$ r : rayon de la base $a = SA$	$S = \pi ra$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Sphère  r : rayon de la sphère	$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Exercices

1. Soit deux points distincts A et B et une droite (Δ) non orthogonale à (AB).

Montrer qu'il existe une unique sphère passant par A et B dont le centre appartient à (Δ).

2. Soit A un point d'un plan $\mathcal{P}$ et B un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.

Montrer qu'il existe une unique sphère passant par B et tangente en A au plan $\mathcal{P}$.

3. Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et A un point du plan $\mathcal{P}$.

Existe-t-il une sphère tangente en A au plan $\mathcal{P}$ dont le centre appartient à $\mathcal{P}'$?

4. Soit deux points distincts A et B de l'espace $\mathcal{E}$.

Trouver l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $MA^2 + MB^2 = 2AB^2$.

5. ABC est un triangle rectangle en A. Soit (Δ) la droite orthogonale au plan (ABC) en B, et S un point de (Δ), distinct de B.

Préciser le centre de la sphère passant par S, A, B et C.

6. Quel est l'ensemble des centres des sphères tangentes à deux plans disjoints $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

7. Soit une droite (Δ) et un point A n'appartenant pas à (Δ).

Trouver l'ensemble des projetés orthogonaux du point A sur les plans contenant (Δ).

Dans les exercices 8 à 14, $\mathcal{S}$ désigne la sphère de centre O et de rayon r.

8. Quel est l'ensemble des milieux des cordes de la sphère $\mathcal{S}$ ayant une longueur donnée d $(d \in \mathbb{R}_+^*)$?

9. Soit I un point intérieur à $\mathcal{S}$.

Quel est l'ensemble des milieux des cordes de la sphère $\mathcal{S}$ dont les supports passent par le point I?

10. Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes de $\mathcal{S}$ telles que (AB) et (CD) appartiennent à la même direction δ et telles que $[AB]$ et $[CD]$ ne soient pas deux cordes d'un même grand cercle.

a) Montrer que O n'appartient pas au plan défini par (AB) et (CD).

b) Faire un dessin sur lequel on trace l'intersection (Δ) des deux plans (OAB) et (OCD).

c) Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que le plan (OIJ) est orthogonal à (Δ).

d) Quel est l'ensemble des milieux des cordes de la sphère $\mathcal{S}$ dont les supports appartiennent à δ.

11. Soit I un point extérieur à la sphère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ un plan contenant (OI). On désigne par $(\mathcal{C})$ le grand cercle, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$.

a) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{P}$ deux droites passant par I et tangentes à $\mathcal{S}$. On désigne par E et F les points d'intersection respectifs de ces deux droites avec la sphère $\mathcal{S}$.

b) Soit Π_E et Π_F les plans tangents à $\mathcal{S}$ respectivement en E et F.
Montrer que I est un point commun à Π_E et Π_F.
Quelle est l'intersection de Π_E et Π_F?
Faire un dessin.

c) Donner un programme de construction :

- d'une droite passant par I et tangente à $\mathcal{S}$;
- d'un plan passant par I et tangent à $\mathcal{S}$.

12. Soit S un pôle d'un grand cercle $(\mathcal{C})$ de la sphère $\mathcal{S}$.

a) Soit A un point de $(\mathcal{C})$.
Exprimer SA en fonction de r.

b) On désigne par M le milieu de $[SA]$.
Quel est l'ensemble décrit par M lorsque A décrit $(\mathcal{C})$?

13. Soit S un point de la sphère $\mathcal{S}$. Trouver l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) $MO^2 - MS^2 = \dfrac{r^2}{2}$;

b) M appartient à $\mathcal{S}$ et $SM = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

14. Soit $[MN]$ une corde de $\mathcal{S}$ ayant pour longueur r.
Soit Π_M et Π_N les plans tangents à $\mathcal{S}$ respectivement en M et N.

a) Montrer que Π_M et Π_N sont sécants.

b) Soit (Δ) l'intersection de Π_M et Π_N, et I le point d'intersection de (Δ) et du plan (OMN).
Soit S un point de (Δ) tel que $SI = r\sqrt{3}$.
Exprimer en fonction de r la mesure de l'aire totale et le volume de la pyramide SOMIN.

