Fomesoutra.com
ça soutra!

collection
IRMA

MATHEMATIQUES

1e D.

ANALYSE







CEDIC
NEA

Scanned by CamScanner

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

Mathématiques

en classe de 1re D

Faustino 1D 6

TOME 1

ANALYSE

Georgette OUEDRAOGO-HADDAD
Phung DOAN
Michel DUHOUX

Scanned by CamScanner

ISBN : 2-7124-0264-2
: 2-7236-0790-9

© Cedic/Nathan - Les Nouvelles Éditions Africaines – Abidjan 1986

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

Scanned by CamScanner

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte-d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain.

Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.

A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Première D, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Première D, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.
- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.
- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.

L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

SALIOU TOURÉ

Scanned by CamScanner

REMERCIEMENTS

Nous remercions les personnes qui ont participé à l'expérimentation du contenu de cet ouvrage :

Mesdames : GUYON, Inspecteur de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
LECLERC, Professeur au Collège Mermoz d'Abidjan,
Messieurs : CANAZZI, Professeur au L.C. d'Abidjan,
DOAN, Professeur au L.G. de Bingerville,

et dont les suggestions et critiques ont été très précieuses.

Nous remercions également les personnes suivantes qui ont bien voulu lire notre manuscrit et nous faire profiter de leurs remarques pertinentes :

Mesdames : GUYON, Inspecteur de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
VALETTE, Animatrice pédagogique à la S.D.E.A.C.P.,
Messieurs : BOUTTE, Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématiques,
CARPENTIER, Chercheur à l'IRMA,
DUMONCEAU, Chercheur à l'IRMA,
MATHIEU, Conseiller pédagogique à la S.D.E.A.C.P.,
N'DA, Animateur pédagogique à la S.D.E.A.C.P.

Enfin, nous remercions tout particulièrement M. BEGHAIN, chercheur à l'IRMA, qui a bien voulu lire notre manuscrit et avec qui nous avons eu de longs et fructueux entretiens qui nous ont permis d'améliorer fortement le contenu et la forme de cet ouvrage.

Les auteurs

Scanned by CamScanner

PROGRAMME DE PREMIÈRE D

I — ALGÈBRE

1. Applications

— Applications injectives, surjectives, bijectives, applications réciproques.
— Applications égales sur un ensemble.
Composition des applications.
— Restriction d'une application à un ensemble.
Image directe, image réciproque.

2. Équations, inéquations, systèmes

— Fonctions polynômes du second degré. Forme canonique.
— Équations du second degré (utilisation du discriminant).
— Signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, f désignant une fonction polynôme du 2^{nd} degré.
— Inéquations du 2^{nd} degré.
— Somme et produit des solutions d'une équation du second degré.
Applications.
— Équations et systèmes d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}^2$ et étude sur des exemples dans $\mathbb{R}^3$.
— Problèmes se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes.

II — ANALYSE

1. Fonctions numériques et représentations graphiques

— Comparaisons de deux fonctions numériques.
— Opérations sur les fonctions numériques.
— Parité, périodicité d'une fonction. Éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction. Recherche et utilisation d'un ensemble d'étude.
— Représentation graphique des fonctions sinus, cosinus.
— Étant donné une fonction f, étude sur des exemples, des fonctions :

$$x \longmapsto f(x-a); \qquad x \longmapsto f(x)+b;$$
$$x \longmapsto f(kx); \qquad x \longmapsto kf(x);$$
$$x \longmapsto |f(x)|;$$

a, b, k étant des constantes numériques.
Application à la représentation graphique de quelques fonctions.
— Représentation graphique de l'application réciproque d'une bijection donnée.

2. Suites numériques

— Diverses déterminations d'une suite.
Représentation graphique d'une suite.
— Comparaison de suites.
— Suites monotones; notion de convergence d'une suite.
— Initiation au raisonnement par récurrence.
— Problèmes se ramenant à l'étude de suites arithmétiques ou géométriques.

3. Limite, continuité, dérivation d'une fonction numérique

— Limite et continuité d'une fonction en un point. (On admettra les théorèmes classiques sur les limites.)

Scanned by CamScanner

— Fonctions dérivables en un point, nombre dérivé.
— Interprétation géométrique du nombre dérivé; équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.
— Règles de dérivation de la somme, du produit, du quotient de fonctions dérivables en un point, d'une fonction de la forme $x \longmapsto f(ax+b)$.
— Fonctions dérivables sur un intervalle; fonction dérivée.
— Énoncé du théorème donnant le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle, à partir du signe de $f'(x)$.
— Extension de la notion de limite. Notion d'asymptotes parallèles aux axes.

4. Étude et représentation graphique de quelques fonctions
— Fonctions polynômes.
— Fonctions rationnelles.
Notion d'asymptote oblique.
— Fonction tangente.
— Utilisation de la représentation graphique pour la résolution d'équations du type :

$$f(x)=g(x);$$

et d'inéquations du type :

$$f(x)\leqslant g(x).$$

Activités
— Approximation des zéros d'une fonction par la méthode de dichotomie.

5. Primitives de fonctions usuelles
— Primitives des fonctions usuelles : monômes, sinus, cosinus,

$$x \longmapsto \frac{1}{x^n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}-\{1\}.$$

III — STATISTIQUE
— Variance, écart-type.
— Distribution statistique normale.
— Comparaison de quelques distributions statistiques expérimentales à une distribution normale.

IV — GÉOMÉTRIE
1. Géométrie du plan
— Angles inscrits, polygones réguliers.
— Relations métriques dans le triangle :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}}=\frac{b}{\sin \widehat{B}}=\frac{c}{\sin \widehat{C}}=2R$$

$$S=\frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$$

$$a^2=c^2+b^2-2bc \cos \widehat{A}.$$

— Applications du produit scalaire et du barycentre (Recherche de lieux géométriques).
— Trigonométrie.
• Mesures d'un angle orienté.
• Définition et représentation graphique des fonctions sinus et cosinus de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

- Formules usuelles de transformations trigonométriques.
- Résolution d'équations et d'inéquations des types :

$$\sin x = a; \qquad \cos x = a;$$
$$\sin x < a; \qquad \cos x < a;$$
$$a \cos x + b \sin x + c = 0;$$

d'équations et d'inéquations s'y ramenant.

— Similitudes (figures semblables).
— Utilisation des transformations pour la résolution de problèmes variés.
— A partir d'exemples, recherche de la représentation analytique de translations, de symétries centrales, de symétries orthogonales, d'homothéties.

2. Géométrie de l'espace

— Orthogonalité.
— Projections orthogonales sur un plan, sur une droite.
— Solides usuels :
parallélépipède, cube, tétraèdre, prisme, pyramide, cylindre, cône de révolution, sphère.

(On admettra les formules des aires et des volumes de ces solides.)

Scanned by CamScanner

PLAN DE L'OUVRAGE

ANALYSE

- Fonctions et applications
- Suites numériques
- Fonctions polynômes du second degré
  Équations et inéquations du second degré
- Système d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Limite et continuité
  Dérivation
- Continuité et dérivabilité sur un intervalle
  Extension de la notion de limite
- Étude de fonctions
- Primitive d'une fonction
- Statistiques

GÉOMÉTRIE

- Figures inscrites dans un cercle
  Relations métriques dans un triangle
- Trigonométrie
- Transformations du plan
- Représentation analytique d'une transformation du plan
- Les polyèdres
- L'orthogonalité dans l'espace
- La sphère

Scanned by CamScanner

1 Fonctions et applications

Leçon 1 : GÉNÉRALITÉS
Leçon 2 : FONCTIONS NUMÉRIQUES : OPÉRATIONS ET COMPARAISON
Leçon 3 : QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

1 Généralités

Rappelons que la donnée

— d'un ensemble A, appelé *ensemble de départ,*

— d'un ensemble B, appelé *ensemble d'arrivée,*

— d'un procédé qui à chaque élément de A associe 0 ou 1 élément de B,

permet de déterminer une fonction f de A vers B.

L'ensemble des éléments x de A auxquels est associé un élément de B est appelé l'*ensemble de définition* de f.
Cet ensemble est souvent noté D_f.
Une *application de A dans B* est une fonction de A vers B dont l'ensemble de définition est égal à A.

Par exemple, pour $A=\mathbb{R}$ et $B=\mathbb{R}$,

> associer le nombre réel $\sqrt{x}$ à chaque élément x de $\mathbb{R}_+$
> ne rien associer aux éléments de $\mathbb{R}-\mathbb{R}_+$

est un procédé qui à chaque élément de $\mathbb{R}$ associe 0 ou 1 élément de $\mathbb{R}$.
Notons f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ correspondante.

De même, pour $A=\mathbb{R}$ et $B=\mathbb{R}$,

> associer le nombre réel $\sqrt{x}$ à chaque élément x de $[0, 1]$
> ne rien associer aux éléments de $\mathbb{R}-[0, 1]$

est un autre procédé qui à chaque élément de $\mathbb{R}$ associe 0 ou 1 élément de $\mathbb{R}$.
Notons g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ correspondante.

Les exemples ci-dessus montrent que des notations telles que

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x} \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$

sont incomplètes. Il faut préciser que $D_f=\mathbb{R}_+$ et $D_g=[0, 1]$.
Cependant, pour f, on peut omettre d'indiquer que $D_f=\mathbb{R}_+$.
En effet, suivant la convention habituelle, si l'ensemble de définition n'est pas précisé, il est sous-entendu qu'il est l'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble de départ tels que l'« expression $f(x)$» ait un sens.

Scanned by CamScanner

1) Image directe, image réciproque

L'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application, définies en classe de Seconde, peuvent aussi être définies dans le cas d'une fonction.

Définition

Soit une fonction f de l'ensemble A vers l'ensemble B, d'ensemble de définition D_f, et une partie X de A.
On appelle *image directe* (ou simplement *image*) de X par f l'ensemble des images par f de tous les éléments de $X \cap D_f$.

L'image de X par f est notée $f(X)$. On peut donc écrire

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X \cap D_f\}$$

ou encore

$$f(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X \cap D_f \quad y = f(x)\}.$$

L'ensemble $f(X)$ est vide si et seulement si $X \cap D_f = \varnothing$.
L'ensemble $f(D_f)$ est appelé *ensemble image* de la fonction f.
On remarque que $f(X) = f(D_f)$ pour toute partie X de A contenant D_f.

Exemple

Cherchons l'image des intervalles [3, 4] et [2, 3] par la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x-2}.$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{2\}$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R} - \{2\}$, on a :

$$\begin{aligned} x \in [3, 4] &\iff 3 \leqslant x \leqslant 4 \\ &\iff 1 \leqslant x - 2 \leqslant 2 \quad \text{(justifier)} \\ &\iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x-2} \leqslant 1 \quad \text{(justifier)} \\ &\iff \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1. \end{aligned}$$

L'image de [3, 4] par f est donc l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R} - \{2\}$, on a aussi :

$$\begin{aligned} x \in [2, 3] &\iff 2 < x \leqslant 3 \\ &\iff 0 < x - 2 \leqslant 1 \quad \text{(justifier)} \\ &\iff 1 \leqslant \frac{1}{x-2} \quad \text{(justifier)} \\ &\iff f(x) \geqslant 1. \end{aligned}$$

L'image de [2, 3] par f est donc l'intervalle $[1, \rightarrow[$.

Scanned by CamScanner

Ces résultats sont illustrés par les figures 1 où $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

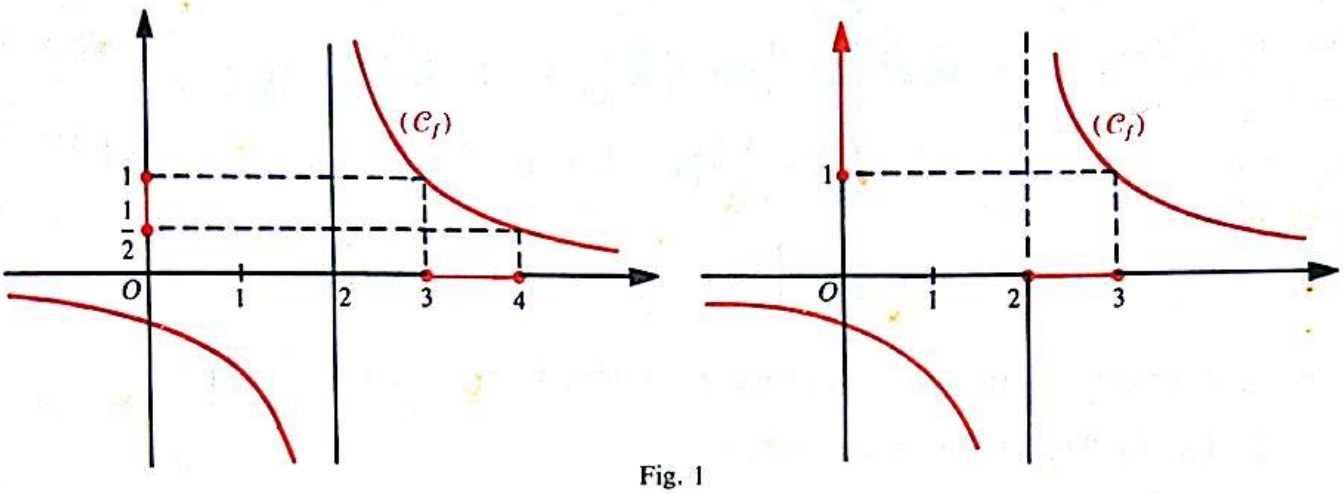


Fig. 1

Exercice

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{|x|}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

c) Trouver l'image de $[-2, 1]$ par f à l'aide de la représentation graphique, puis vérifier ce résultat par le calcul.

Définition

Soit une fonction f de l'ensemble A vers l'ensemble B et une partie Y de B. On appelle *image réciproque* de Y par f l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de Y.

Un élément x de l'ensemble de départ A appartient donc à l'image réciproque de Y par f si et seulement si :

$$x \in D_f \quad \boxed{\text{et}} \quad f(x) \in Y.$$

L'image réciproque de Y peut être vide, même si Y n'est pas vide.

Exemple

Calculons l'image réciproque de l'intervalle $[1, 2]$ par la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}.$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$. L'image réciproque de $[1, 2]$ par f est l'ensemble des x appartenant à $\mathbb{R}^*$ tels que $1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 2$.

Scanned by CamScanner

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 2 \iff \frac{1}{2} \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \text{(justifier)}$$

$$\iff \left[x^2 - \frac{1}{2} \geqslant 0 \quad \boxed{\text{et}} \quad x^2 - 1 \leqslant 0\right] \quad \text{(justifier)}$$

$$\iff \left[\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geqslant 0 \quad \boxed{\text{et}} \quad (x+1)(x-1) \leqslant 0\right]$$

$$\iff \left[x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[\quad \boxed{\text{et}} \quad x \in [-1, 1]\right].$$

L'image réciproque de $[1, 2]$ par f est donc $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.

Ce résultat est illustré par la figure 2.

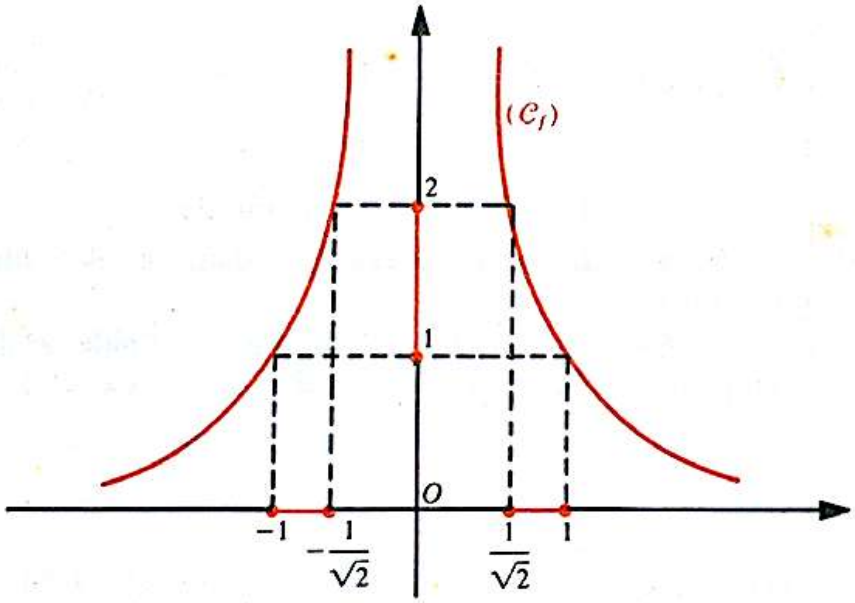


Fig. 2

Exercices

1) Soit l'application $f : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que :
$$\begin{cases} \forall x \in [-2, 0[& f(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 2] & f(x) = x^2 \\ \forall x \in]2, 4] & f(x) = x. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Utiliser cette représentation graphique pour trouver l'image réciproque par f de chacun des ensembles suivants :

$$\{0\}, \quad \{4\}, \quad [2, 4], \quad]4, 5].$$

2) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}.$$

Calculer l'image réciproque de $[0, 4]$ par f.

Scanned by CamScanner

2) Égalité de deux fonctions

Nous rappelons le critère d'égalité de deux fonctions.

Soit f et g deux fonctions de l'ensemble A vers l'ensemble B, d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.

$$f = g \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} D_f = D_g \\ \forall x \in D_f \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Remarquons que si f et g sont deux applications de l'ensemble A dans l'ensemble B, alors

$$f = g \iff \forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

Exercices

Dans chacun des cas suivants, les deux fonctions considérées sont-elles égales? Justifier votre réponse.

a) $f : \{-2, 1, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$; $g : \{-2, 1, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{3x}{x+2}$;

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x(x+1)}{x}$;

c) $f : \{0, 1, -2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$; $g : \{0, 1, -2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x}$;

d) f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$D_f = D_g \quad \text{et} \quad f(D_f) = g(D_g).$$

Les fonctions f et g de l'exercice *b*) ci-dessus ne sont pas égales (elles n'ont pas le même ensemble de définition), mais on a cependant $f(x) = g(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$. On dit que les fonctions f et g coïncident sur $\mathbb{R}^*$, conformément à la définition suivante, déjà introduite en classe de Seconde.

Définition

Soit les fonctions $f : A \longrightarrow B$ et $g : E \longrightarrow F$, et un sous-ensemble C de $D_f \cap D_g$. On dit que f et g *coïncident sur* C si

$$\forall x \in C \quad f(x) = g(x).$$

Exercices

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |2x-1| + |1-x|$.

Trouver une fonction g, différente de f, qui coïncide avec f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Scanned by CamScanner

2) Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left|\frac{x+1}{x-2}\right| \qquad x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}.$$

Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et tel que $f(x) \neq g(x)$ pour tout élément x de $D_f - A$.

3) Composition de fonctions

a) Rappelons ce qu'est la composée de deux fonctions.

Définition

Soit trois ensembles A, B, C et deux fonctions

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C$$

admettant respectivement D_f et D_g pour ensemble de définition.
On appelle *composée de f par g* la fonction de A vers C, notée $g \circ f$, d'ensemble de définition D tel que

$$D = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\},$$

définie par :

$$\forall x \in D \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Il résulte de cette définition que si f est une application de A dans B et si g est une application de B dans C, alors $g \circ f$ est l'application de A dans C définie par

$$\forall x \in A \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exercice

Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2} \qquad x \longmapsto \frac{x-5}{x-9}.$$

Trouver les ensembles de définition des fonctions f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$.
Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$.

b) **Propriété**

Soit les ensembles A, B, C, D et les applications

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C, \quad h : C \longrightarrow D.$$

Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$, toutes deux de A dans D, sont égales.

En effet, pour tout élément x de A, on a :

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

On peut donc, sans aucune ambiguïté, écrire $h \circ g \circ f$ au lieu de $h \circ (g \circ f)$ ou de $(h \circ g) \circ f$.

Scanned by CamScanner

c) Représentation graphique de la composée de deux fonctions

Activité préparatoire

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère la figure 3 où les droites (Δ_f) et (Δ_g) sont respectivement les représentations graphiques des deux fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x \qquad x \longmapsto -x+4.$$

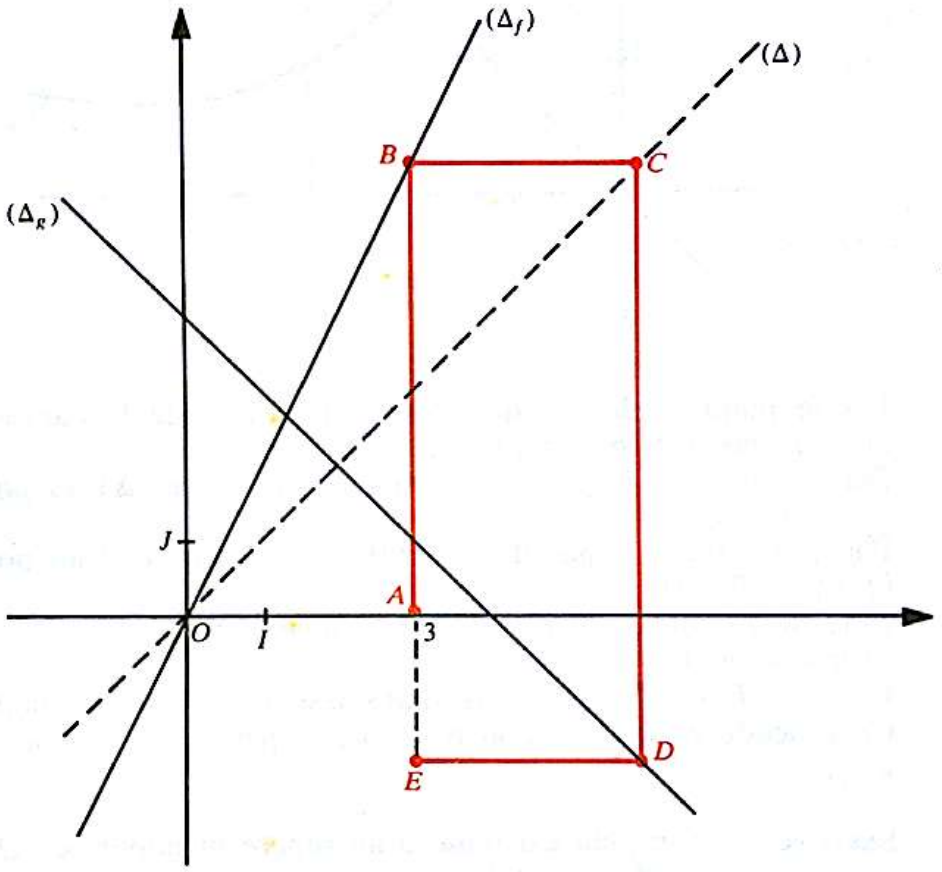


Fig. 3

On note (Δ) la droite d'équation $y = x$.

a) Sachant que A est le point de coordonnées $(3, 0)$, calculer les coordonnées des points B, C, D et E de la figure 3.
Expliquer pourquoi E est le point de coordonnées $\big(3, (g \circ f)(3)\big)$.
Remarquons que pour construire le point E, on a utilisé les représentations graphiques (Δ_f) et (Δ_g), mais aussi la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b) Construire par le même procédé l'image de 3 par la fonction $f \circ g$.

Soit f et g deux fonctions quelconques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de représentations graphiques respectives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J) (figure 4).
Soit aussi un nombre réel x en lequel la fonction $g \circ f$ est définie.
Comme dans l'activité ci-dessus, on peut construire simplement l'image de x par $g \circ f$, à partir des courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Scanned by CamScanner

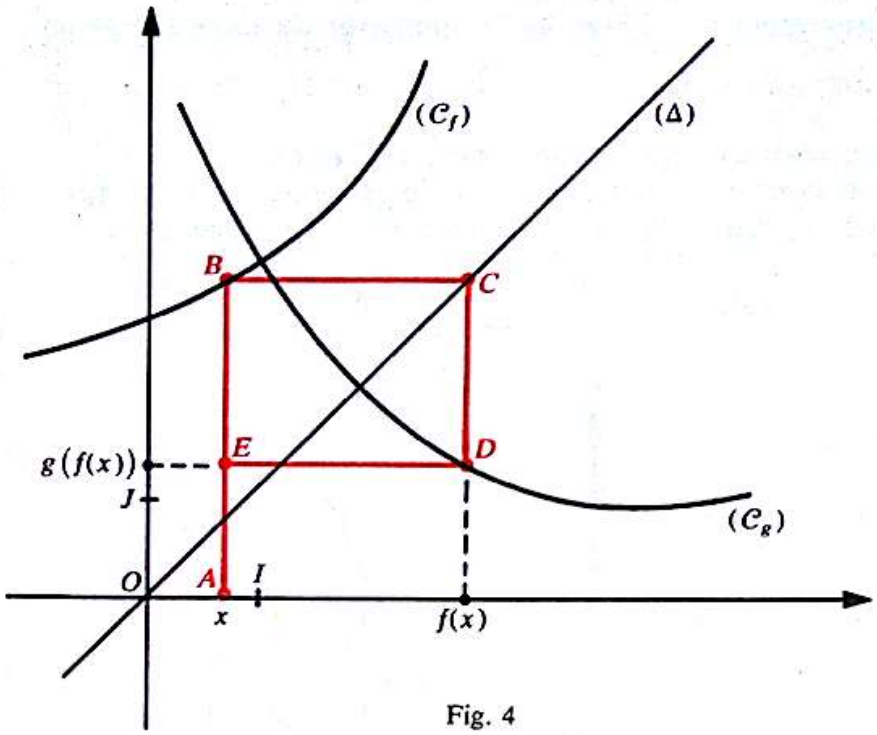


Fig. 4

Par le point A de coordonnées $(x, 0)$, on trace la parallèle à (OJ); elle coupe $(\mathcal{C}_f)$ au point B de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$.
Par B on trace la parallèle à (OI); elle coupe (Δ) au point C de coordonnées $\big(f(x), f(x)\big)$.
Par C on trace la parallèle à (OJ) qui coupe $(\mathcal{C}_g)$ au point D de coordonnées $\big(f(x), g\big(f(x)\big)\big)$.
Finalement, on trace par D la parallèle à (OI) qui coupe (AB) au point E de coordonnées $\big(x, g\big(f(x)\big)\big)$.
Le point E est donc le point d'abscisse x de la représentation graphique de $g \circ f$.
Ce procédé permet de construire point par point la représentation graphique de $g \circ f$.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x - 1 \qquad x \longmapsto x^2.$$

Construire les représentations graphiques de f et de g et, par la méthode ci-dessus, celle de $f \circ g$.

d) Décomposition de fonctions

Certaines fonctions, dites élémentaires, ont été étudiées en Seconde et leurs représentations graphiques sont connues. Il s'agit des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes :

$$x \longmapsto x + a \ (a \in \mathbb{R}) \qquad x \longmapsto |x|$$
$$x \longmapsto ax \ (a \in \mathbb{R}) \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto \sqrt{x}$$
$$x \longmapsto x^3.$$

Scanned by CamScanner

Pour représenter graphiquement une fonction f, il peut être utile de la décomposer en fonctions élémentaires, c'est-à-dire d'écrire f comme la composée de deux ou plusieurs fonctions élémentaires.
On utilise alors le procédé de construction de la représentation graphique d'une composée.

Exemple

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{3}x^2$.

On peut écrire $f = h \circ g$, où g et h sont les fonctions élémentaires

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}x$.

La représentation graphique de f est construite, figure 5, à l'aide de la représentation graphique de g, celle de h et aussi de la droite d'équation $y = x$.

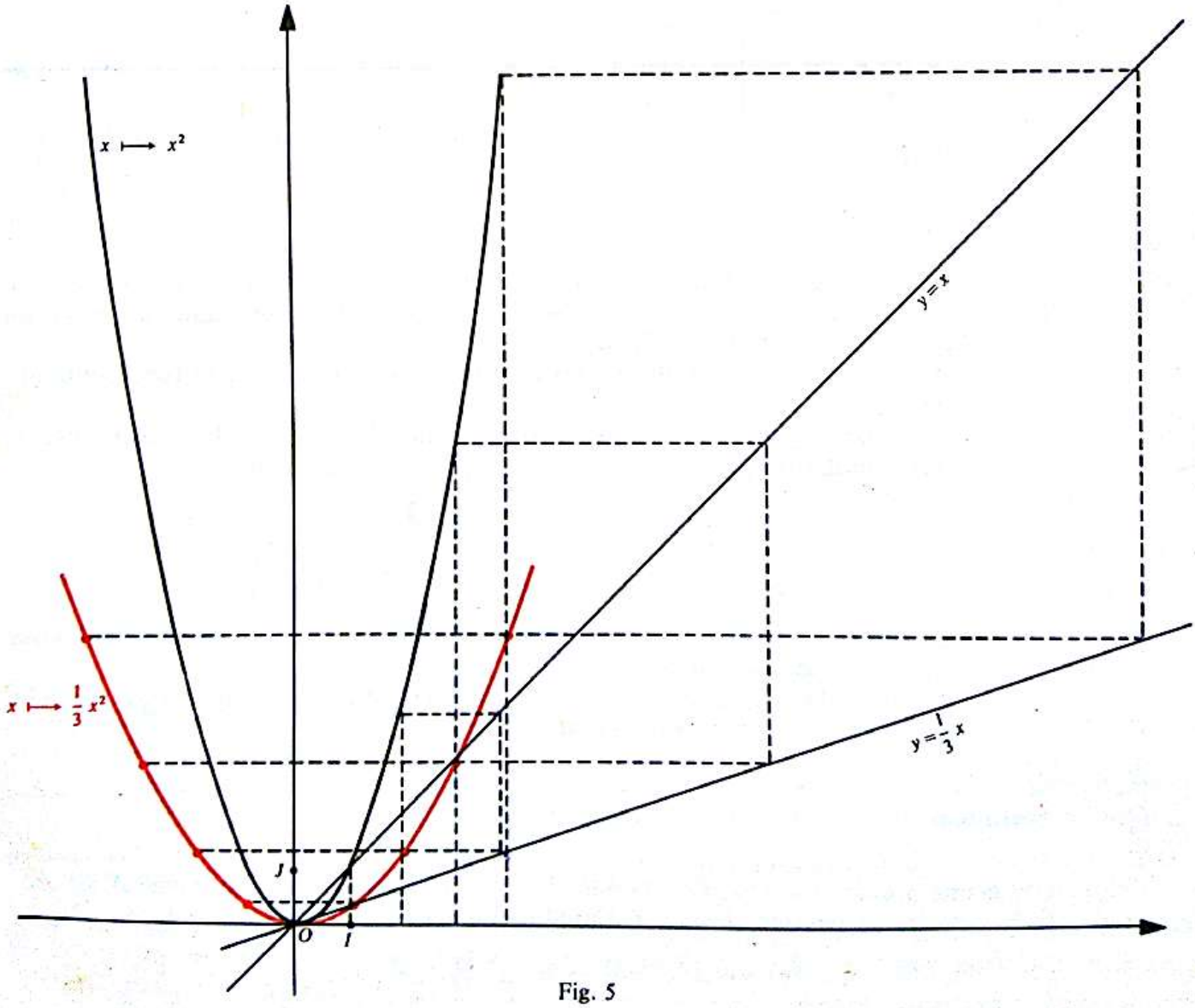


Fig. 5

Scanned by CamScanner

Exercice

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x+1}$.

Représenter graphiquement f après l'avoir écrite comme la composée de deux fonctions élémentaires.

4) Restriction d'une application

Exemple introductif

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{2}$

est représentée graphiquement par $(\mathcal{C}_f)$, figure 6, relativement à un repère orthonormé.

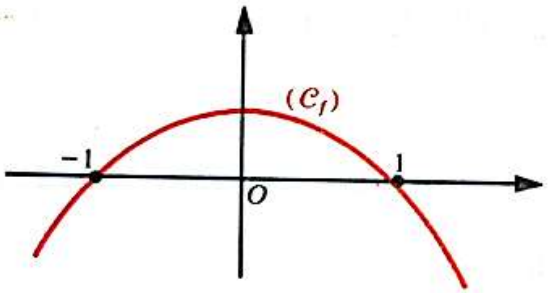


Fig. 6

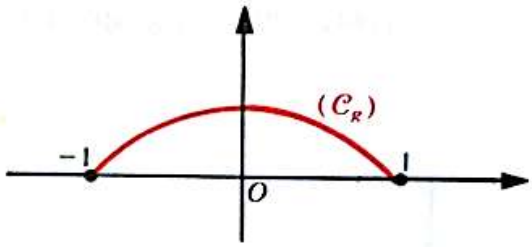


Fig. 7

Supposons que l'unité soit le kilomètre et qu'un obus, tiré du point de coordonnées $(-1, 0)$, se déplace le long de $(\mathcal{C}_f)$ pour aller exploser au point de coordonnées $(1, 0)$.
La trajectoire de l'obus ne correspond cependant pas à la représentation graphique de f.
Elle correspond seulement à une partie de $(\mathcal{C}_f)$; cette partie est la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ (figure 7) de l'application

$$g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1-x^2}{2}.$$

Il n'y a en effet aucun sens physique à étudier la position de l'obus pour des x n'appartenant pas à $[-1, 1]$.
L'application g, dont la représentation graphique est une partie de celle de f, est appelée la *restriction de f à $[-1, 1]$*.

Définition

Soit une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B et une partie X de A.
On appelle *restriction de f à X* l'application de X dans B, notée $f_{|X}$, définie par : $\forall x \in X \quad (f_{|X})(x) = f(x)$.

Scanned by CamScanner

Exercices

Soit l'application $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{(x-2)^2}{|x-2|}.$$

a) Construire la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Quelle est la restriction de f à chacun des ensembles suivants :

$$]\leftarrow, 2[,\ ]2, \rightarrow[,\ [3, 4],\quad \mathbb{R}_+ - \{2\}\ ?$$

5) Applications bijectives, injectives et surjectives

a) Applications bijectives (rappel)

Définition

Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est appelée *application bijective,* ou *bijection,* si tout élément de B possède, dans A, un unique antécédent par f.

b) Applications injectives

Exemple introductif

Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Cherchons, pour chaque élément b de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, les antécédents de b par f.
Cela revient à résoudre, pour chaque nombre réel b, l'équation

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x} = b.$$

Si b appartient à $\mathbb{R}_-$, l'équation n'admet aucune solution.

Si b appartient à $\mathbb{R}_+^*$, l'équation admet la solution unique $\frac{1}{b}$.

L'application f n'est donc pas bijective puisque les éléments de $\mathbb{R}_-$ n'ont aucun antécédent.
Cependant, si un élément de $\mathbb{R}$ possède un antécédent, il est unique.
Tout élément de $\mathbb{R}$ possède donc 0 ou 1 antécédent par f.
On dit que f est une application *injective.*

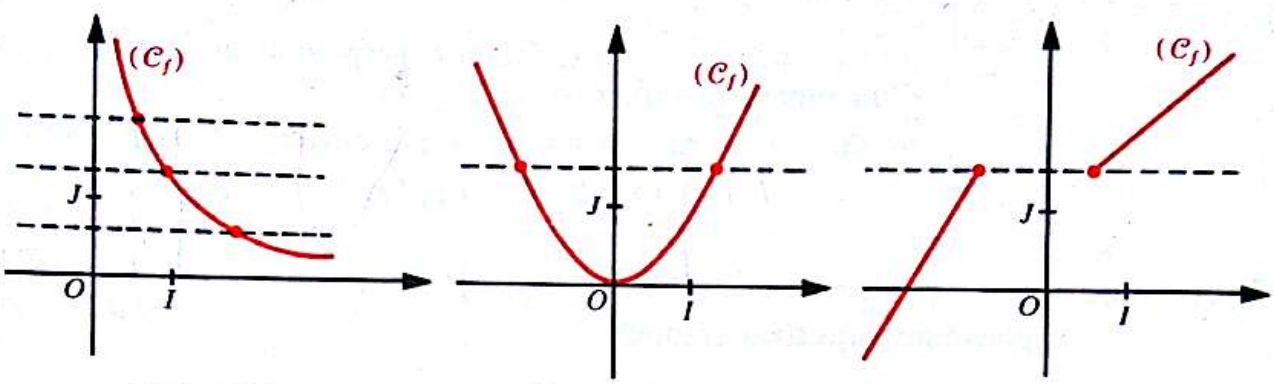
Définition

Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est appelée *application injective,* ou *injection,* si tout élément de B possède, dans A, 0 ou 1 antécédent par f.

Soit une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B, où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, et considérons la représentation graphique (C_f) de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Scanned by CamScanner

On remarque que l'application f est injective si et seulement si toute droite parallèle à (OI) coupe $(\mathcal{C}_f)$ en zéro ou un point (voir figures 8).



f est injective — f n'est pas injective — f n'est pas injective

Fig. 8

Exemple

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2+3 \end{array}$ est-elle injective?

Pour chaque élément b de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, cherchons les antécédents de b par f ou, ce qui revient au même, les solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad 2x^2+3=b.$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad x^2=\frac{b-3}{2}.$$

Si $b \geqslant 3$, l'équation admet la solution unique $\sqrt{\frac{b-3}{2}}$.

Si $b<3$, l'équation n'a pas de solution.

Par conséquent, chaque élément b de $\mathbb{R}$ possède 0 ou 1 antécédent par f; f est donc injective.

Théorème

Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est injective si et seulement si

$$\forall u \in A \quad \forall v \in A \quad f(u)=f(v) \implies u=v.$$

Démonstration

• Supposons d'abord que f soit injective et considérons deux éléments u et v de A tels que $f(u)=f(v)$.
Montrons que $u=v$.
Dans ce but, posons : $y=f(u)=f(v)$.
Alors, u et v sont des antécédents de y.
Or, f étant injective, y possède un unique antécédent.
D'où : $u=v$.

Scanned by CamScanner

• Réciproquement, supposons que la proposition

$$\forall u \in A \quad \forall v \in A \quad f(u) = f(v) \implies u = v$$

soit vraie et montrons que f est injective.
Soit z un élément de B.
Ou bien z n'a aucun antécédent.
Ou bien z a un antécédent u et, dans ce cas, il faut montrer que u est l'unique antécédent de z.
Supposons que v soit aussi un antécédent de z.
Alors $f(u) = f(v)$ et, puisque la proposition ci-dessus est vraie, on conclut que $u = v$.
D'où f est injective.

Exercice Utiliser le théorème ci-dessus pour montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x^2 + 3$$

est injective et que l'application

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x^2 + 3$$

n'est pas injective.

c) Applications surjectives

Définition

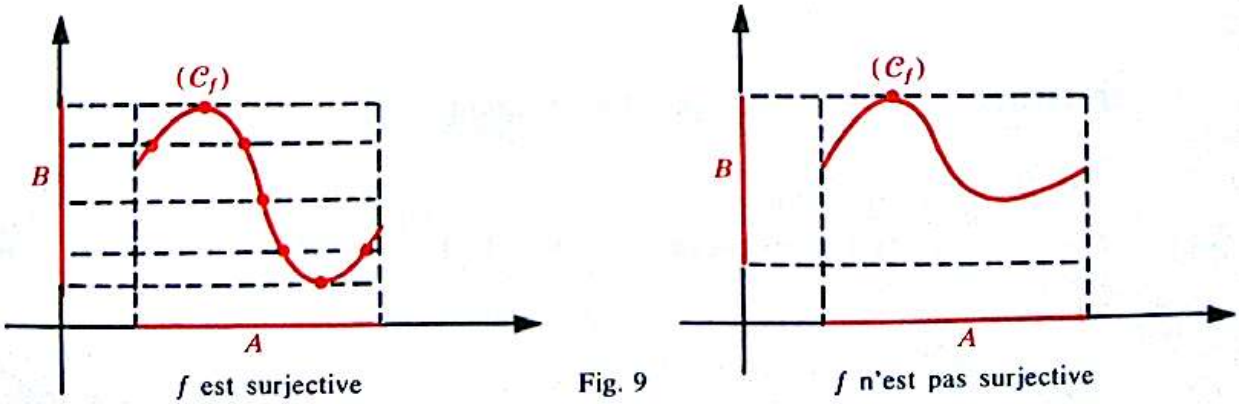
Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est appelée *application surjective*, ou *surjection*, si tout élément de B possède, dans A, un ou plusieurs antécédents par f.

Cette définition peut être reformulée comme suit.

Une application $f : A \longrightarrow B$ est surjective si et seulement si

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad y = f(x).$$

Soit une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B, où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, et considérons la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
On remarque que l'application f est surjective si et seulement si toute droite d'équation $y = b$, où b appartient à B, coupe $(\mathcal{C}_f)$ en un ou plusieurs points (voir figures 9).



f est surjective — Fig. 9 — f n'est pas surjective

Scanned by CamScanner

Exemple

Les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ sont-elles surjectives?

Considérons d'abord l'application f.
Pour chaque élément b de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il faut voir si b possède des antécédents par f ou, ce qui revient au même, si l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = b$$

possède des solutions.
Or cette équation n'admet aucune solution lorsque b appartient à $\mathbb{R}_-^*$.
Cela signifie que les éléments de $\mathbb{R}_-^*$ n'ont aucun antécédent par f et, par conséquent, f n'est pas surjective.
Par contre, cette équation admet toujours deux solutions, $\sqrt{b}$ et $-\sqrt{b}$, si b appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et une solution unique, 0, si $b = 0$.
Cela montre que tous les éléments de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}_+$ de g possèdent un ou plusieurs antécédents par g.
D'où g est surjective.

d) Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions précédentes.

Théorème

Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Dans la pratique, pour vérifier si une application est injective, surjective ou bijective, on peut procéder comme suit.
Soit une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B.
Étant donné un élément quelconque b de B, on considère l'équation

$$(E) \qquad x \in A, \quad f(x) = b.$$

Si, pour chaque élément b de B, l'équation (E) possède :

- zéro ou une solution, alors f est injective;
- une ou plusieurs solutions, alors f est surjective;
- une solution unique, alors f est bijective.

Exercices

1) Montrer que l'application $f : [-1, \to[\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est une bijection.

2) L'application $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$ est-elle injective? surjective?

Scanned by CamScanner

6 Application réciproque d'une bijection

Activité préparatoire

Considérons l'équation

$$(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad 2x-y+3=0.$$

Exprimons y en fonction de x : $y=2x+3$.

Exprimons x en fonction de y : $x=\dfrac{y-3}{2}$.

a) Montrer que les applications

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto 2x+3 \qquad\qquad y\longmapsto\frac{y-3}{2}$$

sont des bijections.

b) Calculer, pour chaque nombre réel x et chaque nombre réel y, les images $g(f(x))$ et $f(g(y))$. En déduire ce que sont les applications $g\circ f$ et $f\circ g$.

c) Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire les représentations graphiques de f et g, après avoir réécrit g sous la forme

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},$$
$$x\longmapsto\frac{x-3}{2}$$

afin d'éviter toute confusion entre les abscisses et les ordonnées.

d) Vérifier que les représentations graphiques de f et g sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Dans l'activité ci-dessus on observe que, pour chaque nombre réel y, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f et que, pour chaque nombre réel x, $f(x)$ est l'unique antécédent de x par g.
Pour cette raison, on dit que g est l'application réciproque de f et que f est l'application réciproque de g.

Définition

Soit une bijection f de l'ensemble A sur l'ensemble B. On appelle *application réciproque de* f l'application de B dans A, notée f^{-1}, qui à chaque élément de B associe son unique antécédent par f.

L'application $f^{-1}: B\longrightarrow A$ est donc caractérisée par

$$\forall x\in A \quad \forall y\in B \qquad f^{-1}(y)=x \iff f(x)=y.$$

Théorème

Soit une bijection f de l'ensemble A sur l'ensemble B.
Alors :

a) L'application réciproque f^{-1} de f est une bijection de B sur A;

b) f est l'application réciproque de la bijection f^{-1};

c) $f^{-1}\circ f$ est l'application identique de A et $f\circ f^{-1}$ est l'application identique de B.

Scanned by CamScanner

Démonstration

L'équivalence

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B \qquad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

montre que chaque élément x de A possède un unique antécédent, $f(x)$, par f^{-1}. Par conséquent, f^{-1} est une bijection de B sur A et f est l'application réciproque de f^{-1}.

La même équivalence montre aussi que :

$$\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x,$$
$$\forall y \in B \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Les applications $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$ sont donc respectivement les applications identiques de A et de B.

Exercices

Soit l'application $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{2}$.

a) Pour chaque nombre réel y, résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1+x^2}{2} = y.$$

b) Utiliser le *a*) pour montrer que g est injective et pour déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R}_+)$ de g.

c) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow g(\mathbb{R}_+)$, $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{2}$ est bijective.

d) Préciser ce qu'est l'application réciproque f^{-1} de f.

Représentation graphique d'une application réciproque

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A sur B.
Notons respectivement G et G' les graphes de f et f^{-1}.

On a : $$G = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

On a aussi :
$$G' = \{(y, x) \in B \times A \mid x = f^{-1}(y)\}$$
$$= \{(y, x) \in B \times A \mid y = f(x)\}$$
$$= \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les représentations graphiques respectives de f et f^{-1} dans le plan muni d'un *repère orthonormé* (O, I, J) (figure 10).

$(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points M du plan dont le couple (x, y) des coordonnées appartient à G.

Puisque $$G' = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\},$$

$(\mathcal{C}')$ est l'ensemble des points M' du plan dont le couple (y, x) des coordonnées est tel que (x, y) appartient à G.

Scanned by CamScanner

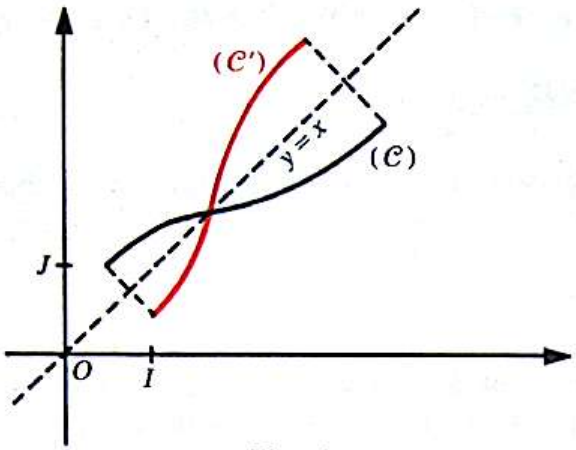


Fig. 10

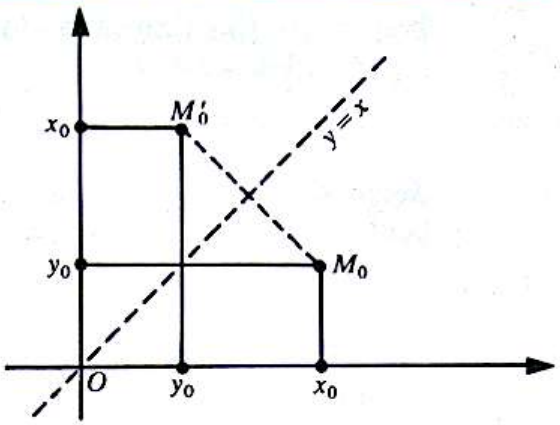


Fig. 11

Or, le repère étant orthonormé et M_0 étant le point du plan de coordonnées (x_0, y_0) (figure 11), le symétrique de M_0 par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point M'_0 de coordonnées (y_0, x_0). (Justifier)

Par conséquent, $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$, et $(\mathcal{C})$ est l'image de $(\mathcal{C}')$, par la symétrie orthogonale d'axe d'équation $y = x$.

On a donc établi le résultat suivant :

> Le plan étant muni d'un *repère orthonormé,* les représentations graphiques d'une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ sur une partie de $\mathbb{R}$ et de l'application réciproque sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

a) Représenter graphiquement la bijection $f : R_+ \longrightarrow \left[\frac{1}{2}, \rightarrow\right[$

$$x \longmapsto \frac{1+x^2}{2}.$$

b) Utiliser le résultat ci-dessus pour représenter graphiquement l'application réciproque f^{-1}.

2 Fonctions numériques : Opérations et comparaison

Une fonction numérique est une fonction d'un ensemble quelconque vers l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Cependant :

> Lorsque nous parlerons d'une fonction numérique dans la suite de cet ouvrage, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

Pour toute fonction numérique f d'ensemble de définition D_f, on peut considérer l'application associée

$$\begin{aligned} \varphi : D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Réciproquement, D étant une partie de $\mathbb{R}$ et φ une application de D dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

d'ensemble de définition D.

Se donner une fonction numérique revient donc à se donner une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; nous utiliserons la même notation pour désigner l'une ou l'autre.

1) Opérations sur les fonctions numériques

a) Somme de deux fonctions

Définition

Soit f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
On appelle *somme de f et g* la fonction numérique notée $f+g$,
d'ensemble de définition $D_f \cap D_g$,
définie par : $\forall x \in D_f \cap D_g \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Soit a un nombre réel.
Dans le cas particulier où g est l'application constante

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a, \end{aligned}$$

on écrit $f+a$ au lieu de $f+g$.

Exemple

Calculons la somme des fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x-1}.$$

On a

$$D_f = \mathbb{R}^*, \qquad D_g = \mathbb{R} - \{1\};$$

$$\forall x \in D_f \cap D_g \qquad f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x(x-1)}.$$

La somme de f et g est donc la fonction

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x-1}{x(x-1)}, \end{aligned}$$

dont l'ensemble de définition $D_f \cap D_g$ est $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Scanned by CamScanner

Représentation graphique de la somme de deux fonctions

Soit $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les représentations graphiques de deux fonctions numériques f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Soit x_0 un élément de $D_f \cap D_g$.
La droite (Δ) d'équation $x = x_0$ coupe (OI), $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ respectivement aux points A, B et C (figure 12).

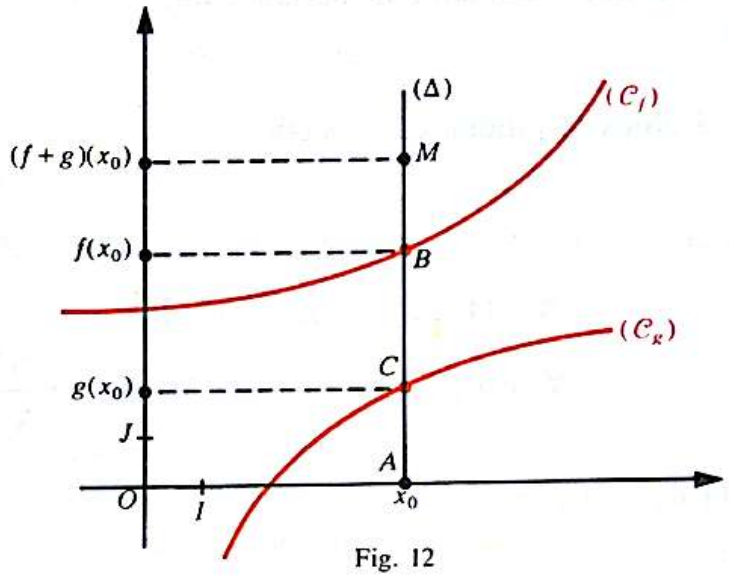


Fig. 12

Construisons sur la droite (Δ) le point M tel que

$$\overline{BM} = \overline{AC}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \overline{AB} + \overline{BM} \\ &= f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).\end{aligned}$$

Le point M a pour coordonnées $\big(x_0, (f+g)(x_0)\big)$; c'est donc le point d'abscisse x_0 de la représentation graphique de $f+g$.
Ce procédé permet de construire point par point la représentation graphique de $f+g$.

Exercice Représenter graphiquement la somme des fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x} \qquad\qquad x \longmapsto 2 - \frac{1}{2}x.$$

b) **Produit de deux fonctions**

Définition

Soit f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
On appelle *produit de f et g* la fonction numérique notée fg,
d'ensemble de définition $D_f \cap D_g$,
définie par : $\forall x \in D_f \cap D_g \quad (fg)(x) = f(x)\,g(x)$.

Scanned by CamScanner

Soit a un nombre réel.
Dans le cas particulier où g est l'application constante

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a, \end{aligned}$$

on écrit af au lieu de fg.
Lorsque $a = -1$, on écrit $-f$ au lieu de $(-1)f$ et on dit que $-f$ est la *fonction opposée de f*.
Si f et g sont deux fonctions numériques quelconques, on écrit $f - g$ au lieu de $f + (-g)$.

Exemple

Calculons le produit des fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x-1} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}.$$

On a : $D_f = [1, \to[$, $D_g =]1, \to[$;

$$\forall x \in D_f \cap D_g \quad f(x)g(x) = \sqrt{x-1}\,\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}} = x^2+1.$$

Le produit de f et g est donc la fonction

$$\begin{aligned} fg : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2+1, \end{aligned}$$

dont l'ensemble de définition $D_f \cap D_g$ est $]1, \to[$.

Définition

Soit un élément n de $\mathbb{N}^*$ et une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f.
On appelle $n^{\text{ième}}$ *puissance de f* la fonction numérique notée f^n,
d'ensemble de définition D_f,
définie par : $\forall x \in D_f \quad f^n(x) = (f(x))^n$.

c) Quotient de deux fonctions

Définition

Soit f et g deux fonctions numériques d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
On appelle *quotient de f par g* la fonction numérique notée $\frac{f}{g}$,
d'ensemble de définition D tel que

$$D = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\},$$

définie par : $\forall x \in D \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Scanned by CamScanner

Dans le cas particulier où f est l'application constante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

on écrit $\frac{1}{g}$ au lieu de $\frac{f}{g}$.

On dit que $\frac{1}{g}$ est l'*inverse de g*.

Pour toutes fonctions numériques f et g, on a :

$$\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}.$$

Exemple

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x-3}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-3}(x-4)}{x-10}$.

Calculons le quotient de f par g.

Les ensembles de définition de f et g sont

$$D_f = [3, \to[\quad \text{et} \quad D_g = [3, \to[- \{10\}.$$

Un élément x de D_g vérifie $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = 4$.

L'ensemble de définition D de $\frac{f}{g}$ est donc

$$\begin{aligned} D &= D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\} \\ &= [3, \to[\cap ([3, \to[- \{3, 4, 10\}) \\ &=]3, \to[- \{4, 10\}. \end{aligned}$$

Pour tout élément x de D, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x-3}\,\frac{x-10}{\sqrt{x-3}(x-4)} = \frac{x-10}{x-4}.$$

Finalement, le quotient de f par g est la fonction

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-10}{x-4}, \end{aligned}$$

d'ensemble de définition égal à $]3, \to[- \{4, 10\}$.

Exercice

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x}{x+1}$.

Calculer les fonctions $f+g$, $2f-g$, $(2f-g)^2$, fg et $\frac{f}{g}$.

Dans chaque cas, on précisera l'ensemble de définition.

Scanned by CamScanner

2) Comparaison de fonctions numériques

a) Comparaison de deux applications définies sur un même ensemble

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit f, g deux applications de A dans $\mathbb{R}$.
On dit que f *est inférieure à* g, et on écrit $f \leqslant g$, si :

$$\forall x \in A \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarque. Lorsque f est inférieure à g, on dit aussi que g *est supérieure à* f, et on écrit aussi $g \geqslant f$.

Notons $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les représentations graphiques respectives de f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Soit x_0 un élément quelconque de A et notons respectivement P et Q les points d'intersection de la droite d'équation $x = x_0$ avec $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ (figure 13).

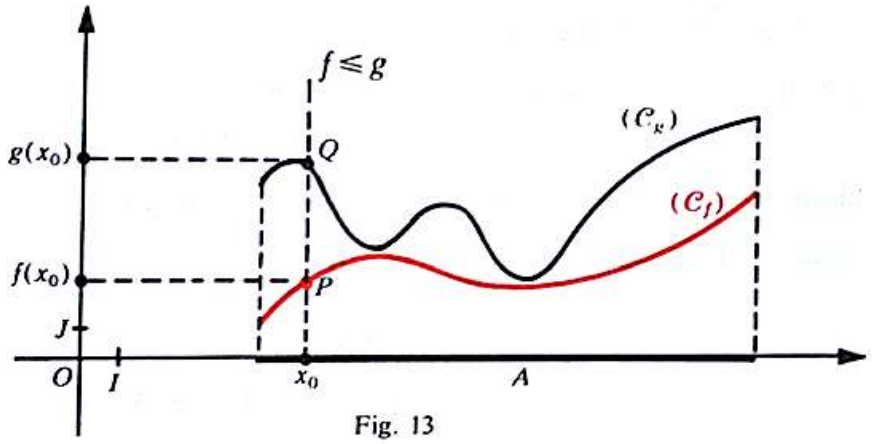


Fig. 13

On voit que f est inférieure à g si et seulement si pour chaque élément x_0 de A, le point P est situé « sous » le point Q.

Exemple

Soit les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + x$.

L'application f est inférieure à g puisque, pour tout nombre réel x, on a $x \leqslant x^2 + x$ (justifier), c'est-à-dire $f(x) \leqslant g(x)$ (figure 14).

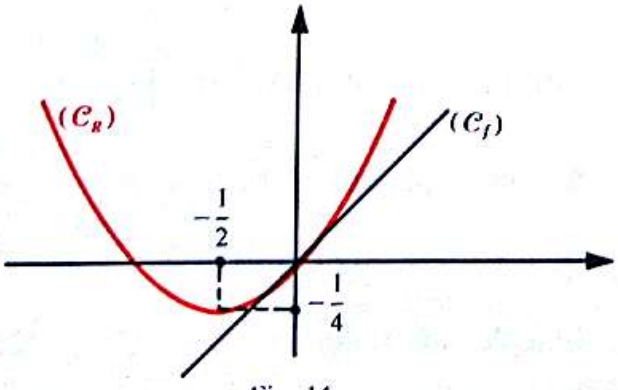


Fig. 14

Scanned by CamScanner

b) Comparaison de deux fonctions numériques

Définition

Soit deux fonctions numériques f et g, d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
Soit A une partie de $D_f \cap D_g$.
On dit que f *est inférieure à* g *sur* A si :

$$\forall x \in A \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarque. Lorsque f est inférieure à g sur A, on dit aussi que g *est supérieure à* f *sur* A.

Il résulte de cette définition que f est inférieure à g sur A si et seulement si la restriction de f à A est inférieure à la restriction de g à A.

Notons $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les représentations graphiques respectives de f et g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

On voit que f est inférieure à g sur A si et seulement si chaque point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, dont l'abscisse appartient à A, est situé « sous » le point de même abscisse de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

Exemple

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Montrons que f est inférieure à g sur $]0, 1]$ et que f est supérieure à g sur $]\leftarrow, 0[$ et sur $[1, \rightarrow[$ (figure 15).

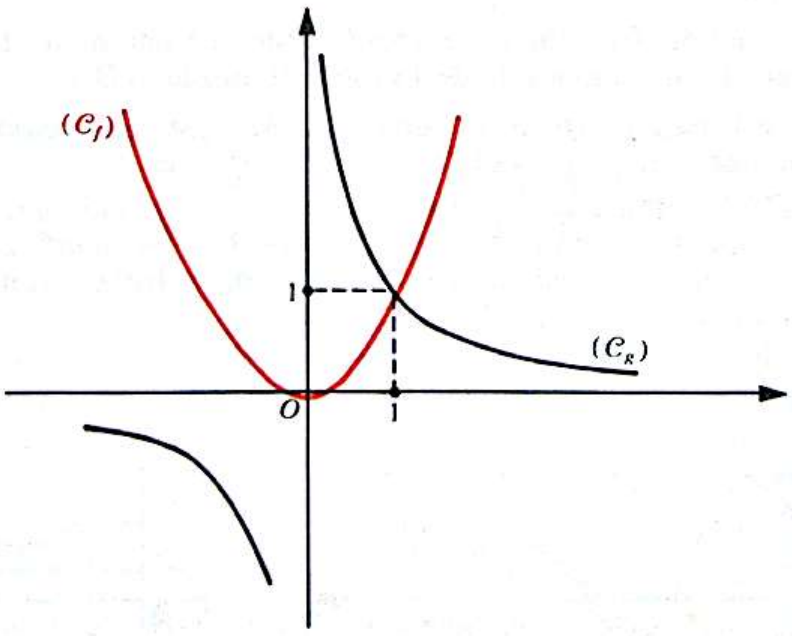


Fig. 15

Scanned by CamScanner

Observons d'abord que pour tout élément x de $]-\infty, 0[$, on a $f(x) \geqslant g(x)$ puisque $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$.
La fonction f est donc supérieure à g sur $]-\infty, 0[$.
Étudions ensuite le signe de $f(x)-g(x)$ lorsque x appartient à $]0, +\infty[$.
Remarquons que, pour tout élément x de $]0, +\infty[$, $f(x)-g(x)$ a le même signe que $x\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire que x^3-1.

Or $$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

et, de plus :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad x^2+x+1 \geqslant 0 \quad \text{(somme de nombres positifs).}$$

Par conséquent, $f(x)-g(x)$ a le même signe que $x-1$ lorsque x appartient à $]0, +\infty[$.
D'où :

— si $x \in]0, 1]$, alors $f(x)-g(x) \leqslant 0$, et donc $f(x) \leqslant g(x)$;

— si $x \in [1, +\infty[$, alors $f(x)-g(x) \geqslant 0$, et donc $f(x) \geqslant g(x)$.

Cela signifie que f est inférieure à g sur $]0, 1]$ et que f est supérieure à g sur $[1, +\infty[$.

c) Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, est dite *majorée* (resp. *minorée*) *par le nombre réel* α si

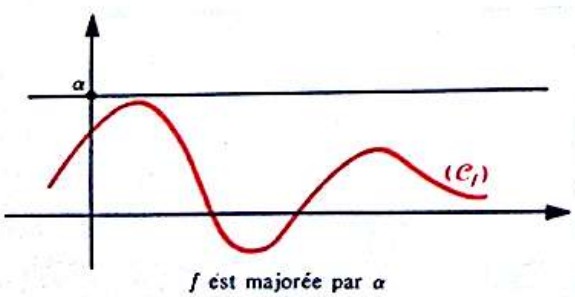
$$\forall x \in D_f \quad f(x) \leqslant \alpha \quad \text{(resp. } f(x) \geqslant \alpha\text{)}.$$

Remarques

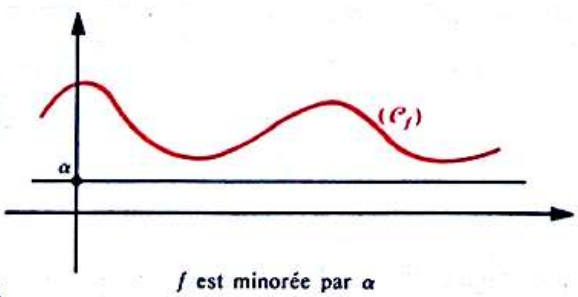
• La fonction f est majorée (resp. minorée) par α si et seulement si α est un majorant (resp. minorant) de l'ensemble image $f(D_f)$.

• Si f est majorée (resp. minorée) par α, f est aussi majorée (resp. minorée) par tout nombre réel supérieur (resp. inférieur) à α.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J). La fonction f est majorée (resp. minorée) par le nombre réel α si et seulement si la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est située «en dessous» (resp. «au-dessus»). de la droite d'équation $y=\alpha$ (figures 16).



f est majorée par α



f est minorée par α

Fig. 16

Scanned by CamScanner

Exemples

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5 - x^2$ est majorée par 5

et la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ est minorée par 0.

Définition

Une fonction numérique f est dite *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un nombre réel α tel que f soit majorée (resp. minorée) par α.
Une fonction numérique est dite *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est bornée.

L'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres réels x tels que $1 - x^2 \geqslant 0$;

d'où $D_f = [-1, 1]$ (vérifier).

D'autre part, pour tout nombre réel x, on a successivement :

$$x^2 \geqslant 0,$$
$$-x^2 \leqslant 0,$$
$$1 - x^2 \leqslant 1.$$

Pour tout élément x de D_f, on a donc

$$0 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1,$$

et ensuite

$$0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1,$$

puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante.
La fonction f étant minorée par 0 et majorée par 1, elle est bornée.

Exercice

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 4}$.

a) Trouver des nombres réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 4 = (x - a)^2 + b.$$

b) En déduire que f est une fonction bornée.

Définition

Une fonction numérique f est dite *positive* (resp. *négative*) si elle est minorée (resp. majorée) par 0.

Exemples

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est positive

et la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow -\sqrt{x}$ est négative.

Scanned by CamScanner

Définition

Soit une fonction numérique f et une partie A de son ensemble de définition. On dit que f est *majorée* (resp. *minoré, bornée, positive, négative*) *sur* A si la restriction de f à A est majorée (resp. minorée, bornée, positive, négative).

Exemple

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$ est positive sur $[-1, 1]$ et est négative sur $]\leftarrow, -1] \cup [1, \rightarrow[$ (voir figure 17).

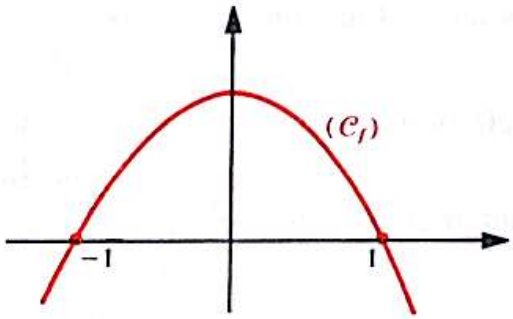


Fig. 17

3 Quelques propriétés géométriques des représentations graphiques

Dans toute cette partie 3, le plan est supposé muni d'un repère (O, I, J) et nous considérons une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f et de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.
Rappelons que le graphe G_f de f est défini par

$$G_f = \{(x, y) | x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}.$$

A partir de f, nous construirons d'autres fonctions, notées g ou h. Les notations D_g, D_h, $(\mathcal{C}_g)$, $(\mathcal{C}_h)$ et G_g, G_h seront bien sûr utilisées pour désigner les ensembles de définition, les représentations graphiques et les graphes des fonctions g et h.

1) Fonctions paires

Étant donné la fonction numérique f, on considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$$

d'ensemble de définition D_g tel que $D_g = \{x \in \mathbb{R} | -x \in D_f\}$.

Scanned by CamScanner

On a successivement :

$$\begin{aligned} G_g &= \{(u, v) \mid u \in D_g \text{ et } v = g(u)\} \\ &= \{(u, v) \mid -u \in D_f \text{ et } v = f(-u)\} \\ &= \{(-x, y) \mid x \in D_f \text{ et } y = f(x)\} \quad (\text{poser } x = -u \text{ et } y = v) \\ &= \{(-x, y) \mid (x, y) \in G_f\}. \end{aligned}$$

$(\mathcal{C}_f)$ est l'ensemble des points M du plan dont le couple (x, y) des coordonnées appartient à G_f.

Puisque $$G_g = \{(-x, y) \mid (x, y) \in G_f\},$$

$(\mathcal{C}_g)$ est l'ensemble des points M' du plan dont le couple $(-x, y)$ des coordonnées est tel que (x, y) appartient à G_f.

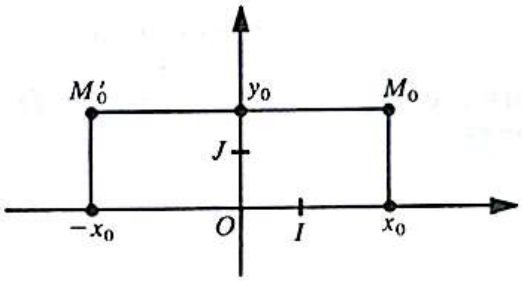


Fig. 18

Supposons que le repère (O, I, J) soit *orthogonal*.
Dans ce cas, M_0 étant le point du plan de coordonnées (x_0, y_0), le symétrique de M_0 par rapport à la droite (OJ) est le point M'_0 de coordonnées $(-x_0, y_0)$ (figure 18).

Par conséquent, $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$, et $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de $(\mathcal{C}_g)$, par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) (figure 19).

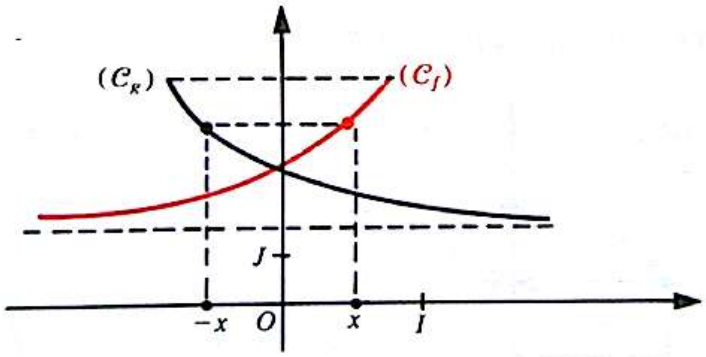


Fig. 19

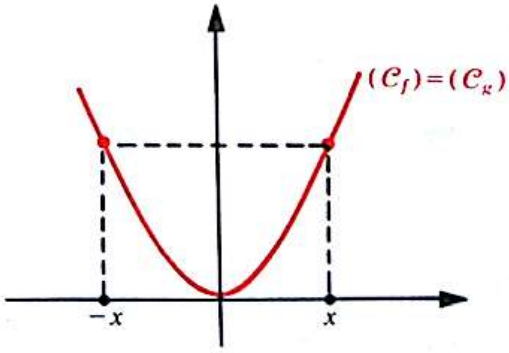


Fig. 20

Le cas particulier où $(\mathcal{C}_f) = (\mathcal{C}_g)$ correspond à la situation où $(\mathcal{C}_f)$ est son propre symétrique par rapport à la droite (OJ) (figure 20).

Par conséquent, pour que la droite (OJ) soit un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}_f) = (\mathcal{C}_g)$ ou, ce qui revient au même, que $f = g$.

Conclusion. La droite (OJ) est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si :

$$\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) = f(-x).$$

Scanned by CamScanner

Définition

Une fonction numérique f est dite *paire* si

$$\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x) = f(-x).$$

D'après ce qui précède, la fonction f est paire si et seulement si, quel que soit le repère *orthogonal* (O, I, J), la droite (OJ) est un axe de symétrie pour la représentation graphique de f.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est paire car $D_f = \mathbb{R}$

et car pour tout nombre réel x, on a :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Exercices Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, indiquer celles qui sont paires et celles qui ne le sont pas :

$$x \longmapsto |x|, \quad x \longmapsto x^3, \quad x \longmapsto 3x^4 + 5,$$

$$x \longmapsto \frac{x^2 - 3}{|x|}, \quad x \longmapsto x^2 + x.$$

2) Fonctions impaires

Étant donné la fonction numérique f, on considère la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -f(-x)$$

d'ensemble de définition D_h tel que $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f\}$.

En examinant comme plus haut les graphes de f et h, on obtient :

$$G_h = \{(-x, -y) \mid (x, y) \in G_f\}.$$

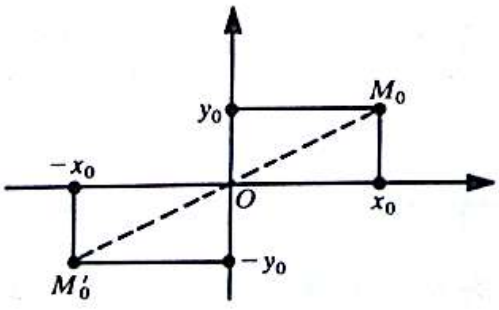


Fig. 21

Or, le repère (O, I, J) étant quelconque, et M_0 étant le point du plan de coordonnées (x_0, y_0), le symétrique de M_0 par rapport au point O est le point M'_0 de coordonnées $(-x_0, -y_0)$ (figure 21).

Par conséquent, $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$, et $(\mathcal{C}_f)$ est l'image de $(\mathcal{C}_h)$, par la symétrie centrale de centre O (figure 22).

Scanned by CamScanner

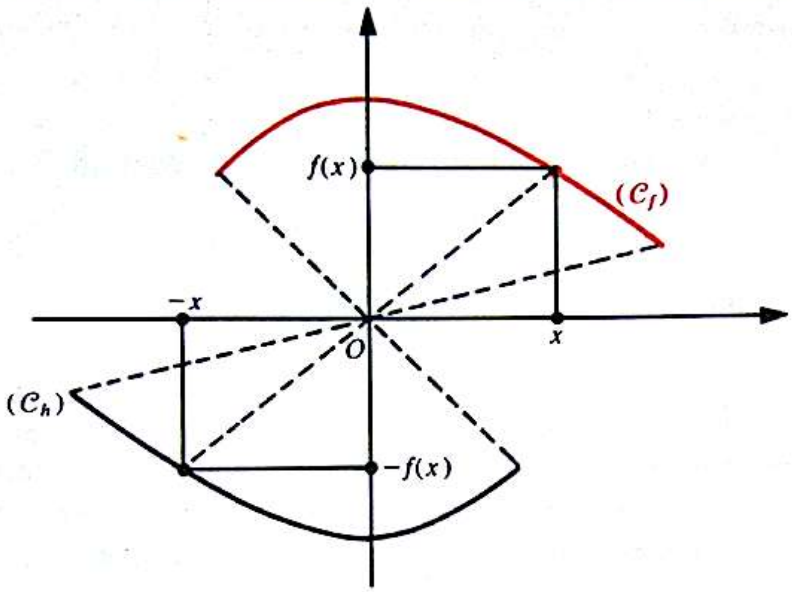


Fig. 22

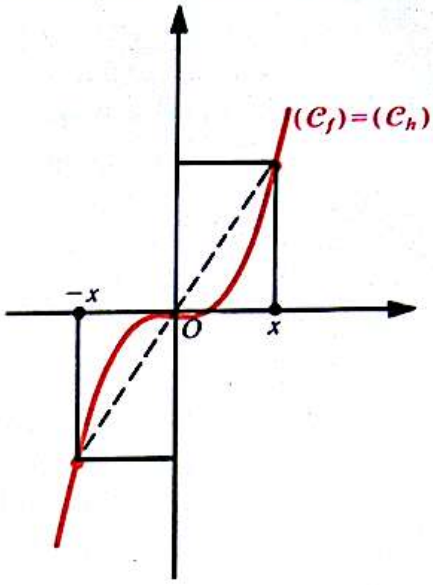


Fig. 23

Le cas particulier où $(\mathcal{C}_f)=(\mathcal{C}_h)$ correspond à la situation où $(\mathcal{C}_f)$ est son propre symétrique par rapport au point O (figure 23).

Par conséquent, pour que le point O soit un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}_f)=(\mathcal{C}_h)$ ou, ce qui revient au même, que $f=h$.

Conclusion. Le point O est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si :

$$\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(x)=-f(-x).$$

Définition

Une fonction numérique f est dite *impaire* si

$$\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x)=-f(x).$$

D'après ce qui précède, la fonction f est impaire si et seulement si, quel que soit le repère (O, I, J), le point O est un centre de symétrie pour la représentation graphique de f.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ (figure 23) est impaire car $D_f=\mathbb{R}$ et car, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

Exercice Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, indiquer celles qui sont impaires et celles qui ne le sont pas :

$$x \longmapsto x, \quad x \longmapsto x^2+x, \quad x \longmapsto 7x^3,$$

$$x \longmapsto \frac{x^2+5}{3x}, \quad x \longmapsto -x\,|x|.$$

Scanned by CamScanner

3) Fonction $x \longmapsto f(x-a)+b$

Activité préparatoire

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

b) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x-2). \end{aligned}$$

(Écrire g comme la composée de deux fonctions élémentaires et utiliser le procédé de construction de la représentation graphique d'une composée.)
Vérifier que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation. Laquelle?

c) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x)+3. \end{aligned}$$

Vérifier que $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_g)$ par une translation. Laquelle?
En déduire que $(\mathcal{C}_h)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation. Laquelle?

Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J).
Soit deux nombres réels a et b.
Étant donné une fonction numérique f, on considère la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x-a)+b \end{aligned}$$

d'ensemble de définition D_g tel que $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x-a \in D_f\}$.
On veut étudier le lien existant entre la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f et la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g.
On a :

$$\begin{aligned} G_g &= \{(u, v) \mid u \in D_g \text{ et } v = g(u)\} \\ &= \{(u, v) \mid u-a \in D_f \text{ et } v = f(u-a)+b\} \\ &= \{(x+a, y+b) \mid x \in D_f \text{ et } y = f(x)\} \quad \text{(poser } x = u-a \text{ et } y = v-b\text{)} \\ &= \{(x+a, y+b) \mid (x, y) \in G_f\}. \end{aligned}$$

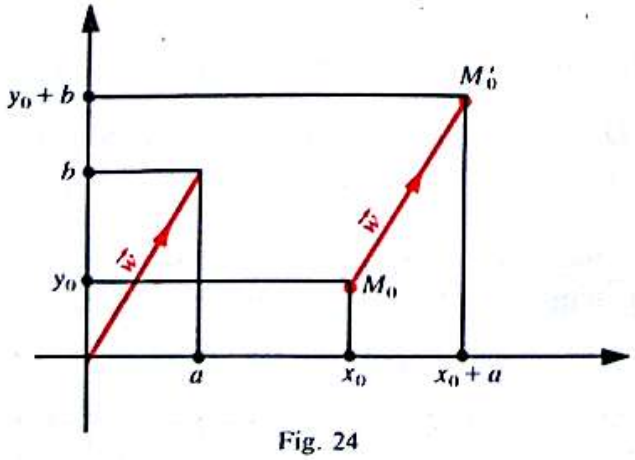


Fig. 24

Scanned by CamScanner

Notons $\vec{w}$ le vecteur de coordonnées (a, b) :

$$\vec{w} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}.$$

M_0 étant le point du plan de coordonnées (x_0, y_0), l'image de M_0 par la translation de vecteur $\vec{w}$ est le point M_0' de coordonnées (x_0+a, y_0+b) (figure 24).

Conclusion. $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a, b) (figure 25).

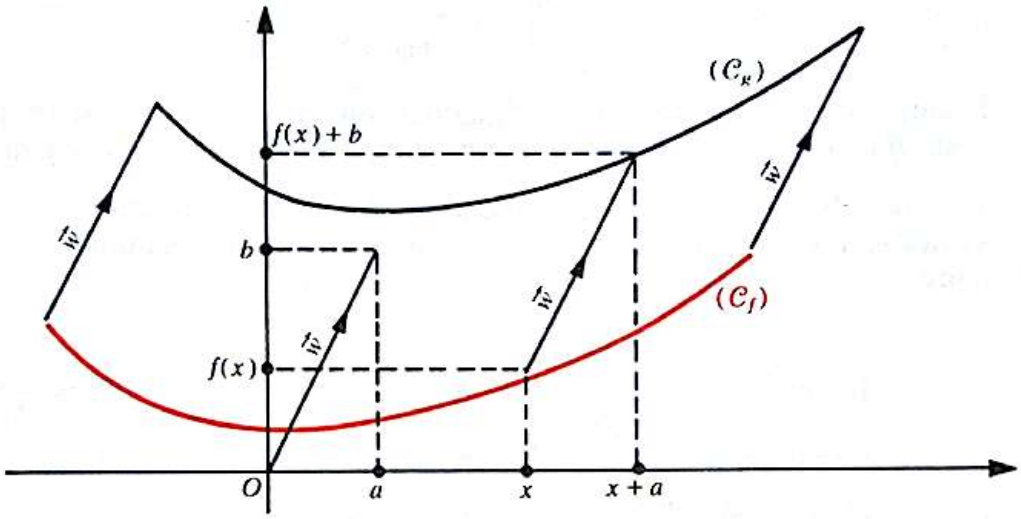


Fig. 25

Exercice

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+4x+9.$

a) Trouver deux nombres réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x)=(x-a)^2+b.$$

b) Utiliser la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

et la conclusion ci-dessus pour obtenir la représentation graphique de g.

4) Axe de symétrie d'une représentation graphique

Le repère (O, I, J) étant supposé orthogonal, on considère la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction numérique f.
Soit α un nombre réel et notons (Δ) la droite d'équation $x = \alpha$.
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (Δ) soit un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Considérons la translation t qui applique le point A de coordonnées $(\alpha, 0)$ sur le point O.
C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ de coordonnées $(-\alpha, 0)$ (figure 26).
Or, si (Δ) est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$, alors $t(\Delta)$ est un axe de symétrie pour $t(\mathcal{C}_f)$, et réciproquement (justifier).

Mais $t(\Delta)=(OJ)$ et, d'après le paragraphe précédent, $t(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)$.

Scanned by CamScanner

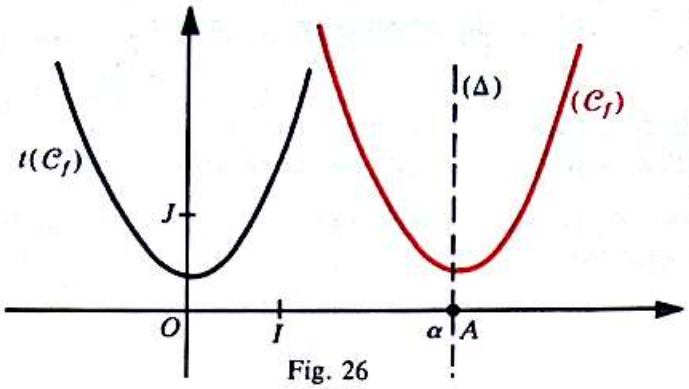


Fig. 26

D'autre part, le repère étant orthogonal, on sait que (OJ) est un axe de symétrie pour $t(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)$ est paire.

Conclusion. Le repère étant orthogonal, la droite d'équation $x=\alpha$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)$ est paire.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, vérifions que la droite (Δ) d'équation $x=-\frac{5}{6}$ est un axe de symétrie pour la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2+5x-1. \end{aligned}$$

Il faut vérifier que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire.

$$x \longmapsto f\left(x-\frac{5}{6}\right).$$

Or, pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(x-\frac{5}{6}\right) \\ &= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+5\left(x-\frac{5}{6}\right)-1 \\ &= 3x^2-\frac{37}{12}. \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x)=3(-x)^2-\frac{37}{12}$

$$\begin{aligned} &= 3x^2-\frac{37}{12} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

La fonction g étant paire, on conclut que (Δ) est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice Le plan étant muni d'un repère orthogonal, vérifier que la droite d'équation $x=3$ est un axe de symétrie pour la représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2-6x+10}{|x-3|}. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

5) Centre de symétrie d'une représentation graphique

Le repère (O, I, J) étant quelconque, on considère la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction numérique f.
Soit M le point du plan de coordonnées (α, β).
On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

La translation t qui applique le point M sur le point O est la translation de vecteur $\overrightarrow{MO}$ de coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ (figure 27).

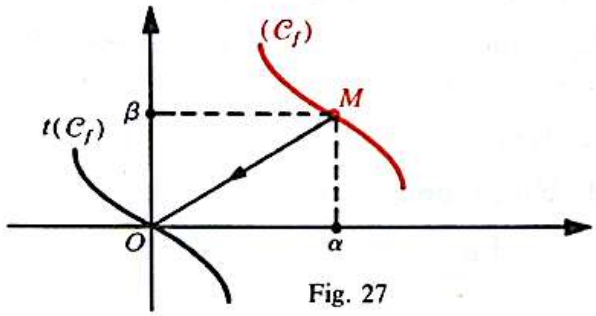


Fig. 27

Or, si M est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$, alors $t(M)$ est un centre de symétrie pour $t(\mathcal{C}_f)$, et réciproquement (justifier).

Mais $t(M)$ est le point O, et on sait que $t(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)-\beta$.

D'autre part, on sait que O est un centre de symétrie pour $t(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)-\beta$ est impaire.

Conclusion. Le repère étant quelconque, le point M de coordonnées (α, β) est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+\alpha)-\beta$ est impaire.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère quelconque, vérifions que le point M de coordonnées (3, 1) est un centre de symétrie pour la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x+2}{x-3}.$$

Il faut vérifier que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x+3)-1$ est impaire.

Or, $D_f = \mathbb{R}-\{3\}$ et, par conséquent : $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \in D_f\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \neq 3\}$$

$$= \mathbb{R}^*.$$

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, on a : $g(x) = f(x+3)-1$

$$= \frac{(x+3)+2}{(x+3)-3} - 1$$

$$= \frac{5}{x}.$$

Scanned by CamScanner

La fonction g est impaire car, si x appartient à D_g, alors $-x$ appartient aussi à D_g et on a :

$$g(-x)=\frac{5}{-x}$$

$$=-\frac{5}{x}=-g(x).$$

Exercice Le plan étant muni d'un repère quelconque, vérifier que le point de coordonnées $(2, -5)$ est un centre de symétrie pour la représentation graphique de la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3-6x^2+12x-13.$$

6) Fonction $x \longmapsto |f(x)|$

a) Représentation graphique de la fonction opposée

Le plan étant muni d'un repère *orthogonal*, on considère une fonction numérique f et sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

La fonction opposée $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -f(x)$

a même ensemble de définition que f; de plus :

$$G_{-f}=\{(x, -f(x))|x\in D_f\}$$
$$=\{(x, -y)|(x, y)\in G_f\}.$$

Or, M_0 étant le point du plan de coordonnées (x_0, y_0), le symétrique de M_0 par rapport à la droite (OI) est le point M'_0 de coordonnées $(x_0, -y_0)$ (figure 28).

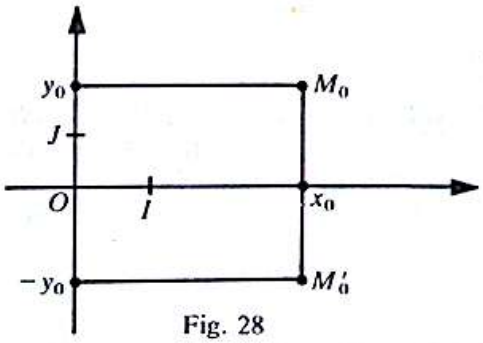


Fig. 28

La représentation graphique de $-f$ est donc l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI) (figure 29).

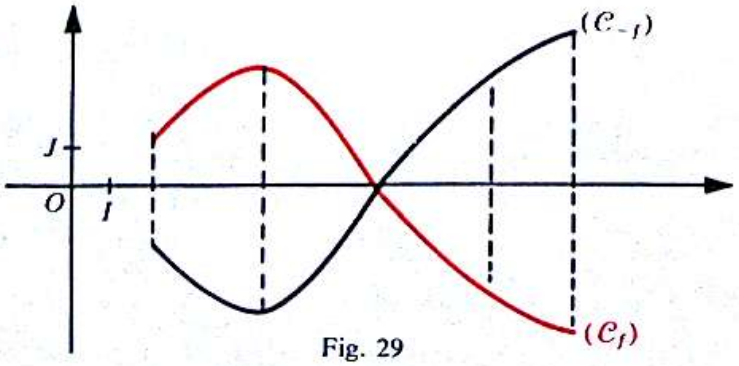


Fig. 29

Scanned by CamScanner

b) Fonction valeur absolue

Définition

Soit une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f.
On appelle fonction *valeur absolue de* f la fonction numérique notée $|f|$, d'ensemble de définition D_f,
définie par : $\forall x \in D_f \quad |f|(x) = |f(x)|$.

Le plan étant muni d'un repère *orthogonal,* nous montrons comment obtenir la représentation graphique de $|f|$ à partir de celle de f.
On distingue trois cas.

1er cas : f est positive.
Alors $|f| = f$ et la représentation graphique de $|f|$ est celle de f.

2e cas : f est négative.
Alors $|f| = -f$ et la représentation graphique de $|f|$ est l'image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

3e cas : f n'est ni positive ni négative.
Dans ce cas, on considère les ensembles A et B tels que

$$A = \{x \in D_f \mid f(x) \geqslant 0\}, \qquad B = \{x \in D_f \mid f(x) \leqslant 0\}.$$

Soit $(\mathcal{C}_+)$ la représentation graphique de la restriction de f à A et $(\mathcal{C}_-)$ celle de la restriction de f à B.
Comme $|f|$ coïncide avec f sur A, la représentation graphique de la restriction de $|f|$ à A est $(\mathcal{C}_+)$.
Comme $|f|$ coïncide avec $-f$ sur B, la représentation graphique de la restriction de $|f|$ à B est l'image $(\mathcal{C}'_-)$ de $(\mathcal{C}_-)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
Par conséquent, la représentation graphique de $|f|$ est $(\mathcal{C}_+) \cup (\mathcal{C}'_-)$ (figure 30).

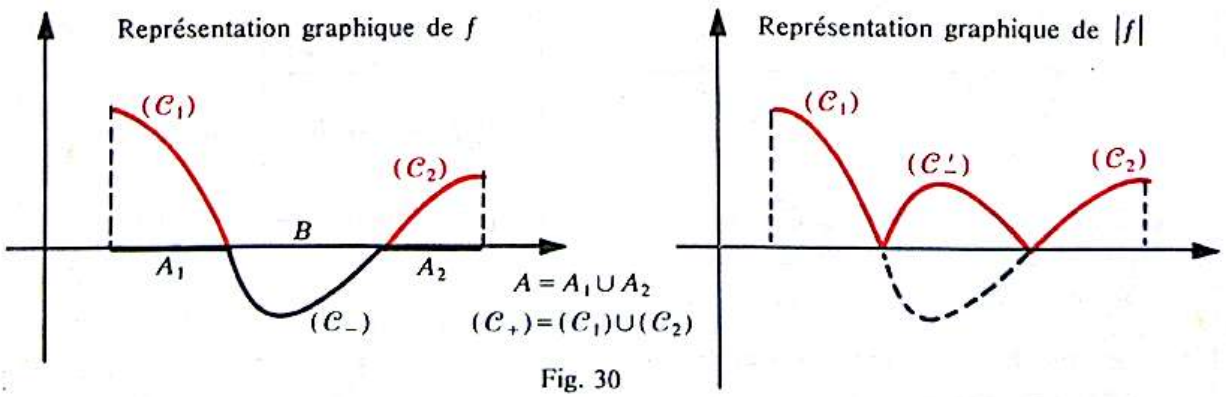


Fig. 30

Exercice Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

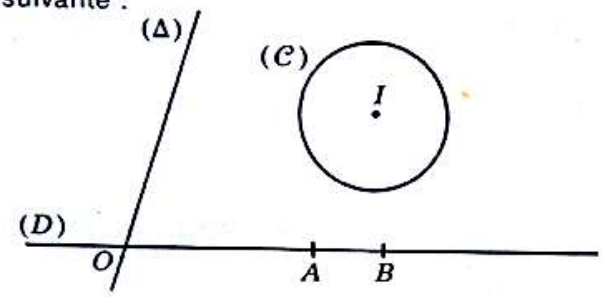
$$x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad x \longmapsto 1 - x^2.$$

Représenter graphiquement les fonctions $|f|$ et $|g|$ relativement à un repère orthonormé.

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la figure suivante :



Soit q l'application de $(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $(\mathcal{C})$ associe son projeté sur la droite (D), parallèlement à la droite (Δ).
Déterminer graphiquement :

— l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par q;

— l'image réciproque du point O par q;

— l'image réciproque du segment $[AB]$ par q.

2 (1). Soit l'application

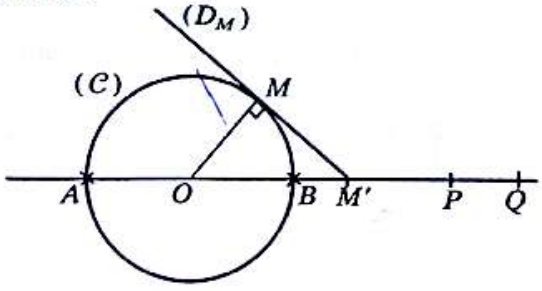
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |2x-1| + |x+3| - 1.$$

Trouver :

a) l'image par f de l'intervalle $[-1, 1]$;

b) l'image réciproque par f de l'intervalle $]5, +\infty[$.

3 (1). On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la figure suivante :



A tout point M du cercle $(\mathcal{C})$, on fait correspondre, s'il existe, le point M' tel que :
$M' \in (AB) \cap (D_M)$ où (D_M) est la tangente en M au cercle $(\mathcal{C})$.
On a ainsi défini une fonction f de $(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{P}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Déterminer l'image réciproque du point P par f.

c) Quel est l'ensemble image de f ?

d) Quel est l'image réciproque de la demi-droite $[PQ)$?

4 (1). Soit la fonction

$$f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin x.$$

Déterminer graphiquement :

— l'image réciproque de $\frac{1}{2}$ par f ;

— l'image réciproque de $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par f.

5 (1). On considère dans le plan $\mathcal{P}$ le triangle OAB, rectangle en O, tel que $OA = OB$ et $AB = 1$.
A tout point M de $[AB]$, on fait correspondre le nombre réel OM. On a ainsi défini une fonction f de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Trouver l'image par f du point A ; du point H milieu de $[AB]$.

c) Soit C un point quelconque de $[AH]$.
Posons $HC = x$.
Exprimer en fonction de x l'image du point C par f. En déduire l'image du segment $[AH]$ par f.

d) Quel est l'ensemble image de f ?

6 (1). Trouver trois transformations planes égales à la symétrie de centre I.

7 (1). Les fonctions f et g sont-elles égales dans chacun des cas suivants?

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2-1}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{|x+1|}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

8 (1). Soit deux fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{x+1} - \frac{2x-1}{x}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-x^2+mx+1}{x(x+1)}.$$

Déterminer m pour que f et g soient égales.

Scanned by CamScanner

9 (1). Les fonctions

$$f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (\sin x + \cos x)^2$$

$$g :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 + 2 \sin x \cos x$$

sont-elles égales?

10 (1). Les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^3 - 1}{x - 1} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 + x + 1.$$

coïncident-elles sur $\mathbb{R} - \{1\}$?

11 (1). Soit un nombre réel m et les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto mx.$$

Trouver un ensemble E sur lequel f et g coïncident et tel que $f(x) \neq g(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R} - E$.

12 (1). Trouver les ensembles de définition des fonctions f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$, puis calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ dans chacun des cas suivants :

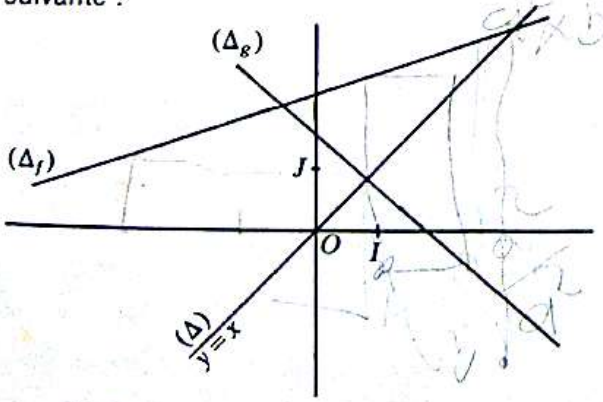
a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x-1}{x+3}$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x-1}$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x+1}{2x-1}$ $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x-1}{x+1}$.

13 (1). Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la figure suivante :



- (Δ_f) et (Δ_g) sont les représentations graphiques de deux fonctions affines f et g.
- (Δ) est la droite d'équation $y = x$.

a) Montrer que $g \circ f$ est une fonction affine.

b) Représenter graphiquement la fonction $g \circ f$.

14 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$.

a) Trouver deux fonctions élémentaires h et g telles que $f = h \circ g$.

b) Représenter graphiquement f à l'aide de la représentation graphique de h, celle de g et la droite d'équation $y = x$.

15 (1). Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x - 1 \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x-3}$$

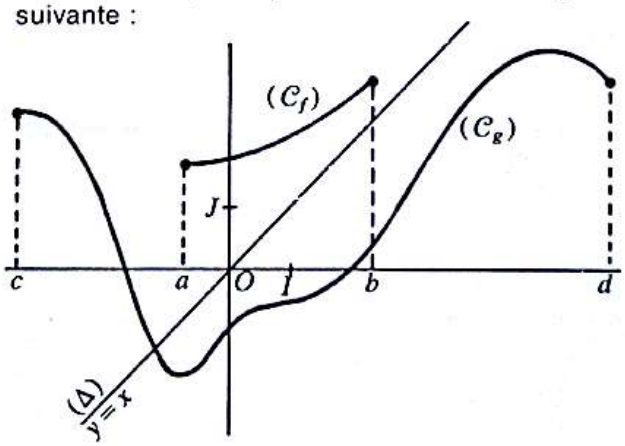
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 - 2.$$

Trouver les ensembles de définition des fonctions $h \circ g \circ f$ et $g \circ h \circ f$.
Calculer $(h \circ g \circ f)(x)$ et $(g \circ h \circ f)(x)$.

16 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{(x-1)^2}$.

Trouver trois fonctions élémentaires g, h et r telles que $f = r \circ h \circ g$.

17 (1). Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la figure suivante :



- $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de la fonction f d'ensemble de définition $[a, b]$.
- $(\mathcal{C}_g)$ est la représentation graphique de la fonction g d'ensemble de définition $[c, d]$.
- (Δ) est la droite d'équation $y = x$.