15. L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K).

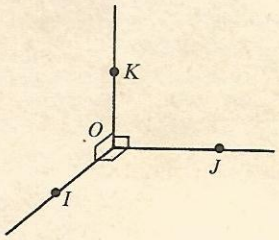
a) Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par O, I, J et K.

b) Soit le point $A(b, c, d)$. On désigne par B, C et

D les projetés orthogonaux du point A respectivement sur (OI), (OJ) et (OK).

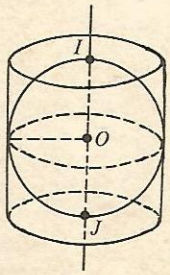
Exprimer en fonction de b, c et d les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par O, B, C et D.

16. (O, I, J, K) est un repère orthogonal.



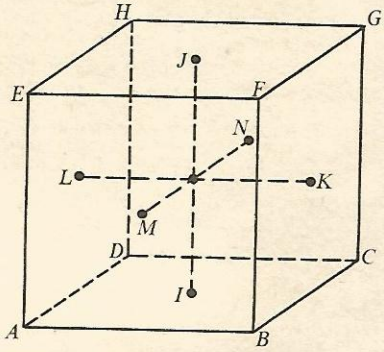
Donner un programme de construction du centre d'une sphère tangente aux trois plans (OIJ), (OJK) et (OKI).

17. La figure ci-dessous représente une boule $\mathcal{B}$ de centre O et de rayon r « inscrite » dans un cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe (IJ).



Soit V et V' les volumes respectifs de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{B}$. Calculer $\frac{V'}{V}$.

18. $ABCDEFGH$ est un cube. I, J, K, L, M et N sont respectivement les centres des 6 faces $ABCD$, $EFGH$, $BCGF$, $ADHE$, $ABFE$ et $CDHG$.



1) Montrer que :

a) les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en un point O;

b) il existe une sphère $\mathcal{S}$ de centre O, tangente aux plans des faces du cube.

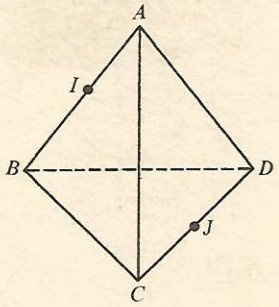
2) Soit $\mathcal{B}$ la boule associée à $\mathcal{S}$.

a) On désigne par S la mesure de l'aire totale du cube et par S' celle de l'aire de la sphère $\mathcal{S}$. Calculer $\frac{S'}{S}$.

b) On désigne par V et V' les volumes respectifs du cube et de la boule $\mathcal{B}$. Calculer $\frac{V'}{V}$.

Problèmes

19. $ABCD$ est un tétraèdre régulier dont a est la mesure du côté. I est le milieu de $[AB]$.



1) Montrer que (ICD) est le plan médiateur du segment $[AB]$.

2) Soit J le milieu de $[CD]$ et H le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que :

a) (AH) est orthogonale au plan (BCD);

b) (AH) et (IJ) sont sécantes en un point O qui est le centre de la sphère $\mathcal{S}$ passant par A, B, C et D.

3) Exprimer en fonction de a le volume de la boule associée à $\mathcal{S}$.

4) Montrer qu'il existe une sphère de centre O tangente aux plans des quatre faces du tétraèdre $ABCD$.
Exprimer en fonction de a le rayon de cette sphère.

20. $SABCD$ est une pyramide régulière de sommet S et de base $ABCD$ telle que :

- $ABCD$ soit un carré inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r.
- $SA = SB = SC = SD = AB$.

1) Montrer que SBD et SAC sont des triangles rectangles.

2) *a*) Montrer qu'il existe une sphère $\mathcal{S}$ passant par S, A, B, C et D.

b) Exprimer en fonction de r la mesure de l'aire de $\mathcal{S}$ et le volume de la boule associée à $\mathcal{S}$.

3) Dans le plan du cercle $(\mathcal{C})$ on trace la droite (Δ) tangente en A à ce cercle. Soit M un point de (Δ).

a) Montrer que la sphère $\mathcal{S}'$ de diamètre $[SM]$ passe par O et A.

b) Quel est l'ensemble décrit par le centre de $\mathcal{S}'$ lorsque M décrit la droite (Δ)?

4) Dans le plan du cercle $(\mathcal{C})$ on trace la droite (Δ') tangente en B à ce cercle. Soit N le point d'intersection de (Δ) et (Δ').
Montrer que S, A, N, B, O appartiennent à une même sphère $\mathcal{S}''$. Déterminer le centre et exprimer en fonction de r le rayon de cette sphère.

INDEX

A

Analytique (représentation analytique d'une application) ... 158
Analytiquement (définir analytiquement une application) ... 158
Angle inscrit dans un cercle ... 6
Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls ... 98
Angle orienté d'un couple de demi-droites ... 99
Apothème ... 15
Arc capable ... 14
Arc intercepté (par un angle ou par un secteur angulaire ... 6
Axe d'un cercle ... 238

B

Boule ... 248

C

Croisé (polygone croisé, non croisé) ... 19
Convexe ... 194

D

Directions orthogonales ... 205
Demi-tangente à un cercle ... 6
Dodécaèdre ... 194
Droites orthogonales ... 207
Droites et plans orthogonaux ... 209

F

Fonction sinus ... 40
Fonctions cosinus ... 40

G

Grand-cercle d'une sphère ... 253

H

Hexaèdre ... 253
Hexagone ... 16

I

Icosaèdre ... 194
Invariant, globalement invariant ... 95

L

Ligne de niveau ... 25

M

Mesure d'un angle orienté ... 46
Mesure principale d'un angle orienté ... 46

O

Octaèdre ... 194
Octogone ... 18

P

Pentagone ... 19
Petit-cercle d'une sphère ... 253
Plans perpendiculaires ... 219
Plan médiateur ... 237
Point-image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique ... 46
Point intérieur à une sphère ... 248
Point extérieur à une sphère ... 248
Polyèdre ... 193
Polygone régulier ... 15
Pôles d'une sphère ... 253
Prisme ... 195
Pyramide ... 195
Projection orthogonale sur un plan, sur une droite ... 225, 227

S

Secteur angulaire au centre ... 5
Secteur angulaire inscrit dans un cercle ... 6
Section plane d'une sphère ... 252
Semblables (parties) ... 138
Similitude ... 132
Similitude directe, indirecte ... 135
Symétrie glisée ... 114