Scanned by CamScanner

a) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de $f \circ g$.

b) 1 appartient-il à $D_{f \circ g}$? Si oui, déterminer graphiquement son image par $f \circ g$.

18 (1). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{|x^3|}{x} + 1.$$

Quelle est la restriction de f à chacun des ensembles suivants :

$$\mathbb{R}^*_-, \quad \mathbb{R}^*_+, \quad [-1, 1] - \{0\} ?$$

19 (1). Représenter graphiquement la restriction à $[-3, 3]$ de chacune des applications suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x \cdot E(x)$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto E(x^2)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - E(x)$$

$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto E(|x|).$$

20 (1). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x-1}{|x|-1}.$$

a) Quelle est la restriction de f à chacun des ensembles suivants :

$$\mathbb{R}^+ - \{1\}, \quad \mathbb{R}^- - \{-1\} ?$$

b) Soit g la restriction de f à $]-1, 0]$. g est-elle injective?

21 (1). Soit deux ensembles

$$A = \{a, b\} \quad \text{et} \quad B = \{x, y, z\}.$$

a) Quel est le nombre d'applications injectives de A dans B? Citez-les.

b) Quelles sont toutes les applications bijectives de B sur lui-même?

22 (1). Parmi les applications suivantes, lesquelles sont injectives? surjectives? bijectives?

$$f_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*_-, \quad x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad x \longmapsto \frac{|x^3|}{x}$$

$$f_3 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], \quad x \longmapsto \sin x$$

$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \longmapsto E(x)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}, \quad x \longmapsto \frac{x+1}{x}$$

$$f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{|x|}$$

$$f_7 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \longmapsto 3^x$$

$$f_8 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \text{si } x \text{ est pair, } f_8(x) = \dfrac{x}{2} \\ \text{si } x \text{ est impair, } f_8(x) = \dfrac{x+1}{2}. \end{cases}$$

23 (1). A et B étant deux ensembles non vides, soit f une application de A dans B. On désigne par i_A l'application identique de A. Démontrer que :
S'il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = i_A$ alors

- f est injective
- g est surjective.

24 (1). A est un ensemble non vide. Soit f et g deux applications de A dans A. Démontrer que :

a) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

b) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

25 (1). Parmi les applications suivantes, lesquelles sont injectives? surjectives? bijectives?

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto (2x+1, x-3)$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto 2x - 3y + 1$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (x - y, x + y).$$

26 (1). Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$$

où a, b, c, d sont des nombres réels donnés. A quelle condition sur a, b, c, et d, f est-elle bijective?

27 (1). Soit l'application

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}, \quad x \longmapsto \frac{2x-3}{x-1}.$$

Démontrer que f est bijective. Déterminer son application réciproque f^{-1}.

Scanned by CamScanner

28 (1). Soit l'application

$$f : \left[-\frac{1}{2}, \to\right[\longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt{2x+1}.$$

a) Démontrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

b) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé. En déduire celle de f.

29 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit deux droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = 2x + 1$ et $y = x$. Trouver une équation de la droite (D'), image de (D) par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

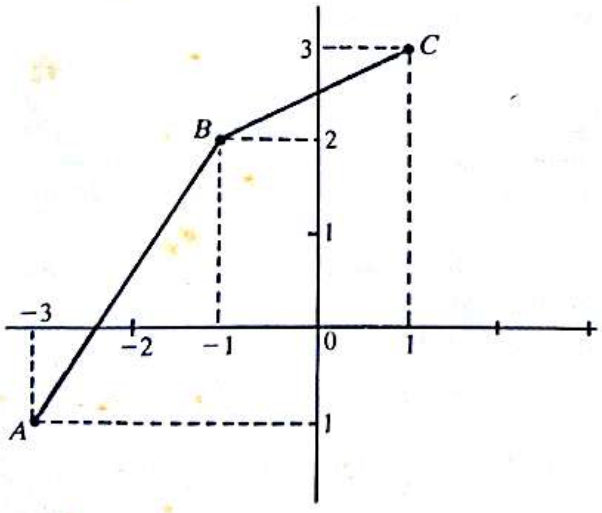
30 (1). Soit l'application

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto x^3.$$

Donner la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J).
Vérifier, à l'aide de cette représentation graphique, que f est bijective. Tracer la représentation graphique de son application réciproque.

31 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit l'application f de $[-3, 1]$ dans $[-1, 3]$ définie par sa représentation graphique

$[AB] \cup [BC]$.



a) Soit x un élément de $[-3, 1]$. Calculer $f(x)$.

b) Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

c) Construire la représentation graphique de f^{-1}.

32 (1). Soit deux applications

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-1, \to[\qquad g : [-1, \to[\longrightarrow [-3, \to[$$
$$x \longmapsto x^2 - 1 \qquad x \longmapsto 2x - 1.$$

a) Montrer que f, g et $g \circ f$ sont bijectives.

b) Déterminer f^{-1}, g^{-1}, $f^{-1} \circ g^{-1}$ et $(g \circ f)^{-1}$. Comparer $f^{-1} \circ g^{-1}$ et $(g \circ f)^{-1}$.

c) *Cas général*
Soit f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que :

1) si $g \circ f = i_{\mathbb{R}}$ alors $g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$.

2) $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

33 (2). Soit les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x - 1 \qquad x \longmapsto \frac{2x+1}{x-1}$$
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 1.$$

a) Déterminer les fonctions $h(f + g)$ et $hf + hg$. Vérifier qu'elles sont égales.

b) *Cas général*
Soit trois fonctions r, s et t de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$r(s + t) = rs + rt.$$

34 (2). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x-3}{2x+1}.$$

a) Déterminer les fonctions $f + 1$, $f - 1$, $(f + 1)(f - 1)$.

b) Vérifier que :

$$(f + 1)(f - 1) = f^2 - 1.$$

c) *Cas général*
Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_g. Démontrer que :

$$(g + 1)(g - 1) = g^2 - 1.$$

35 (2). Déterminer l'inverse de la fonction f et son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$$

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^4 - 1}{|x| - 3}$$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto |2x + 1| - (x + 2).$$

Scanned by CamScanner

36 (2). f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer $f+g$, $2f-3g$, fg et $\frac{f}{g}$ dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x(x-1)}{x+1}$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-4x}{x^2-4}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{|x|(x-2)}{x+2}$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x}}$.

37 (2). Soit les fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x+1}{x-2}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x-3}{x-1}$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$.

a) Déterminer les fonctions $(f+g)\circ h$ et $(f\circ h)+(g\circ h)$.
Vérifier qu'elles sont égales.

b) Déterminer les fonctions $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f)+(h\circ g)$. Sont-elles égales?

c) *Cas général*
Soit trois fonctions r, s et t de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$(f+g)\circ h = (f\circ h)+(g\circ h).$$

38 (2). Soit deux applications

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|^3$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$.

Comparer f et g sur chacun des ensembles suivants :

$[-1, 0]$, $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$.

39 (2). Soit deux fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x-1}{2x-1}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+3}{2x+1}$.

a) Comparer f et g sur chacun des ensembles suivants : $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

b) Résoudre l'inéquation :

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

40 (2). Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont minorées? majorées? bornées?

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{E(x)}$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-2}{x^2+5}$

$f_3 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+1}{x}$

$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^2-x+1$

$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^2+1}{x^2+3}$

$f_6 : [10, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}$.

41 (2). Soit la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x-1$.

Montrer que, étant donné un nombre réel quelconque M, il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) \geqslant M$. La fonction f est-elle majorée?

42 (2). Même question pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2+2x$.

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x}{x+1}$

d) $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x+1}$.

Scanned by CamScanner

43 (2). Montrer que:

a) Si $x \geqslant 2$, alors $\left|-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right| \geqslant \frac{1}{4}$.

b) $\forall x \in [0, 3] \quad |x^2-4| \leqslant 5|x-2|$.

c) Si $|x-2|<1$, alors $|x^2-x-2| \leqslant 4|x-2|$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x-1|$.

44 (3). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2-2x.$$

a) Déterminer les fonctions suivantes :

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(-x)$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -f(x)$

$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x+1)+2$

$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |f(x)|$

$t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow -f(-x)$.

b) Donner la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
En déduire celle de chacune des fonctions g, h, t, r, s à l'aide de transformations simples.

45 (3). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x-5}{x-3}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x)=\frac{a}{x-3}+b.$$

b) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), montrer que la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f est l'image de $(\mathcal{C}_g)$, représentation graphique de

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x},$$

par une translation que l'on déterminera. Construire $(\mathcal{C}_g)$, puis en déduire $(\mathcal{C}_f)$

46 (3). Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), à l'aide de la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3,$$

construire celle de chacune des fonctions suivantes :

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3+1$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x-1)(x^2+x+1)$

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3+3x^2+3x+1$

$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3-3x^2+3x+2$.

47 (3). Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes, indiquer celles qui sont paires, celles qui sont impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires.

$f_1 : x \longmapsto x^2 E(|x|)$

$f_2 : x \longmapsto |E(x)|$

$f_3 : x \longmapsto \frac{|x^3+1|}{\sqrt{x^4+2}}$

$f_4 : x \longmapsto |x+\sqrt{|x|}|-|x-\sqrt{|x|}|$

$f_5 : x \longmapsto \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

$f_6 : x \longmapsto \frac{2x^3+4x}{|x+1|+|x-1|}$.

48 (3). Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Vérifier que la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^4-4x^3+6x^2-4x+2 \qquad a=1$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x^2+3x+1 \qquad a=-\frac{3}{4}$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2-4x+8} \qquad a=3$

49 (3). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Vérifier que la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes admet pour centre de symétrie le point de coordonnées (a, b).

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2-2x-1}{x-3} \qquad (a, b)=(3, 4)$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{(x+1)\sqrt{|x+1|+1}+2(|x+1|+1)}{|x+1|+1} \qquad (a, b)=(-1, 2)$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-4x+1} \qquad (a, b)=\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Scanned by CamScanner

50 (3). Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, d'ensemble de définition D. Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$. Démontrer que (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad f(2a - x) - f(x) = 0.$$

51 (3). Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, d'ensemble de définition D. Soit A le point de coordonnées (a, b). Démontrer que A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Problèmes

52 Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit quatre points et leurs coordonnées :

$$A(3, 3),\ B(5, 5),\ C(7, 3) \text{ et } D(5, 1).$$

1) Démontrer que $ABCD$ est un carré et que (AD) et (BC) sont parallèles à la droite d'équation $y = -x$.

2) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique dans le repère (O, I, J) est $[AB] \cup [BC]$.

a) Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Quel est l'ensemble image de f ? En déduire que f est bornée.

b) Pour tout élément x de D_f, calculer $f(x)$ et $(f \circ f)(x)$. Que peut-on conclure?

3) Soit p la fonction de $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$, d'ensemble de définition

$$D_p = [AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA],$$

telle que :

$$\forall M \in D_p \quad p(M) = M'$$

où M' est le projeté orthogonal de M sur (OI). Soit q l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par

$$\forall M \in \mathscr{P} \quad q(M) = M'$$

où M' est l'image du point M par la projection sur (BD) suivant la droite d'équation $y = -x$.

a) Déterminer les ensembles de définition des deux fonctions $q \circ p$ et $p \circ q$.

b) Quelle est l'image par $q \circ p$ de chacun des ensembles suivants :

$$[AB],\ [AC],\ [AD],\ [BC] \cup [DC],\ D_p ?$$

c) Quelle est l'image réciproque par $q \circ p$ du segment $[BD]$?

d) Déterminer l'ensemble image de $p \circ q$.

53 Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2 + 1}{x}.$$

1) Montrer que la représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ de f dans le repère (O, I, J) admet un centre de symétrie.

2) Soit D_f l'ensemble de définition de f. Montrer que : $\forall x \in D_f \quad |f(x)| \geq 2$.

En déduire l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad -2 < f(x) < 2.$$

3) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) > x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad f(x) < x.$$

4) Montrer que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}^* \quad M < f(x).$$

En déduire que f n'est pas majorée. f est-elle minorée? Justifier.

5) A l'aide des représentations graphiques des deux fonctions élémentaires :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x$$

donner la représentation graphique de f.

54 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient le système de contraintes suivant :

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x + y + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 + y = 0. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

1) Construire $(\mathcal{C})$.

2) On considère le point $A(-1, 0)$ et l'application

$$f : (\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad N \longmapsto [d(A, N)]^2.$$

Soit x l'abscisse d'un point N de $(\mathcal{C})$.

a) Exprimer $f(N)$ en fonction de x.

b) Montrer que f est majorée par 18.

c) Calculer x pour que $f(N)$ soit égal à 18.

55 *Partie A*

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2x^3 + x^2 + 3x + 1$.

1) f est-elle paire? impaire?

2) On considère deux fonctions :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$$

et

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

a) Calculer $g(x)$ et $h(x)$.

b) Vérifier que g est paire et h est impaire.

c) Vérifier que $f = g + h$.

Partie B

1) Soit une fonction t de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, d'ensemble de définition D_t tel que : quel que soit le nombre réel x, si x appartient à D_t alors $-x$ appartient à D_t.
On considère les fonctions :

$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}[t(x) + t(-x)]$$

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}[t(x) - t(-x)].$$

Montrer que :

a) r est paire;

b) s est impaire;

c) $t = r + s$.

2) *Application*

Dans chacun des cas suivants, φ étant une fonction donnée, trouver deux fonctions p et q de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

- p soit paire;
- q soit impaire;
- $\varphi = p + q$.

a) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x}$

b) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x^3+2x+1}{x^2+1}$

c) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{|x+1|} + \dfrac{1}{x}$

d) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - E(x)$.

56 Soit f une application de l'ensemble A dans l'ensemble A.
On désigne par i_A l'application identique de A.
On dit que f est *involutive* lorsque $f \circ f = i_A$.

1) Montrer que si f est involutive alors :

a) f est bijective;

b) f est égale à f^{-1}.

2) *Application 1*

Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}, \quad x \longmapsto \frac{x+3}{x-1}.$$

a) Déterminer $g \circ g$. En déduire que g est involutive.
Quelle est son application réciproque g^{-1}?

b) Dans un repère orthonormé (O, I, J), construire la représentation graphique de g et celle de g^{-1}.
Démontrer que ces deux représentations graphiques admettent la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

3) *Application 2*

Soit l'application

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \; ; \; \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right).$$

A l'aide des résultats du 1), montrer que h est bijective puis en déduire h^{-1}.

4) *Application 3*

Soit S un point du plan $\mathcal{P}$. On considère l'application t de $\mathcal{P} - \{S\}$ dans $\mathcal{P} - \{S\}$ qui, à chaque point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} M, S, M' \text{ soient alignés,} \\ \overline{SM'} \cdot \overline{SM} = 2. \end{cases}$$

Démontrer que t est involutive. En déduire t^{-1}.

5) Soit l'application

$$r : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Déterminer $r \circ r$. L'application r est-elle involutive? Peut-on conclure que r n'est pas bijective?

Scanned by CamScanner

57 Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{3}{x}.$$

1) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) ; soit $(\mathcal{C}_f)$ cette représentation graphique. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie.

2) Soit la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x-1}{x-2}.$$

On désigne par D_g l'ensemble de définition de g.

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in D_g \quad g(x) = a + \frac{b}{x-2}.$$

b) Soit $(\mathcal{C}_g)$ la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J).

Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par une translation. Laquelle?
Construire $(\mathcal{C}_g)$. Vérifier que $(\mathcal{C}_g)$ admet le point de coordonnées (2, 2) comme centre de symétrie.

3) On considère la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2|x|-1}{|x|-2}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de h? Étudier la parité de h.

b) A l'aide de $(\mathcal{C}_g)$ construire la représentation graphique de h dans le repère (O, I, J).

c) Résoudre :

— l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -1.$$

— Le système d'inéquations :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} \leqslant h(x) \leqslant 3.$$

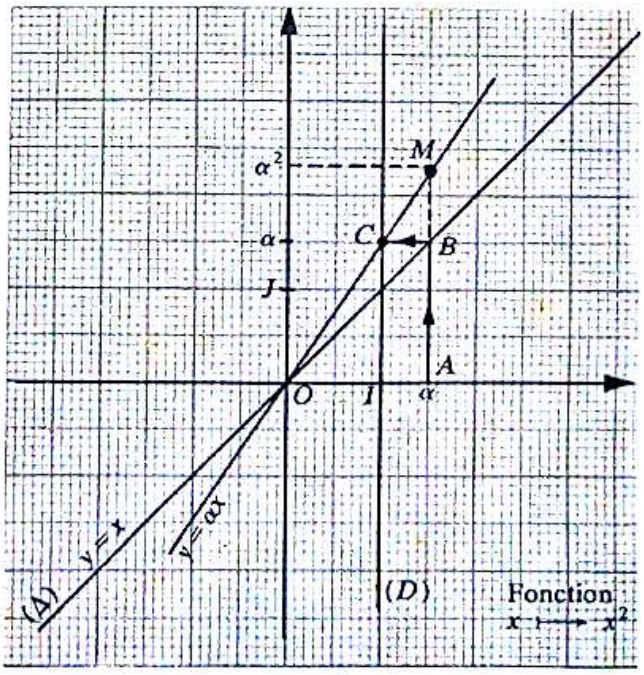
THÈME D'ÉTUDE

Programme de construction, point par point, de la représentation graphique de quelques fonctions élémentaires (sans utiliser de tableau de valeurs).

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Δ) est la droite d'équation $y = x$.

1) Fonction $x \longmapsto x^2$

Soit (D) la droite d'équation $x = 1$ et α un nombre réel quelconque.
Considérons sur (OI) le point A d'abscisse α; la droite parallèle à (OJ) passant par A coupe (Δ) en B (α, α); la droite parallèle à (OI) passant par B coupe (D) en $C(1; \alpha)$; la droite (OC), d'équation $y = \alpha x$ coupe (AB) au point M de coordonnées (α, α^2). M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^2$.
Utiliser cette méthode pour construire 10 points de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^2$.



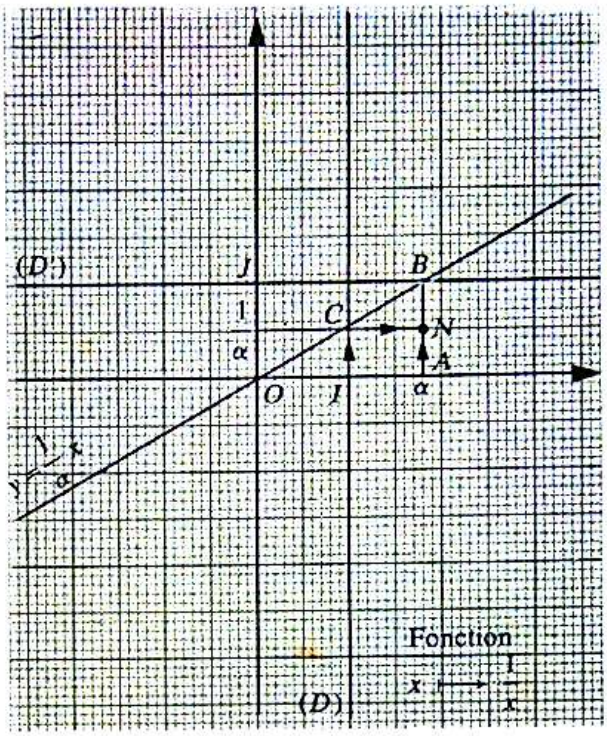
Scanned by CamScanner

2) Fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$

Soit (D) et (D'), les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=1$, et soit α un nombre réel non nul.
Considérons sur (OI) le point A d'abscisse α; la droite parallèle à (OJ) passant par A coupe (D') en $B(\alpha, 1)$; la droite (OB), d'équation $y=\frac{1}{\alpha}x$, coupe (D) en $C\left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$; la droite parallèle à (OI) passant par C coupe (AB) au point M de coordonnées $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$.
M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

a) Utiliser cette méthode pour construire 10 points de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

b) Essayer de faire la construction en prenant $\alpha = 0$.

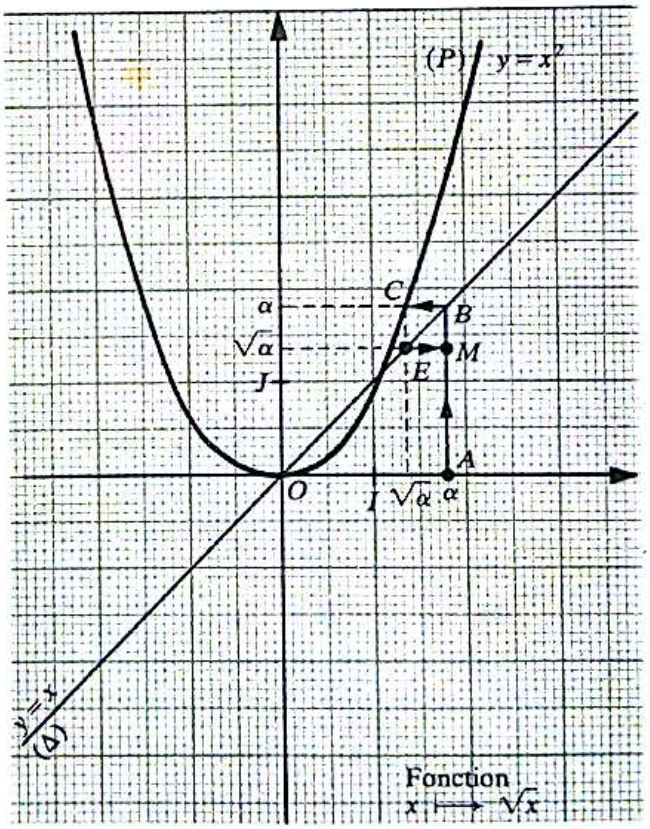


3) Fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$

Soit (P) la parabole d'équation $y=x^2$ et α un nombre réel positif. Considérons sur (OI) le point A d'abscisse α; la droite parallèle à (OJ) passant par A coupe (Δ) en $B(\alpha, \alpha)$; la droite parallèle à (OI) passant par B coupe (P) en $C(\sqrt{\alpha}; \alpha)$; la droite parallèle à (OJ) passant par C coupe (Δ) en $E(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$; la droite parallèle à (OI) passant par E coupe (AB) au point M de coordonnées $(\alpha, \sqrt{\alpha})$.
M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.

a) Utiliser cette méthode pour construire 10 points de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.

b) Essayer de faire la construction avec α strictement négatif.



Programme de construction, point par point, de la représentation graphique des fonctions $g \circ f$, $f+g$, $-f$, fg, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Scanned by CamScanner

Étant donné les représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ de deux fonctions numériques f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), comment construire, point par point, les représentations graphiques des fonctions $g \circ f$, $f+g$, $-f$, fg, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$?

— Pour la fonction composée $g \circ f$: voir page 7.

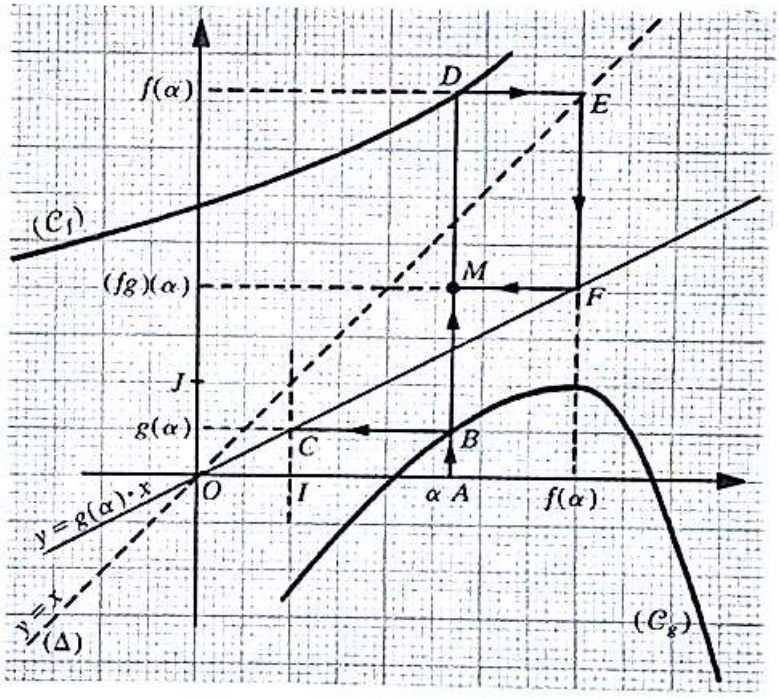
— Pour la fonction somme $f+g$: voir page 19.

— Pour la fonction opposée $-f$: voir page 34.

Il nous reste à présenter les programmes de construction des représentations graphiques de fg, $\frac{1}{g}$, *et* $\frac{f}{g}$.

1) Produit *fg*

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
Soit α un élément quelconque de $D_f \cap D_g$. Partant du point $A(\alpha, 0)$, on construit les points $B(\alpha, g(\alpha))$ et $C(1, g(\alpha))$.
La droite (OC) admet $y = g(\alpha) \cdot x$ pour équation. On construit ensuite les points $D(\alpha, f(\alpha))$, $E(f(\alpha), f(\alpha))$, $F(f(\alpha), g(\alpha) f(\alpha))$ et $M(\alpha, f(\alpha) g(\alpha))$.
Le point M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de fg.



Application
Donner un programme de construction, point par point, de la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

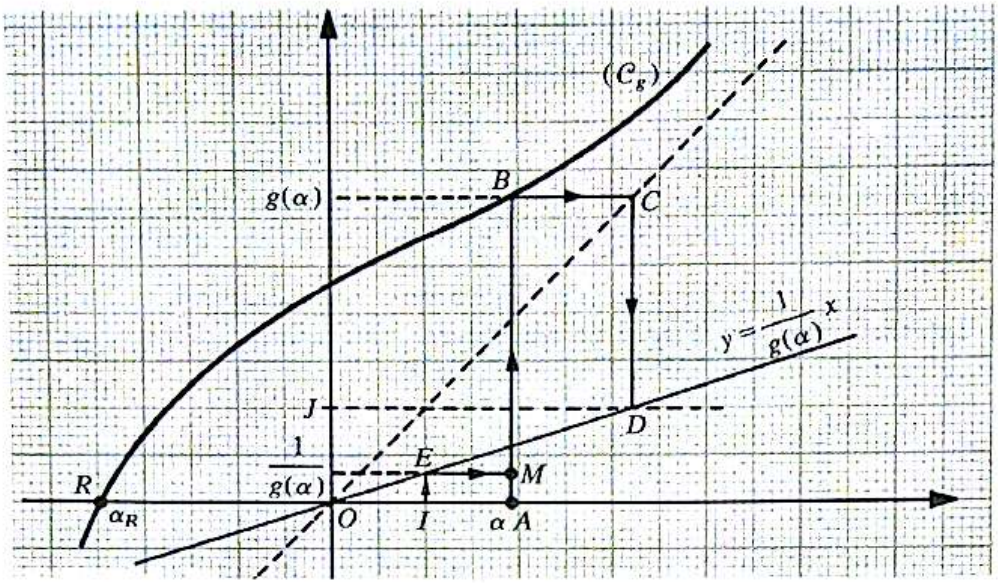
$$x \longmapsto x\sqrt{x}, \quad x \longmapsto x^2\sqrt{x}, \quad x \longmapsto (2x-1)x^2.$$

2) Inverse $\frac{1}{g}$

Soit α un nombre réel quelconque tel que $g(\alpha) \neq 0$.
Partant du point $A(\alpha, 0)$, on construit les points $B(\alpha, g(\alpha))$, $C(g(\alpha), g(\alpha))$ et $D(g(\alpha), 1)$.
La droite (OD) admet $y = \frac{1}{g(\alpha)} x$ pour équation.
On construit ensuite les points $E\left(1, \frac{1}{g(\alpha)}\right)$ et $M\left(\alpha, \frac{1}{g(\alpha)}\right)$.
Le point M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de $\frac{1}{g}$.

Question : $(\mathcal{C}_g)$ coupe (OI) au point R d'abscisse α_R. La construction précédente peut-elle se faire à partir de $\alpha = \alpha_R$?

Scanned by CamScanner



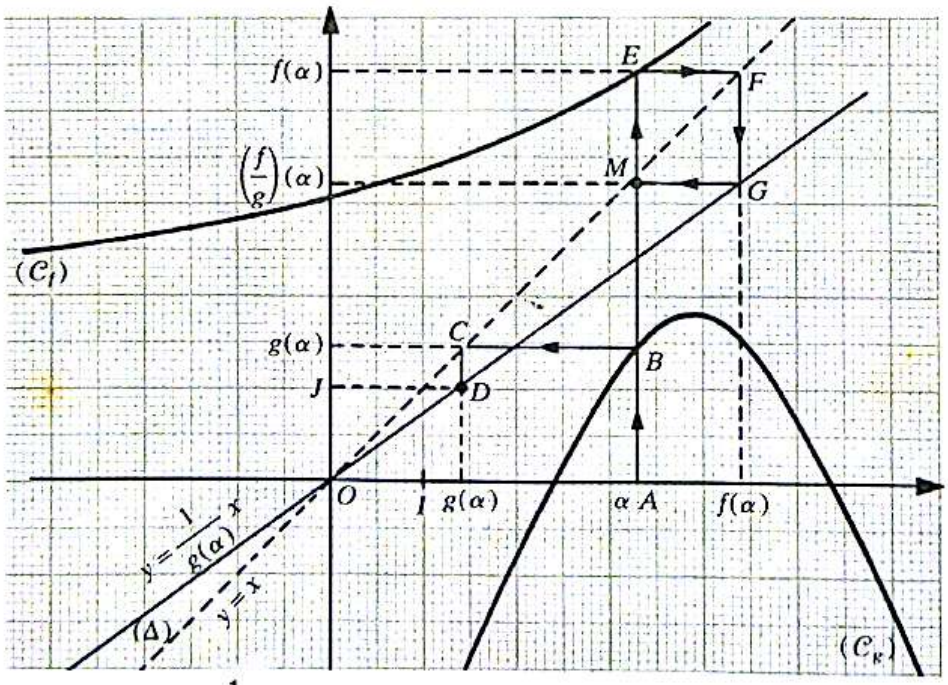
Application

Donner un programme de construction, point par point, de la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}; \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x \longmapsto \frac{1}{2x+1}.$$

3) Quotient $\frac{f}{g}$

Soit α un élément quelconque de $D_f \cap D_g$ tel que $g(\alpha) \neq 0$.
Partant du point $A(\alpha, 0)$, on construit les points $B(\alpha, g(\alpha))$, $C(g(\alpha), g(\alpha))$ et $D(g(\alpha), 1)$.



La droite (OD) admet $y = \frac{1}{g(\alpha)}x$ pour équation.

On construit ensuite les points $E(\alpha, f(\alpha))$, $F(f(\alpha), f(\alpha))$, $G\left(f(\alpha), \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\right)$ et $M\left(\alpha, \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\right)$.

Le point M est le point d'abscisse α de la représentation graphique de $\frac{f}{g}$.

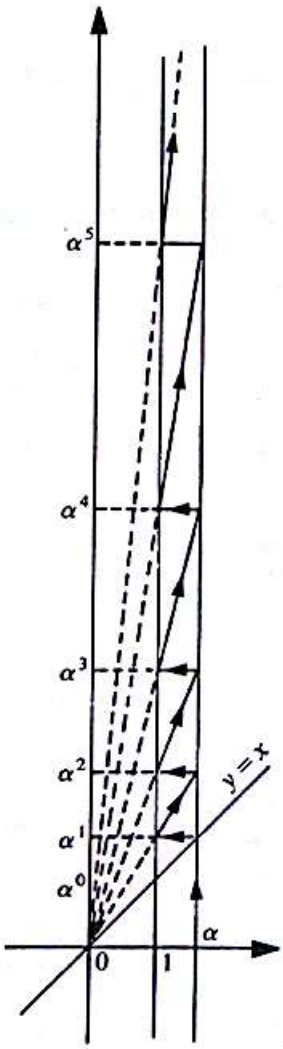
Scanned by CamScanner

Application
Donner un programme de construction, point par point, de la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

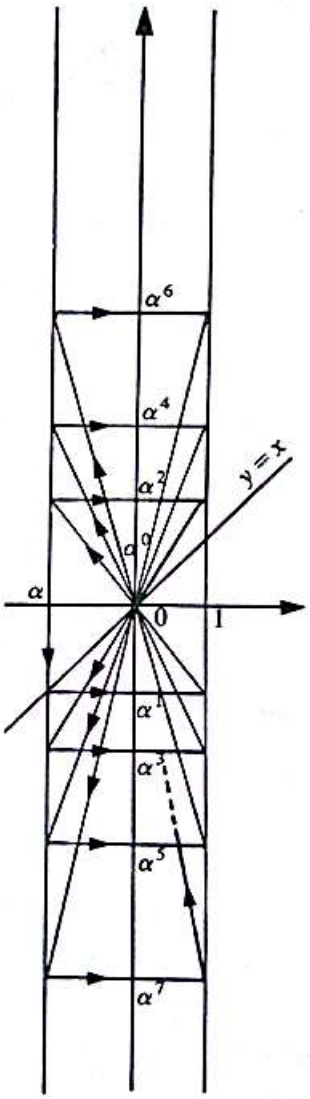
$$x \longmapsto \frac{x^2}{2x+1}; \quad x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2}; \quad x \longmapsto \frac{2x-3}{x+2}.$$

Programme de construction, point par point, de la représentation graphique des fonctions $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Observer les figures ci-dessous. Donner un programme de construction, point par point, de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.



$\alpha > 0$



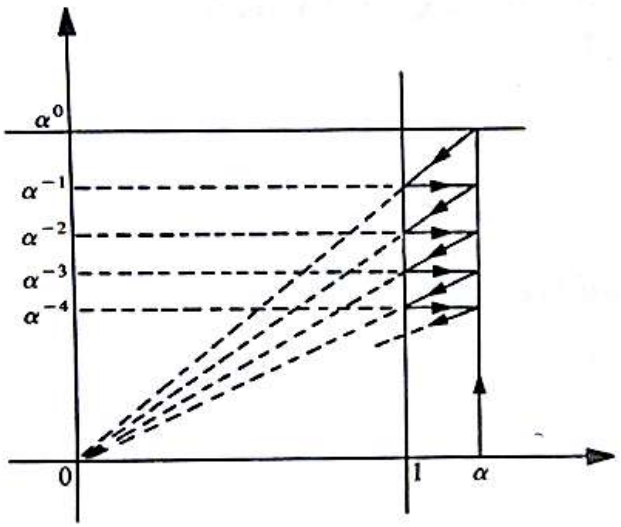
$\alpha < 0$

Placer sur chacune des deux figures les points de coordonnées $(\alpha, 1)$, (α, α), (α, α^2), (α, α^3), etc.

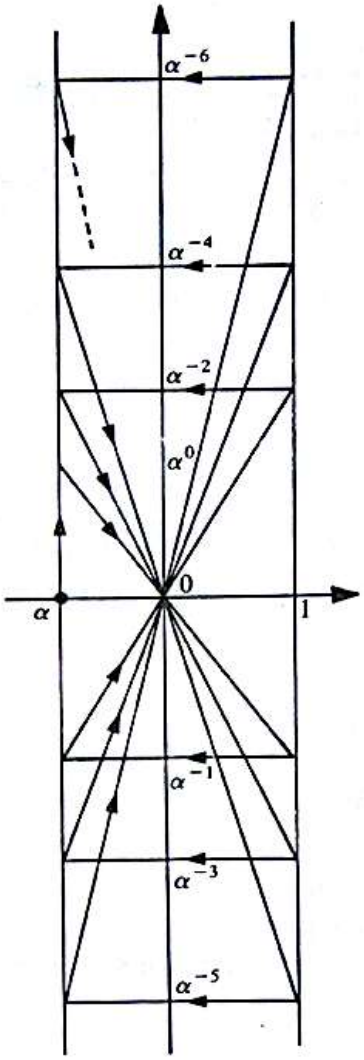
Programme de construction, point par point, de la représentation graphique des fonctions $x \longmapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Scanned by CamScanner

Observer les figures ci-dessous. Donner un programme de construction, point par point, de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$.



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

Placer sur chacune des deux figures les points de coordonnées $(\alpha, 1)$, (α, α^{-1}), (α, α^{-2}), (α, α^{-3}), etc.

Scanned by CamScanner

2 Suites numériques

Leçon 1 : DÉFINITION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE
Leçon 2 : DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE
Leçon 3 : PROPRIÉTÉS DES SUITES NUMÉRIQUES
Leçon 4 : CONVERGENCE DES SUITES NUMÉRIQUES
Leçon 5 : PROBLÈMES CONCRETS

1 Définition et représentation graphique d'une suite numérique

1) Rappels

Définition

On appelle *suite numérique* toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
Une telle suite est dite *finie* ou *infinie* suivant que son ensemble de définition est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$.

Remarque. Se donner une suite numérique revient à se donner une application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercices

1) Le tonnage total de café produit annuellement par la Côte d'Ivoire, entre 1977 et 1983, est indiqué sur le diagramme, figure 1.
Posons $L = \{n \in \mathbb{N} \mid 1977 \leqslant n \leqslant 1983\}$.
Ce diagramme permet de définir une application f de L dans $\mathbb{R}$.
Que valent $f(1977)$? $f(1980)$? $f(1983)$?
La suite f est-elle finie ou infinie?

2) A chaque élément n de $\mathbb{N}$, on associe le reste de la division de cet élément par 7.
Par exemple :

$$0 \longmapsto 0$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$12 \longmapsto 5.$$

On définit ainsi une application g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer $g(3)$, $g(7)$, $g(25)$, $g(107)$.
La suite g est-elle finie ou infinie?

Scanned by CamScanner

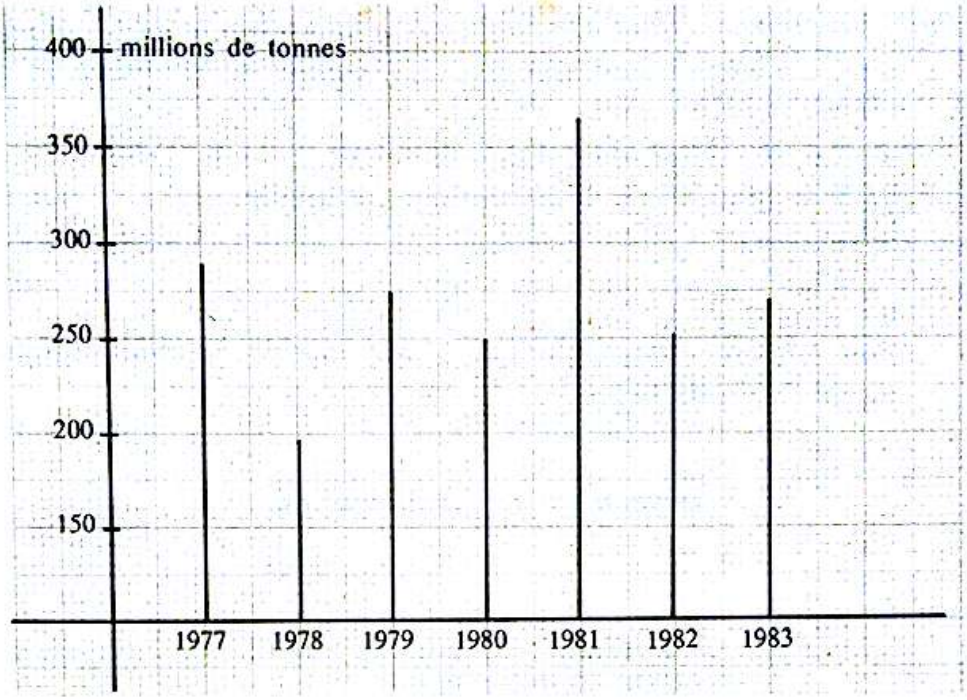


Fig. 1

Soit une suite numérique $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, d'ensemble de définition L.
L'image $f(n)$ d'un élément n de L est généralement notée par une lettre affectée de l'indice n, par exemple u_n.
On dit que u_n est *le terme d'indice n* de la suite.
La suite f se note alors $(u_n)_{n \in L}$ ou, simplement, (u).

Exercice

Soit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n-1}{n^2+1}.$$

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_7, u_{172}.

Rappelons qu'une suite peut être définie :

— par une formule explicite, comme dans le cas de l'exercice ci-dessus;

— par la donnée d'un terme (généralement celui d'indice le plus petit) et d'une formule de récurrence, comme dans les exercices ci-après.

Exercices

Calculer les termes d'indices 1, 2, 3, 4 et 5 de chacune des suites numériques suivantes, définies par une formule de récurrence :

a) $\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n^2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} w_0 = -5, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \frac{1}{3} w_n + 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}. \end{cases}$

Scanned by CamScanner

2) Représentation graphique d'une suite numérique

a) Une suite numérique $(u_n)_{n\in L}$ peut être représentée graphiquement de deux manières différentes :

— Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique de $(u_n)_{n\in L}$ dans le plan est sa représentation graphique en tant que fonction.
C'est donc l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n), où n décrit L.

— Étant donné une droite munie d'un repère (O, I), on peut aussi représenter les termes de la suite sur cette droite.
Pour chaque élément n de L, le terme u_n est représenté par le point d'abscisse u_n de la droite (OI).

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{2}{n}.$$

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représentons cette suite dans le plan et sur la droite (OI).

Calculons :

$$u_1 = 3,\ u_2 = 2,\ u_3 = \frac{5}{3},\ u_4 = \frac{3}{2},\ u_5 = \frac{7}{5},\ u_6 = \frac{4}{3},\ \ldots$$

Sur la figure 2, nous avons placé les points de coordonnées

$$(1, u_1),\ (2, u_2),\ \ldots$$

et nous avons donc obtenu la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le plan.
Il s'agit bien sûr d'une représentation partielle, à cause des limites du papier.

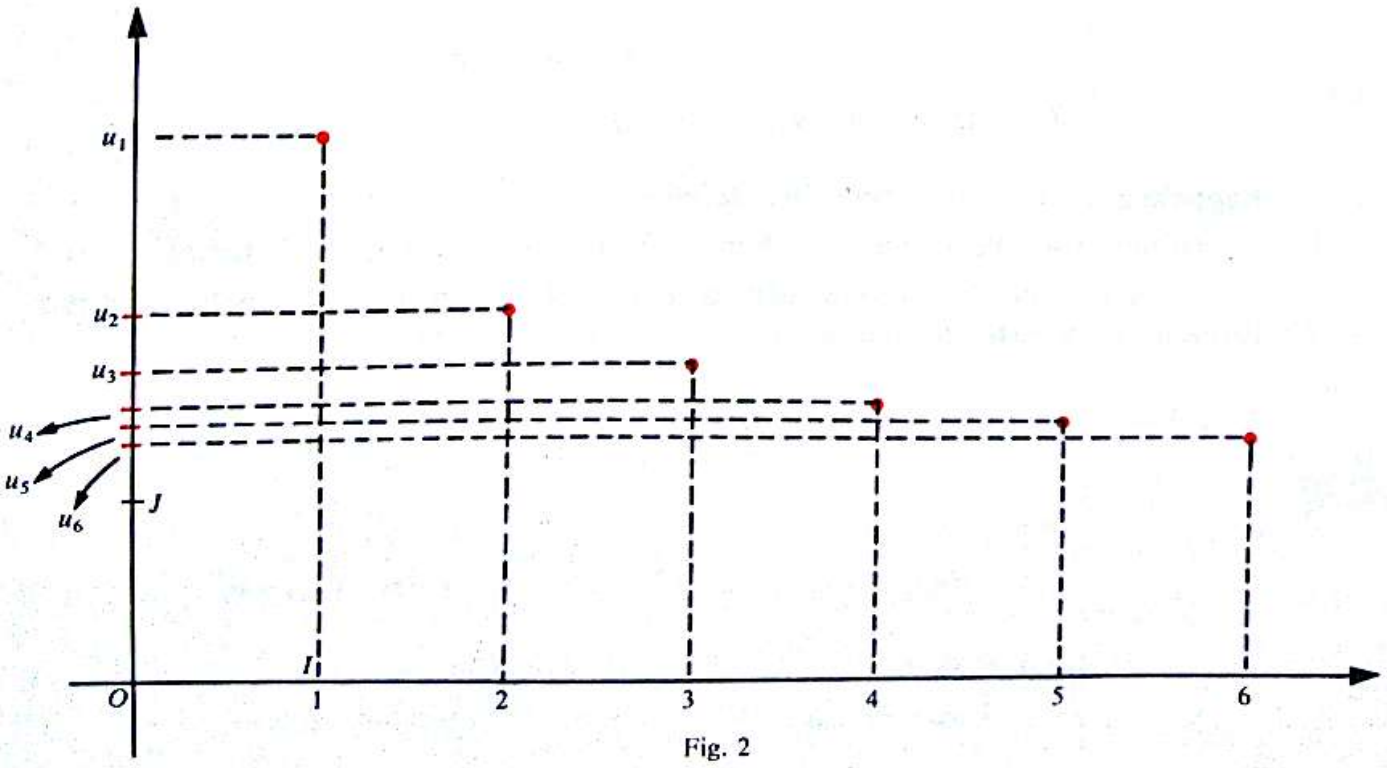


Fig. 2

Scanned by CamScanner

Remarquons que la suite considérée est la restriction à $\mathbb{N}^*$ de l'application

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1+\frac{2}{x}.$$

Notons $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.
La représentation graphique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le plan est formée des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les droites d'équation

$$x=1,\ x=2,\ x=3,\ \ldots \quad \text{(figure 3).}$$

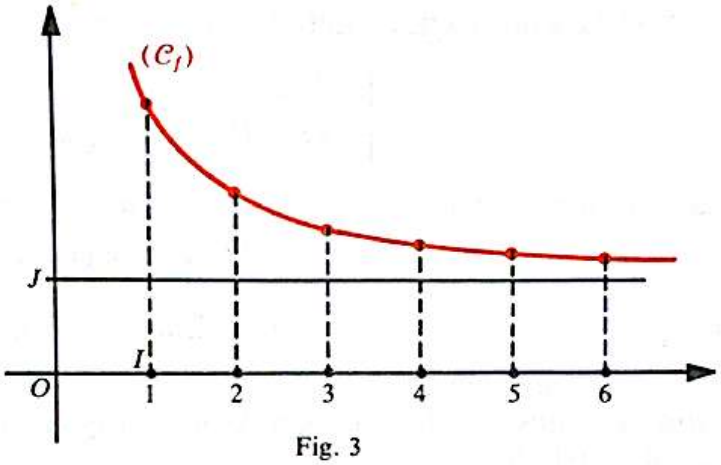


Fig. 3

Pour obtenir la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur la droite (OI), il suffit d'y placer les points d'abscisse u_1, u_2, ...

Signalons qu'un procédé géométrique simple permet d'obtenir la représentation graphique de la suite sur la droite (OI) à partir de sa représentation dans le plan. Ce procédé est illustré par la figure 4, où (Δ) désigne la droite d'équation $y=x$.

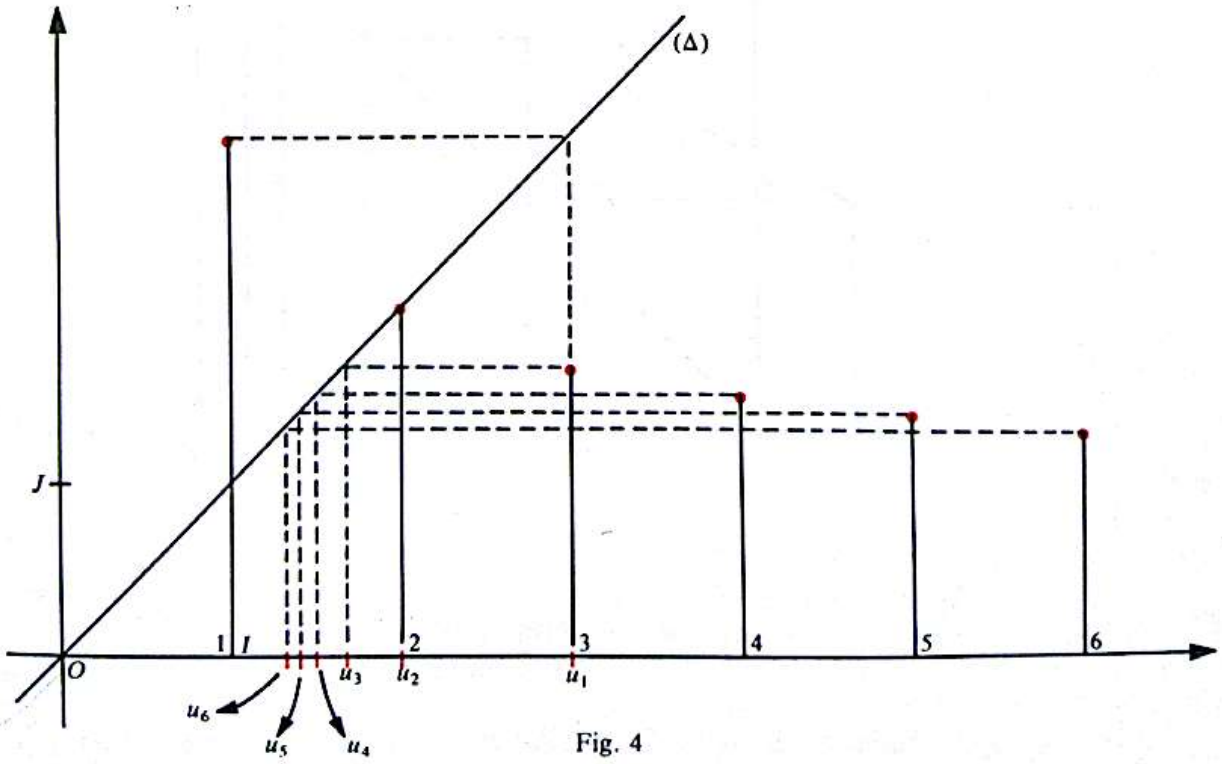


Fig. 4

Scanned by CamScanner

Exercice Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=(-1)^n\frac{1}{n}.$$

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représenter cette suite dans le plan et sur la droite (OI).

b) La représentation graphique de certaines suites numériques, définies par une formule de récurrence, peut s'obtenir sans calculer les termes de la suite.

Activités préparatoires

1) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0=-1, \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3. \end{cases}$$

Remarquons que la formule de récurrence s'écrit

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=g(u_n),$$

où la fonction numérique g est définie par $g(x)=\frac{1}{2}x+3$.

Observons la figure 5.
Nous y avons construit la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

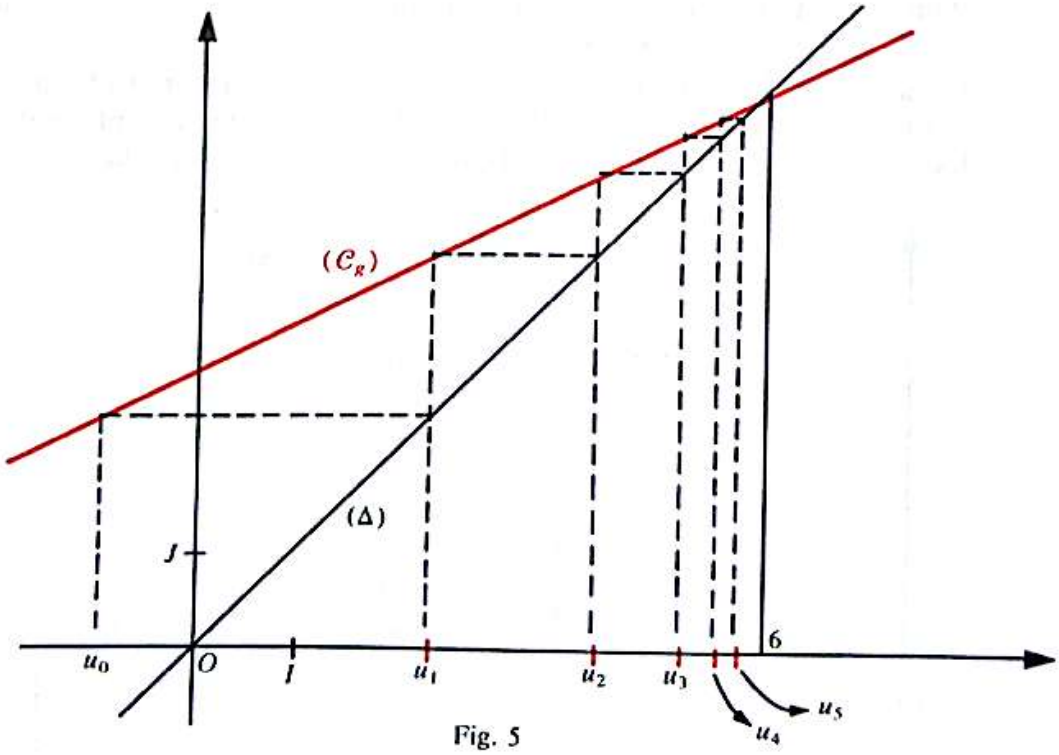


Fig. 5

Après avoir placé sur la droite (OI) le point d'abscisse u_0, nous y avons placé successivement les points d'abscisse u_1, u_2, ...
Ces points (sauf u_0) ont été obtenus par un procédé géométrique, sans effectuer aucun calcul.
A l'aide de la figure 5, expliquer la méthode utilisée.

Scanned by CamScanner

2) Soit la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = (n+1)\,v_n. \end{cases}$$

Existe-t-il une fonction numérique g telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = g(v_n)?$$

Soit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de u_0 et d'une formule de récurrence.
On suppose qu'il existe une fonction numérique g telle que la formule de récurrence puisse s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Cette suite peut alors être représentée sans aucun calcul si l'on connaît la représentation graphique de g.
Soit, en effet, la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g relativement à un repère (O, I, J) et (Δ) la droite d'équation $y = x$ (figure 6).

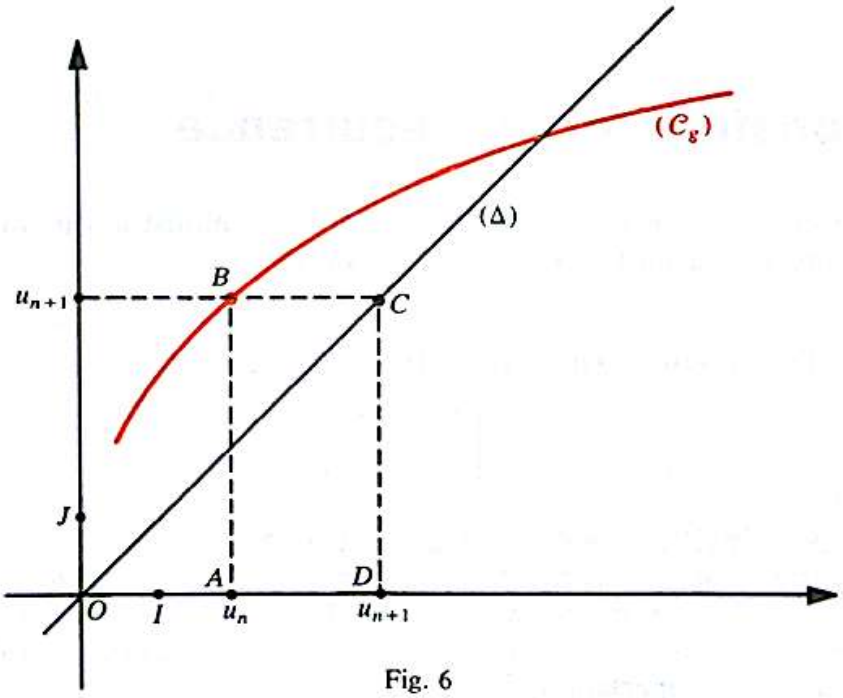


Fig. 6

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.
Montrons comment construire sur la droite (OI) le point d'abscisse u_{n+1}, connaissant le point A d'abscisse u_n.

Par A on trace la parallèle à (OJ); elle coupe $(\mathcal{C}_g)$ au point B de coordonnées (u_n, u_{n+1}), puisque $u_{n+1} = g(u_n)$.
Par B on trace la parallèle à (OI); elle coupe (Δ) au point C de coordonnées (u_{n+1}, u_{n+1}).
Finalement, la parallèle à (OJ) passant par C coupe la droite (OI) au point D cherché, c'est-à-dire celui d'abscisse u_{n+1}.

En utilisant successivement cette méthode pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on représente sur la droite (OI) les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ de la suite considérée.

Scanned by CamScanner

Exercices

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les termes d'indices 0 à 5 de chacune des suites numériques ci-dessous :

a) $\begin{cases} u_0 = 6, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n. \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = -2v_n + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} w_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = w_n + 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}. \end{cases}$

2 Démonstration par récurrence

Un nouveau type de raisonnement ou de démonstration, dit *par récurrence*, est présenté ici au moyen de trois exemples.

Exemple 1

La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3, \end{cases}$$

est représentée graphiquement à la figure 5.
Sur cette figure, on constate que les nombres u_0 à u_5 sont tous strictement inférieurs à 6, ce qui se vérifie immédiatement par le calcul.
D'après cette même figure, il semble que l'inégalité $u_n < 6$ est vraie même si l'indice n est supérieur à 5.
D'où la question : la proposition

$$P_n : u_n < 6$$

est-elle vraie pour tout élément n de $\mathbb{N}$?
Ce qui précède rend plausible une réponse affirmative mais ne peut pas être considéré comme une justification.
Pour démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \text{ est vraie,}$$

on peut procéder comme suit.

1re étape. On vérifie que la proposition P_0 est vraie : $u_0 < 6$.
(On sait que les propositions P_1 à P_5 sont vraies aussi, mais cela n'est pas utile pour la suite de la démonstration.)

Scanned by CamScanner

2e étape. On montre que si la proposition P_n est vraie pour un certain élément n de $\mathbb{N}$, alors la proposition P_{n+1} est vraie aussi.
Or, si P_n est vraie, c'est-à-dire si $u_n < 6$,

alors $\frac{1}{2} u_n < 3$,

donc $\frac{1}{2} u_n + 3 < 6$,

donc $u_{n+1} < 6$, c'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La proposition P_0 est vraie et, si la proposition P_n est vraie, la proposition P_{n+1} l'est aussi.
Il en résulte que la proposition P_1 est vraie, donc la proposition P_2 l'est aussi, puis la proposition P_3 et ainsi de suite.
Finalement, la proposition P_n est vraie pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

On dit que la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 6$$

a été démontrée *par récurrence,* ou encore, *par récurrence sur n.*

Exemple 2

Démontrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^3 + 2n \text{ est divisible par 3.}$$

Pour chaque élément n de $\mathbb{N}$, notons P_n la proposition :

$$n^3 + 2n \text{ est divisible par 3.}$$

1re étape. Pour $n = 0$, on a : $n^3 + 2n = 0$.
La proposition

$$P_0 : 0 \text{ est divisible par 3}$$

est une proposition vraie.

2e étape. Montrons que si la proposition P_n est vraie pour un certain élément n de $\mathbb{N}$, alors la proposition

$$P_{n+1} : (n+1)^3 + 2(n+1) \text{ est divisible par 3}$$

est vraie aussi.

Or : $$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2n + 2$$
$$= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1).$$

Puisque : $n^3 + 2n$ est divisible par 3 (P_n étant supposée vraie),
$3(n^2 + n + 1)$ est divisible par 3,

on conclut que

$$(n+1)^3 + 2(n+1) \text{ est aussi divisible par 3.}$$

La proposition P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion. La proposition P_0 est vraie et, si la proposition P_n est vraie, la proposition P_{n+1} l'est aussi.
La proposition P_n est donc vraie pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Scanned by CamScanner

Exemple 3

Soit deux nombres réels non nuls a et b et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = bu_n. \end{cases}$$

On cherche à définir cette suite par une formule explicite.
Dans ce but, on calcule les premiers termes de la suite :

$$u_1 = bu_0 = ab,$$
$$u_2 = bu_1 = ab^2,$$
$$u_3 = bu_2 = ab^3.$$

En remarquant que l'on a aussi

$$u_0 = a = ab^0,$$

il semble que la suite peut être définie par la formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = ab^n.$$

Démontrons par récurrence que cette supposition est exacte.
Pour chaque élément n de $\mathbb{N}$, notons P_n la proposition :

$$u_n = ab^n.$$

1re étape. On sait déjà que P_0 est vraie.

2e étape. Montrons que si la proposition P_n est vraie pour un certain élément n de $\mathbb{N}$, alors la proposition

$$P_{n+1} : u_{n+1} = ab^{n+1}$$

est vraie aussi.

Or, on a : $u_n = ab^n$ (P_n étant supposée vraie),
$u_{n+1} = bu_n$ (définition de la suite).

D'où $u_{n+1} = b(ab^n) = ab^{n+1}$,

ce qui signifie que la proposition P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La proposition P_n est vraie pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Exercice Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geqslant n + 1.$$

3 Propriétés des suites numériques

Une suite numérique étant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer les définitions et propriétés déjà rencontrées dans le cadre général des fonctions numériques. Ainsi :

Scanned by CamScanner

Définitions

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in L}$ est

— *majorée* (resp. *minorée*) *par le nombre réel* α si

$$\forall n \in L \quad u_n \leqslant \alpha \text{ (resp. } u_n \geqslant \alpha);$$

— *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un nombre réel α tel que la suite soit majorée (resp. minorée) par α;

— *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée;

— *positive* (resp. *négative*) si elle est minorée (resp. majorée) par 0, c'est-à-dire si

$$\forall n \in L \quad u_n \geqslant 0 \text{ (resp. } u_n \leqslant 0);$$

— *croissante* (resp. *décroissante*) si

$$\forall m \in L \ \forall n \in L \quad m < n \implies u_m \leqslant u_n \text{ (resp. } u_m \geqslant u_n);$$

— *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si

$$\forall m \in L \ \forall n \in L \quad m < n \implies u_m < u_n \text{ (resp. } u_m > u_n).$$

Exemples

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 3, \end{cases}$$

est majorée par 6 (et donc aussi par tous les nombres réels supérieurs à 6). Une démonstration par récurrence a été donnée à l'exemple 1, page 56.

2) La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 (justifier); elle est donc positive.

3) La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et majorée par 1 (justifier); elle est donc bornée et positive.

4) La suite $\left(-\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par -1 et majorée par 0 (justifier); elle est donc bornée et négative.

5) La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment minorée par 0.
Montrons qu'elle n'est pas majorée, comme le suggère d'ailleurs sa représentation graphique dans le plan (figure 7).
Or, pour tout nombre réel positif α, il existe un nombre entier n tel que $n > \sqrt{\alpha}$

$$\left(\text{par exemple : } n = E\left(\sqrt{\alpha}\right) + 1\right),$$

donc tel que $n^2 > \alpha$.
Par conséquent, aucun nombre réel α n'est un majorant de la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite n'est donc pas majorée.

Scanned by CamScanner

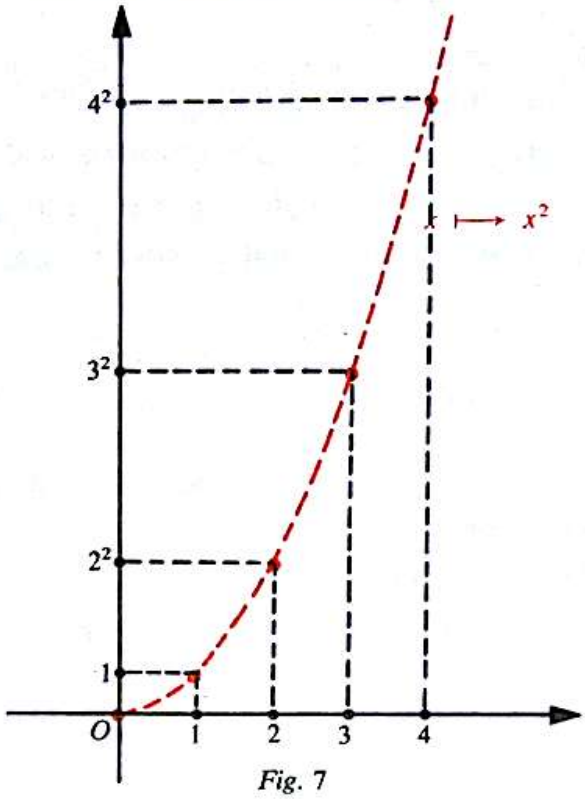


Fig. 7

Exercices

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n-2}{2n-1}$$

n'est pas positive et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0,\,1\}}$ est positive.

2) La suite $(-2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle majorée? minorée? Justifier et illustrer graphiquement.

3) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 5n - 3$$

n'est pas majorée.

4) Démontrer que la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
On utilisera le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geqslant n + 1 \text{ (exercice, page 58).}$$

Pour vérifier, au moyen de la définition, si une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante, il faut examiner tous les couples

$$(u_m,\, u_n) \text{ tels que } m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } m < n.$$

Le théorème suivant fournit une méthode pratique pour vérifier si une suite est croissante ou décroissante, car il nous dit qu'il suffit d'examiner les couples

$$(u_n,\, u_{n+1}) \text{ où } n \text{ décrit } \mathbb{N}.$$

Théorème

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1} \text{ (resp. } u_n \geqslant u_{n+1}).$$

Scanned by CamScanner

Démonstration

Nous considérons le cas d'une suite croissante (le cas d'une suite décroissante se traite de la même façon).

Soit la proposition

$$P : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$

Nous devons prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si la proposition P est vraie.

• Supposons que la suite soit croissante.
Alors, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$, puisque $n < n+1$.
La proposition P est donc vraie dans ce cas.

• Réciproquement, supposons que la proposition P soit vraie et montrons que la suite est croissante.
Il faut prouver que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad m < n \implies u_m \leqslant u_n$$

ou, ce qui revient au même,

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad u_m \leqslant u_{m+p}.$$

Soit m un élément quelconque de $\mathbb{N}$ et montrons par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad u_m \leqslant u_{m+p}.$$

1re étape. L'inégalité $u_m \leqslant u_{m+p}$ est vraie pour $p = 1$, puisque la proposition P est supposée vraie.

2e étape. Montrons que si l'inégalité $u_m \leqslant u_{m+p}$ est vraie pour un certain élément p de $\mathbb{N}^*$, alors l'inégalité

$$u_m \leqslant u_{m+(p+1)}$$

est vraie aussi.

Or, de $u_m \leqslant u_{m+p}$

et de $u_{m+p} \leqslant u_{(m+p)+1}$ (proposition P),

on déduit : $u_m \leqslant u_{m+p+1}$.

Conclusion. L'inégalité $u_m \leqslant u_{m+p}$ est vraie pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$.

La conclusion ci-dessus est vraie quel que soit le choix de l'élément m de $\mathbb{N}$ et, par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En remplaçant les inégalités par des inégalités strictes dans la démonstration précédente, on obtient le résultat suivant.

Théorème

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1} \text{ (resp. } u_n > u_{n+1}).$$

Remarque. Les deux théorèmes ci-dessus restent vrais si l'ensemble des indices, $\mathbb{N}$, est remplacé par $\mathbb{N}^*$ ou, plus généralement, par un ensemble L tel que

$$L = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\},$$

où n_0 est un élément de $\mathbb{N}$.

Scanned by CamScanner

Exemples

1) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante puisque

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}.$$

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0=1, \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n, \end{cases}$$

n'est ni croissante ni décroissante puisque

$$u_0=1, \quad u_1=-\frac{1}{2}, \quad u_2=\frac{1}{4}.$$

3) La figure 5 suggère que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0=-1, \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3, \end{cases}$$

est strictement croissante.
Montrons que cela est exact en vérifiant par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n<u_{n+1}.$$

• L'inégalité $u_n<u_{n+1}$ est vraie pour $n=0$, puisque $u_0=-1$ et $u_1=\frac{5}{2}$.

• Si l'inégalité $u_n<u_{n+1}$ est vraie pour un certain élément n de $\mathbb{N}$, l'inégalité $u_{n+1}<u_{n+2}$ est vraie aussi.
En effet, si $u_n<u_{n+1}$,

alors $\frac{1}{2}u_n<\frac{1}{2}u_{n+1}$,

donc $\frac{1}{2}u_n+3<\frac{1}{2}u_{n+1}+3$,

donc $u_{n+1}<u_{n+2}$.

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

Exercice Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{n^2}{2^n}$$

et posons $L=\mathbb{N}-\{0, 1, 2\}$.

a) Démontrer que

$$\forall n\in L \quad n^2>2n+1.$$

b) Utiliser le *a*) pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in L}$ est strictement croissante.

c) Utiliser le *b*) pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Scanned by CamScanner

4 Convergence des suites numériques

a) Distance sur $\mathbb{R}$ (rappel)

Sur une droite munie d'un repère (O, I), considérons le point A d'abscisse a et le point B d'abscisse b (figure 8).

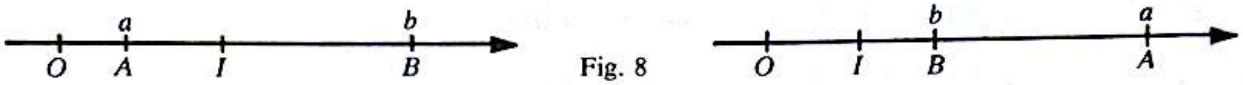


Fig. 8

On sait que la longueur du segment $[AB]$, ou la distance entre les points A et B, est le nombre réel $|a-b|$.
Étant donné deux nombres réels quelconques a et b, il est donc naturel de définir la *distance entre a et b* comme étant le nombre réel positif $|a-b|$.
Cette distance est respectivement égale à 0, $b-a$ ou $a-b$ suivant que $a=b$, $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$.

b) Définitions

Exemple introductif

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Calculons l'arrondi d'ordre 4 de u_n pour quelques valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	...	19	20	...	99	100
u_n	1	2,5	1,666 6	2,25	1,8	2,166 6	...	1,947 3	2,05	...	1,989 8	2,01

Représentons les termes u_1 à u_{10} sur une droite munie d'un repère (O, I) (figure 9) :

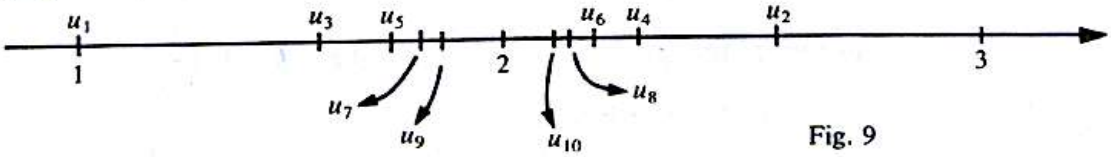


Fig. 9

Il semble que la distance entre les nombres u_n et 2, c'est-à-dire

$$|u_n - 2| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{n},$$

devient aussi petite que l'on veut lorsque n est de plus en plus grand. On a, en effet (arrondis d'ordre 4) :

n	1	2	3	4	5	6	...	19	20	...	99	100
$\lvert u_n - 2\rvert$	1	0,5	0,333 3	0,25	0,2	0,166 6	...	0,052 6	0,05	...	0,010 1	0,01

Scanned by CamScanner

Cependant, on ne peut pas tirer de conclusion après avoir seulement examiné un nombre fini de termes de la suite.

La distance $|u_n - 2|$ devient-elle vraiment aussi petite que l'on veut lorsque l'on donne à n des valeurs de plus en plus grandes?
Est-il vrai que l'on a, par exemple,

$$|u_n - 2| < 0{,}001$$

pour tout n suffisamment grand?

Rappelons que $|u_n - 2| = \frac{1}{n}$ et observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} < 0{,}001 \iff n > 1000.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > 1000 \implies |u_n - 2| < 0{,}001.$$

On vérifie de même que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > 10^6 \implies |u_n - 2| < 10^{-6}.$$

Existe-t-il aussi un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > k \implies |u_n - 2| < 10^{-10^{10}}?$$

Plus généralement, étant donné un élément quelconque ε de $\mathbb{R}_+^*$, existe-t-il un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > k \implies |u_n - 2| < \varepsilon?$$

Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \implies |u_n - 2| < \varepsilon.$$

Le nombre $\frac{1}{\varepsilon}$ n'est pas nécessairement entier, mais il existe un nombre entier k tel que $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ $\left(\text{par exemple : } k = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\right)$.

Pour un tel k, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > k \implies |u_n - 2| < \varepsilon.$$

Comme pour tout nombre réel ε strictement positif (aussi petit soit-il), le choix d'un tel k est possible, on dit que le nombre 2 est la *limite* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ou que cette suite *converge vers* 2.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in L}$ une suite numérique infinie et a un nombre réel.
On dit que a est la *limite* de la suite $(u_n)_{n \in L}$, ou encore que cette suite *converge vers* a, si :
Pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre entier positif k tel que

$$\forall n \in L \quad n > k \implies |u_n - a| < \varepsilon.$$

Scanned by CamScanner

Remarques.

• Intuitivement, dire que a est la limite de la suite $(u_n)_{n\in L}$ signifie que la distance entre u_n et a devient aussi petite que l'on veut lorsque n est de plus en plus grand.

• On démontre et nous admettrons que si une suite possède une limite, elle n'en possède qu'une seule.

Définition

On dit qu'une suite infinie *converge,* ou *est convergente,* s'il existe un nombre réel a tel que cette suite converge vers a.
Si un tel nombre réel n'existe pas, on dit que la suite *diverge* ou est *divergente.*

c) Quelques exemples de suites convergeant vers 0

D'après la définition, une suite numérique infinie $(u_n)_{n\in L}$ converge vers 0 si et seulement si :
Pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre entier positif k tel que

$$\forall n \in L \quad n > k \implies |u_n| < \varepsilon.$$

Exemple 1

Dans l'exemple introductif, nous avons observé que pour tout nombre réel ε strictement positif, il existe un nombre entier positif k tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > k \implies \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Cela signifie que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exemple 2

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leqslant n^p.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, l'inégalité ci-dessus implique que la suite $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers 0 (justifier).

Exemple 3

Montrons que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Soit ε un nombre réel strictement positif.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Scanned by CamScanner

Choisissons un nombre entier k tel que $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n > k \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \varepsilon.$$

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 0.

Exemple 4

Soit la suite $\left(\frac{1}{b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où b est un nombre entier tel que $b \geqslant 2$.

Vérifier par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b^n > n.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{b^n} < \frac{1}{n}.$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, l'inégalité ci-dessus implique que la suite $\left(\frac{1}{b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers 0 (justifier).

Retenons :

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$ et b un élément de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$. Les suites

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent vers 0.

d) **Quelques exemples de suites convergentes et de suites divergentes**

• Soit une suite numérique infinie $(u_n)_{n\in L}$ et un nombre réel a.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition de limite :

> S'il existe une suite $(v_n)_{n\in L}$ convergeant vers 0 telle que
>
> $$\forall n \in L \quad |u_n - a| \leqslant v_n,$$
>
> alors la suite $(u_n)_{n\in L}$ converge vers a.

Plus généralement :

> S'il existe une suite $(v_n)_{n\in L}$ convergeant vers 0, un nombre réel λ et un nombre entier positif n_0 tels que
>
> $$\forall n \in L \quad n > n_0 \implies |u_n - a| \leqslant \lambda v_n,$$
>
> alors la suite $(u_n)_{n\in L}$ converge vers a.

Ces résultats et la connaissance de quelques suites convergeant vers 0 permettent d'étudier la convergence de certaines suites sans recourir explicitement à la définition.

Scanned by CamScanner

Exemple 1

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = 1+\frac{1}{n}.$$

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad |u_n - 1| = \frac{1}{n}.$$

Puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exemple 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}.$$

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad |u_n| = \frac{1}{n+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}.$$

Puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 3

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+1}.$$

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2(n^2+1)-1}{n^2+1} = 2-\frac{1}{n^2+1}$$

$$u_n - 2 = -\frac{1}{n^2+1}$$

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n^2+1}.$$

D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad |u_n - 2| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Exemple 4

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3, \end{cases}$$

converge vers 6, comme le suggère d'ailleurs la figure 5.

Scanned by CamScanner

Calculons d'abord la différence $6-u_n$ pour quelques valeurs de n :

$$6-u_0=7;$$
$$6-u_1=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2};$$
$$6-u_2=6-\frac{17}{4}=\frac{7}{2^2};$$
$$6-u_3=6-\frac{41}{8}=\frac{7}{2^3}.$$

Il semble donc que l'on ait $6-u_n=\frac{7}{2^n}$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Montrer par récurrence sur n que ce résultat est exact.
La suite considérée peut donc être définie par la formule explicite :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=6-\frac{7}{2^n}.$$

D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-6|=\frac{7}{2^n}.$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 6.

• On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

Toute suite convergente est bornée.

Ce résultat implique que toute suite non bornée est divergente (car si elle convergeait, elle serait bornée).

Exemples

Vérifier que chacune des suites ci-dessous n'est pas majorée, donc n'est pas bornée :

$$(n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^3)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Toutes ces suites sont donc divergentes.

Signalons qu'il existe des suites bornées qui sont divergentes.

Exemple

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=(-1)^n$$

est une suite bornée (minorée par -1, majorée par 1).
Nous admettrons qu'elle est divergente.

Exercices

1) Soit a un nombre réel et la suite constante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=a.$$

Montrer que cette suite converge vers a.

Scanned by CamScanner

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = 2+(-1)^n\frac{3}{\sqrt{n}},$$

converge vers 2.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{5n+3}{n},$$

converge vers 5.

4) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = 2n-1,$$
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = n^2-2,$$

sont divergentes.

5 Problèmes concrets

Problème 1

Un pays prête au pays X la somme de dix milliards de francs CFA à des conditions très intéressantes.
Le pays X ne payera aucun intérêt et il remboursera sa dette en cinquante versements effectués à des dates convenues, chaque versement (sauf le premier) étant égal au précédent augmenté d'un million de francs CFA.

a) Désignons par u_n le montant du $n^{\text{ième}}$ versement effectué par le pays X. Définir la suite $(u_n)_{n\in L}$, où $L=\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$, par une formule de récurrence.

b) Exprimer u_n en fonction de u_1 et de n.

c) Soit Σ le montant des 50 versements (c'est-à-dire, la somme prêtée). Montrer que :

$$\Sigma = 50u_1 + (1+2+\ldots+49)\,10^6$$
$$= 50u_1 + 1\,225\times 10^6.$$

d) En déduire le montant du premier versement et, ensuite, le montant des autres versements.

a) Chaque versement (sauf le premier) étant égal au précédent augmenté d'un million de francs CFA, on a :

$$\forall n\in L-\{50\} \quad u_{n+1} = u_n + 10^6.$$

Scanned by CamScanner

b) On a successivement :

$$u_1 = u_1 + 0 \times 10^6,$$
$$u_2 = u_1 + 1 \times 10^6,$$
$$u_3 = u_2 + 10^6 = u_1 + 2 \times 10^6,$$
$$u_4 = u_3 + 10^6 = u_1 + 3 \times 10^6,$$

etc.

Il semble donc que :

$$\forall n \in L \quad u_n = u_1 + (n-1)10^6.$$

Montrons, par récurrence sur n, qu'il en est ainsi.

- L'égalité $u_n = u_1 + (n-1)10^6$ est vraie pour $n = 1$.
- Si l'égalité $u_n = u_1 + (n-1)10^6$ est vraie pour un certain élément n de $L - \{50\}$, l'égalité $u_{n+1} = u_1 + n \times 10^6$ est vraie aussi.

En effet, des égalités

$$u_n = u_1 + (n-1)10^6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 10^6$$

on déduit :

$$u_{n+1} = u_1 + (n-1)10^6 + 10^6$$
$$= u_1 + n \times 10^6.$$

- Il est donc vrai que

$$\forall n \in L \quad u_n = u_1 + (n-1)10^6.$$

On a donc bien exprimé u_n en fonction de u_1 et de n.

c) En additionnant membre à membre les cinquante égalités

$$u_1 = u_1,$$
$$u_2 = u_1 + 10^6,$$
$$u_3 = u_1 + 2 \times 10^6,$$
$$u_4 = u_1 + 3 \times 10^6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{50} = u_1 + 49 \times 10^6,$$

on obtient :

$$\Sigma = u_1 + u_2 + \ldots + 50$$
$$= 50u_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 49)10^6.$$

Pour simplifier le calcul de la somme S des nombres entiers 1 à 49, on additionne membre à membre les égalités

$$S = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \ldots + \boxed{47} + \boxed{48} + \boxed{49},$$
$$S = \boxed{49} + \boxed{48} + \boxed{47} + \ldots + \boxed{3} + \boxed{2} + \boxed{1},$$

et on obtient :

$$2S = (1+49) + (2+48) + (3+47) + \ldots + (47+3) + (48+2) + (49+1)$$
$$= 50 + 50 + 50 + \ldots + 50 + 50 + 50 \quad (49 \text{ fois})$$
$$= 49 \times 50 = 2\,450.$$

Scanned by CamScanner

D'où $S = 1\,225$ et, par conséquent :

$$\Sigma = 50u_1 + 1\,225 \times 10^6.$$

d) De l'égalité ci-dessus, on déduit :

$$u_1 = \frac{\Sigma - 1\,225 \times 10^6}{50}$$
$$= \frac{10^{10} - 1\,225 \times 10^6}{50}$$
$$= 175\,500\,000.$$

Connaissant u_1, on peut à présent calculer chacun des 49 autres versements :

$$u_2 = u_1 + 10^6 = 176\,500\,000,$$
$$u_3 = u_1 + 2 \times 10^6 = 177\,500\,000,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{50} = u_1 + 49 \times 10^6 = 224\,500\,000.$$

Problème 2

Suite à la découverte de pétrole dans une région, on estime qu'en 1990 la production sera de 300 000 tonnes et qu'ensuite, chaque année, la production sera supérieure de 12 % à celle de l'année précédente.

a) Définir par la donnée de u_0 et d'une formule de récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

Si le rythme d'accroissement prévu se maintient jusqu'à l'année $1990 + n$, u_n est égal à la production en pétrole de l'année $1990 + n$.

b) Définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une formule explicite.

c) Quelle est la production de pétrole prévue pour l'année 1995?

d) En admettant que les réserves de pétrole soient suffisantes et que le rythme d'accroissement se maintienne le temps nécessaire, en quelle année peut-on estimer que la production annuelle dépassera 600 000 tonnes? Quelle sera alors la quantité totale de pétrole produite depuis 1990?

a) Si u est la production en pétrole d'une année donnée et si le rythme d'accroissement s'est maintenu, la production v de l'année suivante est

$$v = u + \frac{12}{100}\,u$$
$$= \left(1 + \frac{12}{100}\right) u$$
$$= 1{,}12 \times u.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cherchée peut donc être définie comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 300\,000, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1{,}12 \times u_n. \end{cases}$$

b) On a successivement :

$$u_1 = 1{,}12 \times u_0,$$
$$u_2 = 1{,}12 \times u_1 = (1{,}12)^2 u_0,$$
$$u_3 = 1{,}12 \times u_2 = (1{,}12)^3 u_0,$$

etc.

Scanned by CamScanner

Démontrer, par récurrence sur n, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (1{,}12)^n u_0.$$

(C'est d'ailleurs un cas particulier de l'exemple 3, page 58.)

c) La production de pétrole prévue pour l'année 1995 est donc :

$$\begin{aligned} u_5 &= (1{,}12)^5 u_0 \\ &= 528\,702 \quad \text{(approximativement).} \end{aligned}$$

d) Chercher en quelle année la production annuelle dépassera 600 000 tonnes revient à chercher le plus petit nombre entier n tel que $u_n \geqslant 600\,000$.

Or, on a $u_n \geqslant 600\,000$ si et seulement si $(1{,}12)^n u_0 \geqslant 600\,000$ ou, encore, si et seulement si

$$(1{,}12)^n \geqslant 2.$$

En calculant successivement $(1{,}12)^2$, $(1{,}12)^3$, ..., on constate que le nombre cherché est 7.

C'est donc en 1997 que la production annuelle dépassera 600 000 tonnes.

Pour répondre à la dernière question, il faut calculer la quantité totale T de pétrole produite de 1990 à 1997.

On a :

$$\begin{aligned} T &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_7 \\ &= u_0 + (1{,}12)u_0 + (1{,}12)^2 u_0 + \ldots + (1{,}12)^7 u_0 \\ &= u_0\left[1 + 1{,}12 + (1{,}12)^2 + \ldots + (1{,}12)^7\right]. \end{aligned}$$

Posons : $S = 1 + 1{,}12 + (1{,}12)^2 + \ldots + (1{,}12)^7$.

Pour simplifier le calcul de S, on additionne membre à membre les égalités

$$\begin{aligned} S &= 1 + \boxed{1{,}12} + \boxed{(1{,}12)^2} + \ldots + \boxed{(1{,}12)^6} + \boxed{(1{,}12)^7}, \\ -1{,}12 \times S &= \quad - \boxed{1{,}12} - \boxed{(1{,}12)^2} - \ldots - \boxed{(1{,}12)^6} - \boxed{(1{,}12)^7} - (1{,}12)^8, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$S - 1{,}12 \times S = 1 - (1{,}12)^8$$

ou encore

$$S = \frac{(1{,}12)^8 - 1}{0{,}12} = 12{,}3 \text{ (approximativement).}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} T &= u_0 S \\ &= 3\,690\,000 \text{ tonnes.} \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

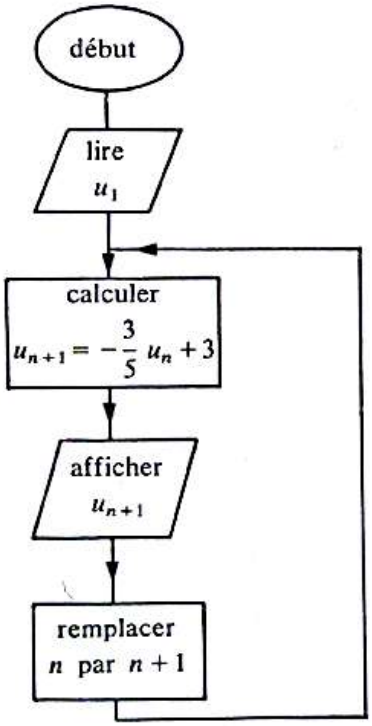
Exercices

1 (1). Les notes de Mathématique du premier semestre de l'année scolaire d'un élève sont indiquées dans le tableau suivant :

12	08	14	11	12	9
13	13	06	14	10	15

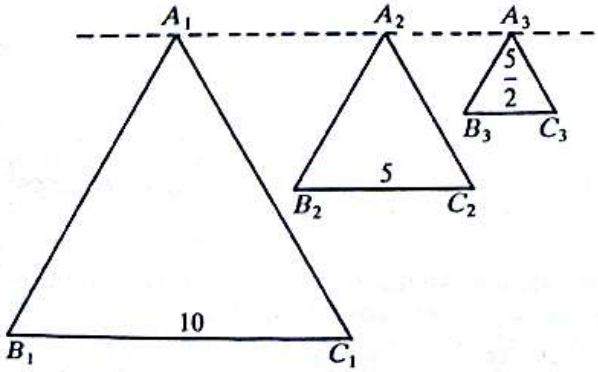
Ces notes définissent-elles une suite? comment?

2 (1). L'organigramme suivant, avec la donnée du terme u_1, définit une suite :



Calculer les 5 premiers termes de cette suite sachant que $u_1 = -1$.

3 (1). Observer le dessin suivant :



Ce sont des triangles équilatéraux. La mesure du côté du triangle $A_1B_1C_1$ est égale à 10, celle de $A_2B_2C_2$ est égale à 5, celle de $A_3B_3C_3$ est égale à $\frac{5}{2}$, et ainsi de suite. Chaque mesure du côté d'un triangle (sauf le premier) est la moitié de celle du triangle qui précède. Les mesures des aires des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... définissent-elles une suite? Comment?

4 (1). Calculer les 5 premiers termes de chacune des suites ci-dessous définies de manière explicite :

1) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n n^2 + 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt{n+1} - 2^n$

3) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \qquad u_n = \dfrac{5n^2 - n + 2}{n(n-1)}$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = |2n - 1| + n^2$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

5 (1). Calculer les 5 premiers termes de chacune des suites ci-dessous définies par une formule de récurrence :

1) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+1} = u_n^2 - 1$

2) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n$

3) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad u_{n+1} = |u_n| - \dfrac{1}{n}$

4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

5) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+2} = 2u_n - 3u_{n+1}$.

6 (1). Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur la droite (OI) les 5 premiers termes, sans les calculer, de chacune des suites ci-dessous, définies par une formule de récurrence :

1) $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

2) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$

Scanned by CamScanner

3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 2. \end{cases}$

7 (2). Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 \times 2 \times \ldots \times n. \end{cases}$$

Pour chaque élément n de $\mathbb{N}$, le nombre u_n ainsi défini est généralement noté $n!$, ce qui se lit *factorielle n*.

a) Calculer 1!, 2!, ..., 10!

b) Démontrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} \quad n! > 2^n.$$

8 (2). Démontrer par récurrence sur n que :

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$

9 (3). Les suites ci-dessous sont-elles positives, négatives? Justifier.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 - n$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 - n^2$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2n - 1$

4) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad u_n = \frac{n}{n+1} - n + 1$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

6) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = u_n + 1$

7) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{u_n}.$

10 (3). Les suites ci-dessous sont-elles majorées, minorées, bornées? Justifier.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n-1)^2 - 2$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n}{n+1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n!$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} n^2$

6) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n$

7) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}.$

11 (3). Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes? Justifier.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^2 - 2n + 5$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-2)^n$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^3 - n^2 + n$

6) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$

7) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n}.$

12 (4). Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n-1}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} \quad n - 1 > \sqrt{n}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

13 (4). Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \sqrt{n-1}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \sqrt{n-1} > \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente.

14 (4). Les suites ci-dessous sont-elles convergentes, divergentes? Justifier.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$

Scanned by CamScanner

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{3^n + 1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1 - n^2}{n^2}$

6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{2}$

7) $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\} \quad u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n - 1}$

8) $\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{3} u_n$

9) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = u_n - 1$

10) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = n + u_n.$

15 (3). Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2}{n!}.$$

Posons $I = \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

a) Démontrer que :

$$\forall n \in I \quad n^2 > n + 1.$$

b) Utiliser le *a*) pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante.

c) Utiliser le *b*) pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

16 (4). Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}.$$

1) Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle :

a) majorée? minorée? bornée?

b) croissante? décroissante?

c) convergente? divergente?

17 (3). Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Déterminer α pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite constante.

18 (3). Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{u_n}. \end{cases}$$

a) Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{4n} = \alpha, \quad u_{4n+2} = -\alpha, \quad u_{4n+1} = \frac{1}{\alpha}, \quad u_{4n+3} = -\frac{1}{\alpha}.$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Problèmes

19 Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & (\alpha \in \mathbb{R}^+) \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

1) Étudier, selon les valeurs de α, le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Supposons que $\alpha = 3$ et posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1.$$

a) Exprimer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ en fonction de u_n. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1}{2}.$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n < 3\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite?

Scanned by CamScanner

20 *Suite de Fibonacci*
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_{n-1} + u_n. \end{cases}$$

a) Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \quad u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n.$$

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad u_n \geqslant n.$$

En déduire que la suite (u_n) est divergente.

21 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{3^n}.$$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

où k est un nombre réel qu'on déterminera. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

a) Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Exprimer $S_n - kS_n$, puis S_n, en fonction de n.

c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{2}$.

22 Soit l'ensemble des figures construites de la manière suivante :
C_0 est un cercle de rayon r
C_1 est un carré inscrit dans C_0
C_2 est le cercle inscrit dans C_1
C_3 est un carré inscrit dans C_2
... et ainsi de suite. On obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ C_n est inscrit dans C_{n-1}

$\forall n \in \mathbb{N}$ C_{2n} est un cercle

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ C_{2n-1} est un carré.

1) Soit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

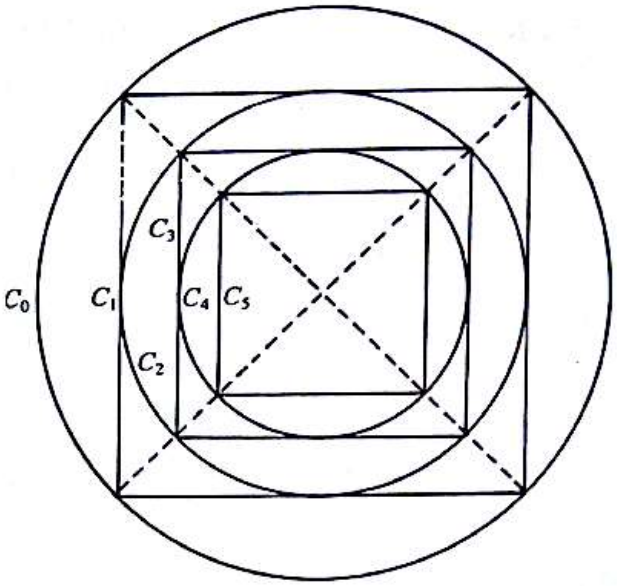
$\forall n \in \mathbb{N}$ p_n est le périmètre du cercle C_{2n}.

a) Calculer p_0, p_1, p_2, p_3, p_4.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = kp_n$$

où k est un nombre réel qu'on déterminera.



c) Exprimer p_n en fonction de r et n.
Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$$

est convergente. Déterminer sa limite.

2) Soit la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ q_n est le périmètre du carré C_{2n-1}.

a) Calculer q_1, q_2, q_3, q_4, q_5.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q_{n+1} = kq_n$$

où k est le nombre réel trouvé plus haut.

c) Exprimer q_n en fonction de r et n.
Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

d) Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

est convergente. Déterminer sa limite.

23 On considère la suite de terme général u_n définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 4u_n = u_{n-1} + 12. \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Pour tout élément n de $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 4$.
Démontrer que la suite de terme général v_n vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n.$$

Calculer v_n en fonction de n. En déduire u_n.

3) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Calculer S_n en fonction de n.

D'après Bac. Série D. 1982 (Côte d'Ivoire).

Scanned by CamScanner

24 Soit la suite f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 5f(m+n) = f(m) \cdot f(n) \quad (1) \\ f(1) = 3. \end{cases}$$

1) Écrire l'égalité (1) lorsque $m = 0$ et $n = 1$.
En déduire la valeur de $f(0)$.
Écrire l'égalité (1) lorsque $m = n = 1$.
En déduire la valeur de $f(2)$. Calculer $f(3)$, puis $f(4)$.

2) Calculer $f(n+1)$ en fonction de $f(n)$.
Montrer que f vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = kf(n)$$

où k est un nombre réel qu'on déterminera.

3) Étudier le sens de variation de f et sa convergence.

D'après Bac. Série A. 1982 (Côte-d'Ivoire).

25 Soit l'application f de $[0, 3]$ dans $[0, 3]$ définie par :

$$\begin{array}{l} \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 3x \\ \forall x \in]1, 2] \quad f(x) = -x + 4 \\ \forall x \in]2, 3] \quad f(x) = -2x + 6. \end{array}$$

1) Tracer la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormé du plan.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$v_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n).$$

a) Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Probatoire D_1. Session de remplacement 1984 (Côte d'Ivoire).

26 Soit (a, b) un couple de nombres réels tels que $0 < a < b$.
On pose :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b_1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$.

En déduire que $0 < u_n \leqslant v_n$.

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \sqrt{u_n v_n}$ et $\frac{u_n + v_n}{2} \leqslant v_n$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - u_n = \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2} + u_{n-1} - \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}}.$$

En déduire que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - u_n \leqslant \frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2}.$$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}$.

En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n - u_n$$

est convergente. Quelle est sa limite?

27 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha & (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

1) A l'aide des représentations graphiques des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = x + \frac{1}{3}$, relativement à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur la droite (OI) les sept premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans les calculer.

2) Montrer que :

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et strictement positive.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha + \frac{1}{3} n$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n}.$$

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) Exprimer v_n en fonction de n et α.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4) Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n^2}.$$

Exprimer w_n en fonction de n et α.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Déterminer sa limite.

Scanned by CamScanner

28 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{-u_n + 3}. \end{cases}$$

1) Calculer les 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Montrer que :

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2 et minorée par 1.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_n - 1}{-u_n + 2}.$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n.$$

b) Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite?

4) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

29 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1. \end{cases}$$

1) A l'aide des représentations graphiques des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 1$, relativement à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur la droite (OI) les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans les calculer.

2) Montrer que :

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 2.$$

a) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.

c) Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie par : $\begin{cases} v_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n. \end{cases}$

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -\frac{3}{2^n}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer sa limite.