T

Tétraèdre ... 194
Transformation du plan ... 95

Tables trigonométriques

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente			
0	0,000 0	0,000 0	1,000 0	0,000 0	—	1,570 8	90
0,5	0,008 7	0,008 7	1,000 0	0,008 7	114,589	1,562 1	89,5
1	0,017 5	0,017 5	0,999 8	0,017 5	57,290	1,553 3	89
1,5	0,026 2	0,026 2	0,999 7	0,026 2	38,188	1,544 6	88,5
2	0,034 9	0,034 9	0,999 4	0,034 9	28,636	1,535 9	88
2,5	0,043 6	0,043 6	0,999 0	0,043 7	22,904	1,527 2	87,5
3	0,052 4	0,052 3	0,998 6	0,052 4	19,081	1,518 4	87
3,5	0,061 1	0,061 0	0,998 1	0,061 2	16,350	1,509 7	86,5
4	0,069 8	0,069 8	0,997 6	0,069 9	14,301	1,501 0	86
4,5	0,078 5	0,078 5	0,996 9	0,078 7	12,706	1,492 3	85,5
5	0,087 3	0,087 2	0,996 2	0,087 5	11,430	1,483 5	85
5,5	0,096 0	0,095 8	0,995 4	0,096 3	10,385	1,474 8	84,5
6	0,104 7	0,104 5	0,994 5	0,105 1	9,514 4	1,466 1	84
6,5	0,113 4	0,113 2	0,993 6	0,113 9	8,776 9	1,457 3	83,5
7	0,122 2	0,121 9	0,992 5	0,122 8	8,144 3	1,448 6	83
7,5	0,130 9	0,130 5	0,991 4	0,131 7	7,595 8	1,439 9	82,5
8	0,139 6	0,139 2	0,990 3	0,140 5	7,115 4	1,431 2	82
8,5	0,148 4	0,147 8	0,989 0	0,149 5	6,691 2	1,422 4	81,5
9	0,157 1	0,156 4	0,987 7	0,158 4	6,313 8	1,413 7	81
9,5	0,165 8	0,165 0	0,986 3	0,167 3	5,975 8	1,405 0	80,5
10	0,174 5	0,173 6	0,984 8	0,176 3	5,671 3	1,396 3	80
10,5	0,183 3	0,182 2	0,983 3	0,185 3	5,395 5	1,387 5	79,5
11	0,192 0	0,190 8	0,981 6	0,194 4	5,144 6	1,378 8	79
11,5	0,200 7	0,199 4	0,979 9	0,203 5	4,915 2	1,370 1	78,5
12	0,209 4	0,207 9	0,978 1	0,212 6	4,704 6	1,361 4	78
12,5	0,218 2	0,216 4	0,976 3	0,221 7	4,510 7	1,352 6	77,5
13	0,226 9	0,225 0	0,974 4	0,230 9	4,331 5	1,343 9	77
13,5	0,235 6	0,233 4	0,972 4	0,240 1	4,165 3	1,335 2	76,5
14	0,244 3	0,241 9	0,970 3	0,249 3	4,010 8	1,326 5	76
14,5	0,253 1	0,250 4	0,968 1	0,258 6	3,866 7	1,317 7	75,5
15	0,261 8	0,258 8	0,965 9	0,267 9	3,732 1	1,309 0	75
15,5	0,270 5	0,267 2	0,963 6	0,277 3	3,605 9	1,300 3	74,5
16	0,279 3	0,275 6	0,961 3	0,286 7	3,487 4	1,291 5	74
16,5	0,288 0	0,284 0	0,958 8	0,296 2	3,375 9	1,282 8	73,5
17	0,296 7	0,292 4	0,956 3	0,305 7	3,270 9	1,274 1	73
17,5	0,305 4	0,300 7	0,953 7	0,315 3	3,171 6	1,265 4	72,5
18	0,314 2	0,309 0	0,951 1	0,324 9	3,077 7	1,256 6	72
18,5	0,322 9	0,317 3	0,948 3	0,334 6	2,988 7	1,247 9	71,5
19	0,331 6	0,325 6	0,945 5	0,344 3	2,904 2	1,239 2	71
19,5	0,340 3	0,333 8	0,942 6	0,354 1	2,823 9	1,230 5	70,5
20	0,349 1	0,342 0	0,939 7	0,364 0	2,747 5	1,221 7	70
20,5	0,357 8	0,350 2	0,936 7	0,373 9	2,674 6	1,213 0	69,5
21	0,366 5	0,358 4	0,933 6	0,383 9	2,605 1	1,204 3	69
21,5	0,375 2	0,366 5	0,930 4	0,393 9	2,538 6	1,195 6	68,5
22	0,384 0	0,374 6	0,927 2	0,404 0	2,475 1	1,186 8	68
22,5	0,392 7	0,382 7	0,923 9	0,414 2	2,414 2	1,178 1	67,5
		Cosinus	Sinus		Tangente	Radians	Degrés

Tables trigonométriques (suite)