30 EFFI place dans une boîte des pièces de 5 F, 10 F, 25 F, 50 F.
On appelle respectivement s_1, s_2, s_3, s_4 les sommes correspondant aux pièces de 5 F, 10 F, 25 F et 50 F; on constate que la différence entre deux sommes consécutives est toujours la même. Il y a 30 pièces de 10 F dans la boîte et la somme totale dans celle-ci est 1 350 F.
Déterminer le nombre de pièces de 5 F, de 25 F et de 50 F.

31 Une ville comptait 1 500 000 habitants au 1er Janvier 1980. On admet que la population s'accroît chaque année de 10 % de la population de l'année précédente. On pose $p_0 = 1\,500\,000$; p_1 est le nombre d'habitants au 1er Janvier 1981; p_n est le nombre d'habitants au 1er Janvier de l'année $1980 + n$, $(n \in \mathbb{N})$.

1) Quel était le nombre d'habitants de cette vile le 1er Janvier 1981? le 1er Janvier 1982? Quel sera son nombre d'habitants le 1er Janvier 1983?

2) Montrer que la suite $p_0, p_1, \ldots, p_n$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = kp_n$$

où k est un nombre réel qu'on déterminera.

3) Quel sera le nombre d'habitants de cette ville le 1er Janvier 1989?

D'après Probatoire G_2G_3 - 1982 (Côte d'Ivoire).

32 Seri a hérité de son père une cacaoyère de dix hectares dans une forêt d'un kilomètre carré.
Seri décide d'étendre sa plantation jusqu'à la mise en valeur de toute la forêt en défrichant deux hectares la première année et, chacune des années suivantes, en défrichant un hectare de plus que l'année précédente.

1) Quelle est la superficie défrichée au cours de la deuxième année, troisième année, ..., $n^{ième}$ année?

2) Quelle est la superficie de la plantation au bout d'une année, de deux années, trois années, ..., n années?

3) En combien d'années, la forêt sera-t-elle entièrement défrichée?

Scanned by CamScanner

33 Un planteur place à la banque, pendant 10 ans, un capital de 100 000 francs à intérêts composés : le capital est augmenté à la fin de chaque année des intérêts qu'il a produits durant celle-ci et c'est ce nouveau capital qui détermine les intérêts de l'année suivante.
Le taux annuel d'intérêt est de 4 %.

1) Donner le capital du planteur au bout d'un an, de deux ans.

2) Soit c_0 le capital initial et c_n le capital au bout de n années. Les capitaux successifs déterminent une suite $(c_n)_{n\in L}$. Préciser l'ensemble L et définir la suite $(c_n)_{n\in L}$ par une formule de récurrence.

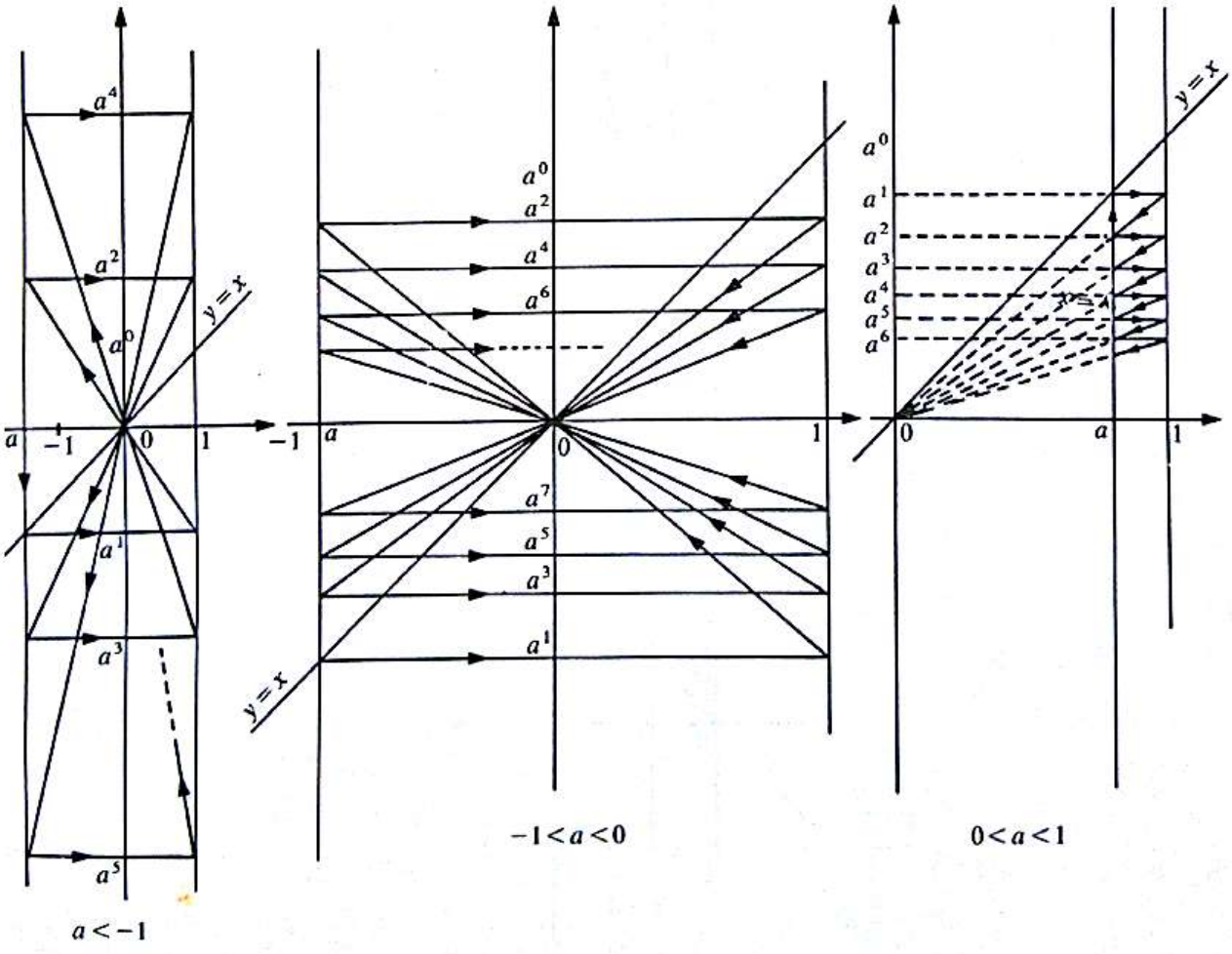
3) Définir la suite $(c_n)_{n\in L}$ par une formule explicite.

4) A la fin de la dixième année, la banque accorde une prime égale à la somme des intérêts produits durant ces 10 ans.
Une autre banque propose au planteur un taux de 8 %, mais n'accorde pas de prime.
Est-il plus avantageux pour le planteur de placer son argent pendant 10 ans à la première banque ou à la seconde?

THÈME D'ÉTUDE N° 1

Étude grahique des suites

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto a^n \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^*.$$



Scanned by CamScanner

En utilisant la méthode de construction point par point de la représentation graphique des fonctions

$$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

on obtient la représentation graphique de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

$$a<-1; \quad -1<a<0; \quad 0<a<1; \quad a>1.$$

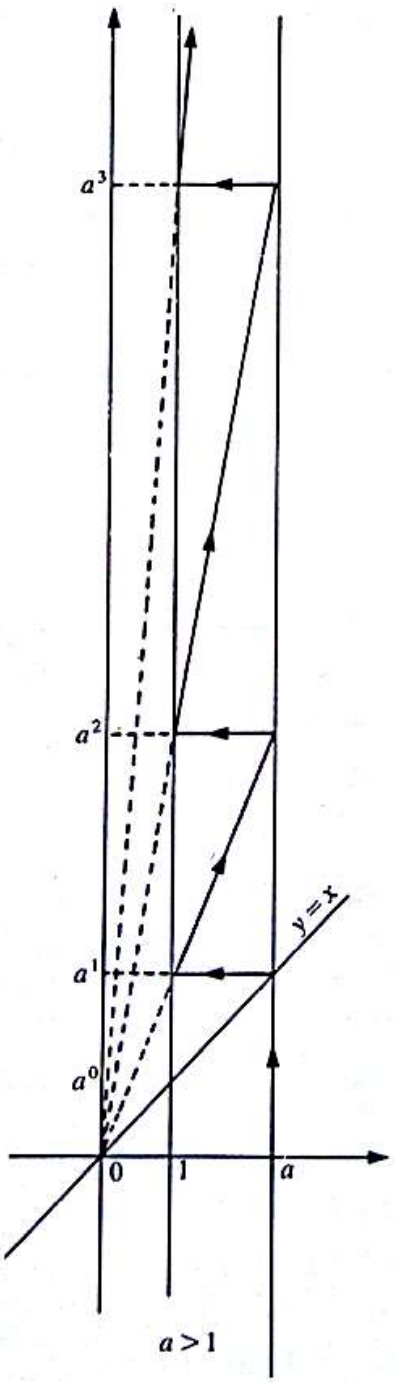
Dans chaque cas :

— dire si la suite est monotone (croissante ou décroissante);

— dire si la suite est majorée, si elle est minorée, si elle est bornée;

— dire si la suite est positive, si elle est négative;

— dire si la suite est convergente ou divergente.



$a>1$

Scanned by CamScanner

Étude graphique des suites

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a^{-n} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

En utilisant la méthode de construction point par point de la représentation graphique des fonctions $x \longmapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$, donner la représentation graphique de la suite $(a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

$$a < -1 ; \quad -1 < a < 0 ; \quad 0 < a < 1 ; \quad a > 1.$$

Étudier graphiquement cette suite.

THÈME D'ÉTUDE N° 2

SUITES ET CALCULATRICES

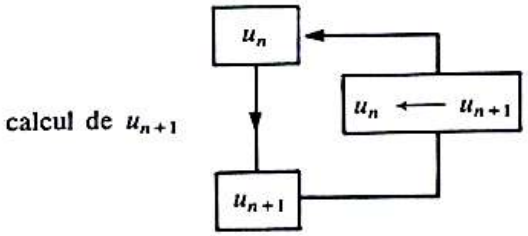
L'étude d'une suite peut conduire au calcul numérique de plusieurs termes. L'emploi d'une calculatrice est alors commode. Il est important dans ce cas d'organiser ce calcul pour avoir, selon la calculatrice dont on dispose, les manipulations les plus simples possibles.

1. Suites définies par une formule de récurrence

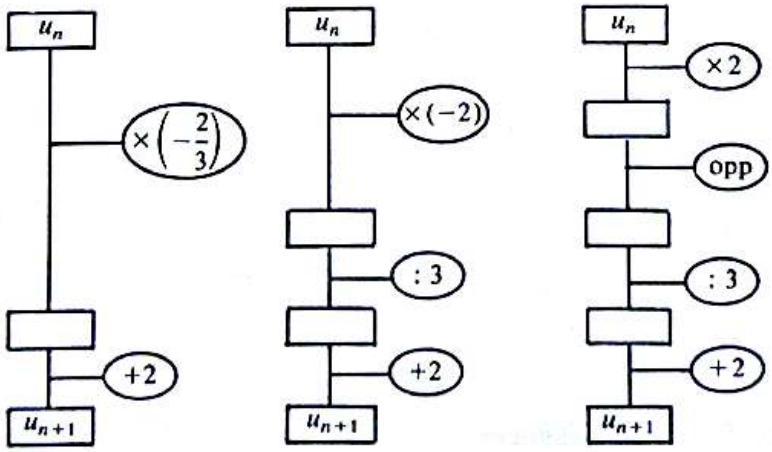
1.1. *Exemple* 1. :
On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -\dfrac{2}{3} u_n + 2. \end{cases}$

Si nous savons calculer un terme en manipulant une certaine séquence de touches, il suffira, après avoir lu le terme cherché, de répéter cette séquence pour obtenir le terme suivant.

Ceci peut se schématiser sur un organigramme par une « boucle ».



Analysons le calcul permettant d'obtenir u_{n+1} en le décomposant de plus en plus finement pour obtenir pratiquement la séquence de touches à manipuler sur la calculatrice.



Scanned by CamScanner

a) Calculatrice simple
Au dernier stade, chaque opérateur correspond à l'emploi d'une seule touche « opératoire » de la calculatrice (+; ×; +/−; −; : ; √...).
Le calcul de u_{n+1} fait intervenir, *après avoir entré* u_n, la séquence de touches suivante :

[×] [2] [+/−] [:] [3] [+] [2] [=]

— Calculer les dix premiers termes de la suite.

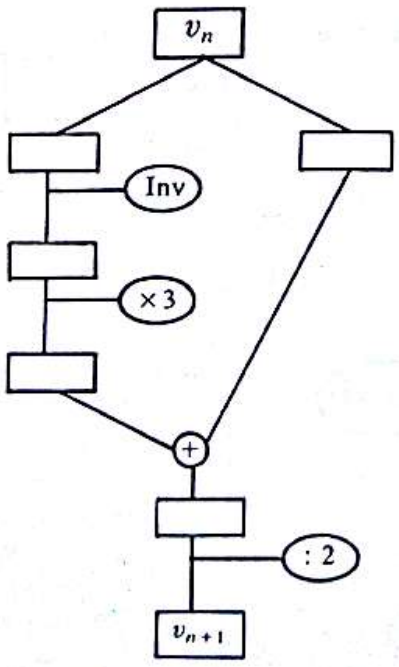
— Quelle remarque peut-on faire?

b) Calculatrice programmable
Sur une telle calculatrice, la séquence de touches à répéter peut s'enregistrer (programme). Il suffit alors de « lancer » la calculatrice en appuyant sur une touche spéciale souvent notée R/S (« Run », « Stop ») car elle permet de faire démarrer le programme ou de l'arrêter.
Chaque instruction se note sur un « pas de programme ». (Les pas sont numérotés 00, 01, 02, ...)
Exemple sur TI 57

PAS	*INSTRUCTION*	*COMMENTAIRES*
00	LBL 00	On reconnaît du pas 01 au pas 08 la séquence de touches précédente.
01	×	
02	2	Le stop du pas 09 arrête la calculatrice et permet de lire le résultat sur l'écran.
03	+/−	
04	:	Le pas 00 est une « étiquette » permettant d'appeler la séquence qui suit.
05	3	
06	+	Le pas 10 donne l'ordre à la calculatrice de retrouver l'étiquette 00 (LBL 00) et d'effectuer le programme qui suit, donc de recommencer.
07	2	
08	=	
09	STOP	
10	GTO 00	

1.2. *Exemple* 2 :
Soit la suite $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right). \end{cases}$

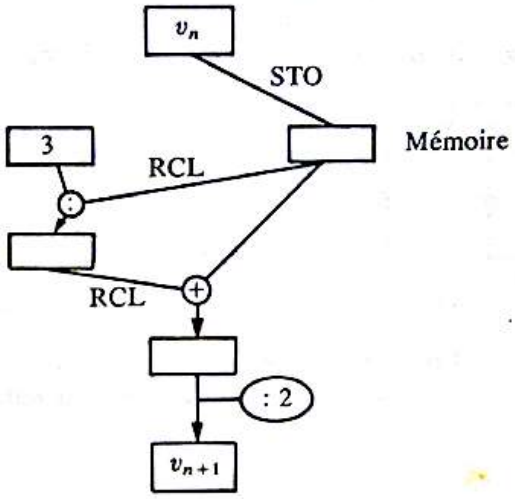
Analysons le calcul de v_{n+1}. Un organigramme pourrait être le suivant :



Le schéma de calcul n'est plus séquentiel.

Scanned by CamScanner

Il y aura deux « entrées » du nombre v_n, d'où la nécessité d'une mémoire. Nous noterons la mise en mémoire STO (de l'anglais « Stock »). La touche correspondante de la calculatrice peut être STO, M, M+.
Il faudra rappeler ce nombre de la mémoire. Nous noterons ce rappel RCL (de l'anglais « Recall »). La touche correspondante peut être RCL, RM.
Le calcul peut se schématiser ainsi :



a) Calculatrice simple :

On pourra avoir la séquence suivante :

STO | 3 | : | RCL | + | RCL | = | : | 2 | =

b) Calculatrice programmable :

Sur une TI 57 le programme pourrait être le suivant :

PAS	*INSTRUCTIONS*	*COMMENTAIRES*
00	LBL 00	Une calculatrice programmable possédant plusieurs mémoires,
01	STO 00	celles-ci sont numérotés.
02	3	Au pas 01, STO 00 signifie « stocker le nombre en
03	:	mémoire 0 ».
04	RCL 00	Au pas 04, RCL 00 signifie « rappeler le nombre de
05	+	la mémoire O ».
06	RCL 00	
07	=	
08	:	
09	2	
10	=	
11	STOP	
12	GTO 00	

c) Activités

— Calculer les premiers termes de la suite en s'arrêtant dès que deux termes ont la même écriture sur le cadran.
— Combien de termes avez-vous calculés?
— Les résultats obtenus donnent l'idée d'une suite convergente. En admettant que cette limite existe, donner une valeur approchée la plus précise possible de la limite de cette suite.
— Les calculs des termes v_3 et v_4 donnent :

$$v_3 = 1{,}75$$

$$v_4 \simeq 1{,}732\,142\,8.$$

De quels chiffres pouvez-vous être sûr pour l'écriture de la limite cherchée?

Scanned by CamScanner

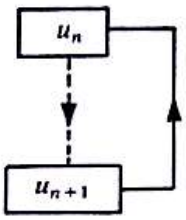
2. Suites définies par une formule explicite

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

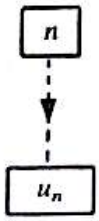
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n-1}{3n+1}.$$

Une première remarque s'impose par comparaison avec les exemples précédents.

Exemples précédents



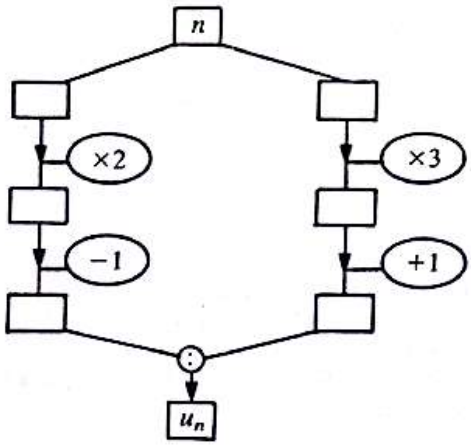
Exemple actuel



Ici, un terme quelconque ne sert plus d'« entrée » pour le calcul du terme suivant comme pour les suites définies par récurrence. Il faudra chaque fois entrer le naturel n pour calculer le terme d'indice n.

a) Calculatrice normale

Un schéma de calcul de u_n peut être le schéma ci-dessous.



La formule de calcul et la double entrée du naturel n nécessite une mémoire :

— soit pour stocker un des termes du quotient (le naturel n étant rentré une seconde fois)

[entrer n] [×] [3] [+] [1] [=] [STO] [entrer n] [×] [2] [−] [1] [=] [:] [RCL] [=]

Peut-on trouver une séquence de touches permettant de calculer en premier le numérateur? Quel est le programme de calcul le plus « intéressant »?

— soit pour stocker l'entier n en utilisant une calculatrice avec parenthésage

[entrer n] [STO] [(] [REC] [×] [2] [−] [1] [)] [:] [(] [RCL] [×] [3] [+] [1] [)] [=]

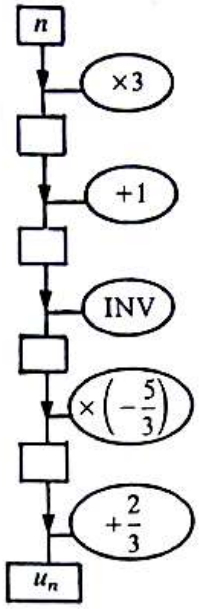
Il est intéressant, lorsque c'est possible de transformer la formule de calcul pour arriver à un schéma séquentiel.

Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{3} - \frac{\frac{5}{3}}{3n+1}.$$

Scanned by CamScanner

D'où le schéma ci-contre



et un calcul ne nécessitant plus de mémoire avec la séquence de touches suivantes

entrer n | × | 3 | + | 1 | = | INV | × | 5 | : | 3 | +/− | + | 2 | : | 3 | =

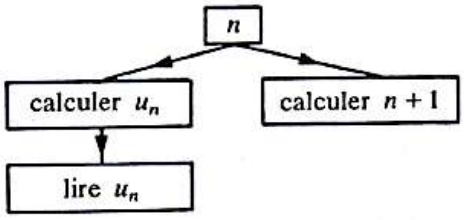
b) Calculatrice programmable

L'entrée nécessaire de n au début de la séquence de calcul complique le programme. Il faut prévoir :

— l'appel de l'indice n,

— le calcul de u_n et la lecture du résultat,

— le calcul de l'indice suivant avant de recommencer, ce calcul se faisant bien sûr à partir de l'ancien indice n.



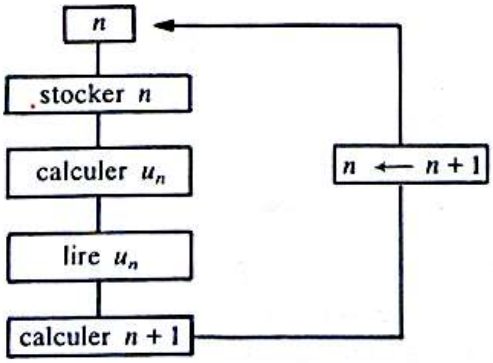
On a bien sûr un ordre obligatoire entre les deux séquences de calcul :

— 1° : calcul de u_n,

— 2e : calcul de $n+1$. Pourquoi?

De plus, ce programme nécessite une mémoire pour stocker n et pouvoir, après le calcul de u_n, rappeler n pour le calcul de $n+1$.

On pourrait schématiser ainsi ce programme :



Scanned by CamScanner

Le programme sur TI 57 sera

PAS	*INSTRUCTIONS*	*COMMENTAIRES*
00	LBL 00	Étiquette permettant de recommencer.
01	STO 00	L'entier n est stocké dans la mémoire 00.
02	×	
03	3	
04	1	
05	=	
06	INV	Du pas 02 au pas 14, on retrouve le calcul de u_n.
07	×	
08	5	
09	+/−	
10	+	
11	2	
12	:	
13	3	
14	=	
15	R/S	L'arrêt au pas 15 permet de lire le résultat.
16	RCL 00	Au pas 16, on rappelle l'ancien indice n.
17	+	Du pas 17 au pas 19, on calcule l'indice suivant $n+1$.
18	1	
19	=	
20	GTO 00	Au pas 20, le renvoi à l'étiquette 00 permet de recommencer.

Ceci permet de calculer les termes l'un après l'autre. L'arrêt au pas 15 donne le temps de recopier les termes. On peut avec une telle calculatrice lire le rang du terme avant de lire le terme lui-même. Ceci pourrait s'obtenir en intercalant entre le pas 01 et le pas 02 (début du calcul de u_n) un arrêt. Cet arrêt devient le pas 02, le reste étant décalé.
Pour ne pas avoir à relancer deux fois la calculatrice, après la lecture du rang puis après celle du terme, on peut utiliser pour lire le rang la touche PAUSE au lieu de la touche R/S. La calculatrice s'arrête un temps assez bref, pour permettre de lire le résultat, puis redémarre sans qu'on ait besoin d'appuyer sur une touche.

c) Activités

— Calculer les premiers termes de la suite en s'arrêtant dès que deux termes ont la même écriture sur le cadran.

— En admettant que cette suite ait une limite, donner une valeur approchée la plus précise possible de cette limite.

Thème d'étude proposé par Claude Mathieu (S.D.E.A.C.P.).

Scanned by CamScanner

3 Fonctions polynômes du second degré Équations et inéquations du second degré

Leçon 1 : VARIATION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION POLYNOME DU SECOND DEGRÉ
Leçon 2 : ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ
Leçon 3 : SIGNE DES VALEURS D'UNE FONCTION POLYNOME DU SECOND DEGRÉ
Leçon 4 : DÉPENDANCE D'UN PARAMÈTRE
Leçon 5 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ
Leçon 6 : QUELQUES PROBLÈMES SE RAMENANT AU SECOND DEGRÉ

Soit la fonction polynôme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Par abus d'écriture, le polynôme associé à cette fonction polynôme sera noté

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ou, simplement, $f(x)$.
Rappelons que si $a_n \neq 0$, le polynôme $f(x)$ est dit de degré n.
Par extension, on dit aussi que f est une *fonction polynôme de degré n*.

1 Variation et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Quelques exemples de fonctions polynômes du second degré ont été présentés en classe de Seconde.
En particulier, la fonction $x \longmapsto x^2$ a été étudiée; elle est représentée graphiquement, figure 1, relativement à un repère orthogonal (O, I, J).
Il a été montré que la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Scanned by CamScanner

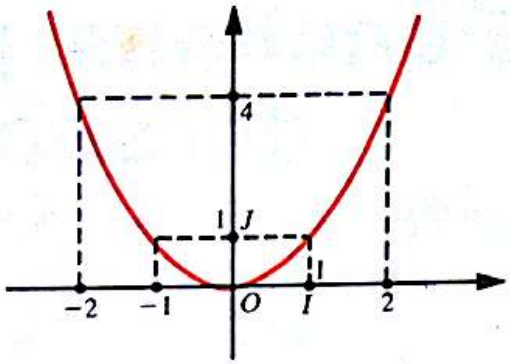


Fig. 1

Elle atteint donc son minimum en 0, où elle prend la valeur 0.
Observons aussi que cette fonction est paire et, par conséquent, la droite (OJ) est un axe de symétrie pour sa représentation graphique.

a) On se propose d'étudier maintenant, dans le cas général, la fonction polynôme du second degré

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Les nombres réels a, b et c sont quelconques, mais a est supposé non nul pour que f soit du second degré.
L'ensemble de définition de f est évidemment $\mathbb{R}$.
Transformons comme suit l'écriture du polynôme $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].}$$

On dit que

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

est la *forme canonique* du polynôme $f(x)$.

En posant

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2},}$$

cette forme canonique s'écrit plus simplement $a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$.
La fonction f vérifie donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right].}$$

Scanned by CamScanner

Pour l'étude de f, on distingue deux cas.

1er cas : $a>0$.

Pour tous les nombres réels u et v tels que $\alpha \leqslant u < v$, on a successivement :

$$0 \leqslant u-\alpha < v-\alpha,$$
$$(u-\alpha)^2 < (v-\alpha)^2, \quad (x \longmapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+)$$
$$(u-\alpha)^2+\beta < (v-\alpha)^2+\beta,$$
$$a\left[(u-\alpha)^2+\beta\right] < a\left[(v-\alpha)^2+\beta\right] \quad (\text{car } a>0),$$
$$f(u) < f(v).$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha, \rightarrow[$.

Pour tous les nombres réels u et v tels que $u < v \leqslant \alpha$, il vient successivement :

$$u-\alpha < v-\alpha \leqslant 0,$$
$$(v-\alpha)^2 < (u-\alpha)^2, \quad (x \longmapsto x^2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-)$$
$$(v-\alpha)^2+\beta < (u-\alpha)^2+\beta,$$
$$a\left[(v-\alpha)^2+\beta\right] < a\left[(u-\alpha)^2+\beta\right] \quad (\text{car } a>0),$$
$$f(v) < f(u).$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]\leftarrow, \alpha]$.

Pour $a>0$, on obtient donc le tableau de variation suivant.

$a>0$

x	$\longleftarrow$	α	$\longrightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	$a\beta$	$\nwarrow\ \nearrow$

Ce tableau montre que $f(\alpha)$, égal à $a\beta$, est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

2e cas : $a<0$.

Comme ci-dessus, on vérifie (faites-le) que pour $a<0$, le tableau de variation de f est

$a<0$

x	$\longleftarrow$	α	$\longrightarrow$
$f(x)$	$\nearrow$	$a\beta$	$\searrow$

Ce tableau montre que $f(\alpha)$, égal à $a\beta$, est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

Définitions

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction polynôme du second degré

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a \neq 0)$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

est une courbe appelée *parabole.*

On dit aussi que $(\mathcal{C}_f)$ est la *parabole d'équation* $y = ax^2 + bx + c$, relativement au repère (O, I, J).

Si le repère est orthogonal, le point S du plan de coordonnées $(\alpha, a\beta)$, correspondant au minimum $(a > 0)$ ou au maximum $(a < 0)$ de f, est appelé le *sommet* de la parabole $(\mathcal{C}_f)$.

Observons que si le repère est orthogonal, la droite d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie pour la parabole $(\mathcal{C}_f)$.
En effet, d'après le chapitre 1 (page 26), il faut vérifier que la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x + \alpha)$$

est paire.

Or, cela est vrai puisque pour tout nombre réel x, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x + \alpha) \\ &= a\left[(x + \alpha - \alpha)^2 + \beta\right] \\ &= a(x^2 + \beta) \end{aligned}$$

et donc aussi

$$\begin{aligned} g(-x) &= a\left[(-x)^2 + \beta\right] \\ &= a(x^2 + \beta) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Exemple

Représentons graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 4x + 3$$

dans le plan muni d'un repère orthonormé.

La forme canonique du polynôme $f(x)$ est $(x-2)^2 - 1$.
Le tableau de variation de f est donc

x	$\longleftarrow$	2	$\longrightarrow$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Le point S de coordonnées $(2, -1)$ est le sommet de la parabole $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Scanned by CamScanner

Calculons $f(x)$ pour quelques valeurs de x :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

On peut à présent tracer la parabole $(\mathcal{C}_f)$: voir figure 2.

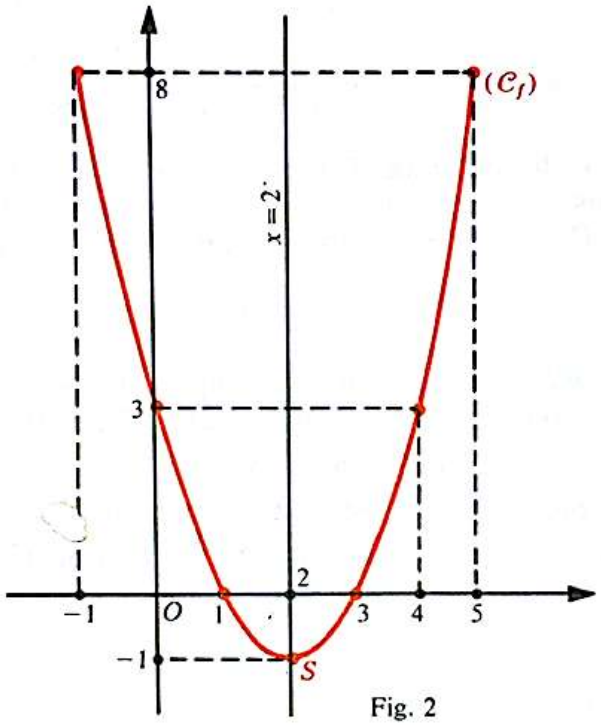


Fig. 2

Exercices

Soit les fonctions polynômes du second degré f_1, f_2, f_3 et f_4 définies respectivement par

$$f_1(x)=x^2+3x-4, \qquad f_2(x)=-x^2-2x+3,$$
$$f_3(x)=x^2+x+1, \qquad f_4(x)=-4x^2+4x-1.$$

Pour chacune de ces fonctions :

a) Écrire le polynôme associé sous forme canonique;

b) Donner le tableau de variation;

c) Construire relativement à un repère orthonormé (O, I, J) la parabole représentant la fonction et donner les coordonnées du sommet;

d) Calculer les abscisses des points d'intersection éventuels de la parabole représentative avec la droite (O, I).

b) **Propriété**

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), la parabole (P) d'équation $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$, est l'image par une translation de la parabole (P') d'équation $y=ax^2$.

Scanned by CamScanner

Considérons, en effet, les fonctions polynômes f et g définies par

$$f(x)=ax^2 \quad \text{et} \quad g(x)=ax^2+bx+c.$$

Posant

$$\alpha=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta=-\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

on sait que

$$\begin{aligned} g(x)&=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right] \\ &=a(x-\alpha)^2+a\beta. \end{aligned}$$

D'où : $$g(x)=f(x-\alpha)+a\beta.$$

Un résultat du chapitre 1 (fonction $x \longrightarrow f(x-a)+b$, page 30) permet de conclure que la parabole (P), représentation graphique de g, est l'image de la parabole (P'), représentation graphique de f, par la translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{OI}+a\beta\overrightarrow{OJ}$.

Exemple

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la parabole (P) d'équation $y=2x^2-12x+19$.

On a : $2x^2-12x+19=2(x-3)^2+1$.

La parabole (P) est donc l'image de la parabole (P') d'équation $y=2x^2$ par la translation de vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$ (figure 3).

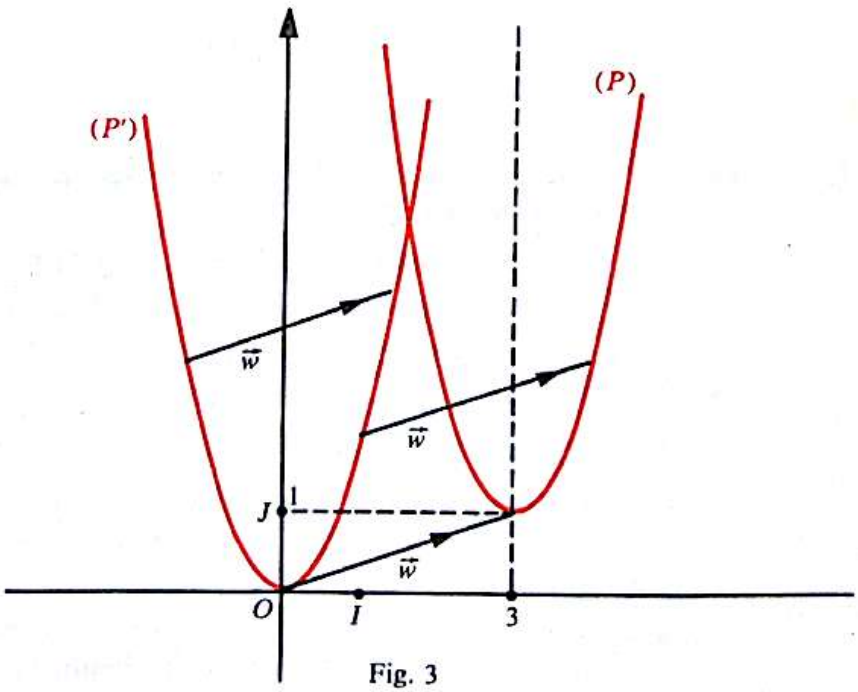


Fig. 3

Comme toutes les paraboles d'équation

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

peuvent s'obtenir par une translation à partir des paraboles d'équation du type $y=ax^2$ $(a\neq 0)$, quelques paraboles de ce type sont dessinées à la figure 4.

Scanned by CamScanner

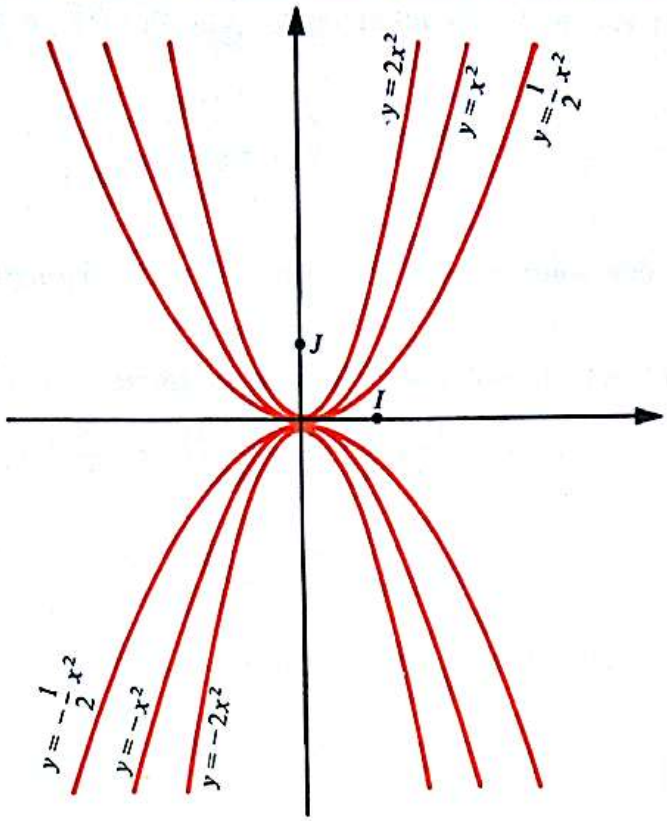


Fig. 4

2 Équations du second degré

1) Recherche des solutions d'une équation du second degré

Soit a, b, c des nombres réels, a étant non nul.
Considérons l'équation, dite du *second degré :*

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

On peut lui associer la fonction polynôme

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$

Les solutions de (E) sont les zéros de f.

Écrivons $f(x)$ sous forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Posons :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

Scanned by CamScanner

On dit que Δ est le *discriminant* de l'équation (E) ou de la fonction f.
On a :

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Pour l'étude des solutions de l'équation (E), on distingue trois cas.

1er cas : $\Delta>0$.

Comme $\Delta=(\sqrt{\Delta})^2$, le polynôme $f(x)$ se factorise sous la forme

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right],$$

ou encore

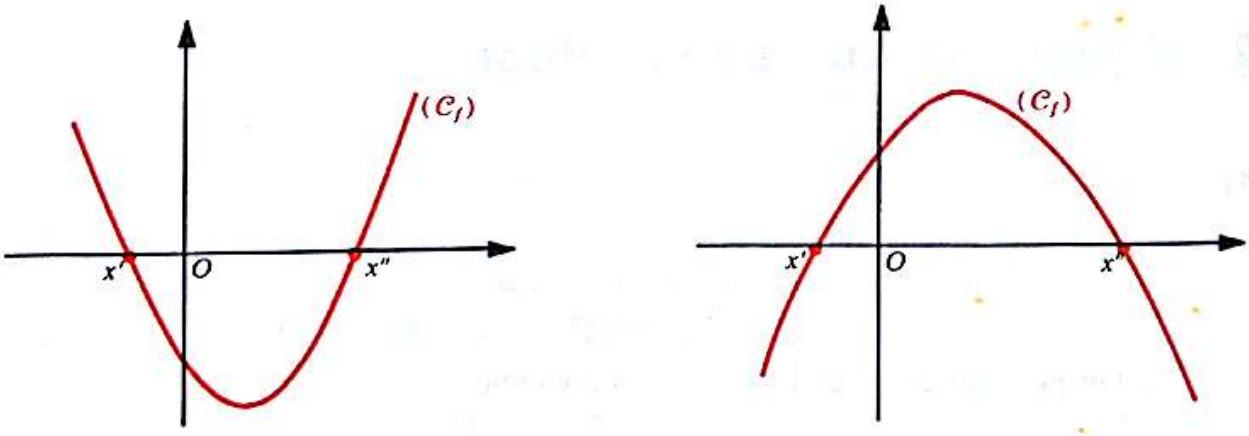
$$f(x)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

L'équation (E) admet donc deux solutions différentes x' et x'' :

$$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$ (voir figures 5)

Sous forme factorisée, $f(x)$ peut encore s'écrire :

$$f(x)=a(x-x')(x-x'').$$



$a>0$ et $\Delta>0$ Fig. 5 $a<0$ et $\Delta>0$

2e cas : $\Delta=0$.

Cette fois, on a : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

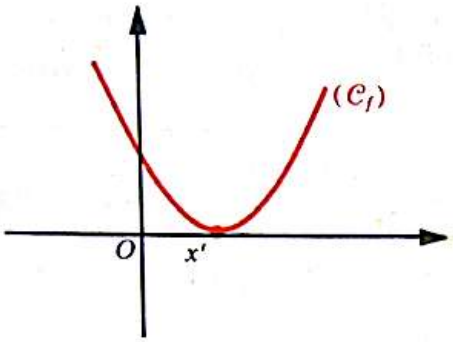
L'équation (E) possède donc une seule solution x' :

$$x'=-\frac{b}{2a}$$ (voir figures 6),

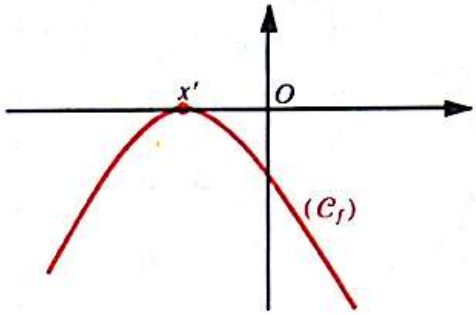
Scanned by CamScanner

et le polynôme $f(x)$ se factorise comme suit :

$$f(x) = a(x - x')^2.$$



$a > 0$ et $\Delta = 0$



$a < 0$ et $\Delta = 0$

Fig. 6

Observons que si l'on remplace Δ par zéro dans les égalités

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

du 1er cas, on obtient :

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

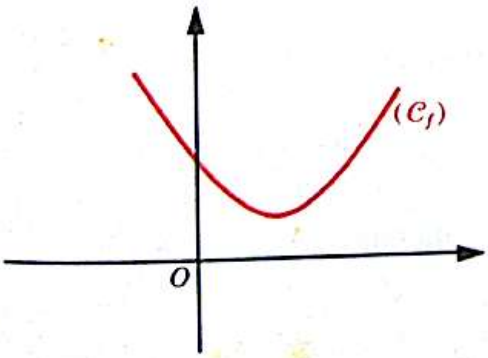
C'est pourquoi, lorsque $\Delta = 0$, on dit souvent que l'équation (E) admet deux solutions égales (ou confondues).

3e cas : $\Delta < 0$.

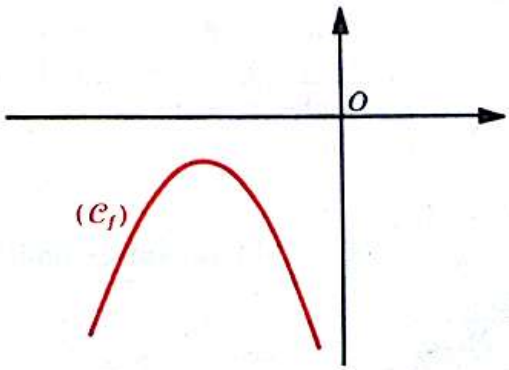
L'équation (E) s'écrit :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le premier membre de l'équation est positif quel que soit le nombre réel x, tandis que le second membre est strictement négatif.
L'équation (E) n'a donc aucune solution (voir figures 7) et, par conséquent, le polynôme $f(x)$ ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes du premier degré.



$a > 0$ et $\Delta < 0$



$a < 0$ et $\Delta < 0$

Fig. 7

Scanned by CamScanner

Résumé

Équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$.
Fonction polynôme f : $x \longmapsto ax^2+bx+c$.
Discriminant : $\Delta = b^2-4ac$.

Discriminant	*Solutions de (E) ou zéros de f*	*Forme factorisée de $f(x)$*
$\Delta > 0$	$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x-x')(x-x'')$
$\Delta = 0$	$x' = -\dfrac{b}{2a}$	$f(x) = a(x-x')^2$
$\Delta < 0$	pas de solution	

Exercices Utiliser la méthode du discriminant, c'est-à-dire le tableau ci-dessus, pour calculer les solutions des équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $-x^2+2x+3=0$; *b*) $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $x^2+3x+4=0$; *d*) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2-3x+1=0$.

Dans chaque cas factoriser, si possible, le polynôme $f(x)$ correspondant.

La méthode du discriminant permet de résoudre n'importe quelle équation du second degré. Il y a cependant des « cas évidents » où il n'est pas raisonnable d'utiliser cette méthode.

Exercices Résoudre les équations suivantes sans utiliser la méthode du discriminant :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^2-9=0$; *b*) $x \in \mathbb{R}$, $x^2+3=0$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)^2-4=0$; *d*) $x \in \mathbb{R}$, $3x^2+5x=0$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$.

2) Somme, produit et signe des solutions d'une équation du second degré

On considère à nouveau l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0).$$

Soit Δ son discriminant.

Si $\Delta \geqslant 0$, on sait que l'équation (E) possède deux solutions x' et x'' (distinctes ou égales suivant que $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$) :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

En additionnant et multipliant membre à membre, on obtient :

$$\boxed{x'+x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}.}$$

Scanned by CamScanner

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 1

Si l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
possède deux solutions (distinctes ou non), la somme S et le produit P de ces solutions vérifient

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}.$$

Exemple

Considérons l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

et supposons que $a + b + c = 0$.
On vérifie que 1 est une solution de cette équation.
La seconde solution, évidemment égale au produit des solutions, est donc $\frac{c}{a}$.
En particulier, l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$
admet les solutions 1 et $\frac{1}{2}$.

Exercices Vérifier à l'aide du discriminant si les équations suivantes possèdent des solutions et, lorsque c'est le cas, trouver la somme et le produit de ces solutions en utilisant le théorème 1.

a) $x \in \mathbb{R}, \quad 5x^2 - 9x + 4 = 0$; *b*) $x \in \mathbb{R}, \quad -2x^2 + 17x + 5 = 0$;

c) $x \in \mathbb{R}, \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$; *d*) $x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Théorème 2

Soit l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
et posons $S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$.
(Attention : S et P ne sont la somme et le produit des solutions que si ces solutions existent.)
Alors :

a) Si $P < 0$, l'équation possède deux solutions de signes contraires;

b) Si $P = 0$, l'équation admet 0 et S pour solutions;

c) Si $P > 0$ et $\Delta \geqslant 0$, l'équation possède deux solutions, distinctes ou non, de même signe que S.

Démonstration

a) Si $P < 0$, les nombres a et c sont de signes contraires et leur produit ac est strictement négatif.
Mais alors Δ est la somme du nombre positif b^2 et du nombre strictement positif $-4ac$.

Scanned by CamScanner

D'où Δ est strictement positif et l'équation possède deux solutions différentes. Ces deux solutions sont de signes contraires car leur produit P est strictement négatif.

b) Si $P=0$, alors $c=0$ et l'équation se réduit à

$$x\in\mathbb{R}, \quad ax^2+bx=0.$$

Le nombre 0 est donc solution et, par conséquent, l'autre solution est égale à la somme S des solutions.

c) Si $\Delta\geqslant 0$, l'équation possède des solutions et si le produit P de ces solutions est strictement positif, elles sont de mêmes signes, à savoir celui de leur somme S.

Exercices Utiliser le théorème 2 pour déterminer le signe des solutions, si elles existent, de chacune des équations suivantes :

a) $x\in\mathbb{R}, \quad 2x^2-3x-\sqrt{7}=0$; *b*) $x\in\mathbb{R}, \quad 3x^2-7x=0$;

c) $x\in\mathbb{R}, \quad x^2+5\sqrt{2}x+3=0$; *d*) $x\in\mathbb{R}, \quad x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

3) Recherche de deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit

Exemple introductif

On cherche la longueur L et la largeur l d'un rectangle dont le périmètre vaut 36 m et dont la surface mesure 45 m^2.
On cherche donc des nombres réels L et l tels que

$$L+l=18 \quad \text{et} \quad L\,l=45.$$

Si de tels nombres L et l existent, ils sont les solutions de l'équation

$$x\in\mathbb{R}, \quad (x-L)(x-l)=0$$

qui peut s'écrire

$$x\in\mathbb{R}, \quad x^2-(L+l)x+L\,l=0$$

ou encore

$$x\in\mathbb{R}, \quad x^2-18x+45=0.$$

Vérifier que cette équation admet les solutions 3 et 15.
La somme et le produit des nombres 3 et 15 étant respectivement égaux à 18 et 45, on conclut que $L=15$ m et $l=3$ m.

Plus généralement, étant donnés des nombres réels S et P, on cherche deux nombres réels x_1 et x_2 tels que

$$x_1+x_2=S \quad \text{et} \quad x_1x_2=P.$$

Si de tels nombres x_1 et x_2 existent, ils sont les solutions de l'équation

$$x\in\mathbb{R}, \quad (x-x_1)(x-x_2)=0$$

qui peut s'écrire

$$x\in\mathbb{R}, \quad x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

ou encore

$$x\in\mathbb{R}, \quad x^2-Sx+P=0.$$

• Supposons que le discriminant Δ de cette équation du second degré ($\Delta=S^2-4P$) soit positif.

Scanned by CamScanner

Alors l'équation possède deux solutions, distinctes ou non.
D'après le théorème 1, on sait que la somme et le produit des solutions de cette équation sont respectivement égaux à S et P.
Les nombres x_1 et x_2 cherchés existent donc et sont les solutions de l'équation ci-dessus.

• Si Δ est strictement négatif, l'équation ci-dessus n'a pas de solution.
Dans ce cas, il n'existe pas de nombres réels x_1 et x_2 de somme S et de produit P.
On a donc établi le résultat suivant :

Théorème 3

Étant donnés des nombres réels S et P, il existe deux nombres réels x_1 et x_2 de somme S et de produit P si et seulement si $S^2 - 4P \geqslant 0$.
Lorsque c'est le cas, les nombres x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - Sx + P = 0.$$

Remarques

• Si S est donné, l'ensemble des nombres réels P pour lesquels il existe des nombres réels x_1 et x_2 de somme S et de produit P est l'ensemble des nombres réels P tels que $P \leqslant \frac{S^2}{4}$.

Le plus grand nombre P possible est donc égal à $\frac{S^2}{4}$.

Dans ce cas, $\Delta = 0$ et $x_1 = x_2 = \frac{S}{2}$.

• De même si P est un nombre positif donné, l'ensemble des nombres positifs S pour lesquels il existe des nombres x_1 et x_2 de somme S et de produit P est l'ensemble des nombres positifs S tels que $S^2 \geqslant 4P$, ou encore tels que $S \geqslant 2\sqrt{P}$.
Le plus petit nombre positif S possible est donc égal à $2\sqrt{P}$.
Dans ce cas, $\Delta = 0$ et $x_1 = x_2 = \sqrt{P}$.

Exemple 1

On cherche les dimensions d'un rectangle dont le périmètre vaut 48 cm et dont l'aire est la plus grande possible.
On cherche donc deux nombres L et l de somme égale à 24 et dont le produit est le plus grand possible.

D'après ce qui précède, on sait qu'il faut prendre $L = l = \frac{24}{2}$. Il s'agit donc d'un carré de 12 cm de côté.

Exemple 2

On cherche les dimensions d'un rectangle dont l'aire mesure 36 cm² et dont le périmètre est le plus petit possible.
On cherche donc deux nombres L et l de produit égal à 36 et dont la somme est la plus petite possible.
D'après ce qui précède, on sait qu'il faut prendre $L = l = \sqrt{36}$. Il s'agit donc d'un carré de 6 cm de côté.

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Trouver deux nombres réels dont la somme est -5 et dont le produit est -14.

2) La somme des âges de Koffi et Claude est égale à 24. Si Koffi avait 5 ans de plus et Claude 3 ans de moins, Koffi serait plus âgé que Claude et le produit de leurs âges serait égal à 168. Quels sont les âges de Koffi et Claude?

3 Signe des valeurs d'une fonction polynôme du second degré

a) Soit a, b, et c des nombres réels, a étant non nul.

Considérons la fonction polynôme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2+bx+c. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de f : $\Delta = b^2-4ac$.

On veut étudier le signe du nombre $f(x)$ suivant les valeurs de x.

1er cas : $\Delta > 0$.

La fonction polynôme f possède deux zéros distincts x' et x'', et $f(x)$ se factorise comme suit :

$$f(x) = a(x-x')(x-x'').$$

En convenant que x' désigne le plus petit des deux zéros, on obtient le tableau suivant :

x	$\leftarrow$	x'		x''	$\rightarrow$
$x-x'$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-x''$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-x')(x-x'')$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Conclusion :
$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, x'[\cup]x'', \rightarrow[& f(x) \text{ a le signe de } a; \\ \forall x \in]x', x''[& f(x) \text{ a le signe de } -a; \\ f(x') = f(x'') = 0. \end{cases}$$

Ce résultat est illustré par les figures 5.

2e cas : $\Delta = 0$.

La fonction polynôme f a un seul zéro x', et $f(x)$ se factorise comme suit :

$$f(x) = a(x-x')^2.$$

Scanned by CamScanner

Conclusion :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{x'\} & f(x) \text{ a le signe de } a; \\ f(x') = 0. \end{cases}$$

Ce résultat est illustré par les figures 6.

3e cas : $\Delta < 0$.

On écrit $f(x)$ sous forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Puisque Δ est strictement négatif, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif quel que soit le nombre réel x.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ a le signe de a.

Ce résultat est illustré par les figures 7.

Résumé

Soit la fonction polynôme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

Quel que soit le nombre réel x, le nombre $f(x)$ a toujours le signe de a, sauf si x est un zéro de f, auquel cas $f(x) = 0$, ou si x est strictement compris entre les zéros éventuels de f, auquel cas $f(x)$ a le signe de $-a$.

Exemples

Étudions le signe des valeurs des fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 et f_4, définies respectivement par :

$$f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1, \qquad f_2(x) = x^2 - 2x + 2,$$
$$f_3(x) = x^2 - 2x + 1, \qquad f_4(x) = -x^2 + x - 5.$$

- La fonction f_1 possède deux zéros, $\frac{1}{2}$ et 1, et le coefficient de x^2 est 2. D'où :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]\leftarrow, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, \rightarrow\right[& 2x^2 - 3x + 1 > 0; \\ \forall x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[& 2x^2 - 3x + 1 < 0; \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0. \end{cases}$$

Remarque. L'ensemble des solutions de l'inéquation

$$x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$$

est donc : $\left]\leftarrow, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \rightarrow[$.

- La fonction f_2 n'a aucun zéro et le coefficient de x^2 est 1. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 2x + 2 > 0.$$

Scanned by CamScanner

- On remarque que $f_3(x)=(x-1)^2$ et, par conséquent :
$$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\} \qquad x^2-2x+1>0;$$
$$f_3(1)=0.$$
- La fonction f_4 n'a aucun zéro et le coefficient de x^2 est -1. D'où :
$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad -x^2+x-5<0.$$

Exercices Résoudre les inéquations suivantes, dites du second degré :

a) $x\in\mathbb{R}$, $2x^2+5x-3\leqslant 0$;

b) $x\in\mathbb{R}$, $x^2-2x+4\geqslant 0$;

c) $x\in\mathbb{R}$, $4x^2-4x+1>0$;

d) $x\in\mathbb{R}$, $x^2-4x-5<0$.

Dans chaque cas, on fera une vérification graphique.

b) Le théorème suivant permet de situer un nombre réel donné par rapport aux zéros d'une fonction polynôme du second degré.
Comme précédemment, lorsqu'une telle fonction possède deux zéros (distincts ou non), x' et x'', on convient que $x'\leqslant x''$.

Théorème 4

Soit la fonction polynôme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$
et soit α un nombre réel.

a) Si $af(\alpha)<0$, alors f possède deux zéros x' et x'' tels que
$$x'<\alpha<x''.$$

b) Supposons que $af(\alpha)>0$ et que f possède deux zéros x' et x'' (distincts ou non). Alors :
$$\alpha<-\frac{b}{2a} \implies \alpha<x'\leqslant x'';$$
$$\alpha>-\frac{b}{2a} \implies x'\leqslant x''<\alpha.$$

Démonstration

a) Supposons que $af(\alpha)<0$; $f(\alpha)$ a donc le signe de $-a$.
D'après notre étude du signe des valeurs d'une fonction polynôme du second degré, il en résulte que f possède deux zéros x' et x'' tels que
$$x'<\alpha<x''.$$

b) Supposons que $af(\alpha)>0$; $f(\alpha)$ a donc le signe de a.
Supposons aussi que f possède des zéros x' et x'' (distincts ou non).
D'après notre étude du signe des valeurs d'une fonction polynôme du second degré, on a :
$$\alpha<x'\leqslant x'' \quad \boxed{\text{ou}} \quad x'\leqslant x''<\alpha.$$

D'autre part, on a
$$x'\leqslant\frac{x'+x''}{2}\leqslant x'',$$

Scanned by CamScanner

et on sait que $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$ (théorème 1).

Si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, alors $\alpha < \frac{x'+x''}{2} \leqslant x''$; d'où : $\alpha < x' \leqslant x''$.

Si $\alpha > -\frac{b}{2a}$, alors $\alpha > \frac{x'+x''}{2} \geqslant x'$; d'où : $x' \leqslant x'' < \alpha$.

Exemples

Situons le nombre -3 par rapport aux zéros éventuels (sans les calculer) des fonctions polynômes f et g définies par

$$f(x) = 6x^2 + 23x - 18, \quad g(x) = 3x^2 - 20x + 12.$$

Comme $f(-3) = -33$, on a $6f(-3) < 0$ et f a deux zéros x' et x'' tels que $x' < -3 < x''$.

Les coefficients a, b et c valent respectivement 3, -20 et 12 dans le cas de g.

On a $g(-3) = 99$ et $3g(-3) > 0$.

Le discriminant de g étant égal à 256, la fonction g a deux zéros x' et x''.

D'autre part, $-\frac{b}{2a} = \frac{10}{3}$ et $-3 < \frac{10}{3}$.

D'où : $-3 < x' < x''$.

Exercices

Situer les nombres -4, 0 et 3 par rapport aux zéros éventuels (sans les calculer) des fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 et f_4, définies respectivement par

$$f_1(x) = 2x^2 - x - 10, \quad f_2(x) = x^2 + 21x + 108,$$
$$f_3(x) = 2x^2 - 23x + 65, \quad f_4(x) = x^2 - (3\sqrt{5} - 4)x - 12\sqrt{5}.$$

4 Dépendance d'un paramètre

Exemple 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On considère l'ensemble des fonctions polynômes du second degré dont la parabole représentative admet le point O pour sommet.

Pour déterminer la forme générale de ces fonctions, on remarque d'abord que pour n'importe quelle fonction polynôme du second degré f, il existe des nombres réels a, α et β, a étant non nul, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right].$$

Les coordonnées du sommet de la parabole représentant f sont $(\alpha, a\beta)$.

Le point O est donc le sommet de cette parabole si et seulement si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

La forme générale des fonctions considérées est donc

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax^2$$

Scanned by CamScanner

où a est un nombre réel non nul arbitraire (quelques-unes de ces fonctions sont représentées à la figure 4).
Le nombre réel a qui permet de décrire toutes les fonctions considérées est appelé *paramètre.*
On dit aussi que la fonction f_a *dépend du paramètre a.*

Exemple 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit (P) la parabole représentant la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$.

On veut déterminer la forme générale des fonctions dont la représentation graphique est l'image de (P) par une translation correspondant au vecteur nul ou à un vecteur directeur de la droite (Δ) d'équation $y = 2x$.
Soit $\vec{u}$ le vecteur nul ou un vecteur directeur de (Δ).
Il existe un nombre réel m tel que $\vec{u} = m\overrightarrow{OI} + 2m\overrightarrow{OJ}$.
D'après le chapitre 1 (page 30), on sait que l'image de (P) par la translation de vecteur $\vec{u}$ est la représentation graphique de la fonction

$$x \longmapsto f(x-m)+2m, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad x \longmapsto (x-m)^2+2m.$$

La forme générale des fonctions considérées est donc

$$f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x-m)^2+2m$$

où m est un nombre réel arbitraire (voir figure 8).
Comme dans l'exemple précédent, on dit que la fonction f_m *dépend du paramètre m.*

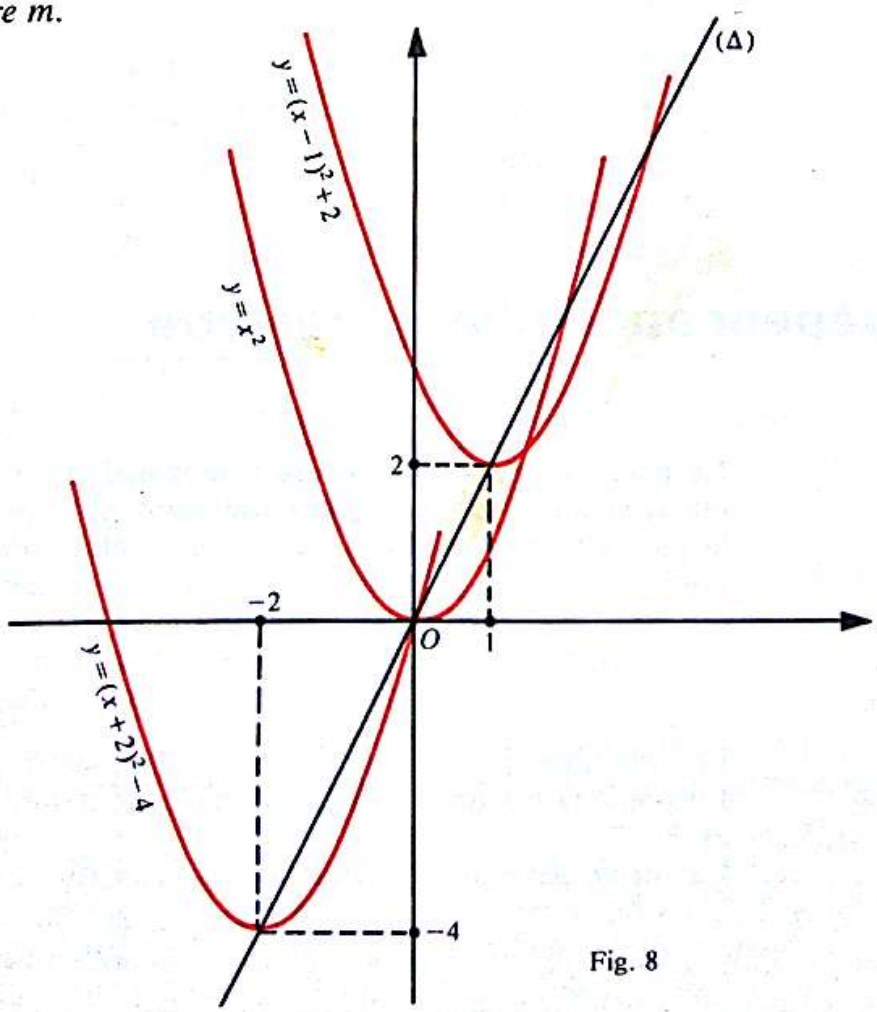


Fig. 8

Scanned by CamScanner

Remarques

• On peut aussi considérer des équations, des inéquations, des systèmes de contraintes, etc., qui dépendent d'un paramètre (voir chapitre 4).

• L'ensemble des fonctions polynômes du second degré, c'est-à-dire des fonctions de forme générale

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2+bx+c \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

est un ensemble de fonctions décrites au moyen de trois paramètres : a, b et c.

Exercice résolu

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les fonctions polynômes f_m et g_m définies par

$$f_m(x)=x^2-2mx+m^2+2m, \quad g_m(x)=mx^2,$$

et dépendant du paramètre m, ce dernier désignant un nombre réel quelconque.
Pour tout nombre réel m, on pose : $h_m=f_m+g_m$.

a) Calculer $h_m(x)$.

b) Reconnaître les fonctions f_0, g_0 et h_{-1}, c'est-à-dire les fonctions f_m et g_m pour $m=0$ et la fonction h_m pour $m=-1$.

c) Construire la représentation graphique de h_{-2}.

d) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de points d'intersection de la représentation graphique $(\mathcal{C}_m)$ de h_m avec la droite (OI).

e) Situer le point O par rapport aux points d'intersection ci-dessus.

a) On a :

$$\begin{aligned} h_m(x) &= f_m(x)+g_m(x) \\ &= (x^2-2mx+m^2+2m)+mx^2 \\ &= (m+1)x^2-2mx+m^2+2m. \end{aligned}$$

b) Pour tout nombre réel x, on a :

$$f_0(x)=x^2, \quad g_0(x)=0, \quad h_{-1}(x)=2x-1.$$

g_0 est donc la fonction constante 0 et h_{-1} est une fonction affine.

c) La fonction h_{-2} vérifie $h_{-2}(x)=-x^2+4x$ pour tout nombre réel x.
Sa représentation graphique est donnée à la figure 9.

d) Le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C}_m)$ avec (OI) est le nombre de solutions de l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (m+1)^2-2mx+m^2+2m=0.$$

Cette équation dépend du paramètre m.
C'est une équation du second degré, sauf pour $m=-1$, auquel cas l'équation se réduit à

$$x \in \mathbb{R}, \quad 2x-1=0$$

et admet $\frac{1}{2}$ pour unique solution.

Scanned by CamScanner

L'intersection de $(\mathcal{C}_{-1})$, (la droite d'équation $y=2x-1$), et de (OI) est formée du seul point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0\right)$ (figure 10).

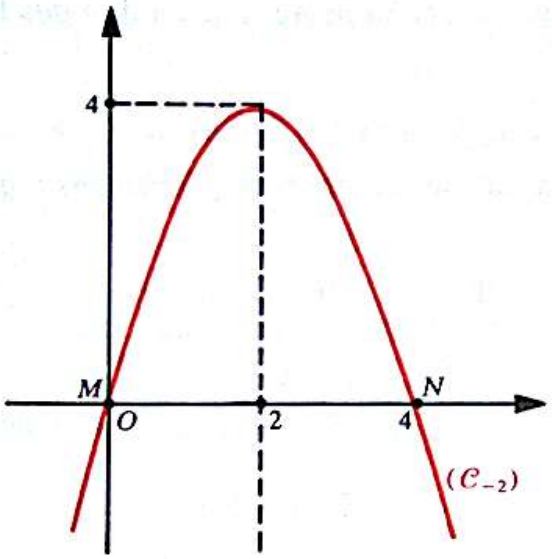


Fig. 9

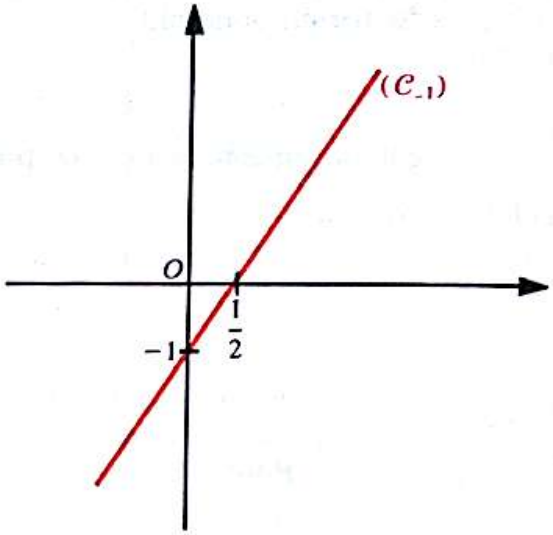


Fig. 10

Supposons à présent $\boxed{m \neq -1.}$

Calculons le discriminant Δ de l'équation (E) :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2m)^2 - 4(m+1)(m^2+2m)\\ &= 4m^2 - 4(m+1)m(m+2)\\ &= 4m\left[m-(m+1)(m+2)\right]\\ &= -4m(m^2+2m+2).\end{aligned}$$

Pour étudier le signe de Δ suivant les valeurs de m, il faut d'abord étudier celui de m^2+2m+2.
Or, le discriminant de la fonction polynôme du second degré

$$m \longmapsto m^2+2m+2$$

étant égal à -4, il résulte de l'étude du signe des valeurs d'une telle fonction que

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad m^2+2m+2>0.$$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

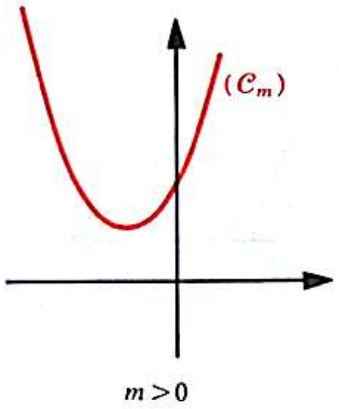
m	$\leftarrow$	-1		0	$\rightarrow$
$-4m$	+	+	+	0	−
m^2+2m+2	+	+	+	+	+
Δ	+	▨	+	0	−

Scanned by CamScanner

Par conséquent, pour $m \neq -1$, on a :

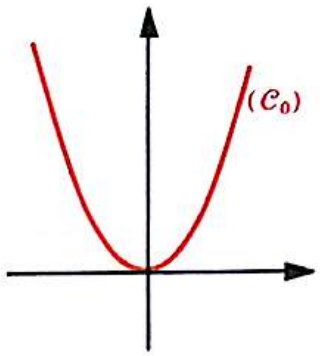
— Si $m > 0$, alors $\Delta < 0$ et l'équation (E) n'a aucune solution; l'intersection de la parabole $(\mathcal{C}_m)$ et de (OI) est l'ensemble vide (figure 11).

— Si $m = 0$, alors $\Delta = 0$ et l'équation (E) a une seule solution égale à 0; l'intersection de la parabole $(\mathcal{C}_0)$ et de (OI) est formée du seul point O (figure 12).



$m > 0$

Fig. 11



$m = 0$

Fig. 12

— Si $m < 0$, alors $\Delta > 0$ et l'équation (E) possède deux solutions distinctes x' et x'' (dépendant de m); l'intersection de la parabole $(\mathcal{C}_m)$ et de (OI) est formée du point M de coordonnées $(x', 0)$ et du point N de coordonnées $(x'', 0)$.

L'étude de la position du point O par rapport aux points M et N est faite ci-dessous.

e) Supposons $x' < x''$ (cas où $m < 0$ et $m \neq -1$).
Étudier la position du point O par rapport aux points M et N revient à situer le nombre 0 par rapport à x' et x''.
Pour ce faire, on a le choix entre les théorèmes 2 et 4.
Utilisons, par exemple, le théorème 2.
Il faut étudier le signe des nombres P et S tels que

$$P = \frac{m(m+2)}{m+1}, \qquad S = \frac{2m}{m+1}.$$

Les tableaux suivants donnent les signes de P et S suivant les valeurs de m.

m	$\leftarrow$	-2		-1		0	$\rightarrow$
m	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$m+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$-$	0	$+$	▨	$-$	0	$+$

m	$\leftarrow$	-1		0	$\rightarrow$
$2m$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
S	$+$	▨	$-$	0	$+$

On combine le théorème 2 et ces tableaux et on obtient :

— Si $m < -2$, alors $P < 0$ et, par conséquent, $x' < 0 < x''$.

Scanned by CamScanner

Comme $S>0$ et $S=x'+x''$, on a $x''>-x'$, ce qui signifie que x' est plus proche de 0 que x''.

D'où : $O\in[MN]$ et $OM<ON$ (figure 13).

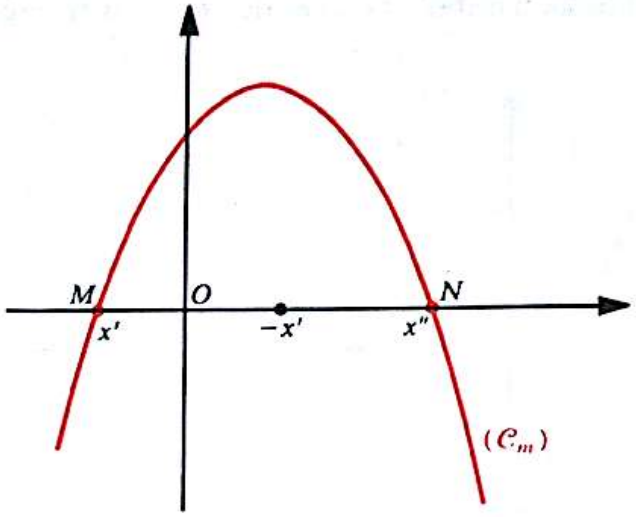


Fig. 13

$m<-2$

$(OM<ON)$

— Si $m=-2$, alors $P=0$ et $S=4$, ce qui implique que $x'=0$ et $x''=4$.

D'où : $M=O$ et $\overline{ON}=4$ (figure 9).

— Si $-2<m<-1$, alors $P>0$ et $S>0$, ce qui implique $0<x'<x''$.

D'où : $M\in[ON]$ (figure 14).

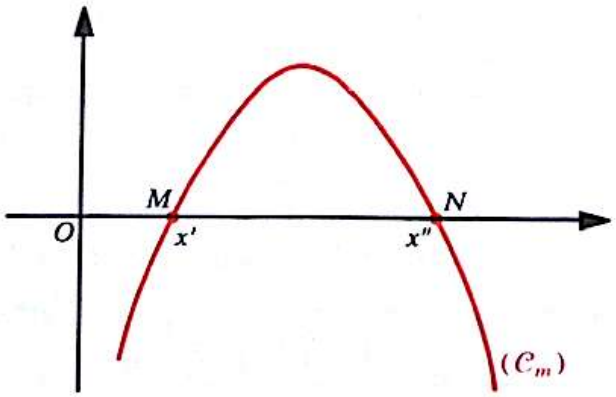


Fig. 14

$-2<m<-1$

— Si $-1<m<0$, alors $P<0$ et, par conséquent, $x'<0<x''$.

Comme $S<0$ et $S=x'+x''$, on a $x''<-x'$, ce qui signifie que x'' est plus proche de 0 que x'.

D'où : $O\in[MN]$ et $ON<OM$ (figure 15).

Tous ces résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Dans ce tableau, x' et x'' $(x'\leqslant x'')$ sont les solutions, distinctes ou non, de l'équation

Scanned by CamScanner

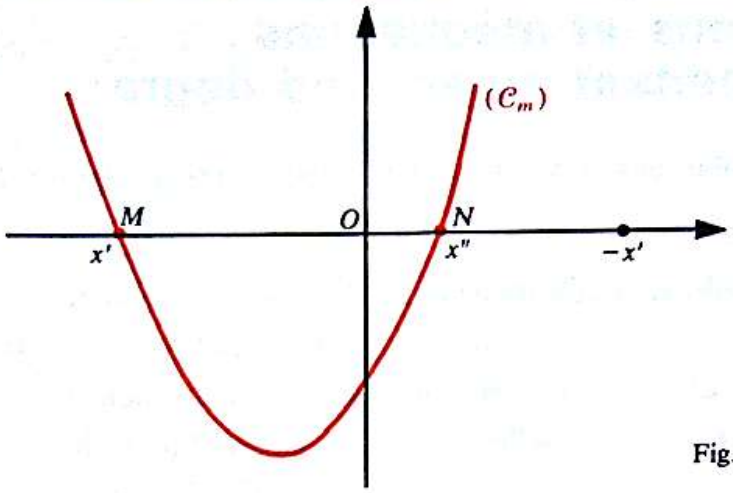


Fig. 15

$-1<m<0$
$(ON<OM)$

(E) pour $m \neq -1$, et M,N sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_m)$ avec (OI), M étant d'abscisse x' et N d'abscisse x''.

m	Δ	S	P	signe de x' et x''	position de M et N par rapport à O
$\uparrow$					
	$-$	$+$	$+$	pas de solution	pas de point d'intersection
0	0	0	0	$x'=x''=0$	$M=N=O$
	$+$	$-$	$-$	$x'<0<x''<-x'$	$O\in[MN]$, $ON<OM$
-1				solution : $1/2$	point d'intersection : d'abscisse $1/2$
	$+$	$+$	$+$	$0<x'<x''$	$M\in[ON]$
-2	16	0	4	$x'=0$, $x''=4$	$M=O$, $\overline{ON}=4$
	$+$	$-$	$+$	$x'<0<-x'<x''$	$O\in[MN]$, $OM<ON$
$\downarrow$					

Exercices

1) Soit l'équation

$$(E) \quad x\in\mathbb{R}, \quad x^2-2mx+2m^2-m-2=0$$

dépendant du paramètre m.
Déterminer le nombre de solutions de cette équation suivant les valeurs de m et indiquer le signe de ces solutions lorsqu'elles existent.

2) Représenter graphiquement la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^2+3x \end{aligned}$$

relativement à un repère orthonormé.
En s'aidant de cette représentation graphique, déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation

$$x\in[1;3], \quad -x^2+3x-m=0.$$

Scanned by CamScanner

5 Équations et inéquations se ramenant au second degré

L'ensemble des solutions d'une équation ou inéquation (E) est noté $S(E)$.

1) Équations bicarrées

On appelle *équation bicarrée* toute équation de la forme

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels, a étant non nul.

Pour résoudre une telle équation, on introduit la fonction polynôme f telle que

$$f(y) = ay^2 + by + c$$

ainsi que l'équation auxiliaire

$$(E') \quad y \in \mathbb{R}, \quad ay^2 + by + c = 0.$$

On dit que l'équation (E') est la *résolvante* de l'équation bicarrée (E).

Pour tout nombre réel x, on a

$$ax^4 + bx^2 + c = f(x^2)$$

et, par conséquent, l'équation (E) peut s'écrire

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x^2) = 0.$$

D'où : $$S(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in S(E')\}.$$

Au lieu de continuer la discussion dans le cas général, on va envisager les différents cas possibles au moyen de quelques exemples.

Exemple 1

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0.$$

La résolvante s'écrit :

$$(E') \quad y \in \mathbb{R}, \quad 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Comme $S(E') = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, on a :

$$S(E) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -1\right\}.$$

Remarque. $f(y) = 2y^2 - 3y + 1$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 1).$$

Le polynôme $2x^4 - 3x^2 + 1$ se factorise donc comme suit :

$$2x^4 - 3x^2 + 1 = f(x^2)$$

$$= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$$

$$= 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x - 1)(x + 1).$$

Scanned by CamScanner

Exemple 2

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^2 - 15 = 0.$$

La résolvante s'écrit :

$$(E') \quad y \in \mathbb{R}, \quad y^2 + 2y - 15 = 0.$$

Comme $S(E') = \{-5, 3\}$, on a :

$$\begin{aligned} S(E) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -5 \text{ ou } x^2 = 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\} \\ &= \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Remarque. $f(y) = y^2 + 2y - 15$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) = (y + 5)(y - 3).$$

Le polynôme $x^4 + 2x^2 - 15$ se factorise donc comme suit :

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - 15 &= f(x^2) \\ &= (x^2 + 5)(x^2 - 3) \\ &= (x^2 + 5)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Exemple 3

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0.$$

La résolvante s'écrit :

$$(E') \quad y \in \mathbb{R}, \quad y^2 + 3y + 2 = 0.$$

Comme $S(E') = \{-1, -2\}$, on a $S(E) = \varnothing$.

Remarque. $f(y) = y^2 + 3y + 2$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) = (y + 1)(y + 2).$$

Le polynôme $x^4 + 3x^2 + 2$ se factorise donc comme suit :

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 2 &= f(x^2) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Exemple 4

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$$

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 \\ &= (x - 1)^2 (x + 1)^2. \end{aligned}$$

D'où : $S(E) = \{-1, 1\}$.

Exemple 5

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 0.$$

On a immédiatement :

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2.$$

D'où : $S(E) = \varnothing$.

Scanned by CamScanner

Exemple 6

Résolvons l'équation bicarrée

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

La résolvante s'écrit :

$$(E') \quad y \in \mathbb{R}, \quad y^2 + y + 1 = 0.$$

On a $S(E') = \varnothing$ et, par conséquent, $S(E) = \varnothing$.

Remarque. $f(y) = y^2 + y + 1$ ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes du premier degré.

Le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ peut néanmoins se factoriser comme suit :

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= [(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + x] \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Exercices Résoudre les équations suivantes et factoriser le polynôme figurant au premier membre de l'équation.

a) $x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 3x^2 - 28 = 0$;

b) $x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;

c) $x \in \mathbb{R}, \quad 4x^4 + 20x^2 + 21 = 0$.

2) Équations irrationnelles simples

Il s'agit d'équations du type

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{f(x)} = g(x)$$

où f et g sont des fonctions polynômes de degré 0, 1 ou 2.

On rappelle l'équivalence :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad a = b \iff a^2 = b^2.$$

Exemple 1

Résolvons l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3 - x} = x - 1.$$

L'ensemble de validité de (E) est $]\leftarrow, 3]$.

Toute solution de (E) vérifie $\sqrt{3 - x} = x - 1$, donc aussi $x - 1 \geqslant 0$ et, par conséquent, appartient à $[1, \rightarrow[$.

Toute solution de (E) appartient donc à $]\leftarrow, 3] \cap [1, \rightarrow[$, c'est-à-dire à $[1, 3]$.

Cela montre que l'équation (E) a les mêmes solutions que l'équation

$$x \in [1, 3], \quad \sqrt{3 - x} = x - 1.$$

Compte tenu du rappel ci-dessus, cette dernière équation est équivalente à chacune des équations suivantes :

$$\begin{aligned} x \in [1, 3], \quad & 3 - x = (x - 1)^2 \\ & 3 - x = x^2 - 2x + 1 \\ & x^2 - x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Les solutions de l'équation : $x\in\mathbb{R},\quad x^2-x-2=0$ sont -1 et 2.
Comme $-1\notin[1, 3]$ et $2\in[1, 3]$, on conclut que $S(E)=\{2\}$.

Exemple 2

Résolvons l'équation

$$(E)\quad x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{25-x^2}=-x-7.$$

L'ensemble de validité de (E) est formé des nombres réels x tels que $25-x^2\geqslant 0$; il est donc égal à $[-5, 5]$ (justifier).
Toute solution de (E) vérifie $-x-7\geqslant 0$ et appartient donc à $]\leftarrow, -7]$.
Comme $[-5, 5]\cap]\leftarrow, -7]=\varnothing$, on conclut que $S(E)=\varnothing$.

Exercices Résoudre les équations suivantes :

a) $x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{2x-3}=x+4$;
b) $x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{-2x^2+3x+5}=x$;
c) $x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{2x^2+5x+9}=x-3$;
d) $x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{3-x^2}=x^2-1$.

3) Inéquations irrationnelles simples

Il s'agit d'inéquations de l'un des types

$$x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{f(x)}\leqslant g(x)\quad (\text{ou } \sqrt{f(x)}<g(x))$$
$$x\in\mathbb{R},\quad g(x)\leqslant\sqrt{f(x)}\quad (\text{ou } g(x)<\sqrt{f(x)})$$

où f et g sont des fonctions polynômes de degré 0, 1 ou 2.
On rappelle que la fonction $x\longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que, par conséquent :

$$\forall a\in\mathbb{R}_+\quad \forall b\in\mathbb{R}_+\qquad a\leqslant b\iff a^2\leqslant b^2$$
$$a<b\iff a^2<b^2.$$

Exemple 1

Résolvons l'inéquation

$$(I)\quad x\in\mathbb{R},\quad \sqrt{3-x}\leqslant x-1.$$

L'ensemble de validité de (I) est $]\leftarrow, 3]$.
Toute solution de (I) vérifie $\sqrt{3-x}\leqslant x-1$, donc aussi $x-1\geqslant 0$ et, par conséquent, appartient à $[1, \rightarrow[$.
Toute solution de (I) appartient donc à $[1, 3]$.
Cela montre que l'inéquation (I) a les mêmes solutions que l'inéquation

$$x\in[1, 3],\quad \sqrt{3-x}\leqslant x-1.$$

Compte tenu du rappel ci-dessus, cette dernière inéquation est équivalente à chacune des inéquations suivantes :

$$x\in[1, 3],\quad 3-x\leqslant(x-1)^2$$
$$3-x\leqslant x^2-2x+1$$
$$x^2-x-2\leqslant 0.$$

Scanned by CamScanner

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 2 \leqslant 0$ est $]\leftarrow, -1] \cup [2, \rightarrow[$ (justifier).

D'où (voir figure 16) :

$$S(I) = (]\leftarrow, -1] \cup [2, \rightarrow[) \cap [1, 3]$$
$$= [2, 3].$$



Fig. 16

Exemple 2

Résolvons l'inéquation

$$(I) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2 + 2x} < x + 1.$$

L'ensemble de validité de (I) est l'ensemble des nombres réels x tels que $x^2 + 2x \geqslant 0$; il est donc égal à $]\leftarrow, -2] \cup [0, \rightarrow[$ (justifier).

Toute solution de (I) vérifie $x + 1 > 0$ et, par conséquent, appartient à $]-1, \rightarrow[$.

Toute solution de (I) appartient donc à l'intersection de $]\leftarrow, -2] \cup [0, \rightarrow[$ et $]-1, \rightarrow[$, c'est-à-dire à $[0, \rightarrow[$ (figure 17).

Cela montre que l'inéquation (I) a les mêmes solutions que l'inéquation

$$x \in [0, \rightarrow[, \quad \sqrt{x^2 + 2x} < x + 1.$$

Cette dernière inéquation est équivalente à chacune des inéquations suivantes :

$$x \in [0, \rightarrow[, \quad x^2 + 2x < (x + 1)^2$$
$$x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1$$
$$0x < 1.$$

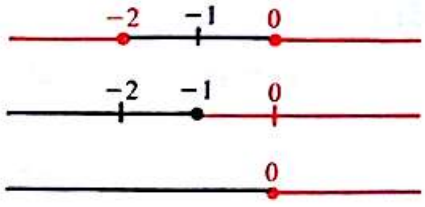


Fig. 17

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in [0, \rightarrow[, \quad 0x < 1$ est $[0, \rightarrow[$.

D'où : $S(I) = [0, \rightarrow[$.

Exemple 3

Résolvons l'inéquation

$$(I) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x + 1} \geqslant x - 5.$$

L'ensemble de validité A de (I) est $[-1, \rightarrow[$.

Tout élément x de A tel que $x - 5 < 0$ est évidemment solution de (I).

Comme $A \cap]\leftarrow, 5[= [-1, 5[$ (figure 18), tous les éléments de $[-1, 5[$ sont *des* solutions de (I).

Comme $A \cap [5, \rightarrow[= [5, \rightarrow[$ (figure 19), les *autres* solutions de (I) sont les solutions de l'inéquation

$$(I') \quad x \in [5, \rightarrow[, \quad \sqrt{x + 1} \geqslant x - 5.$$

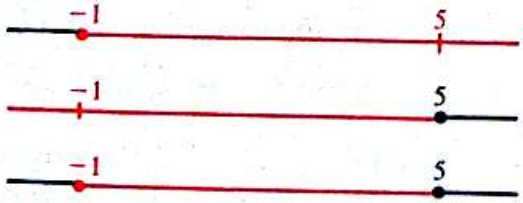


Fig. 18

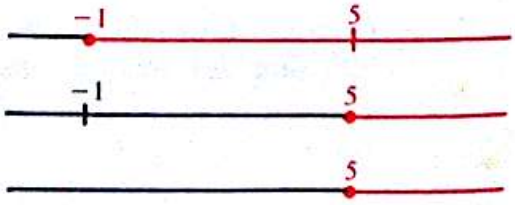


Fig. 19

Scanned by CamScanner

L'inéquation (I') est équivalente à chacune des inéquations suivantes :

$$x \in [5, \to[, \quad x+1 \geqslant (x-5)^2$$
$$x+1 \geqslant x^2-10x+25$$
$$x^2-11x+24 \leqslant 0.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $x^2-11x+24 \leqslant 0$ est $[3, 8]$ (justifier).

D'où (voir figure 20) :

$$S(I') = [5, \to[\cap [3, 8]$$
$$= [5, 8].$$

Finalement : $S(I) = [-1, 5[\cup [5, 8]$
$= [-1, 8].$

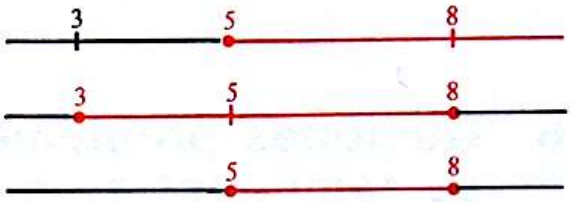


Fig. 20

Exemple 4

Résolvons l'inéquation

(I) $\qquad x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2-8x+4} > x-2.$

L'ensemble de validité A de (I) est formé des nombres réels x tels que $x^2-8x+4 \geqslant 0$; d'où

$$A =]\leftarrow, 4-2\sqrt{3}] \cup [4+2\sqrt{3}, \to[\quad \text{(justifier)}.$$

Tout élément x de A tel que $x-2<0$ est évidemment solution de (I).

Comme $4-2\sqrt{3}<2<4+2\sqrt{3}$, on a $A \cap]\leftarrow, 2[=]\leftarrow, 4-2\sqrt{3}]$ (figure 21).

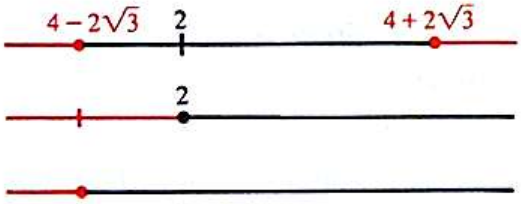


Fig. 21

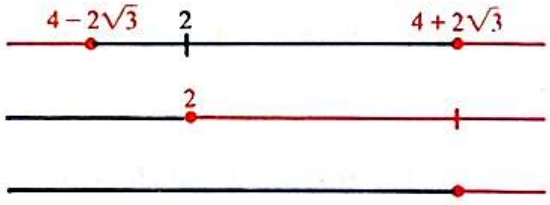


Fig. 22

Par conséquent, tous les éléments de $]\leftarrow, 4-2\sqrt{3}]$ sont *des* solutions de (I).

Comme $A \cap [2, \to[= [4+2\sqrt{3}, \to[$ (figure 22), les *autres* solutions de (I) sont les solutions de l'inéquation

$$(I') \quad x \in [4+2\sqrt{3}, \to[, \quad \sqrt{x^2-8x+4} > x-2.$$

L'inéquation (I') est équivalente à chacune des inéquations suivantes :

$$x \in [4+2\sqrt{3}, \to[, \quad x^2-8x+4 > (x-2)^2$$
$$x^2-8x+4 > x^2-4x+4$$
$$4x < 0$$
$$x < 0.$$

D'où : $\qquad S(I') = \varnothing.$

Finalement :
$$S(I) =]\leftarrow, 4-2\sqrt{3}] \cup S(I')$$
$$=]\leftarrow, 4-2\sqrt{3}].$$

Scanned by CamScanner

Exercices Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3x+1} \leqslant 4-x$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-9} < x-9$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x-1}-x \geqslant -3$;

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+x+1} > 2x-5$.

6 Quelques problèmes se ramenant au second degré

Problème 1

Un héritage, qui s'élève à 20 250 000 francs, doit être partagé également entre un certain nombre de personnes.
Trois héritiers viennent à être exclus et, par ce fait, la part de chacun des autres est augmentée de 562 500 francs.
Combien y avait-il d'héritiers?

Soit x le nombre d'héritiers.
La part de chacun avant l'exclusion de trois héritiers est égale à

$$\frac{20\,250\,000}{x}.$$

La part de chacun après l'exclusion de trois héritiers est égale à

$$\frac{20\,250\,000}{x-3}.$$

Le nombre x est donc solution de chacune des équations équivalentes suivantes :

$$x \in \mathbb{N}^* - \{3\}, \quad \frac{20\,250\,000}{x} + 562\,500 = \frac{20\,250\,000}{x-3}$$

$$20\,250\,000(x-3) + 562\,500\,x(x-3) = 20\,250\,000\,x$$

$$x^2 - 3x - 108 = 0.$$

En résolvant la dernière équation, on trouve que le nombre d'héritiers (avant exclusion) est égal à 12.

Problème 2

Un électromoteur E, ayant pour caractéristiques e et r, alimente un résistor de résistance R (figure 23).
Pour quelle valeur de R la puissance débitée dans le résistor est-elle maximale?
Exprimer cette puissance maximale en fonction de e et r.

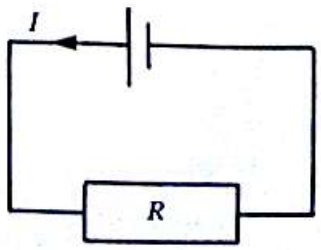


Fig. 23

Scanned by CamScanner

Soit I l'intensité du courant.

On sait que : $$I = \frac{e}{R+r}.$$

On sait aussi que la puissance P débitée dans le résistor est :

$$P = RI^2$$
$$= R\left(\frac{e}{R+r}\right)^2 = \frac{e^2}{R+2r+\frac{r^2}{R}}.$$

P est maximale lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque $R+\frac{r^2}{R}$ est minimal.

Or, le produit de R et $\frac{r^2}{R}$ étant la constante r^2, la somme de R et $\frac{r^2}{R}$ est minimale lorsque $R=\frac{r^2}{R}$ (voir les remarques suivant le théorème 3).

L'égalité $R=\frac{r^2}{R}$ implique $R^2=r^2$, et donc aussi $R=r$ (car $R>0$ et $r>0$).

La puissance débitée dans le résistor est donc maximale lorsque $R=r$.
La puissance maximale P_{max} débitée dans le résistor de résistance r est :

$$P_{max} = r\left(\frac{e}{r+r}\right)^2 = \frac{e^2}{4r}.$$

Problème 3

Soit un demi-cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$, de rayon r.
Soit H un point du segment $[AB]$.
Soit M le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de la droite perpendiculaire à (AB) en H.
On pose : $AH = x$.

a) Exprimer HM en fonction de r et x.

b) Soit l'application $f : [0, 2r] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto HM^2$.

Étudier le sens de variation de f et donner sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal.

c) Déterminer la position du point H sur $[AB]$ pour que HM^2 soit égal à $\frac{3}{4}r^2$.

a) Considérons la figure 24.

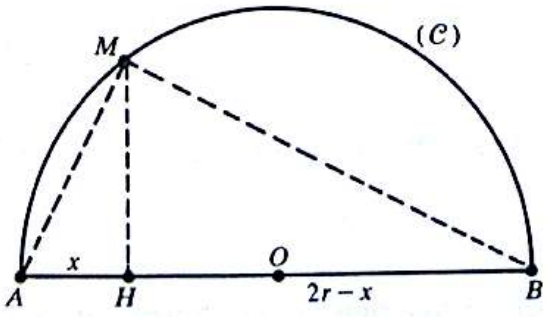


Fig. 24

Scanned by CamScanner

On a :

$$HA = x, \quad HB = 2r - x.$$

Dans le triangle rectangle AMB, on a :

$$HM^2 = HA \times HB$$
$$= x(2r - x) = -x^2 + 2rx.$$

D'où :

$$HM = \sqrt{-x^2 + 2rx} \quad (0 \leqslant x \leqslant 2r).$$

b) L'application $f : [0, 2r] \longrightarrow \mathbb{R}$ considérée est donc définie par

$$f(x) = -x^2 + 2rx.$$

Écrivons $f(x)$ sous forme canonique :

$$f(x) = -\left[(x - r)^2 - r^2\right].$$

Le tableau de variation de f est donc :

x	0		r		$2r$
$f(x)$	0	↗	r^2	↘	0

La représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f est donnée à la figure 25.
$(\mathcal{C}_f)$ est une partie de la parabole d'équation $y = -x^2 + 2rx$.

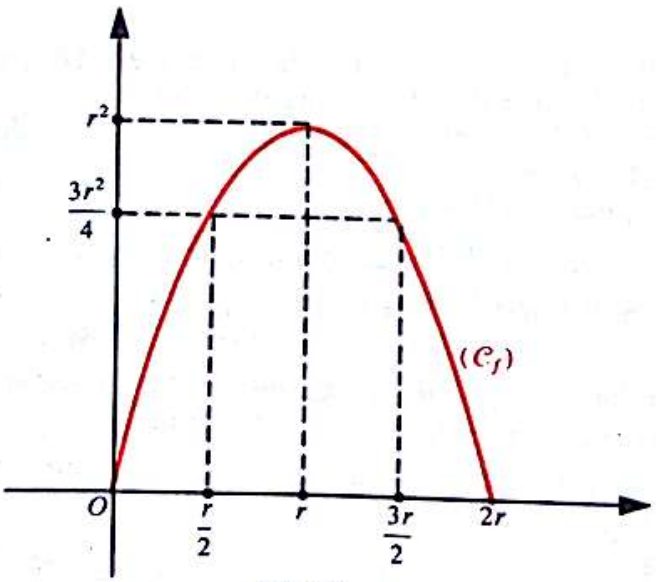


Fig. 25

c) On voit que $HM^2 = \frac{3}{4} r^2$ si et seulement si x est solution de l'équation

$$x \in [0, 2r], \quad -x^2 + 2rx = \frac{3}{4} r^2.$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$(E) \quad x \in [0, 2r], \quad 4x^2 - 8rx + 3r^2 = 0.$$

Scanned by CamScanner

Les solutions x' et x'' de (E) sont :

$$x' = \frac{8r - \sqrt{16r^2}}{8} = \frac{r}{2},$$

$$x'' = \frac{8r + \sqrt{16r^2}}{8} = \frac{3r}{2}.$$

Soit O le milieu du diamètre $[AB]$.

On a donc $HM^2 = \frac{3}{4} r^2$ lorsque :

$x = \frac{r}{2}$, c'est-à-dire lorsque H est le milieu de $[AO]$;

$x = \frac{3r}{2}$, c'est-à-dire lorsque H est le milieu de $[OB]$.

Problème 4

Un générateur de force électro-motrice $e = 9$ V, de résistance interne $r = 1{,}5\ \Omega$, alimente un circuit électrique passif.

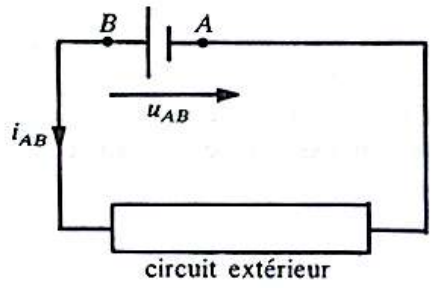


Fig. 26

1) Exprimer en fonction de l'intensité i du courant dans le générateur la puissance utile P_u du générateur.

2) *a*) Représenter graphiquement la fonction $f : i \longmapsto P_u$.

Échelles : 1 cm ... 1 A,
1 cm ... 10 W.

N. B. : L'intensité maximale est l'intensité du courant de court-circuit.

b) Pour quelle valeur de i la puissance utile est-elle maximale? Calculer cette puissance utile.

D'après Probatoire 1983 (Côte-d'Ivoire).

1) Notons : $\begin{cases} u_{AB} = u, \\ i_{AB} = i. \end{cases}$

On a : $u = ri - e$.

D'où $u \leqslant 0$ si et seulement si $0 \leqslant i \leqslant \frac{e}{r}$.

L'intensité du courant de court-circuit est égale à $\frac{e}{r}$, c'est-à-dire 6 A.

La puissance utile P_u du générateur est :

$$\begin{aligned} P_u &= -ui \\ &= -(ri - e)i \\ &= -1{,}5i^2 + 9i. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

2) *a*) On a : $f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$i \longmapsto -1{,}5i^2 + 9i.$

Tableau de variation de f.

i	0		3		6
$f(i)$	0	↗	13,5	↙	0

Représentation graphique de f.

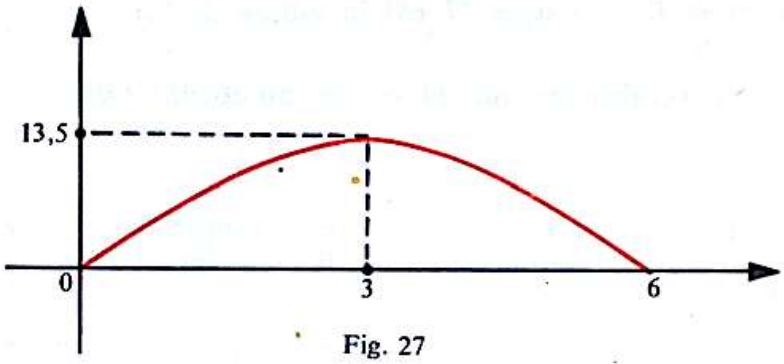


Fig. 27

b) P_u est maximale lorsque $i = 3$ A.
Cette puissance maximale est égale à 13,5 W.

Exercices

1 (1). Écrire sous forme canonique :

a) $2x^2 - x + 1$

b) $-x^2 + 3x + 4$

c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$

d) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{3}$.

2 (1). Étudier le sens de variation et donner la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{5}{3}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |-x^2 + x + 12|$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + 2|x|$

e) $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 9x^2 - 12x + 4$

f) $f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (2x - 3)^2 + 1.$

3 (1). Soit la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto ax^2 + x + 2.$

Déterminer a pour que f soit croissante sur $]\leftarrow, 2]$ et décroissante sur $[2, \rightarrow[$.

4 (1). Soit la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 - 4x + 1.$

a) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère (O, I, J).

b) Définir explicitement la fonction g dont la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère (O, I, J) est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Construire $(\mathcal{C}_g)$.

Scanned by CamScanner

5 (1). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 - 2x - 3.$$

1) Étudier le sens de variation de f et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé (O, I, J).

2) En déduire la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x + 5$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x+1)^2 - 2(x+1) - 1$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x-1)^2 + 2(x-1) - 4$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + 2|x| - 3$

e) $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 4x^2 - 4x - 3$.

6 (2). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 15x + 28 = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{5} + \frac{12}{25} = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 3|x| - 5 = 0$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}x^2 - (1+\sqrt{2})x + 1 = 0$

e) $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + (\sqrt{3}-2)x + 2\sqrt{3} = 0$

f) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 0{,}7x + 0{,}06 = 0$

g) $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 - 3x + 5 = |x-1|$.

7 (2). Même question :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)(2x+1) = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

c) $x \in \mathbb{R}$, $(2x-1)^2 + (x-3)^2 - (x+1)(x-1) = (2x+1)(x-1) + 8$

d) $x \in \mathbb{R}$, $x(x-1)^2 + 2(x-1)(x+3) + 8 - 8x = 0$

e) $x \in \mathbb{R}$, $(2x-1)^2 + (x-3)^2 + 2x = -4x + 11$.

8 (2). Même question :

a) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11-x}{x^2-4}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{2}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{2}{x^2-x}$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = 0$

e) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{x+1}{x-1}$

f) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-75}{x^2+5x+6}$.

9 (2). Soit l'équation

(E) $\quad x \in \mathbb{R}$, $x^2 + (a-c)x - ac - b^2 = 0$.

dépendant des paramètres a, b et c.
Montrer que (E) admet toujours deux solutions, distinctes ou non.

10 (2) Factoriser :

a) $2x^2 + 5x - 3$

b) $x^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $225x^2 - 60x + 4$

d) $2{,}12x^2 + 3{,}24x - 2$

e) $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$

f) $(x-1)^2(x+3) + 2(x-1)(x+2)^2$.

11 (2). Déterminer m pour que 1 soit une solution de chacune des équations suivantes. Trouver l'autre solution.

a) $x \in \mathbb{R}$, $mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $(m+1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $(m^2+1)x^2 + 3(m-1)x + m = 0$.

12 (2). Déterminer m pour que -1 soit une solution de chacune des équations suivantes. Trouver l'autre solution.

a) $x \in \mathbb{R}$, $(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{m+1}{m-1}\right)x^2 - (2m+1)x - 9 = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + (2m^2 - m + 2)x + m + 5 = 0$.

13 (2). Soit l'équation :

(E) $\quad x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + 2x + c = 0$

où $\quad a \in [-2, 2] - \{0\}$ et $c \in [-2, 2]$.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M de coordonnées (a, c). Trouver l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a) (E) admet deux solutions confondues;

b) (E) admet 0 comme solution;

c) (E) admet 2 comme solution;

d) (E) admet 0 et 2 comme solutions.

Scanned by CamScanner

14 (2). Soit l'équation

(E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x + m = 0$

dépendant du paramètre m.

1) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le cas où (E) admet des solutions x' et x'', exprimer en fonction de m :

a) $x' + x''$ $\qquad$ *c*) $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$

b) $x'^2 + x''^2$ $\qquad$ *d*) $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2}$.

15 (2). Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} \\ xy = 2 \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{4}{3} \\ xy = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

16 (2). Même question :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$

b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$

d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

e) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$

17 (2). Former une équation du second degré admettant x' et x'' comme solutions dans chacun des cas suivants :

a) $x' = 2, \ x'' = -3$;

b) $x' = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{3}, \ x'' = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{3}$;

c) $x' = \dfrac{2}{3}, \ x'' = -\dfrac{1}{4}$;

d) $x' = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \ x'' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

18 (2). Soit l'équation

(E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - 5x + c = 0$

dépendant du paramètre c.
Déterminer c dans chacun des cas suivants :

1) (E) admet deux solutions distinctes;

2) (E) admet deux solutions de signes contraires;

3) (E) admet deux solutions strictement positives;

4) (E) admet une solution nulle.

Déduire des questions précédentes le nombre de solutions de l'équation

(E') $\quad y \in \mathbb{R}, \quad 2y^2 - 5|y| + c = 0.$

19 (2). *a*) Trouver deux éléments consécutifs de $\mathbb{Z}$ dont le produit dépasse la somme de 19 unités.

b) Trouver deux éléments consécutifs de $\mathbb{Z}$ dont la somme des carrés est égale à 145.

20 (2). Soit deux points A et B, d'abscisses respectives -3 et 4, sur une droite graduée de repère (O, I). Trouver des points M, N, P sur cette droite tels que :

a) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{AB}$;

b) $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = \overline{AB}^2$;

c) $\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$.

21 (2). Trouver les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle sachant que ces mesures sont trois nombres entiers naturels consécutifs.

22 (2). Koffi a acheté des cahiers pour 1 500 F. S'il en avait eu deux de plus pour ce même prix, chacun coûterait 125 F de moins.
Combien de cahiers Koffi a-t-il acheté?

23 (2). Partager 20 en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit égale à 2 240.

24 (2). Calculer les mesures des côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre mesure 24 m et l'aire 24 m^2.

25 (2). Soit : un cercle $(\mathcal{C})$ de rayon égal à 2,5 cm,
un diamètre $[BC]$ de ce cercle,
une droite (Δ) parallèle à (BC), située à 2 cm de (BC),
A un des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (Δ),
H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Calculer HB et HC.

Scanned by CamScanner

26 (3). Étudier le signe des valeurs des fonctions polynômes f_1 à f_4, définies respectivement par :

a) $f_1(x) = x^2 - 7x + 6$

b) $f_2(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f_3(x) = -2x^2 + x - 8$

d) $f_4(x) = 4x^2 - 28x + 49$.

27 (3). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $-3x^2 + 2x + 5 \geqslant 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 7 < 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 - x - 2 > 0$

d) $x \in \mathbb{R}$, $-5x^2 + 4x - 1 \leqslant 0$

e) $x \in \mathbb{R}$, $49x^2 - 42x + 9 \leqslant 0$

f) $x \in \mathbb{R}$, $-81x^2 + 18x - 1 < 0$.

28 (3). Même question :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 2x^2 - 15x > 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 5x + 4) \leqslant 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 2x} \geqslant 0$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2 - x - 4}{2x^2 - x - 3} > 2$

e) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x - 1} < 1$

f) $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x - 5}{x - 3} \leqslant \dfrac{x - 2}{x - 1}$.

29 (3). Construire la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 + 4x - 5.$$

En déduire l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4x + 3 > 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4|x| - 5 \geqslant 0$.

30 (4). Soit l'équation

(*E*) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$

dépendant du paramètre m.
Trouver m pour que (*E*) ait deux solutions appartenant à l'intervalle $[-2, 3]$.

31 (4). Soit l'équation

(*E*) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + m = 0$

dépendant du paramètre m.
Situer le nombre 2 par rapport aux solutions éventuelles de l'équation (*E*).

32 (4). Construire un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $BC = AH = a$ où H est le pied de la hauteur issue du sommet A et a est un nombre donné. Comment inscrire dans ce triangle un rectangle ayant deux de ses sommets sur $[BC]$ et les autres sur $[AB]$ et $[AC]$, de façon que la diagonale ait une longueur donnée d?

Application numérique :

$$a = 5 \text{ (en cm)}, \quad d = \frac{5\sqrt{10}}{4} \text{ (en cm)}.$$

33 (5). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $2x^4 - 51x^2 + 15 = 0$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

c) $x \in \mathbb{R}$, $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$.

34 (5). Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^2 + m = 0$$

dépendant du paramètre m.

35 (5). Factoriser les polynômes suivants :

a) $f_1(x) = 2x^4 - 5x^2 + 2$

b) $f_2(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

c) $f_3(x) = x^4 + 5x^2 + 4$.

36 (5). Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{2x - 1} = 2$

b) $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = x - 6$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1 = 0$.

37 (5). Soit l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - bx + 2 = 0$$

dépendant du paramètre b.
Déterminer b pour que l'une des solutions de l'équation soit le double de l'autre.

38 (5). Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2 + 2} = x - m$$

dépendant du paramètre m.

39 (5). Soit un demi-cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre $[BC]$, de rayon 4,5 (en cm), et la tangente (Δ) à ($\mathcal{C}$) passant par B. Trouver un point A de ($\mathcal{C}$) tel que :

$$AC + AD = 11 \text{ (en cm)},$$

où D est le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Scanned by CamScanner

40 (5). Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{2x+2} \leq 3$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{-2x^2+x+1} \leq x-5$

c) $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x(x-3)} < 2x-3$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x-5} > x-4$

e) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-x-5} \geq x+1$

f) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+2x-5 \geq 0$.

Problèmes

41 Soit M un point du segment $[AB]$ de longueur a. D'un même côté de la droite (AB) on construit les triangles rectangles isocèles AMP et BMQ d'hypothénuses respectives $[AM]$ et $[BM]$. Posons $x = AM$ et $y = BM$.

1) Déterminer x et y pour que $PQ = \frac{3a}{5}$.

2) Déterminer x et y pour que la mesure de l'aire du quadrilatère $ABQP$ soit égale à $\frac{7a^2}{16}$.

42 Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -2x^2+3x+5.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé (O, I, J). Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de $(\mathcal{C}_f)$ et (OI).

2) On trace la droite (D), d'équation $y = 5$ par rapport au repère (O, I, J); cette droite coupe $(\mathcal{C}_f)$ en deux points M et N.
Posons :

$$\{P\} = (AM) \cap (BN); \quad \{Q\} = (AN) \cap (BM).$$

a) Montrer que (PQ) est parallèle à (OJ).

b) Calculer les coordonnées de P et Q.

c) Montrer que P et Q sont symétriques par rapport au sommet S de $(\mathcal{C}_f)$.

3) Soit une droite (Δ) d'équation $y = m$ $(m \in \mathbb{R})$ relativement au repère (O, I, J).

a) En s'aidant de la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$, donner le nombre de points d'intersection de (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$, suivant les valeurs du paramètre m.

b) On suppose que (Δ) coupe $(\mathcal{C}_f)$ en deux points, éventuellement confondus, E et F. Posons :

$$\{K\} = (AE) \cap (BF), \quad \{L\} = (AF) \cap (BE).$$

Exprimer les coordonnées de K et L en fonction de m.
Montrer que K et L sont symétriques par rapport au sommet S de $(\mathcal{C}_f)$. Trouver l'ensemble décrit par le point K et celui décrit par le point L lorsque m décrit $\left]0, \frac{49}{8}\right]$.

43 Soit un carré $ABCD$ de côté a et M un point du segment $[AB]$. La droite passant par M et parallèle à (AC) coupe (BC) en N.
Soit $MNPQ$ le rectangle tel que P et Q appartiennent respectivement aux droites (CD) et (DA).

1) Faire un programme de construction du rectangle $MNPQ$.

2) On pose $AM = x$.

a) Montrer que le périmètre de $MNPQ$ est constant lorsque M décrit $]AB[$.

b) Exprimer la mesure de l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de a et x.

c) Déterminer x pour que cette mesure soit la plus grande possible.
Calculer cette plus grande mesure.

3) On considère l'application

$$f :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto S$$

où S désigne la mesure de l'aire du rectangle $MNPQ$.

a) Étudier le sens de variation de f et donner sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J).

b) Calculer x lorsque $S = \frac{a^2}{4}$.

Scanned by CamScanner

4) On considère l'application

$$g :]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \Sigma$$

où Σ désigne la mesure de l'aire du disque de diamètre $[MP]$.

a) Étudier le sens de variation de g et donner sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

b) Calculer x pour que Σ soit la plus petite possible. Calculer cette plus petite valeur de Σ.

44 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère deux points $A(0; 4)$ et $B(4; 4)$.
M étant un point de la droite (OI) et H l'orthocentre du triangle AMB, on pose $\overline{OM} = x$.

1) Exprimer les coordonnées du point H en fonction de x.

2) Lorsque M décrit la droite (OI), H décrit une partie (E) du plan.
Construire (E).

3) Déterminer graphiquement le point M tel que $AH = AB$.

4) Exprimer AH en fonction de x.
Déterminer x pour que $AH = OM$.

45 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction

$$f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x-m)^2 + m$$

dépendant du paramètre m.
On désigne par (P_m) sa représentation graphique.

1) Construire (P_0) et (P_1).

2) Déterminer m pour que (P_m) passe par le point $A(3; 3)$.

3) On désigne par S_m le sommet de (P_m). Quel est l'ensemble des points S_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

4) Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de points d'intersection de (P_m) et de la droite (OI).

5) Déterminer m pour que (P_m) coupe la droite (OI) en deux points distincts M et N et que O appartienne au segment $[MN]$.

46 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
La représentation graphique (P) de f passe par le point $A(0, 2)$ et admet la droite (Δ) d'équation $x = 2$ pour axe de symétrie.

1) Calculer c. Exprimer b en fonction de a, puis $f(x)$ en fonction de x et a.

2) Suivant les valeurs de a :

a) déterminer le nombre de points d'intersection de (P) et de la droite (OI);

b) situer le point O par rapport aux points d'intersection ci-dessus.

3) On désigne par S le sommet de (P) et par K le milieu du segment $[SA]$.

a) Quel est l'ensemble décrit par le point K lorsque a décrit $\mathbb{R}^*$?

b) Déterminer a pour que $SA = 2\sqrt{2}$.

Scanned by CamScanner

4 Systèmes d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Leçon 1 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$
Leçon 2 : SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R}^2$
Leçon 3 : QUELQUES PROBLÈMES SE RAMENANT A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE CONTRAINTES

En classe de Seconde, deux méthodes de résolution d'un système d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ont été présentées : méthode de substitution, de combinaison.
Dans ce chapitre, ces méthodes sont utilisées pour résoudre quelques systèmes d'équations ou d'inéquations dépendant d'un ou plusieurs paramètres.
L'ensemble des solutions d'un système (Σ) d'équations ou d'inéquations est noté $S(\Sigma)$.

1 Systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Théorème de combinaison (Rappel)

Soit f et g deux applications d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$.
k et k' étant des nombres réels non nuls, les systèmes

$$x \in A, \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x \in A, \begin{cases} f(x)=0 \\ kf(x)+k'g(x)=0 \end{cases}$$

sont équivalents.

Remarque. Pour étudier un système d'équations dépendant d'un paramètre, il faut généralement considérer plusieurs cas, correspondant à différentes valeurs du paramètre.
Afin de limiter le nombre de càs à envisager, il est utile de remarquer que le théorème de combinaison est encore vrai lorsque k est nul (vérifier).

Scanned by CamScanner

Exemple 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit le point A de coordonnées $(2, 1)$ et la droite (D) d'équation

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

(Δ) étant une droite quelconque passant par A, on veut calculer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites (D) et (Δ) (figure 1).

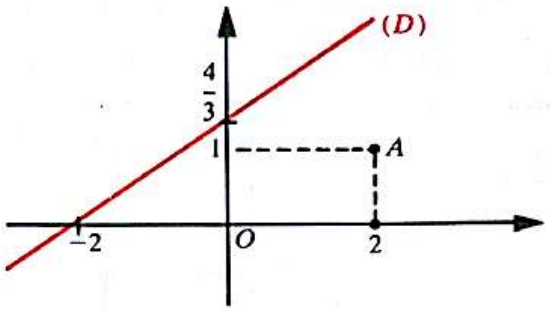


Fig. 1

Soit a un nombre réel.
Une équation de la droite (Δ) passant par A et de coefficient directeur a est

$$y - 1 = a(x - 2)$$

ou encore

$$ax - y - 2a + 1 = 0.$$

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y).
Le point M appartient à l'intersection de (D) et (Δ) si et seulement si (x, y) est solution du système d'équations

$$(\Sigma) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 & (E) \\ ax - y - 2a + 1 = 0 & (F). \end{cases}$$

Le système (Σ) dépend du paramètre a.
On va résoudre ce système par la méthode de combinaison.
Formons la combinaison $-(E) + 3(F)$:

$$\begin{array}{ll} -2x + 3y - 4 = 0 & -(E) \\ 3ax - 3y - 6a + 3 = 0 & 3(F) \\ \hline (3a - 2)x + 0y - 6a - 1 = 0 & -(E) + 3(F). \end{array}$$

Le système (Σ) est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0, \\ (3a - 2)x - 6a - 1 = 0, \end{cases}$$

$$(\Sigma') \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0, \\ (3a - 2)x = 6a + 1. \end{cases}$$

On distingue deux cas.

1er cas : $a = \dfrac{2}{3}$.

Scanned by CamScanner

Si $3a-2=0$, c'est-à-dire si $a=\frac{2}{3}$, (Σ') est le système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ 0x=5 \qquad (F') \end{cases}$$

L'équation (F') ne possède aucune solution.

D'où : $S(\Sigma)=\varnothing$.

Cela signifie que les droites (D) et (Δ) sont parallèles et disjointes (figure 2).

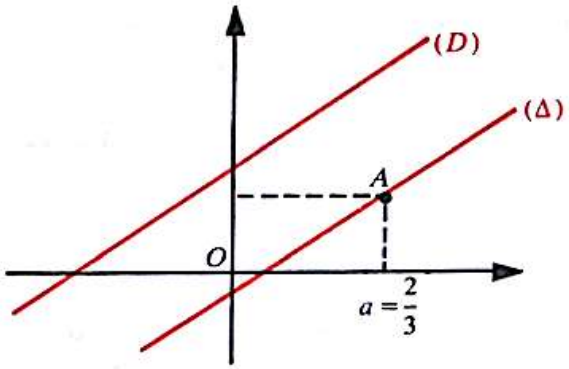


Fig. 2

2e cas : $a\neq\frac{2}{3}$.

Si $3a-2\neq0$, c'est-à-dire si $a\neq\frac{2}{3}$, (Σ') est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} 2x-3y+4=0, \\ x=\dfrac{6a+1}{3a-2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{6a+1}{3a-2}-3y+4=0, \\ x=\dfrac{6a+1}{3a-2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{8a-2}{3a-2}, \\ x=\dfrac{6a+1}{3a-2}. \end{cases}$$

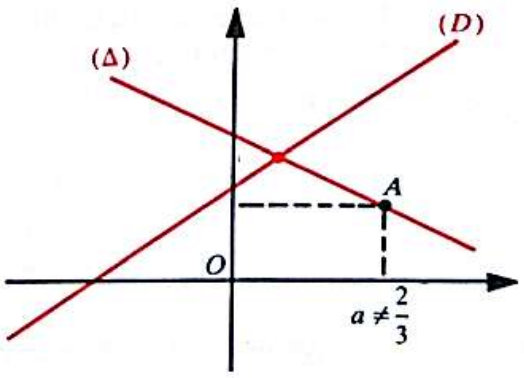


Fig. 3

D'où : $S(\Sigma)=\left\{\left(\dfrac{6a+1}{3a-2}, \dfrac{8a-2}{3a-2}\right)\right\}$.

Les droites (D) et (Δ) sont donc sécantes et $\left(\dfrac{6a+1}{3a-2}, \dfrac{8a-2}{3a-2}\right)$ est le couple des coordonnées de leur point d'intersection (figure 3).

Scanned by CamScanner

En résumé :

a	$S(\Sigma)$	positions relatives de (D) et (Δ)	coordonnées du point d'intersection
$a \neq \frac{2}{3}$	$\left\{\left(\frac{6a+1}{3a-2}, \frac{8a-2}{3a-2}\right)\right\}$	sécantes	$\left(\frac{6a+1}{3a-2}, \frac{8a-2}{3a-2}\right)$
$a = \frac{2}{3}$	$\varnothing$	parallèles et disjointes	

Exemple 2

Résolvons le système

$$(\Sigma)\ (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + my - 1 = 0, \\ mx + y + 2m - 3 = 0, \end{cases}$$

où m est un paramètre.

Utilisons la méthode de substitution.
Le système (Σ) est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 1 - my, \\ m(1 - my) + y + 2m - 3 = 0, \end{cases}$$

$$(\Sigma')\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 1 - my, \\ (m+1)(m-1)y = 3(m-1). \end{cases}$$

On distingue trois cas.

1er cas : $m \neq -1$ et $m \neq 1$.

Si $(m+1)(m-1) \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -1$ et $m \neq 1$, (Σ') est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 1 - my, \\ y = \dfrac{3(m-1)}{(m+1)(m-1)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - m\dfrac{3}{m+1}, \\ y = \dfrac{3}{m+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-2m}{m+1}, \\ y = \dfrac{3}{m+1}. \end{cases}$$

D'où : $$S(\Sigma) = \left\{\left(\frac{1-2m}{m+1}, \frac{3}{m+1}\right)\right\}.$$

2e cas : $m = -1$.

Si $m = -1$, (Σ') est le système

Scanned by CamScanner

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 1 + y, \\ 0y = -6. \end{cases}$$

D'où : $S(\Sigma)=\varnothing$.

3e cas : $m = 1$.

Si $m = 1$, (Σ') est le système

$$(\Sigma'') \quad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = 1 - y \\ 0y = 0 \quad (E) \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, le système (Σ'') est équivalent à l'équation

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad x = 1 - y.$$

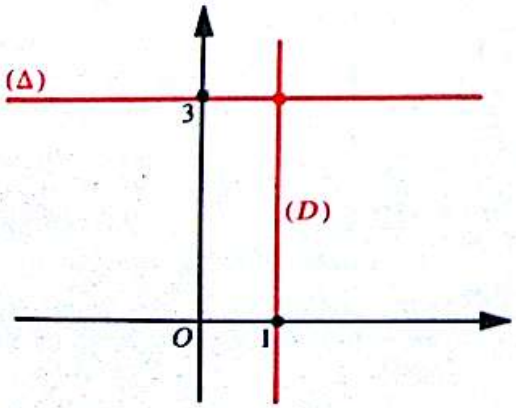
$S(\Sigma)$ est donc l'ensemble des couples $(1 - r, r)$ où r décrit $\mathbb{R}$.

En résumé :

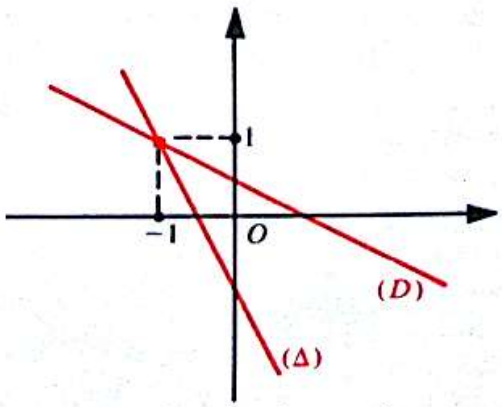
m	$S(\Sigma)$
$m \neq -1$ et $m \neq 1$	$\left\{\left(\frac{1-2m}{m+1}, \frac{3}{m+1}\right)\right\}$
$m = -1$	$\varnothing$
$m = 1$	$\{(1 - r, r) \mid r\in\mathbb{R}\}$

Ces résultats sont illustrés par les figures 4.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère la droite (D) d'équation : $x + my - 1 = 0$,
la droite (Δ) d'équation : $mx + y + 2m - 3 = 0$.

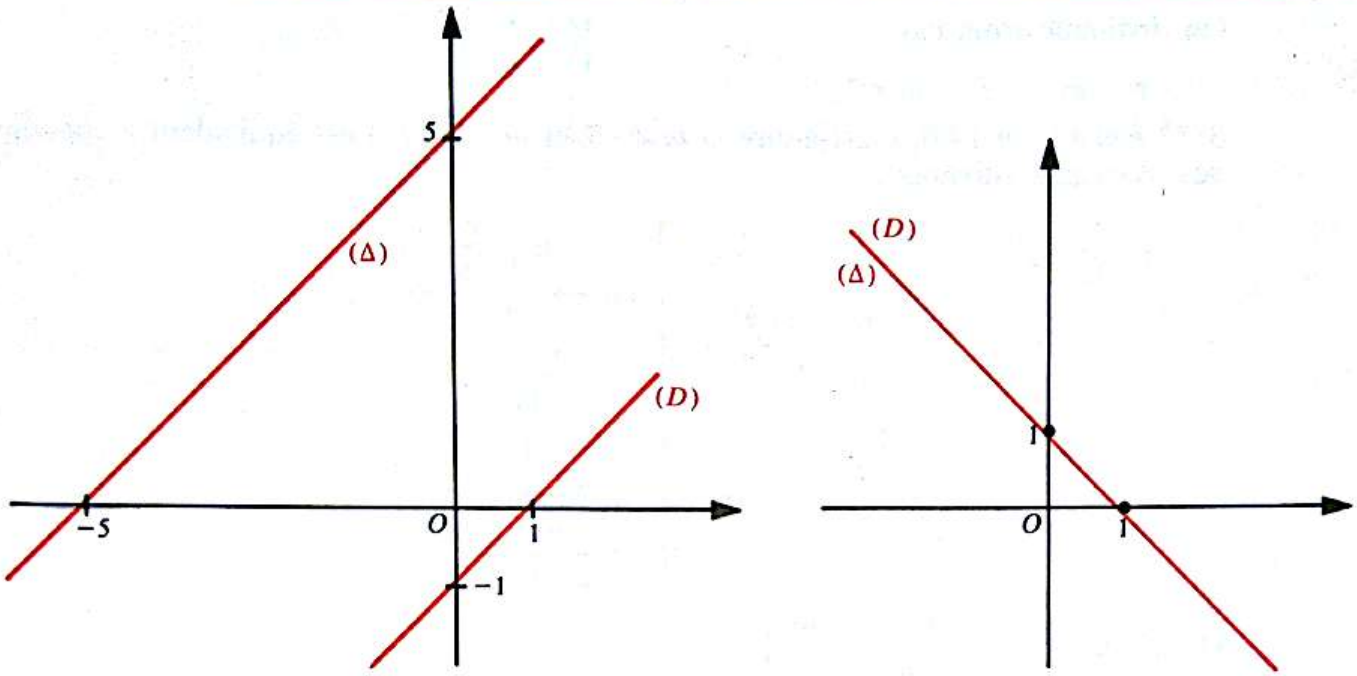


$m = 0$, $S(\Sigma)=\{(1, 3)\}$.



$m = 2$, $S(\Sigma)=\{(-1, 1)\}$.

Scanned by CamScanner



$m=-1$, $S(\Sigma)=\varnothing$. $m=1$, $S(\Sigma)=\{(1-r, r)\,|\,r\in\mathbb{R}\}$.

Fig. 4

Exercice Résoudre le système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} mx+y-1=0, \\ (3m+5)x+(m-1)y+2=0, \end{cases}$$

où m est un paramètre.

Exemple 3

Résolvons le système

$$(\Sigma)\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} mx+2y+m=0 & (E) \\ 2x+my-m=0 & (F) \\ 5x+y+1=0 & (G) \end{cases}$$

où m est un paramètre.

Les solutions du système (Σ) sont les solutions du système

$$(\Sigma')\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} mx+2y+m=0, \\ 2x+my-m=0, \end{cases}$$

qui vérifient l'équation (G).

Résolvons (Σ') par la méthode de substitution.

Le système (Σ') est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} y=\dfrac{-mx-m}{2}, \\ 2x+m\dfrac{-mx-m}{2}-m=0, \end{cases}$$

$$(\Sigma'')\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} y=\dfrac{-mx-m}{2}, \\ (2+m)(2-m)x=m(2+m). \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

On distingue trois cas.

1er cas : $m \neq -2$ et $m \neq 2$.

Si $(2+m)(2-m) \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -2$ et $m \neq 2$, (Σ'') est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y = \dfrac{-m\dfrac{m}{2-m} - m}{2}, \\ x = \dfrac{m}{2-m}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-m}{2-m}, \\ x = \dfrac{m}{2-m}. \end{cases}$$

D'où : $S(\Sigma') = \left\{\left(\dfrac{m}{2-m}, \dfrac{-m}{2-m}\right)\right\}$.

Le couple $\left(\dfrac{m}{2-m}, \dfrac{-m}{2-m}\right)$ est solution de l'équation (G) si et seulement si m est solution de l'équation

$$m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}, \quad 5\frac{m}{2-m} + \frac{-m}{2-m} + 1 = 0.$$

Vérifier que cette équation admet la solution unique $-\dfrac{2}{3}$.

Le couple $\left(\dfrac{m}{2-m}, \dfrac{-m}{2-m}\right)$ est donc solution de (G) si et seulement si $m = -\dfrac{2}{3}$.

Lorsque $m = -\dfrac{2}{3}$, on a $\left(\dfrac{m}{2-m}, \dfrac{-m}{2-m}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Par conséquent,

— si $m = -\dfrac{2}{3}$, on a : $S(\Sigma) = \left\{\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$;

— si $m \in \mathbb{R} - \left\{-2, 2, -\dfrac{2}{3}\right\}$, on a : $S(\Sigma) = \varnothing$.

2e cas : $m = -2$.

Si $m = -2$, (Σ'') est le système

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y = x + 1 & (E') \\ 0x = 0 & (F') \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (F') est $\mathbb{R}^2$ et, par conséquent, (Σ'') est équivalent à l'équation

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = x + 1.$$

Le système (Σ) est finalement équivalent au système

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y = x + 1 & (E') \\ 5x + y + 1 = 0 & (G) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Vérifier que $S(\Sigma)=\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$.

3e cas : $m=2$.

Si $m=2$, (Σ'') est le système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y=-x-1 & (E'') \\ 0x=8 & (F'') \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (F'') est l'ensemble vide.

On conclut que $S(\Sigma)=\varnothing$.

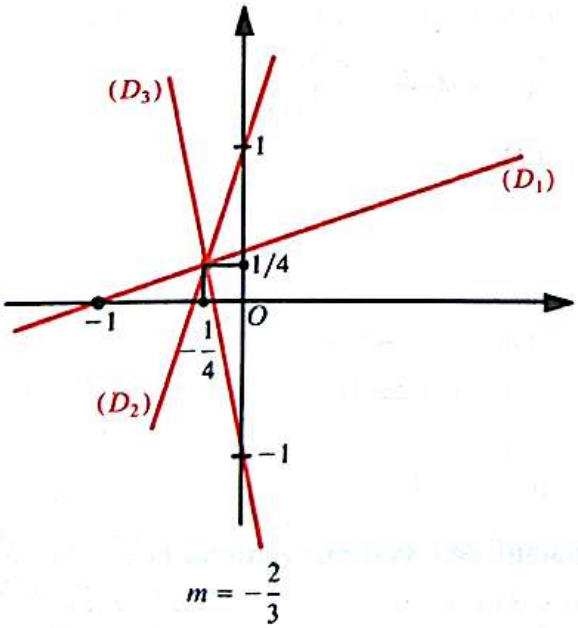
En résumé :

m	$S(\Sigma)$
$m=-\frac{2}{3}$	$\left\{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$
$m=-2$	$\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$
$m\neq -2$ et $m\neq -\frac{2}{3}$	$\varnothing$

Ces résultats sont illustrés par les figures 5.

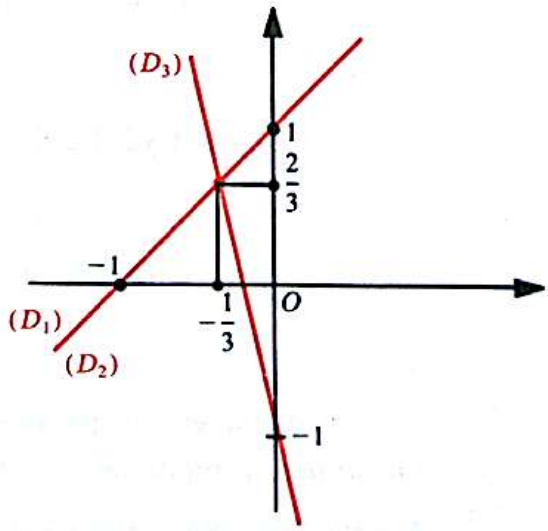
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère la droite (D_1) d'équation : $mx+2y+m=0$,
la droite (D_2) d'équation : $2x+my-m=0$,
la droite (D_3) d'équation : $5x+y+1=0$.



$m=-\frac{2}{3}$

(D_1), (D_2) et (D_3) sont concourantes au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

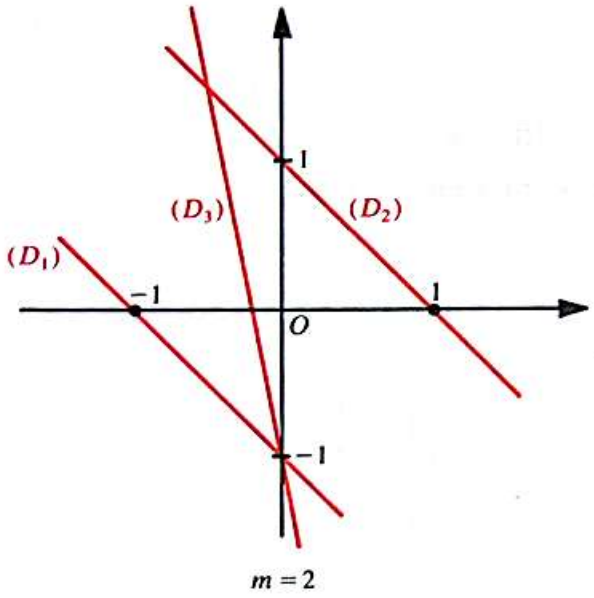


$m=-2$

(D_1) et (D_2) sont confondues et sont coupées par (D_3) au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

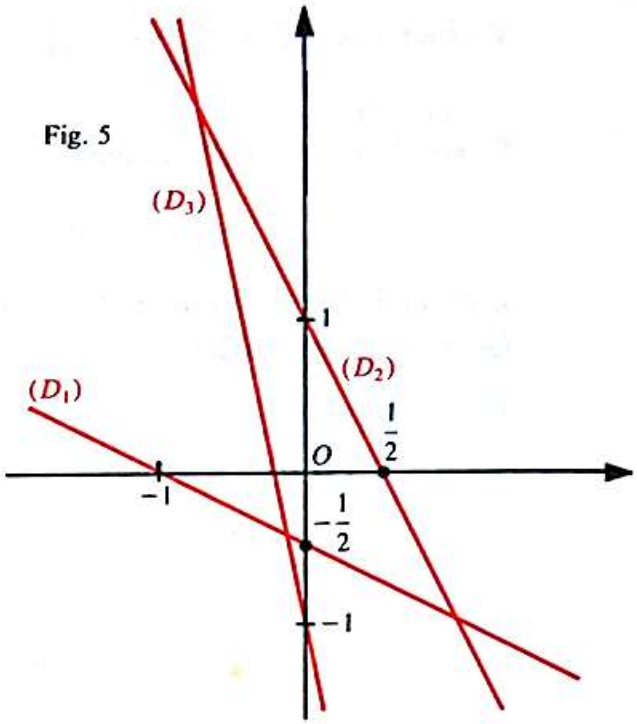
Scanned by CamScanner

Fig. 5



$m = 2$

(D_1) et (D_2) sont parallèles et disjointes.
(D_3) coupe (D_1) et (D_2) en deux points distincts.



$m = 1$

(D_1), (D_2) et (D_3) sont sécantes deux à deux.

Exercice

Considérons le système (Σ) de l'exemple 3.

a) Existe-t-il un nombre réel m tel que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) soient parallèles deux à deux?

b) Résoudre (Σ) en cherchant les solutions du système

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} (E) \\ (G) \end{cases}$$

qui vérifient l'équation (F).

Exemple 4

Résolvons le système

$$(\Sigma) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (m+1)x - y + z - 1 = 0 & (E) \\ 2x + y + z = 0 & (F) \end{cases}$$

où m est un paramètre.

On utilise la méthode de combinaison.

Le système (Σ) est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (m+3)x + 2z - 1 = 0 & (E)+(F) \\ 2x + y + z = 0 & (F) \end{cases}$$

$$(\Sigma') \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (m+3)x = 1 - 2z, \\ y = -2x - z. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

On distingue deux cas.

1er cas : $m \neq -3$.

Si $m+3 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -3$, (Σ') est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x = \dfrac{1-2z}{m+3}, \\ y = (-2)\dfrac{1-2z}{m+3} - z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-2z}{m+3}, \\ y = \dfrac{(1-m)z-2}{m+3}. \end{cases}$$

D'où : $S(\Sigma) = \left\{ \left(\dfrac{1-2r}{m+3}, \dfrac{(1-m)r-2}{m+3}, r \right) \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$.

2e cas : $m = -3$.

Si $m = -3$, (Σ') est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 0x = 1-2z, \\ y = -2x - z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ y = -2x - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

D'où : $S(\Sigma) = \left\{ \left(t, -2t - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

En résumé :

m	$S(\Sigma)$
$m \neq -3$	$\left\{ \left(\dfrac{1-2r}{m+3}, \dfrac{(1-m)r-2}{m+3}, r \right) \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$
$m = -3$	$\left\{ \left(t, -2t - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice Résoudre le système (Σ) de l'exemple 4 en commençant par remarquer que (Σ) est équivalent au système

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (E) \\ (E) - (F). \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Exemple 5

Résolvons, par la méthode de Gauss, le système

$$(\Sigma) \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+y-2z=3 & (E) \\ mx+y+4z=0 & (F) \\ 2x+y+(m-4)z=2 & (G) \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

Rappelons que la méthode de Gauss consiste à chercher un système équivalent à (Σ) qui soit du type

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+by+cz=d, \\ y+c'z=d', \\ z=d''. \end{cases}$$

Un tel système est dit *triangulaire.*

Pour ce faire, on va éliminer x dans (F), x et y dans (G).

Le théorème de combinaison (et sa remarque, page 126), nous apprend que les systèmes

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (E) \\ (F) \end{cases} \quad \text{et} \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (E) \\ (F)-m(E) \end{cases}$$

sont équivalents (même si $m=0$), et aussi que les systèmes

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (E) \\ (G) \end{cases} \quad \text{et} \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} (E) \\ 2(E)-(G) \end{cases}$$

sont équivalents.

Le système (Σ) est donc équivalent au système

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+y-2z=3 & (E) \\ (1-m)y+(4+2m)z=-3m & (F)-m(E) \\ y-mz=4 & 2(E)-(G) \end{cases}$$

et donc aussi au système suivant, obtenu par permutation des deux dernières équations :

$$(\Sigma') \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+y-2z=3 & (E) \\ y-mz=4 & (F') \\ (1-m)y+(4+2m)z=-3m & (G') \end{cases}$$

On va éliminer y dans (G').

Le système (Σ') est équivalent au système

$$(\Sigma'') \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} x+y-2z=3 & (E) \\ y-mz=4 & (F') \\ (m+1)(m-4)z=-(m-4) & (1-m)(F')-(G') \\ & \text{(même si } m=1) \end{cases}$$

On distingue trois cas.

1er cas : $m\neq -1$ et $m\neq 4$.

Si $(m+1)(m-4)\neq 0$, c'est-à-dire si $m\neq -1$ et $m\neq 4$, (Σ'') est équivalent au système

Scanned by CamScanner

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y-2z=3,\\ y-mz=4,\\ z=\dfrac{-1}{m+1}. \end{cases}$$

Vérifier que $S(\Sigma)=\left\{\left(\dfrac{-3}{m+1}, \dfrac{3m+4}{m+1}, \dfrac{-1}{m+1}\right)\right\}$.

2e cas : $m=-1$.

Si $m=-1$, (Σ'') est le système

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y-2z=3,\\ y+z=4,\\ 0z=5. \end{cases}$$

D'où : $S(\Sigma)=\varnothing$.

3e cas : $m=4$.

Si $m=4$, (Σ'') est le système

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y-2z=3,\\ y-4z=4,\\ 0z=0. \end{cases}$$

Vérifier que $S(\Sigma)=\{(-2r-1, 4r+4, r)\,|\,r\in\mathbb{R}\}$.

En résumé :

m	$S(\Sigma)$
$m\neq-1$ et $m\neq4$	$\left\{\left(\dfrac{-3}{m+1}, \dfrac{3m+4}{m+1}, \dfrac{-1}{m+1}\right)\right\}$
$m=-1$	$\varnothing$
$m=4$	$\{(-2r-1, 4r+4, r)\,\|\,r\in\mathbb{R}\}$

Exercice Résoudre, par la méthode de Gauss, le système

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y+kz=k,\\ x+ky+z=1,\\ kx+y+z=k, \end{cases}$$

où k est un paramètre.

Scanned by CamScanner

2 Systèmes d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

Exemple 1

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$(\Sigma) \qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x-3y+7\geqslant 0, \\ 3x+2y-4\leqslant 0. \end{cases}$$

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite (D) d'équation $2x-3y+7=0$ (figure 6).

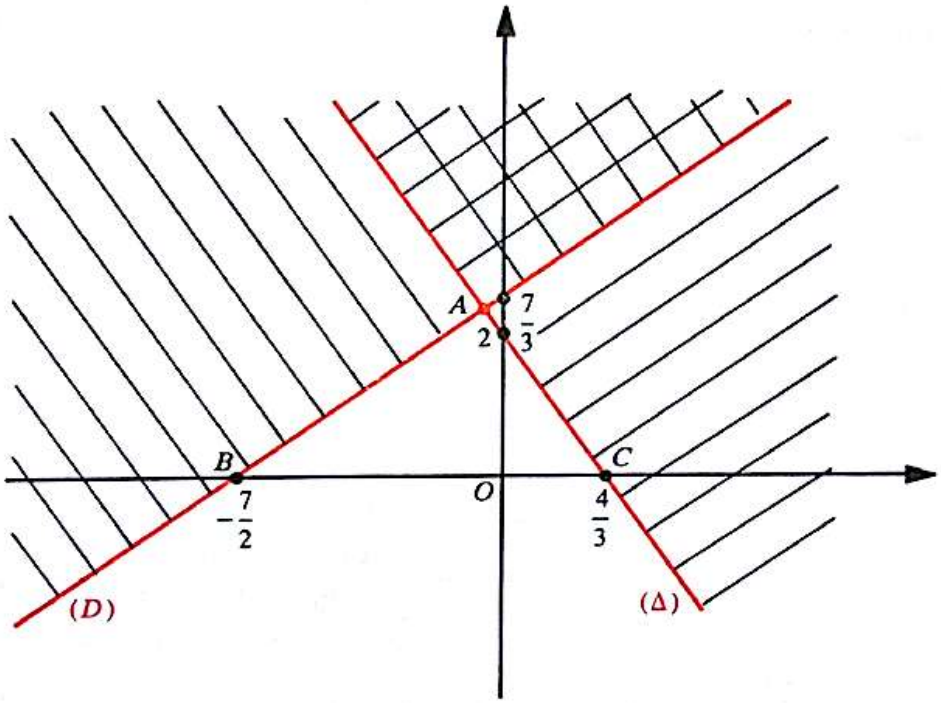


Fig. 6

On remarque que les coordonnées (0, 0) du point O vérifient l'inéquation

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad 2x-3y+7\geqslant 0.$$

On hachure perpendiculairement à (D) la région du plan formée des points dont les coordonnées ne vérifient pas cette inéquation.
On considère ensuite la droite (Δ) d'équation $3x+2y-4=0$.
Les coordonnées du point O vérifient l'inéquation

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad 3x+2y-4\leqslant 0.$$

On hachure perpendiculairement à (Δ) la région du plan formée des points dont les coordonnées ne vérifient pas cette inéquation.
L'ensemble des solutions du système (Σ) est représenté par la partie non hachurée du plan.
Les inégalités de (Σ) étant non strictes, les points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de la figure 6 appartiennent à la représentation de l'ensemble des solutions de (Σ).

Scanned by CamScanner

Exercice Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x-1\leqslant 0, \\ -x+2y+4\geqslant 0, \\ 3y>1, \\ 2x-y+3<0. \end{cases}$$

Exemple 2

Étant donné deux nombres réels quelconques a et b, cherchons l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels tels que

$$a\leqslant x+y\leqslant b.$$

Cela revient à résoudre le système d'inéquations

$$(\Sigma)\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x+y\geqslant a, \\ x+y\leqslant b, \end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres.

On distingue trois cas.

1er cas : $b<a$.

Dans ce cas, $S(\Sigma)=\varnothing$.

2e cas : $a=b$.

(Σ) est alors équivalent à l'équation

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad x+y=a.$$

D'où : $$S(\Sigma)=\{(t, a-t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}.$$

3e cas : $a<b$.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère la droite (D) d'équation $x+y=a$.

On hachure la partie du plan formée des points dont le couple des coordonnées n'est pas solution de l'inéquation

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad x+y\geqslant a.$$

Pour ce faire, on remarque que :

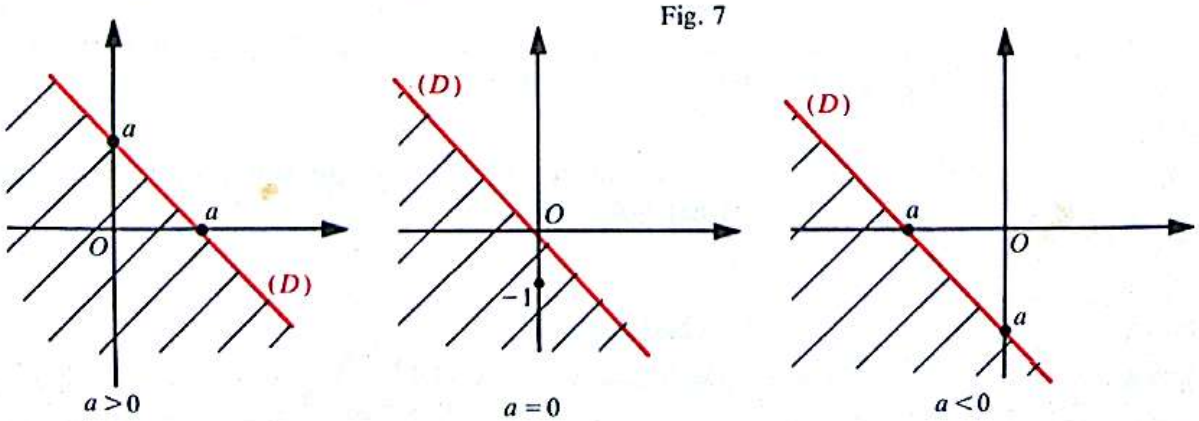
— le point O appartient à la région hachurée si $a>0$;

— le point O n'appartient pas à la région hachurée si $a<0$;

— le point de coordonnées $(-1, 0)$ appartient à la région hachurée si $a=0$.

Cela est illustré par les figures 7.

Fig. 7



Scanned by CamScanner

On considère ensuite la droite (Δ) d'équation $x + y = b$.
On hachure la partie du plan formée des points dont le couple des coordonnées n'est pas solution de l'inéquation

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y \leqslant b.$$

Cela est illustré par les figures 8.

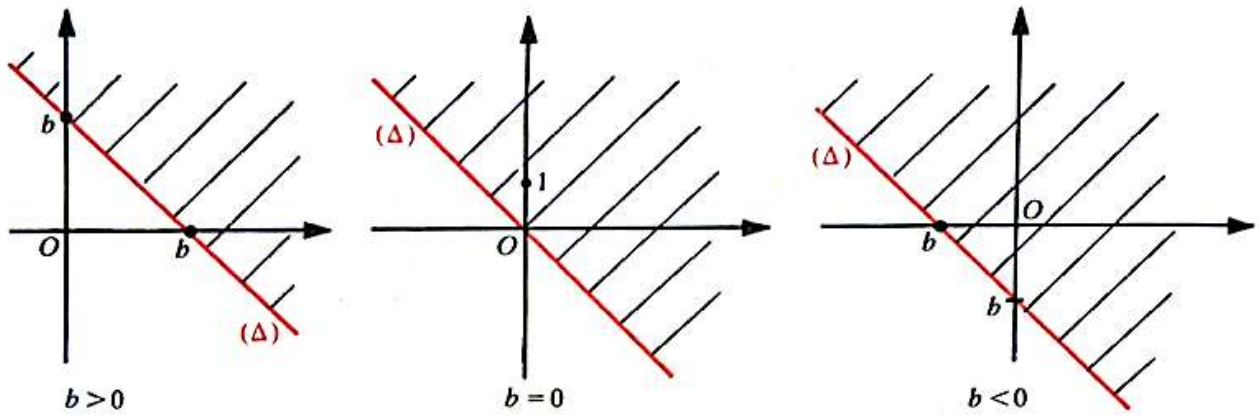


Fig. 8

Finalement, quels que soient les nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble des solutions de (Σ) est représenté par la partie non hachurée du plan (figure 9), c'est-à-dire la bande fermée de bords D et (Δ).

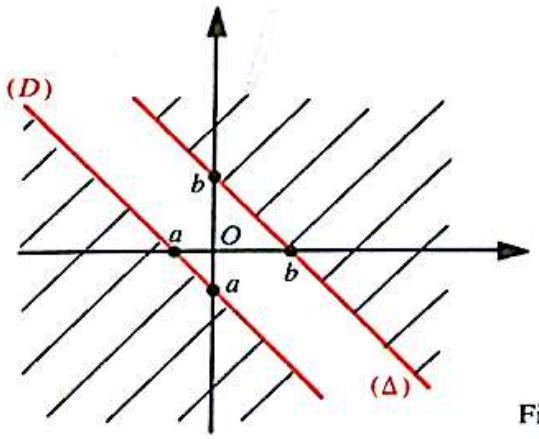


Fig. 9

Exemple 3

Soit le segment $[AB]$ de longueur 2.
Cherchons l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels tels que x et y soient les longueurs de deux côtés d'un triangle admettant le segment $[AB]$ pour troisième côté (figure 10).

Étant donné un couple (x, y) de nombres réels, on sait qu'un tel triangle existe si et seulement si (x, y) est solution du système

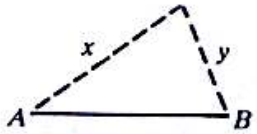


Fig. 10

$$(\Sigma)\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ |x - y| < 2, \\ x + y > 2. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Or, pour tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a $|x-y|<2$ si et seulement si $-2<x-y<2$.

Le système (Σ) est donc équivalent au système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ x-y-2<0, \\ x-y+2>0, \\ x+y-2>0. \end{cases}$$

Vérifier que l'ensemble des solutions de (Σ) est représenté par la partie non hachurée du plan, figure 11.

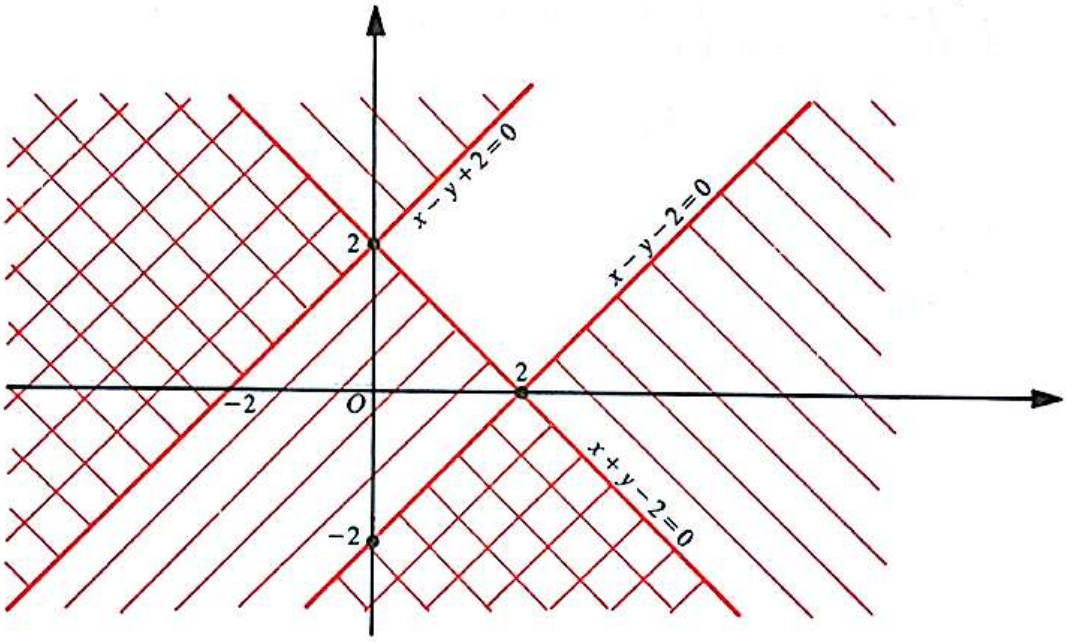


Fig. 11

Les inégalités de (Σ) étant strictes, les points des deux demi-droites et du segment bordant la région non hachurée n'appartiennent pas à la représentation graphique de $S(\Sigma)$.

Exercice

Soit le système d'inéquations

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} mx-2y-1\geqslant 0, \\ -2x+my+4\leqslant 0, \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

a) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de (Σ) dans chacun des cas suivants :

$$m=0, \quad m=-2, \quad m=2.$$

b) Trouver l'ensemble des nombres réels m tels que $(-3, 1)$ soit une solution de (Σ).

Scanned by CamScanner

3 Quelques problèmes se ramenant à la résolution d'un système de contraintes

1) Parabole passant par trois points donnés

Exemple

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), déterminons la ou les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les trois points

$A(1, -2)$, $B(-1, 0)$, $C(2, 3)$.

Soit la parabole (P) d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
Les points A, B et C appartiennent à (P) si et seulement si (a, b, c) est solution du système d'équations

$$(\Sigma)\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} a + b + c = -2, \\ a - b + c = 0, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

Vérifier que $S(\Sigma) = \{(2, -1, -3)\}$.
La parabole d'équation $y = 2x^2 - x - 3$ est donc la seule parabole répondant à la question (figure 12).

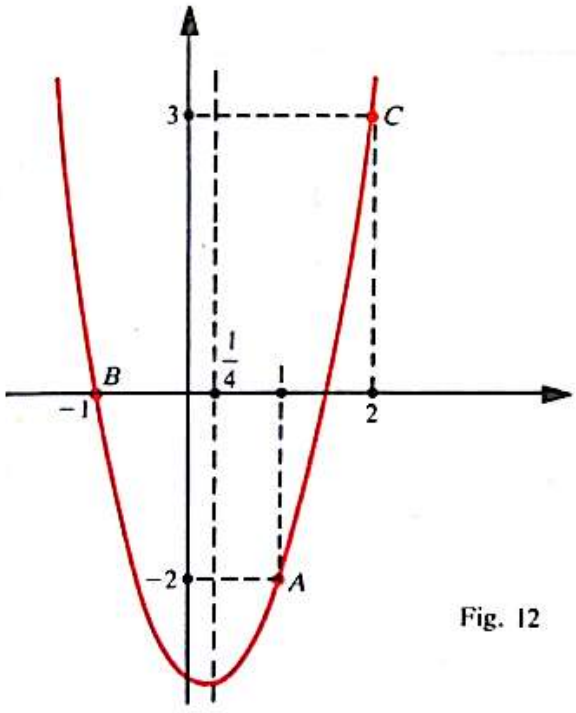


Fig. 12

2) Problèmes d'intersection

Exemple

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x - 3$ et la droite (D) de coefficient directeur quelconque m et passant par le point $A(2, -5)$.
Étudions les points d'intersection de (P) et de (D) suivant les valeurs du paramètre m.

Scanned by CamScanner

Une équation de (D) est $y+5=m(x-2)$, ou encore

$$y=mx-2m-5.$$

Les coordonnées des points d'intersection de (P) et (D), s'ils existent, sont les solutions du système d'équations

$$(\Sigma) \qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y=x^2-2x-3, \\ y=mx-2m-5. \end{cases}$$

Vérifier que (Σ) est équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} mx-2m-5=x^2-2x-3, \\ y=mx-2m-5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-(m+2)x+2m+2=0, \\ y=mx-2m-5. \end{cases}$$

Résolvons l'équation du second degré :

$$(E) \qquad x\in\mathbb{R}, \quad x^2-(m+2)x+2m+2=0.$$

Son discriminant Δ est m^2-4m-4.

Le polynôme du second degré m^2-4m-4 possède deux zéros, $2-2\sqrt{2}$ et $2+2\sqrt{2}$.

On distingue deux cas.

1er cas : $m\in\left]2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\right[$.

Dans ce cas, on a $\Delta<0$ et l'équation (E) n'a aucune solution.
D'où $S(\Sigma)=\varnothing$ et, par conséquent, $(P)\cap(D)=\varnothing$.

2e cas : $m\in\left]\leftarrow, 2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2+2\sqrt{2}, \rightarrow\right[$.

Dans ce cas, on a $\Delta\geqslant 0$ et l'équation (E) a deux solutions, distinctes ou confondues, x' et x'' telles que

$$x'=\frac{m+2-\sqrt{m^2-4m-4}}{2}, \qquad x''=\frac{m+2+\sqrt{m^2-4m-4}}{2}.$$

Vérifier que $S(\Sigma)=\{(x', mx'-2m-5), (x'', mx''-2m-5)\}$.

La parabole (P) et la droite (D) ont donc deux points d'intersection, distincts ou confondus; ce sont les points de coordonnées :

$$\left(\frac{m+2-\sqrt{m^2-4m-4}}{2}, \frac{m^2-2m-10-m\sqrt{m^2-4m-4}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{m+2+\sqrt{m^2-4m-4}}{2}, \frac{m^2-2m-10+m\sqrt{m^2-4m-4}}{2}\right).$$

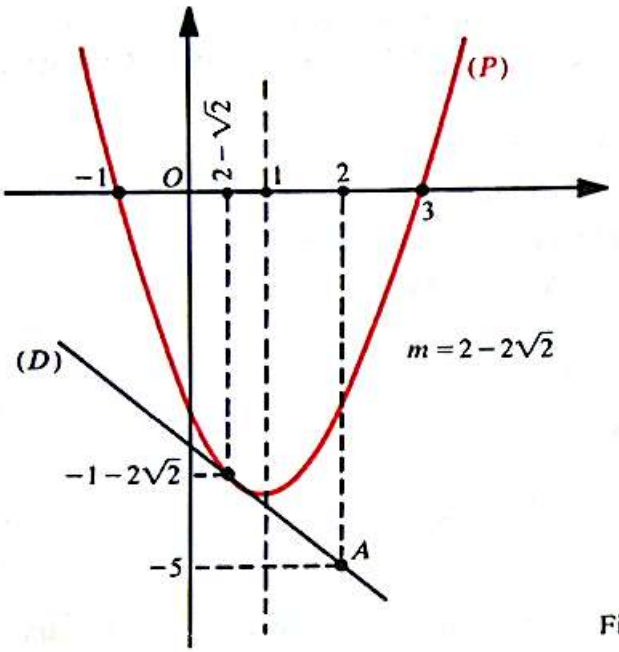
Cas particuliers.

Vérifier que si

- $m=2-2\sqrt{2}$, l'intersection de (P) et (D) est réduite au seul point de coordonnées $(2-\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2})$;
- $m=2+2\sqrt{2}$, l'intersection de (P) et (D) est réduite au seul point de coordonnées $(2+\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2})$.

Ces résultats sont illustrés par les figures 13.

Scanned by CamScanner



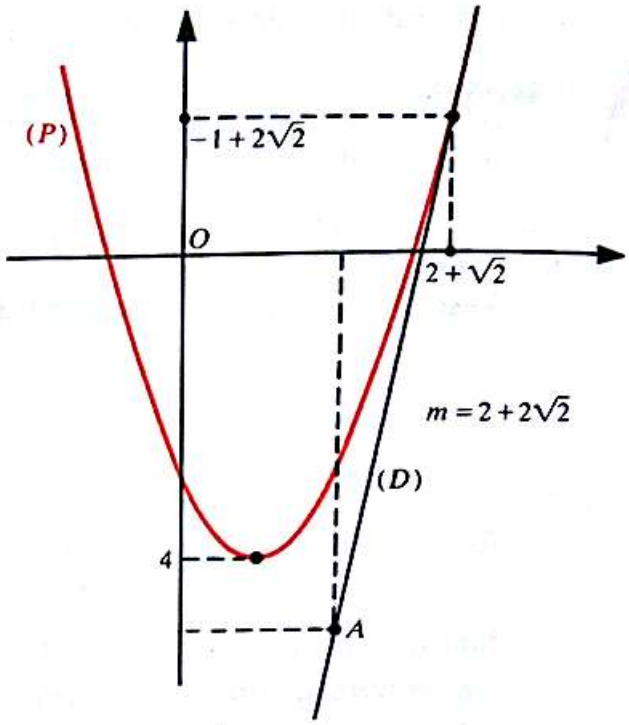
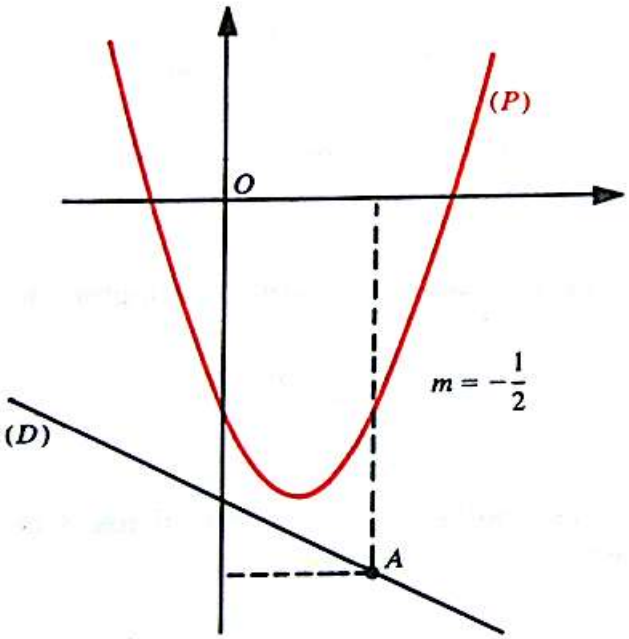
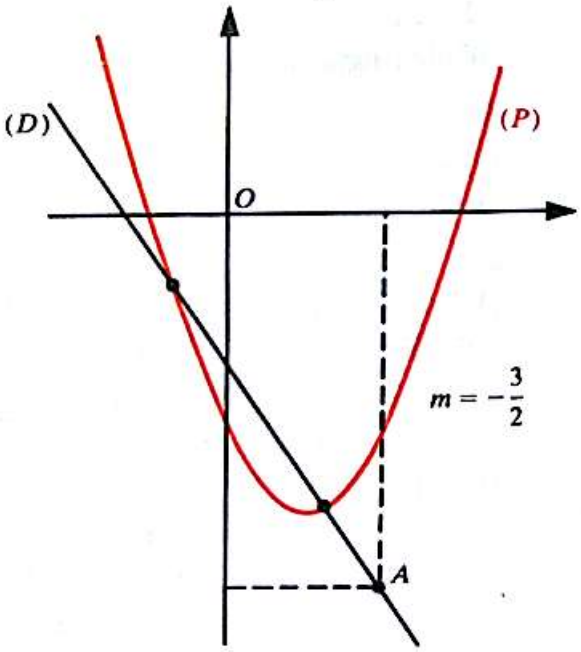


Fig. 13





Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ deux parties du plan.
Construire $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et calculer les coordonnées des éléments de $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C}_2)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(\mathcal{C}_1)$ admet pour équation : $y = 2x^2 - x + 5$,
$(\mathcal{C}_2)$ admet pour équation : $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $(\mathcal{C}_1)$: $x^2 + y^2 = 4$,
$(\mathcal{C}_2)$: $y = x^2 + 1$;

c) $(\mathcal{C}_1)$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$,
$(\mathcal{C}_2)$: $x + y - 1 = 0$;

Scanned by CamScanner

d) $(\mathcal{C}_1) : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0,$
$(\mathcal{C}_2) : mx - y + 1 - m = 0,$
où m est un paramètre réel.

3) Un problème de chimie

Probatoire 1981 (Côte-d'Ivoire)

Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume $V = 70$ cm^3. Après passage de l'étincelle électrique et retour aux conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène. Quelle était la composition du mélange initial?

Puisqu'il reste de l'oxygène à la fin de l'expérience, les combustions des deux hydrocarbures ont été complètes : il s'est formé du dioxyde de carbone et de l'eau sous forme de vapeur qui a été condensée ensuite.

Rappelons que dans des conditions données de température et de pression, les volumes de corps purs gazeux sont dans le même rapport que les moles correspondantes.
Or, on a

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O,$$

ce qui signifie qu'une mole de méthane (CH_4) et deux moles d'oxygène donnent une mole de dioxyde de carbone (CO_2) (et deux moles d'eau).

D'après le rappel ci-dessus, le mélange d'un volume x de méthane et d'un volume $2x$ d'oxygène donne un volume x de dioxyde de carbone.

De même, puisque

$$C_2H_2 + \frac{5}{2} O_2 \longrightarrow 2CO_2 + H_2O,$$

le mélange d'un volume y d'acétylène (C_2H_2) et d'un volume $\frac{5}{2}y$ d'oxygène donne un volume $2y$ de dioxyde de carbone.

Soit $\begin{cases} x \text{ le volume de méthane, dans le mélange initial,} \\ y \text{ le volume d'acétylène,} \\ z \text{ le volume d'oxygène,} \end{cases}$

On a :
— volume du mélange initial : $x + y + z = 70;$
— volume du dioxyde de carbone produit : $x + 2y = 30;$
— volume des réactifs : $x + 2x + y + \frac{5}{2}y = 60.$

Scanned by CamScanner

Le système d'équations

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x+y+z=70,\\ x+2y=30,\\ 3x+\dfrac{7}{2}y=60, \end{cases}$$

admet la solution unique (6, 12, 52).

Le mélange initial était donc composé de 6 cm³ de méthane, 12 cm³ d'acétylène et 52 cm³ d'oxygène.

4) Un problème de programmation linéaire

Un avion doit apporter des couvertures et du matériel médical dans une zone sinistrée.
Les couvertures sont emballées en paquets de 150 kg chacun, le matériel médical en caisses pesant 50 kg chacune.
Le chargement de l'avion doit comporter au minimum 300 kg de couvertures et 200 kg de matériel médical.
D'autre part, la charge maximum de l'avion est 3 000 kg.
Enfin, on veut que le nombre de paquets de couvertures soit au moins le double du nombre de caisses de matériel médical. Déterminer graphiquement le (ou les) chargement(s) de l'avion correspondant à un poids total maximum.

D'après International Baccalaureate
Subsidiary Level Mathematical Sudies
Feb. 79

On désigne par x le nombre de paquets de couvertures et par y le nombre de caisses de matériel médical.

• Évidemment : $x\in\mathbb{N}^*$, $y\in\mathbb{N}^*$.

• Chaque paquet de couvertures pèse 150 kg et le chargement de l'avion doit comporter au minimum 300 kg de couvertures.

D'où : $150x\geqslant 300,$

c'est-à-dire : $x\geqslant 2.$

• Chaque caisse de matériel médical pèse 50 kg et le chargement de l'avion doit comporter au minimum 200 kg de matériel médical.

D'où : $50y\geqslant 200,$

c'est-à-dire : $y\geqslant 4.$

• La charge maximum de l'avion est 3 000 kg.

D'où : $150x+50y\leqslant 3\,000,$

c'est-à-dire : $3x+y\leqslant 60.$

• Le nombre de paquets de couvertures est au moins le double du nombre de caisses de matériel médical.

D'où : $x\geqslant 2y.$

Scanned by CamScanner

Le couple (x, y) cherché doit donc être solution du système de contraintes :

$$(\Sigma) \qquad (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ y \geqslant 4, \\ 3x + y \leqslant 60, \\ x \geqslant 2y. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (Σ) est représenté, figure 14, par l'ensemble des points noirs et rouges de la région du plan non hachurée.
Le point rouge a pour coordonnées (18; 6).
Pour ce point, la charge de l'avion est maximum.
Ce point correspond à la solution cherchée :

18 paquets de couvertures,
6 caisses de médicaments.

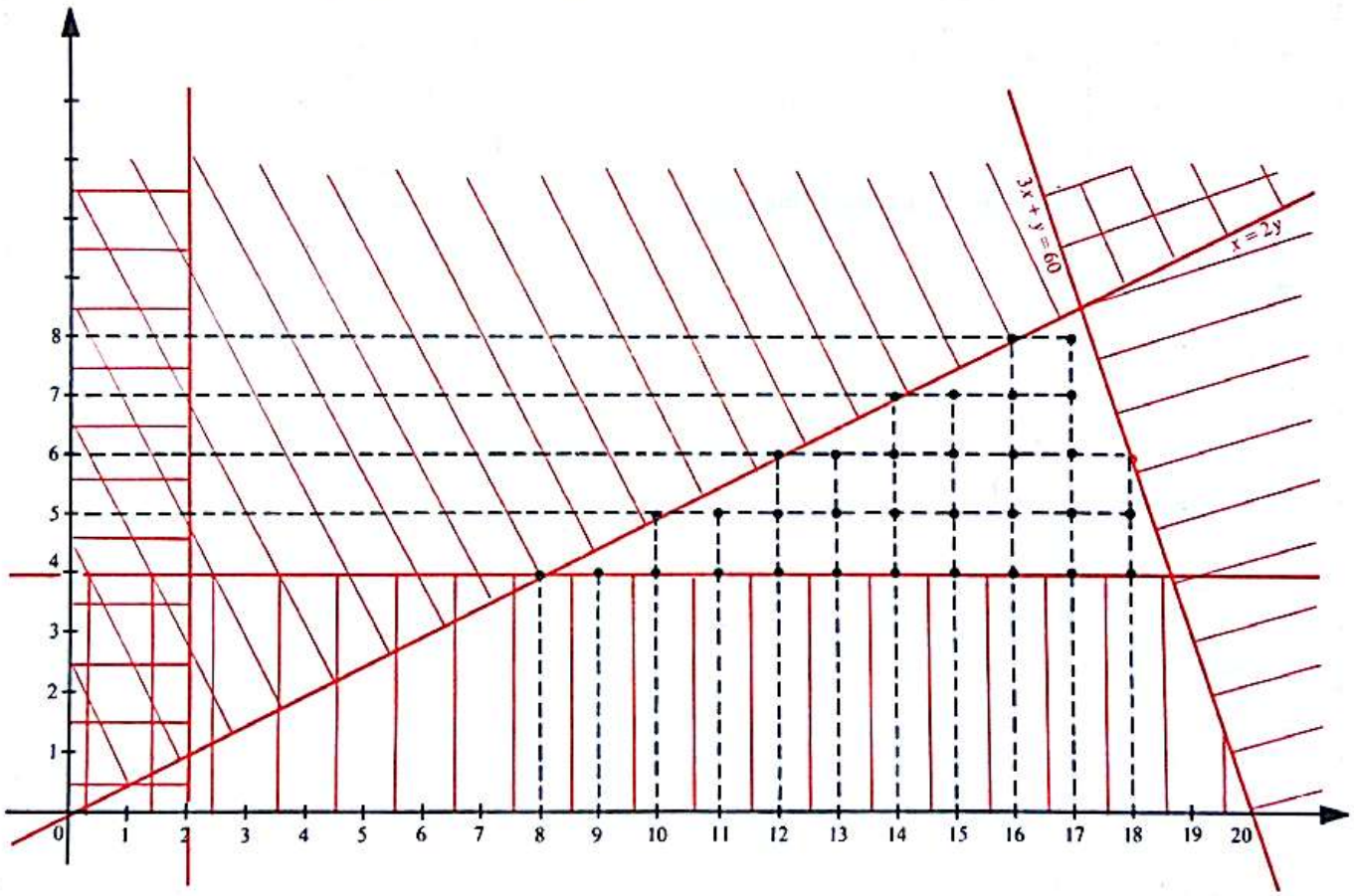


Fig. 14

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). Résoudre les systèmes suivants :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x-3y=\dfrac{-5}{6} \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+3y=1 \\ -3x+y=7 \\ \dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{14}{3} \end{cases}$

3) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+3y=1 \\ -x+2y=8 \end{cases}$

4) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} -3x+y=\dfrac{2}{3} \\ -x+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{2}{9} \\ 9x-3y=-2. \end{cases}$

Dans chaque cas, interpréter graphiquement le résultat trouvé.

2 (1). Résoudre les systèmes :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}=-\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{2x+y}{4}$.

3 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit 4 points $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, 0)$ et $D(4, -1)$. Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (BD).

4 (1). Résoudre les systèmes suivants dépendant de deux paramètres a et b :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ ax-by=2 \end{cases}$

3) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} ax+by=1 \\ bx+ay=-2 \end{cases}$

4) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+ay=b \\ bx+y=-a. \end{cases}$

5 (1). Soit un segment $[MN]$ de longueur ℓ et P un point du segment tel que

$$\frac{PM}{PN}=k \quad (k\in\mathbb{R}_+^*).$$

Calculer PM et PN.

6 (1). Soit le système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+ay=0 \\ ax-y=\dfrac{a}{2} \end{cases}$$

dépendant du paramètre a.
Déterminer a pour que le système admette une solution unique.
Quelle est cette solution?

7 (1). Même question pour chacun des systèmes suivants :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+y=a \\ x-2y=2 \\ ax+y=a^2 \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=a \\ (a+2)x+(a-2)y=5a. \end{cases}$

8 (1). Soit le système

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} mx-2y=m \\ 3x-(m+1)y=1 \end{cases}$$

dépendant du paramètre m.
Déterminer m pour que le système admette une solution unique (x, y) et que la valeur de y soit le double de celle de x.

9 (1). Soit le système

$$(\Sigma)\ (x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2mx-(2n+m)y=4 \\ (m-n)x+my=2 \end{cases}$$

dépendant de deux paramètres m et n.

a) Déterminer m et n pour que le couple $(2, -3)$ soit solution du système (Σ).

b) Le couple $(-1, 2)$ est-il solution du système (Σ)?

10 (1). Résoudre les systèmes suivants, dépendant du paramètre m :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x-(m+1)y+m=0 \\ -3x+my+1=0 \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} mx-3y+m-2=0 \\ -2x+(m+1)y=0. \end{cases}$

11 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit les points $A(-1, 0)$ et $B(2, 0)$.
(Δ) étant une droite quelconque passant par A et (D) la droite passant par B et perpendiculaire à (Δ), calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (Δ) et (D).

Scanned by CamScanner

Note : On pourra prendre le coefficient directeur a de (Δ) comme paramètre.

12 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit la droite (D) d'équation

$$-x+2y+5=0.$$

(Δ) étant une droite passant par 0, calculer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites (D) et (Δ).

13 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit la droite (D) d'équation

$$mx-y+m+2=0,$$

dépendant du paramètre m.

a) Montrer que (D) passe par un point fixe A lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

b) Déterminer m pour que (D) et la droite (Δ) d'équation $y=x$ soient sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

14 (1). Soit un carré $ABCD$ de côté a et un point M du segment $]AB]$. Sur la demi-droite $[BA)$ on prend un point N tel que $BN=2AM$. Soit P le point d'intersection des droites (DM) et (CN), et E le projeté orthogonal de P sur (DC). On pose $AM=\ell$.

a) Exprimer DE et EP en fonction de a et ℓ.

b) Trouver l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit $]AB]$.

15 (1). Résoudre les systèmes suivants :

1) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 3x+6y-2z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

2) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x-y+z=-3 \\ 3x+2y-z=10 \\ -x+3y+2z=-1 \end{cases}$

3) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -3x+2y+z=-5 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-2y-2z=5 \end{cases}$

4) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -3x+2y+z=-1 \\ 2x-3y+2z=5 \\ 4x-y-2z=1. \end{cases}$

16 (1). Résoudre le système :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

17 (1). Résoudre les systèmes :

1) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} \frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2} \\ 2x-3y+z=3 \end{cases}$

2) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ x+y+z=S \end{cases}$

où a, b, c et S sont des paramètres.

18 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) Déterminer le (ou les) parabole(s) d'équation $y=ax^2+bx+c$ passant par les trois points $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ et $C(-2, -7)$.

2) Existe-t-il une parabole d'équation

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

passant par les trois points $M(1, -1)$, $N(2, -3)$ et $P(-1, 3)$?

19 (1). Résoudre les systèmes suivants dépendant du paramètre m :

1) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ mx+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$

2) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x+2my+z=1 \\ x-2y-z=2 \\ -2x+y-mz=2. \end{cases}$

20 (1). Une fontaine remplit un bassin en 3 h, une autre en 4 h et une troisième en 5 h. Elles coulent pendant 1 h et il manque 13 hl pour que le bassin soit rempli.

a) Quelle est la capacité du bassin?

b) Quelle est le débit (en hl/h) de chaque fontaine?

21 (1). Soit la fonction

$$\begin{aligned} f_m : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto mx^2-2(m+1)x-3m \end{aligned}$$

dépendant du paramètre m, et (P_m) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J). Montrer que (P_m) passe par deux points fixes A et B lorsque m décrit l'ensemble $\mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de ces points.

22 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ deux parties du plan. Construire $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et calculer les coordonnées des éléments de $(\mathcal{C}_1)\cap(\mathcal{C}_2)$ dans chacun des cas suivants :

1) $(\mathcal{C}_1)$ admet pour équation : $y=2x^2+x-3$; $(\mathcal{C}_2)$ admet pour équation : $y=-2(x-1)$.

2) $(\mathcal{C}_1)$ admet pour équation : $y=x^2-2x+1$; $\mathcal{C}_2)$ admet pour équation : $y=-2x^2+x+7$.

Scanned by CamScanner

23 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la droite (D) d'équation $x+y-3=0$, et la parabole (P_m) d'équation $y=x^2+x+m$ dépendant du paramètre m.
Étudier les points d'intersection de (P_m) et (D) suivant les valeurs du paramètre m.

24 (1). Même question pour la droite (D) d'équation $x-y+2=0$ et le cercle $(\mathcal{C}_m)$ d'équation $x^2+y^2-2x-2y+2=m^2$, dépendant du paramètre réel m.

25 (1). Même question pour le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ et la droite (D_m) d'équation $mx-y=0$, dépendant du paramètre m.

26 (2). Résoudre graphiquement le système suivant :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ 2\leqslant 2x+3y\leqslant 5. \end{cases}$$

27 (2). Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad (2x-y+2)(x+y-4)<0$;

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x-y)(x+y)(y-2)\geqslant 0$;

3) $(x, y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x-2y+4)^2<(2x+y-1)^2$.

28 (2). Résoudre graphiquement les systèmes :

1) $(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} (x-y)(x+2y)<0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

2) $(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \dfrac{2x-y}{x+y}<0 \\ x+y+3>0. \end{cases}$

29 (2). Yao Emmanuel veut acheter au moins 8 timbres de 100 F et au moins 6 timbres de 125 F.
Combien de timbres de chaque catégorie peut-il demander, sachant qu'il a 2 000 F?

30 (2). Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), considérons les 3 points $A(-1, 1)$, $B(2, 2)$ et $C(1, -2)$.
M étant le point du plan de coordonnées (x, y), former un système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est celui des couples (x, y) correspondant aux points M situés à « l'intérieur » du triangle ABC.

31 (2). Soit un carré $ABCD$ de côté a. Trouver l'ensemble des couples (x, y) de nombre réels tels que x et y soient les longueurs de deux côtés d'un triangle admettant

— le segment $[DC]$ pour troisième côté,

— un point M à « l'intérieur » du carré $ABCD$ pour troisième sommet.

32 (2). Soit la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

et le système

$$(\Sigma)\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 2x+y\leqslant 4 \\ 2x+5y\leqslant 10. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble $S(\Sigma)$ des solutions système (Σ).

b) Trouver graphiquement le *maximum* sur $S(\Sigma)$ de la fonction f.
Donner un élément de $S(\Sigma)$ en lequel ce maximum est atteint.

33 (2). Soit la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & x+2y \end{array}$$

et le système

$$(\Sigma)\quad (x, y)\in\mathbb{N}^2,\ \begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 6 \\ 0\leqslant y\leqslant 7 \\ 6x+5y\geqslant 30 \\ x+3y\geqslant 12. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement l'ensemble $S(\Sigma)$ des solutions de (Σ).

b) Trouver graphiquement le *minimum* sur $S(\Sigma)$ de la fonction f. Donner tous les éléments de $S(\Sigma)$ en lesquels ce minimum est atteint.

Scanned by CamScanner

Problèmes

34 Une machine fabrique trois produits différents A, B et C. La fabrication d'une unité du produit A nécessite 5 h de travail, du produit B nécessite 3 h de travail et du produit C nécessite $\frac{1}{3}$ h de travail. On veut que cette machine donne 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail. Parmi ces 100 unités combien d'unités de chaque produit peut-on envisager?

35 Soit l'équation

(E) $\quad x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + b = 0$

où $\quad a \in \mathbb{R}^* \quad$ et $\quad b \in \mathbb{R}$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M de coordonnées (a, b). Trouver l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

1) (E) admet deux solutions distinctes;

2) (E) admet deux solutions confondues;

3) (E) admet deux solutions de signes contraires;

4) (E) admet deux solutions strictement positives;

5) (E) admet deux solutions strictement négatives.

36 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère la parabole (P_m) d'équation $y = -mx^2 + (m+2)x$, dépendant du paramètre non nul m.

1) Montrer que (P_m) passe par deux points fixes A et B lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$. Calculer les coordonnées de ces points.

2) Tracer (P_{-1}) et (P_2).

3) m étant le paramètre considéré précédemment, on considère la parabole (Q_m) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par trois points $C(-1, -2)$, $D(2, 4)$ et $E(1, 2+2m)$.

a) Exprimer a, b et c en fonction de m.

b) Montrer que, quelque soit m, (Q_m) coupe (OI) en deux points distincts M et N. Vérifier que le produit $OM \times ON$ est constant lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$. Calculer m pour que MN soit égale à $2\sqrt{6}$.

c) Déterminer, pour chaque valeur de m, la transformation du plan pour laquelle (P_m) a pour image la parabole (Q_m).
Tracer (Q_{-1}) et (Q_2) à l'aide de (P_{-1}) et (P_2).

37 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 + 3x.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique (P).

2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (P) et de la droite (D) d'équation $x + y + 3 = 0$.

3) Soit la droite (Δ_m) d'équation

$$x + y - m = 0,$$

dépendant du paramètre m.
Étudier les points d'intersection de (P) et (Δ_m) suivant les valeurs du paramètre m.

4) On désigne par M et N les points d'intersection, s'ils existent, de (P) et (Δ_m). Calculer les coordonnées du milieu K du segment $[MN]$. Trouver l'ensemble décrit par le point K lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

38 Soit le système

$$(E_m) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y - mx^2 + 4 = 0 \\ 2x + y + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout élément m de $\mathbb{R}$, le système (E_m) admet le couple $(0, -4)$ comme solution.

2) Dans chacun des cas suivants, peut-on trouver une valeur du paramètre m pour que le système donné admette comme solution(s) :

a) le couple $(-1, -5)$?

b) les couples $(1, -6)$ et $(-2, -12)$?

c) les couples $(1, -3)$ et $(-4, 12)$?

3) Résoudre chacun des systèmes (E_0) et (E_1) et, dans chaque cas, interpréter graphiquement le résultat trouvé.

4) Montrer que, pour $m \leqslant -\frac{1}{3}$, le système (E_m) a le même ensemble de solutions que l'équation :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y - mx^2 + 4 = 0.$$

5) Résoudre le système :

$$(F) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y + \frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \\ 2|x| + y + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

39 Soit deux systèmes

$$(E_m) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - m^2 = 0 \\ \sqrt{3}x + y - 2m = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

(F_m) $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases}\sqrt{3}x+y-2m=0\\ \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)x+y-(m+3)=0\end{cases}$

dépendant du paramètre m, supposé *strictement positif*.

1) *a*) Résoudre le système (E_m) et, à l'aide d'un repère orthonormé (O, I, J) du plan, donner une interprétation graphique du résultat trouvé.

b) Calculer m pour que le couple $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ soit solution du système (E_m).

c) Soit M un point du plan dont le couple des coordonnées est solution du système (E_m). Trouver l'ensemble décrit par le point M lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

2) *a*) Vérifier que, quel que soit m, le couple $(\sqrt{3}, 3)$ est solution de la deuxième équation du système (F_m).

b) Résoudre le système (F_m) et donner une interprétation graphique du résultat trouvé.

c) Lorsque (F_m) admet une solution unique, on désigne par N le point ayant cette solution pour couple de coordonnées.
Trouver l'ensemble décrit par le point N lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

3) Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J), on considère :

— le cercle $(\mathcal{C}_m)$ d'équation
$$x^2+y^2-m^2=0;$$
— la droite (D_m) d'équation
$$\sqrt{3}x+y-2m=0;$$
— la droite (Δ_m) d'équation
$$\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)x+y-(m+3)=0.$$

a) Pour chaque valeur du paramètre m, déduire de ce qui précède un programme de construction de $(\mathcal{C}_m)$, (D_m) et (Δ_m) sans faire aucun calcul.

b) Dans quel cas le système
$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}x^2+y^2-m^2=0\\ \sqrt{3}x+y-2m=0\\ \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)x+y-(m+3)=0\end{cases}$$
admet-il une solution?

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation
$$x^2-8x+y^2-12y+26=0.$$

1) *a*) Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$. Construire $(\mathcal{C})$.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et la droite (OJ).

2) Construire les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par O.

a) Donner un programme de construction de ces tangentes.

b) Calculer les coordonnées des points de contact.

c) Donner les équations de ces tangentes.

3) Soit la droite (D_m) d'équation
$$y-mx=0$$
dépendant du paramètre réel m.
Étudier les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (D_m) suivant les valeurs du paramètre m.

4) On désigne par M et N les points d'intersection, s'ils existent, de $(\mathcal{C})$ et (D_m), et K le milieu de $[MN]$.

a) Déterminer graphiquement l'ensemble (Γ) décrit par le point K lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

b) Calculer les coordonnées du point K. En déduire, par calcul, l'ensemble (Γ).

41 Monsieur X dispose à une période donnée de 15 hectares de terre et de 40 journées de travail. Il peut produire du produit A ou du produit B. La production d'un hectare de produit A nécessite 4 journées de travail et procure un revenu de 1 200 F; la production d'un hectare de produit B nécessite 2 journées de travail et procure un revenu de 800 F.

1) Combien d'hectares de produit A et d'hectares de produit B, Monsieur X doit-il produire pour *maximiser* son revenu total?

2) Monsieur X, pour des raisons personnelles, loue à Monsieur Y l'ensemble des ressources (terre et travail) dont il dispose. Il veut *minimiser* le coût total de la location de manière qu'il ne soit pas perdant.
Quel prix de location pour chaque hectare de terre et celui pour chaque journée de travail, Monsieur X doit-il proposer à Monsieur Y?

Scanned by CamScanner

5 Limites et continuité Dérivation

Leçon 1 : LIMITES ET CONTINUITÉ
Leçon 2 : DÉRIVATION

1 Limites et continuité

1) Introduction à la notion de limite d'une fonction en un point

a) **Exemple**

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}.$$

Son ensemble de définition D_f est $\mathbb{R}_+ - \{1\}$.
A l'aide d'une calculatrice, calculons l'arrondi d'ordre 6 de $f(x)$ pour quelques valeurs de x « proches » de 1 :

x	0,9	0,99	0,999	0,999 9	1
$f(x)$	0,486 833	0,498 744	0,499 875	0,499 987	

x	1,000 1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	0,500 013	0,500 125	0,501 244	0,511 912

Il semble que la distance entre $f(x)$ et $\frac{1}{2}$ devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de 1.
Cette impression est confirmée par la figure 1 où :

- $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de f;
- la longueur des segments rouges est la distance entre $f(x)$ et $\frac{1}{2}$ pour des nombres x de plus en plus proches de 1.

Scanned by CamScanner

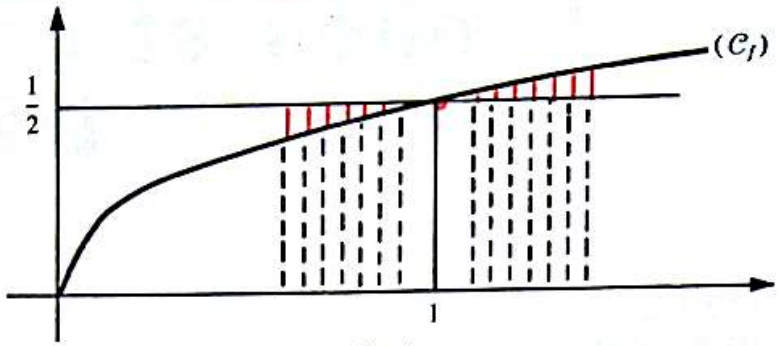


Fig. 1

On dit que $\frac{1}{2}$ est la *limite de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* 1, et on écrit :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Afin de préciser la notion de limite, calculons la distance $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right|$ entre $f(x)$ et $\frac{1}{2}$.

Pour tout élément x de D_f, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{2} &= \frac{2(x-\sqrt{x})}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x-1)} \\
&= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{2(x-1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)^2} \\
&= \frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{|x-1|}{2(\sqrt{x}+1)^2}.
\end{aligned}$$

Nous désirons comparer la distance entre $f(x)$ et $\frac{1}{2}$ et celle entre x et 1.

On a successivement (justifier) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad & \sqrt{x}+1 \geq 1, \\
& (\sqrt{x}+1)^2 \geq 1, \\
& 2(\sqrt{x}+1)^2 \geq 2,
\end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \leqslant \frac{1}{2},$$
$$\frac{|x-1|}{2(\sqrt{x}+1)^2} \leqslant \frac{|x-1|}{2}.$$

D'où : $\forall x \in D_f \quad \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{|x-1|}{2}$.

Il résulte de cette dernière inégalité que si $\frac{|x-1|}{2} < 0{,}01$ alors

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < 0{,}01.$$

D'où : $\forall x \in D_f \quad |x-1| < 0{,}02 \implies \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < 0{,}01.$

De même :

$$\forall x \in D_f \quad |x-1| < 0{,}002 \implies \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < 0{,}001,$$
$$|x-1| < 0{,}0002 \implies \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < 0{,}0001.$$

Plus généralement, donnons-nous un nombre réel strictement positif quelconque ε.

Si $\frac{|x-1|}{2} < \varepsilon$, alors : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

D'où : $\forall x \in D_f \quad |x-1| < 2\varepsilon \implies \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$

On a donc montré que, quel que soit le nombre réel ε strictement positif (aussi petit soit-il), on peut trouver un nombre réel α strictement positif tel que

$$\forall x \in D_f \quad |x-1| < \alpha \implies \left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Ceci est la traduction en langage mathématique du fait que la distance entre $f(x)$ et $\frac{1}{2}$ devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de 1.

b) **Limite d'une fonction en un point**

Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et deux nombres réels a et l.

On dit que l est la *limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a*, ou que l est la *limite de f au point a*, si la distance entre $f(x)$ et l devient aussi petite que l'on veut lorsque x, élément de D_f, est de plus en plus proche de a.

En langage mathématique, cela se traduit par :

> Quel que soit le nombre réel ε strictement positif, on peut trouver un nombre réel α strictement positif tel que
> $$\forall x \in D_f \quad |x-a| < \alpha \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$.

Scanned by CamScanner

Remarque

La fonction f peut être définie ou non définie au point a.
Cependant, nous ne parlerons de la limite de f au point a que s'il existe un intervalle I contenant a tel que $I-\{a\}\subset D_f$.

Cette condition est satisfaite si et seulement si il existe un nombre réel r strictement positif tel que l'un au moins des intervalles (ou union d'intervalles), représentés en rouge sur la figure 2, soit contenu dans D_f.

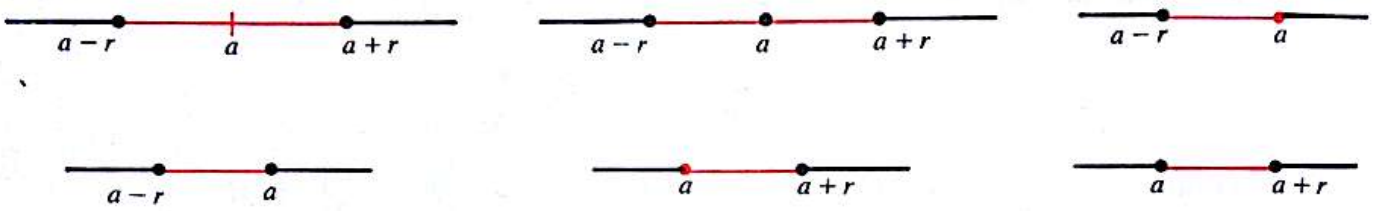


Fig. 2

On démontre et nous admettrons que :

> Si une fonction numérique possède une limite en un point, elle ne possède pas d'autre limite en ce point.

c) Limites et approximation

• On voudrait calculer une valeur approchée de π^2 à 10^{-4} près.
Pour résoudre ce problème, on essaie de déterminer un nombre réel α strictement positif tel que :
si x est une valeur approchée de π à α-près ($|x-\pi|<\alpha$), alors x^2 est une valeur approchée de π^2 à 10^{-4} près ($|x^2-\pi^2|<10^{-4}$).

— Observer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad |x^2-\pi^2|=|x+\pi|\cdot|x-\pi|$.

— Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad |x-\pi|<1 \implies |x+\pi|<8$.

— Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad |x-\pi|<1 \implies |x^2-\pi^2|<8|x-\pi|$.

— Trouver un élément α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad |x-\pi|<\alpha \implies |x^2-\pi^2|<10^{-4}.$$

— Choisir une valeur approchée de π à α-près et en déduire une valeur approchée de π^2 à 10^{-4} près.