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente			
23	0,401 4	0,390 7	0,920 5	0,424 5	2,355 9	1,169 4	67
23,5	0,410 2	0,398 7	0,917 1	0,434 8	2,299 8	1,160 6	66,5
24	0,418 9	0,406 7	0,913 5	0,445 2	2,246 0	1,151 9	66
24,5	0,427 6	0,414 7	0,910 0	0,455 7	2,194 3	1,143 2	65,5
25	0,436 3	0,422 6	0,906 3	0,466 3	2,144 5	1,134 5	65
25,5	0,445 1	0,430 5	0,902 6	0,477 0	2,096 5	1,125 7	64,5
26	0,453 8	0,438 4	0,898 8	0,487 7	2,050 3	1,117 0	64
26,5	0,462 5	0,446 2	0,894 9	0,498 6	2,005 7	1,108 3	63,5
27	0,471 2	0,454 0	0,891 0	0,509 5	1,962 6	1,099 6	63
27,5	0,480 0	0,461 7	0,887 0	0,520 6	1,921 0	1,090 8	62,5
28	0,488 7	0,469 5	0,882 9	0,531 7	1,880 7	1,082 1	62
28,5	0,497 4	0,477 2	0,878 8	0,543 0	1,841 8	1,073 4	61,5
29	0,506 1	0,484 8	0,874 6	0,554 3	1,804 0	1,064 7	61
29,5	0,514 9	0,492 4	0,870 4	0,565 8	1,767 5	1,055 9	60,5
30	0,523 6	0,500 0	0,866 0	0,577 4	1,732 1	1,047 2	60
30,5	0,532 3	0,507 5	0,861 6	0,589 0	1,697 7	1,038 5	59,5
31	0,541 1	0,515 0	0,857 2	0,600 9	1,664 3	1,029 7	59
31,5	0,549 8	0,522 5	0,852 6	0,612 8	1,631 9	1,021 0	58,5
32	0,558 5	0,529 9	0,848 0	0,624 9	1,600 3	1,012 3	58
32,5	0,567 2	0,537 3	0,843 4	0,637 1	1,569 7	1,003 6	57,5
33	0,576 0	0,544 6	0,838 7	0,649 4	1,539 9	0,994 8	57
33,5	0,584 7	0,551 9	0,833 9	0,661 9	1,510 8	0,986 1	56,5
34	0,593 4	0,559 2	0,829 0	0,674 5	1,482 6	0,977 4	56
34,5	0,602 1	0,566 4	0,824 1	0,687 3	1,455 0	0,968 7	55,5
35	0,610 9	0,573 6	0,819 2	0,700 2	1,428 1	0,959 9	55
35,5	0,619 6	0,580 7	0,814 1	0,713 3	1,401 9	0,951 2	54,5
36	0,628 3	0,587 8	0,809 0	0,726 5	1,376 4	0,942 5	54
36,5	0,637 0	0,594 8	0,803 9	0,740 0	1,351 4	0,933 8	53,5
37	0,645 8	0,601 8	0,798 6	0,753 6	1,327 0	0,925 0	53
37,5	0,654 5	0,608 8	0,793 4	0,767 3	1,303 2	0,916 3	52,5
38	0,663 2	0,615 7	0,788 0	0,781 3	1,279 9	0,907 6	52
38,5	0,672 0	0,622 5	0,782 6	0,795 4	1,257 2	0,898 8	51,5
39	0,680 7	0,629 3	0,777 1	0,809 8	1,234 9	0,890 1	51
39,5	0,689 4	0,636 1	0,771 6	0,824 3	1,213 1	0,881 4	50,5
40	0,698 1	0,642 8	0,766 0	0,839 1	1,191 8	0,872 7	50
40,5	0,706 9	0,649 4	0,760 4	0,854 1	1,170 8	0,863 9	49,5
41	0,715 6	0,656 1	0,754 7	0,869 3	1,150 4	0,855 2	49
41,5	0,724 3	0,662 6	0,749 0	0,884 7	1,130 3	0,846 5	48,5
42	0,733 0	0,669 1	0,743 1	0,900 4	1,110 6	0,837 8	48
42,5	0,741 8	0,675 6	0,737 3	0,916 3	1,091 3	0,829 0	47,5
43	0,750 5	0,682 0	0,731 4	0,932 5	1,072 4	0,820 3	47
43,5	0,759 2	0,688 4	0,725 4	0,949 0	1,053 8	0,811 6	46,5
44	0,767 9	0,694 7	0,719 3	0,965 7	1,035 5	0,802 9	46
44,5	0,776 7	0,700 9	0,713 3	0,982 7	1,017 6	0,794 1	45,5
45	0,785 4	0,707 1	0,701 1	1,000 0	1,000 0	0,785 4	45
		Cosinus	Sinus		Tangente	Radians	Degrés

ACHEVÉ D'IMPRIMER 4e TRIMESTRE 1986
SUR LES PRESSES SPÉCIALES DE LA
SOCIÉTÉ EUROPÉENNE DES ARTS GRAPHIQUES
5, RUE DE PONTOISE
75005 PARIS
IMPRIMÉ EN ITALIE

Numéro d'Editeur : 583- Code 791

F340.0

168214