• Plus généralement, étant donné un élément quelconque ε de $\mathbb{R}_+^*$, peut-on trouver un élément α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que : si x est une valeur approchée de π à α-près ($|x-\pi|<\alpha$), alors x^2 est une valeur approchée de π^2 à ε-près ($|x^2-\pi^2|<\varepsilon$)?

Cette question posée en termes d'approximation peut aussi être posée comme suit en termes de limite : π^2 est-il la limite au point π de la fonction numérique f définie par $f(x)=x^2$?

Scanned by CamScanner

Afin de répondre à cette question, donnons-nous un élément quelconque ε de $\mathbb{R}_+^*$. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-\pi|<1 \implies |f(x)-\pi^2|<8|x-\pi|.$$

Par conséquent, tout nombre réel x tel que

$$|x-\pi|<1 \quad \text{et} \quad 8|x-\pi|<\varepsilon$$

vérifie :

$$|f(x)-\pi^2|<8|x-\pi|<\varepsilon.$$

Donc, posant $\alpha = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x-\pi|<\alpha \implies |f(x)-\pi^2|<\varepsilon.$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \pi^2$.

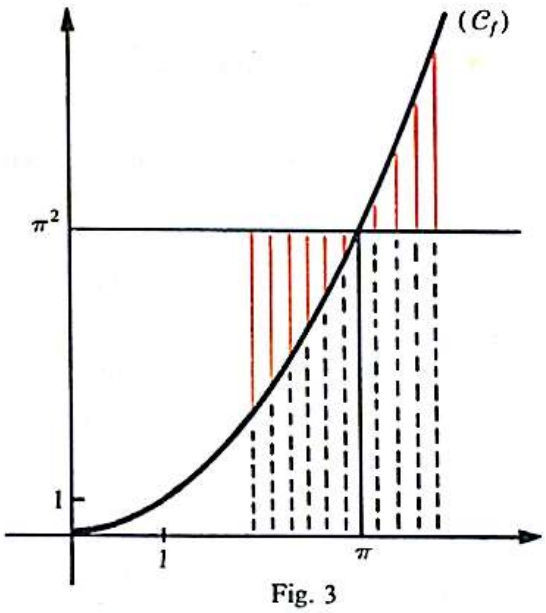


Fig. 3

On « voit » sur la figure 3 que la distance entre $f(x)$ et π^2 devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de π.

2) Opérations sur les limites

Soit c un nombre réel et considérons les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x. \end{array}$$

Observons que, quel que soit le nombre réel a, on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \lim_{x \to a} g(x) = a.$$

Scanned by CamScanner

Cela peut encore s'écrire :

$$\lim_{x \to a} c = c, \quad \lim_{x \to a} x = a.$$

On démontre et nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions numériques possédant une limite au point a.
On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I - \{a\} \subset D_f \cap D_g$.
Alors $f+g$ et fg possèdent une limite au point a et on a :

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$

$$\lim_a fg = \left(\lim_a\right)\left(\lim_a g\right).$$

Si la limite de g au point a est non nulle, $\frac{f}{g}$ possède une limite au point a et on a :

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}.$$

En particulier :

Soit c un nombre réel.
Si la fonction numérique f possède une limite au point a, alors :

$$\lim_a (f+c) = \lim_a f + c, \quad \lim_a cf = c \lim_a f;$$

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f} \quad \text{pourvu que } \lim_a f \neq 0.$$

Les résultats concernant la limite de la somme et du produit de deux fonctions se généralisent au cas d'un nombre fini quelconque de fonctions.
En particulier :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
Si la fonction numérique f possède une limite au point a, alors :

$$\lim_a f^n = \left(\lim_a f\right)^n.$$

Scanned by CamScanner

Exemples

a) Pour tout nombre réel a et tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n.$$

b) $$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4) = \lim_{x \to 2} (3x^2) + \lim_{x \to 2} (-5x) + \lim_{x \to 2} 4$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} x^2 - 5 \lim_{x \to 2} x + 4$$

$$= 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 6.$$

c) $$\lim_{x \to -1} (x^2+1)(x^2-3x+1) = \left[\lim_{x \to -1} (x^2+1)\right]\left[\lim_{x \to -1} (x^2-3x+1)\right]$$

$$= [(-1)^2+1][(-1)^2-3(-1)+1]$$

$$= 10.$$

d) $$\lim_{x \to 3} -\frac{2}{3}(2x-1)^3 = -\frac{2}{3} \lim_{x \to 3} (2x-1)^3$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\lim_{x \to 3} (2x-1)\right]^3 = -\frac{250}{3}.$$

e) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1)}{\lim\limits_{x \to 1} (2x-1)} = 0.$$

3) Continuité d'une fonction en un point

On démontre et nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2

Si la fonction numérique f est définie au point a et possède une limite en ce point, alors : $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et un élément a de D_f. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a et contenu dans D_f.

Si la limite de f au point a existe (et est donc égale à $f(a)$), on dit que la fonction f est *continue au point a*.

Si la limite de f au point a n'existe pas, on dit que f est *discontinue au point a*.

Théorème 3

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

Démonstration

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$
une fonction polynôme.
Pour tout nombre réel a, on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x \to a} x + b_0$$
$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_1 a + b_0$$
$$= f(a).$$

La fonction f est donc continue en tout point a de $\mathbb{R}$.

Théorème 4

Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Démonstration

Soit f et g deux fonctions polynômes et notons h la fonction rationnelle $\frac{f}{g}$.
L'ensemble de définition D_h de h est formé de tous les nombres réels a tels que $g(a) \neq 0$.
Pour tout élément a de D_h, on a :

$$\lim_{a} h = \frac{\lim\limits_{a} f}{\lim\limits_{a} g} = \frac{f(a)}{g(a)} = h(a).$$

La fonction h est donc continue en tout point a de D_h.

On démontre et nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 5

Les fonctions numériques suivantes sont continues en tout point de leur ensemble de définition :

$$x \longmapsto |x|, \quad x \longmapsto \sqrt{x}, \quad x \longmapsto \sin x, \quad x \longmapsto \cos x.$$

Exercices Calculer les limites :

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + \sqrt{x})$;

b) $\lim\limits_{x \to 4} (-3x^2 + x + 7)x\sqrt{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x + 1 - \sin x + \cos^2 x}{(3x-1)^2}$.

Scanned by CamScanner

4) Limite d'une restriction

Le théorème suivant résulte immédiatement de la définition de limite.

Théorème 6

Soit une fonction numérique g, la restriction f de g à une partie A de son ensemble de définition et un nombre réel a.
On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I-\{a\}\subset A$.

Si g possède une limite l au point a, alors l est aussi la limite de f au point a.

Exemple 1

Calculons la limite au point 2 de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}-\{2\}$.

On a : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$.

Le théorème 1 ne peut donc pas être utilisé ici.
Remarquons que 2 est un zéro de $x \longmapsto x^2+3x-10$; par conséquent, le polynôme $x^2+3x-10$ est divisible par $x-2$.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}-\{2\}$, on a :

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}$$
$$=x+5.$$

f est donc la restriction à $\mathbb{R}-\{2\}$ de l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+5$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=7$, on conclut que : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$.

Exemple 2

Calculons la limite au point 1 de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+-\{1\}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,

on ne peut pas utiliser le théorème 1.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}_+-\{1\}$, on a :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

f est donc la restriction à $\mathbb{R}_+ - \{1\}$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

D'où: $$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Exercices Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x}{x},$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-3x}, \quad \lim_{x \to -1} \frac{3x^2+4x+1}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{|x|-1}.$$

5) Activités : Limite à gauche, limite à droite

Exemple introductif

Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1[& f(x) = x^2 \\ \forall x \in [1, \rightarrow[& f(x) = x+1 \end{cases}$$ (figure 4).

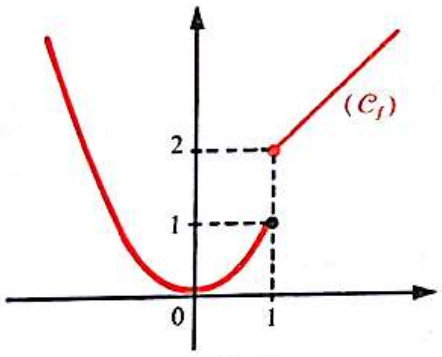


Fig. 4

On note g la restriction de f à $]\leftarrow, 1[$ et h la restriction de f à $]1, \rightarrow[$. Comme g est aussi la restriction à $]\leftarrow, 1[$ de la fonction $x \longmapsto x^2$, il résulte du théorème 6 que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

De même, comme h est aussi la restriction à $]1, \rightarrow[$ de la fonction $x \longmapsto x+1$, on a

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

La limite de f au point 1 n'existe pas car, sinon, on aurait

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 2,$$

contrairement à l'unicité de la limite.

Scanned by CamScanner

Compte tenu de la définition de g et h, il est naturel de noter :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) \text{ la limite de } g \text{ au point 1,}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) \text{ la limite de } h \text{ au point 1.}$$

Ces limites s'appellent respectivement *limite à gauche* et *limite à droite* de f au point 1.

Plus généralement :

Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et un nombre réel a. La limite éventuelle, au point a, de la restriction de f à $D_f \cap]\leftarrow, a[$ est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$$

et est appelée *limite à gauche de f au point a.*

De même, la limite éventuelle, au point a, de la restriction de f à $D_f \cap]a, \rightarrow[$ est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$

et est appelée *limite à droite de f au point a.*

Théorème 7 (admis)

Soit une fonction numérique f et un nombre réel a.
On suppose qu'il existe un élément r de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$]a-r, a+r[- \{a\} \subset D_f .$$

1er cas : f n'est pas définie en a.

La limite de f au point a existe et est égale à l si et seulement si la limite à gauche et la limite à droite de f au point a existent et sont toutes deux égales à l.

2e cas : f est définie en a.

La limite de f au point a existe (c'est-à-dire : f est continue au point a) si et seulement si la limite à gauche et la limite à droite de f au point a existent et sont toutes deux égales à $f(a)$.
(Pour rappel : voir théorème 2.)

Afin de pouvoir traiter complètement les exemples qui suivent, nous admettrons encore le résultat (intuitivement évident) suivant :

Si deux fonctions numériques coïncident sur un intervalle ouvert et si l'une est continue en un point de l'intervalle, l'autre l'est aussi.

Scanned by CamScanner

(On appelle intervalle ouvert tout intervalle de l'un des types suivants : $]a, b[$, $]\leftarrow, a[$, $]a, \rightarrow[$, $\mathbb{R}$.)

Exemple 1

Étudions la continuité de la fonction numérique f, définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_- & f(x) = -x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & f(x) = \sqrt{x}. \end{cases} \qquad \text{(figure 5)}$$

• Étudions d'abord la continuité au point 0.
On a :

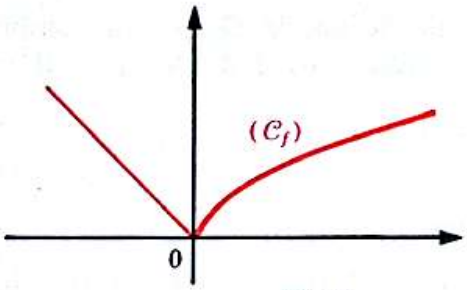


Fig. 5

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, on conclut que f est continue au point 0.

• D'autre part, f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $\mathbb{R}^*$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto -x$, continue en tout point de $\mathbb{R}$. f est aussi continue en tout point de l'intervalle ouvert $\mathbb{R}_+^*$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

• La fonction f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Étudions la continuité de la fonction numérique f, définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1[& f(x) = 1 \\ \forall x \in]1, \rightarrow[& f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \text{(figure 6).}$$

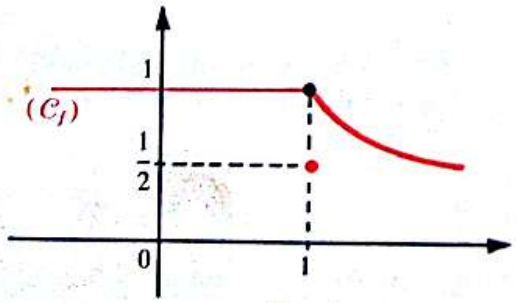


Fig. 6

• On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1 = 1,$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Mais $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et, par conséquent, la limite de f au point 1 n'existe pas, c'est-à-dire, f est discontinue au point 1.

Scanned by CamScanner

• f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]\leftarrow, 1[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto 1$, continue en tout point de $\mathbb{R}$.
f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]1, \rightarrow[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

• f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$ et discontinue au point 1.

Remarque. f n'a pas de limite au point 1 mais, par contre, la restriction de f à $\mathbb{R}-\{1\}$ possède une limite au point 1, égale à 1.

Exemple 3

Étudions la continuité de la fonction numérique f, définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, -1[& f(x) = x^2 + 4x + 3 \\ \forall x \in [-1, \rightarrow[& f(x) = x^3. \end{cases} \qquad \text{(figure 7)}$$

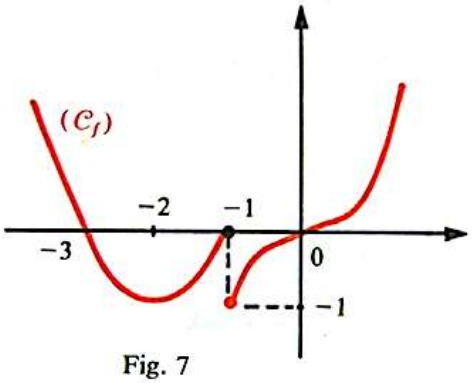


Fig. 7

• On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 4x + 3) = 0$,

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^3 = -1$.

La limite à gauche et la limite à droite de f au point -1 étant différentes, la fonction f n'a pas de limite au point -1 (la restriction de f à $\mathbb{R}-\{-1\}$ n'en n'a pas non plus).
f est donc discontinue au point 1.

• f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]\leftarrow, -1[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto x^2 + 4x + 3$, continue en tout point de $\mathbb{R}$.
f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]-1, \rightarrow[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction $x \longmapsto x^3$, continue en tout point de $\mathbb{R}$.

• f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}-\{-1\}$ et discontinue au point -1.

Exercices

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x|$.

— Représenter graphiquement la fonction f.
— Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f au point 0.
— La fonction f admet-elle une limite au point 0?
— Étudier la continuité de f.

2) Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{|x|}{x}$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{x^2 + |x|}{|x|}$.

— Représenter graphiquement f et g.

Scanned by CamScanner

— Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f et g au point 0.
— Les fonctions f et g admettent-elles une limite au point 0?
— Étudier la continuité de f et g.

3) Soit les fonctions numériques f et g, définies respectivement par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \\ f(2) = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 2[\quad g(x) = x - 1, \\ \forall x \in [2, \rightarrow[\quad g(x) = 2. \end{cases}$$

Représenter graphiquement f et g et étudier leur continuité.

4) Pour chacune des fonctions f représentées graphiquement par les figures 8, préciser quelle est la limite de f au point a et, si celle-ci n'existe pas, préciser quelles sont la limite à gauche et la limite à droite de f au point a.
Lorsque la fonction considérée est définie au point a, dire si elle est continue ou discontinue en ce point.

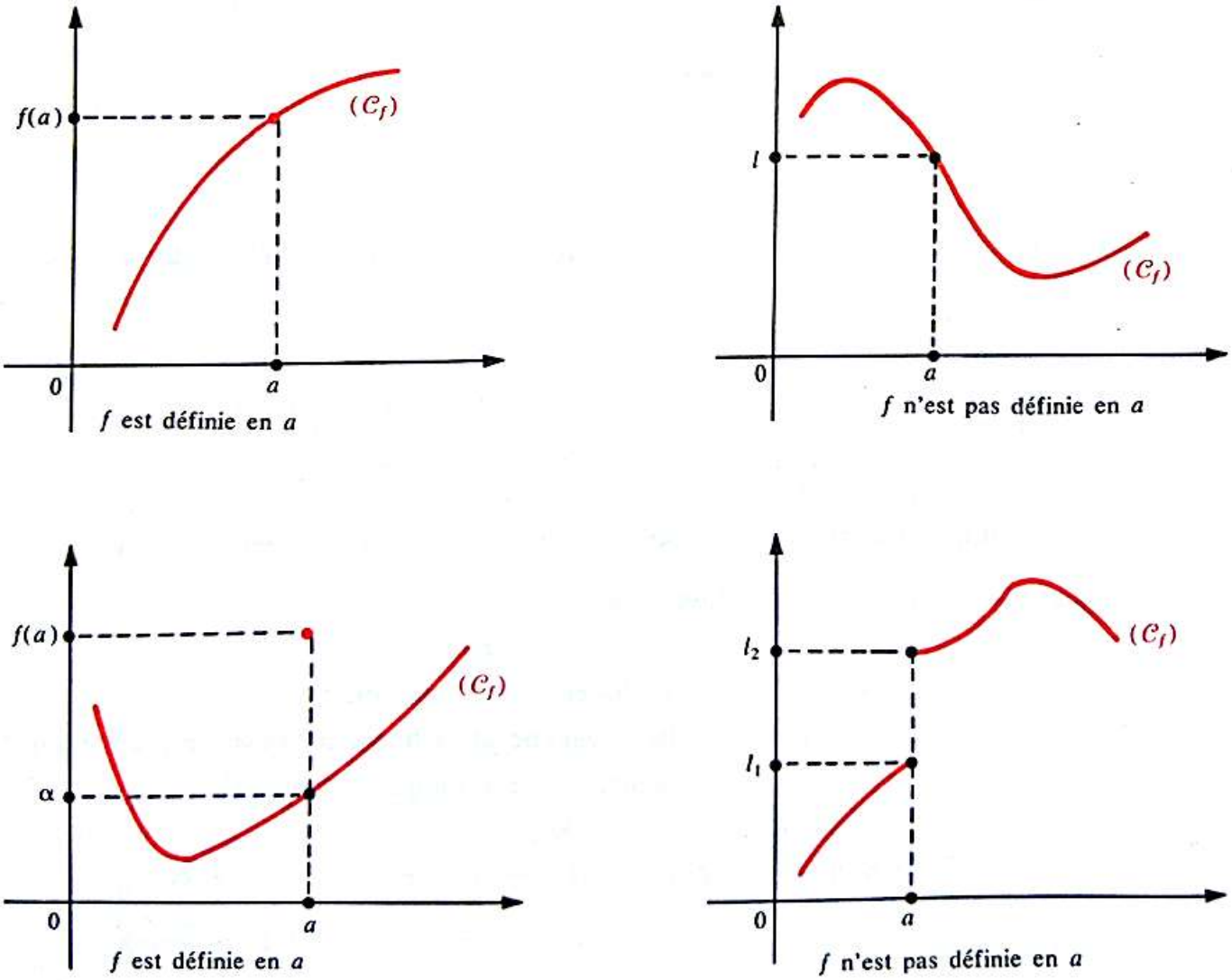


Fig. 8

Scanned by CamScanner

2 Dérivation

1) Coefficient directeur d'une droite (rappels)

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

a) Soit la droite (D) d'équation

$ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

• Si $b \neq 0$, alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ est aussi une équation de (D).

Le nombre $-\frac{a}{b}$ est appelé *coefficient directeur* de (D).

$\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de (D); $\vec{v}\left(1, -\frac{a}{b}\right)$ est donc aussi un vecteur directeur de (D).
Le coefficient directeur de (D) est donc la seconde coordonnée du vecteur directeur de (D) dont la première coordonnée est égale à 1.

• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $x = -\frac{c}{a}$ est une équation de (D).

La droite (D) est parallèle à (OJ) et on ne définit pas le coefficient directeur de (D).
Tous les vecteurs directeurs de (D) ont leur première coordonnée égale à 0.

Exercices

1) Quel est le coefficient directeur (s'il existe) de chacune des droites d'équations respectives :

a) $2x - 6y + 5 = 0$; *b*) $x - 2 = 0$;

c) $3y + 4 = 0$; *d*) $5x + 3y - 1 = 0$;

e) $-x + 2y + 4 = 0$; *f*) $y = -4x + 5$.

2) Posons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
Quel est le coefficient directeur (s'il existe) de chacune des droites passant par le point O et admettant respectivement pour vecteur directeur :

a) $2\vec{i} - \vec{j}$; *b*) $-5\vec{i}$; *c*) $4\vec{j}$.

3) Soit les droites (D) et (D') passant par le point $A(3, 4)$ et de coefficients directeurs respectifs 2 et $-\frac{2}{3}$. Placer les points B et C de façon que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient respectivement les vecteurs de coordonnées $(1, 2)$ et $(3, -2)$. Construire les droites (D) et (D').

b) Étant donné un point $A(x_A, y_A)$ et un nombre réel m, on cherche une équation de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur m.

Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan.

Puisque $\vec{u}(1, m)$ est un vecteur directeur de (D), on a :

$$M \in (D) \iff \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0.$$

Scanned by CamScanner

Or : $$\text{dét}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x - x_A & 1 \\ y - y_A & m \end{vmatrix}$$
$$= m(x - x_A) - (y - y_A).$$

Une équation de (D) est donc :

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A).}$$

Exercices

1) Donner une équation de la droite passant par le point $A(-2, 7)$ et de coefficient directeur $\sqrt{3}$.

2) Donner une équation de la droite passant par le point $A(5, 3)$ et parallèle à la droite d'équation $3x - 2y + 7 = 0$.

c) Étant donné deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, on veut déterminer le coefficient directeur de la droite (AB), lorsque celle-ci n'est pas parallèle à (OJ) (c'est-à-dire, lorsque $x_A \neq x_B$).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, est un vecteur directeur de (AB).

Le vecteur de coordonnées $\left(1, \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$ est aussi un vecteur directeur de (AB).

Le coefficient directeur de (AB) est donc :

$$\boxed{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.}$$

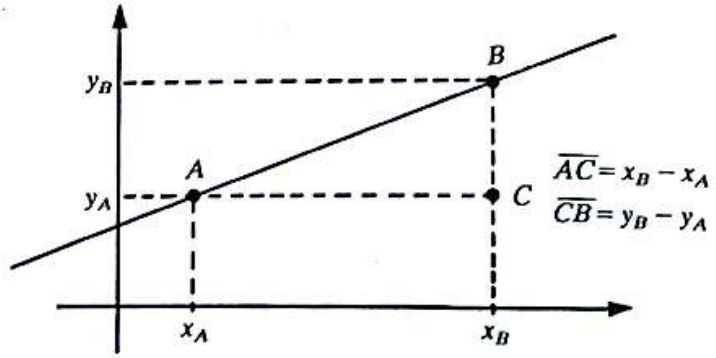


Fig. 9

Exercices

Calculer le coefficient directeur (s'il existe) des droites (AB), (CD) et (EF), sachant que :

$A(-4, 3)$, $B(5, 8)$;
$C(-1, 2)$, $D(-1, 7)$;
$E(0, -3)$, $F(3, -3)$.

d) La figure 10 donne une idée des différentes positions d'une droite passant par O, non parallèle à (OJ), en fonction de son coefficient directeur a.

Scanned by CamScanner

La droite passant par O et de coefficient directeur a admet $y = ax$ pour équation. Remarquons que a est aussi l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la droite d'équation $y = ax$.

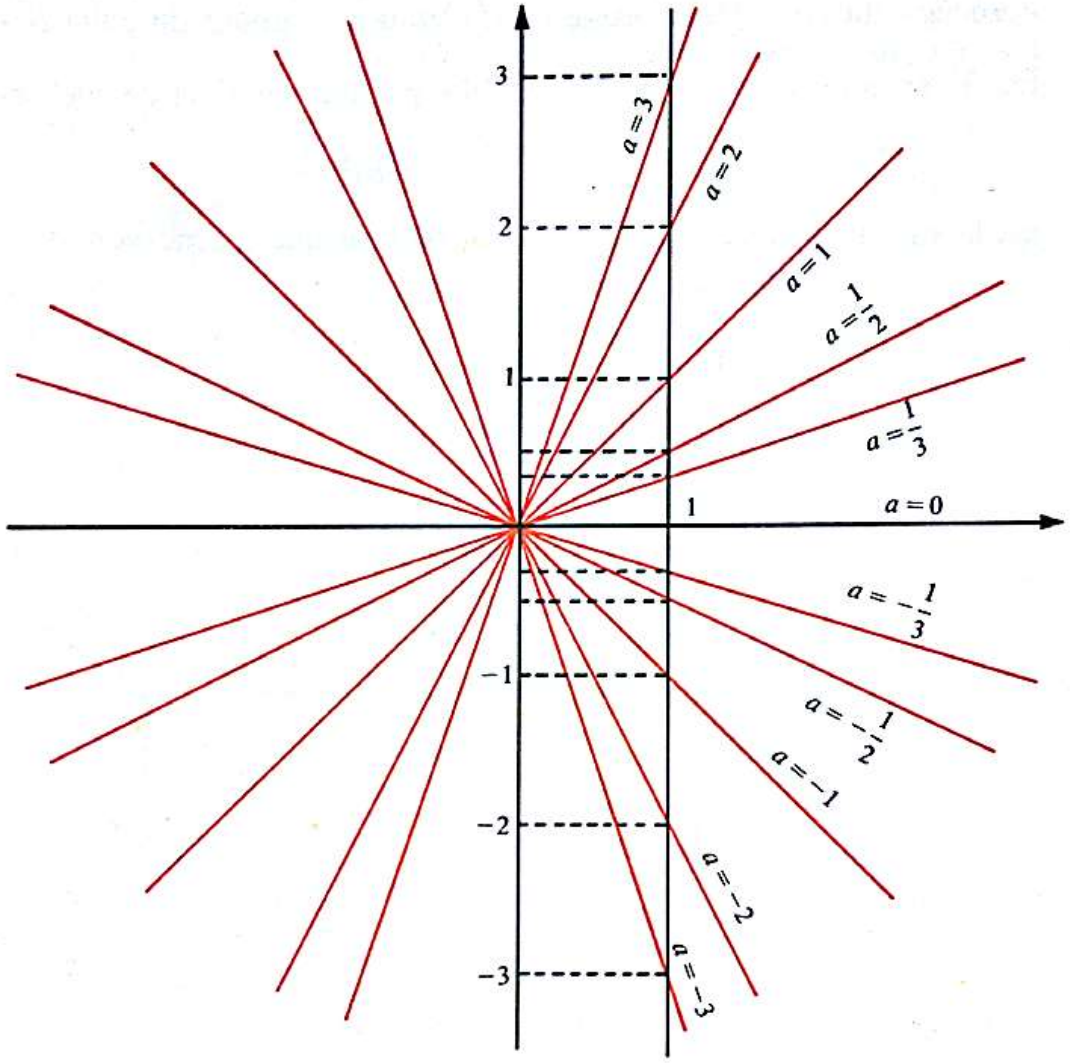


Fig. 10

2) Dérivabilité d'une fonction en un point

a) Exemples introductifs

Exemple 1

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2,$$

relativement à un repère orthonormé (O, I, J).
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C}_f)$, d'abscisse non nulle x.
La droite (OM) admet $\dfrac{f(x)}{x}$ pour coefficient directeur (justifier).

Scanned by CamScanner

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0.$

Examinons la figure 11.

Lorsque x est de plus en plus «proche» de 0, le point M est de plus en plus «proche» du point O; la droite (OM) «tourne» autour du point O et devient de plus en plus «proche» de la droite (OI).

Intuitivement, on dit que la droite (OI), passant par O et de coefficient directeur

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{(égale à 0)}$$

est la «position limite» de la droite (OM) lorsque x tend vers 0.

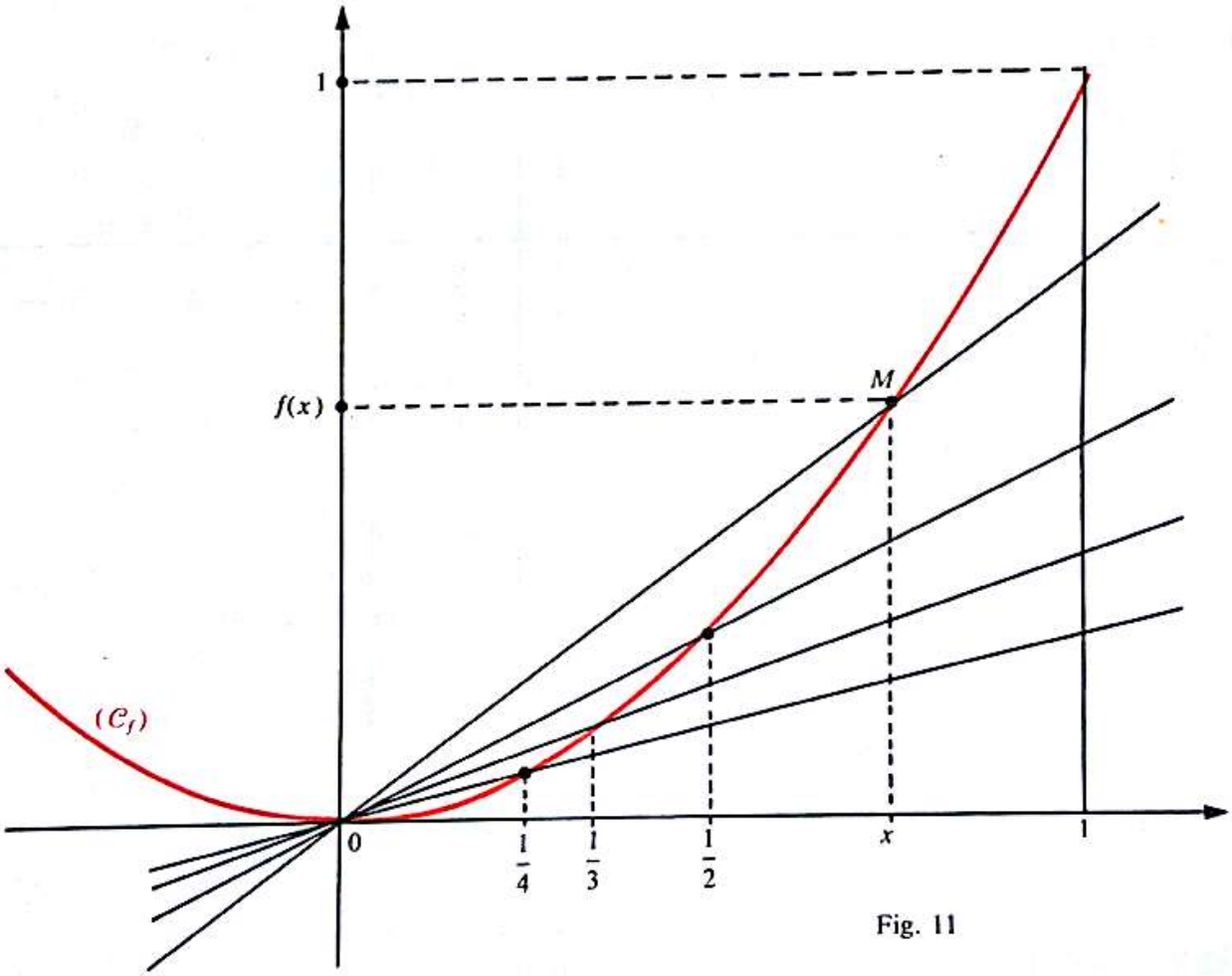


Fig. 11

Exemple 2

Le plan étant muni d'un repère orthonormé(O, I, J), considérons le demi-cercle $(\mathcal{C})$ d'équation

$$x^2 + y^2 = 25, \quad \text{avec} \quad y \geqslant 0.$$

$(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{25 - x^2},$$

dont l'ensemble de définition est $[-5, 5]$.

Scanned by CamScanner

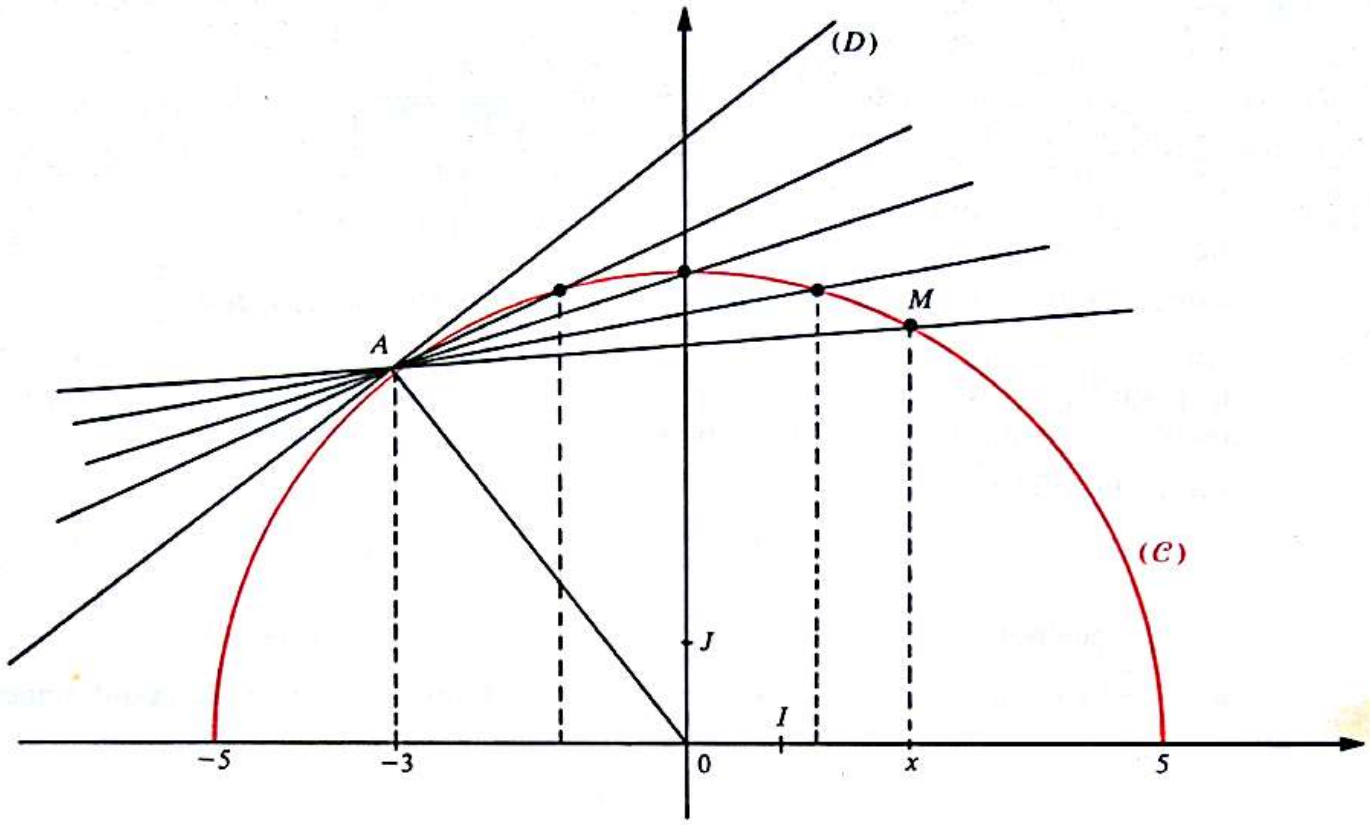


Fig. 12

Soit A le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(-3, 4)$.
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C})$, d'abscisse x différente de -3.
Les coordonnées de M sont $(x, f(x))$.

La droite (AM) admet $\dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$ pour coefficient directeur (justifier).

Calculons la limite au point -3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$.

Pour tout élément x de $[-5, 5]-\{-3\}$, on a successivement :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} &= \frac{\sqrt{25-x^2}-4}{x+3}\\ &= \frac{(\sqrt{25-x^2}-4)(\sqrt{25-x^2}+4)}{(x+3)(\sqrt{25-x^2}+4)}\\ &= \frac{9-x^2}{(x+3)(\sqrt{25-x^2}+4)}\\ &= \frac{(3+x)(3-x)}{(x+3)(\sqrt{25-x^2}+4)}\\ &= \frac{3-x}{\sqrt{25-x^2}+4}.\end{aligned}$$

Nous admettrons que la fonction f est continue en tout point de son ensemble de définition.

Scanned by CamScanner

D'où :

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{3-x}{\sqrt{25-x^2}+4}$$
$$= \frac{3-(-3)}{\sqrt{25-(-3)^2}+4} = \frac{3}{4}.$$

Considérons la droite (D) passant par A et de coefficient directeur $\frac{3}{4}$.

On « voit » sur la figure 12 que, lorsque x est de plus en plus « proche » de -3, le point M est de plus en plus « proche » du point A; la droite (AM) « tourne » autour du point A et devient de plus en plus « proche » de la droite (D).

La droite (D) passant par A et de coefficient directeur

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} \quad \left(\text{égale à } \frac{3}{4}\right)$$

est la « position limite » de la droite (AM) lorsque x tend vers -3.

$\vec{u}\left(1, \frac{3}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (D) et $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur de coordonnées $(-3, 4)$; d'où :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OA} = 0.$$

La droite (D) est donc perpendiculaire à la droite (OA).
Par conséquent, la droite (D) est la tangente au point A au demi-cercle $(\mathcal{C})$.

Remarque

Soit $A(a, f(a))$ un point de $(\mathcal{C})$ tel que $a \in]-5, 5[$.

Soit $M(x, f(x))$ un point quelconque de $(\mathcal{C})$ tel que $x \neq a$.

La droite (AM) admet $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour coefficient directeur.

Comme ci-dessus, on peut montrer que la droite (D) passant par A et de coefficient directeur $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A.

Ceci n'est pas valable lorsque $a = -5$ ou $a = 5$ car, dans ce cas, la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à (OJ) et n'a donc pas de coefficient directeur.

b) Définitions

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Considérons une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ (figure 13).

Soit a un élément de D_f et supposons qu'il existe un intervalle contenant a et contenu dans D_f.

Soit $A(a, f(a))$ le point d'abscisse a de $(\mathcal{C}_f)$.

Soit $M(x, f(x))$ un point quelconque de $(\mathcal{C}_f)$, d'abscisse x différente de a.

La droite (AM) admet $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour coefficient directeur (justifier).

Scanned by CamScanner

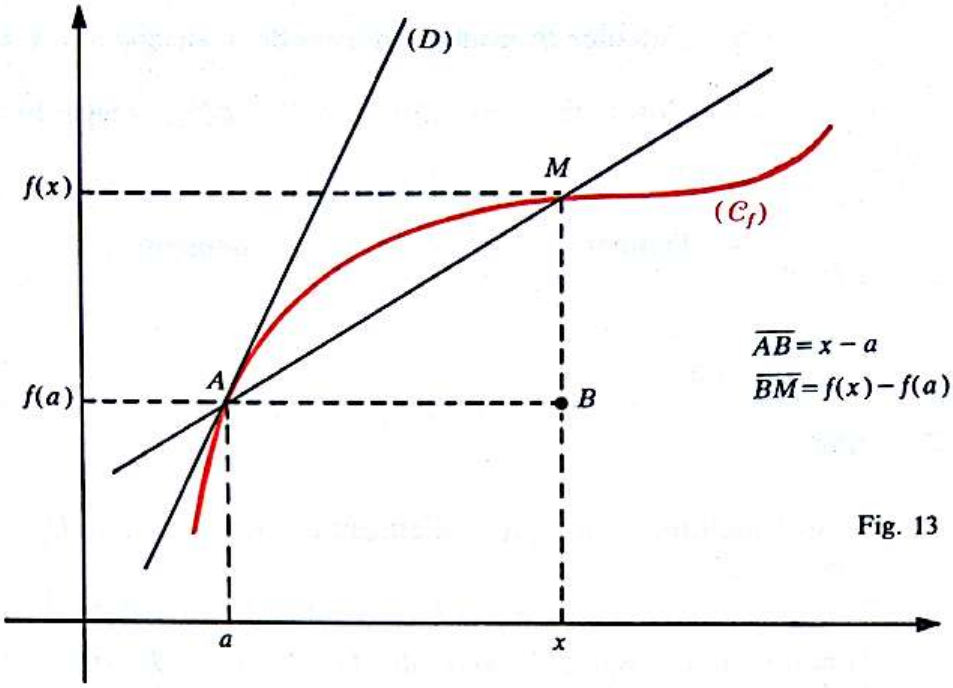


Fig. 13

Intuitivement, lorsque x tend vers a, la droite (AM) « tourne » autour du point A et devient de plus en plus « proche » de la droite (D) passant par A et de coefficient directeur

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{(pourvu que cette limite existe).}$$

Définitions

On dit que la fonction numérique f est *dérivable au point a* si elle est définie en a et si la fonction

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite au point a.

Cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée le *nombre dérivé de f au point a.*

La droite passant par le point $A\big(a, f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la *tangente au point A à la courbe (C_f).*

Une équation de la tangente au point A à (C_f) est (justifier) :

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

Exercices

— Le plan étant muni d'un repère orthonormé, construire la représentation graphique (C_f) de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x - 3.$$

Scanned by CamScanner

— Calculer le nombre dérivé de f en chacun des points : 0, 1, 2, $\frac{5}{2}$.

— Construire les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses 0, 1, 2 et $\frac{5}{2}$.

— Donner une équation de ces tangentes.

3) Fonctions dérivées

Définition

Soit une fonction numérique f d'ensemble de définition D_f.
Posons :

$$D = \{x \in D_f \mid f \text{ est dérivable au point } x\}.$$

La fonction numérique, d'ensemble de définition D, qui à chaque élément x de D fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$ de f au point x est notée f' et est appelée la *fonction dérivée de f* ou, simplement, la *dérivée de f*.

Exemple 1

Soit un nombre réel c et la fonction constante $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$.

Soit a un nombre réel.
On a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{c-c}{x-a} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$;
- f est dérivable au point a et $f'(a) = 0$.

Toute fonction constante f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a) = 0.$$

La fonction dérivée de la fonction constante f est la fonction

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 0.$$

Exemple 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ et un nombre réel a.

On a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1$;

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1$;
- f est dérivable au point a et $f'(a)=1$.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a)=1.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$.

Exemple 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ et un nombre réel a.

On a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$ $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

$$= \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a;$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} (x+a) = 2a$;
- f est dérivable au point a et $f'(a)=2a$.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a)=2a.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x$.

Exemple 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ et un nombre réel a.

On a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$ $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

$$= \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$

$$= x^2+ax+a^2;$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} (x^2+ax+a^2) = 3a^2$;
- f est dérivable au point a et $f'(a)=3a^2$.

Scanned by CamScanner

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a) = 3a^2.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2$.

Considérons, figure 14, la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

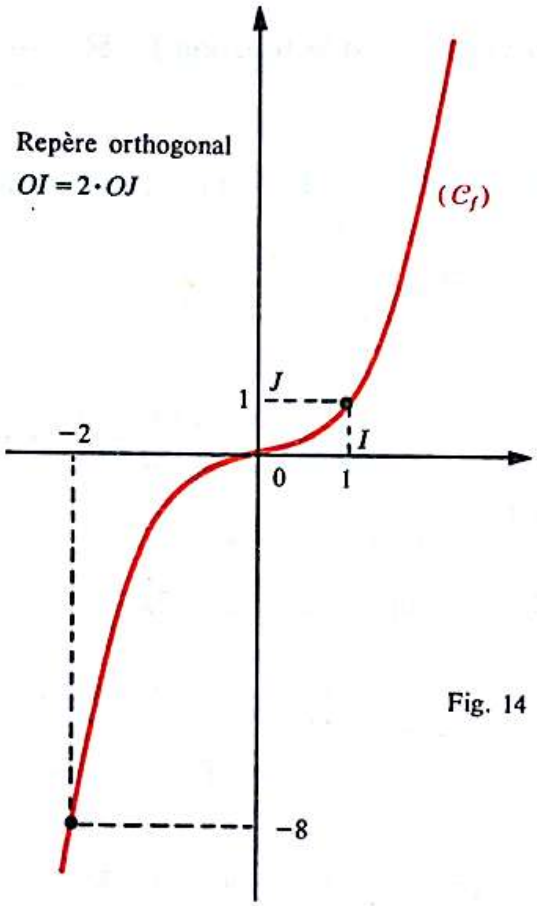


Fig. 14

— Vérifier que la droite (OI) est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point O.

On voit que $(\mathcal{C}_f)$ « traverse » sa tangente au point O.

Pour cette raison, on dit que O est un *point d'inflexion* de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

— Construire les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses -2 et -1.

— Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

Exemple 5

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$.

Scanned by CamScanner

Étant donné un élément a de $\mathbb{R}^*$, on a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{a\}$ $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

$$= \frac{a-x}{ax(x-a)}$$

$$= -\frac{1}{ax};$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} -\dfrac{1}{ax} = -\dfrac{1}{a^2}$;
- f est dérivable au point a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

Considérons, figure 15, la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

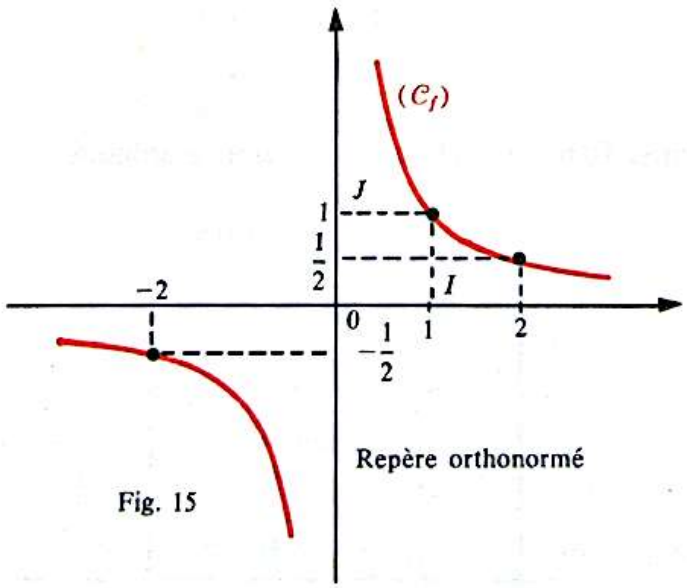


Fig. 15

— Construire les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses -2, 1 et 2.

— Donner une équation de ces tangentes.

Scanned by CamScanner

Exemple 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+$.
Étant donné un élément a de $\mathbb{R}_+^*$, on a successivement :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+ - \{a\}$ $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}};$$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$;
- f est dérivable au point a et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Nous admettrons que f n'est pas dérivable au point 0.
La fonction dérivée de f est donc la fonction

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Considérons, figure 16, la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

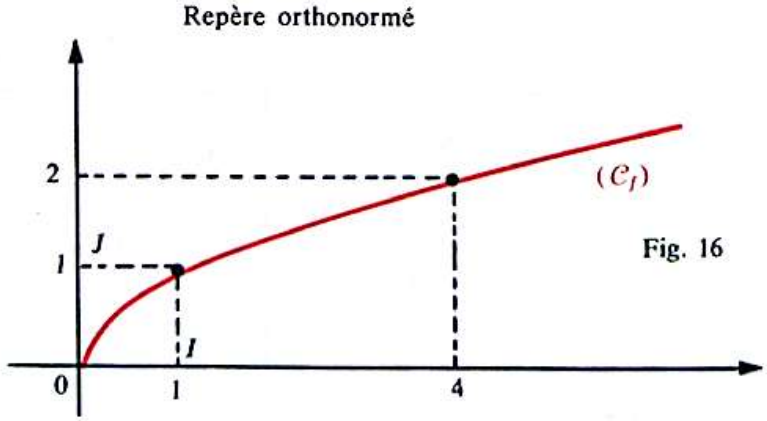


Fig. 16

— Construire les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ respectivement aux points d'abscisses 1 et 4.

— Donner une équation de ces tangentes.

Scanned by CamScanner

Exemple 7

On démontre et nous admettrons que :

> Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout point a de $\mathbb{R}$ et :
> $$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sin' a = \cos a$$
> $$\cos' a = -\sin a.$$

Par conséquent :

— La dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus.

— La dérivée de la fonction cosinus est l'opposée de la fonction sinus.

Construire les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus et tracer les tangentes à ces courbes aux points d'abscisses respectives :

$$-\pi, \ -\frac{\pi}{2}, \ 0, \ \frac{\pi}{2} \text{ et } \pi.$$

4) Lien entre dérivabilité et continuité

On démontre et nous admettrons que :

> Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

Exemple

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ (figure 17).

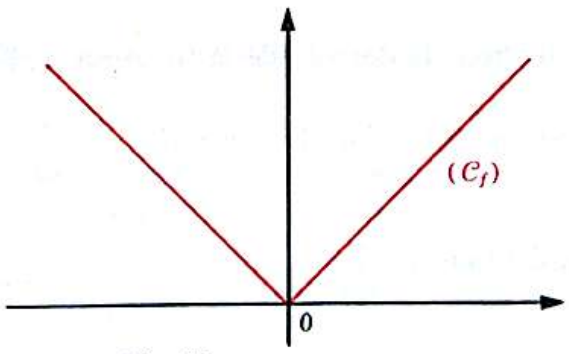


Fig. 17

On sait que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et, en particulier, au point 0.
Cependant, f n'est pas dérivable au point 0.

En effet, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'admet pas de limite au point 0, puisque :

Scanned by CamScanner

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-x}{x} = -1;$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x} = 1.$

5) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

a) On démontre et nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions numériques dérivables au point a.
On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
Alors $f+g$ et fg sont dérivables au point a et :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

En particulier :

Soit c un nombre réel.
Si la fonction numérique f est dérivable au point a, alors la fonction cf l'est aussi et on a :

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

Exemple 1

Calculons la dérivée de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+\sqrt{x}. \end{array}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
f est la somme des fonctions $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}. \end{array}$

Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$.
On sait que g et h sont dérivables au point a et que

$$g'(a) = 2a, \quad h'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

D'après le théorème 1, f est dérivable au point a et

$$f'(a) = g'(a) + h'(a)$$
$$= 2a + \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

f n'est pas dérivable au point 0, sinon la fonction h, égale à $f-g$, le serait aussi.

Scanned by CamScanner

La fonction dérivée de f est donc la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque. Dans la pratique, on écrit directement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$
$$= 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exemple 2

Calculons la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3 \cos x$.

Soit les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$ $x \longmapsto \cos x$.

f est le produit de g et h.
Soit a un nombre réel quelconque.
g et h sont dérivables au point a et :

$$g'(a) = 3a^2, \quad h'(a) = -\sin a.$$

D'après le théorème 1, f est dérivable au point a et :

$$f'(a) = g'(a)h(a) + g(a)h'(a)$$
$$= 3a^2 \cos a - a^3 \sin a.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$.

Remarque. Dans la pratique, on écrit directement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$
$$= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

Exercices Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$;

b) $f(x) = x^3(x^2 + 4)$;

c) $f(x) = \sin x \cos x$;

d) $f(x) = 5\sqrt{x}$;

e) $f(x) = \frac{x}{3}$;

f) $f(x) = 7(x^2 - 1)$;

g) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 7$.

b) f étant une fonction numérique dérivable au point a, on déduit du théorème 1 que f^2 est dérivable au point a et que

$$(f^2)'(a) = 2f(a)f'(a).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Scanned by CamScanner

Théorème 2

Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.

Si la fonction numérique f est dérivable au point a, alors la fonction f^n est dérivable au point a et on a :

$$(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a).$$

Démonstration.

On démontre ce résultat par récurrence sur n.

• Le résultat est vrai pour $n = 2$ car, comme observé ci-dessus, c'est un cas particulier du théorème 1.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$ et supposons que f^n soit dérivable au point a et que

$$(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a).$$

Montrons que, dans ce cas, f^{n+1} est aussi dérivable au point a et que

$$(f^{n+1})'(a) = (n+1)f^n(a)f'(a).$$

Or, puisque $f^{n+1} = f^n \cdot f$, il résulte du théorème 1 que f^{n+1} est dérivable au point a et que :

$$\begin{aligned}(f^{n+1})'(a) &= (f^n)'(a)f(a) + f^n(a)f'(a)\\ &= nf^{n-1}(a)f'(a)f(a) + f^n(a)f'(a)\\ &= nf^n(a)f'(a) + f^n(a)f'(a)\\ &= (n+1)f^n(a)f'(a).\end{aligned}$$

• Le théorème 2 est donc démontré.

- En particulier :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$.
La fonction $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^n\end{array}$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad f'(a) = na^{n-1}.$$

La fonction dérivée de f est donc la fonction $f' : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & nx^{n-1}.\end{array}$

Exercices Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x) = x^{17}$;

b) $f(x) = 21x^9 - 5x^7 + 2x^5 - 3$;

c) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{10}$;

d) $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$.

c) On démontre et nous admettrons le théorème suivant.

Scanned by CamScanner

Théorème 3

Soit f et g deux fonctions numériques dérivables au point a.
On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable au point a et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Exemple

Calculons la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{3x^2+1}{5x-4}$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

Soit les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2+1$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5x-4$.

f est le quotient de g par h.

Soit a un élément de $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

g et h sont dérivables au point a et :

$$g'(a) = 6a, \qquad h'(a) = 5.$$

D'après le théorème 3, f est dérivable au point a et :

$$f'(a) = \frac{g'(a)h(a) - g(a)h'(a)}{h(a)^2}$$

$$= \frac{6a(5a-4) - (3a^2+1)5}{(5a-4)^2}$$

$$= \frac{15a^2 - 24a - 5}{(5a-4)^2}.$$

La fonction dérivée de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{15x^2 - 24x - 5}{(5x-4)^2}.$$

Remarque. Dans la pratique, on écrit directement :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\} \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{15x^2 - 24x - 5}{(5x-4)^2}.$$

Scanned by CamScanner

Exercices Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x)=\dfrac{5x^2}{1-x^3}$;

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Préciser, dans chaque cas, les ensembles de définition de f et de f'.

Un cas particulier du théorème 3

Si la fonction numérique g est dérivable au point a et si $g(a)\neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable au point a et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

En déduire que :

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$, est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Exercices Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-2}$;

b) $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{4x^2+1}$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Préciser, dans chaque cas, les ensembles de définition de f et f'.

d) On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

Scanned by CamScanner

Théorème 4

Soit des nombres réels a, c et d, une fonction numérique g et la fonction numérique f définie par

$$f(x)=g(cx+d).$$

Si g est dérivable au point $ca+d$, alors f est dérivable au point a et :

$$f'(a)=cg'(ca+d).$$

Exemple

Calculons la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(-3x+2)$.

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos x$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=g(-3x+2)$.

Soit a un nombre réel quelconque.

g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\sin x$; en particulier, g est dérivable au point $-3a+2$ et

$$g'(-3a+2)=-\sin(-3a+2).$$

D'après le théorème 4, f est dérivable au point a et

$$\begin{aligned} f'(a) &= -3g'(-3a+2) \\ &= 3\sin(-3a+2). \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc la fonction $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3\sin(-3x+2)$.

Remarque. Dans la pratique, on écrit directement :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= -3\left[-\sin(-3x+2)\right] \\ &= 3\sin(-3x+2). \end{aligned}$$

Exercices Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-7}}$;

b) $f(x)=\sin(-2x+10)$;

c) $f(x)=\cos 7x \sin(-3x+1)$;

d) $f(x)=\cos^3(5x-1)$.

e) Le tableau récapitulatif suivant donne la fonction dérivée de quelques fonctions simples.

Pour calculer la dérivée d'autres fonctions, définies au moyen de ces fonctions simples, on utilise les théorèmes 1 à 4 ci-dessus.

Scanned by CamScanner

$f(x)$	f est définie sur	f est dérivable en tout point de	$f'(x)$
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^n, $(n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$

Exercices

1 (1). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 - 3x + 1)$.

b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} (-\sqrt{3}x^3 - 2x + 7)$.

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(-\frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + 3x - 1\right)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \left(-\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + \frac{5}{7}\right)$.

2 (1). Même question :

a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - x + 1)(3x^3 - 2x^2 + 5)$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} (-5x^2 + x)(-3x^3 + 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2}{3}(x - 1)^3(-x^2 + 5)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (x^2 - 2x + 3)(-x^2 + 4)^3$.

Scanned by CamScanner

3 (1). Même question :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-2x+3}{x+5}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x^2+2x-1}{5x-4}$.

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{-5x+1}{-2x^2+4x-1}$.

d) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{-3x^2+2x+5}{\sqrt{3}x^2-x-1}$.

4 (1). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin^2 x)$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{3+\cos x}$.

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (2\cos x - 3\sin x + 1)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}$.

5 (1). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \cos 2x - \sin 2x + 1.$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\cos x(\cos x - \sin x).$$

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} f(x)$.

6 (1). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x^2-x-2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^3+x^2+4x+4}$.

f) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+x^2-6x}$.

7 (1). Même question :

a) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-x-6}$.

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{x-4}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$.

8 (1). Soit deux fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x-2.$$

a) Déterminer la fonction fg.

b) On considère la fonction numérique h définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} & h(x) = (fg)(x) \\ h(2) = 3. \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction h au point 2.

9 (1). Soit la fonction numérique f définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} & f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x|-2} \\ f(-2) = f(2) = 4. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble de définition D_f de f? f est-elle continue en tout point de D_f?

10 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Calculer le coefficient directeur de la droite (Δ) dans chacun des cas suivants :

a) une équation de la droite (Δ) est

$$-3x + 2y + 1 = 0;$$

b) (Δ) admet $\vec{u}(-1, 3)$ pour vecteur directeur;

c) (Δ) passe par les points $A(-1, 2)$ et $B(4, 1)$;

d) (Δ) est parallèle à la droite d'équation $-x + \sqrt{2}y = 0$;

e) (Δ) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -2x + 5$.

11 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Placer le point $A(1, 2)$. Tracer chacune des droites (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) passant par le point A et admettant respectivement pour coefficient directeur les nombres $-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{4}$ et 0.

12 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Placer le point $A(4, 3)$. On considère la droite (Δ) passant par A et admettant m pour coefficient directeur (m est un paramètre).

Scanned by CamScanner

1) Donner, en fonction de m, une équation de la droite (Δ).

2) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le paramètre m dans chacun des cas suivants :

a) (Δ) passe par le point J;

b) (Δ) est sécante en B à la droite (OI), le point B étant choisi tel que la mesure de l'aire du triangle (ABI) soit égale à 9;

c) (Δ) est sécante en C à (OI) et sécante en D à (OJ), les points C et D étant choisis tels que A soit le milieu de $[CD]$.

d) (Δ) est sécante en E à (OI) et sécante en F à (OJ), les points E et F étant choisis tels que la mesure de l'aire du triangle OEF soit égale à $\frac{49}{2}$.

13 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4$.

1) a étant un nombre réel, calculer

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (x \in \mathbb{R}-\{a\}),$$

puis $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) Écrire une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse -1. Tracer cette tangente.

14 (2). Mêmes questions 1) et 2) qu'au n° 13 pour la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x-1}{x+2}.$$

15 (2). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^3}.$$

En utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction, démontrer que la fonction f est dérivable en tout point a non nul.

16 (2). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\sqrt{x}.$$

a) Montrer que f est dérivable au point 0.

b) Calculer la fonction dérivée de f.

17 (2). On considère deux fonctions numériques f et g dérivables au point a. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I \subset D_f \cap D_g$ (D_f et D_g sont respectivement les ensembles de définition de f et g).

1) *a*) Montrer que, pour tout élément x de $D_f \cap D_g - \{a\}$, on a :

$$\frac{fg(x)-fg(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(x) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,f(a).$$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to a} \frac{fg(x)-fg(a)}{x-a}$.

c) En déduire que la fonction fg est dérivable au point a et que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

2) Montrer que la fonction $f+g$ est dérivable au point a et que

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

• Dans les exercices 18 à 26, déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions données et préciser son ensemble de définition.

18 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x+3$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5}{4}x^3 - 2x^2 + x - 1$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x(3x^4 - 2x^2 + 5)$.

19 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x-3)(3x^2 - 2x + 1)$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x-1)(x+2)(2x-5)$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x-2)(-x+3)^3$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x^2-4)(x+2) - (x-5)^2$.

20 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^5}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2 - x - 2}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5}{(2x-1)^2}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-4}{(x-1)^2(x+3)}$.

Scanned by CamScanner

21 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x+1+\dfrac{1}{x-3}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2+\dfrac{5}{2x-1}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x^2+2x-\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x-1)^2+\dfrac{3}{(2x-1)^2}$.

22 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x+5}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+1}{2x-1}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2+x-2}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{5x^2-2x+1}{x^2+x-6}$.

23 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{(x+3)(2x-1)^2}{x^3-1}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2-5}{(x-1)^3(2x+5)}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x+1)^2-\dfrac{2x-1}{x^4-1}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+3}$.

24 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin^2 x \cos x$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2 \sin x \cos^4 x$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\sin x+\cos^2 x}{\sin x}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

25 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2 \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin^3\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\sin^2(3x)}{2\cos 2x-\sqrt{3}}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\text{in}^2\, x-1}$.

26 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{2x+1}}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x+2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3\sqrt{x}$.

27 (2). Donner une équation de la tangente à la représentation graphique de la fonction f, au point d'abscisse a, dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x-3}{x+1}$; $a=-2$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^3-2x^2+x-1$; $a=-\dfrac{1}{2}$.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+1}{x-5}$; $a=1$.

d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$; $a=\dfrac{\pi}{4}$.

28 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$.

Scanned by CamScanner

Montrer que la droite (OI) est tangente en O à la représentation graphique de f.

29 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{H})$ sa représentation graphique.

1) Construire $(\mathcal{H})$.

2) Soit M un point de $(\mathcal{H})$ d'abscisse a.
La tangente (Δ) à $(\mathcal{H})$ au point M est sécante aux droites (OI) et (OJ) respectivement en A et B.

a) Trouver une équation de (Δ).

b) Exprimer en fonction de a les coordonnées des points A et B.

c) Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

30 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

On désigne par (P) sa représentation graphique.

a) Construire (P).

b) Soit M un point de (P), distinct de O. La tangente à (P) au point M est sécante aux droites (OI) et (OJ), respectivement en A et B. Montrer que A est le milieu de $[MB]$.

31 (2). Soit la fonction
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^3 - x^2 + 2x - 4$.

a) Montrer que la représentation graphique de f dans un repère (O, I, J) admet deux tangentes de coefficient directeur 6.

b) Donner une équation de chacune de ces tangentes.

32 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la fonction
$f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto mx^2 - 2(2m-1)x + 4m$
dépendant du paramètre m.
On désigne par (P_m) sa représentation graphique.

a) Montrer que (P_m) passe par un même point A lorsque m décrit $\mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de A.

b) Montrer que (P_m) est tangente au point A à une même droite (Δ) lorsque m décrit $\mathbb{R}$. Trouver une équation de (Δ).

33 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit deux fonctions
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \longmapsto 2x^2 - 3x + 2$.

On désigne respectivement par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentations graphiques.

a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ ont un unique point commun A. Calculer ses coordonnées.

b) Montrer que les tangentes respectives à $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ au point A sont perpendiculaires.

34 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la fonction
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax^2 + bx + c$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
On désigne par (P) sa représentation graphique.
On suppose que (P) passe par le point $A(0, 4)$ et que la tangente à (P) au point $B(2, -1)$ est parallèle à la droite (OI).

a) Déterminer a, b et c.

b) Tracer (P) et les tangentes à (P) respectivement aux points A et B.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes.

35 (2). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1) On considère la parabole (P) d'équation $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et la droite (Δ) d'équation $y = a'x + b'$.
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (Δ) soit tangente à (P) est
$(b - a')^2 - 4a(c - b') = 0$.

2) *Application*
On considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$ et le point $A(2, 2)$. Soit (Δ) la droite passant par A et de coefficient directeur m.

a) Exprimer en fonction de m une équation de (Δ).

b) Calculer m pour que (Δ) soit tangente à (P).

Scanned by CamScanner

Problèmes

36 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit l'application $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x \cdot E(x)$.

1) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

2) Étudier la dérivabilité de f au point 0.

3) Déterminer la fonction dérivée de f.

4) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f^2(x)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g?

b) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g.

c) Montrer que g est dérivable au point 0.

d) Déterminer la fonction dérivée de g.

e) Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$. Construire cette tangente.

37 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x$.

1) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_{f'})$.

3) Montrer que $(\mathcal{C}_{f'})$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont sécantes en deux points dont on déterminera les coordonnées.

4) On désigne par A et B les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f'})$.

a) Construire les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$, respectivement aux points A et B.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes.

5) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x+1)+1$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g?

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$.

c) Déterminer la fonction dérivée g' de g.

38 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{x+c}$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On désigne par $(\mathcal{H})$ sa représentation graphique.
On suppose que $(\mathcal{H})$ passe par le point $A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ et que la tangente à $(\mathcal{H})$ au point $B\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ admet $-\frac{7}{4}$ pour coefficient directeur.

1) Déterminer a, b et c.

2) Construire $(\mathcal{H})$. Vérifier que le point $\Omega(3, 2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{H})$.

3) *a*) Trouver le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{H})$ au point A.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection des tangentes à $(\mathcal{H})$ respectivement aux points A et B.

4) Montrer que $(\mathcal{H})$ admet deux tangentes de coefficient directeur -7. Construire ces tangentes.

5) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et admettant m, $(m \neq 0)$, pour coefficient directeur.

a) Suivant les valeurs prises par m, étudier le nombre de points communs à $(\mathcal{H})$ et (Δ).

b) Dans le cas où (Δ) est sécante à $(\mathcal{H})$ en deux points M et N, montrer que les tangentes à $(\mathcal{H})$, respectivement en ces points, sont parallèles.

39 * On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = 1$.
Soit M un point du segment $[AB]$. Posons $AM = x$.
Exprimer en fonction de x :

a) la somme $MD^2 + MC^2$;

b) le produit $MD^2 \times MC^2$.

** Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto MD^2 + MC^2$$

$(x = AM$ et $M \in [AB])$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

c) Tracer les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses respectives 0 et 2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes.

Scanned by CamScanner

2) Soit la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto MD^2 \times MC^2$$

($x = AM$ et $M \in [AB]$).

a) Quelle est la fonction dérivée g' de g?

b) Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0.$$

c) Montrer que les points $R(0, 5)$ et $S(2, 5)$ appartiennent à la représentation graphique (C_g) de g.

d) Donner une équation de chacune des tangentes à (C_g) aux points R et S.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On désigne par (P) la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x+2)^2.$$

1) Construire (P).

2) On considère le point $A(-1, -2)$. Soit (Δ) la droite passant par A et admettant m pour coefficient directeur.

a) Suivant les valeurs prises par m, étudier le nombre de points d'intersection de (P) et (Δ).

b) Montrer qu'il existe deux droites (Δ_1) et (Δ_2) passant par A et tangentes à (P). Calculer les coordonnées des points de contact.

3) Soit $\Omega(\alpha, \beta)$ un point du plan et (D) une droite passant par Ω et de coefficient directeur n.

a) Exprimer en fonction de α, β et n une équation de (D).

b) A quelle condition sur α, β et n, (D) est-elle tangente à (P)? (Utiliser l'exercice 35).

c) Trouver l'ensemble des points $\Omega(\alpha, \beta)$ tels qu'il existe deux droites perpendiculaires en Ω et tangentes à (P).

Scanned by CamScanner

6 Continuité et dérivabilité sur un intervalle Extension de la notion de limite

Leçon 1 : CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE
Leçon 2 : DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE
Leçon 3 : EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

1 Continuité sur un intervalle

a) Définition

Considérons les fonctions f, g et h respectivement définies par leurs représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ (figure 1).

Nous nous intéressons au comportement de ces fonctions sur l'intervalle $[a, b]$. On constate graphiquement que :

- f n'est pas définie au point c de $[a, b]$;
- g est définie en tout point de $[a, b]$ mais est discontinue au point c de $[a, b]$;
- h est continue en tout point de $[a, b]$.

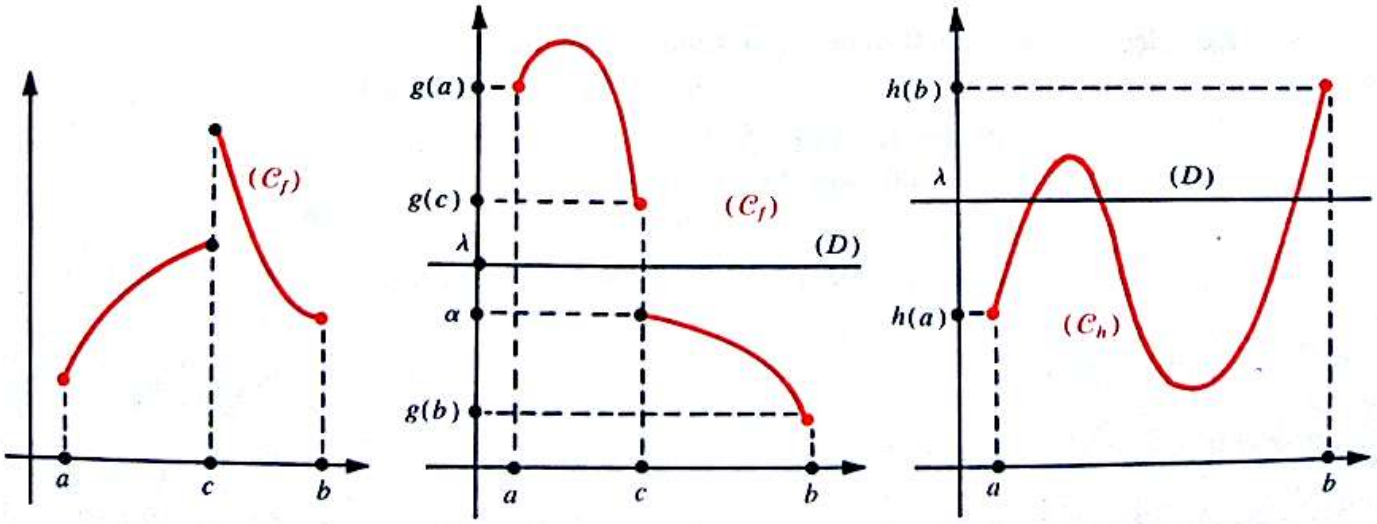


Fig. 1

Scanned by CamScanner

Définition

Une fonction numérique est dite *continue sur un intervalle I* si elle est continue en tout point de *I*.

b) Une propriété des fonctions continues sur un intervalle

Considérons à nouveau la fonction g de la figure 1.

Soit λ un élément de $[\alpha, g(c)[$.

On constate graphiquement que la droite (D) d'équation $y=\lambda$ n'a aucun point commun avec $(\mathcal{C}_g)$.
Cela signifie que l'équation

$$x \in [a, b], \quad g(x)=\lambda$$

n'a aucune solution.

Dans le théorème ci-dessous, nous admettrons que cette situation ne peut pas se produire lorsque la fonction est continue sur $[a, b]$.
Considérons, par exemple, la fonction h continue sur $[a, b]$ (figure 1).
Soit λ un nombre réel quelconque compris entre $h(a)$ et $h(b)$.
On constate graphiquement que la droite (D) d'équation $y=\lambda$ est sécante à $(\mathcal{C}_h)$.
Cela signifie que l'équation

$$x \in [a, b], \quad h(x)=\lambda$$

admet des solutions.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si la fonction numérique f est continue sur $[a, b]$ alors, pour tout nombre réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

Exercice

Soit la fonction polynome f définie par

$$f(x)=5x^{27}+2x^{10}-x+1.$$

Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.
En déduire que l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad 5x^{27}+2x^{10}-x+1=0$$

admet au moins une solution appartenant à $]-1, 0[$.

Scanned by CamScanner

2 Dérivabilité sur un intervalle

1) Fonctions dérivables sur un intervalle

Définition

Une fonction numérique est dite *dérivable sur un intervalle I* si elle est dérivable en tout point de *I*.

On sait qu'une fonction dérivable en un point est continue en ce point.
Par conséquent, une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Exemples

Il résulte des règles de dérivation de la somme, du produit et du quotient de fonctions dérivables en un point que :

— toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$;

— toute fonction rationnelle est dérivable en tout point de son ensemble de définition et, par conséquent, sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

2) Dérivées et sens de variation d'une fonction

a) **Rappels**

Soit une fonction numérique f et un intervalle I contenu dans l'ensemble de définition de f.

On dit que :

- f est *croissante sur* I si :
$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \quad u < v \implies f(u) \leqslant f(v);$$
- f est *strictement croissante sur* I si :
$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \quad u < v \implies f(u) < f(v);$$
- f est *décroissante sur* I si :
$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \quad u < v \implies f(u) \geqslant f(v);$$
- f est *strictement décroissante sur* I si :
$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \quad u < v \implies f(u) > f(v).$$

b) **Considérations graphiques**

Soit, figure 2, la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction numérique f, dérivable et croissante sur un intervalle I.
Nous avons tracé quelques tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ en des points dont l'abscisse appartient à I.
On constate que, f étant croissante sur I, toutes ces tangentes sont « inclinées » de façon que leur coefficient directeur soit positif (revoir la figure 10, page 169).

Scanned by CamScanner

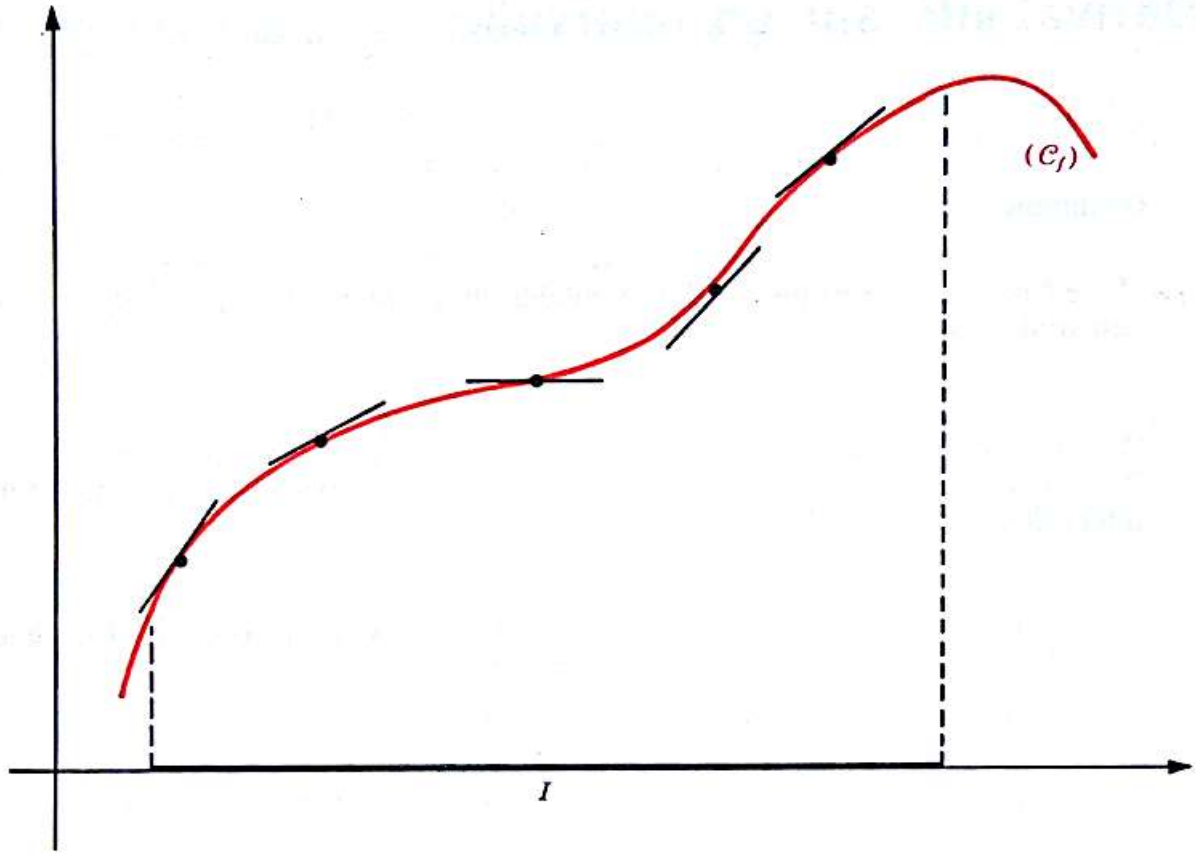


Fig. 2

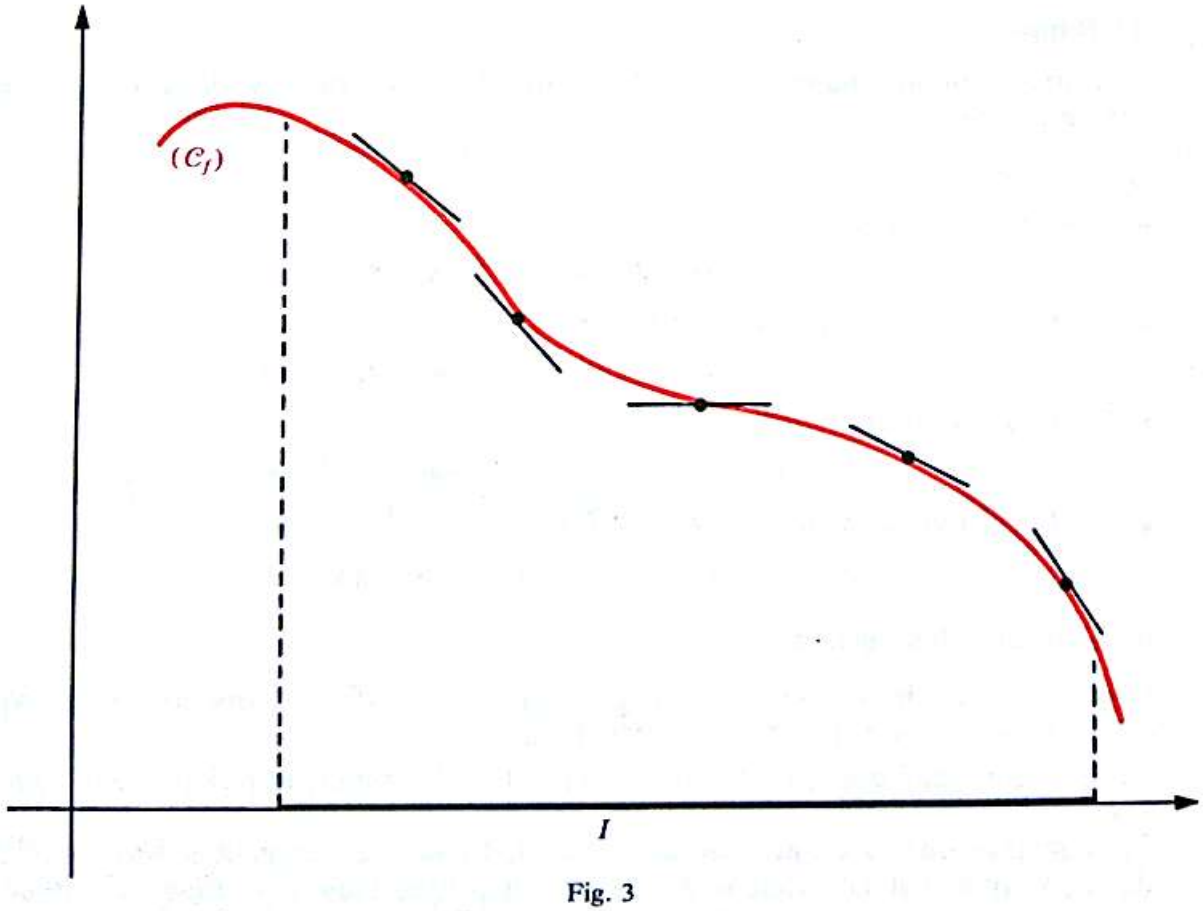


Fig. 3

Scanned by CamScanner

Cela signifie que $f'(a)$ est positif pour tout élément a de I ou, encore, que la fonction dérivée f' est positive sur I.

De même, si une fonction numérique f est dérivable et décroissante sur un intervalle I, on constate (figure 3) que la fonction dérivée f' est négative sur I.

c) Sens de variation d'une fonction

On démontre et nous admettrons les théorèmes suivants.

Théorème 1

Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle I.
Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I;
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I;
- f est constante sur I si et seulement f' est nulle en tout point de I.

Théorème 2

Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle I.
Alors :

- $[\forall x \in I \quad f'(x) > 0] \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur I;
- $[\forall x \in I \quad f'(x) < 0] \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

Remarque. Si f est strictement croissante sur I, il résulte du théorème 1 que f' est positive sur I; il peut cependant exister des éléments a de I tels que $f'(a) = 0$. Par exemple, on sait que la fonction $x \longmapsto x^3$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et, cependant, son nombre dérivé au point 0 est nul.

Exemple 1

Étudions le sens de variation de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 - 3x^2 - 12x + 3. \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x - 12.$$

Les zéros de la fonction polynôme du second degré f' sont $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$.
D'où :

$$\begin{aligned} &\forall x \in]\leftarrow, 1 - \sqrt{5}[&& f'(x) > 0; \\ &\forall x \in]1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}[&& f'(x) < 0; \\ &\forall x \in]1 + \sqrt{5}, \rightarrow[&& f'(x) > 0. \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$\leftarrow$	$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$	$\rightarrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Scanned by CamScanner

Par conséquent, f est croissante sur $]\leftarrow, 1-\sqrt{5}[$, décroissante sur $[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$ et croissante sur $[1+\sqrt{5}, \rightarrow[$.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$\leftarrow$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$\rightarrow$
$f(x)$		$\nearrow$	$-11+10\sqrt{5}$	$\searrow$	$-11-10\sqrt{5}$	$\nearrow$	

On peut combiner les deux tableaux en un seul :

x	$\leftarrow$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$\rightarrow$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-11+10\sqrt{5}$	$\searrow$	$-11-10\sqrt{5}$	$\nearrow$	

Exemple 2

Étudions le sens de variation de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}.$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}-\{1, 2\}$.
La dérivée f' se calcule plus simplement en remarquant d'abord que :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1, 2\} \quad f(x)=\frac{x-3}{x^2-3x+2}.$$

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{1, 2\}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1, 2\} \quad f'(x)=\frac{(x^2-3x+2)-(x-3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$=\frac{-x^2+6x-7}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Puisque $(x-1)^2(x-2)^2>0$ lorsque x est différent de 1 et de 2, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2+6x-7$.

On obtient le tableau suivant (vérifier) :

x	$\leftarrow$	1		$3-\sqrt{2}$		2		$3+\sqrt{2}$	$\rightarrow$
$-x^2+6x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	∥	$-$	0	$+$	∥	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	∥	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	∥	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$

Scanned by CamScanner

Exercices Étudier le sens de variation des fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x)=\frac{3}{8}x^8-\frac{3}{7}x^7-x^6+5;$$

$$g(x)=\frac{x}{(x-1)^2}.$$

3) Maximums et minimums relatifs

a) Rappels

Soit une fonction numérique f et une partie A de son ensemble de définition. Rappelons qu'un nombre réel M est appelé le *maximum de f sur A* si $M=\max f(A)$, c'est-à-dire si :

- $M\in f(A)$;
- $\forall x\in A \quad M\geqslant f(x)$.

Lorsque M est le maximum de f sur A et c est un élément de A tel que $f(c)=M$, on dit que *f atteint son maximum sur A en c.*

On définit de même le *minimum m de f sur A* et les éléments c de A en lesquels ce minimum est atteint.

Exercices Soit les fonctions

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto -x^2+4x \qquad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto |-x^2+4x|$$

$$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto -|-x^2+4x|.$$

— Vérifier que les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ de la figure 4 sont respectivement les représentations graphiques de f, g et h.

— Indiquer, s'ils existent, le maximum et le minimum de chacune de ces fonctions : sur $\mathbb{R}$, sur $[0, 4]$, sur $[0, 2]$.

— En quels points sont-ils atteints?

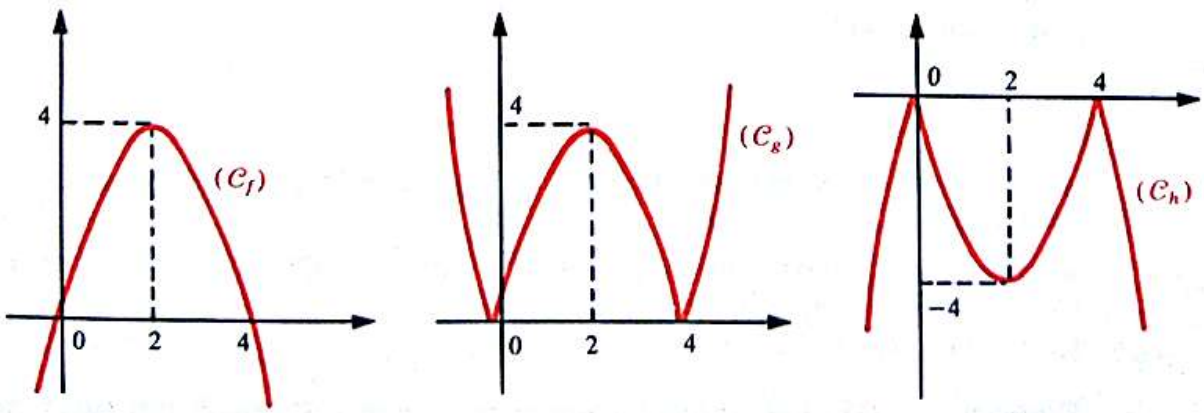


Fig. 4

Scanned by CamScanner

b) Considérations graphiques

Soit la fonction numérique f dont la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ est donnée par la figure 5.
Son ensemble de définition D_f est l'intervalle $[a, b]$.

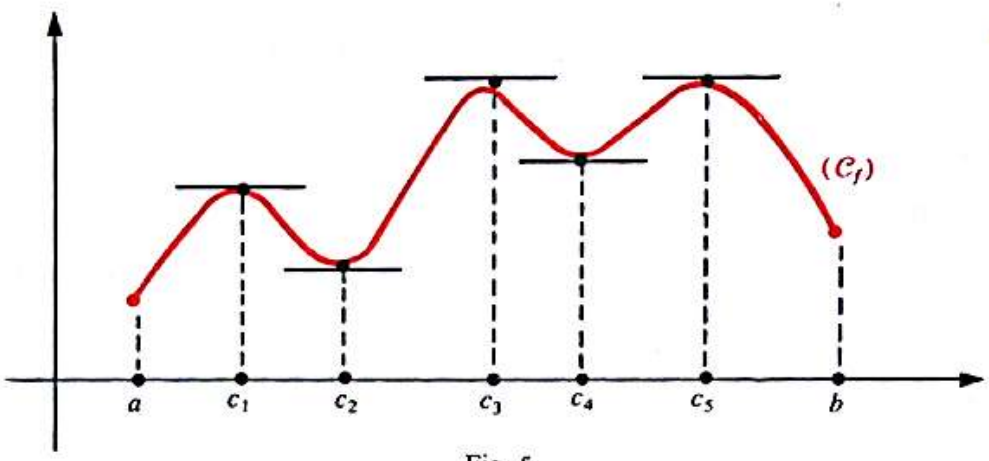


Fig. 5

- $f(a)$ est le minimum de f sur D_f.
- $f(c_3)$ et $f(c_5)$ sont tous deux le maximum de f sur D_f.
- $f(c_1)$ n'est ni le maximum ni le minimum de f sur D_f.

Cependant, il existe un intervalle ouvert L contenant c_1 tel que $f(c_1)$ soit le maximum de f sur $L \cap D_f$; par exemple : $L =]a, c_2[$.
On dit que f admet un *maximum relatif* en c_1.

- $f(c_2)$, $f(c_4)$ et $f(b)$ ne sont ni le maximum ni le minimum de f sur D_f.

Vérifier qu'il existe des intervalles ouverts L, M, N contenant respectivement c_2, c_4 et b tels que $f(c_2)$, $f(c_4)$ et $f(b)$ soient respectivement le minimum de f sur $L \cap D_f$, $M \cap D_f$ et $N \cap D_f$.
On dit que f admet un *minimum relatif* en c_2, c_4 et b.

c) Définition

Soit une fonction numérique f et un élément c de son ensemble de définition D_f.
On dit que f admet un *maximum relatif* (resp. *minimum relatif*) *en* c s'il existe un intervalle ouvert L contenant c tel que $f(c)$ soit le maximum (resp. minimum) de f sur $L \cap D_f$.

Remarques

- On dit que f admet un *extremum relatif en* c si f admet un maximum relatif ou un minimum relatif en c.
- Si $f(c)$ est le maximum (resp. minimum) de f sur D_f, alors f admet un maximum (resp. minimum) relatif en c.

La réciproque est fausse : voir la figure 5.

Exercice Déterminer les maximums et minimums relatifs des fonctions f, g et h représentées graphiquement par les figures 4.

Scanned by CamScanner

d) **Recherche des extremums relatifs**

• Examinons à nouveau la figure 5.
On observe qu'en chaque point de $(\mathcal{C}_f)$, d'abscisse différente de a et b, correspondant à un extremum relatif de f, la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à la droite des abscisses.

Le nombre dérivé de f en c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 est donc nul.

On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

> Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I.
> Si f admet un extremum relatif en un élément c de I, alors $f'(c)=0$.

Cependant, si un élément c de I vérifie $f'(c)=0$, f n'admet pas nécessairement un extremum relatif en c.
Considérons, par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ (figure 6).

On a $f'(0)=0$, bien que f n'admette pas d'extremum relatif en O.

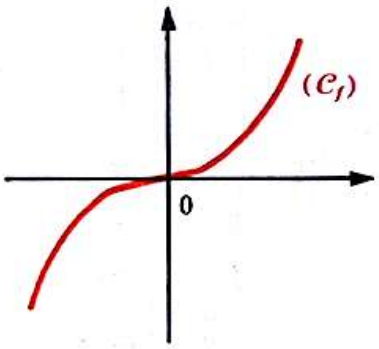


Fig. 6

• Soit une fonction numérique f, dérivable sur un intervalle ouvert I, et un élément c de I tel que $f'(c)=0$.
Pour vérifier si f admet un maximum ou un minimum relatif en c, on utilisera le tableau de variation de f.
Par exemple, un tableau de variation tel que

x		a		c		b	
$f'(x)$			+	0	−		
$f(x)$			↗	$f(c)$	↘		

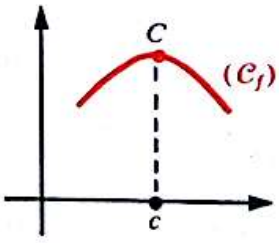


Fig. 7

permet de conclure que f admet un maximum relatif en c (justifier).

Un tableau de variation tel que

x		a		c		b	
$f'(x)$			−	0	+		
$f(x)$			↘	$f(c)$	↗		

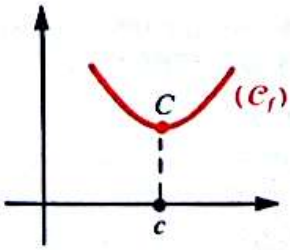


Fig. 8

permet de conclure que f admet un minimum relatif en c (justifier).

Scanned by CamScanner

Un tableau de variation tel que

x		a		c		b	
$f'(x)$			+	0	+		
$f(x)$			↗	$f(c)$	↗		

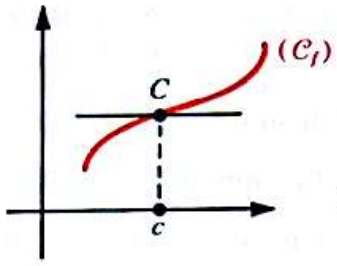


Fig. 9

ou tel que

x		a		c		b	
$f'(x)$			−	0	−		
$f(x)$			↘	$f(c)$	↘		

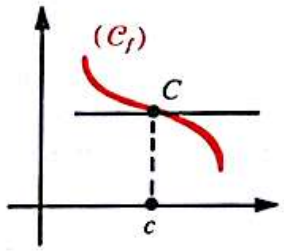


Fig. 10

permet de conclure que f n'admet pas d'extremum relatif en c (justifier).

Remarquons que dans les deux derniers cas, la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f « traverse » au point d'abscisse c sa tangente en ce point.
On dit que c est une *abscisse d'inflexion* ou que le point C de $(\mathcal{C}_f)$, d'abscisse c, est un *point d'inflexion*.

En résumé :

Si f' s'annule en c en changeant de signe, f admet un extremum relatif en c.
Si f' s'annule en c sans changer de signe, c est une abscisse d'inflexion.

Exercices Dans les exemples 1 et 2, page 197, nous avons obtenu le tableau de variation de deux fonctions.
En quels points ces fonctions admettent-elles un maximum relatif? un minimum relatif?

4) Activités : Points d'inflexion

• Soit une fonction numérique f, dérivable sur un intervalle ouvert I, et un élément c de I.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f relativement à un repère du plan et soit C le point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse c.

Nous dirons (intuitivement) que c est une *abscisse d'inflexion*, ou que C est un *point d'inflexion*, si $(\mathcal{C}_f)$ « traverse » en C sa tangente en ce point (figures 11 et 12).

Nous avons vu que si f' s'annule en c sans changer de signe, alors c est une abscisse d'inflexion.
Dans ce cas, comme $f'(c)=0$, la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point C est parallèle à la droite des abscisses.
Il existe cependant des points d'inflexion en lesquels la tangente n'est pas parallèle à la droite des abscisses.

Scanned by CamScanner

• Considérons la figure 11, où c est une abscisse d'inflexion et où la tangente en C n'est pas nécessairement parallèle à la droite des abscisses.

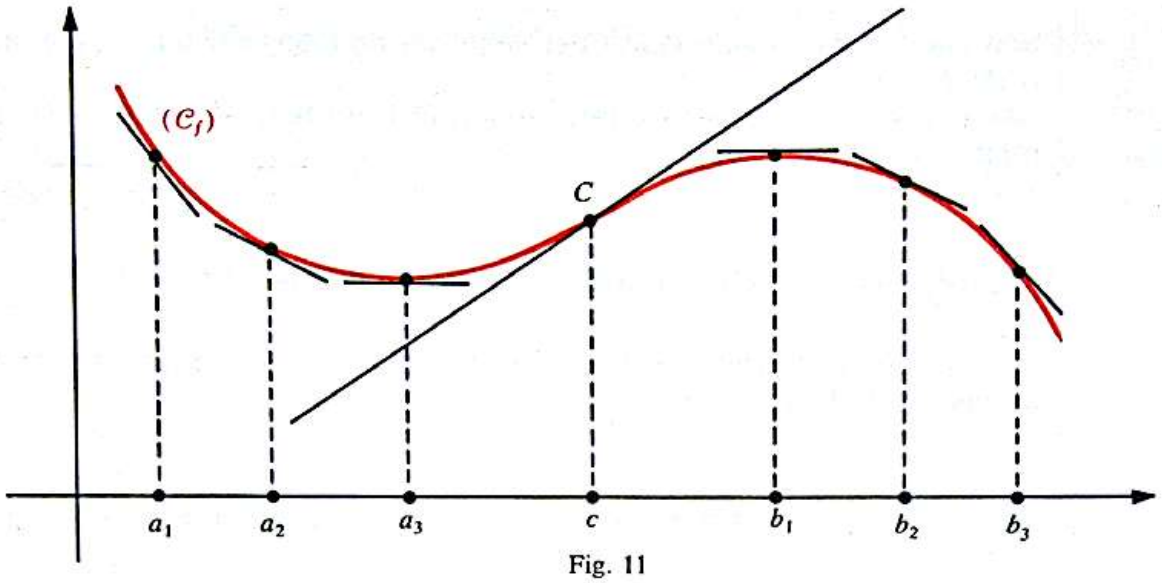


Fig. 11

Compléter les deux lignes suivantes en y remplaçant les pointillés par les symboles $\leqslant$ ou $\geqslant$ (revoir la figure 10, page 169) :

$$f'(a_1)...f'(a_2)...f'(a_3)...f'(c);$$
$$f'(c)...f'(b_1)...f'(b_2)...f'(b_3).$$

Compléter ensuite le tableau de variation de f' ci-dessous :

x		c	
$f'(x)$		$f'(c)$	

Répondre aux mêmes questions en considérant cette fois la figure 12.

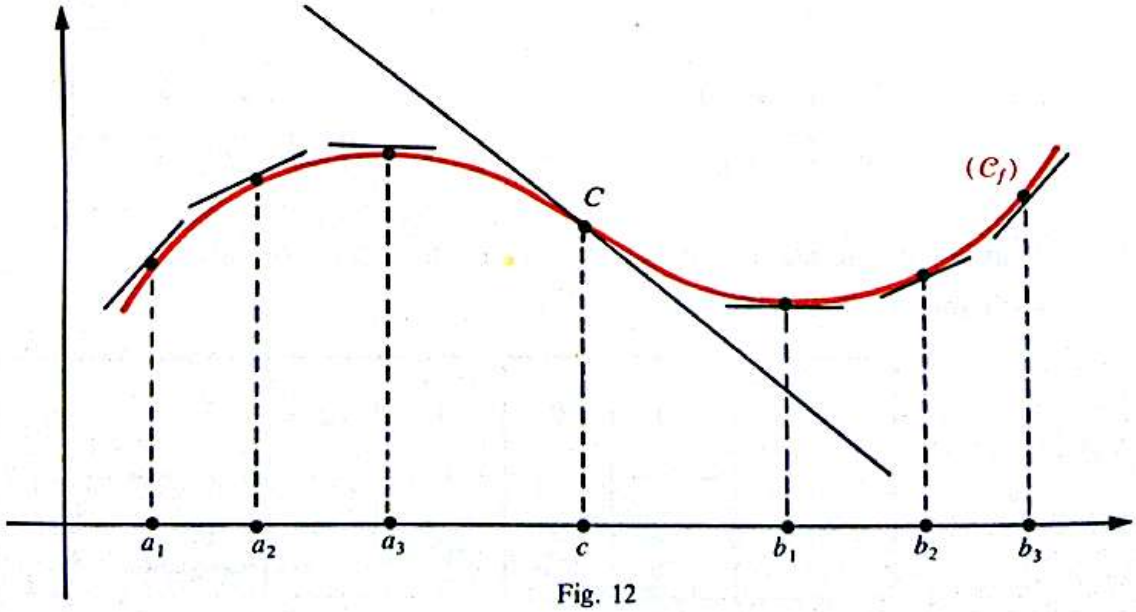


Fig. 12

Scanned by CamScanner

Dans les deux cas, on conclut que f' admet un extremum relatif en c.

• On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

> Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I et un élément c de I.
> Alors, c est une abscisse d'inflexion si et seulement si f' admet un extremum relatif en c.

En particulier, f'' désignant la dérivée de f', on peut énoncer :

> Si f et f' sont dérivables sur l'intervalle ouvert I et si l'élément c de I est une abscisse d'inflexion, alors $f''(c)=0$.

Remarque. Si c appartient à I et $f''(c)=0$, f' n'admet pas nécessairement un extremum relatif au point c et, par conséquent, c n'est pas nécessairement une abscisse d'inflexion.

Exemple

Étudions et représentons graphiquement la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2(x-3). \end{aligned}$$

— Ensemble de définition de f : $\mathbb{R}$.

— La fonction polynôme f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2). \end{aligned}$$

0 et 2 sont les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=0$.

— Tableau de variation de f :

x	$\leftarrow$	0		2	$\rightarrow$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

f admet un maximum relatif en 0 et un minimum relatif en 2.

— Tableau de valeurs de f :

x	−1	0	1	2	3	$\frac{7}{2}$
$f(x)$	−4	0	−2	−4	0	$\frac{49}{8}$

Scanned by CamScanner

— Représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

Pour construire la représentation graphique de f nous pouvons prendre :

$$x_{\min} = -1; \qquad y_{\min} = -4;$$
$$x_{\max} = \frac{7}{2}; \qquad y_{\max} = 7.$$

Un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 2 \cdot OJ$ peut être choisi pour cette construction.

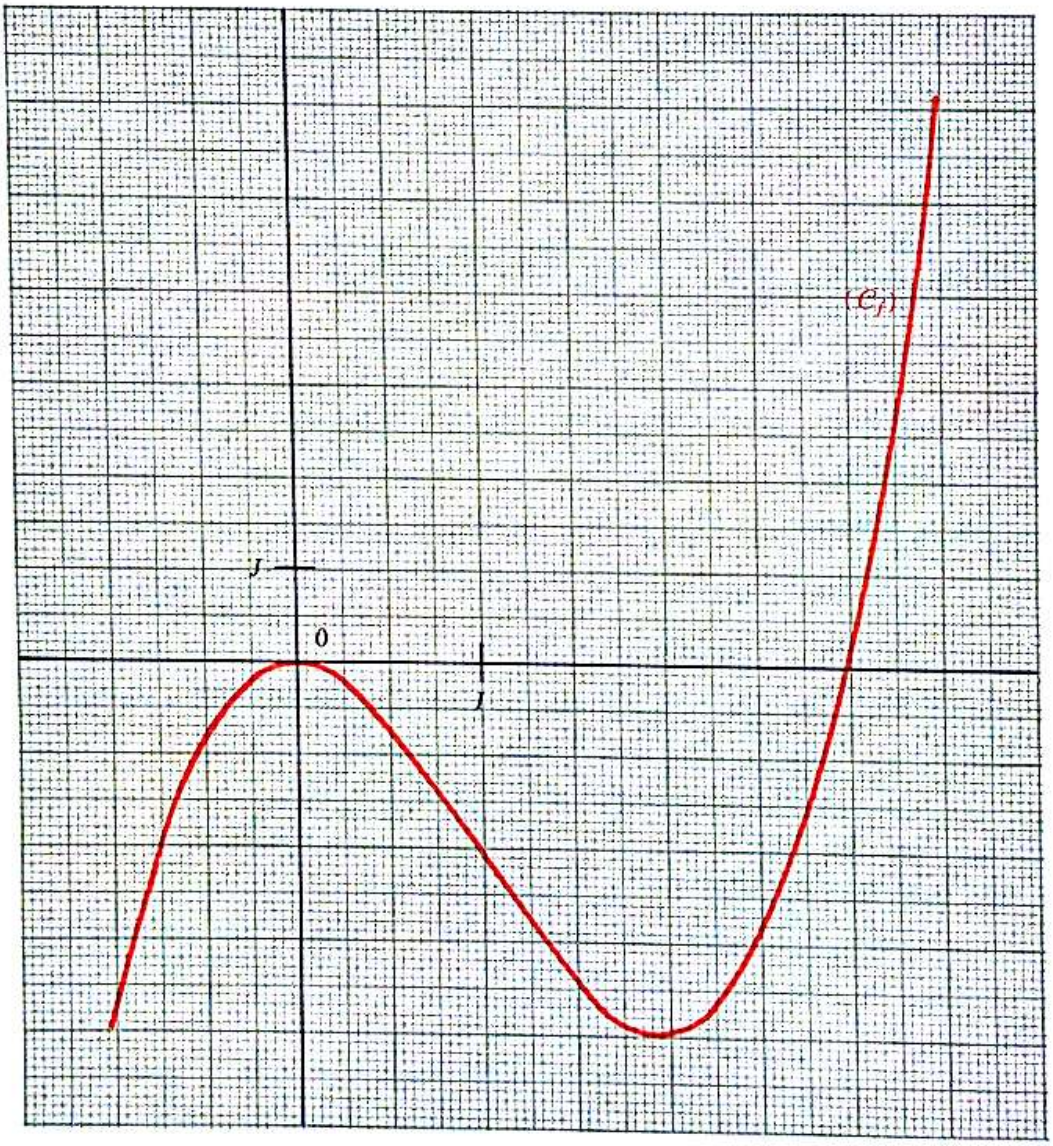


Fig. 13

— Tracer les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses 0 et 2.

— D'après la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il semble que f possède un point d'inflexion dont l'abscisse appartient à $]0, 2[$.

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = 6x - 6$$
$$= 6(x - 1).$$

Scanned by CamScanner

Le tableau de variation de f' est donc :

x	$\leftarrow$	1	$\rightarrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$

Cela montre que 1 est la seule abscisse d'inflexion.
Tracer la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

3 Extension de la notion de limite

1) Limites infinies

a) **Exemple**

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{(x-1)^2}.$$

— Ensemble de définition de f : $\mathbb{R}-\{1\}$.

— La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} \qquad f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^3}.$$

— Tableau de variation de f :

x	$\leftarrow$	1	$\rightarrow$
$f'(x)$	$+$	∥	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	∥	$\searrow$

— Un tableau de valeurs de f :

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	∥	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Scanned by CamScanner

— Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f, nous pouvons prendre :

$$x_{min} = -2, \quad x_{max} = 4, \quad y_{min} = 0.$$

Le tableau de valeurs montre que si l'on veut représenter f sur $[-2, 4]$, il faut choisir $y_{max} \geqslant 4$.

Le choix $y_{max} = 4$ permet-il de représenter f sur $[-2, 4]$?

Pour répondre à cette question, calculons $f(x)$ pour quelques valeurs de x « proches » de 1 :

x	$1-10^{-3}$	$1-10^{-9}$	$1-10^{-15}$	$1-10^{-40}$	1
$f(x)$	10^6	10^{18}	10^{30}	10^{80}	

x	$1+10^{-40}$	$1+10^{-15}$	$1+10^{-9}$	$1+10^{-3}$
$f(x)$	10^{80}	10^{30}	10^{18}	10^6

Ce nouveau tableau montre que 4 est une valeur beaucoup trop petite pour y_{max} et que, de toute façon, il faut renoncer à représenter f sur l'intervalle $[-2, 4]$ tout entier.
Nous choisirons néanmoins $y_{max} = 4$, ce qui signifie que nous obtiendrons la représentation graphique de f sur $\left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 4\right]$ (figure 14).

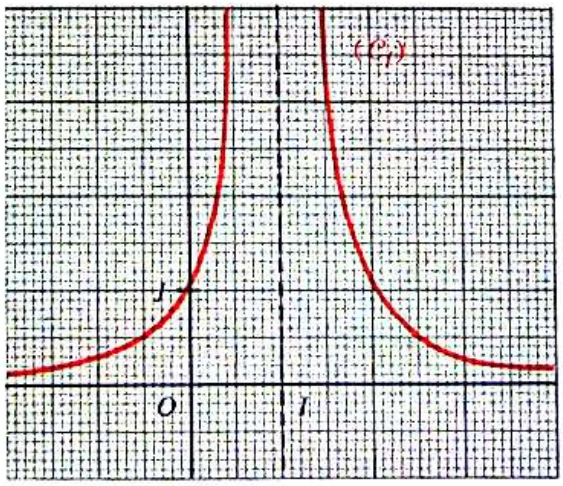


Fig. 14

La représentation graphique de f et, surtout, le second tableau de valeurs de f suggèrent que les nombres $f(x)$ deviennent aussi grands que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de 1.
Nous allons vérifier que cette supposition est vraie tout en lui donnant un sens mathématique précis.

Est-il vrai, par exemple, que $f(x) > 10^{100}$ lorsque x est assez proche de 1?

Scanned by CamScanner

On a successivement :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) > 10^{100} \iff \frac{1}{(x-1)^2} > 10^{100}$$
$$\iff (x-1)^2 < 10^{-100}$$
$$\iff |x-1| < 10^{-50}.$$

D'où : $\forall x \in D_f \quad |x-1| < 10^{-50} \implies f(x) > 10^{100}$.

De même :

$$\forall x \in D_f \quad |x-1| < 10^{-5\,000} \implies f(x) > 10^{10\,000}.$$

Plus généralement, donnons-nous un nombre réel r strictement positif. On a successivement :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) > r \iff \frac{1}{(x-1)^2} > r$$
$$\iff (x-1)^2 < \frac{1}{r}$$
$$\iff |x-1| < \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

D'où : $\forall x \in D_f \quad |x-1| < \frac{1}{\sqrt{r}} \implies f(x) > r.$

On a donc montré que, quel que soit le nombre réel r strictement positif (aussi grand soit-il), on peut trouver un nombre réel α strictement positif tel que

$$\forall x \in D_f \quad |x-1| < \alpha \implies f(x) > r.$$

Ceci est la traduction en langage mathématique du fait que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de 1.

On dit que $+\infty$ (plus l'infini) est la *limite de $f(x)$ lorsque x tend vers* 1, ou que $+\infty$ est la *limite de f au point* 1.
On écrit :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{1} f = +\infty.$$

Remarque. Le symbole $+\infty$ désigne un « objet » qui n'est pas un nombre réel; on convient que $+\infty$ est strictement supérieur à tous les nombres réels.

b) **Exemple**

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{-1}{(x-1)^2} \quad \text{(figure 15).}$$

En procédant comme ci-dessus, on montre que les nombres $g(x)$ deviennent négatifs et de valeur absolue aussi grande que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de 1.
Plus précisément, on montre que quel que soit le nombre réel s strictement négatif (aussi grand soit-il en valeur absolue), on peut trouver un nombre réel α strictement positif tel que

$$\forall x \in D_g \quad |x-1| < \alpha \implies g(x) < s.$$

Scanned by CamScanner

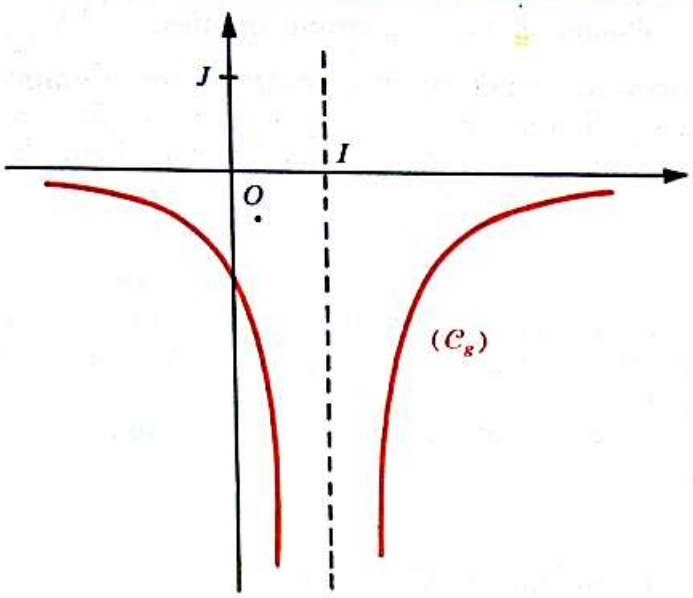


Fig. 15

On dit que $-\infty$ (moins l'infini) est la *limite de* $g(x)$ *lorsque* x *tend vers* 1, ou que $-\infty$ est la *limite de* g *au point* 1.
On écrit :

$$\lim_{x \to 1} g(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{1} g = -\infty.$$

Remarque. Le symbole $-\infty$ désigne un « objet » qui n'est ni un nombre réel ni $+\infty$; on convient que $-\infty$ est strictement inférieur à tous les nombres réels.

c) Vocabulaire, notations et remarques

• Soit une fonction numérique f et un nombre réel a.

S'il existe un intervalle I contenant a tel que $I - \{a\} \subset D_f$, on peut définir, comme ci-dessus, ce que signifie :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

• Une limite est dite *finie* si elle est égale à un nombre réel.
Elle est dite *infinie* si elle est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

• On peut montrer que si une fonction possède une limite en un point, finie ou infinie, elle ne possède pas d'autre limite en ce point.

• On peut montrer qu'une fonction n'a jamais de limite infinie en un point où elle est définie.

• Afin d'uniformiser les notations, les symboles $+\infty$ et $-\infty$ remplaceront désormais les flèches dans les écritures des intervalles non bornés.
Par exemple, étant donné un nombre réel a, on écrira :

$]-\infty, a]$ au lieu de $]\leftarrow, a]$;

$]a, +\infty[$ au lieu de $]a, \rightarrow[$.

Scanned by CamScanner

d) Limite à gauche et limite à droite infinies

Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et un nombre réel a. Lorsque la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite au point a, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est la *limite à gauche de f au point a* et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty \quad \text{(resp. } \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty\text{)}.$$

De même, lorsque la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite au point a, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est la *limite à droite de f au point a* et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty \quad \text{(resp. } \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty\text{)}.$$

Exemple

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$ (figure 16).

Vérifier que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

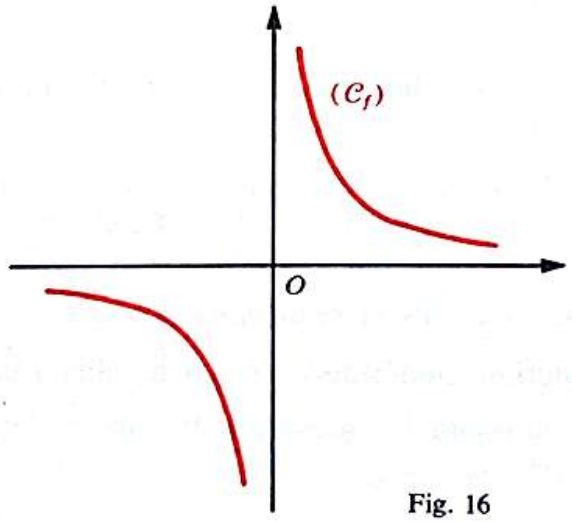


Fig. 16

On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

Soit une fonction numérique f et un nombre réel a n'appartenant pas à D_f.
On suppose qu'il existe un élément r de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$]a-r, a+r[- \{a\} \subset D_f.$$

On a alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty.$$

Scanned by CamScanner

e) **Asymptotes verticales**

Soit une fonction numérique f et sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Lorsque f possède, au point a, une limite à gauche ou une limite à droite infinie, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale à* $(\mathcal{C}_f)$.

Exemples

— La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ (figures 14 et 15).

— La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ (figure 16).

2) Limites à l'infini

a) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x}$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$.

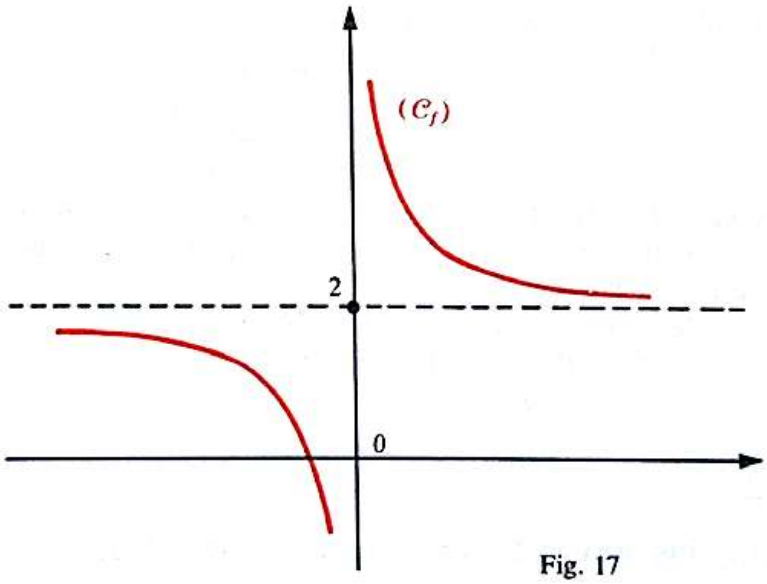


Fig. 17

La représentation graphique de f (figure 17) suggère que la distance entre $f(x)$ et 2 devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus grand.
Cette impression est confirmée par le calcul :

x	10	1 000	1 000 000	1 000 000 000
$f(x)$	2,1	2,001	2,000 001	2,000 000 001

Étant donné un nombre réel strictement positif ε, montrons que l'on a $|f(x)-2| < \varepsilon$ lorsque x est suffisamment grand.

Scanned by CamScanner

Observons d'abord que :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x)-2=\left(2+\frac{1}{x}\right)-2$$
$$=\frac{1}{x}.$$

Si $x>\frac{1}{\varepsilon}$, x est strictement positif et on a :

$$\frac{1}{x}<\varepsilon, \quad |f(x)-2|=\frac{1}{x}.$$

D'où : $\forall x \in D_f \quad x>\frac{1}{\varepsilon} \implies |f(x)-2|<\varepsilon.$

Ainsi, quel que soit le nombre réel ε strictement positif (aussi petit soit-il), on peut trouver un nombre réel r strictement positif tel que

$$\forall x \in D_f \quad x>r \implies |f(x)-2|<\varepsilon.$$

Ceci est la traduction en langage mathématique du fait que la distance entre $f(x)$ et 2 devient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus grand.

On dit que 2 est la *limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$*, ou que 2 est la *limite de f à $+\infty$*.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=2$ ou $\lim\limits_{+\infty} f=2$.

b) Considérons à nouveau la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x}.$$

D'après sa représentation graphique (figure 17), il semble que la distance entre $f(x)$ et 2 devient aussi petite que l'on veut lorsque x, négatif, a une valeur absolue de plus en plus grande.
Comme ci-dessus, on montre que quel que soit le nombre réel ε strictement positif, on peut trouver un nombre réel s strictement négatif tel que

$$\forall x \in D_f \quad x<s \implies |f(x)-2|<\varepsilon.$$

On dit que 2 est la *limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$*, ou que 2 est la *limite de f à $-\infty$*.

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=2$ ou $\lim\limits_{-\infty} f=2$.

c) Soit une fonction numérique f et supposons qu'il existe un nombre réel a

tel que : $]a, +\infty[\subset D_f$.

On peut alors définir ce que signifie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=l, \ (l \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=-\infty,$$

tel que : $]-\infty, a[\subset D_f$.

On peut alors définir ce que signifie :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=l, \ (l \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty.$$

Scanned by CamScanner

Le cas des limites finies a été traité sur les exemples.
Pour les autres cas signalons, par exemple, que l'écriture

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

signifie, intuitivement, que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x, négatif, a une valeur absolue de plus en plus grande.

Exemples

- Soit un nombre réel c et la fonction constante $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto c$.

  Vérifier que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$.

  Cela peut encore s'écrire :

  $$\lim_{x \to +\infty} c = c, \quad \lim_{x \to -\infty} c = c.$$

- Vérifier que : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$;

  $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

d) **Asymptotes horizontales**

Soit une fonction numérique f et sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Lorsque f a une limite finie l à $-\infty$ ou à $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une *asymptote horizontale à* $(\mathcal{C}_f)$.

Exemples

— La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x}$ (figure 17).

— Observons que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (figure 16).
La droite d'équaton $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Afin d'interpréter géométriquement cette définition considérons, figure 18, une fonction f telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, $(l \in \mathbb{R})$.
Soit M un point quelconque de $(\mathcal{C}_f)$, d'abscisse x, et soit M' le point de même abscisse de l'asymptote horizontale d'équation $y = l$.
Dans le cas de la figure 18, on a :

$$d(M, M') = f(x) - l.$$

D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} d(M, M') = l - l = 0.$$

La distance entre M et M' a donc pour limite zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

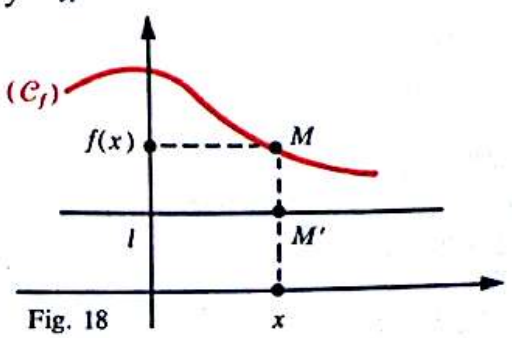


Fig. 18

Scanned by CamScanner

3) Opérations sur les limites

Soit deux fonctions numériques f et g, d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g.
Le symbole a désigne soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$.
On suppose que f et g possèdent chacune une limite, finie ou infinie, lorsque x tend vers a.

On démontre et nous admettrons que si les limites de f et g sont finies, les résultats du théorème 1, page 158, concernant la limite de $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$, sont encore vrais pour $a=+\infty$ ou $a=-\infty$.

Exemple 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5-3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^2$$
$$=5-3\times0+2\times0^2=5.$$

Par contre, lorsque les limites de f et g ne sont pas toutes deux finies et que a est, soit un nombre réel, soit $+\infty$ ou $-\infty$, on utilise les résultats des trois tableaux ci-dessous, que nous admettrons.
(Dans le cas où a est un nombre réel, on suppose qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $I-\{a\}\subset D_f\cap D_g$.)

Limite d'une somme

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite
$+\infty$	l, où $l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$	$+\infty$
$-\infty$	l, où $l\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$	$-\infty$

Remarque. On ne peut pas énoncer de règle pour le calcul de la limite de $f+g$ dans le cas où l'une des deux fonctions a pour limite $+\infty$ et l'autre $-\infty$.
En effet, dans une telle situation, la limite de $f+g$ peut être égale à un nombre réel quelconque, ou à $+\infty$ ou $-\infty$, ou ne pas exister.
Par exemple, étant donné un nombre réel c et les fonctions numériques $f: x\longmapsto x+c$ et $g: x\longmapsto -x$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to+\infty}c=c.$$

Exemples 2

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3-\frac{2}{x}\right)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty,\\ \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)=3.\end{cases}$

Scanned by CamScanner

• $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+x+1) = +\infty$, car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty. \end{cases}$

• Le tableau **limite d'une somme** ne permet pas de calculer la limite de $x \longmapsto x^2+x+1$ à $-\infty$, car

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty.$$

C'est le tableau **limite d'un produit** qui, par le choix d'une écriture appropriée de x^2+x+1, va nous permettre de calculer cette limite.

Limite d'un produit

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors fg a pour limite
$+\infty$ (resp. $-\infty$)	l, où $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)
$+\infty$ (resp. $-\infty$)	l, où $l \in \mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$	$-\infty$ (resp. $+\infty$)

Remarque. On ne peut pas énoncer de règle pour le calcul de la limite de fg dans le cas où l'une des deux fonctions a une limite infinie et l'autre une limite nulle. En effet, dans une telle situation, la limite de fg peut être égale à un nombre réel quelconque, ou à $+\infty$ ou $-\infty$, ou ne pas exister.
Par exemple, étant donné un élément c de $\mathbb{R}_+^*$ et les fonctions numériques $f : x \longmapsto cx$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (fg)(x) = \lim_{x \to +\infty} c = c.$$

Exemple 3

Revenons au calcul de la limite de $x \longmapsto x^2+x+1$ à $-\infty$.
On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^2+x+1 = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

D'où :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2+x+1) = +\infty.$$

Scanned by CamScanner

Limite de l'inverse

Si g a pour limite	et si	alors $\frac{1}{g}$ a pour limite
$+\infty$ ou $-\infty$		0
0	$\forall x \in D_g - \{a\} \quad g(x) > 0$	$+\infty$
0	$\forall x \in D_g - \{a\} \quad g(x) < 0$	$-\infty$

Remarques

• La limite de $\frac{f}{g}$ se calcule en observant que : $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$.

• Dans le tableau ci-dessus, la condition

$$\forall x \in D_g - \{a\} \quad g(x) > 0 \text{ (resp. } g(x) < 0)$$

peut être remplacée par la condition moins restrictive suivante :

Il existe un nombre réel r strictement positif tel que

— dans le cas où $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in]a - r, a + r[\cap (D_g - \{a\}) \quad g(x) > 0 \text{ (resp. } g(x) < 0);$$

— dans le cas où $a = +\infty$,

$$\forall x \in]r, +\infty[\cap D_g \quad g(x) > 0 \text{ (resp. } g(x) < 0);$$

— dans le cas où $a = -\infty$,

$$\forall x \in]-\infty, -r[\cap D_g \quad g(x) > 0 \text{ (resp. } g(x) < 0).$$

Exemple 4

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et étudions :

— les limites à $-\infty$ et à $+\infty$ des fonctions $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$;

— la limite au point 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$.

• On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

En utilisant le tableau **limite d'un produit**, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot x = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot x = -\infty.$$

Plus généralement, on montre par récurrence sur n que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

• On a déjà observé que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, ce qui résulte aussi du tableau **limite de l'inverse.**

Comme $\frac{1}{x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

• Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n=0$ et $\left[\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad x^n>0\right]$, il résulte du tableau **limite de l'inverse** que :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty.$$

• *Supposons n impair*

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^n=0$ et $\left[\forall x\in\mathbb{R}_-^*\quad x^n<0\right]$, il résulte du tableau **limite de l'inverse** que :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty.$$

• *Supposons n pair*

Comme $\lim\limits_{x\to0} x^n=0$ et $\left[\forall x\in\mathbb{R}^*\quad x^n>0\right]$, il résulte du tableau **limite de l'inverse** que :

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}=+\infty.$$

4) Limites des fonctions polynômes et rationnelles

a) Limites à l'infini

Exemple 1

Calculons : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+5)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, il résulte du tableau **limite d'un produit** que $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}5=5$, il résulte du tableau **limite d'une somme** que $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+5)=+\infty$.

Scanned by CamScanner

Exemple 2

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 - 3x + 1)$.

On ne peut pas utiliser le tableau **limite d'une somme** car :

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} (-3x + 1) = -\infty.$$

On observe alors que pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$2x^2 - 3x + 1 = 2x^2\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) = 1$.

Il résulte donc du tableau **limite d'un produit** que

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Exemple 3

Calculons : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{-3x + 1}$.

En écrivant

$$\frac{2x - 3}{-3x + 1} = (2x - 3)\frac{1}{-3x + 1}$$

et en remarquant que

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{-3x + 1} = 0$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x + 1) = -\infty\right)$, on ne peut pas conclure (le tableau **limite d'un produit** ne pouvant être utilisé).

On observe alors que pour tout élément x de $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$, on a :

$$\frac{2x - 3}{-3x + 1} = \frac{2x\left(1 - \frac{3}{2x}\right)}{-3x\left(1 - \frac{1}{3x}\right)} = -\frac{2}{3}\frac{1 - \frac{3}{2x}}{1 - \frac{1}{3x}}.$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{3x}} = 1$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{-3x + 1} = -\frac{2}{3}$.

Exemple 4

Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 2}$.

Scanned by CamScanner

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{5x^3+x^2-x+1}{x^2-x+2}=\frac{5x^3\left(1+\frac{1}{5x}-\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{5x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=5x\,\frac{1+\frac{1}{5x}-\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{5x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}5x=-\infty.$

Exercices Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-3x^2+1}{x^3+2x^2-x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{-x^2+1},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^3-2x^2+1}.$$

Cas général

En procédant comme dans les exemples ci-dessus, on démontre les résultats suivants.

Soit f et g deux fonctions polynômes définies respectivement par

$$f(x)=a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1x+b_0,$$

et supposons que a_p et b_q soient non nuls.
Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}a_px^p,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_px^p}{b_qx^q},$$

et de même pour $x\to-\infty$.

Exercices La représentation graphique de chacune des fonctions suivantes admet-elle une asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$?

$$x\longmapsto\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+x-2},\quad x\longmapsto\frac{2x^2-5}{7x^3-2x^2+x-1},\quad x\longmapsto\frac{2x^2+1}{x-3}.$$

b) Limite d'une fonction rationnelle en un point où elle n'est pas définie

En un point où elle n'est pas définie, une fonction rationnelle peut admettre

- *une limite finie :*

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+12x-15}{x+5}=\lim_{x\to-5}(x-3)=-8;$$

Scanned by CamScanner

- *une limite infinie :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty ;$$

- *une limite à gauche et une limite à droite infinies et différentes :*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty .$$

Le cas des limites finies a été traité au chapitre 5.

Exemple 1

Étudions la limite au point 2 de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}.$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.
Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+3} \frac{1}{(x-2)^2}.$$

On a :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{5};$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty , \text{ car } \lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0 \text{ et } [\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (x-2)^2 > 0].$$

D'où : $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f.

Exemple 2

Étudions la limite au point -3 de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} \quad f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2} \frac{1}{x+3}.$$

On a :

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+1}{(x-2)^2} = -\frac{2}{25};$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} \frac{1}{x+3} = -\infty , \text{ car } \lim_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} (x+3) = 0 \text{ et } [\forall x \in]-\infty, -3[\quad x+3<0];$$

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} \frac{1}{x+3} = +\infty , \text{ car } \lim_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} (x+3) = 0 \text{ et } [\forall x \in]-3, +\infty[\quad x+3>0].$$

Scanned by CamScanner

D'où :

$$\lim_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} \frac{x+1}{(x-2)^2}\,\frac{1}{x+3} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} \frac{x+1}{(x-2)^2}\,\frac{1}{x+3} = -\infty.$$

La fonction f n'a donc pas de limite au point -3, mais une limite à gauche et une limite à droite infinies et différentes.
La droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f.

Exercices Déterminer les asymptotes verticales à la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \frac{x}{x+7}, \quad x \longmapsto \frac{(x+1)^2}{x^2+x-2}, \quad x \longmapsto \frac{3x-1}{3x^2+5x-2}.$$

Exercices

1 (1). On considère l'équation :

$$(E) \quad x\in\mathbb{R},\ x^3-3x+5=0$$

et la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3-3x+5$.

a) Calculer $f(-4)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution appartenant à $]-4,-2[$.

b) Calculer $f(-3)$. L'équation (E) admet-elle au moins une solution appartenant à $]-3,-2[$? Justifier.

c) L'intervalle $\left]-\frac{5}{2},-2\right[$ contient-il au moins une solution de (E)? Justifier.

2 (1). On considère l'équation :

$$(E) \quad x\in\mathbb{R},\ 21x^4+x^3+11x^2+x-10=0.$$

Montrer que l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right[$ contient au moins une solution de (E).

3 (1). On considère l'équation

$$(E) \quad x\in\mathbb{R},\ x^5-3x^3+x^2+x+m+1=0$$

dépendant du paramètre m.
Montrer que :
Si $m\in[-3,-1]$ alors l'intervalle $[-1,0]$ contient au moins une solution de (E).

• Dans les exercices 4 à 11, utiliser la dérivée pour étudier le sens de variation de chacune des fonctions considérées.

4 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5x^2-3x+1$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2-x$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2x^2+1$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (3x-1)(x+5)$.

5 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3-x+1$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+1$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^3-x^2+x-5$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3-6x^2+12x-8$.

Scanned by CamScanner

6 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x-1)^3+(x-1)^2-5$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (2x-1)^5+2x-1$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^4+x^3-x^2-9x+1$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{5}x^5-16x+1.$

7 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (-3x+1)^2(2x-1)$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x+3)^3(x-1)+x^2+6x+9$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x-2)(x+2)^2(2x-1)$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^7+2x^5+x^3+x-10.$

8 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x-3}{x+1}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{-5}{3x-2}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{5x}{-x+2}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{-2+3x}{2x-1}.$

9 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+1+\frac{2x}{x-2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x^2+x-1}{x+1}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^2}{2x-3}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+\frac{1}{x}.$

10 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x}{x^2-x+1}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x+3}{x^2-4}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x-1}{x^2}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x-1}{2x^2+x-3}.$

11 (2). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^2+1}{x^2-2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x^2+x-3}{x^2}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{-2x^2+2x+3}{x^2-x-2}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-2)}.$

12 (2). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (m+1)x^2-2x+3$$

dépendant du paramètre m.
Déterminer l'ensemble des nombres réel m tels que :

a) f admet un extremum relatif;

b) f admet un extremum relatif au point 2;

c) f admet un maximum.

13 (2). Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3-mx^2+x-2$$

dépendant du paramètre m.
Déterminer l'ensemble des nombres réels m tels que :

a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

b) f admet deux extremums relatifs.

14 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{mx+3}{2x-1}$

dépendant du paramètre m.
Déterminer l'ensemble des nombres réels m tels que f soit strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Scanned by CamScanner

15 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^2 - mx + 2}{x - 2}$$
dépendant du paramètre m.
Déterminer l'ensemble des nombres réels m tels que f n'admette pas d'extremum.

16 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{(m+1)x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$
dépendant du paramètre m.
Déterminer l'ensemble des nombres réels m tels que f admette des extremums.

17 (2). Soit la fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 + bx + c.$$
Déterminer a, b et c sachant que f admet 2 comme extremum relatif en 1 et que la tangente à sa représentation graphique au point d'abscisse 2 admet -3 comme coefficient directeur.

18 (2). Soit la fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^3 + bx + c.$$
Déterminer a, b et c sachant que f admet en -1 et 1 deux extremums relatifs respectivement égaux à 5 et -3. Parmi ces extremums lequel est le maximum relatif?

19 (2). Soit la fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$$
dépendant des trois paramètres a, b et c.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Montrer que f admet un minimum relatif. Exprimer ce minimum en fonction de a, b et c.

• Dans les exercices 20 et 23 étudier, suivant les valeurs du paramètre m, le sens de variation de chacune des fonctions considérées.

20 (2). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto (m-1)x^2 - 2mx + 3.$$

21 (2). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^3 + x^2 + (m+1)x - 3.$$

22 (2). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{mx + 2}{x + m}.$$

23 (2). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{(2m+1)x + 5m + 7}{x + m + 3}.$$

24 (2). Soit la fonction
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + \pi) = f(x).$$
Que peut-on conclure?

b) Étudier le sens de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

25 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto -2 \cos 3x.$$

a) Montrer que f est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

b) Étudier le sens de variation de f sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

• Exercices 26 à 29 : Calculer les limites proposées.

26 (3). *a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 3x^2 - x + 5)$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 - 2x + x + 1)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^6 - 2x^3 + 5)$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2)$.

27 (3). *a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{x + 4}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5x + 2}{x - 3}$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x - 3}$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{2 - 3x}$.

28 (3). *a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 5}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x - 4}{x^2 + 2x - 1}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 1}$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

Scanned by CamScanner

29 (3). a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(5 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{3x - 1}{x + 5}\right)$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{x^2 + x} - \frac{2x^2 + 5}{x^4 + 1}\right)$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

• Exercices 30 à 33 : Calculer la limite à gauche et la limite à droite au point a de chacune des fonctions f considérées.

30 (3). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x - 1}{x - 2}$; $a = 2$;

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-5x + 1}{3x + 2}$; $a = -\frac{2}{3}$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5}{2 + x}$; $a = -2$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\sqrt{2} - 3x}{\sqrt{2}x + 1}$; $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

31 (3). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{3x^2 - x + 1}{2x - 1}$; $a = \frac{1}{2}$;

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5x^3 + 2x - 5}{-x + 5}$; $a = 5$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{4 + x^3 - 2x^4}{3x - 4}$; $a = \frac{4}{3}$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{-2 + 5x}$; $a = \frac{2}{5}$.

32 (3). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x + 5}{(x - 2)(x + 1)}$; $a = -1$;

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-5x + 1}{(x - 3)^2}$; $a = 3$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$; $a = -2$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^2 - 4x + 2}{-x^2 - 2x + 3}$; $a = -3$.

33 (3). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x + 5}{(x^2 - 1)(x + 3)}$; $a = -1$;

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^2 + x - 1}{(x + 2)^2(x - 3)}$; $a = -2$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$; $a = 3$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + \frac{1}{x - 1}$; $a = 1$.

34 (3). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2(x + 1)}{(x - 2)(x + 3)}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)^2(x - 3)}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)^2(x - 3)}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$.

35 (3). Trouver les asymptotes verticales et horizontales éventuelles à la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x - 1}{x + 2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{5 - x}{3x - 1}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{7}{x - 1}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-3x}{2x - 5}$.

Scanned by CamScanner

36 (3). Même question :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2}{(x-2)(x+3)}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+4}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2-6x}{x^3-1}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x-6}$.

37 (3). Même question :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x+\dfrac{1}{x^2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x-1+\dfrac{5}{x+3}$

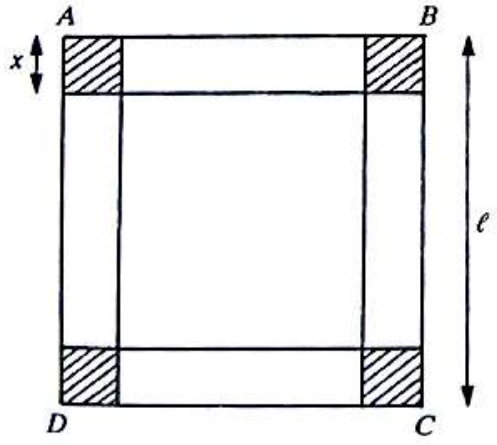
d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

Problèmes

38 On considère une feuille de carton de forme carrée *ABCD* dont la mesure du côté est égale à ℓ.
Aux quatre coins de cette feuille on enlève un carré dont la mesure du côté est égale à x. Par pliage, on obtient ensuite une boîte rectangulaire sans couvercle.

1) Exprimer en fonction de ℓ et de x le volume V de la boîte.

2) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto V$



(x est la mesure du côté des carrés enlevés).

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variation.

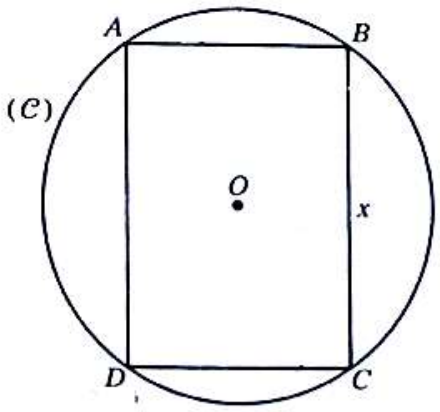
c) En déduire la valeur de x en laquelle V est maximum.
Calculer cette mesure de V.

39 On considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon R.
Soit *ABCD* un rectangle inscrit dans $(\mathcal{C})$. Posons $BC = x$.

1) Exprimer, en fonction de R et de x, la mesure S de l'aire du rectangle *ABCD*.

2) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto S^2$

($x = BC$).



a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.

Scanned by CamScanner

c) En déduire la valeur de x en laquelle S est maximale. Quelle est cette valeur maximale? Construire $ABCD$ correspondant à cette valeur.

3) Calculer x pour que S soit égale à $R^2\sqrt{2}$. Construire $ABCD$ correspondant à chaque valeur trouvée de x.

40 Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 + px + q \quad (p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R})$$

telle que f admette des extremums en -1 et 1; l'extremum de f en -1 est égal à 4.

1) Déterminer p et q.

2) Étudier le sens de variation de f. Donner son tableau de variation.

3) On considère la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{f(x)}{x^2+3x+2}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de g?

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$.

c) Étudier le sens de variation de g. Donner son tableau de variation.

41 Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2-(m+1)x-3}{x-2}$$

dépendant du paramètre m.

1) On suppose que $m = -1$.

a) Calculer la fonction dérivée f'.

b) Étudier le sens de variation de f.

c) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x); \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x); \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x).$$

d) Donner le tableau de variation de f.

2) On suppose que $m = 1$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Donner le tableau de variation de f.

3) m étant un paramètre réel,

a) étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation correspondant;

b) retrouver les tableaux de variation de f obtenus aux questions 1) et 2);

c) donner le tableau de variation de f lorsque $m = -2$.

4) Vérifier que, pour tout élément m de $\mathbb{R}$, la représentation graphique de f' admet une asymptote verticale et une asymptote horizontale. Quelles sont ces asymptotes?

42 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \longmapsto \frac{2x^2+x-1}{x-1}.$$

1) a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Trouver la fonction dérivée f' de f.

c) Étudier le sens de variation de f.

d) Déterminer les extremums relatifs éventuels de f.

e) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x); \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x); \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x).$$

f) Donner le tableau de variation de f.

g) Trouver les asymptotes verticales et horizontales éventuelles à la représentation graphique de f.

h) Compléter le tableau suivant :

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$								

x	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$f(x)$	////							

2) Tracer la représentation graphique de f.

3) Résoudre l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2x^2+x-1}{x-1} = m$$

dépendant du paramètre m.

Scanned by CamScanner

7 Étude de fonctions

Leçon 1 : EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS
Leçon 2 : EXEMPLES DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS
Leçon 3 : ACTIVITÉS : RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS PAR DICHOTOMIE
Leçon 4 : PROBLÈMES CONCRETS

1 Exemples d'étude de fonctions

1) Fonctions polynômes

Exemple 1

$$\text{Fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2 - 2x - 3.$$

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.
- La fonction polynôme f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x - 2.$$

1 est l'unique solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$;

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.
- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un minimum relatif en 1, où elle prend la valeur -4.

Scanned by CamScanner

Remarque. Observer que dans le tableau de variation de f :

— les flèches $\leftarrow$ et $\rightarrow$ de la première ligne ont été remplacées par les symboles $-\infty$ et $+\infty$ (afin d'uniformiser les notations);

— les limites à $-\infty$ et $+\infty$ de f ont été indiquées.

• Un tableau de valeurs de f :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f (parabole), nous pouvons prendre :

$x_{min} = -2$; $y_{min} = -4$;
$x_{max} = 4$; $y_{max} = 5$;
un repère orthonormé (O, I, J).

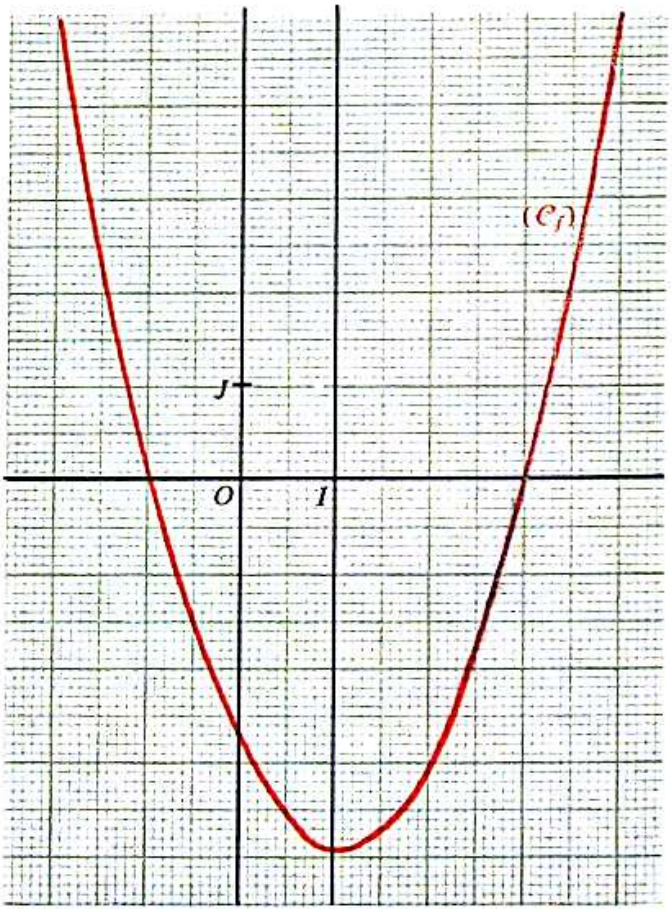


Fig. 1

Remarque. Le repère étant orthogonal (en fait, orthonormé), la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
On le démontre en vérifiant que la fonction $x \longmapsto f(x+1)$ est paire (faites-le).

Scanned by CamScanner

Exercice Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2 - 3x + 4.$$

Exemple 2

Fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.$

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

- La fonction polynôme f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x^2 - 10x - 4.$$

Vérifier que les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ sont $-\frac{1}{3}$ et 2.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$;

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{100}{27}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un maximum relatif en $-\frac{1}{3}$, où elle prend la valeur $\frac{100}{27}$.
f admet un minimum relatif en 2, où elle prend la valeur -9.

- *Recherche des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.*

Vérifier que $f(-1) = 0$.

Le polynôme $f(x)$ est donc divisible par $(x + 1)$.

Effectuer la division; on obtient :

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 3)(x + 1).$$

Vérifier que les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ sont -1, $\frac{1}{2}$ et 3.

Scanned by CamScanner

• Un tableau de valeurs de f :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\frac{7}{2}$
$f(x)$	-9	0	$\frac{100}{27}$	3	0	-4	-9	0	$\frac{27}{2}$

• Pour construire la représentation graphique (C_f) de f, nous pouvons prendre :

$$x_{min} = -\frac{3}{2}; \quad y_{min} = -9;$$

$$x_{max} = \frac{7}{2}; \quad x_{max} = 14.$$

un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI = 4 \cdot OJ$.

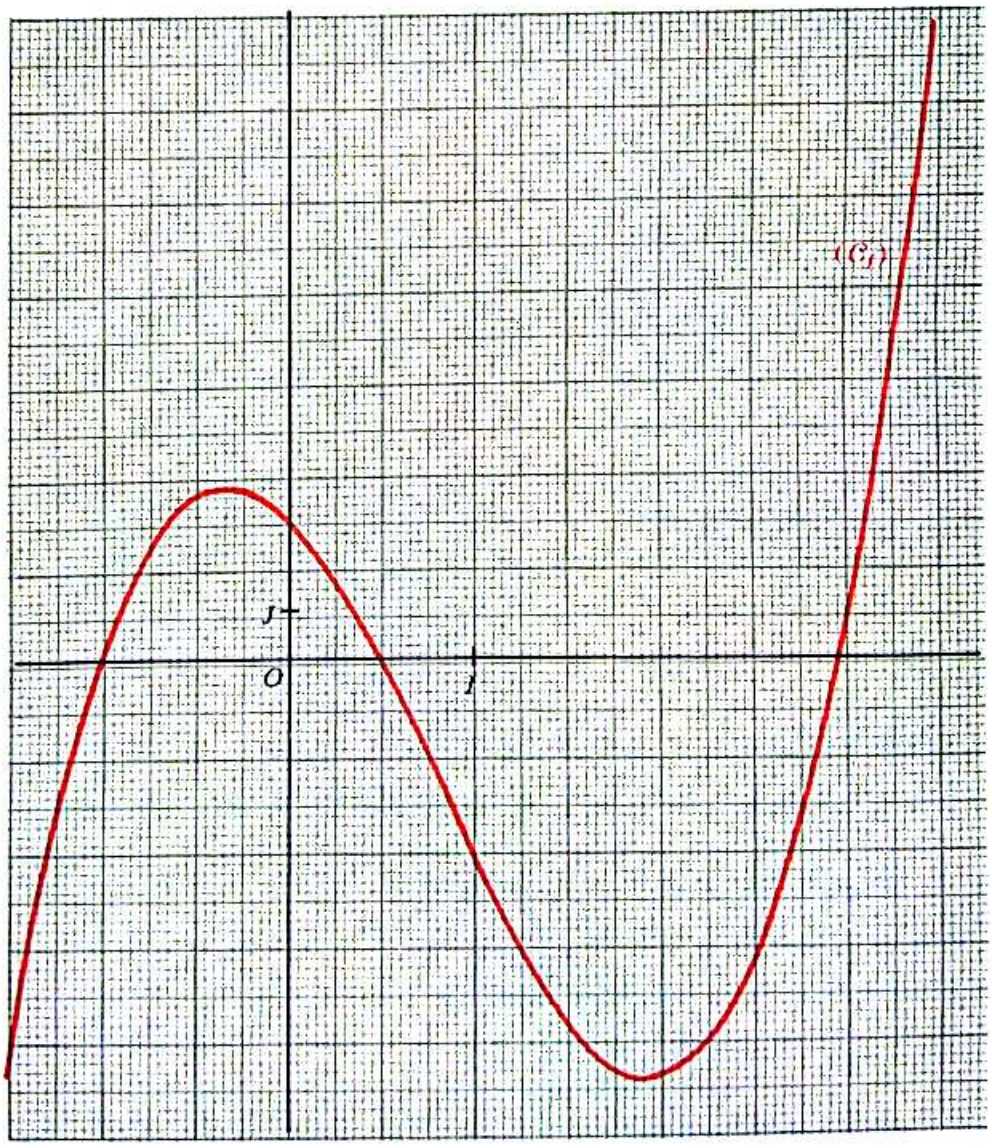


Fig. 2

Scanned by CamScanner

Remarques

— Vérifier que le point A de coordonnées $\left(\frac{5}{6}, -\frac{143}{54}\right)$ est le seul point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

— Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{143}{54}=2x^3-\frac{49}{6}x.$

En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(x+\frac{5}{6}\right)+\frac{143}{54}$ est impaire.
Par conséquent, A est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Exercices

a) Étudier et représenter graphiquement les fonctions polynômes f, g et h définies respectivement par :

$$f(x)=x^3-4x,$$
$$g(x)=-x^3+2x^2-2x+1,$$
$$h(x)=x^3+3x^2-4.$$

b) Vérifier que les points de coordonnées (0, 0), $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{27}\right)$ et $(-1, -2)$ sont un point d'inflexion et un centre de symétrie, respectivement pour $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$.

Exemple 3

Fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}(x-1)^3(x+2)^2.$$

• Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

• La fonction polynôme f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{3}{2}(x-1)^2(x+2)^2+\frac{2}{2}(x-1)^3(x+2)$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)(5x+4).$$

Les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=0$ sont -2, $-\frac{4}{5}$ et 1.
Lorsque $x \neq 1$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+2)(5x+4)$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x^5=+\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x^5=-\infty$.

Scanned by CamScanner

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{5}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-4,2$	↗	0	↗	$+\infty$

$\left(-4,2 \text{ est une valeur approchée de } f\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

f admet un maximum relatif en -2, où elle prend la valeur 0.

f admet un minimum relatif en $-\frac{4}{5}$, où elle prend approximativement la valeur $-4,2$.

1 est une abscisse d'inflexion, la tangente correspondante étant parallèle à la droite des abscisses.

• Un tableau de valeurs de f :

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$		0		-4			-2		0		8
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	$-5,36$		$-1,95$		$-4,20$	$-3,80$		$-0,39$		$0,77$	

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f, nous pouvons prendre (figure 3) :

$$x_{min} = -\frac{5}{2}; \quad y_{min} = -6;$$

$$x_{max} = 2; \quad y_{max} = 8;$$

un repère (O, I, J) tel que $OI = 2 \cdot OJ$.

Remarque. On peut montrer que $\frac{-4-\sqrt{6}}{5}$ et $\frac{-4+\sqrt{6}}{5}$ sont des abscisses d'inflexion.

Exercice Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x^4 - 3x^2 + 5.$$

Scanned by CamScanner

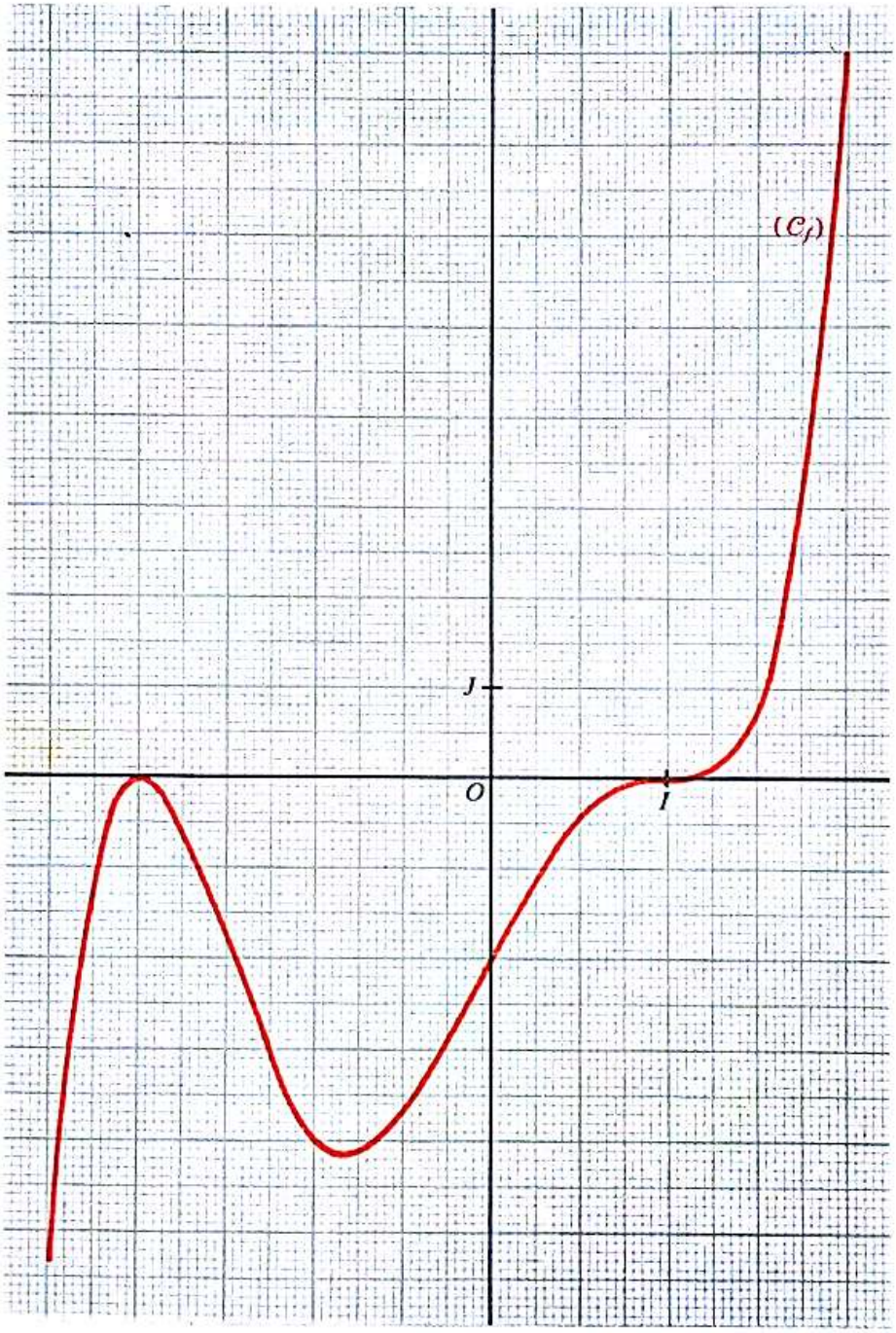


Fig. 3

2) Fonctions rationnelles du type $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $(c \neq 0)$

Lorsque le polynôme $ax+b$ n'est pas divisible par $cx+d$, la représentation graphique d'une telle fonction est une courbe appelée *hyperbole*.

Exemple

$$\text{Fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x+3}{x-1}$$

Scanned by CamScanner

• Ensemble de définition : $\mathbb{R}-\{1\}$.

• La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$.

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\} \quad f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{-5}{(x-1)^2}.$$

D'où : $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\} \quad f'(x)<0.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2.$

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la représentation graphique de f.

• On a :

$\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5;$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)=0$ et $[\forall x\in]-\infty,1[\quad x-1<0]$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1}=+\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)=0$ et $[\forall x\in]1,+\infty[\quad x-1>0]$.

D'où :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(2x+3)\frac{1}{x-1}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}(2x+3)\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f.

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$ 2

Scanned by CamScanner

Remarque. Observer que dans le tableau de variation de f, on a indiqué :
— les limites à $-\infty$ et à $+\infty$ de f;
— la limite à gauche et la limite à droite de f au point 1.

• Un tableau de valeurs de f :

x	-5	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{7}{6}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{14}{3}$		7	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{4}$	3

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f (hyperbole), nous pouvons prendre :

$x_{min} = -5$; $y_{min} = -5$;
$x_{max} = 6$; $y_{max} = 7$;
un repère orthonormé (O, I, J).

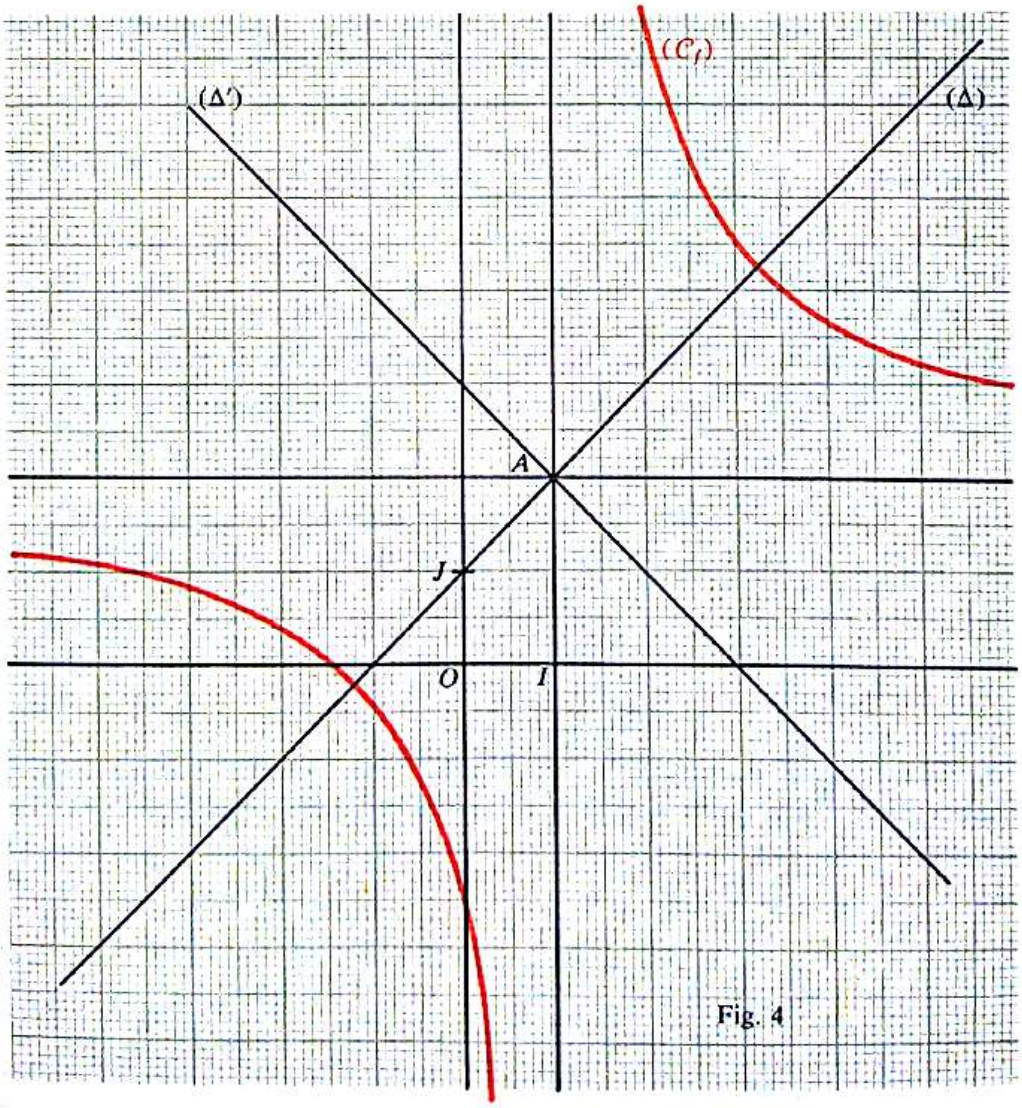


Fig. 4

Scanned by CamScanner

Remarquons que f ayant au point 1 une limite à gauche et une limite à droite infinies, nous n'obtiendrons pas la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-5, 6]$ tout entier, mais seulement sur $\left[-5, \frac{1}{4}\right] \cup [2, 6]$.

Remarques.

• D'après la figure 4, le point A de coordonnées $(1, 2)$ semble être un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
Vérifier qu'il en est bien ainsi en montrant que la fonction $x \longmapsto f(x+1)-2$ est impaire.

• Soit (Δ) et (Δ') les droites passant par A et respectivement parallèles aux droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
Trouver une équation de (Δ) et une équation de (Δ').
D'après la figure 4, les droites (Δ) et (Δ') semblent être des axes de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
Vérifions qu'il en est bien ainsi (le repère étant orthonormé).
Notons s la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
Étant donnés deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ du plan, montrer que

$$M' = s(M) \iff \begin{cases} x' = y - 1, \\ y' = x + 1. \end{cases}$$

En déduire que si M appartient à $(\mathcal{C}_f)$, alors $s(M)$ appartient aussi à $(\mathcal{C}_f)$.
Cela signifie que (Δ) est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
Montrer de même que (Δ') est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice

a) Étudier et représenter graphiquement, relativement à un repère orthonormé, la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x-1}{3-2x}.$$

b) Montrer que le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

c) Tracer les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = -x + 1$ et montrer qu'elles sont des axes de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

3) Fonctions rationnelles du type $x \longmapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, $(a \neq 0, d \neq 0)$

Lorsque le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'est pas divisible par $dx + e$, la représentation graphique d'une telle fonction est aussi appelée *hyperbole*.

Exemple 1

Fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-x^2+x+2}{x}$.

Scanned by CamScanner

• Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x}.$$

• La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, en tout point de $\mathbb{R}^*$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2}$$
$$= -\frac{x^2+2}{x^2}.$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) < 0$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

• On a :

$$\lim_{x \to 0} (-x+1) = 1;$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{2}{x} = +\infty.$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f.

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		∥	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	∥	$+\infty$	↘ $-\infty$

• Un tableau de valeurs de f :

x	-5	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	5
$f(x)$	$\frac{28}{5}$	$\frac{10}{3}$	2	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{18}{5}$	∥	$\frac{9}{2}$	2	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{18}{5}$

Scanned by CamScanner

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f (hyperbole), nous pouvons prendre :

$x_{min} = -5$; $y_{min} = -4$;
$x_{max} = 5$; $y_{max} = 6$;
un repère orthonormé (O, I, J).

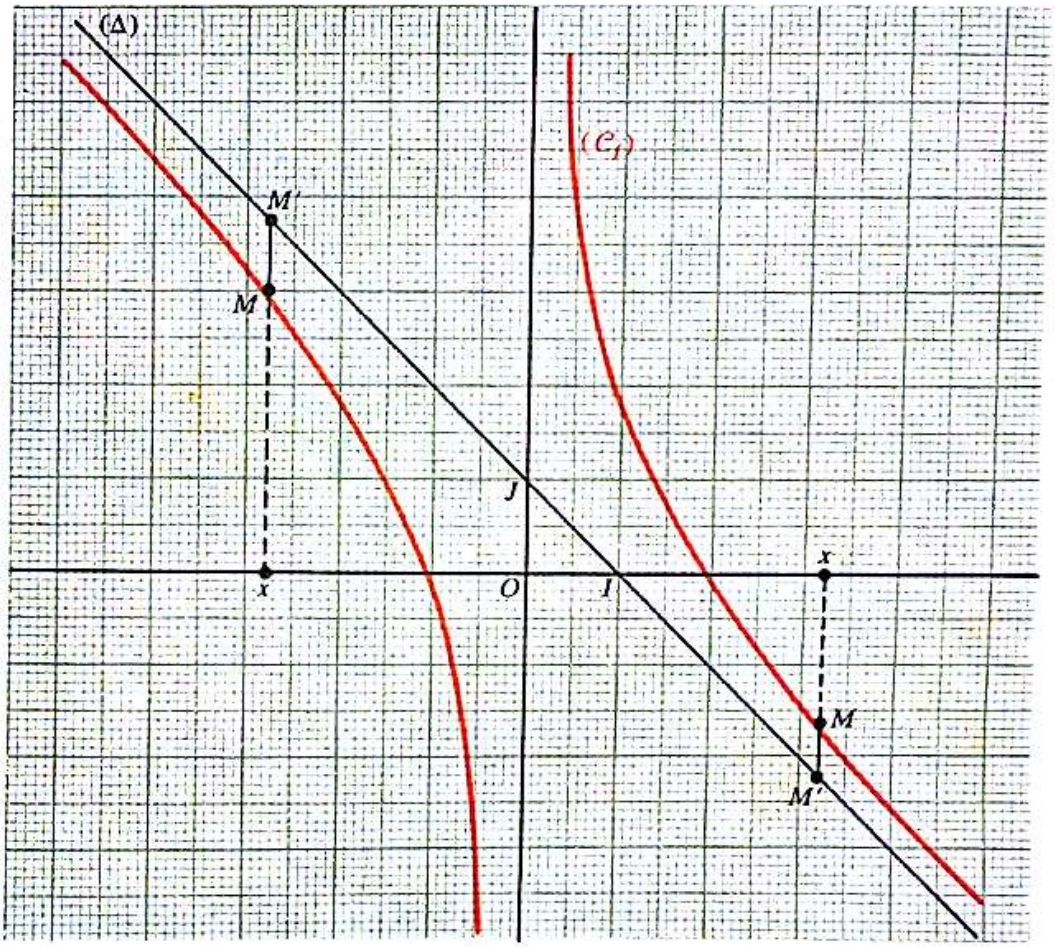


Fig. 5

• *Notion d'asymptote oblique*

L'écriture $f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x}$ suggère de considérer la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ (figure 5).

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) et notons M et M' les points d'abscisse x de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).
On a :

$$d(M, M') = |f(x) - (-x + 1)|$$
$$= \frac{2}{|x|}.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-x} = 0\right).$$

Scanned by CamScanner

Par conséquent, la distance entre M et M' a pour limite zéro lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
On dit que la droite (Δ) est une *asymptote oblique à* $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque. D'après la figure 5, il semble que le point J, point d'intersection des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$, soit un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
Vérifier qu'il en est bien ainsi en montrant que la fonction $x \longmapsto f(x)-1$ est impaire.

Exemple 2

$$\text{Fontion } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x^2+3x+1}{x+2}.$$

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}-\{-2\}$.
- La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, en tout point de $\mathbb{R}-\{-2\}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-2\} \qquad f'(x)=\frac{(x+2)(4x+3)-(2x^2+3x+1)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^2+8x+5}{(x+2)^2}.$$

Vérifier que les solutions de l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=0$ sont $\dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}$ et $\dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$.

Lorsque $x \neq -2$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2+8x+5$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$;

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$.

- On a :

$\lim\limits_{x\to-2}(2x^2+3x+1)=3$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2)=0$ et $[\forall x\in]-\infty,-2[\quad x+2<0]$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x+2)=0$ et $[\forall x\in]-2,+\infty[\quad x+2>0]$.

D'où :

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(2x^2+3x+1)\frac{1}{x+2}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(2x^2+3x+1)\frac{1}{x+2}=+\infty.$$

Scanned by CamScanner

La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f.

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{-4-\sqrt{6}}{2}$		-2		$\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	▨	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-5-2\sqrt{6}$	↘	▨	↘	$-5+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

f admet un maximum relatif en $\frac{-4-\sqrt{6}}{2}$, où elle prend la valeur $-5-2\sqrt{6}$.

f admet un minimum relatif en $\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$, où elle prend la valeur $-5+2\sqrt{6}$.

• Un tableau de valeurs de f :

x	-6	-5	-4	$\frac{-4-\sqrt{6}}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-2
$f(x)$	$-\frac{55}{4}$	-12	$-\frac{21}{2}$	$-5-2\sqrt{6}$	-10	-12	$-\frac{35}{2}$	▨

x	-2	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x)$	▨	$\frac{15}{2}$	2	0	$-5+2\sqrt{6}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{15}{4}$	$\frac{28}{5}$	$\frac{15}{2}$

Les arrondis d'ordre 2 de $\frac{-4-\sqrt{6}}{2}$, $-5-2\sqrt{6}$, $\frac{-4+\sqrt{6}}{2}$ et $-5+2\sqrt{6}$ sont respectivement : $-3{,}22$; $-9{,}90$; $-0{,}78$; $-0{,}10$.

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f (hyperbole), nous pouvons prendre :

$x_{min}=-6$; $y_{min}=-18$;
$x_{max}=4$; $y_{max}=8$;
un repère orthogonal (O, I, J) tel que $OI=2\cdot OJ$.

Scanned by CamScanner

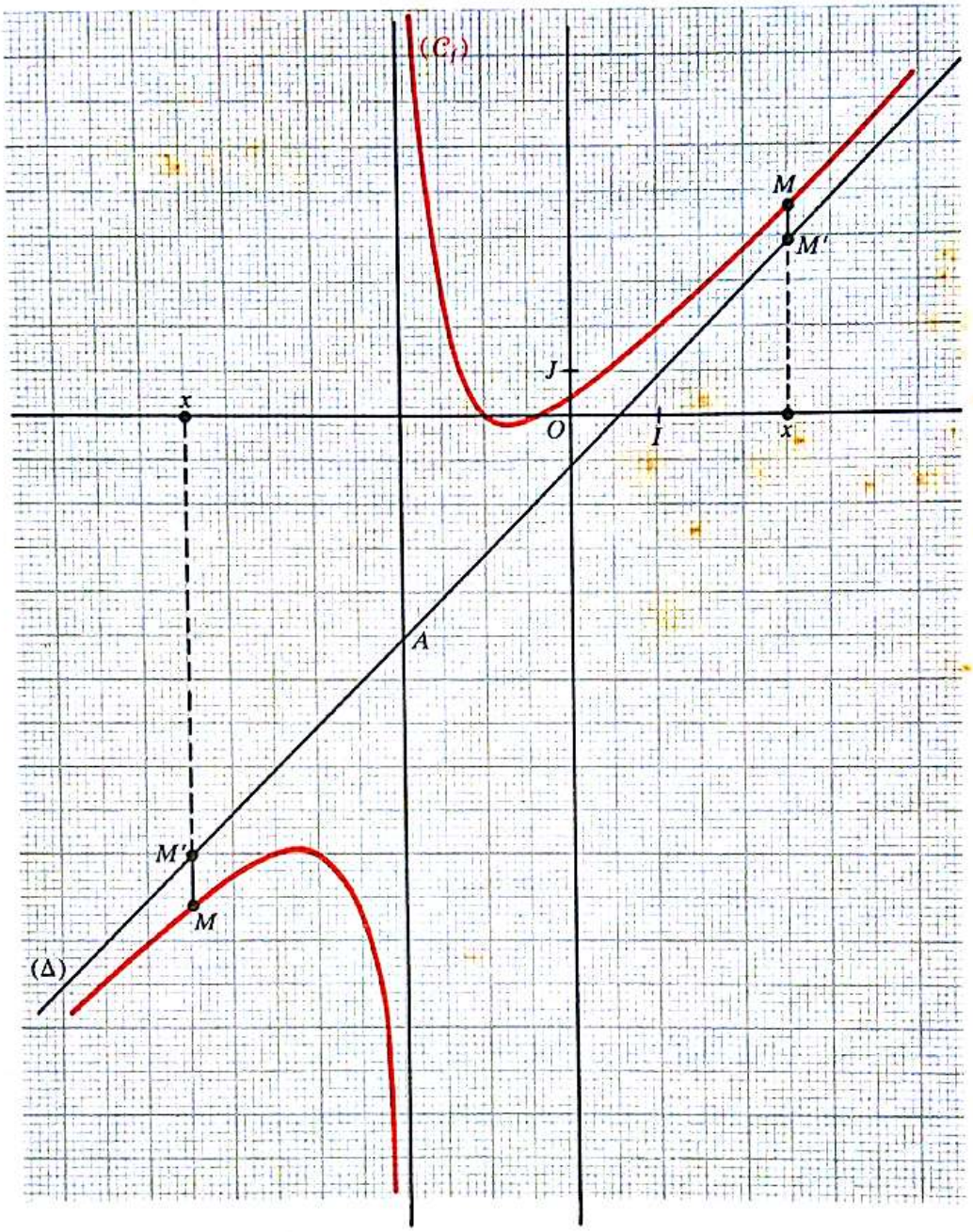


Fig. 6

• *Asymptote oblique*

Effectuons la division du polynôme $2x^2+3x+1$ par le polynôme $x+2$.
On obtient :

$$2x^2+3x+1=(x+2)(2x-1)+3.$$

D'où :

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}\quad f(x)=2x-1+\frac{3}{x+2}.$$

Notons (Δ) la droite d'équation $y=2x-1$ (figure 6).

Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}-\{-2\}$ et notons respectivement M et M' les points d'abscisse x de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).

Scanned by CamScanner

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} d(M, M') = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} d(M, M') = 0.$$

La droite (Δ) est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.
Montrer que le point d'intersection A des asymptotes est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{1 - x}.$$

Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie pour la représentation graphique de f.

4) Autres fonctions rationnelles

a) Exemples

Exemple 1

Fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{4x}{x^2+1}$.

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.
- La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 4\,\frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= 4\,\frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ sont -1 et 1.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x^2$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$;

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = 0.$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la représentation graphique de f.

Scanned by CamScanner

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

f admet un minimum relatif en -1, où elle prend la valeur -2.
f admet un maximum relatif en 1, où elle prend la valeur 2.

• La fonction f est impaire (vérifier).
Il suffit donc de considérer un tableau de valeurs de f où l'on ne donne à x que des valeurs positives.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	$1{,}6$	2	$\frac{24}{13}$	$1{,}6$	$1{,}2$	$\frac{16}{17}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{24}{37}$	$\frac{14}{25}$
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$				$1{,}85$			$0{,}94$	$0{,}77$	$0{,}65$	$0{,}56$

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f, nous pouvons prendre :

$x_{min} = -7$; $y_{min} = -2$;
$x_{max} = 7$; $y_{max} = 2$;
un repère orthonormé (O, I, J).

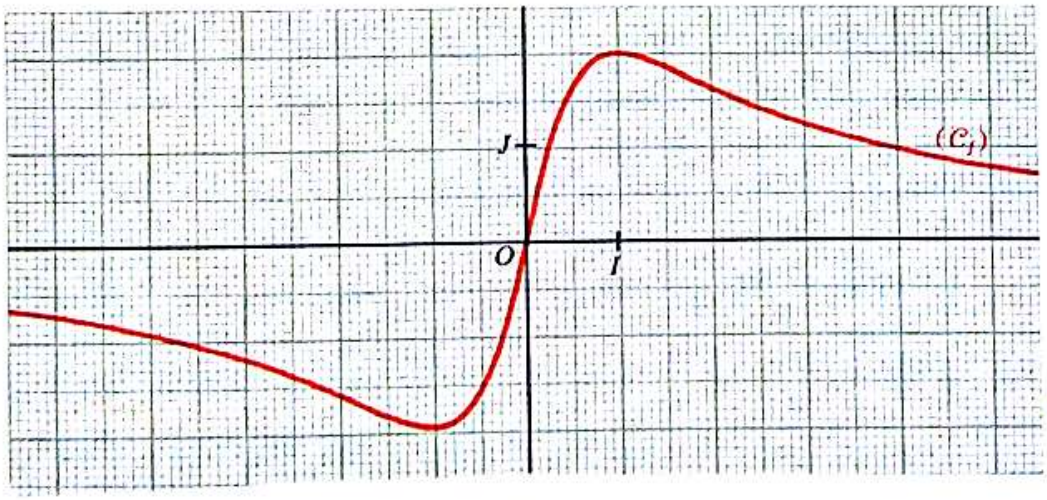


Fig. 7

Remarque. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Scanned by CamScanner

Le tableau de variation de f' est donc :

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

f' admet un extremum relatif en $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.
$-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$ sont donc des abscisses d'inflexion.

Exemple 2

Fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.

- La fonction rationnelle f est dérivable, donc continue, en tout point de $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1, 1\} \qquad f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3(2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Les solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=0$ sont $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.
Lorsque $x \notin \{-1, 0, 1\}$ le signe de $f'(x)$ est celui de x^2-3.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$;

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

- Vérifier que :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty.$$

Les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales à la représentation graphique de f.

Scanned by CamScanner

• Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	‖	$+\infty$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗ $+\infty$

f admet un maximum relatif en $-\sqrt{3}$, où elle prend la valeur $\frac{-3\sqrt{3}}{3}$.

f admet un minimum relatif en $\sqrt{3}$, où elle prend la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

0 est une abscisse d'inflexion, la tangente correspondante étant parallèle à la droite des abscisses.

• La fonction f est impaire (vérifier).
Il suffit donc de considérer un tableau de valeurs de f où l'on ne donne à x que des valeurs positives.

Remarquons que les arrondis d'ordre 2 de $\sqrt{3}$ et de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement 1,73 et 2,60.

x	0	0,5	0,75	0,9	1	1,1	$\sqrt{3}$	2	3	4	5	6
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	0	−0,17	−0,96	−3,84	‖	6,34	2,60	2,67	3,38	4,27	5,21	6,17

• Pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f, nous pouvons prendre (figure 8) :

$x_{min} = -6$; $y_{min} = -7$;
$x_{max} = 6$; $y_{max} = 7$;
un repère orthonormé (O, I, J).

• *Asymptote oblique*

Remarquons que : $x^3 = (x^2 - 1)x + x$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$.

Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

b) **Asymptotes obliques**

• *Division euclidienne de polynômes.*

En classe de Seconde, on a vu comment diviser un polynôme par un polynôme du premier degré; le reste est un polynôme constant.
Le même procédé permet de diviser un polynôme par un polynôme non constant $Q(x)$; le reste est le polynôme nul ou un polynôme de degré strictement inférieur à celui de $Q(x)$.

Scanned by CamScanner

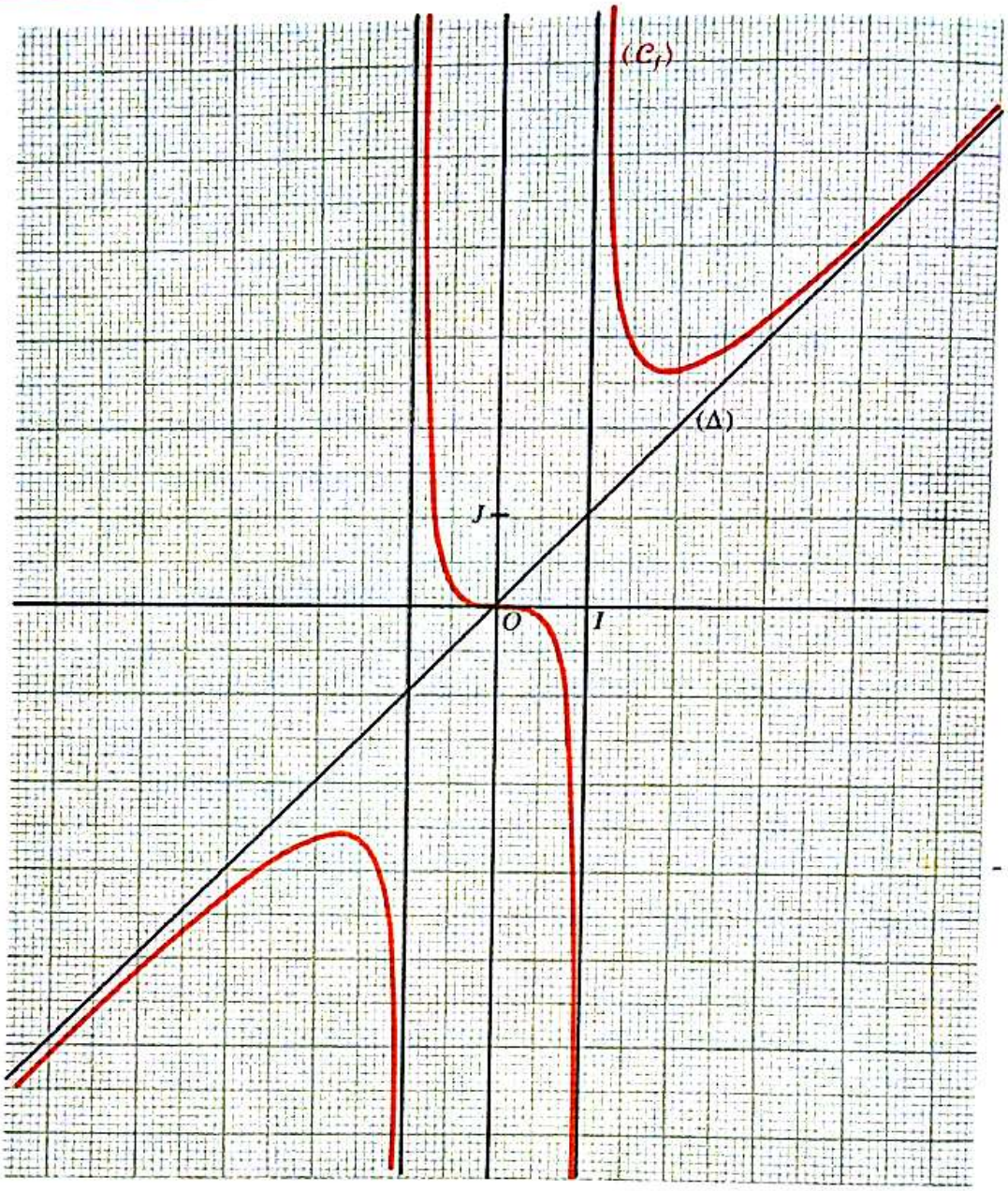


Fig. 8

Par exemple :

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+x-1 & x^2+x-5 \\ -(x^3+x^2-5x) & \hline x+3 \\ \hline 3x^2+6x-1 & \\ -(3x^2+3x-15) & \\ \hline 3x+14 & \end{array}$$

Cela signifie que

$$x^3+4x^2+x-1=(x^2+x-5)(x+3)+3x+14$$

et permet d'écrire la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{x^3+4x^2+x-1}{x^2+x-5}$ sous la forme :

$$x \longmapsto x+3+\frac{3x+14}{x^2+x+5}.$$

Scanned by CamScanner

• *Asymptotes obliques : cas général.*

Soit une fonction numérique f, d'ensemble de définition D_f, et de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ relativement à un repère (O, I, J).

Supposons qu'il existe des nombres réels a et b et une fonction numérique φ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in D_f \qquad f(x) = ax + b + \varphi(x), \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \left(\text{resp. } \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\right). \end{cases}$$

On dit alors que la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote à* $(\mathcal{C}_f)$ *en* $+\infty$ (resp. *en* $-\infty$).

Lorsque l'on a en même temps

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0,$$

on dit simplement que (Δ) est une *asymptote à* $(\mathcal{C}_f)$.

Lorsque $a = 0$, on parle d'*asymptote horizontale* et, lorsque $a \neq 0$, on parle d'*asymptote oblique.*

Soit respectivement M et M' les points d'abscisse x de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ) (revoir les figures 5, 6 et 8).
On a :

$$\begin{aligned} d(M, M') &= |f(x) - (ax + b)| \\ &= |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de limite, φ a une limite nulle à $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si $|\varphi|$ a une limite nulle à $+\infty$ (resp. $-\infty$).
La condition

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\right)$$

signifie donc que la distance entre M et M' a pour limite zéro lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

• *Asymptotes obliques : cas des fonctions rationnelles.*

Soit deux fonctions polynômes P et Q dont les degrés respectifs sont notés d° P et d° Q.

Considérons la fonction rationnelle f définie par

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

— Lorsque d° $P \leqslant$ d° Q,
la fonction f possède une asymptote horizontale.

On la découvre en calculant la limite de f à $+\infty$ et à $-\infty$.

— Lorsque d° $P =$ (d° Q) $+ 1$,
le quotient du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ est un polynôme du premier degré : $ax + b$ $(a \neq 0)$.
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

Scanned by CamScanner

Cette affirmation sera à vérifier dans chaque cas où cette situation se présentera.

— Lorsque $d^\circ P \geqslant (d^\circ Q)+2$,
le quotient du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ est un polynôme de degré supérieur à 2.
Nous admettrons que, dans ce cas, aucune droite n'est asymptote horizontale ou oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

Exemple

Soit la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^3+4x^2+x-1}{x^2+x-5}.$$

Son ensemble de définition D_f est : $\mathbb{R}-\left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

En divisant le polynôme x^3+4x^2+x-1 par x^2+x-5, on obtient :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x)=x+3+\frac{3x+14}{x^2+x-5}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+14}{x^2+x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+14}{x^2+x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$,

la droite d'équation $y=x+3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

Exercices Étudier et représenter graphiquement les fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{x}{x^2-1}$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

5) Les fonctions tangentes et cotangentes

a) Fonction tangente

La fonction *tangente*, notée « tan », est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

- Ensemble de définition D de la fonction tangente :

$$D = \mathbb{R}-\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\}$$
$$= \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

L'ensemble D est représenté en noir sur la figure 9 :

Pour chaque élément k de $\mathbb{Z}$, posons :

$$E_k = \left]k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right[.$$

Scanned by CamScanner

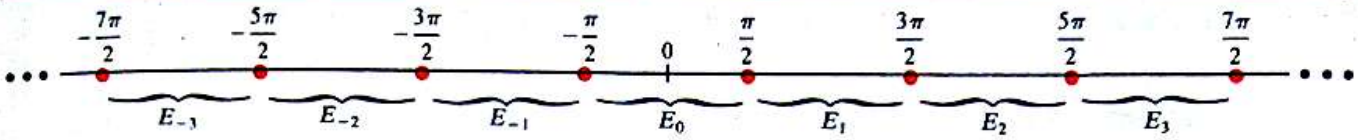


Fig. 9

Les intervalles E_k sont représentés sur la figure 9.
On remarque que D est la réunion des intervalles E_k.
Pour chaque élément x de D, on dit que $\tan x$ est la *tangente du nombre réel x.*

• Vérifier que la fonction tangente est impaire.

• Les fonctions sinus et cosinus étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est dérivable, donc continue, en tout point de D.
On a :

$$\forall x \in D \quad \tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}.$$

D'où : $\forall x \in D \quad \tan' x > 0.$

• Vérifier que :

$$\forall x \in D \qquad \tan(x+\pi) = \tan x$$

$$\tan(x-\pi) = \tan x$$

$$\forall x \in D \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tan(x+k\pi) = \tan x.$$

La fonction tangente est périodique, de période π.

• Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), notons :

$\begin{cases} f_k \text{ la restriction à } E_k \text{ de la fonction tangente } (k \in \mathbb{Z}); \\ (\mathcal{C}_k) \text{ la représentation graphique de } f_k \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction tangente est la réunion de tous les $(\mathcal{C}_k)$.

D'autre part, étant donné un élément k de $\mathbb{Z}$ et un nombre réel x, on a successivement :

$$x \in E_k \iff k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff x - k\pi \in E_0.$$

Puisque $\tan x = \tan(x - k\pi)$, l'application $f_k : E_k \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que :

$$\forall x \in E_k \qquad f_k(x) = f_0(x - k\pi).$$

D'après le chapitre 1, page 30, cela montre que

$$(\mathcal{C}_k) = t_k(\mathcal{C}_0),$$

où t_k est la translation de vecteur $k\pi \cdot \overrightarrow{OI}$.

Pour obtenir la représentation graphique de la fonction tangente, il suffit donc d'étudier cette fonction sur E_0, c'est-à-dire sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Scanned by CamScanner

• On a :

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1;$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \dfrac{1}{\cos x} = +\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0$ et $\left(\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \cos x > 0\right)$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \dfrac{1}{\cos x} = -\infty$, car $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \cos x = 0$ et $\left(\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \quad \cos x > 0\right)$.

D'où :

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin x \dfrac{1}{\cos x} = +\infty;$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \sin x \dfrac{1}{\cos x} = -\infty.$

Les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$ sont des asymptotes verticales.

• Tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	‖	+	
$\tan x$	$-\infty$	↗	$+\infty$

• Un tableau de valeurs de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

• Représentation graphique de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (repère orthonormé) :

Scanned by CamScanner

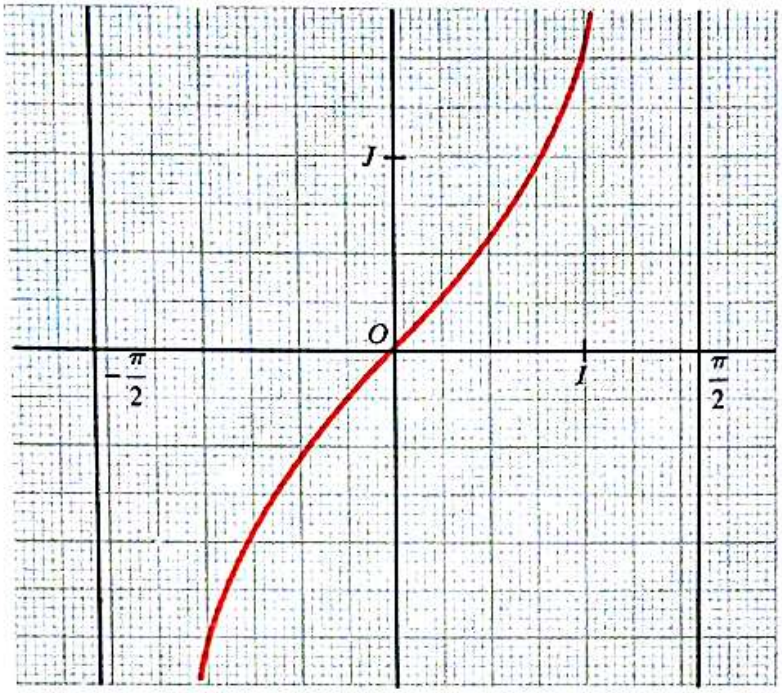


Fig. 10

• Représentation graphique de la fonction tangente (repère orthonormé) :

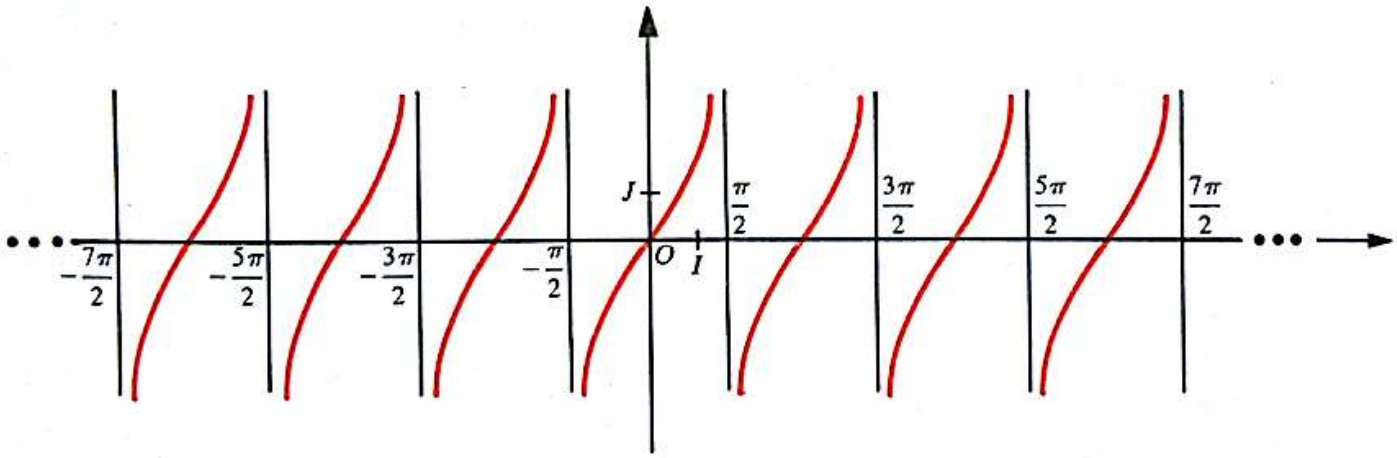


Fig. 11

Les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, sont des asymptotes verticales.

b) **Fonction cotangente**

La fonction *cotangente*, notée « cotan », est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$\text{cotan } x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

• Ensemble de définition E de la fonction cotangente :

$$E = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$$
$$= \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Scanned by CamScanner

• La fonction cotangente est dérivable, donc continue, en tout point de E.
On a :

$$\forall x \in E \quad \text{cotan}' x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

• Observons que :

$$\forall x \in E \quad \text{cotan } x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

• Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), notons respectivement $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C})$ les représentations graphiques des fonctions tangente, $x \longmapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ et cotangente.

On a

$$(\mathcal{C}_2) = t(\mathcal{C}_1) \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}) = s(\mathcal{C}_2),$$

où t et s désignent respectivement la translation de vecteur $\frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{OI}$ et la symétrie orthogonale d'axe (OI).

• Construire la représentation graphique de la fonction cotangente à partir de celle de la fonction tangente.

2 Exemples de résolution graphique d'équations et d'inéquations

Exemple 1

Soit les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+3}{x-1}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2}{3}x^2 - 3$.

— Étudions les fonctions f et g et représentons-les graphiquement relativement à un même repère orthonormé (O, I, J).

Scanned by CamScanner

— Résolvons graphiquement, puis algébriquement, l'équation

$$(E)\quad x\in\mathbb{R},\quad \frac{2}{3}x^2-3-\frac{x+3}{x-1}=0.$$

— Résolvons graphiquement l'inéquation

$$(I)\quad x\in\mathbb{R},\quad \frac{2}{3}x^2-3-\frac{x+3}{x-1}>0.$$

• Nous ne donnons que quelques indications concernant l'étude des fonctions f et g; faites-en une étude plus détaillée.

Fonction f

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}\quad f'(x)=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	1

Représentation graphique de f : hyperbole $(\mathcal{C}_f)$.

Fonction g

$D_g=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=\dfrac{4}{3}x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Représentatin graphique de g : parabole $(\mathcal{C}_g)$.

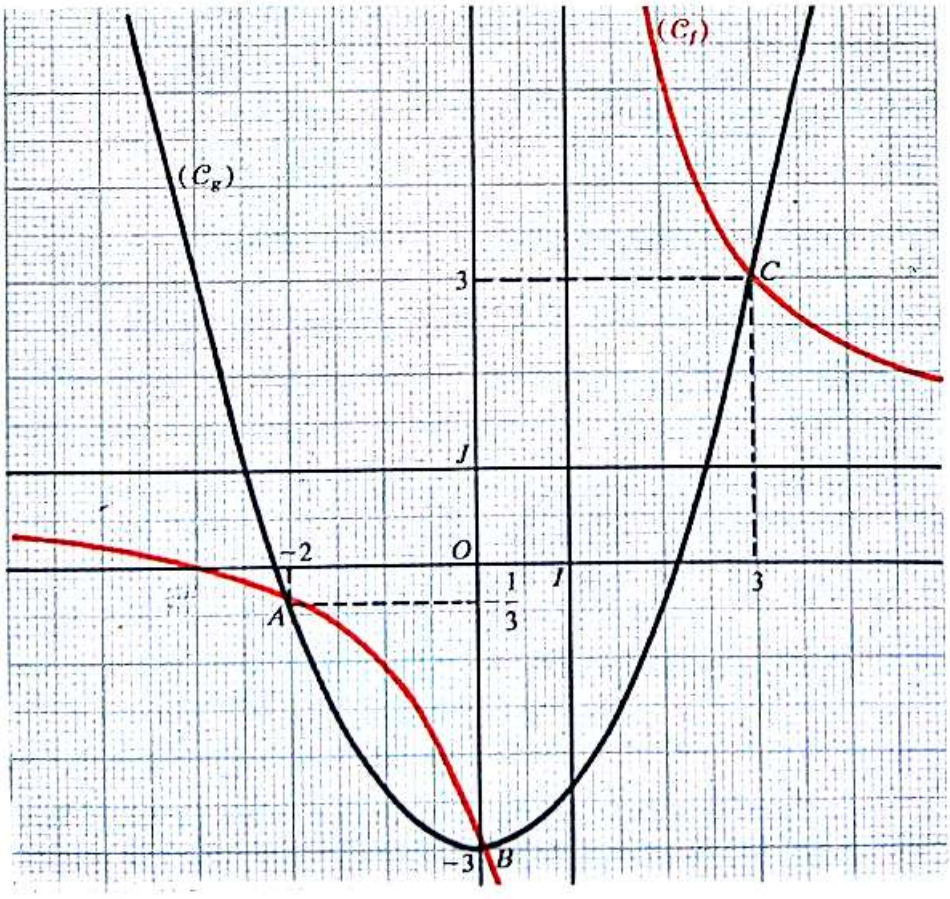


Fig. 12

Scanned by CamScanner

• L'équation (E) est équivalente à l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{3}x^2 - 3 = \frac{x+3}{x-1}$$

c'est-à-dire à l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x).$$

Sur la figure 12, on remarque que $(\mathcal{C}_f)$ coupe $(\mathcal{C}_g)$ en trois points A, B, C d'abscisses respectives -2, 0, 3.
L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est donc :

$$S(E) = \{-2, 0, 3\}.$$

• Résolvons l'équation (E) algébriquement.

L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R} - \{1\}$.

L'équation (E) a donc les mêmes solutions que l'équation

$$x \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad \frac{2}{3}x^2 - 3 = \frac{x+3}{x-1}.$$

Cette dernière équation est successivement équivalente à chacune des équations suivantes :

$$x \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad \left(\frac{2}{3}x^2 - 3\right)(x-1) = x+3$$

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 4x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0.$$

Vérifier que les solutions de la dernière équation sont : -2, 0, 3.
D'où :

$$S(E) = \{-2, 0, 3\}.$$

• L'inéquation (I) est équivalente à l'inéquation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{3}x^2 - 3 > \frac{x+3}{x-1}$$

c'est-à-dire à l'inéquation

$$x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > f(x).$$

Sur la figure 12, on voit que l'ensemble $S(I)$ des solutions de (I) est :

$$S(I) =]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[.$$

Exemple 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{4x-3}{2x+3}.$$

— Étudions la fonction f et représentons-la graphiquement relativement à un repère orthonormé (O, I, J); notons $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.

Scanned by CamScanner

— Soit (D) la droite d'équation $y = mx + \frac{3m}{2} + 2$, relativement au repère (O, I, J) (m est un paramètre).
Montrons que pour tout nombre réel m, la droite (D) passe par le point A de coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

— Étudions graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D).

— Résolvons, suivant les valeurs de m, l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{4x-3}{2x+3} = mx + \frac{3m}{2} + 2.$$

• On a :

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$;

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \quad f'(x) = \frac{18}{(2x+3)^2}$;

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	‖	↗	2

Représentation graphique de f : hyperbole $(\mathcal{C}_f)$, figure 13.

• L'équation de (D) peut s'écrire

$$y - 2 = m\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Pour tout nombre réel m, le couple $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ est solution de l'équation de (D) et, par conséquent, la droite (D) passe par le point A.

• Remarquons que m est le coefficient directeur de (D).

Si m appartient à $]-\infty, 0[$, (D) est contenue dans la partie non hachurée du plan (figure 13), et est sécante à $(\mathcal{C}_f)$ en deux points symétriques par rapport à A.

Si $m = 0$, (D) est une asymptote horizontale (d'équation $y = 2$) à $(\mathcal{C}_f)$; l'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$ est l'ensemble vide.

Si m appartient à $]0, +\infty[$, (D) est contenue dans la partie hachurée du plan et l'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$ est l'ensemble vide.

• Les solutions éventuelles de l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{4x-3}{2x+3} = mx + \frac{3m}{2} + 2$$

sont les abscisses des points d'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

Scanned by CamScanner

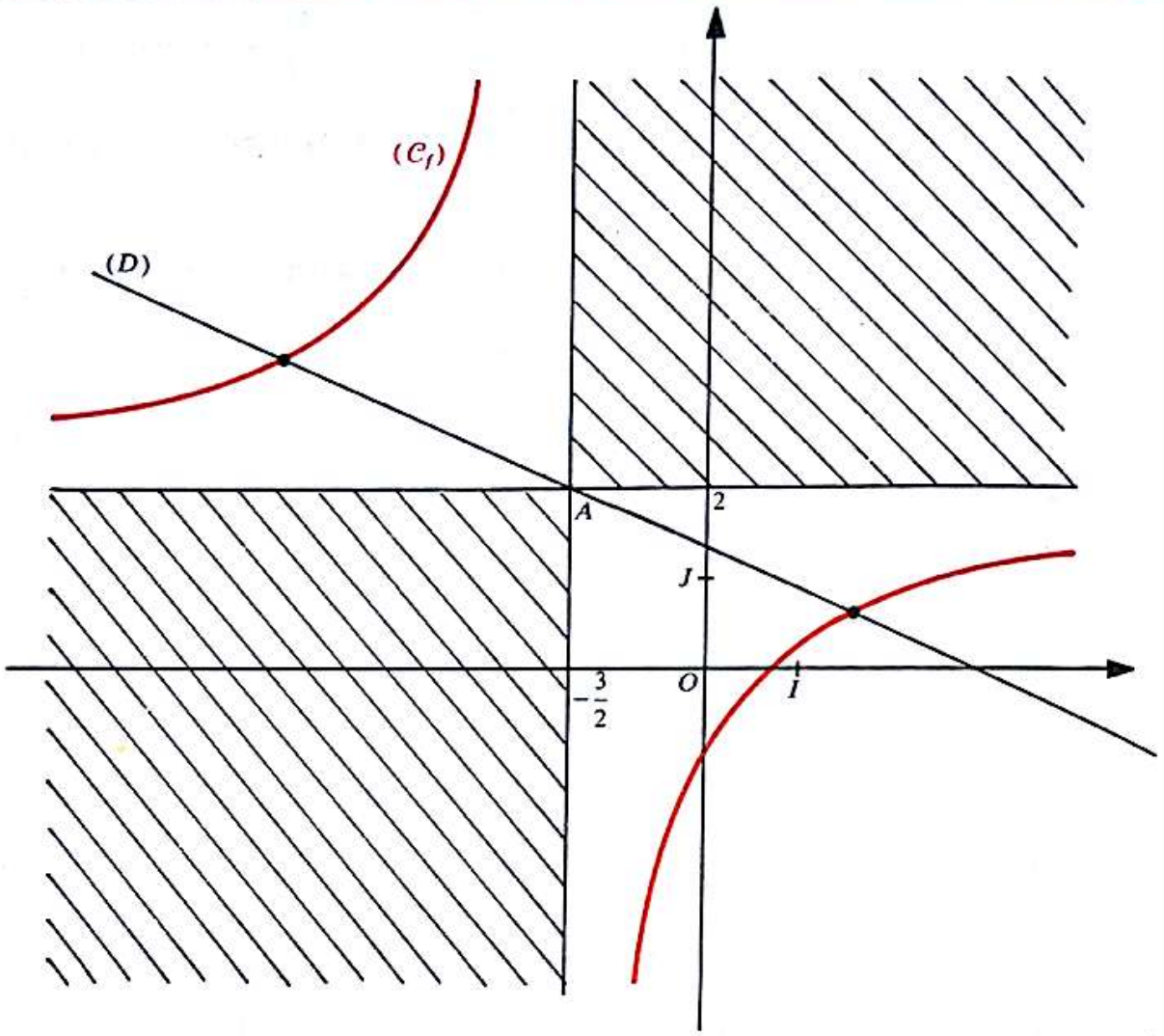


Fig. 13

D'après ce qui précède, on sait que :

— si $m \in]-\infty, 0[$, (E) a deux solutions distinctes;

— si $m \in [0, +\infty[$, (E) n'a pas de solution.

Nous allons retrouver ces résultats algébriquement et calculer les solutions lorsqu'elles existent.

• L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

L'équation (E) a donc les mêmes solutions que chacune des deux équations équivalentes suivantes :

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, \quad 4x - 3 = \left(mx + \frac{3m}{2} + 2\right)(2x + 3)$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}, \quad 4mx^2 + 12mx + 9m + 18 = 0.$$

Vérifier que $-\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation

$$(E') \quad x \in \mathbb{R}, \quad 4mx^2 + 12mx + 9m + 18 = 0.$$

Scanned by CamScanner

Par conséquent, les équations (E) et (E') sont équivalentes.

Si $m=0$, l'équation (E') se réduit à

$$x\in\mathbb{R},\quad 0\cdot x+18=0$$

et n'admet donc aucune solution.

Si $m\neq 0$, (E') est une équation du second degré.
Étudions le discriminant Δ de l'équation (E') $(m\neq 0)$.

On a :

$$\begin{aligned}\Delta&=(12m)^2-4(4m)(9m+18)\\&=-288m.\end{aligned}$$

Si $m>0$, alors $\Delta<0$ et l'équation (E') n'a pas de solution.

Si $m<0$, alors $\Delta>0$ et l'équation (E') possède deux solutions x' et x'' telles que :

$$x'=\frac{-3m-3\sqrt{-2m}}{2m},\quad x''=\frac{-3m+3\sqrt{-2m}}{2m}.$$

Conclusion :

Soit $S(E)$ l'ensemble des solutions de (E).

— Si $m\in]-\infty,0[$, $S(E)=\left\{\frac{-3m-3\sqrt{-2m}}{2m}\ ,\ \frac{-3m+3\sqrt{-2m}}{2m}\right\}$;

— Si $m\in[0,+\infty[$, $S(E)=\varnothing$.

Exercice

Soit la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto\frac{x+1}{2(x-2)}.$$

a) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J).

b) Montrer qu'il existe deux points de $(\mathcal{C}_f)$ en lesquels la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ a un coefficient directeur égal à $-\frac{3}{2}$.
Donner une équation de chacune de ces tangentes.

c) Soit la droite (D) d'équation $y=-\frac{3}{2}x+m$ (m est un paramètre).
Étudier et discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

d) Résoudre et discuter, suivant les valeurs de m, l'équation

$$x\in\mathbb{R},\quad\frac{x+1}{2(x-2)}=-\frac{3}{2}x+m.$$

e) Notons A l'ensemble des nombres réels m tels que (D) soit sécante à $(\mathcal{C}_f)$ en deux points distincts M' et M''.
Déterminer l'ensemble décrit par le point milieu K du segment $[M'M'']$ lorsque m décrit A.

Scanned by CamScanner

Exemple 3

Étant donné un nombre réel a, étudions graphiquement l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \tan x = a.$$

Nous en déduirons une condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres réels u et v vérifient $\tan u = \tan v$.

• L'ensemble de validité de (E) est l'ensemble de définition de la fonction tangente, c'est-à-dire : $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Considérons, figure 14, la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction tangente. Soit aussi la droite (Δ) d'équation $y = a$.

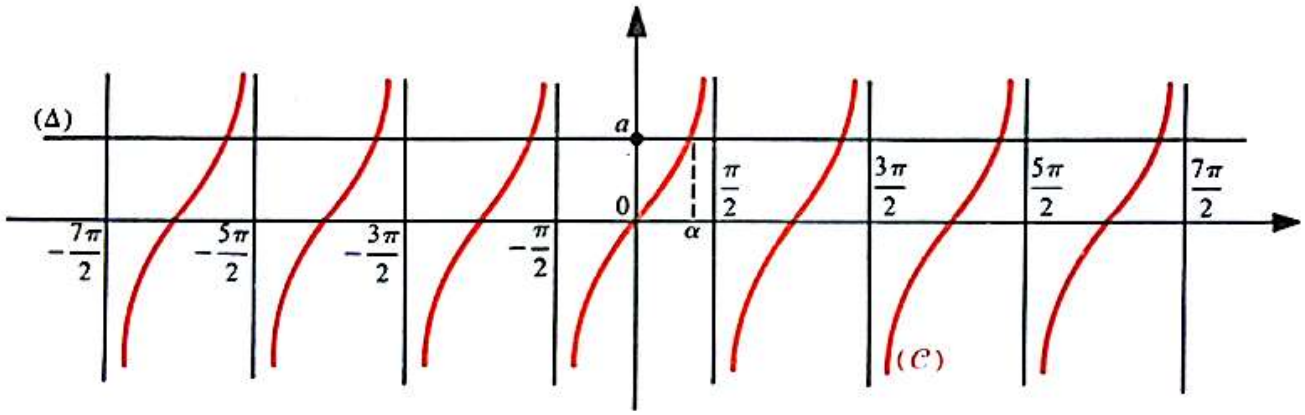


Fig. 14

On voit sur la figure 14 que $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ contient une et une seule solution de (E); notons α cette solution.

On voit aussi que chaque intervalle $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $(k \in \mathbb{Z})$, contient une et une seule solution de (E).
Or :

$$\alpha + k\pi \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha = a.$$

$\alpha + k\pi$ est donc l'unique solution de (E) appartenant à l'intervalle

$$\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[, \ (k \in \mathbb{Z}).$$

L'ensemble $S(E)$ des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{S(E) = \{\alpha + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}}$$

où α est l'unique solution de (E) appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Scanned by CamScanner

• u étant une solution quelconque de (E), vérifier que l'on a aussi :

$$S(E)=\{u+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

En déduire que :

Deux nombres réels u et v en lesquels la fonction tangente est définie vérifient $\tan u=\tan v$ si et seulement si il existe un élément k de $\mathbb{Z}$ tel que

$$u=v+k\pi.$$

Exemple 4

Résolvons graphiquement, puis algébriquement, l'équation

$$(E)\quad x\in[-2\pi,\ \pi],\quad \tan x=-\sqrt{3}.$$

• Considérons la figure 15, où $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique de la fonction tangente sur l'intervalle $[-2\pi,\ \pi]$ et où (Δ) est la droite d'équation $y=-\sqrt{3}$.

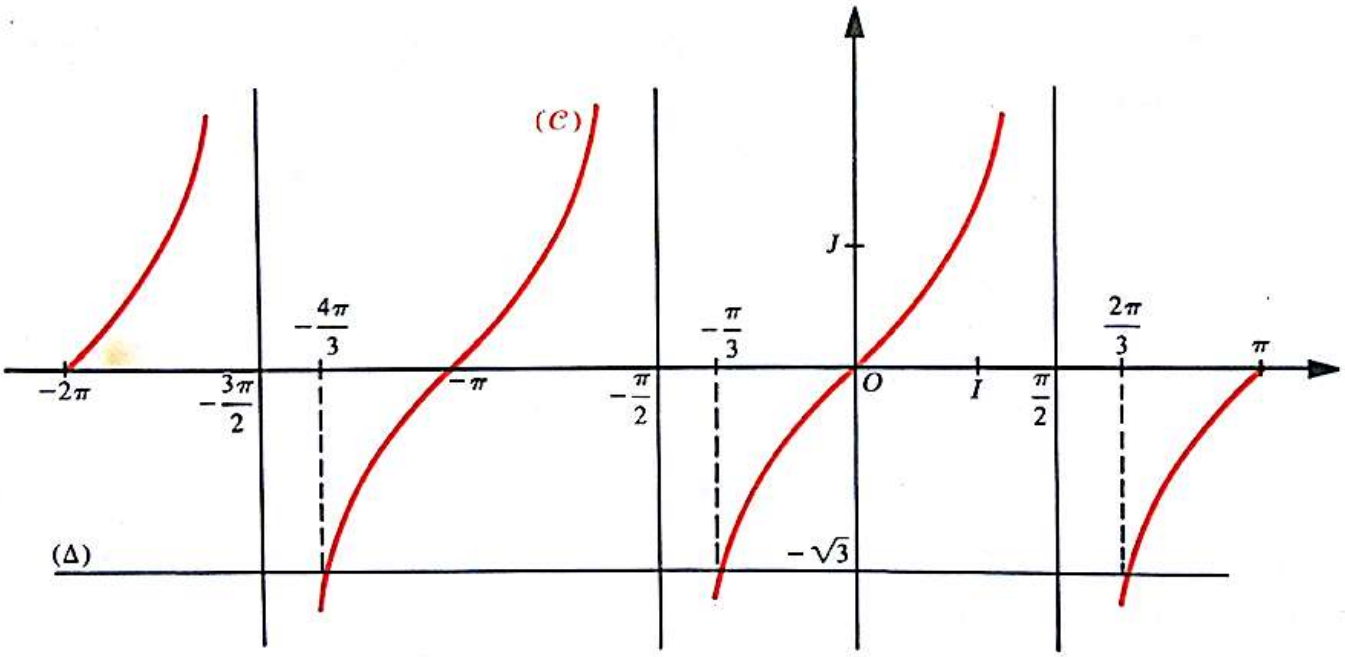


Fig. 15

La droite (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en trois points; leurs abscisses sont les solutions de (E). On sait que (tableau de valeurs, page 250) :

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

D'après la figure 15, on a donc :

$$S(E)=\left\{-\frac{4\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

• Afin de retrouver ce résultat algébriquement, remarquons d'abord que :

$$S(E)=\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[-2\pi,\ \pi].$$

Scanned by CamScanner

Or, étant donné un élément quelconque k de $\mathbb{Z}$, on a :

$$-2\pi \leqslant -\frac{\pi}{3}+k\pi \leqslant \pi \iff \frac{\pi}{3}-2\pi \leqslant k\pi \leqslant \frac{\pi}{3}+\pi$$
$$\iff -\frac{5\pi}{3} \leqslant k\pi \leqslant \frac{4\pi}{3}$$
$$\iff k \in \{-1, 0, 1\}.$$

En donnant à k les valeurs -1, 0, 1, on obtient les solutions :

$$-\frac{4\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}.$$

Exemple 5

Résolvons graphiquement chacune des deux inéquations :

$$(I) \quad x \in \left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan x \geqslant 1;$$

$$(I') \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \tan x < \sqrt{3}.$$

• Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right[$ et (Δ) la droite d'équation $y = 1$ (figure 16).

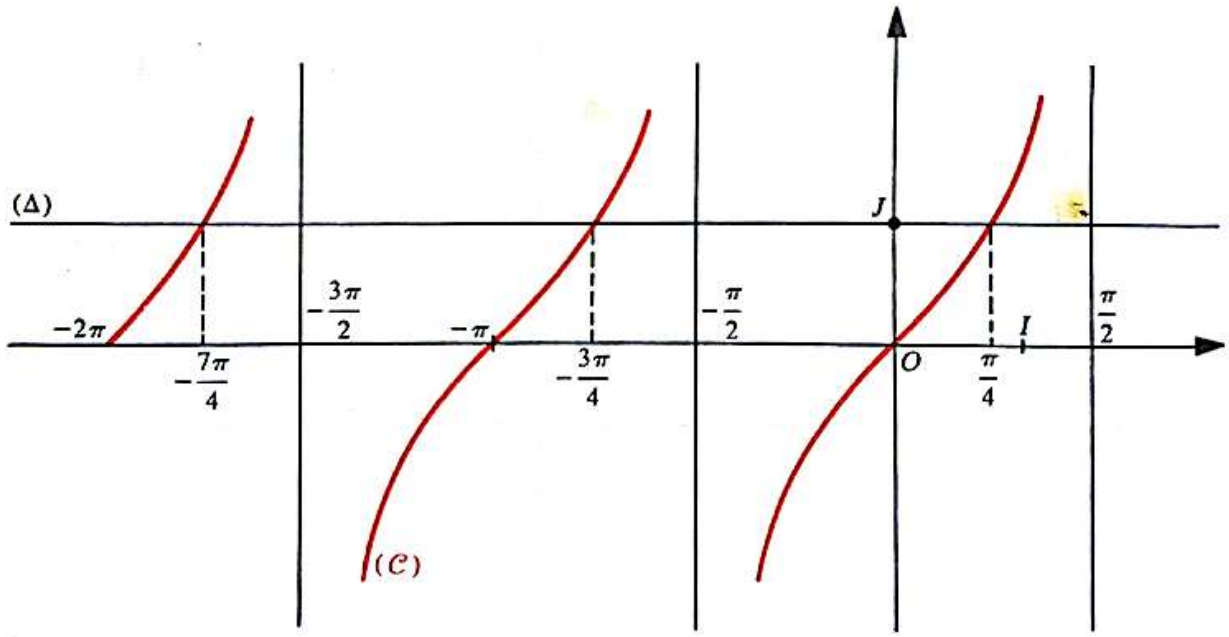


Fig. 16

La droite (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en trois points dont les abscisses sont les solutions de l'équation : $x \in \left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = 1$.

Vérifier que ces solutions sont : $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

La figure 16 montre que l'ensemble $S(I)$ des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S(I) = \left[-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Scanned by CamScanner

• Soit $(\mathcal{C}')$ la représentation graphique de la fonction tangente sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et (Δ') la droite d'équation $y = \sqrt{3}$ (figure 17).

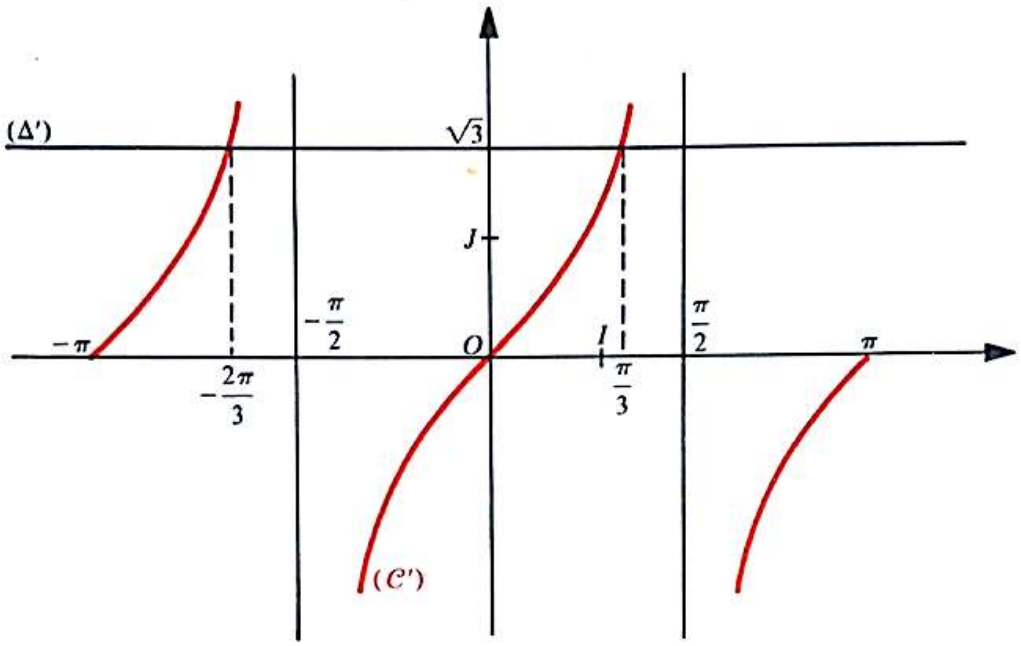


Fig. 17

La droite (Δ') coupe $(\mathcal{C}')$ en deux points dont les abscisses sont les solutions de l'équation : $x \in [-\pi, \pi]$, $\tan x = \sqrt{3}$.

Vérifier que ces solutions sont : $-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

La figure 17 montre que l'ensemble $S(I')$ des solutions de l'inéquation (I') est :

$$S(I') = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right[.$$

Exercices

1) Résoudre graphiquement, puis algébriquement, chacune des deux équations suivantes :

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x \in \left]-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \quad \tan x = -1 + \sqrt{2}.$$

2) Résoudre graphiquement chacune des deux inéquations suivantes :

$$x \in [-\pi, \pi], \qquad \tan x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x \in \left]-\frac{5\pi}{2}, 2\pi\right[, \quad \tan x > 0.$$

3) Résoudre l'inéquation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \tan x > 1.$$

Scanned by CamScanner

3 Activités : Résolution d'équations par dichotomie

Exemple

Résolvons l'équation

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^3+x^2-x+1=0.$$

a) Cette équation n'admet pas de solution évidente.
Étudions et représentons graphiquement la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3+x^2-x+1.$$

On a :

$$D_f = \mathbb{R};$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2+2x-1$$
$$= 3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right);$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗	$+\infty$

Représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f :

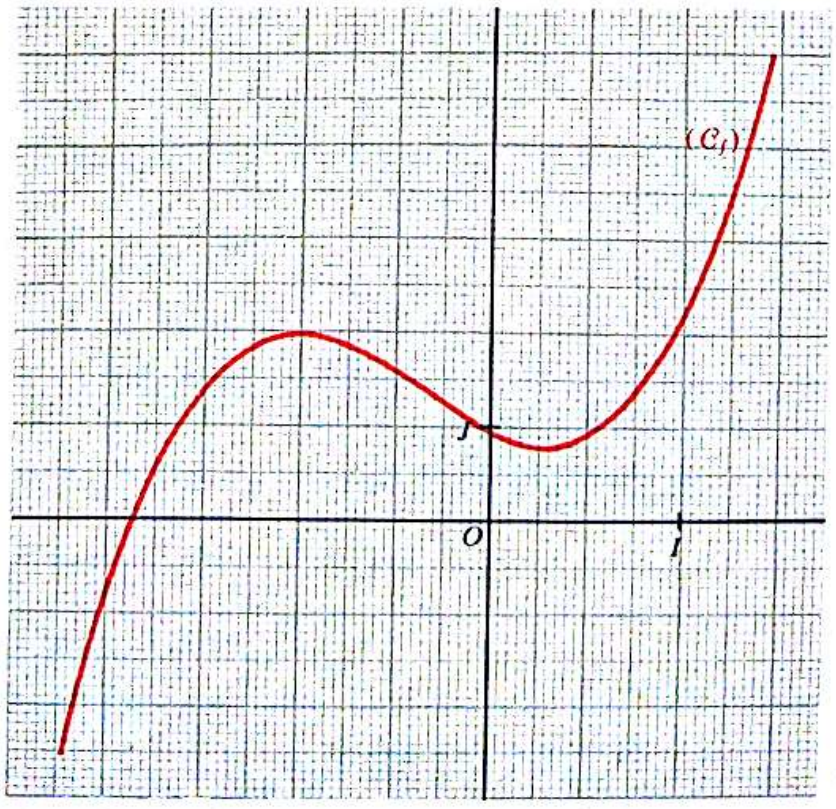


Fig. 18

Scanned by CamScanner

b) La représentation graphique de f montre que l'équation (E) admet une solution unique.
Pour démontrer que (E) possède une solution unique, on peut procéder comme suit.

• Observons que : $f(-2)=-1, \quad f(-1)=2.$

Puisque $f(-2)<0<f(-1)$, le théorème des valeurs intermédiaires (page 194) nous apprend que (E) possède au moins une solution appartenant à $]-2, -1[$.

• Puisque $\forall x \in]-\infty, -1[\quad f'(x)>0,$

f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ (théorème 2, page 197).
Par conséquent, la restriction de f à $]-\infty, -1[$ est injective (justifier).
L'équation (E) ne peut donc pas avoir deux solutions appartenant à $]-\infty, -1[$.

• D'après le tableau de variation de f, on a :

$$\forall x \in [-1, +\infty[\quad f(x)>0.$$

L'équation (E) n'a donc pas de solution appartenant à $[-1, +\infty[$.

• On conclut que (E) possède une solution unique; notons-la c.
Cette solution appartient à $]-2, -1[$.

c) A présent, nous allons déterminer un encadrement de la solution c par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3.

• On cherche d'abord à encadrer c par deux nombres entiers consécutifs :

$$-2<c<-1.$$

• On sait que : $f(-2)<0<f(-1).$

A l'aide d'une calculatrice, calculons une valeur approchée de $f(-2)$, $f(-1,9)$, $f(-1,8)$, ... et arrêtons-nous dès que l'on observe un changement de signe.

x	-2	$-1,9$	$-1,8$
$f(x)$	-1	$-0,349$	$0,208\,0$

Puisque $f(-1,9)<0<f(-1,8)$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que $-1,9<c<-1,8$.
$]-1,9; -1,8[$ est un encadrement de c par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

• Calculons une valeur approchée de $f(-1,9)$, $f(-1,89)$, $f(-1,88)$, ... et arrêtons-nous dès que l'on observe un changement de signe.

x	$-1,9$	$-1,89$	$-1,88$	$-1,87$	$-1,86$	$-1,85$	$-1,84$	$-1,83$
$f(x)$	$-0,349$	$-0,289\,1$	$-0,230\,2$	$-0,172\,3$	$-0,115\,2$	$-0,059\,1$	$-0,003\,9$	$0,050\,4$

Puisque $f(-1,84)<0<f(-1,83)$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que $-1,84<c<-1,83$.

$]-1,84; -1,83[$ est un encadrement de c par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

Scanned by CamScanner

• Calculons une valeur approchée de $f(-1{,}84)$, $f(-1{,}839)$, $f(-1{,}838)$, ... et arrêtons-nous dès que l'on observe un changement de signe.

x	$-1{,}84$	$-1{,}839$
$f(x)$	$-0{,}003\,9$	$0{,}001\,5$

Puisque $f(-1{,}84)<0<f(-1{,}839)$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que $-1{,}84<c<-1{,}839$.

$]-1{,}84;\ -1{,}839[$ est un encadrement de c par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 3.
Par conséquent :

$-1{,}84$ est l'approximation décimale par défaut, d'ordre 3, de la solution c de (E);

$-1{,}839$ est l'approximation décimale par excès, d'ordre 3, de la solution c de (E).

Lorsque l'on a encadré par la méthode ci-dessus la ou les solutions d'une équation, on dit que l'on a résolu l'équation par *dichotomie.*

Exercices

1) Montrer que l'équation

$$x\in\mathbb{R},\quad x^3+x-3=0$$

admet une solution unique et donner un encadrement de la solution par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

2) Montrer que l'équation

$$x\in\mathbb{R},\quad 2x^3+3x^2-12x+6=0$$

admet trois solutions et, pour chaque solution, donner un encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

4 Problèmes concrets

Problème 1

Quelles dimensions doit avoir une boîte cylindrique fermée de deux litres pour que sa fabrication exige le moins de tôle possible (c'est-à-dire pour que son aire totale soit minimale)? L'épaisseur de la tôle sera négligée.

Notons respectivement x et h (en dm), S (en dm^2) et V (en dm^3) le rayon de la base, la hauteur, l'aire totale et le volume de la boîte (figure 19).



Fig. 19

On a : $V=\pi x^2 h.$

D'où : $h=\dfrac{V}{\pi x^2}=\dfrac{2}{\pi x^2}.$

Scanned by CamScanner

L'aire totale peut donc s'exprimer comme suit en fonction de x :

$$\begin{aligned} S &= 2\pi xh + 2\pi x^2 \\ &= 2\pi x \frac{2}{\pi x^2} + 2\pi x^2 \\ &= \frac{4}{x} + 2\pi x^2. \end{aligned}$$

Étudions l'application $S :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{4}{x} + 2\pi x^2.$$

S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[\qquad S'(x) &= -\frac{4}{x^2} + 4\pi x \\ &= \frac{4\pi}{x^2}\left(x^3 - \frac{1}{\pi}\right). \end{aligned}$$

Le tableau de variation de S est :

x	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$	▨	$-$	0	$+$	
$S(x)$	▨	$+\infty$ ↘	$S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)$	↗	$+\infty$

L'aire totale est minimale lorsque $x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Pour cette valeur de x, on a :

$$\begin{aligned} h &= \frac{2}{\pi x^2} \\ &= \frac{2}{\pi}(\sqrt[3]{\pi})^2 \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} = 2x. \end{aligned}$$

L'aire totale de la boîte est donc minimale lorsque le rayon de la base est égal à $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$; la hauteur de la boîte est alors égale à deux fois le rayon de la base.

Problème 2

Un électromoteur E, de caractéristiques e et r, alimente un résistor de résistance x (figure 20).

Scanned by CamScanner

On sait que la puissance P débitée dans le résistor est :

$$P = \frac{e^2 x}{(x+r)^2}.$$

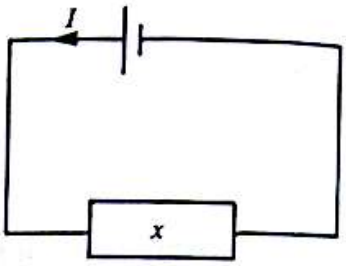


Fig. 20

On se propose d'étudier l'application

$$P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^2 x}{(x+r)^2}$$

et de la représenter graphiquement dans le cas où $e = 50$ (en volts) et $r = 4$ (en ohms).

L'application P est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P'(x) = \frac{e^2(x+r)^2 - 2e^2x(x+r)}{(x+r)^4}$$
$$= \frac{e^2(x+r)(r-x)}{(x+r)^4}.$$

Tableau de variation de P :

x	0		r		$+\infty$
$P'(x)$	$\frac{e^2}{r^2}$	$+$	0	$-$	
$P(x)$	0	↗	$\frac{e^2}{4r}$	↘	0

Remarquons que la puissance P est maximale, et égale à $\frac{e^2}{4r}$, lorsque $x = r$.

On retrouve ainsi un résultat déjà obtenu au Problème 2, page 116.

Dans le cas où $e = 50$ et $r = 4$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad P(x) = \frac{2\,500x}{(x+4)^2}.$$

Représentation graphique de P :

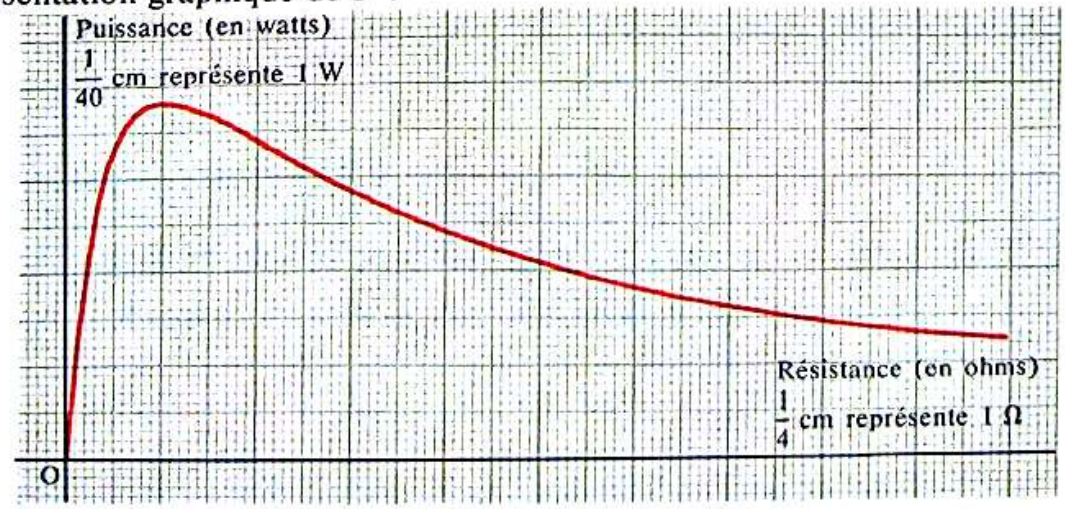


Fig. 21

Scanned by CamScanner

La puissance P est maximale, et égale à 156,25 (en watts), lorsque $x = 4$.

Problème 3

La figure 22 illustre le trajet de deux trains partant en même temps, l'un du point M et l'autre du point N, distants de 200 km.
Le premier train va de l'Est vers l'Ouest à la vitesse de 80 km/h.
Le second train va du Sud vers le Nord à la vitesse de 100 km/h.
Calculons la distance minimale des deux trains après le départ.

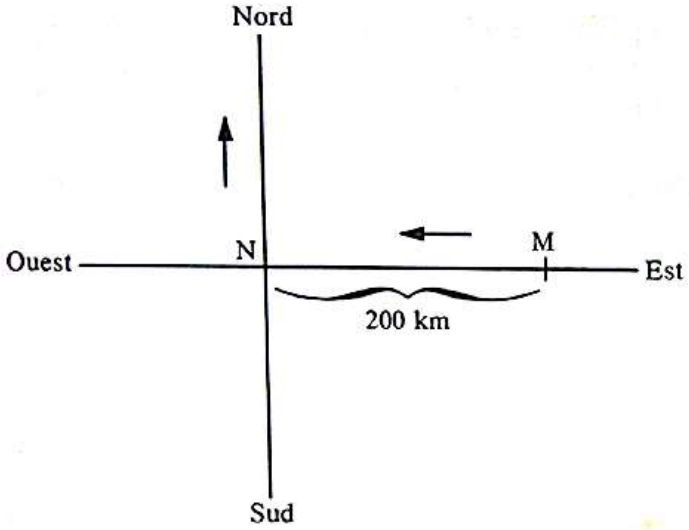


Fig. 22

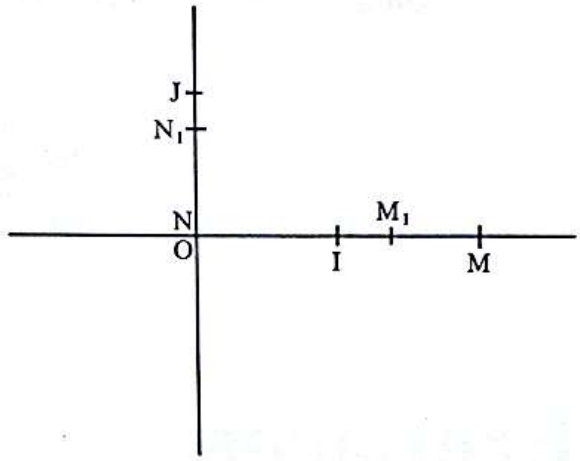


Fig. 23

Considérons la figure 23, où l'on a choisi un repère orthonormé (O, I, J), l'unité représentant 100 km.

Soit t le temps écoulé (en heures) depuis le départ des deux trains.

Soit M_1 et N_1 les positions respectives des deux trains à l'instant t.

On a : $MM_1 = 0{,}8t$ et $NN_1 = t$.

Les coordonnées du point M_1 sont : $(2 - 0{,}8t; 0)$.

Les coordonnées du point N_1 sont : $(0, t)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_1N_1}$ sont donc : $(0{,}8t - 2; t)$.

D'où : $$(M_1N_1)^2 = (0{,}8t - 2)^2 + t^2$$
$$= 1{,}64t^2 - 3{,}2t + 4.$$

Or, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la distance M_1N_1 entre M_1 et N_1 est minimale lorsque son carré $(M_1N_1)^2$ est minimal.

Étudions la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto 1{,}64t^2 - 3{,}2t + 4.$$

On a : $$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f'(t) = 3{,}28t - 3{,}2.$$

Scanned by CamScanner

Tableau de variation de f :

t	0		$\frac{40}{41}$		$+\infty$
$f'(t)$	$-3,2$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	$\searrow$	$f\left(\frac{40}{41}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $$f\left(\frac{40}{41}\right) = 1{,}64\left(\frac{40}{41}\right)^2 - 3{,}2\left(\frac{40}{41}\right) + 4$$
$$\simeq 2{,}439;$$
$$\sqrt{f\left(\frac{40}{41}\right)} \simeq 1{,}562.$$

La distance minimale des deux trains est donc 156,2 km.

Exercices

• Dans les exercices 1 à 7, étudier le sens de variation et tracer la représentation graphique, relativement à un repère orthonormé (O, I, J), de chacune des fonctions considérées :

1 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^3 + 2x - 5$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2x^3 + 3x^2 + 12x$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 - x^2 + x - 1$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 + x^2 - 5x + 3$.

2 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4 - 2x^2 - 3$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x+1)^3(x-2)$.

3 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{-2x+3}{x+2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1 - \frac{1}{x-2}$.

4 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x^2+2x-1}{2x-1}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - 2 + \frac{4}{x+3}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x - 1 - \frac{6}{x}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{4x^2-1}{x-2}$.

5 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x-1}{(x+3)^2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+x-2}$.

Scanned by CamScanner

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

6 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2+\frac{x-3}{x^2-1}$.

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x^2-3x-5}{x^2+x-2}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+1}$.

7 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^4}{x^2-4}$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^3+1}{x^3-1}$.

8 (1). Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Déterminer l'hyperbole d'équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ passant par les trois points $A\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ et $C(2; -5)$.
Construire cette hyperbole.

9 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{ax+b}{x+c}$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de f.
Déterminer a, b et c pour que :

— les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 2$ soient des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$,

— la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1 soit parallèle à la droite d'équation $y = -x$.
Construire $(\mathcal{C}_f)$.

2) En s'aidant de $(\mathcal{C}_f)$, construire la représentation graphique de la fonction

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2|x|+6}{|x|+1}$.

10 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3+px+2$

où $p \in \mathbb{R}$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Montrer que le point $\Omega(0,2)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

2) Déterminer p pour que la droite (OI) soit tangente à $(\mathcal{C})$, puis construire $(\mathcal{C})$.

11 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3+x$.

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

2) En s'aidant de $(\mathcal{C}_f)$ construire la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x^3+x|$ $\quad$ $x \longmapsto |x^3|+|x|$.

12 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b+\frac{1}{x}$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Déterminer a et b pour que la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f passe par le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}-1\right)$ et que la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point A soit parallèle à la droite (OI).

2) Étudier le sens de variation de f et construire $(\mathcal{C}_f)$.

13 (1). Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit la fonction $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{mx+1}{x+m}$

où m est un paramètre.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_m ?

2) a) Calculer m pour que $f_m(2) = -3$.

b) Avec la valeur trouvée λ de m, étudier le sens de variation de f_λ et tracer sa représentation graphique.

3) a) α et β étant deux nombres réels donnés, calculer m pour que $f_m(\alpha) = \beta$.

Scanned by CamScanner

b) En déduire que, lorsque m décrit

$$\mathbb{R}-\{-1, 1\},$$

la représentation graphique $(\mathcal{C}_m)$ de f_m passe par deux points A et B, indépendants de m, dont on déterminera les coordonnées.

14 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-4x+2}{x-3}$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Trouver les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

c) Montrer que le point $\Omega(3, 2)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

2) Soit la fonction numérique g définie par :

$\forall x \in]-\infty, 2]$ $\quad g(x)=2x-2$

$\forall x \in]2, +\infty[$ $\quad g(x)=|f(x)|$.

a) Donner l'ensemble de définition de g.

b) Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ de g. (On ne demande pas d'étudier la fonction g.)

15 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{mx^2-4}{x^2-m}$

et soit $(\mathcal{C}_m)$ la représentation graphique de f_m.

1) Donner, suivant les valeurs du paramètre m, l'ensemble de définition de f_m.

2) Montrer que, quelque soit m, f_m est paire.

3) Étudier, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m.

4) Construire $(\mathcal{C}_m)$ dans chacun des cas suivants :

a) $m=-2$; *c*) $m=1$;

b) $m=2$; *d*) $m=3$.

16 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+5}{2(x-1)}$

et sa représentation graphique (Γ).

1) Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

2) Étudier le sens de variation de f.

3) *a*) Démontrer que la droite d'équation

$$y=\frac{1}{2}(x-1)$$

est une asymptote à la courbe (Γ). Étudier la position de (Γ) par rapport à cette asymptote.

b) Préciser la deuxième asymptote de (Γ).

4) Construire (Γ).

5) Démontrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie pour (Γ).
D'après : Probatoire série D, session Juin 1985. Côte d'Ivoire.

17 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3-3x^2+2$.

1) Étudier le sens de variation de f.

2) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3) Utiliser $(\mathcal{C}_f)$ pour résoudre graphiquement l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^3-3x^2+2-m=0$$

dépendant du paramètre m.

18 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit deux fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{7}{3}x^2+7x-\dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$.

1) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g.

2) Tracer dans le même repère (O, I, J) les représentations graphiques respectives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions f et g.

3) Calculer les coordonnées des points communs à $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

19 (2). Mêmes questions 1), 2) et 3) qu'à l'exercice 18 pour les fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3-4x+3$ $\qquad$ et $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{-x+1}{x}$.

20 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère deux fonctions

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x+2}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x-1$.

Scanned by CamScanner

1) *a*) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g.

b) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{H})$ de f et la représentation graphique (P) de g dans le repère (O, I, J).

2) *a*) Calculer les coordonnées des points communs à $(\mathcal{H})$ et (P).

b) Montrer que $(\mathcal{H})$ et (P) ont la même tangente (Δ) à l'un de ces points communs. Tracer (Δ).

c) Montrer qu'il existe une droite (Δ'), autre que (Δ), parallèle à (Δ) et tangente à $(\mathcal{H})$. Donner une équation de (Δ').

21 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x^2 - 3x + 1)^2$.

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C})$.

2) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ comme axe de symétrie.

3) Soit (Δ) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 2.

a) Donner une équation de (Δ);

b) Déterminer les coordonnées des points communs à $(\mathcal{C})$ et (Δ).

22 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^4 - x^2$.

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

2) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax^2$

où a est un paramètre.
Soit $(\mathcal{C}_g)$ la représentation graphique de g.
Déterminer, suivant les valeurs de a, le nombre de points communs à $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

23 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{(m+1)x - 2}{mx + 1}$$

dépendant du paramètre m.

1) On suppose que $m = 1$.

a) Étudier le sens de variation de f_1.

b) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_1)$ de f_1.

c) Utiliser $(\mathcal{C}_1)$ pour résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2) On suppose que $m = -2$.

a) Étudier le sens de variation de f_{-2}.

b) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_{-2})$ de f_{-2}.

c) Calculer les coordonnées des points communs à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_{-2})$.

3) Démontrer que lorsque m décrit $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, la représentation graphique $(\mathcal{C}_m)$ de f_m passe par deux points indépendants de m.

24 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{x-2}.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

2) Soit (D) la droite d'équation $2x - 5y + 9 = 0$. Construire (D). Calculer les coordonnées des points d'intersection de (D) et (C).

3) On considère l'inéquation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{x-2} \leq \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}.$$

a) Résoudre graphiquement l'inéquation (E).

b) Résoudre (E) par le calcul.

25 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x-2}{2x+1}.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$. Donner une équation de chaque asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

3) Soit (D) la droite de coefficient directeur m et passant par le point $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) Avant tout calcul prévoir, d'après le graphique, le nombre de points de $(\mathcal{C}_f) \cap (D)$ lorsque m est strictement négatif.

Scanned by CamScanner

b) Donner une équation de (D).

c) Calculer le nombre de points de $(\mathcal{C}_f) \cap (D)$ lorsque m appartient à $\mathbb{R}^*$.

26 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x-2}.$$

On désigne par D_f l'ensemble de définition de f et par $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1) *a*) Étudier le sens de variation de f.

b) Préciser l'asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

c) Déterminer l'asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

d) Construire $(\mathcal{C}_f)$.

2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

3) Résoudre graphiquement l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2+2x-3}{x-2} = m$$

où m est un paramètre.

27 (2). on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, ainsi définie :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et en étudier la parité. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0.$$

2) Déterminer le sens de variation de f.
Montrer que 1 est maximum de f sur $\mathbb{R}$.

3) Dans un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité de longueur est le centimètre :

— placer les points de coordonnées $(x, f(x))$ où x prend les valeurs :

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 2, 3.$$

— en déduire un tracé de la représentation graphique de f lorsque x est élément de l'intervalle $[-3, 3]$.

4) Suivant les valeurs du nombre réel k, résoudre par le calcul l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = k.$$

D'après : Concours d'accès au Collège du « MONDE UNI » 1985 — Côte d'Ivoire.

28 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2+1}{x}.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

2) En s'aidant de $(\mathcal{C})$ construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_{|f|})$ de la fonction $|f|$.

3) En s'aidant de $(\mathcal{C}_{|f|})$, résoudre graphiquement l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \ x^2 - m|x| + 1 = 0$$

où m est un paramètre.

29 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

1) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique.

2) Étudier graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$(E) \ x \in \mathbb{R}, \ (1-m)x^2 - 2x + 1 - m = 0.$$

30 (2). Soit l'équation

$$(E) \ x \in \mathbb{R}, \ x^3 - m(x-1) + 4 = 0$$

dépendant du paramètre m.

1) Montrer que 1 n'est pas une solution de (E).

2) Trouver une fonction numérique f telle que l'équation

$$(E') \ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = m$$

ait les mêmes solutions que (E).

3) Étudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ relativement à un repère orthonormé (O, I, J).

4) *a*) En s'aidant de $(\mathcal{C}_f)$, donner suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation (E).

b) Résoudre (E) lorsque $m = 12$.

Scanned by CamScanner

31 (2). Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

1) *a*) Montrer que f est une fonction périodique de période π.

b) Soit f' la fonction dérivée de f.
On considère l'équation

$$(E)\ x \in [0, \pi], \quad f'(x) = 0.$$

Montrer que (E) admet les deux solutions : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

c) Étudier le signe de $\cos\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right)$ dans chacun des cas suivants :

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]; \ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]; \ x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$

d) En déduire le sens de variation de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction f. Donner son tableau de variation. Calculer $f'(0)$ et $f'(\pi)$.

e) On considère l'équation

$$(F)\ x \in [0, \pi], \ f(x) = 0.$$

Montrer que (F) admet les deux solutions :

$$\frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{7\pi}{12}.$$

f) Donner un tableau de valeurs de $f_{|[0, \pi]}$.

2) Construire la représentation graphique de $f_{|[0, \pi]}$.

En déduire celle de la fonction f.

3) Résoudre graphiquement

a) l'inéquation : $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

b) l'équation : $x \in [-\pi, \pi], \ f(x) = m$, où m est un paramètre.

32 (2). Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

1) En s'inspirant de l'exercice (30) :

a) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$;

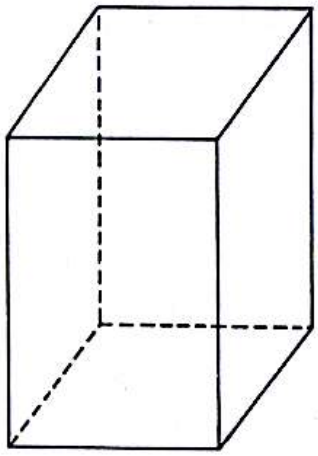
b) construire la représentation graphique de $f_{|[0, \frac{2\pi}{3}]}$;

c) construire la représentation graphique de f.

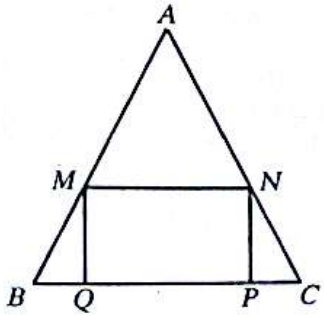
2) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$x \in [-\pi, \pi], \ f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

33 (4). Quelles dimensions doit avoir une boîte fermée d'un litre en forme de parallélépipède rectangle à base carrée, pour que son aire totale soit minimale?



34 (4). On considère un triangle équilatéral ABC dont la mesure du côté est égale à 5 cm. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$ (voir figure ci-dessous). Posons $BQ = x$. Calculer x pour que la mesure de l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale. Quelle est cette mesure?



Scanned by CamScanner

35 (4). Le directeur d'une salle de théâtre d'Ottawa a remarqué qu'à 8 dollars la place, il pouvait compter sur 500 spectateurs et que chaque baisse de 0,50 dollar lui amenait 100 personnes de plus. Combien doit-il faire payer la place pour obtenir un revenu maximal?
(D'après le Petit Archimède n° 53-54.)

36 (4). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Placer les 4 points $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 1)$ et $D(3, 4)$.
Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1) Calculer les coordonnées de G.

2) Soit (Δ_m) la droite de coefficient directeur m passant par G.
Donner en fonction de m une équation de (Δ_m).

3) Soit A_1, B_1, C_1 et D_1 les quatre points de (Δ_m) tels que les abscisses de ces points soient respectivement égales à celles des points A, B, C et D.

Posons :

$$S = A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2 + D_1D^2.$$

a) Exprimer S en fonction de m.

b) Calculer m pour que S soit minimale.

c) Soit (Δ_λ) la droite correspondant à la valeur λ de m trouvée dans *b*). Tracer (Δ_λ).

Problèmes

37 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
Soit $(\mathcal{C})$ sa representation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2 cm).

A. 1) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet 2 asymptotes.

2) Étudier les variations de f.

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3. La construire dans (O, I, J) ainsi que la courbe $(\mathcal{C})$ et ses deux asymptotes.

B. Soit la fonction numérique g_m définie par

$$g_m(x) = (-m + 2)x^2 + 2(m - 1)x - 2,$$

où m est un paramètre réel.
Soit (Γ_m) sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

1) Construire dans (O, I, J) les courbes (Γ_2) et $(\Gamma_{\frac{5}{2}})$ correspondant à $m = 2$ et $m = \dfrac{5}{2}$. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

2) Montrer que toutes les courbes (Γ_m) passent par deux points dont les coordonnées sont indépendantes de m.

3) m étant différent de 2, calculer les coordonnées du sommet S_m de (Γ_m), c'est-à-dire du point où la tangente à (Γ_m) est parallèle à l'axe des abscisses et montrer que $S_m \in (\mathcal{C})$.

4) On désigne par (D_p) la droite d'équation $y = x + p$, p étant un paramètre réel.
Soit M et N les points d'intersection de $(\Gamma_{\frac{5}{2}})$ et (D_p) lorsqu'ils existent, et soit K le milieu du segment $[MN]$.
Déterminer l'ensemble décrit par K lorsque p décrit $\mathbb{R}$.
D'après : Probatoire série D. Session Juin 1982. Côte d'Ivoire.

38 On considère la fonction

$$f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x - m + \frac{8 - 2m^2}{x - 2m}$$

où m est un paramètre.
Soit $(\mathcal{C}_m)$ la représentation graphique de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

A. 1) Étudier le sens de variation de la fonction f_0 correspondant à $m = 0$.

2) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_0)$ représentant f_0 admet un centre de symétrie et que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_0)$.

3) Représenter $(\mathcal{C}_0)$.

4) Utiliser la courbe $(\mathcal{C}_0)$ pour discuter l'existence et le signe des solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 - kx + 8 = 0$$

dépendant du paramètre k.

Scanned by CamScanner

B. On se place maintenant dans le cas général.

1) Quel est l'ensemble de définition de f_m?

2) Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle strictement monotone dans chaque intervalle où elle est définie?

3) Pour quelles valeurs de m la fonction f_m a-t-elle un maximum relatif et un minimum relatif?

4) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ admet le point $\Omega(2m, 3m)$ pour centre de symétrie.

5) Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) et soit E l'ensemble des nombres réels m tels que $(\mathcal{C}_m)$ passe par M_0.

a) Discuter suivant la position du point M_0 le nombre d'éléments de E.

b) Peut-on en déduire que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ ont certains points communs?

D'après : Probatoire série D. Session de remplacement 1983.

Côte d'Ivoire.

39 Soit m un nombre réel différent de 0 et de 2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Les deux courbes pourront être tracées avec deux couleurs différentes.

A. Soit la fonction $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{mx+1}{-mx+1-m}$$

et soit $(\mathcal{C}_m)$ sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

1) Donner l'ensemble de définition D_m de f_m.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ admet la même asymptote horizontale lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{0, 2\}$.

3) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ passe par le même point $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ lorsque m décrit $\mathbb{R}-\{0, 2\}$.

4) Déterminer m pour que la tangente en P à $(\mathcal{C}_m)$ soit parallèle à la droite d'équation $y=-2x$.

5) On prend $m=-2$. Étudier le sens de variation de f_{-2}. Construire $(\mathcal{C}_{-2})$.

B. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{4-|2x+3|}{|2x+3|}$$

et soit (G) sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

1) Donner l'ensemble de définition D_g de g.

2) Montrer que la droite d'équation $x=-\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (G).

3) Montrer que, quel que soit le nombre réel x appartenant à $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ on a :

$$g(x)=f_{-2}(x).$$

4) Sans autres calculs, déduire des deux questions précédentes une construction de (G).

D'après : Probatoire série B. Session Juin 1984. Côte d'Ivoire.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x(3-x)$$

et soit (P) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Donner une équation de la tangente à (P) au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (P) au point d'abscisse 3.

c) Construire (P) et les tangentes précédentes.

2) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2-3x}{x-1}$$

et soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J).

a) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes.

b) Étudier le sens de variation de g.

c) Montrer que le point d'intersection des deux asymptotes est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

d) Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0, puis une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3.

e) Construire $(\mathcal{C})$, les asymptotes et les tangentes précédentes.

3) Soit la fonction

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{2(1-x)}(x^2-5x+6-|x^2-3x|).$$

a) Donner l'ensemble de définition de h.

Résoudre :

— l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x^2-4x+3=0$;

— l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $x^2-3x \geqslant 0$.

b) Exprimer $h(x)$ suivant les valeurs de x sans utiliser le symbole valeur absolue.

c) Sans autres calculs, en tenant compte des résultats qui précèdent et en utilisant une couleur différente de celles utilisées pour construire (P) et $(\mathcal{C})$, représenter graphiquement h dans le repère (O, I, J).

Scanned by CamScanner

D'après : Probatoire série *D*. Session Juin 1984. Côte d'Ivoire.

41 A. 1) Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 7x + 6 = 0$;

b) $x \in \mathbb{R}, \quad x^4 - 7x^2 + 6 = 0$.

2) Factoriser le polynôme $x^4 - 7x^2 + 6$ et chercher son signe suivant les valeurs de x.

B. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

1) Quel est l'ensemble de définition D de f?

2) Montrer que f est impaire. Étudier le sens de variation de f.

3) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet trois asymptotes.
Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse zéro.

4) Tracer (T), les asymptotes à $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - mx^2 - 2x + 3m = 0.$$

D'après : Probatoire série *D*. Session de remplacement 1984. Côte d'Ivoire.

42 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 3x^2.$$

1) Étudier les variations de f. Tracer sur du papier millimétré, la représentation graphique $(\mathcal{C}_1)$ de f relativement à un repère orthonormé (O, I, J).
Préciser les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ avec l'axe des abscisses.

2) Donner une équation des tangentes à $(\mathcal{C}_1)$ aux points où $(\mathcal{C}_1)$ coupe l'axe des abscisses.

3) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x^3 - 3x^2|$.

Utiliser $(\mathcal{C}_1)$ pour construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_2)$ de g relativement au repère (O, I, J).

4) Soit la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x^3| - 3x^2$.

a) Montrer que h est une fonction paire.

b) Comparer les restrictions de f et de h à $\mathbb{R}_+$. Construire la représentation graphique $(\mathcal{C}_3)$ de h relativement au repère (O, I, J).

5) Discuter graphiquement, selon les valeurs du nombre réel k, du nombre des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad (g(x) - k)\ (h(x) - k) = 0.$$

D'après : Probatoire série D_1. Session Juin 1984. Côte d'Ivoire.

43 Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).

1) Trouver les nombres réels b et c tels que la fonction polynôme définie par $f(x) = x^2 + bx + c$ vérifie les conditions suivantes :

$$f(0) = -5 \quad \text{et} \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

2) On considère le point $F\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$ et la droite (Δ) dont une équation est $y + \frac{11}{2} = 0$.

a) Soit p la projection orthogonale sur la droite (Δ).
M étant un point quelconque de $\mathcal{P}$ calculer en fonction des coordonnées x et y de M la distance $d(M, p(M))$.

b) Montrer que l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$ tels que :

$$d^2(M, F) = d^2(M, p(M))$$

est la parabole dont une équation est

$$y = x^2 + x - 5.$$

3) Étudier la fonction numérique g telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2 + x - 5.$$

Représenter graphiquement $(\mathcal{E})$ ($OI = 1$ en cm). On précisera les points A et B de $(\mathcal{E})$ d'abscisses respectives 1 et -3 ainsi que les points C et D, intersection de $(\mathcal{E})$ avec la droite (OI) (C désigne le point d'abscisse positive).

On donne $\sqrt{21} \simeq 4{,}6$.

4) *a*) Trouver une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{E})$ au point d'abscisse -2.

b) Soit $\{E\} = (T) \cap (\Delta)$. Trouver une équation de la droite (T') orthogonale à (T) et passant par E. (T') est-elle tangente à $(\mathcal{E})$?

c) Tracer (T) et (T').

5) Soit h la fonction numérique définie par

$$h : x \longmapsto |x^2 + x - 5|.$$

a) Sans faire l'étude de h, dresser le tableau des variations de h à partir de celui de g.

b) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, du nombre des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = m.$$

D'après : Probatoire série D_1. Session de remplacement 1984. Côte d'Ivoire.

Scanned by CamScanner

8 Primitives d'une fonction

Leçon 1 : PRIMITIVES
Leçon 2 : CALCUL D'AIRES

1 Primitives

a) **Activités préparatoires**

Activité 1

Calculer la dérivée des fonctions numériques suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x^2}{2}+x \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$f_3 : x \longmapsto \frac{(x+3)^2}{2}-2x \qquad f_4 : x \longmapsto \cos^2 x$$

$$f_5 : x \longmapsto -\sin^2 x \qquad f_6 : x \longmapsto \tan^2 x$$

$$f_7 : x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Sur ces exemples, quel lien voyez-vous entre deux fonctions admettant la même dérivée?

Activité 2

Pour chacune des fonctions numériques f ci-dessous, trouver une ou plusieurs fonctions F, dérivables sur l'intervalle I, telles que :

$$\forall x \in I \quad F'(x)=f(x).$$

$f : x \longmapsto 3, \quad I=\mathbb{R};$
$f : x \longmapsto x, \quad I=\mathbb{R};$
$f : x \longmapsto x^4, \quad I=\mathbb{R};$
$f : x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*), \quad I=\mathbb{R};$
$f : x \longmapsto 3x^2-x+1, \ I=\mathbb{R};$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}, \quad I=]-\infty, 0[\text{ ou } I=]0, +\infty[;$

Scanned by CamScanner

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^3}, \quad I =]-\infty, 0[\text{ ou } I =]0, +\infty[;$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^* - \{1\}), \quad I =]-\infty, 0[\text{ ou } I =]0, +\infty[;$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad I =]0, +\infty[;$$

$$f : x \longmapsto 2x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}}, \quad I =]0, +\infty[;$$

$$f : x \longmapsto \sin x, \quad I = \mathbb{R};$$

$$f : x \longmapsto \cos x, \quad I = \mathbb{R};$$

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}, \quad I = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Primitives d'une fonction

Définitions

Soit un intervalle I et deux applications f et F de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est une *primitive de* f si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Plus généralement :

Soit f et F deux fonctions numériques dont les ensembles de définition contiennent l'intervalle I.
On dit que F est une *primitive de* f *sur* I si F est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Exemples

- L'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^3}{3}$

est une primitive de l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$.

- La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\frac{1}{x}$

est une primitive, sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2}.$$

On démontre et nous admettrons le résultat suivant.

Scanned by CamScanner

Théorème 1

Toute fonction numérique continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Si deux fonctions considérées dans l'activité 1 ont même dérivée, on constate qu'elles ne diffèrent que par une fonction constante.
Par exemple, les fonctions f_4 et f_5 ont la même dérivée $x \longmapsto \sin 2x$ et elles vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_4(x) = f_5(x) + 1.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2

Soit un intervalle I, une application f de I dans $\mathbb{R}$ et une primitive F de f. Une application G de I dans $\mathbb{R}$ est une primitive de f si et seulement si il existe un nombre réel C tel que :

$$\forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C.$$

Démonstration

S'il existe un nombre réel C tel que

$$\forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C,$$

alors G est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I \quad G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Par conséquent, G est une primitive de f.

Réciproquement, si G est une primitive de f, alors $G - F$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I \quad (G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

D'après le théorème 1, page 197, $G - F$ est constante sur I.
Il existe donc un nombre réel C tel que :

$$\forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C.$$

Exemple

Cherchons toutes les primitives de l'application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$.

L'application $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est une primitive de f.

Scanned by CamScanner

D'après le théorème 2, l'ensemble des primitives de f est l'ensemble de toutes les applications G de la forme

$$G : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -\frac{1}{x} + C,$$

où C est un nombre réel quelconque.

On dit aussi que les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{x} + C$, où C est un nombre réel quelconque, sont les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

De même, les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{x} + C$, où C est un nombre réel quelconque, sont les primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

Remarque. Le théorème 2 n'est plus vrai lorsque I n'est pas un intervalle.

Soit, en effet, l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}.$$

Les applications $G : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, où C est un nombre réel quelconque,

$$x \longmapsto -\frac{1}{x} + C$$

ont toutes une dérivée égale à f.

Il y a cependant d'autres applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ qui ont cette propriété.

Par exemple, l'application $H : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ (figure 1), définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad H(x) = -\frac{1}{x} + 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad H(x) = -\frac{1}{x} + 2, \end{cases}$$

n'est aucune des applications G ci-dessus et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad H'(x) = f(x)$.

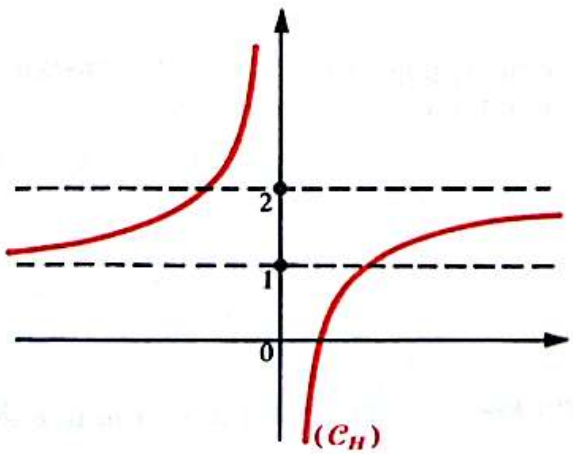


Fig. 1

Scanned by CamScanner

Le tableau ci-dessous donne les primitives de quelques fonctions simples; la vérification est immédiate à partir des règles de dérivation.

Fonctions f	Primitives de f	sur l'intervalle
$x \longmapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + C$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \longmapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + C$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \longmapsto \tan x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z})$
$x \longmapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$x \longmapsto -\text{cotan}\ x + C$	$]k\pi, \pi + k\pi[\ (k \in \mathbb{Z})$

c) Calcul des primitives

Les trois théorèmes qui suivent sont la traduction de certaines règles de dérivation dans le langage des primitives.

Théorème 3

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur l'intervalle I, alors pour tous nombres réels a et b, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I.

Exemple

Puisque $x \longmapsto \frac{x^3}{3}$ et $x \longmapsto \sin x$ sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \cos x$, la fonction $x \longmapsto \frac{2}{3}x^3 - 5\sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto 2x^2 - 5\cos x$.

Théorème 4

Soit une fonction numérique f dérivable sur l'intervalle I.
Alors :

- $\frac{f^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $f^n f'$ sur $I\ (n \in \mathbb{N}^*)$;
- si $f(x) \neq 0$ pour tout élément x de I, $\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$ est une primitive de $\frac{f'}{f^n}$ sur $I\ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$.

Scanned by CamScanner

Exemples

$x \longmapsto \cos x$ est la dérivée de $x \longmapsto \sin x$; d'où :

- $x \longmapsto \dfrac{\sin^4 x}{4}$ est une primitive de $x \longmapsto \sin^3 x \cos x$ sur $\mathbb{R}$;
- $x \longmapsto \dfrac{-1}{\sin x}$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ sur $]k\pi, \pi + k\pi[$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Théorème 5

Soit a et b deux nombres réels, a étant non nul.
Si F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, alors la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{a} F(ax+b)$$

est une primitive de la fonction

$$x \longmapsto f(ax+b)$$

sur l'intervalle J tel que $J = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b \in I\}$.

Exemples

- $x \longmapsto \sin x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
  $x \longmapsto \dfrac{1}{3} \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ est donc une primitive de $x \longmapsto \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.
  $x \longmapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{3x-5}$ est donc une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}$ sur $\left]\dfrac{5}{3}, +\infty\right[$.

Exercices

Déterminer toutes les primitives de chacune des fonctions f ci-dessous sur un ou plusieurs intervalles que l'on précisera.

$f : x \longmapsto 4x^3 - 3x^2 + 1$

$f : x \longmapsto x^2 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f : x \longmapsto (2x-1)(x^2 - x + 3)$

$f : x \longmapsto (3x-1)^2$

$f : x \longmapsto \dfrac{10x-3}{(5x^2 - 3x + 1)^2}$

$f : x \longmapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^3}$

$f : x \longmapsto \dfrac{2}{(x+1)^3} - x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Scanned by CamScanner

$f : x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$

$f : x \longmapsto \sin(7x-3)$

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(2x+1)}$

$f : x \longmapsto \dfrac{\tan^5 x}{\cos^2 x}$

$f : x \longmapsto (\cos^3 x + \cos^2 x + 1)\sin x.$

2 Calcul d'aires

1) Introduction

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, I, J), considérons la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction positive.
Certains problèmes se ramènent au calcul de la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et deux droites parallèles à la droite (OJ) (figure 2).

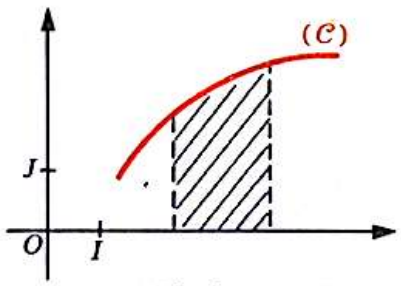


Fig. 2

Exemple

Un ressort est fixé par une de ses extrémités et, à l'autre extrémité, est attachée une masse pouvant être déplacée.

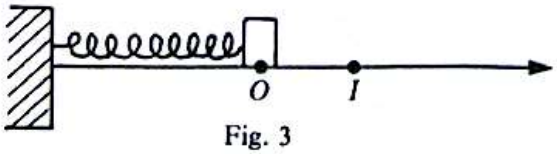


Fig. 3

Le ressort et la masse sont représentés sur une droite munie d'un repère (O, I) (figure 3).
La position d'équilibre de la masse et choisie pour origine O du repère. Si, un opérateur déplaçant la masse, le ressort s'allonge d'une longueur x (figure 4), l'intensité de la force $\vec{f}$ exercée par l'opérateur est proportion-

Scanned by CamScanner

nelle à l'allongement du ressort; elle est donc égale à Kx, où la constante strictement positive K s'appelle la raideur du ressort.

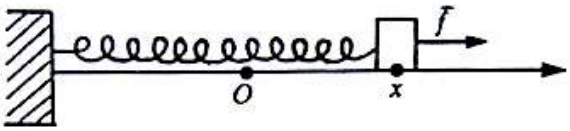


Fig. 4

Complétons le repère (O, I) en un repère orthogonal (O, I, J) du plan. Un raisonnement de physique élémentaire permet de montrer que le travail W effectué par la force exercée par l'opérateur pour déplacer la masse du point O au point M, d'abscisse x_M, est égal à la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par (figure 5) :

— la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de la fonction $x \longmapsto Kx$,

— la droite (OI),

— les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_M$.

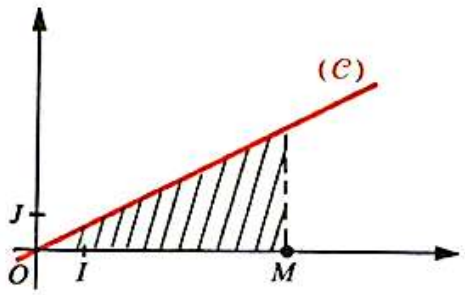


Fig. 5

D'où : $W = \frac{1}{2} K x_M^2$.

Dans l'exemple ci-dessus, le calcul de la mesure de l'aire ne présente aucune difficulté et il en est de même si $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles.
La situation se complique si $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique d'une fonction quelconque.
Cependant, ainsi que nous allons le voir, la notion de primitive permet de résoudre ce problème dans beaucoup de cas.

2) Utilisation des primitives

a) Soit une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, croissante et positive sur $[a, b]$.

Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthogonal (O, I, J) (figure 6).
Pour chaque élément x de $[a, b]$, notons (Δ_x) la droite passant par le point de coordonnées $(x, 0)$ et parallèle à (OJ).

Scanned by CamScanner

Soit l'application $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

- $S(a) = 0$;
- $\forall x \in]a, b]$ $\begin{cases} S(x) \text{ est la mesure de l'aire de la partie du plan} \\ \text{limitée par } (\mathcal{C}), (OI), (\Delta_a) \text{ et } (\Delta_x). \end{cases}$

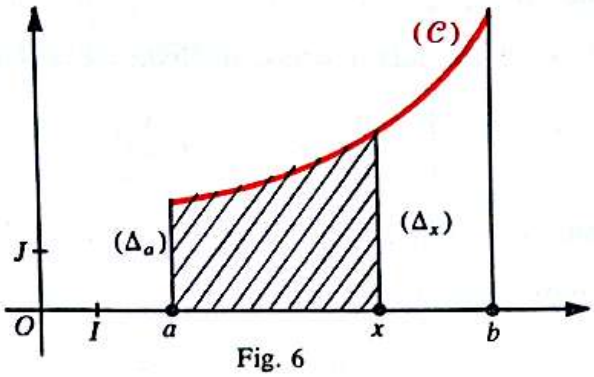


Fig. 6

Nous nous proposons de montrer que :

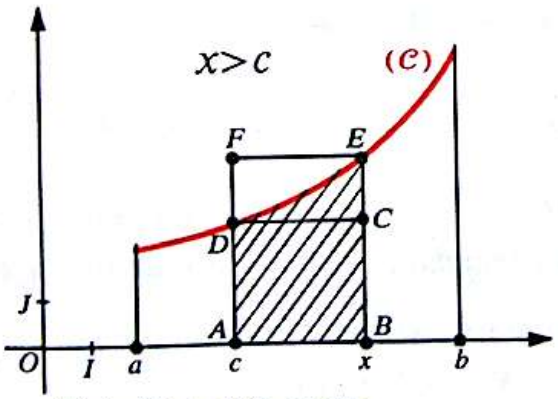
S est une primitive de f.

Étant donné un élément quelconque c de $[a, b]$, nous devons donc montrer que S est dérivable au point c et que $S'(c) = f(c)$.

- Soit x un élément de $]c, b]$.

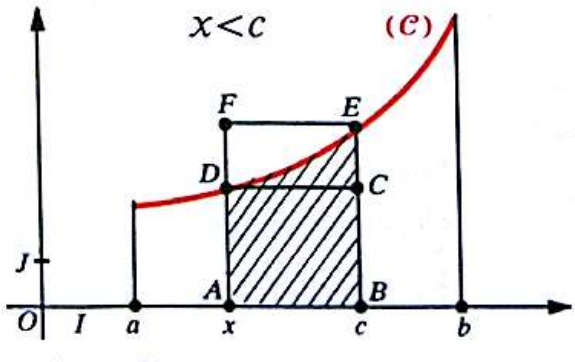
Sur la figure 7, on remarque que :

- $S(x) - S(c)$ est la mesure de l'aire de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (OI), (Δ_c) et (Δ_x);
- $(x - c)f(c)$ est la mesure de l'aire du rectangle $ABCD$;
- $(x - c)f(x)$ est la mesure de l'aire du rectangle $ABEF$.



$S(x) - S(c)$ est la mesure de l'aire hachurée

Fig. 7



$S(c) - S(x)$ est la mesure de l'aire hachurée

Fig. 8

D'où

$$(x - c)f(c) \leqslant S(x) - S(c) \leqslant (x - c)f(x),$$

ou encore :

$$f(c) \leqslant \frac{S(x) - S(c)}{x - c} \leqslant f(x).$$

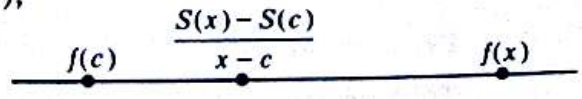


Fig. 9

Scanned by CamScanner

• Soit x un élément de $[a, c[$ (figure 8).
Comme ci-dessus, on montre que :

$$f(x) \leqslant \frac{S(x)-S(c)}{x-c} \leqslant f(c).$$

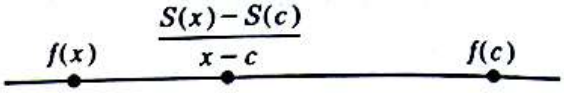


Fig. 10

• Par conséquent, pour tout élément x de $[a, b]-\{c\}$, la distance entre $\frac{S(x)-S(c)}{x-c}$ et $f(c)$ est inférieure à la distance entre $f(x)$ et $f(c)$:

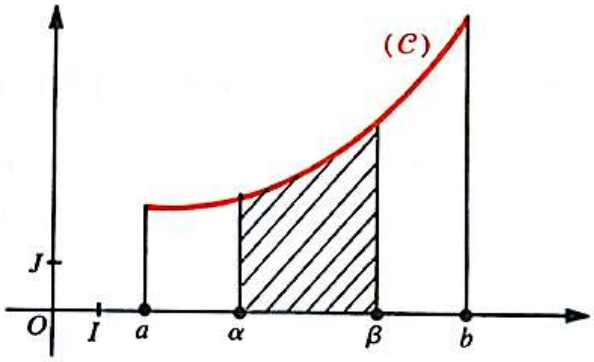
$$\left|\frac{S(x)-S(c)}{x-c} - f(c)\right| \leqslant |f(x)-f(c)|.$$

f étant continue au point c, on a $\lim\limits_{x \to c} f(x)=f(c)$; il résulte immédiatement de la définition de limite que l'on a aussi :

$$\lim_{x \to c} \frac{S(x)-S(c)}{x-c} = f(c).$$

Cela signifie que S est dérivable au point c et que $S'(c)=f(c)$.
S est donc bien une primitive de f.

b) Soit α et β deux nombres réels tels que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$.
Le résultat ci-dessus permet de calculer simplement la mesure $\mathcal{A}$ de l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI), (Δ_α) et (Δ_β), (figure 11).



$\mathcal{A}$ est la mesure de l'aire hachurée

Fig. 11

On a évidemment : $\mathcal{A} = S(\beta) - S(\alpha)$.

Cependant, dans cette égalité, on peut remplacer S par une primitive quelconque F de f.
En effet, d'après le théorème 2, il existe un nombre réel C tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad S(x) = F(x) + C.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= S(\beta) - S(\alpha) \\ &= F(\beta) + C - F(\alpha) - C \\ &= F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned}$$

Le symbole $[F(x)]_\alpha^\beta$ est souvent utilisé pour noter la différence $F(\beta) - F(\alpha)$.

Tout ce qui précède est encore vrai (quelques inégalités changeant de sens) dans le cas où f est décroissante au lieu de croissante.

Scanned by CamScanner

On a donc obtenu le résultat suivant :

Théorème 6

Soit une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue, positive et croissante ou décroissante sur $[a, b]$.
Soit α et β deux nombres réels tels que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$.
Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthogonal (O, I, J).
La mesure $\mathcal{A}$ de l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ peut s'écrire

$$\mathcal{A} = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

où F est une primitive quelconque de f.

Remarque. On peut montrer que le théorème 6 est encore vrai si f n'est ni croissante ni décroissante.

Exercices

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Représenter graphiquement chacune des parties du plan décrites ci-dessous, puis calculer la mesure des aires correspondantes :

a) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe d'équation $y = x^2 + x^3$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$;

b) L'aire de la partie du plan limitée par (OI), (OJ) et la représentation graphique de la restriction à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction cosinus;

c) L'aire de la partie du plan limitée par les deux paraboles d'équations $y = 5x^2$ et $y = x^2 + 1$, et par la droite (OJ).

Exercices

Dans les exercices 1 à 8 déterminer toutes les primitives de chacune des fonctions considérées, sur un ou plusieurs intervalles que l'on précisera.

1 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 5x^3 - 3x^2 + 4x - 7$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (2x + 1)(x - 2)$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (-x + 3)^2(2x - 1)$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{5}x^4 - \frac{3}{7}x^2 + 2x + 1$.

2 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x(x^2 - 1)^{10}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (3x^2 + 1)(x^3 + x - 1)^7$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x^2 + 3x - 1)^4(2x + 3)$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (2x + 1)^{15}$.

3 (1). *a*) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2}$

Scanned by CamScanner

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2-x^2}{x^4}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{x^2+2x-1}{x^5}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^5}$.

4 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x+5)^3}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{-2}{(2x-1)^3}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{(-4x+1)^2}$.

5 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3-2x^2+\dfrac{1}{x^2}-7$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{3x^3-4x^2+5}{x^2}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x-1+\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{-3x^5+6x^3-x}{(x^2-1)^2}$.

6 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{-3}{\sqrt{x}}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{5\sqrt{x}}{x}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{3}{\sqrt{2x+5}}$.

7 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x \cos^3 x$

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin^3 x \cos x$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

8 (1). a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -3 \sin 5x + 2 \cos\left(-3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin 3x \cos^2 3x$

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{5}{2\sin^2\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

9 (1). Démontrer le théorème suivant :
Si l'application f de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$ possède des primitives, alors pour tout élément x_0 de I et tout nombre réel α, il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0)=\alpha$.

Application
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3-2x^2+x-1$.

a) Trouver toutes les primitives de f.

b) Déterminer la primitive F de f telle que $F(-1)=2$.

10 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos^2 x$.

a) Vérifier que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

b) Déterminer toutes les primitives de f.

c) Déterminer la primitive de f qui s'annule au point 0.

11 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin^2 x$.

Déterminer la primitive de f qui s'annule au point $\dfrac{\pi}{4}$.

12 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos^4 x$.

a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^4 x = \frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

b) Déterminer toutes les primitives de f.

Scanned by CamScanner

13 (1). Rappelons que pour tous nombres réels a et b, on a :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b).$$

Application :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos 3x \cos 2x$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x.$$

b) Déterminer toutes les primitives de f.

14 (1). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin 5x \sin 3x$.

Déterminer toutes les primitives de f.

15 (1). Déterminer toutes les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin 4x \cos 3x$.

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos^2 2x - \cos x \sin 3x$.

• Dans les exercices 16 à 22 le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

16 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x + 1$.

Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la représentation graphique de f, la droite (OI) et la droite (OJ).

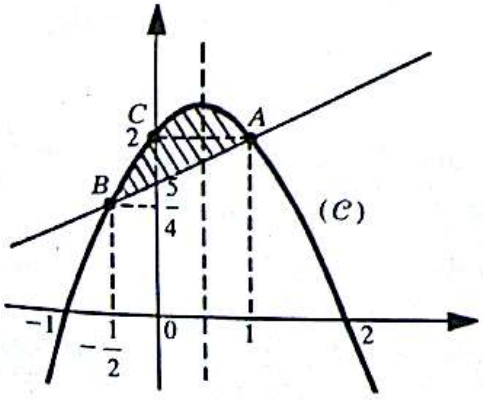
17 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 + 1$.

a) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f.

b) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

18 (2). Sur la figure ci-dessous, $(\mathcal{C})$ est la parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

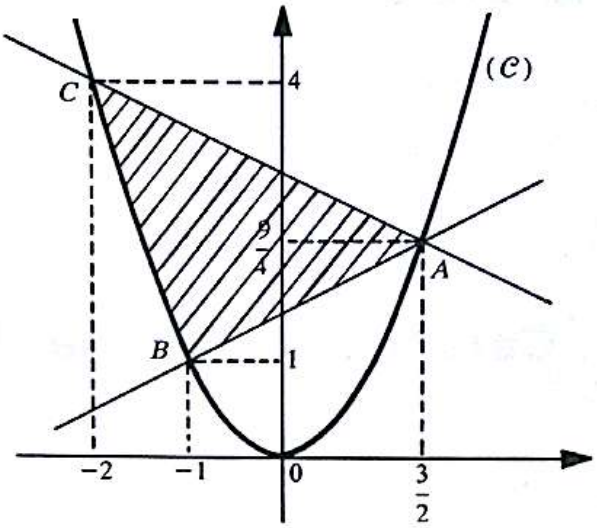


passant par les trois points :

$$A(1; 2); \quad B\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right) \text{ et } C(0; 2).$$

Calculer la mesure de l'aire de la partie hachurée du plan.

19 (2). Sur la figure ci-dessous :



• A, B et C sont les trois points de coordonnées respectives

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right), \quad (-1; 1) \quad \text{et} \quad (-2; 4);$$

• $(\mathcal{C})$ est la parabole d'équation $y = x^2$.

Calculer la mesure de l'aire de la partie hachurée du plan.

20 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

a) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f.

b) Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les deux droites d'équations respectives $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$.

21 (2). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto mx^2 + 1$

dépendant du paramètre m $(m \in \mathbb{R}_+^*)$.

On désigne par $\mathcal{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la représentation graphique de f, la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 1$.

Calculer m sachant que $\mathcal{A} = 4$.

22 (2). Soit deux fonctions

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^3.$$

Calculer la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par les représentations graphiques de f et g, la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 2$.

Scanned by CamScanner

9 Statistiques

Leçon 1 : CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION
Leçon 2 : DISTRIBUTION STATISTIQUE NORMALE

1 Caractéristiques de dispersion

1) Notion de dispersion

Activités préparatoires

1) On considère deux ensembles A et B de crayons (figure 1).

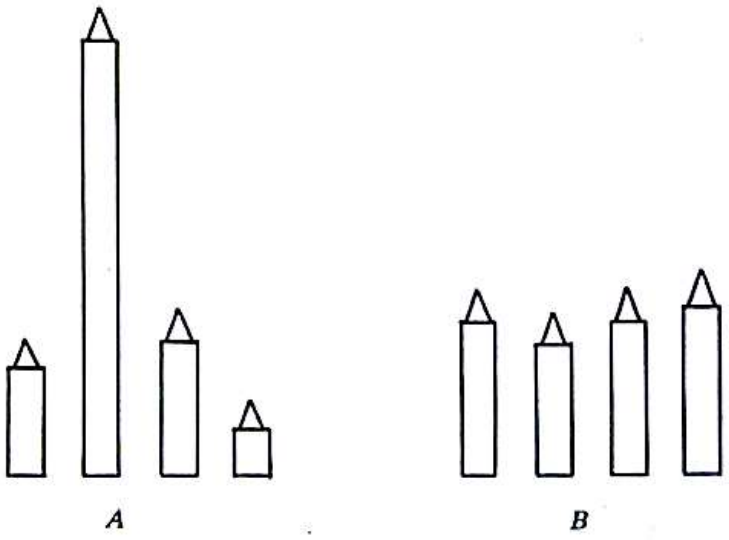


Fig. 1

L'ensemble A contient quatre crayons de longueurs respectives :

6 cm, 20 cm, 7 cm, 3 cm.

L'ensemble B contient quatre crayons de longueurs respectives :

8 cm, 7,5 cm, 8 cm, 8,5 cm.

Comparer les moyennes arithmétiques des longueurs de ces deux ensembles de crayons.
Que peut-on conclure?

Scanned by CamScanner

2) Les salaires mensuels de cinq employés sont respectivement de
30 000, 35 000, 40 000, 45 000, 800 000 francs.

— Calculer la moyenne arithmétique de leurs salaires.

— Cette moyenne est-elle « représentative » des salaires?

3) Les notes obtenues par deux élèves aux cinq premiers devoirs surveillés de mathématique sont respectivement :

élève A	9	10	8	8	7,5
élève B	3	8	3,5	20	8

— Déterminer le mode, la médiane et la moyenne arithmétique de chacune des deux distributions statistiques définies par ces deux suites de notes. Que constate-t-on?

— Les deux distributions peuvent-elles être considérées comme identiques?

Dans la suite, l'activité préparatoire 3) sera utilisée comme exemple et simplement appelée activité 3.

Les deux distributions de l'activité 3 ont une moyenne arithmétique égale à 8,5 une médiane égale à 8 et un mode égal à 8.
Pourtant, intuitivement, les notes de l'élève A sont moins « dispersées » que celles de l'élève B.

Cela montre que les caractéristiques de position (mode, médiane, moyenne arithmétique) ne suffisent pas à décrire complètement une distribution statistique.

Nous allons définir d'autres caractéristiques, appelées caractéristiques de *dispersion*.
Avant de définir ces nouvelles caractéristiques rappelons, au moyen de l'activité 3, le vocabulaire des statistiques introduit en classe de Seconde.

Dans le cas des notes obtenues par l'élève A :

— la *population* est l'ensemble E_1 des cinq devoirs faits par l'élève A;

— le *caractère* est l'application f_1 qui, à chaque devoir, associe la note obtenue (c'est un caractère quantitatif);

— les *modalités* sont les notes obtenues; l'ensemble F_1 des modalités est $\{7{,}5;\ 8;\ 9;\ 10\}$;

— l'*effectif* d'une modalité est le nombre d'antécédents de cette modalité par f_1;

— la *distribution statistique* associée au caractère f_1 est l'application g_1 qui, à chaque modalité, associe son effectif;

— la *série statistique* est le graphe de g_1.

Tout cela est illustré par la figure 2.

Remarque. On aurait pu choisir [0; 20] pour ensemble des modalités et, dans ce cas, chaque modalité n'appartenant pas à $\{7{,}5;\ 8;\ 9;\ 10\}$ aurait un effectif nul.

Scanned by CamScanner

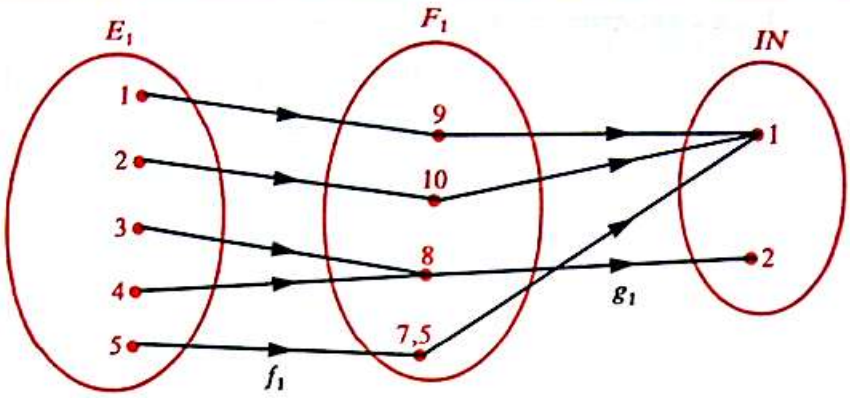


Fig. 2

Ajoutons la définition suivante :

La suite (9; 10; 8; 8; 7,5) des notes obtenues par l'élève *A* est appelée la suite des *valeurs observées.*

Lorsque l'on veut considérer tous les termes de la suite des valeurs observées, c'est-à-dire toutes les modalités, *chacune de celles-ci étant répétée autant de fois que son effectif l'indique*, on parle des valeurs observées au lieu des modalités.

Exercice Donner les diagrammes représentant le caractère f_2 et la distribution g_2 définis par le tableau des notes obtenues par l'élève *B*.

2) Caractéristiques de dispersion

a) Étendue

Rangeons dans l'ordre croissant les valeurs observées dans chacune des deux distributions statistiques de l'activité 3.

élève *A*	7,5	8	8	9	10
élève *B*	3	3,5	8	8	20

Dans la première distribution, les valeurs observées varient de 7,5 à 10; l'amplitude de l'intervalle de variation et égale à 2,5 $(10-7{,}5=2{,}5)$.
L'amplitude de l'intervalle de variation de la deuxième distribution est égale à 17 $(20-3=17)$.
Ces amplitudes s'appellent *étendue* de la distribution correspondante.

En général :

Définition

On appelle *étendue* d'une distribution statistique, associée à un caractère quantitatif, la différence entre la plus grande et la plus petite valeur observée.

En ce qui concerne l'activité 3, on voit qu'il y a une grande différence entre les deux étendues des distributions étudiées.

Scanned by CamScanner

L'étendue d'une distribution statistique est facile à évaluer, mais elle dépend uniquement des valeurs observées extrêmes.
Si l'étendue est petite, les valeurs observées se concentrent autour de la moyenne arithmétique.
Mais, si l'étendue est grande, on ne peut pas conclure que les valeurs observées sont « dispersées » sans faire une étude des valeurs situées entre les deux extrêmes.

Exemple

La distribution statistique définie par le tableau

modalités	1	9	10	11	19
effectifs	1	4	8	3	1

a une grande étendue, égale à 18, mais les valeurs observées situées entre les extrêmes se « concentrent » autour de la moyenne arithmétique, approximativement égale à 9,94.

b) **Variance et écart-type**

Revenons à l'activité 3 et, pour chaque distribution, calculons l'écart de chaque valeur observée à la moyenne arithmétique.

élève A	$\underbrace{7{,}5-8{,}5}_{-1}$	$\underbrace{8-8{,}5}_{-0{,}5}$	$\underbrace{8-8{,}5}_{-0{,}5}$	$\underbrace{9-8{,}5}_{0{,}5}$	$\underbrace{10-8{,}5}_{1{,}5}$
élève B	$\underbrace{3-8{,}5}_{-5{,}5}$	$\underbrace{3{,}5-8{,}5}_{-5}$	$\underbrace{8-8{,}5}_{-0{,}5}$	$\underbrace{8-8{,}5}_{-0{,}5}$	$\underbrace{20-8{,}5}_{11{,}5}$

Calculons ensuite, pour chaque distribution, la moyenne arithmétique des écarts :

élève A : $\frac{1}{5}[(-1)+(-0{,}5)+(-0{,}5)+0{,}5+1{,}5]=0$;

élève B : $\frac{1}{5}[(-5{,}5)+(-5)+(-0{,}5)+(-0{,}5)+11{,}5]=0$.

Dans les deux cas, les écarts positifs et les écarts négatifs se compensent.
La moyenne arithmétique des écarts algébriques ne permet donc pas de comparer les dispersions de deux distributions.

Par contre, la moyenne arithmétique de la valeur absolue des écarts, appelée *écart moyen absolu*, permet de comparer les dispersions.

Exercice Calculer l'écart moyen absolu de chacune des deux distributions de l'activité 3.
L'écart moyen absolu le plus grand correspond-il à la suite des notes la plus « dispersée »?

Cependant, l'expérience nous apprend que les valeurs absolues sont difficiles à manipuler.
Nous allons définir maintenant la caractéristique de dispersion la plus utilisée : la variance.

Scanned by CamScanner

Pour chacun des élèves A et B, calculons le carré de l'écart de chaque valeur observée à la moyenne arithmétique.

élève A	1	0,25	0,25	0,25	2,25
élève B	30,25	25	0,25	0,25	132,25

Calculons aussi les moyennes arithmétiques de ces carrés :

élève A : $\frac{1}{5}[1+0{,}25+0{,}25+0{,}25+2{,}25]=0{,}8$;

élève B : $\frac{1}{5}[30{,}25+25+0{,}25+0{,}25+132{,}25]=37{,}6$.

Les résultats obtenus, 0,8 et 37,6, sont appelés la *variance* de la distribution correspondante.

En général :

Définition

On appelle *variance* d'une distribution statistique, associée à un caractère quantitatif, la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs observées à la moyenne arithmétique de cette distribution.

Cette nouvelle caractéristique permet d'apprécier la dispersion des valeurs observées autour de la moyenne.
Plus la variance est grande, plus les écarts sont grands entre certaines valeurs observées et la moyenne arithmétique de toutes les valeurs observées.
Dans l'activité 3, les notes de l'élève A s'écartent moins de leur moyenne arithmétique que celles de l'élève B.

Question. Que peut-on dire des valeurs observées si la variance est nulle?

Dans beaucoup de cas, les valeurs observées s'expriment au moyen d'une unité. Par exemple, dans l'activité préparatoire 1, l'unité est le cm et, par conséquent, la variance s'exprime en cm^2.
On obtient une caractéristique de dispersion s'exprimant dans la même unité que les valeurs observées en prenant la racine carrée de la variance.

Définition

On appelle *écart-type* d'une distribution statistique, associée à un caractère quantitatif, la racine carrée de sa variance.

La dispersion d'une distribution statistique est aussi bien mesurée par son écart-type que par sa variance.
Dans le cas des élèves A et B de l'activité 3, des valeurs approchées des écarts-types sont respectivement 0,89 et 6,13.

Scanned by CamScanner

3) Calcul de la variance et de l'écart-type

Considérons une distribution statistique dont la suite des valeurs observées est

$$(y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

et dont les modalités sont :

$$x_1 \text{ d'effectif } n_1,\ x_2 \text{ d'effectif } n_2,\ \ldots,\ x_k \text{ d'effectif } n_k.$$

La suite $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ est donc formée, à l'ordre près, de n_1 fois le nombre x_1, n_2 fois le nombre x_2, ..., n_k fois le nombre x_k.

Notons respectivement $\overline{X}$, V et σ la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type de la distribution considérée.

Suivant que l'on considère les valeurs observées ou les modalités, on a :

$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$	$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \quad \left(N=\sum_{i=1}^{k} n_i\right)$
$V=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j-\overline{X})^2$	$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\overline{X})^2$
$\sigma=\sqrt{V}$	$\sigma=\sqrt{V}$

Exemple 1

Calculons la variance et l'écart-type de la distribution statistique définie par la suite des valeurs observées suivante :

1 2 8 8 1 6 6 7 6.

• *En utilisant les valeurs observées.*

Moyenne arithmétique :

$$\overline{X}=\frac{1+2+8+8+1+6+6+7+6}{9}=5.$$

Variance :

$$V=\frac{(1-5)^2+(2-5)^2+(8-5)^2+(8-5)^2+(1-5)^2+(6-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(6-5)^2}{9}$$

$$=\frac{66}{9}=7{,}33 \text{ (arrondi d'ordre 2).}$$

Écart-type : $\sigma=\sqrt{V}=2{,}71$ (arrondi d'ordre 2).

• *En utilisant les modalités.*

Les modalités sont : 1 d'effectif 2, 2 d'effectif 1, 6 d'effectif 3, 7 d'effectif 1, 8 d'effectif 2.

On a : $\overline{X}=\frac{2\times 1+2+3\times 6+7+2\times 8}{9}=5;$

$$V=\frac{2(1-5)^2+(2-5)^2+3(6-5)^2+(7-5)^2+2(8-5)^2}{9}$$

$=7{,}33$ (arrondi d'ordre 2);

$\sigma=2{,}71$ (arrondi d'ordre 2).

Scanned by CamScanner

Exemple 2

Les salaires horaires, en centaines de francs, de trente employés sont répartis comme suit :

salaires horaires	4	5	5,5	6	6,5	7	9
nombre d'employés	6	10	5	3	3	2	1

Calculons la moyenne arithmétique et l'écart-type de la distribution statistique correspondant à ce tableau.

Pour le calcul de cette moyenne et de cet écart-type, on peut organiser le travail de la façon suivante :

salaires horaires x_i	nombre d'employés n_i	$n_i x_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$n_i(x_i - \overline{X})^2$
4	6	24	−1,4	1,96	11,76
5	10	50	−0,4	0,16	1,60
5,5	5	27,5	0,1	0,01	0,05
6	3	18	0,6	0,36	1,08
6,5	3	19,5	1,1	1,21	3,63
7	2	14	1,6	2,56	5,12
9	1	9	3,6	12,96	12,96
	30	162			36,20

$N = 30$

$\overline{X} = \frac{162}{30} = 5,4$

$V = \frac{36,20}{30} \simeq 1,21$

$\sigma = \sqrt{V} \simeq 1,10$

Exemple 3

Suite à un examen de statistique, les notes X (sur 100) obtenues par les élèves ont été regroupées en sept classes et ont donné le tableau suivant :

résultats	nombres d'élèves
$25 \leqslant X < 35$	2
$35 \leqslant X < 45$	3
$45 \leqslant X < 55$	5
$55 \leqslant X < 65$	8
$65 \leqslant X < 75$	7
$75 \leqslant X < 85$	4
$85 \leqslant X \leq 95$	1
	30

Calculons la moyenne arithmétique et l'écart-type de cette distribution.

Scanned by CamScanner

Les classes [25; 35[, [35; 45[, ... sont respectivement notées C_1, C_2, ...
L'organisation du calcul est la même que celle de l'exemple précédent.
On prend comme modalité x_i le centre de la classe C_i.

intervalles de notes	notes	nombres d'élèves	$n_i x_i$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$	$n_i(x_i - \overline{X})^2$
C_i (classes)	x_i (centre des classes)	n_i (effectifs)				
[25; 35[	30	2	60	−30,33	919,9089	1 839,8178
[35; 45[	40	3	120	−20,33	413,3089	1 239,9267
[45; 55[	50	5	250	−10,33	106,7089	533,5445
[55; 65[	60	8	480	− 0,33	0,1089	0,8712
[65; 75[	70	7	490	9,67	93,5089	654,5623
[75; 85[	80	4	320	19,67	386,9089	1 547,6356
[85; 95]	90	1	90	29,67	880,3089	880,3085
		30	1810			6 696,6666
$N = 30$				$V = \frac{6\,696,6666}{30} \simeq 223,22$		
$\overline{X} = \frac{1810}{30} \simeq 60,33$				$\sigma = \sqrt{V} \simeq 14,94$		

4) Formule pratique pour le calcul de la variance

Soit une distribution statistique de moyenne $\overline{X}$, admettant

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)\}$$

pour série statistique.

Soit N l'effectif total, c'est-à-dire : $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

On a successivement :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} [n_i x_i^2 - 2n_i x_i \overline{X} + n_i \overline{X}^2]$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\overline{X} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \overline{X}^2 \sum_{i=1}^{k} n_i \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - 2\overline{X}(N\overline{X}) + N\overline{X}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - N\overline{X}^2 \right].$$

Scanned by CamScanner

On obtient finalement :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2} - \overline{X}^2.$$

Exemple

Revenons à l'exemple 2, page 296, et calculons la variance de cette distribution statistique en appliquant la formule ci-dessus.

salaires horaires	nombre d'employés	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
x_i	n_i			
4	6	24	16	96
5	10	50	25	250
5,5	5	27,5	30,25	151,25
6	3	18	36	108
6,5	3	19,5	42,25	126,75
7	2	14	49	98
9	1	9	81	81
	30	162		911

$N = 30$

$\overline{X} = \frac{162}{30} = 5{,}4$

$V = \frac{911}{30} - (5{,}4)^2$

$\simeq 1{,}21$

$\sigma \simeq 1{,}10$

Exercice Calculer la variance et l'écart-type de la distribution statistique de l'exemple 3, page 296, en utilisant la formule

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2} - \overline{X}^2.$$

5) Changement de variable

Soit une distribution statistique admettant

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)\}$$

pour série statistique.

Les modalités $x_1, \ldots, x_k$ étant notées au moyen de la lettre x, le caractère correspondant sera noté X.

Cela explique la notation $\overline{X}$ utilisée pour la moyenne arithmétique.
Par abus de langage, le caractère X est souvent appelé *variable statistique*.

Scanned by CamScanner

Dans certains cas, étant donné des nombres réels a et b, il est utile d'effectuer le « changement de variable »

$$U = aX + b.$$

Cela signifie que l'on considère la nouvelle variable statistique U telle que $U = \varphi \circ X$, l'application affine φ étant définie par $\varphi(x) = ax + b$.

Les modalités de la distribution statistique associée à U sont donc les

$$u_i = ax_i + b \quad (i \in \{1, 2, \ldots, k\}).$$

Plus précisément, la série statistique correspondante est

$$\{(u_1, n_1), (u_2, n_2), \ldots, (u_k, n_k)\}.$$

Les distributions associées à X et U ont donc le même effectif total N :

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

D'après un théorème vu en Seconde, la moyenne arithmétique $\overline{U}$ de la distribution statistique associée à U est

$$\overline{U} = \varphi(\overline{X}) = a\overline{X} + b.$$

On désire déterminer le lien existant entre les variances V_X et V_U des distributions associées respectivement à X et à U.

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} u_i - \overline{U} &= (ax_i + b) - (a\overline{X} + b) \\ &= a(x_i - \overline{X}) \quad (i \in \{1, 2, \ldots, k\}). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V_U &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (u_i - \overline{U})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i a^2 (x_i - \overline{X})^2 \\ &= a^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{X})^2 \\ &= a^2 V_X. \end{aligned}$$

Conclusion. Les variables statistiques X et U étant liées par l'égalité

$$U = aX + b,$$

on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{U} &= a\overline{X} + b, \\ V_U &= a^2 V_X. \end{aligned}}$$

Exemple

Soit une série statistique $\{(x_1, n_1), \ldots, (x_k, n_k)\}$.
On peut simplifier le calcul de la variance V en effectuant le changement de variable $U = X - A$, où A est une constante proche de la médiane.
D'après la formule du changement de variable, on a : $V_U = V$.

Scanned by CamScanner

D'où :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^{\,2} - \overline{U}^2,$$

avec

$$u_i = x_i - A, \qquad \overline{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i.$$

Revenons à l'exemple 2, page 296, et calculons la variance au moyen du changement de variable ci-dessus, en prenant pour A la médiane égale à 5.

x_i	$u_i = x_i - A$	n_i	$n_i u_i$	u_i^2	$n_i u_i^2$
4	−1	6	−6	1	6
5	0	10	0	0	0
5,5	0,5	5	2,5	0,25	1,25
6	1	3	3	1	3
6,5	1,5	3	4,5	2,25	6,75
7	2	2	4	4	8
9	4	1	4	16	16
		30	12		41

$N = 30$

$\overline{U} = \frac{12}{30} = 0{,}4$

$V = \frac{41}{30} - (0{,}4)^2$

$\simeq 1{,}21$

$\sigma \simeq 1{,}10$

Exercice

Considérons, comme à l'exemple 3, page 296, une variable statistique X dont les modalités sont regroupées en classes C_1, ..., C_k, d'effectifs respectifs n_1, ..., n_k.
Notons x_i le centre de la classe C_i.
On sait que le problème se traite comme si x_1, ..., x_k étaient les modalités, d'effectifs respectifs n_1, ..., n_k.
Supposons que toutes les classes C_i aient la même amplitude (longueur) C.
A étant une constante (proche de la médiane), on considère le changement de variable $U = \frac{X - A}{C}$.

a) Montrer que la variance V correspondant à X s'écrit

$$V = C^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \overline{U}^2 \right],$$

avec

$$u_i = \frac{x_i - A}{C}, \qquad \overline{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i.$$

b) Recalculer la variance de l'exemple 3, page 296, en prenant pour A la médiane égale à 60.

Scanned by CamScanner

6) Variable centrée réduite

Soit une distribution statistique, associée à la variable statistique X, et admettant

$$\{(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)\}$$

pour série statistique.
La moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type de cette distribution sont notés respectivement $\overline{X}$, V_X et σ_X.
Considérons le changement de variable

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma_X}$$

et posons $\quad z_i = \dfrac{x_i - \overline{X}}{\sigma_X} \quad (i \in \{1, 2, \ldots, k\}).$

La distribution statistique associée à la variable statistique Z admet

$$\{(z_1, n_1), (z_2, n_2), \ldots, (z_k, n_k)\}$$

pour série statistique.

Soit respectivement $\overline{Z}$, V_Z et σ_Z la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type de cette nouvelle distribution.
Les formules de changement de variable donnent :

$$\overline{Z} = \frac{\overline{X} - \overline{X}}{\sigma_X} = 0,$$

$$V_Z = \frac{1}{\sigma_X^2} V_X = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1,$$

$$\sigma_Z = 1.$$

On dit que Z est la *variable centrée réduite* associée à la variable statistique X. On parle aussi de *distribution statistique centrée réduite* et de *série statistique centrée réduite.*

Conclusion. La distribution statistique centrée réduite associée à une distribution statistique a une moyenne arithmétique égale à 0 et un écart-type égal à 1.

Exemple

Après deux tests de niveau en mathématique et en français, les moyennes arithmétiques et les écarts-type des distributions des notes sont donnés par le tableau suivant :

	moyennes arithmétiques	écarts-type
mathématiques	76	10
français	82	16

Un élève ayant présenté les deux tests a obtenu la note 84 en mathématique et 90 en français.
Dans quelle discipline est-il relativement plus doué?

Scanned by CamScanner

Soit X (resp. X') la variable statistique qui, à chaque élève, fait correspondre sa note de mathématique (resp. français).
Afin de « rendre comparables » la note de mathématique et celle de français d'un élève donné, on utilise les variables centrées réduites Z et Z' associées respectivement à X et X' :

$$Z = \frac{X - 76}{10}, \quad Z' = \frac{X' - 82}{16}.$$

Par rapport aux distributions centrées réduites correspondantes, les notes de l'élève considéré

84 en mathématique, 90 en français,

deviennent

$\frac{84-76}{10} = 0{,}8$ en mathématique, $\frac{90-82}{16} = 0{,}5$ en français.

On peut donc conclure que l'élève est relativement plus doué en mathématique qu'en français.

2 Distribution statistique normale

1) Différents types de courbes des fréquences

Activités préparatoires

1) Soit une distribution statistique dont les modalités sont regroupées en classes de même amplitude et dont l'histogramme est la figure 3.
Soit C, D, E, F, G les milieux des côtés supérieurs des rectangles. Considérons aussi, sur la droite (MS), les points A et B tels que AM et SB soient égaux à la moitié de l'amplitude commune des classes.
En joignant les points A, C, D, E, F, G, B on obtient le polygone $ACDEFGB$, appelé *polygone des fréquences* (ou *des effectifs*) de la distribution considérée.
Montrer que l'aire de ce polygone est égale à l'aire de l'histogramme.

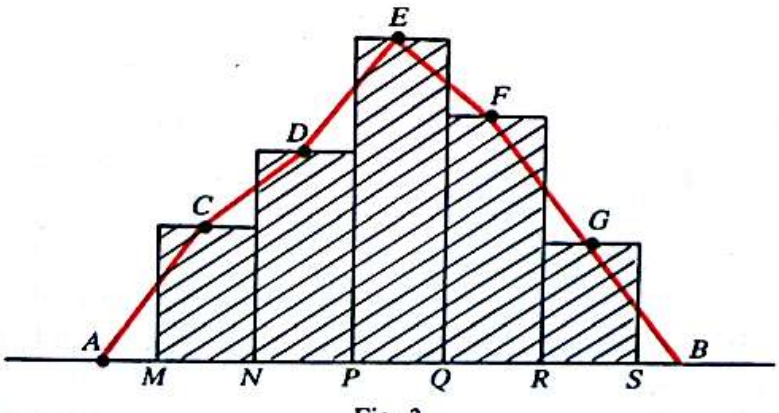


Fig. 3

Scanned by CamScanner

2) Les salaires mensuels (unité : 10000 francs) de 50 ouvriers d'une usine sont présentés dans le tableau suivant :

1 - 6 - 14 - 6 - 8 - 9 - 11 - 16 - 15 - 17
9 - 10 - 4 - 7 - 2 - 12 - 7 - 13 - 11 - 11
19 - 10 - 11 - 12 - 6 - 8 - 3 - 10 - 10 - 9
14 - 15 - 13 - 10 - 4 - 9 - 3 - 9 - 7 - 9
11 - 13 - 12 - 10 - 5 - 9 - 4 - 8 - 16 - 6

— Dresser un tableau des effectifs et des fréquences en distribuant les salaires en les cinq classes d'amplitude 4 :

$[0; 4[$, $[4; 8[$, $[8; 12[$, $[12; 16[$, $[16, 20]$.

— Dresser un tableau des effectifs et des fréquences en distribuant les salaires en les dix classes d'amplitude 2 :

$[0; 2[$, $[2; 4[$, $[4; 6[$, $[6; 8[$, $[8; 10[$, $[10; 12[$,
$[12; 14[$, $[14; 16[$, $[16; 18[$, $[18; 20]$.

— Construire dans un même repère l'histogramme et le polygone des fréquences relatifs à chacun des deux regroupements.

3) Les élèves des cinq classes de 3e d'un collège ont fait le même devoir de mathématique.
Les notes obtenues par les élèves sont présentées dans le tableau suivant :

$3^e{}_1$	6 - 5 - 7 - 2 - 12 - 3 - 16 - 8 - 14 - 2 - 13 - 9 - 15 - 1 - 17 - 7 4 - 13 - 17 - 16 - 19 - 4 - 10 - 14 - 5 - 18 - 2 - 14 - 1 - 17 - 3 11 - 16 - 2 - 18 - 1 - 13 - 8 - 3 - 18 - 16 - 16 - 18 - 5 - 11 - 15
$3^e{}_2$	1 - 6 - 10 - 1 - 7 - 8 - 2 - 10 - 9 - 5 - 15 - 5 - 11 - 3 - 13 - 2 2 - 1 - 4 - 9 - 5 - 8 - 3 - 7 - 3 - 6 - 2 - 1 - 2 - 6 - 1 - 8 5 - 9 - 5 - 3 - 1 - 5 - 5 - 3 - 7 - 7 - 8 - 8 - 9 - 12 - 17
$3^e{}_3$	10 - 11 - 10 - 6 - 12 - 7 - 8 - 13 - 9 - 9 - 14 - 8 - 15 - 7 - 3 - 15 6 - 13 - 4 - 14 - 6 - 12 - 8 - 12 - 9 - 14 - 7 - 15 - 7 - 15 - 18 - 16 17 - 14 - 14 - 20 - 15 - 14 - 15 - 9 - 15 - 17 - 5 - 18 - 14 - 17
$3^e{}_4$	14 - 1 - 10 - 16 - 3 - 12 - 14 - 18 - 5 - 20 - 19 - 17 - 9 - 15 - 16 8 - 13 - 17 - 7 - 17 - 14 - 6 - 18 - 13 - 11 - 17 - 16 - 16 - 13 - 20 18 - 17 - 15 - 20 - 16 - 18 - 19 - 18 - 17 - 15 - 17 - 16 - 11 - 16 17 - 17
$3^e{}_5$	6 - 10 - 12 - 11 - 12 - 14 - 11 - 6 - 12 - 14 - 12 - 11 - 12 - 9 - 10 12 - 15 - 11 - 15 - 13 - 9 - 15 - 12 - 19 - 8 - 12 - 10 - 12 - 11 - 10 12 - 7 - 11 - 10 - 12 - 11 - 10 - 10 - 15 - 10 - 13 - 12 - 10 - 12 - 15

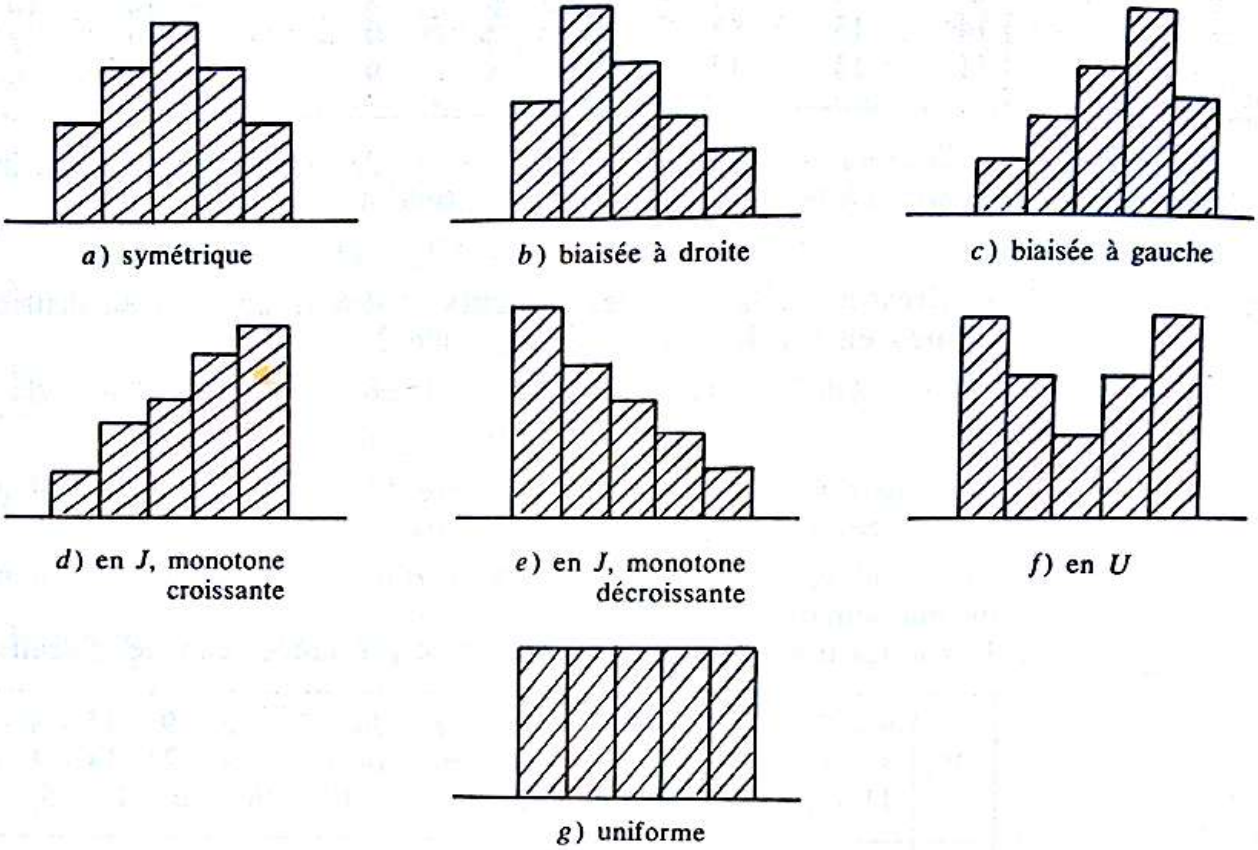
— Pour chaque classe de 3e, dresser un tableau des effectifs et des fréquences en distribuant les notes en les six classes :

$[0; 6[$, $[6; 10[$, $[10; 12[$, $[12; 14[$, $[14; 16[$, $[16; 20]$.

— Construire l'histogramme de chaque distribution relativement à ce groupement.

Scanned by CamScanner

L'histogramme et le polygone des fréquences sont utilisés pour représenter graphiquement la répartition des fréquences d'une distribution statistique.
Ils donnent une façon simple de visualiser cette répartition.
Les figures 4 ci-dessous présentent les histogrammes de quelques distributions statistiques souvent rencontrées :



a) symétrique

b) biaisée à droite

c) biaisée à gauche

d) en *J*, monotone croissante

e) en *J*, monotone décroissante

f) en *U*

g) uniforme

Fig. 4

En partant d'un histogramme d'une distribution statistique donnée, on obtient le polygone des fréquences correspondant (voir l'activité préparatoire 1).
Ce polygone se rapproche d'une « courbe régulière » lorsque le nombre de classes est suffisamment grand.
On peut le constater dans l'activité 2 en comparant les deux polygones des fréquences obtenus :

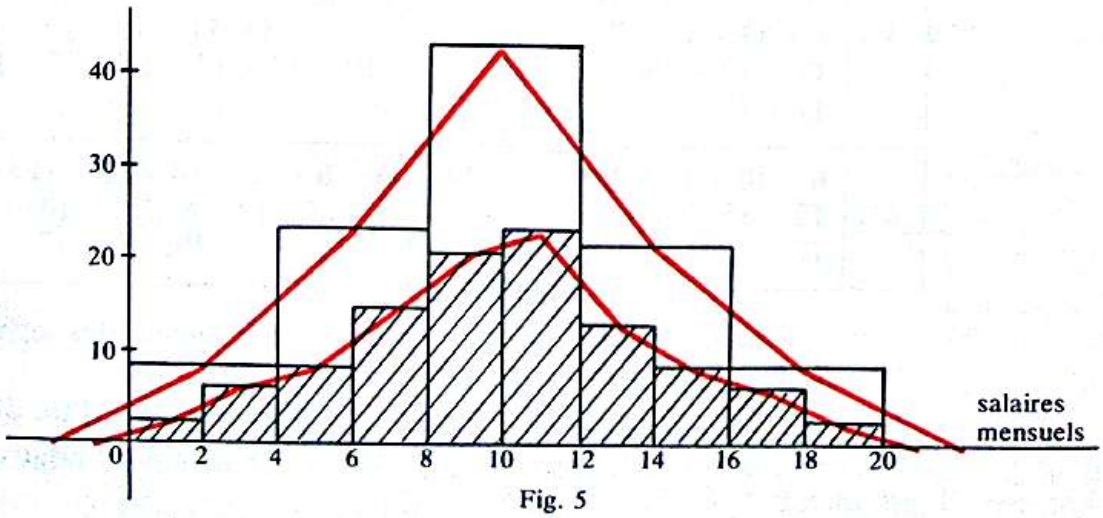


Fig. 5

Scanned by CamScanner

Si le nombre de classes devient de plus en plus grand, les différentes formes des histogrammes des figures 4 prennent respectivement l'allure des courbes suivantes :

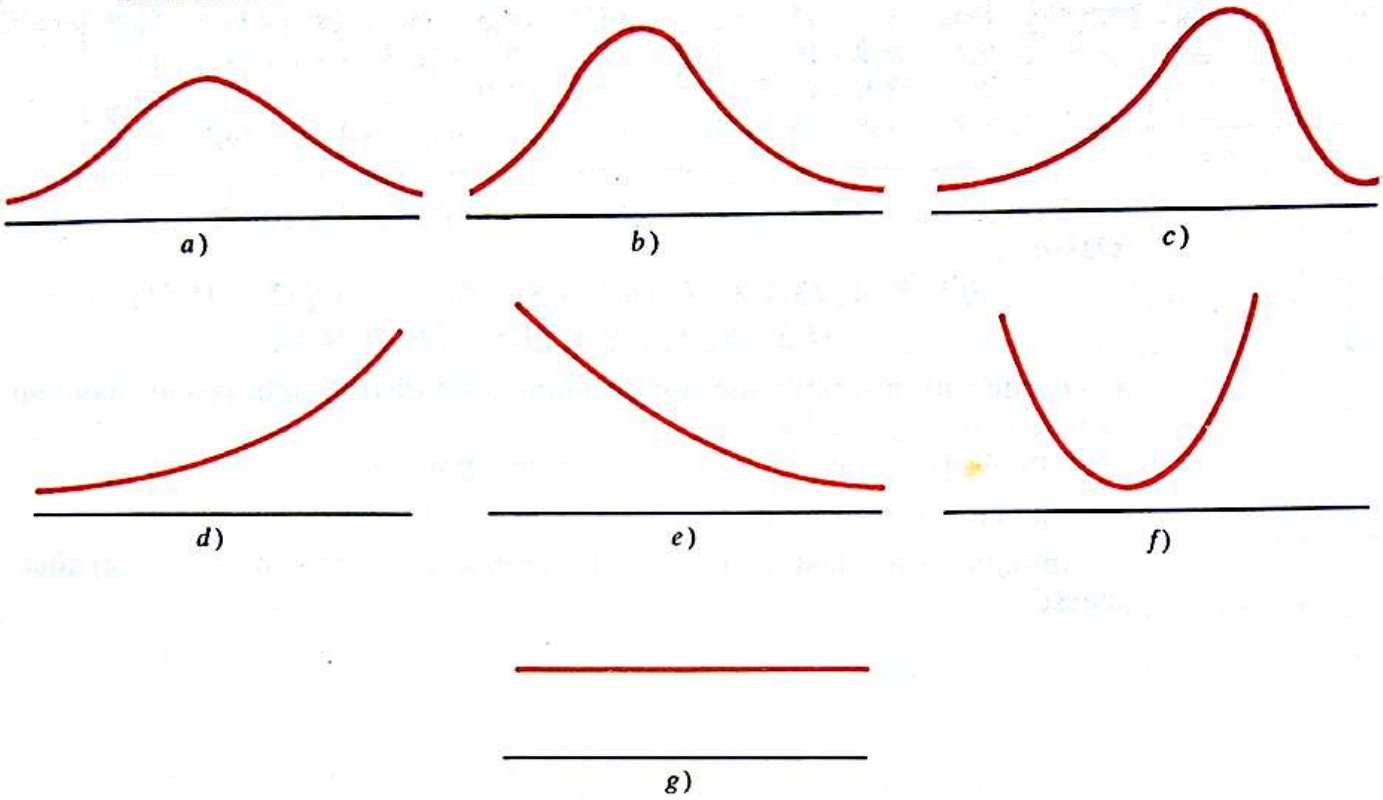


Fig. 6

Pour chaque distribution statistique représentée par l'une des « courbes régulières et continues » ci-dessus (courbe des fréquences) la variable statistique peut prendre pour valeurs tous les nombres réels.
Chaque distribution statistique représentée par une courbe des fréquences continue est une distribution *théorique* car elle exige que la population que l'on veut analyser soit un ensemble infini.
Il est très utile de définir et d'étudier un certain nombre de distributions théoriques.
Parmi les distributions théoriques les plus importantes, nous allons considérer la distribution dite *normale* (ou de *Laplace-Gauss*).
La courbe des fréquences d'une telle distribution est en forme de cloche, comme à la figure 6, *a*).

Remarque. Le mot « normal » utilisé ci-dessus est un terme mathématique auquel il ne faut pas donner la signification du langage courant.
La distribution normale n'est pas « plus normale » ou « moins anormale » qu'une autre distribution.

2) Distribution statistique normale

a) Activités préparatoires

On demande à 50 enfants de lancer chacun une bille vers un trou situé à 5 mètres de distance et on mesure la distance, en centimètres, entre le trou et la bille de chacun des enfants.

Scanned by CamScanner

Les distances obtenues figurent dans le tableau suivant :

11,6	-	1	-	8,8	-	12	-	10,5	-	15
12	-	18	-	14,3	-	13				
3,8	-	7	-	11	-	17	-	14,3	-	14,5
5	-	19	-	24	-	20,3				
6,8	-	9,9	-	10	-	13,6	-	16,8	-	16
10,3	-	9,1	-	8,5	-	14				
13	-	13,6	-	10,7	-	11,2	-	10,3	-	13,9
17,4	-	11	-	9	-	8,2				
11,8	-	13,5	-	15,9	-	16	-	11	-	12
15,2	-	14,8	-	16,5	-	12,8				

— Dresser un tableau des effectifs en distribuant les résultats en les huit classes :

[0,5; 3,5[, [3,5; 6,5[, [6,5; 9,5[, [9,5; 12,5[[12,5; 15,5[, [15,5; 18,5[, [18,5; 21,5[, [21,5; 24,5].

Construire un histogramme représentant cette distribution, relativement au regroupement considéré.
Que peut-on dire de la forme de cet histogramme?

— Calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type.

— Indiquer sur l'histogramme la fréquence (en pourcentage) de chaque classe.

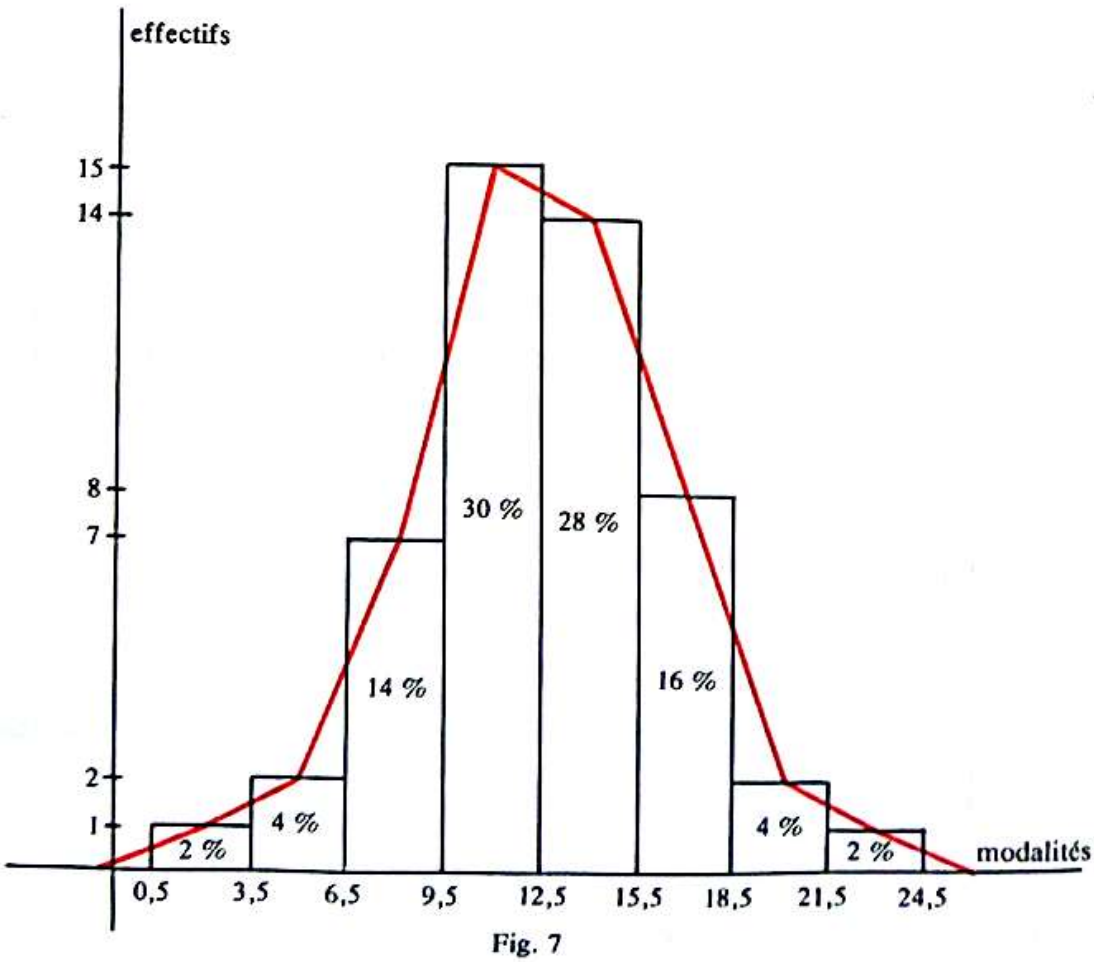


Fig. 7

On obtient un histogramme à peu près symétrique et le polygone des fréquences ressemble à une courbe en forme de cloche (figure 7).
La fréquence (en pourcentage) de chaque classe est indiquée dans chaque rectangle de l'histogramme.

Scanned by CamScanner

La moyenne arithmétique $\overline{X}$ est égale à 12,56.
L'écart-type vaut approximativement 4.
L'amplitude de chaque classe de modalités est donc à peu près égale à $0{,}75 \times \sigma$.
En prenant 12,5 comme moyenne arithmétique, on peut exprimer les bornes des classes en fonction de $\overline{X}$ et σ comme suit :

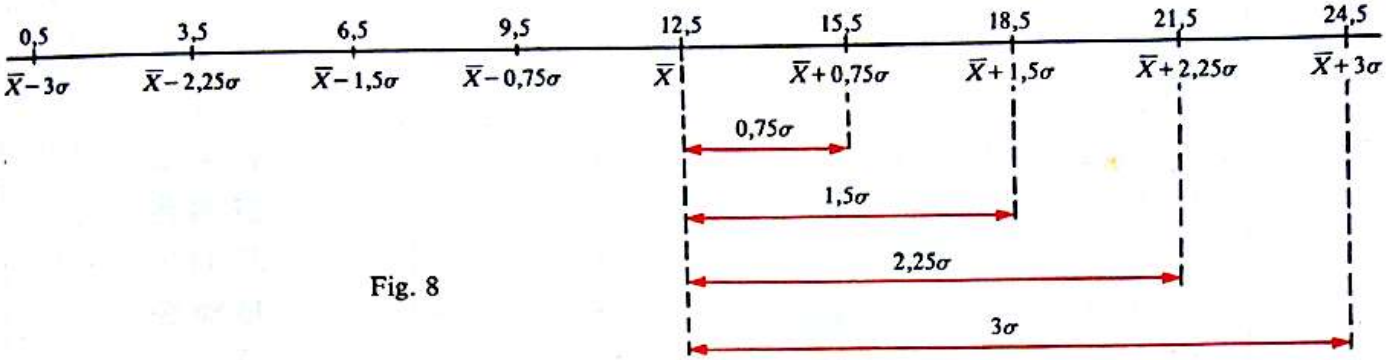


Fig. 8

Le polygone des fréquences ressemblant à une courbe en forme de cloche, nous allons comparer la distribution statistique étudiée à la distribution normale de même moyenne arithmétique 12,5 et de même écart-type 4.
Nous admettrons que la figure 10 est la courbe des fréquences de la distribution normale considérée.

Distribution étudiée

moyenne : 12,56
écart-type : 4

histogramme :

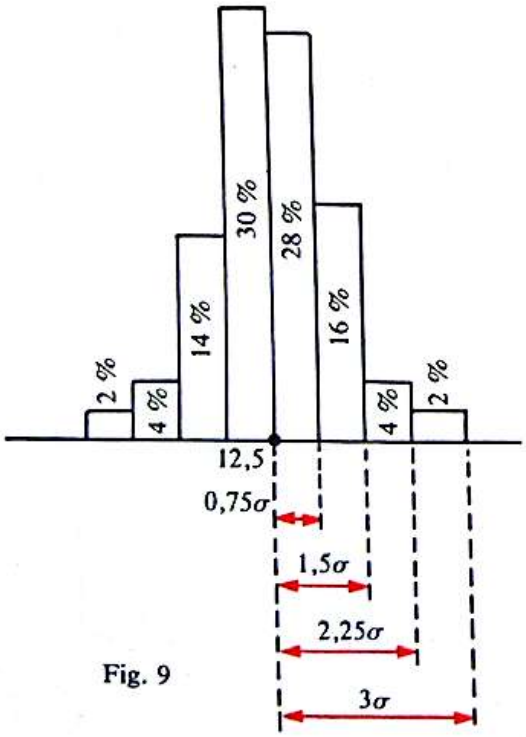


Fig. 9

Distribution normale

moyenne : 12,5
écart-type : 4

courbe des fréquences :

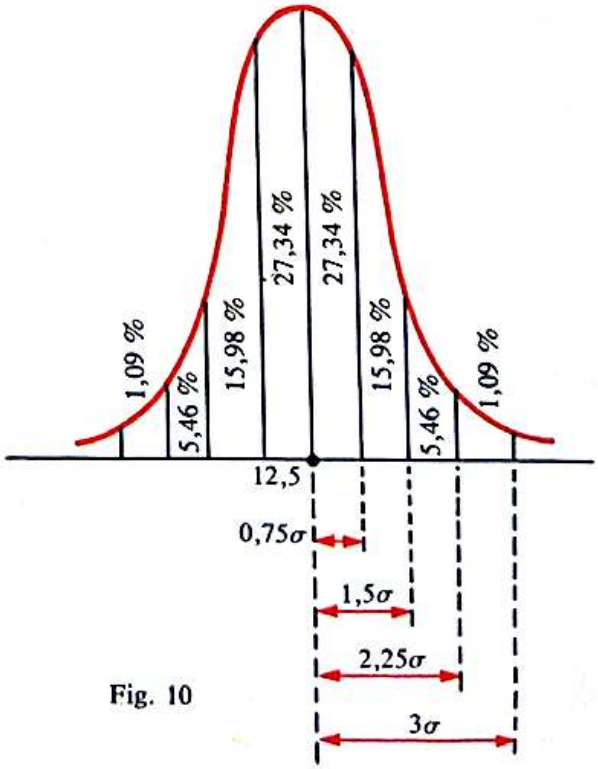


Fig. 10

Sur les figures ci-dessus, on remarque que chaque classe de la distribution étudiée a à peu près la même fréquence pour chacune des deux distributions.

Scanned by CamScanner

Plus précisément :

intervalle	fréquence	
	distribution étudiée	distribution normale
$[\overline{X}-3\sigma;\ \overline{X}-2{,}25\sigma[$	2 %	1,09 %
$[\overline{X}-2{,}25\sigma;\ \overline{X}-1{,}5\sigma[$	4 %	5,46 %
$[\overline{X}-1{,}5\sigma;\ \overline{X}-0{,}75\sigma[$	14 %	15,98 %
$[\overline{X}-0{,}75\sigma;\ \overline{X}[$	30 %	27,34 %
$[\overline{X};\ \overline{X}+0{,}75\sigma[$	28 %	27,34 %
$[\overline{X}+0{,}75\sigma;\ \overline{X}+1{,}5\sigma[$	16 %	15,98 %
$[\overline{X}+1{,}5\sigma;\ \overline{X}+2{,}25\sigma[$	4 %	5,46 %
$[\overline{X}+2{,}25\sigma;\ \overline{X}+3\sigma[$	2 %	1,09 %

Conclusion. La distribution statistique normale de moyenne 12,5 et d'écart-type 4 peut être considérée comme une bonne approximation de la distribution étudiée.

b) Courbe des fréquences d'une distribution normale

Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif.
La distribution statistique normale de moyenne μ et d'écart-type σ est, par définition, associée à la courbe « en cloche » de la figure 11.

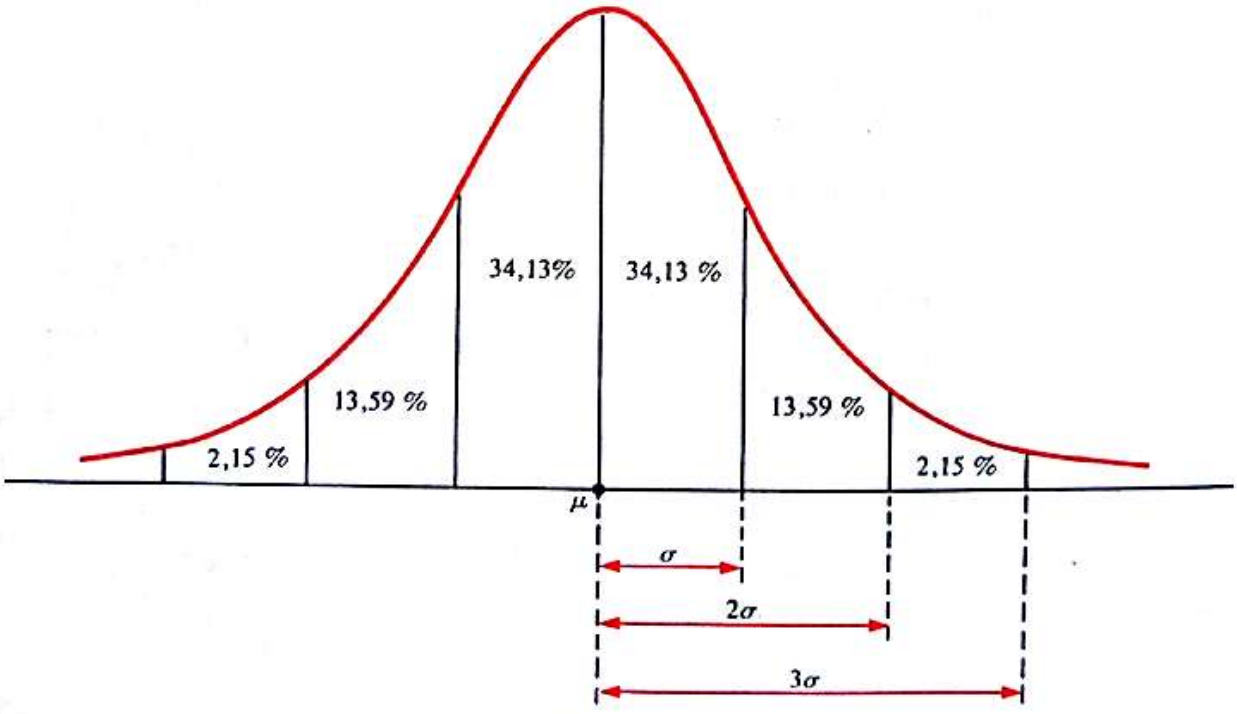


Fig. 11

Cette courbe, dite courbe des fréquences, est la représentation graphique, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction numérique bien précise, mais nous n'avons pas encore le moyen de définir cette fonction.

Scanned by CamScanner

Les pourcentages indiqués sur la figure 11 signifient que :

— la fréquence de chacun des intervalles $[\mu-\sigma, \mu[$ et $[\mu, \mu+\sigma[$ est égale à 34,13 %;

— la fréquence de chacun des intervalles $[\mu-2\sigma, \mu-\sigma[$ et $[\mu+\sigma, \mu+2\sigma[$ est égale à 13,59 %;

— etc.

Plus généralement, étant donné un intervalle quelconque $[x_1, x_2[$, avec $x_1 < x_2$, la fréquence de cet intervalle est le rapport, en pourcentage, entre l'aire hachurée à la figure 12 et l'aire totale comprise entre la courbe des fréquences et la droite des abscisses (aire hachurée à la figure 13).

Fig. 12

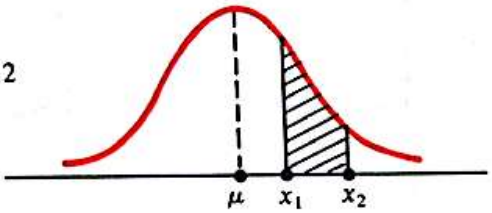
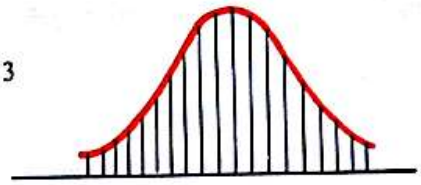


Fig. 13



Or, la fonction définissant la courbe des fréquences est choisie pour que l'aire totale soit égale à 1.
Par conséquent, si l'aire hachurée à la figure 12 est, par exemple, égale à 0,305 6, la fréquence de l'intervalle $[x_1, x_2[$ est égale à 30,56 %.

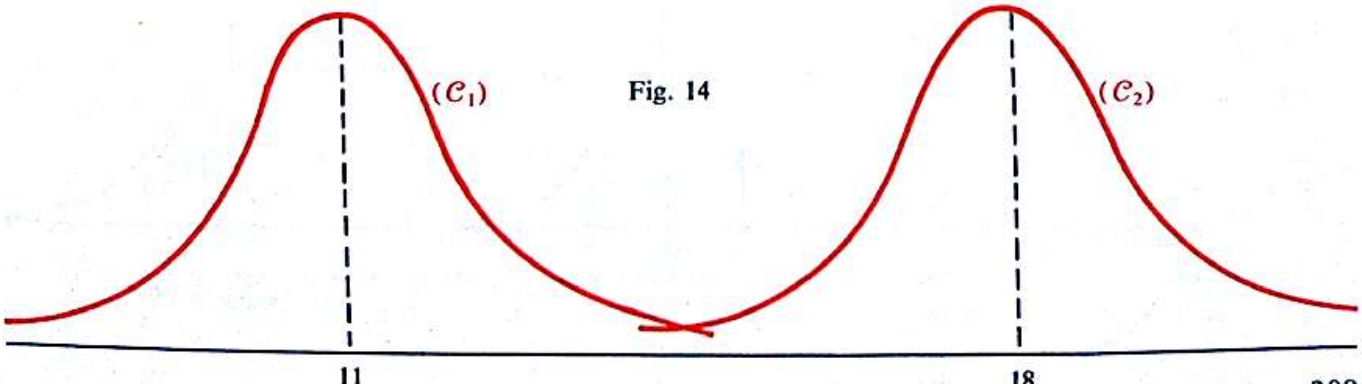
Des tables permettent de calculer les aires en question, du moins dans le cas de la distribution normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart-type 1).
Nous reviendrons sur ce calcul des aires plus loin.

Signalons quelques propriétés de la courbe des fréquences d'une distribution normale.
Ces propriétés « se voient » sur la figure 11.

- Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction continue est positive.
- Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
- Elle possède un maximum au point d'abscisse μ.
- Elle admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale.

Précisons aussi que l'allure de la courbe, en forme de cloche, dépend de l'écart-type σ.
Par exemple, les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de la figure 14 sont les courbes des fréquences de deux distributions normales ayant le même écart-type σ, mais des moyennes respectivement égales à 11 et 18.

Fig. 14

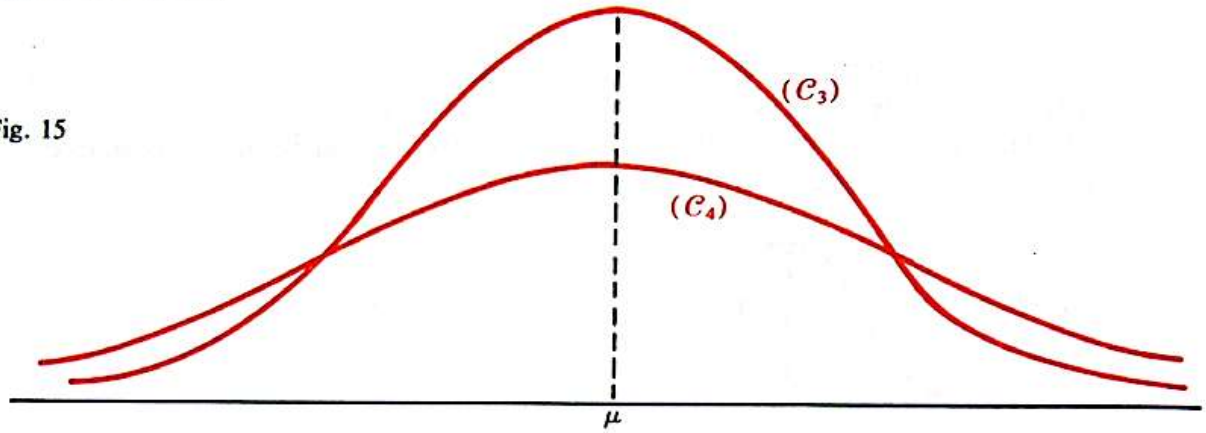


Scanned by CamScanner

Les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont superposables; plus précisément, il existe une translation transformant $(\mathcal{C}_1)$ en $(\mathcal{C}_2)$.

Les courbes $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ de la figure 15 sont les courbes des fréquences de deux distributions normales de même moyenne μ, mais d'écarts-type respectivement égaux à 5 et 10.

Fig. 15



Les courbes $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ ne sont pas superposables.

c) Utilisation de la table de la distribution normale centrée réduite

• Considérons la courbe des fréquences de la distribution normale centrée réduite, c'est-à-dire de moyenne 0 et d'écart-type 1 (figure 16).

Pour chaque nombre réel α, nous notons $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe des fréquences, la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation $x = \alpha$ (aire hachurée, figure 16).
La courbe des fréquences étant symétrique par rapport à la droite (OJ), on a (figure 17) :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad A(\alpha) = A(-\alpha).$$

La table, page 311, nous donne $A(\alpha)$ pour certaines valeurs de α comprises entre 0 et 3,99.

Par exemple : $A(2{,}79) = 0{,}497\,4$.

On a donc aussi : $A(-2{,}79) = 0{,}497\,4$.

D'autre part, on a déjà signalé que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe des fréquences et la droite (OI) est égale à 1.
L'aire de la partie du plan comprise entre la courbe des fréquences et les demi-droites $[OI)$ et $[OJ)$ est donc égale à 0,5 (figure 18).

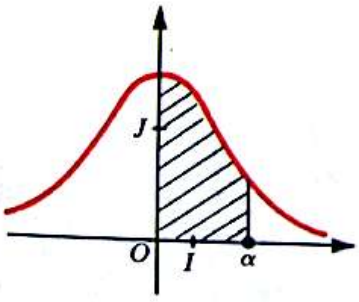


Fig. 16

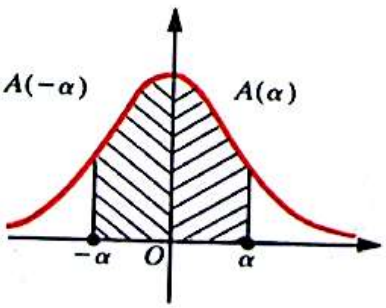
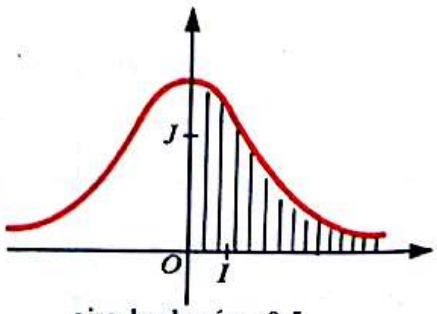


Fig. 17



aire hachurée = 0,5

Fig. 18

Scanned by CamScanner

AIRES
limitées par la
COURBE NORMALE
CENTRÉE RÉDUITE

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0800	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Scanned by CamScanner

Cependant, la table nous donne :

$$A(3,9)=0,5 \text{ (figure 19).}$$

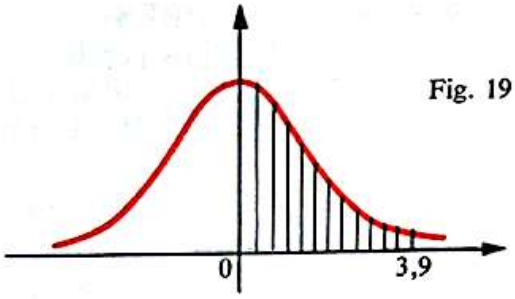


Fig. 19

aire hachurée = 0,5

L'écriture $A(3,9)=0,5$ signifie seulement que 0,5 est une valeur approchée de $A(3,9)$ qui, en réalité, est strictement inférieur à 0,5.
Autrement dit, la différence entre les aires hachurées aux figures 18 et 19 étant suffisamment petite, on peut la négliger et la considérer comme étant égale à 0.
On peut donc écrire que

$$\forall \alpha \in [3,9;\ +\infty[\quad A(\alpha)=0,5.$$

Exemple

Calculons la fréquence des intervalles

$$[0,71;\ 1,57[, \quad [-0,51;\ 2,32[, \quad [-4,7;\ -1,44[$$

pour la distribution normale centrée réduite.

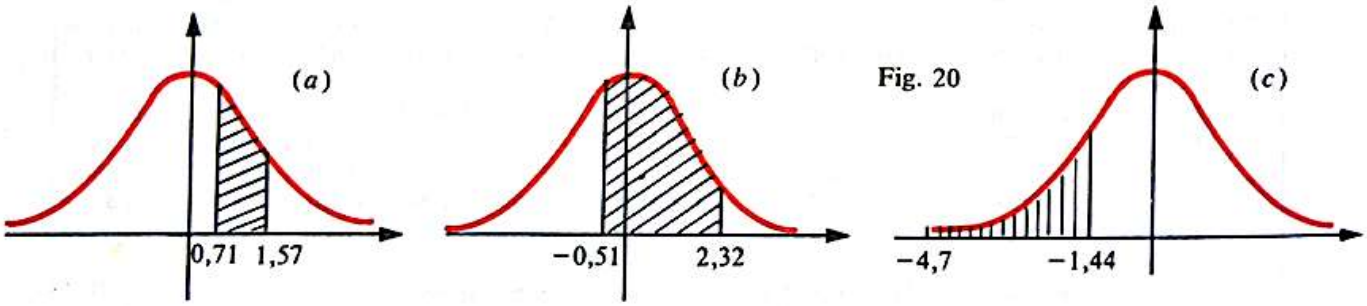


Fig. 20

La fréquence de l'intervalle $[0,71;\ 1,57[$ correspond à l'aire hachurée à la figure 20(*a*).
Cette aire est égale à

$$\begin{aligned} A(1,57)-A(0,71) &= 0,441\,8-0,261\,2 \\ &= 0,180\,6. \end{aligned}$$

La fréquence de $[0,71;\ 1,57[$ est donc égale à 18,06 %.

De même, la fréquence de l'intervalle $[-0,51;\ 2,32[$ correspond à l'aire hachurée à la figure 20(*b*).
Cette aire est égale à

$$\begin{aligned} A(-0,51)+A(2,32) &= A(0,51)+A(2,32) \\ &= 0,195\,0+0,489\,8 \\ &= 0,684\,8. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

La fréquence de $[-0{,}51; 2{,}32[$ est donc égale à 68,48 %.

Finalement, la fréquence de l'intervalle $[-4{,}7; -1{,}44[$ correspond à l'aire hachurée à la figure 20(c).
Cette aire est égale à

$$\begin{aligned} A(-4{,}7) - A(-1{,}44) &= A(4{,}7) - A(1{,}44) \\ &= 0{,}5 - 0{,}425\,1 \\ &= 0{,}074\,9. \end{aligned}$$

La fréquence de $[-4{,}7; -1{,}44[$ est donc égale à 7,49 %.

• Lorsque la distribution normale considérée n'est pas centrée réduite, on s'y ramène par un changement de variable.
Plus précisément, notons X la variable statistique de la distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ, et notons Z celle de la distribution normale centrée réduite.
Nous admettrons que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

comme dans le cas des variables statistiques définies sur un ensemble fini.

Étant donné des nombres réels x, x_1, x_2, et posant

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

on voit que l'on a

$$x_1 \leqslant x < x_2$$

si et seulement si

$$z_1 \leqslant z < z_2.$$

Cela signifie que l'intervalle $[x_1, x_2[$ a la même fréquence pour la distribution normale de moyenne μ et d'écart-type σ que l'intervalle $[z_1, z_2[$ pour la distribution normale centrée réduite.

Exemple

> La distribution des tailles (en centimètres) des élèves d'un lycée est assimilée à une distribution statistique normale de moyenne arithmétique 140 et d'écart-type 15.
> Quel est le pourcentage des élèves ayant une taille comprise entre 130 et 165 cm?

Le pourcentage des élèves ayant une taille comprise entre 130 et 165 cm est la fréquence de l'intervalle [130; 165[pour la distribution normale de moyenne 140 et d'écart-type 15.
En passant à la distribution normale centrée réduite, les nombres

$$x_1 = 130 \quad \text{et} \quad x_2 = 165$$

deviennent

$$z_1 = \frac{130 - 140}{15} \simeq -0{,}67 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{165 - 140}{15} = 1.$$

Le pourcentage cherché est donc aussi la fréquence de l'intervalle $[-0{,}67; 1[$ pour la distribution normale centrée réduite.

Scanned by CamScanner

Cette fréquence correspond à l'aire :

$$\begin{aligned} A(-0{,}67)+A(1) &= A(0{,}67)+A(1) \\ &= 0{,}248\,6+0{,}341\,3 \\ &= 0{,}589\,9. \end{aligned}$$

Le pourcentage des élèves ayant une taille comprise entre 130 et 165 cm est donc (approximativement) égal à 58,99 %.

Exercice La distribution des diamètres (en centimètres) des tuyaux fabriqués par une usine est assimilée à une distribution statistique normale de moyenne 7,5 et d'écart-type 0,5.
Quel est le pourcentage des tuyaux ayant un diamètre :
— compris entre 7 et 8 cm?
— mesurant au moins 8,5 cm?
— mesurant au plus 6,3 cm?

Exercices

1 (1). Le tableau suivant donne, en millions de francs, le bénéfice d'un magasin pour chaque mois de l'année 1984 (sauf le mois d'Août, le magasin étant fermé) :

mois	J	F	M	A	M
bénéfices	2	1	2	2	2

mois	J	J	S	O	N	D
bénéfices	3	1	2	3	3	20

1) *a*) Quels sont la population et le caractère étudiés?

b) Quel est l'ensemble des modalités que l'on peut envisager?

c) Quelles sont la distribution statistique et la série statistique associées au caractère étudié?

2) *a*) Trouver la moyenne $\overline{X}$, la médiane M_e et le mode M_0 de la distribution statistique.

b) Laquelle (ou lesquelles) des trois caractéristiques $\overline{X}$, M_e et M_0 est (sont) la (les) plus « représentative(s) »?

c) Quelle est l'étendue de la distribution statistique? Pensez-vous que les valeurs observées soient « très dispersées »? Pourquoi?

3) On laisse de côté le bénéfice exceptionnel du mois de Décembre.

a) Trouver la moyenne, la médiane et le mode de la nouvelle distribution statistique.

b) Pensez-vous que ces trois caractéristiques soient toutes « représentatives » de la nouvelle distribution statistique?

c) Quelle est l'étendue de la nouvelle distribution statistique? Quelle conclusion sur la dispersion des valeurs observées pouvez-vous donner?

2 (1). On donne deux distributions statistiques f et g dont les suites des valeurs observées sont respectivement

$$(x_1, x_2 \ldots, x_N) \quad \text{et} \quad (y_1, y_2, \ldots, y_M)$$

et dont les moyennes arithmétiques sont respectivement $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
On considère la distribution statistique h dont la suite des valeurs observées est :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N, \quad y_1, y_2, \ldots, y_M).$$

1) Montrer que la moyenne arithmétique de la distribution statistique h est égale à $\dfrac{N\overline{X}+M\overline{Y}}{N+M}$.

2) *Application*
Dans une classe, il y a 25 filles et 35 garçons.

Scanned by CamScanner

L'âge moyen des filles est 12 ans et celui des garçons est 13 ans.
Calculer l'âge moyen des élèves de la classe.

3 (1). On considère les 5 nombres :

$u_1 = 2,\ u_2 = 5,\ u_3 = 8,\ u_4 = 11,\ u_5 = 14.$

On pose :

$$\bar{u} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} u_i, \qquad \beta = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} |u_i - \bar{u}|$$

$$\alpha = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (u_i - \bar{u}), \qquad \gamma = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} (u_i - \bar{u})^2.$$

Calculer $\bar{u}$, α, β et γ.

4 (1). On considère la suite des valeurs observées :

2, 5, 5, 1, 1, 4, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 7, 8.

Calculer :

a) le (ou les) mode(s);

b) la médiane;

c) la moyenne arithmétique;

d) l'étendue;

e) la variance;

f) l'écart-type.

5 (1). Mêmes questions pour la série statistique suivante :

modalités (x_i)	2	3	5	6	7	9	10
effectifs (n_i)	5	2	10	15	8	3	7

6 (1). On considère la distribution statistique f définie par le tableau suivant :

modalités (x_i)	7	8	9	12	15	18	20
effectifs (n_i)	2	2	3	1	1	2	2

Tableau (1)

1) Calculer la moyenne arithmétique $\bar{X}$ et l'écart-type σ_X de la distribution statistique f.

2) En multipliant chacune des modalités du tableau (1) par un nombre strictement positif m, on obtient la distribution statistique g définie par le tableau suivant :

modalités (y_i)	$7m$	$8m$	$9m$	$12m$
effectifs (n_i)	2	2	3	1

modalités (y_i)	$15m$	$18m$	$20m$
effectifs (n_i)	1	2	2

Tableau (2)

Exprimer en fonction de m la moyenne arithmétique $\bar{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la distribution statistique g.

3) En ajoutant un nombre réel p à chacune des modalités du tableau (2), on obtient la distribution statistique h définie par le tableau suivant :

modalités (z_i)	$7m + p$	$8m + p$	$9m + p$	$12m + p$	$15m + p$	$18m + p$	$20m + p$
effectifs (n_i)	2	2	3	1	1	2	2

Tableau (3)

Exprimer en fonction de m et p la moyenne arithmétique $\bar{Z}$ et l'écart-type σ_Z de la distribution statistique h.

Scanned by CamScanner

7 (1). On considère la distribution des prix des articles d'un magasin. La moyenne arithmétique et l'écart-type de cette distribution sont respectivement égaux à 38 500 F et 5 250 F. Calculer la nouvelle moyenne arithmétique et le nouvel écart-type de la distribution des prix dans chacun des cas suivants :

a) chaque prix est diminué de 875 F;

b) chaque prix est diminué de 20 %.

8 (1). On considère deux distributions statistiques f_1 et f_2 ayant même *moyenne arithmétique* $\overline{X}$. Les suites des valeurs observées sont respectivement :

$$(x_1, x_2, ..., x_{N_1}) \quad \text{et} \quad (y_1, y_2, ..., y_{N_2}).$$

On désigne par V_1 et V_2 les variances respectives de f_1 et f_2.
On considère la distribution statistique f dont la suite des valeurs observées est :

$$(x_1, x_2, ..., x_{N_1}, \ y_1, y_2, ..., y_{N_2}).$$

1) Montrer que la variance de f est égale à

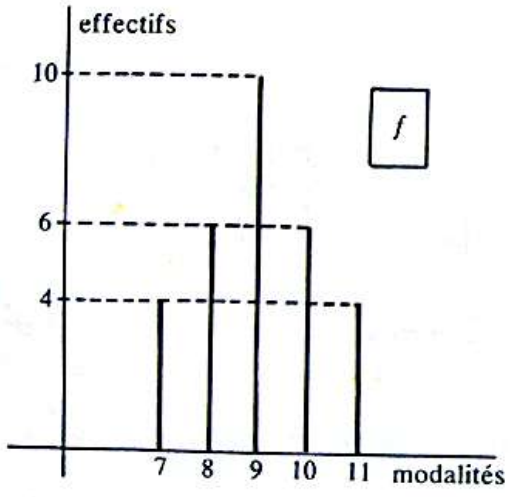
$$\frac{N_1V_1 + N_2V_2}{N_1 + N_2}.$$

2) *Application*
Dans un centre d'examens, la moyenne et l'écart-type des notes de mathématique selon les deux correcteurs *A* et *B* sont présentés dans le tableau suivant :

	Nombre de copies corrigées	Moyenne arithmétique	Ecart-type
Correcteur *A*	200	9,80	4,5
Correcteur *B*	180	9,80	6

Calculer l'écart-type des notes de mathématique des 380 copies corrigées.

9 (1). Soit deux distributions statistiques f et g dont les diagrammes en bâton sont donnés par les figures suivantes :



1) Calculer les moyennes arithmétiques $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectives de f et g.

2) Calculer les écarts-types σ_X et σ_Y respectifs de f et g.
Laquelle des deux distributions statistiques est la plus dispersée?

10 (1). *Coefficient de variation*
Soit X et σ_X la moyenne arithmétique et l'écart-type d'une distribution statistique f dont les valeurs observées sont positives.
On appelle *coefficient de variation* (ou *coefficient de dispersion*) de f le quotient $\frac{\sigma_X}{\overline{X}}$.

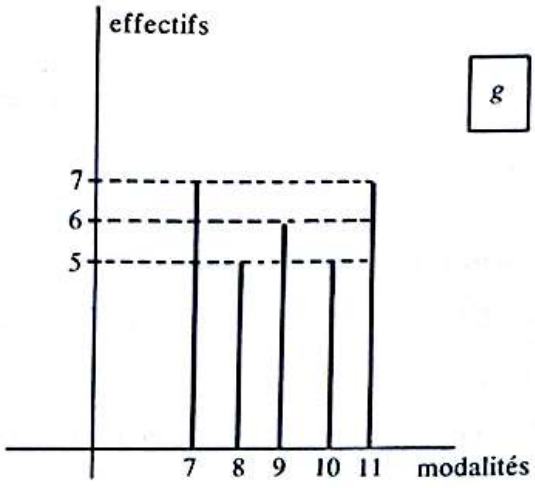
1) Calculer le coefficient de variation (l'écrire en pourcentage) de chacune des distributions statistiques définies par les tableaux suivants :

modalités (x_i)	8	10	14	15	20
effectifs (n_i)	2	5	1	2	2

Tableau (1)

modalités (y_i)	6	7	8	9
effectifs (m_i)	4	5	2	1

2) Plus le coefficient de variation est petit plus la distribution est homogène.
Si le coefficient de variation d'une distribution statistique est inférieur à 15 % on dit que cette distribution a une *« bonne homogénéité »*.



Scanned by CamScanner

Laquelle des deux distributions statistiques définies par les tableaux (1) et (2) a une bonne homogénéité?

3) *Application*

La moyenne et l'écart-type de la distribution de poids et la moyenne et l'écart-type de la distribution de tailles des élèves d'une classe sont présentés dans le tableau suivant :

	Poids (en kg)	Tailles (en cm)
Moyenne arithmétique	60	150
Écart-type	5	25

Les deux distributions ont-elles même homogénéité? Pourquoi?

11 (1). La distribution du nombre de téléviseurs vendus chaque jour, durant une semaine, par le magasin A (resp. B) a une moyenne arithmétique égale à 60 (resp. 80) et un écart-type égal à 5 (resp. 10). Le mardi de cette semaine, le magasin A (resp. B) vend 75 téléviseurs (resp. 100 téléviseurs).
Lequel des deux magasins a-t-il réalisé la meilleure vente le mardi, comparativement à la distribution de ses ventes de la semaine?

12 (1). Un élève a présenté les trois tests de niveau en Anglais, en Espagnol et en Italien. Les moyennes arithmétiques et les écarts-types des distributions des notes pour les tests et les notes obtenues par cet élève sont présentés dans le tableau suivant :

Langues	Notes obtenues par l'élève	Moyennes arithmétiques et écarts-types des distributions des notes	
		Moyennes arithmétiques	Écarts-types
Anglais	80	75	5
Espagnol	90	75	10
Italien	80	70	5

Dans quelle langue l'élève est-il relativement plus doué?

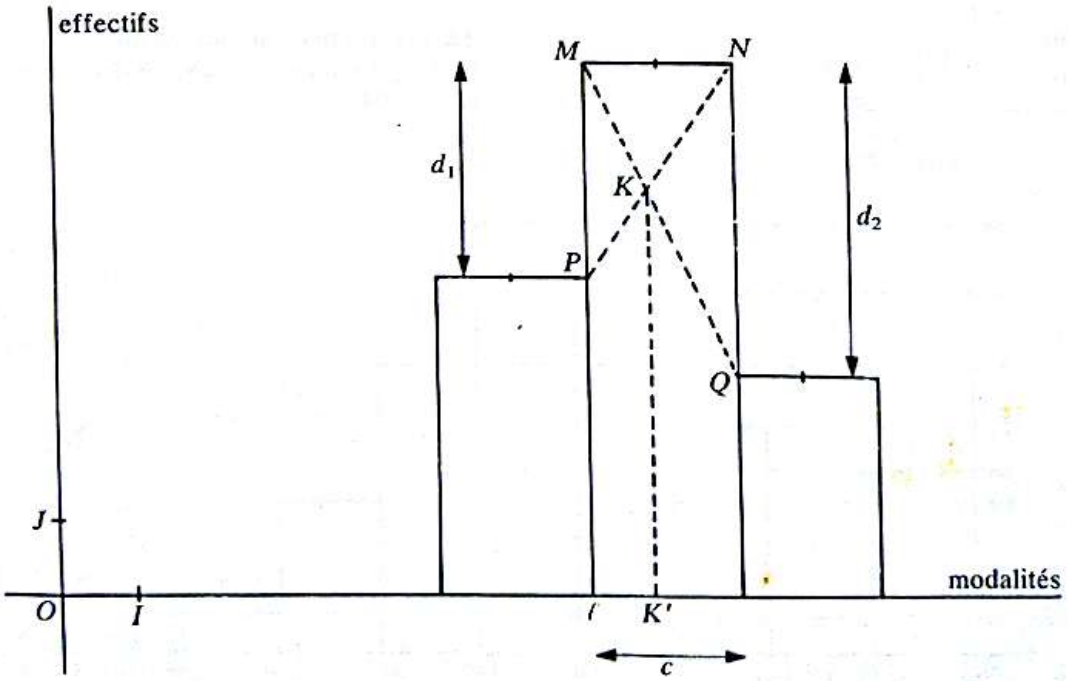
13 (1). Le tableau suivant donne les durées de vie en heures, regroupées en 8 classes, d'un ensemble de piles d'une même marque pour lampes de poches :

durée en heures X	nombres de piles
$50 \leqslant X < 60$	10
$60 \leqslant X < 70$	15
$70 \leqslant X < 80$	35
$80 \leqslant X < 90$	40
$90 \leqslant X < 100$	30
$100 \leqslant X < 110$	20
$110 \leqslant X < 120$	15
$120 \leqslant X \leqslant 130$	5

Donner :

a) la médiane
b) la moyenne arithmétique
c) la variance
d) l'écart-type.

14 (1). *Détermination d'une valeur approchée du mode dans la classe modale.*



Scanned by CamScanner

La figure ci-dessus représente trois rectangles de l'histogramme d'une distribution statistique f dont les classes ont même amplitude; le rectangle central correspond à la *classe modale*.
Soit K le point d'intersection de (NP) et (MQ) (voir la figure)
K' le projeté orthogonal du point K sur l'axe des modalités.

1) Montrer que

$$OK' = \ell + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \times c$$

où

- ℓ est la *borne inférieure* de la classe modale;
- d_1 est la différence, en valeur absolue, entre l'effectif de la classe modale et celui de la classe précédente;
- d_2 est la différence, en valeur absolue, entre l'effectif de la classe modale et celui de la classe suivante;
- c est l'amplitude commune des classes;

Indication
Utiliser les deux triangles semblables KMP et KQN.

2) En prenant OK' pour valeur approchée du mode de la distribution f, on peut écrire :

$$M_0 \simeq \ell + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \times c \qquad (*)$$

M_0 désignant le mode de f.

Application
Suite à un devoir de Physique, les notes obtenues par 50 élèves sont représentées dans le tableau suivant :

Notes	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	1	2	2	2	3	6	5

Notes	9	10	11	12	13	14	15
Nombre d'élèves	10	4	5	3	2	3	2

α) Trouver le mode M_0 de cette distribution de notes.

β) Les notes sont ensuite regroupées en quatre classes.

a) Compléter le tableau suivant :

Classes de notes	[2; 6[	[6; 10[	[10; 14[	[14; 18[
Nombre d'élèves				

b) Tracer l'histogramme.

c) Quelle est la classe modale?

d) Donner une valeur approchée de M_0 :

— à l'aide de l'histogramme;

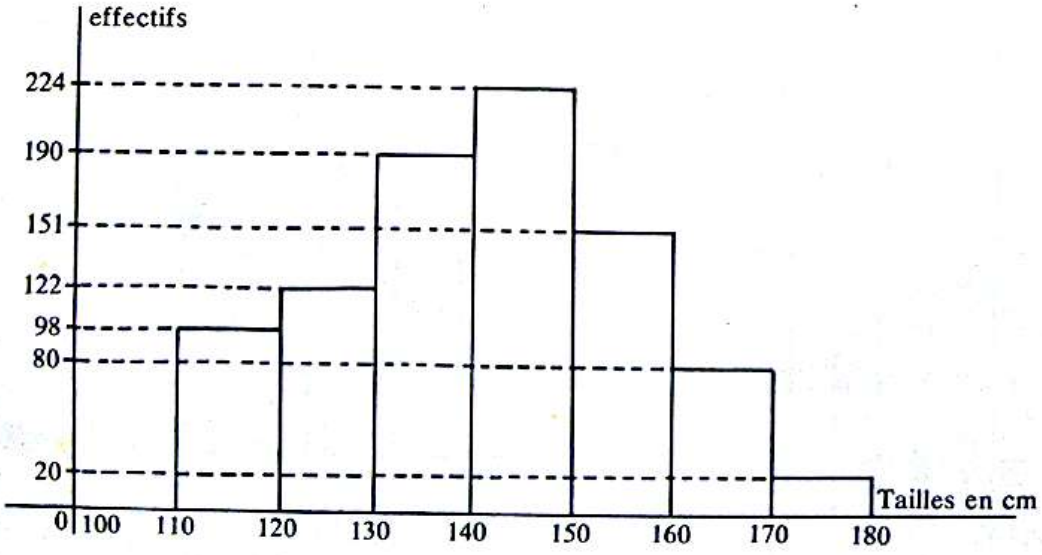
— à l'aide de la formule (*).

Remarques

1) Vérifier que si $d_1 = d_2$, alors OK' est égale au centre de la classe modale.

2) La formule (*) sera utilisée dans le cas où la distribution statistique a *un mode unique* et où on suppose que ce mode appartient *à la classe modale* lors du regroupement des valeurs observées.

15 (1). Le diagramme suivant donne la répartition de l'ensemble des élèves d'une école par *classe de tailles :*



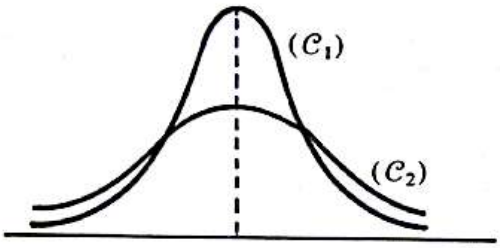
Scanned by CamScanner

Déterminer :

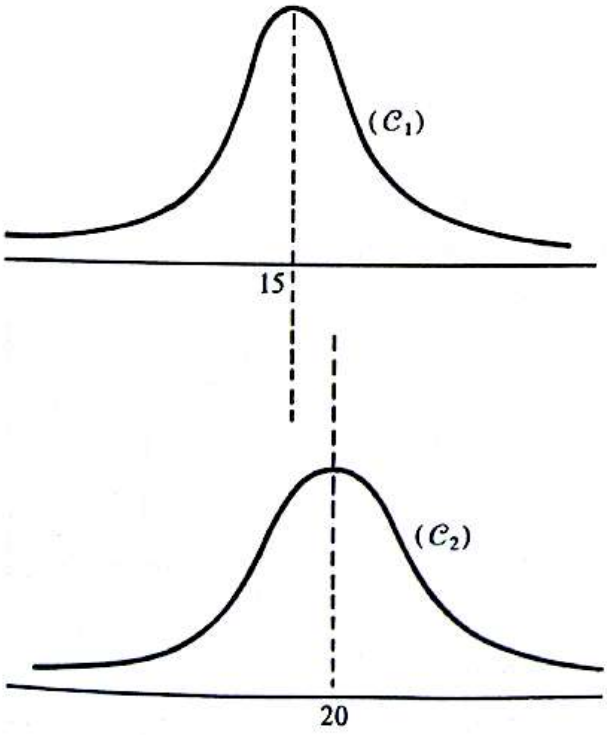
1) La moyenne arithmétique, la médiane, la classe modale et une valeur approchée du mode au moyen de la formule (*) de l'exercice 14.

2) La variance et l'écart-type.

16 (2). La figure ci-dessous représente les deux courbes des fréquences de deux distributions normales de même moyenne mais de dispersions différentes.
Laquelle des deux est la plus dispersée? Pourquoi?



17 (2). La courbe des fréquences $(\mathcal{C}_1)$ représente une distribution statistique normale de moyenne arithmétique 15 et d'écart-type 2.
La courbe des fréquences $(\mathcal{C}_2)$ représente une distribution statistique normale de moyenne 20 et d'écart-type 4.



En utilisant la définition du *« coefficient de variation »* d'une distribution (exercice 10), pensez-vous que les deux distributions ont même « homogénéité »? Pourquoi?

18 (2). Dans une distribution statistique normale de moyenne 60 et d'écart-type 8, calculer le pourcentage des mesures :

a) comprises entre 55 et 70;

b) comprises entre 45 et 50;

c) supérieures à 75.

19 (2). La distribution des poids (en kg) des élèves d'un collège est assimilée à une distribution statistique normale de moyenne arithmétique $\overline{X}$ et d'écart-type σ. On sait que les poids 35 et 42 correspondent respectivement aux valeurs $-0{,}625$ et $0{,}25$ dans la distribution normale centrée réduite.
Calculer $\overline{X}$ et σ.

20 (2). Dans une distribution statistique normale de moyenne 85 et d'écart-type σ, on sait que 80 % des mesures sont supérieures à la mesure 75.

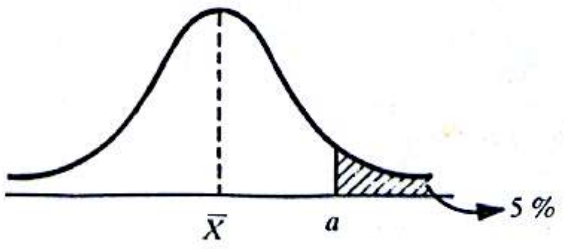
Calculer :

a) l'écart-type σ;

b) le pourcentage des mesures strictement inférieures à 90.

21 (2). Dans une distribution statistique normale de moyenne arithmétique $\overline{X}$ et d'écart-type σ, déterminer le nombre réel positif k tel que le pourcentage des mesures entre $\overline{X}-k\sigma$ et $\overline{X}+k\sigma$ soit égal à 75 %.

22 (2). Dans une distribution statistique normale de moyenne arithmétique $\overline{X}$ et d'écart-type σ, déterminer la borne inférieure a de l'intervalle correspondant à 5 % des mesures extrêmes situées à droite de la moyenne $\overline{X}$ (figure ci-dessous).

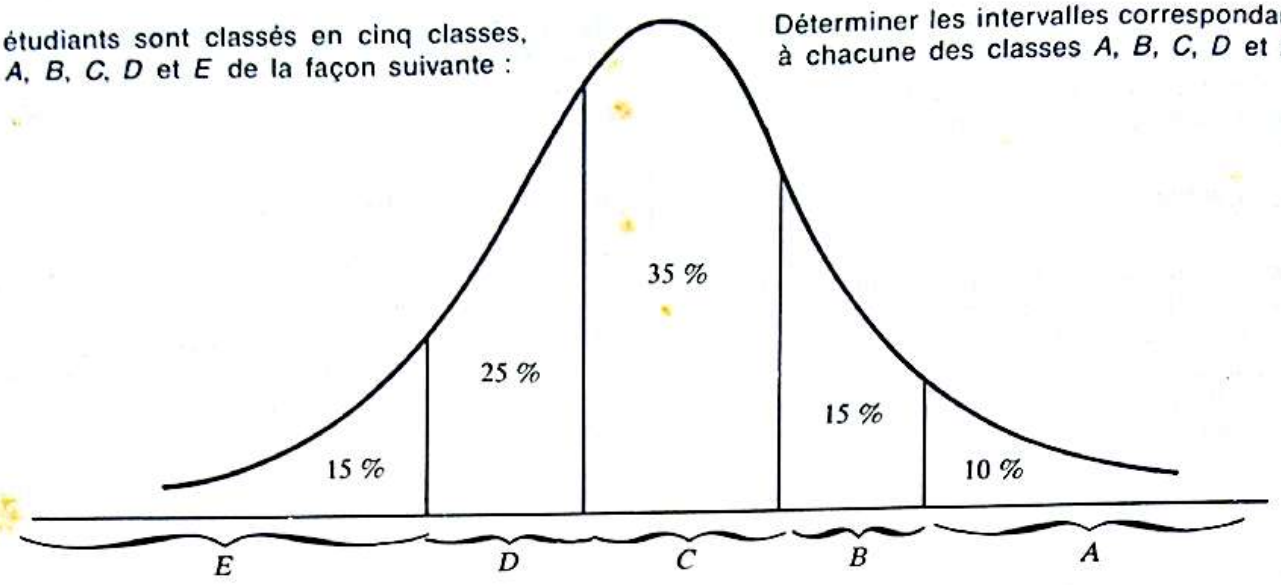


23 (2). La distribution des notes à un examen est assimilée à une distribution statistique normale de moyenne arithmétique 70 et d'écart-type 10. Selon les notes obtenues, les

Scanned by CamScanner

étudiants sont classés en cinq classes, *A*, *B*, *C*, *D* et *E* de la façon suivante :

Déterminer les intervalles correspondant à chacune des classes *A*, *B*, *C*, *D* et *E*.



24 (2). On a observé depuis de nombreuses années que les résultats obtenus au test *X* utilisé par la plupart des universités d'un pays sont distribués suivant une loi normale de moyenne 500 et d'écart-type 100.

1) Sur 10000 étudiants présentant ce test, combien obtiendront un résultat :

a) supérieur à 600?
b) strictement inférieur à 250?
c) compris entre 300 et 750?

2) Quelle est la plus petite valeur du résultat obtenu par un étudiant pour figurer parmi les 1000 étudiants ayant obtenus les résultats les plus élevés?

Problèmes

25 Une enquête sur la migration du groupe Baoulé du Centre Bandama donne le tableau de résultats suivants :

STRUCTURES DE LA POPULATION MIGRANTE

Age	Hommes	%	Femmes	%	Ensemble (H + F)	%
[0; 15[	1370	25,4	1335	27,6	2705	26,5
[15; 30[	1744	32,3	1608	33,3	3352	32,7
[30; 45[	1281	23,7	1083	22,4	2364	23,2
[45; 60[	747	13,8	615	12,7	1362	13,3
[60; 75[	259	4,8	184	4,0	443	4,3
Total	5401	53	4825	47	10226	100

(Source : « DE LA SAVANE A LA FORÊT » Institut de géographie tropicale, CÔTE D'IVOIRE.)

1) Étudier le tableau constitué des deux premières colonnes (Âge, Hommes). Quelle est la population étudiée? Quel est le caractère étudié? Donner un histogramme représentant la distribution étudiée. Construire le polygone des effectifs correspondant.

2) Étudier le tableau constitué des colonnes un, six, sept (Âge, Ensemble, %) :
a) Quels sont la population et le caractère étudiés?
b) Donner le tableau des fréquences cumulées.

Scanned by CamScanner

3) Étudier le tableau constitué des colonnes un, deux, quatre (Âge, Hommes, Femmes). Donner une représentation graphique appropriée de la situation.

4) Étudier le tableau complet dont la population est l'ensemble des hommes et des femmes.

a) Quel est le pourcentage des hommes âgés de 15 à 45 ans? celui des femmes de mêmes âges?

b) Quelle est la classe modale de la distribution?

c) Calculer la médiane, la moyenne arithmétique.

d) Calculer la variance et l'écart-type.

26 Une entreprise qui exploite un parc de taxis a relevé pour 100 d'entre eux la distance (en milliers de km) qu'ils avaient parcourue au moment de leur revente. Cette étude a permis de dresser le tableau suivant :

Classe C_i	Distance d parcourue (milliers de km)	Nombre de taxis n_i
C_1	$77{,}5 \leqslant d < 82{,}5$	4
C_2	$82{,}5 \leqslant d < 87{,}5$	10
C_3	$87{,}5 \leqslant d < 92{,}5$	14
C_4	$92{,}5 \leqslant d < 97{,}5$	17
C_5	$97{,}5 \leqslant d < 102{,}5$	25
C_6	$102{,}5 \leqslant d < 107{,}5$	16
C_7	$107{,}5 \leqslant d < 112{,}5$	7
C_8	$112{,}5 \leqslant d < 117{,}5$	7

1) *a*) Quels sont la population et le caractère étudiés?

b) Tracer un histogramme représentant cette distribution statistique.

c) Trouver la classe modale de cette distribution statistique.

2) Soit $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Pour tout $i \in I$, on désigne par x_i le centre de la classe C_i et par n_i son effectif.

a) Quelle est la série statistique étudiée?

b) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ et la variance V de cette série statistique (ou de la distribution statistique étudiée).

3) On choisit 9 comme valeur approchée de l'écart-type σ de la distribution statistique étudiée.
Trouver graphiquement le nombre de taxis ayant parcouru une distance (en milliers de km) comprise entre $\overline{X}-\sigma$ et $\overline{X}+\sigma$.

D'après Probatoire D. Côte d'Ivoire.
Session de remplacement, 1984.

27 Le tableau suivant représente les salaires mensuels de 120 employés dans une entreprise; ces salaires sont regroupés en huit classes.

Salaires (en F)	Nombre d'ouvriers
[30 000; 35 000[	3
[35 000; 40 000[	12
[40 000; 45 000[	17
[45 000; 50 000[	33
[50 000; 55 000[	25
[55 000; 60 000[	15
[60 000; 65 000[	12
[65 000; 70 000[	3

1) Quels sont :

a) la population et le caractère étudiés?

b) la distribution statistique et la série statistique associées à ce caractère?

2) Tracer l'histogramme et le polygone des fréquences.

3) Déterminer :

a) la médiane et la moyenne arithmétique $\overline{X}$;

b) la variance et l'écart-type σ.

4) Trouver graphiquement le nombre d'ouvriers ayant un salaire :

a) supérieur à $\overline{X}+2\sigma$;

b) strictement inférieur à $\overline{X}-2\sigma$.

28 En prévision d'un défilé de majorettes, le professeur de gymnastique décide d'entraîner 75 jeunes filles de son établissement.
Il commence par mesurer leur taille. Les résultats qu'il relève sont les suivants :

Taille (en cm)	80	86	88	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Effectif	1	1	1	2	2	3	4	4	4	5	6	4	3	5

Taille (en cm)	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	112	114	116	120
Effectif	4	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1

Scanned by CamScanner

Il regroupe ces élèves en 8 classes de tailles, de 5 cm d'amplitude. Chaque classe est un intervalle fermé à la borne inférieure et ouvert à la borne supérieure. La dernière classe est un intervalle fermé.

1) Tracer l'histogramme et le polygone des effectifs.

2) Tracer le diagramme cumulatif de la distribution des tailles.
Utiliser cette courbe pour :

a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane.
Vérifier par le calcul.

b) Déterminer graphiquement une valeur approchée du pourcentage des élèves qui ont une taille comprise entre 80 et 95 cm.

3) A partir de cette étude, calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ et l'écart-type σ. Situer sur l'histogramme les deux mesures de tendance centrale (moyenne et médiane).

4) Le professeur de gymnastique décide de choisir les élèves ayant une taille comprise entre $\overline{X}-2\sigma$ et $\overline{X}+2\sigma$.
Quelle est la proportion des élèves qui défileront?

D'après : Probatoire D. Côte d'Ivoire.
Session Juin 1984.

29 Suite à un devoir de mathématique, les notes X (sur 100) obtenues par 100 élèves ont été regroupées en huit classes et ont donné le tableau suivant :

Résultats	Nombres d'élèves
$15 \leqslant X < 25$	5
$25 \leqslant X < 35$	4
$35 \leqslant X < 45$	9
$45 \leqslant X < 55$	25
$55 \leqslant X < 65$	35
$65 \leqslant X < 75$	10
$75 \leqslant X < 85$	6
$85 \leqslant X \leqslant 95$	6
	100

1) *a*) Quels sont la population et le caractère étudiés?

b) Tracer l'histogramme représentant cette distribution statistique.

c) Tracer le diagramme cumulatif de cette distribution statistique.

2) Trouver une valeur approchée de la médiane :

a) à l'aide du diagramme cumulatif précédent;

b) par le calcul.

3) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ et l'écart-type σ de la distribution statistique.

4) On appelle *coefficient de variation* de la distribution statistique étudiée le quotient $\frac{\sigma}{\overline{X}}$.

a) Calculer, en pourcentage, ce coefficient de variation.

b) La distribution a-t-elle une bonne homogénéité? (Voir exercice 10.)

30 *Analyse de Johannsen sur des haricots (1973) :*

1) Il part d'un lot de graines achetées dans le commerce et les pèse au centigramme près. Il obtient les résultats suivants :

Poids (en cg)	20 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50
Nombre de graines	4	27	65	179	364	587

51 à 55	56 à 60	61 à 65	66 à 70	71 à 75	76 à 80	81 à 85	86 à 90
533	418	260	132	52	34	19	2

Tableau 1

a) Calculer les fréquences de chacune des classes.

b) Construire l'histogramme représentant cette distribution.

c) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}_1$, l'écart-type σ_1 et le coefficient de variation $\frac{\sigma_1}{\overline{X}_1}$ de cette distribution.

2) Johannsen prend les 2 graines les plus lourdes, les cultive et récolte les graines. Il en prend 145 au hasard et les pèse au centigramme près. Il obtient les résultats suivants :

Poids (en cg)	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Nombre de graines	2	5	9	14	21

	61 à 65	66 à 70	71 à 75	76 à 80	81 à 85	86 à 90
	22	24	23	17	6	2

Tableau 2

Scanned by CamScanner

a) Calculer les fréquences de chacune des classes.

b) Construire l'histogramme représentant cette distribution (on choisira la même échelle que précédemment pour les modalités et pour les fréquences).

c) Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}_2$, l'écart-type σ_2 et le coefficient de variation $\frac{\sigma_2}{\overline{X}_2}$ de cette distribution.

3) Plus le coefficient de variation est grand plus la distribution est dispersée. On remarque que la distribution des poids des graines représentés dans le tableau 2 est moins dispersée que la première (définie par le tableau 1). Acceptez-vous cette remarque?

31 La distribution des effectifs suivante représente la valeur maximale de la consommation d'oxygène, mesurée en laboratoire, chez quarante enfants :

Consommation d'oxygène (ml/kg/mn)	Nombre
$30 \leqslant X < 34$	2
$34 \leqslant X < 38$	3
$38 \leqslant X < 42$	11
$42 \leqslant X < 46$	12
$46 \leqslant X < 50$	7
$50 \leqslant X < 54$	3
$54 \leqslant X \leqslant 58$	2

1) Tracer l'histogramme et le polygone des effectifs.

2) Tracer le diagramme cumulatif.
Utiliser cette courbe pour :

a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane. Vérifier par le calcul.

b) Déterminer graphiquement une valeur approchée du pourcentage des enfants qui consomment une valeur maximale d'oxygène comprise entre 30 et 40 (en ml/kg/mn).

3) Calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type.

4) On suppose que la distribution des consommations d'oxygène précédente peut être assimilée à une distribution normale de moyenne arithmétique 43,6 et d'écart-type 5,57. Calculer le pourcentage des enfants consommant une valeur maximale d'oxygène comprise entre 30 et 40 (en ml/kg/mn). Comparer ce résultat avec celui de la partie *b*) de la deuxième question.

32 Une machine fabrique 10 000 tiges métalliques. On sait que la distribution des tailles des tiges fabriquées est assimilée à une distribution statistique normale de moyenne arithmétique 160 mm et d'écart-type 1 mm.
Le prix de la fabrication de 1 000 tiges est de 25 000 F.
Une tige ayant une longueur comprise entre 157,5 mm et 162,5 mm est qualifiée « bonne ».
Une tige ayant une taille trop longue (supérieure à 162,5 mm) peut-être modifiée pour être « bonne ». Le prix supplémentaire pour la modification d'une tige est de 12,50 F.
Une tige ayant une taille trop courte (strictement inférieure à 157,5 mm) doit être rejetée.

1) Quel est le nombre de tiges :

a) bonnes?

b) modifiées?

c) rejetées?

2) Quel est le prix total (fabrication et modification) des 10 000 tiges fabriquées?

3) Le prix de vente d'une tige est de 55 F. Quel bénéfice obtient-on?

33 I. La distribution des tailles (en centimètres) des élèves d'un lycée est assimilée à une distribution statistique normale d'écart-type 15 cm. 93,32 % des élèves ont une taille supérieure à 120 cm et 34 élèves ont une taille supérieure à 169,5 cm.

1) Quelle est la taille moyenne des élèves?

2) Quel est approximativement le nombre d'élèves du lycée?

3) Combien d'élèves ont une taille strictement inférieure à 112,5 cm.

II. La distribution des poids (en kg) des élèves de ce même lycée est présentée dans le tableau suivant :

classes des poids (kg)	fréquences (en %)
[30; 35[	1,15
[35; 40[	5,50
[40; 45[	16
[45; 50[	27,35
[50; 55[	27,35
[55; 60[	15,90
[60; 65[	5,40
[65; 70]	1,35

1) Tracer :

a) l'histogramme de fréquences;

b) le diagramme cumulatif.

2) Déterminer graphiquement :

a) une valeur approchée de la médiane;

b) une valeur approchée du pourcentage des élèves ayant un poids strictement inférieur à 42,5 kg.

3) Trouver la moyenne arithmétique et l'écart-type.

Scanned by CamScanner

INDEX (Tome I, Analyse)

A

Abscisse d'inflexion 202
Application bijective 11
Application injective 11
Application réciproque 15
Application surjective 13
Asymptote horizontale 213
Asymptote oblique 239
Asymptote verticale 211

B

Bijection 11

C

Composée (de fonctions) 6

D

Dérivée (d'une fonction) 174
Dichotomie 262
Discriminant 94
Distribution statistique centrée réduite 310
Distribution statistique normale 302

E

Écart-type 293
Ensemble image (d'une fonction) 2
Équation bicarrée 110
Étendue (d'une distribution statistique) 292

F

Fonction bornée 25
Fonction continue en un point 159
Fonction continue sur un intervalle 164
Fonction croissante 195
Fonction décroissante 195
Fonction dérivable en un point 173
Fonction dérivable sur un intervalle 174
Fonction dérivée 174
Fonction impaire 29
Fonction inverse 21
Fonction majorée 25
Fonction minorée 25
Fonction négative 25
Fonction numérique 17
Fonction opposée 20
Fonction paire 28
Fonction positive 25
Fonction strictement croissante 195
Fonction strictement décroissante 195
Fonction tangente 258
Fonction valeur absolue d'une fonction 35
Forme canonique 88

H

Hyperbole 233

I

Image (d'un ensemble par une fonction) 2
Image réciproque 3
Injection 11

L

Limite à droite 163
Limite à gauche 163
Limite à l'infini 211
Limite d'une fonction en un point 155
Limite d'une suite 64
Limite infinie 209

M

Maximum (d'une fonction) 199
Maximum relatif 200
Minimum (d'une fonction) 199
Minimum relatif 200

N

Nombre dérivé 173

P

Parabole 90
Paramètre 104
Point d'inflexion 176
Polygone des effectifs 302
Polygone des fréquences 302
Primitive d'une fonction 278
Produit de deux fonctions 19

Q

Quotient de deux fonctions 20

R

Récurrence 56
Résolvante (d'une équation bicarrée) 110
Restriction (d'une application) 10

Scanned by CamScanner



Scanned by CamScanner