Fomesoutra.com
ça soutra!

collection
IRMA

MATHEMATIQUES

1e C.E.

ANALYSE











CEDIC
NEA

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan,
Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

BENGALY
KALIFA

Mathématiques

en classes de 1e C et E

TOME 1

ANALYSE

Monique BRETON
Auguste AKE
Jacques PAPADOPOULOS

7
10
14
28
36
46
62
66
70
75
185
212
221
227
251
262

ISBN : 2-7124-0262-6
2-7236-0788-7

© Cedic/Nathan — Les Nouvelles Éditions Africaines — Abidjan 1985

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'

SOMMAIRE

ANALYSE

A1. Fonctions - Applications
- I. Généralités ..... p. 1
- II. Fonctions numériques de la variable réelle ..... p. 23

A2. Fonctions polynômes
- I. Généralités ..... p. 40
- II. Division euclidienne d'une fonction polynôme par une autre ..... p. 42
- III. Zéros d'une fonction polynôme ..... p. 47
- IV. Equations et inéquations du second degré ..... p. 50
- V. Equations et inéquations se ramenant au second degré ..... p. 59

A3. Tracés de courbes
- I. Courbes représentatives et transformations du plan ..... p. 70
- II. Eléments de symétries ..... p. 82

A4. Suites numériques
- I. Généralités ..... p. 97
- II. Démonstrations par récurrence ..... p. 107
- III. Suites arithmétiques ..... p. 110
- IV. Suites géométriques ..... p. 114

A5. Suites numériques - convergence - divergence
- I. Suites numériques de limite nulle ..... p. 128
- II. Suites convergentes - Suites divergentes ..... p. 136
- III. Approximations de nombres réels ..... p. 146

A6. Etude locale d'une fonction
- I. Coefficient directeur d'une droite ..... p. 162
- II. Etude locale de quelques courbes représentatives ..... p. 166
- III. Réduction du problème ..... p. 170
- IV. Limites en zéro ..... p. 175
- V. Approximation affine - Nombre dérivé ..... p. 185

A7. Etude globale d'une fonction ..... p. 212
- I. Fonctions dérivables sur un intervalle ..... p. 221
- II. Sens de variation et dérivée ..... p. 227
- III. Etude de fonctions ..... p. 251
- IV. Etude de fonctions trigonométriques ..... p. 262
- V. Primitives d'une fonction ..... p. 262

PLAN DE L'OUVRAGE

Analyse

- A1. Fonctions - Applications
- A2. Fonctions polynômes
- A3. Tracés de courbes
- A4. Suites numériques
- A5. Suites numériques convergence - divergence
- A6. Etude locale d'une fonction
- A7. Etude globale d'une fonction

Géométrie

- G1. Géométrie plane
- G2. Trigonométrie
- G3. Transformations du plan
- G4. Représentations de l'espace
- G5. Orthogonalité dans l'espace
- G6. Probabilités - Statistiques

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du ministère de l'Education Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte-d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain.

Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.

A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Première C et E, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Première C et E, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.
- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.
- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.

L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

Saliou TOURE

REMERCIEMENTS

Il nous est agréable de remercier ici les personnes suivantes :

Mesdames : GUYON, Inspectrice de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
OUEDRAOGO-HADDAD, Chercheur à l'IRMA.

Messieurs : BEGHAIN, chercheur à l'IRMA
CANAZZI, chercheur à l'IRMA
DUMONCEAU, chercheur à l'IRMA
LANZA, professeur au L.G. de Bingerville
MATHIEU, conseiller pédagogique
MATHURIN, conseiller pédagogique
N'DA, animateur pédagogique
PAULUS, chercheur à l'IRMA
VAUDELIN, professeur au L.T. d'Abidjan.

dont les suggestions nous ont été précieuses.

Nos remerciements vont aussi à M. Daniel BOUTTE, Inspecteur Pédagogique Régional, qui, malgré ses charges, a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de sa grande expérience.

Enfin, nous remercions particulièrement M. François-Gilles CARPENTIER, chercheur à l'IRMA, et M. Bernard PIERROT, conseiller pédagogique, pour leurs remarques et suggestions constructives.

Les Auteurs

Remarques préliminaires

Conformément à l'esprit du nouveau programme, nous avons tenu à réserver, tout au long de ce manuel, une part importante au travail personnel de l'élève grâce à des **questions** et à des exercices intégrés au cours.

Les questions, dont les réponses complètes figurent à la fin de chaque chapitre, visent à faire découvrir par l'élève, sur des exemples simples, une nouvelle notion ou un théorème.

Une telle question est alors suivie de la définition générale ou de la démonstration (sauf quand le résultat est admis) et de l'énoncé du théorème étudié. Cette définition ou ce théorème est éventuellement complété par des remarques et une **méthode pratique** permettant à l'élève d'utiliser efficacement l'énoncé cité. Chaque « méthode pratique » comporte un exemple entièrement traité.

Les exercices qui font partie intégrante du cours ne sont que des applications directes de la notion ou du théorème venant d'être introduit. Ils permettent à l'élève de contrôler qu'il a correctement acquis la nouvelle notion en s'aidant éventuellement des indications de solution qu'il trouvera à la fin du chapitre.

De plus, à la fin de chaque tome, figurent des **sujets de recherche.** Ces problèmes pouvant parfois conduire l'élève, non limité par le temps, à découvrir une notion prolongeant le cours mais non explicitement au programme de la classe de Première.

Les Auteurs

PROGRAMME DE 1re C ET E

(6 heures hebdomadaires)

ALGÈBRE

Applications

- Applications injectives, surjectives, bijectives ; applications réciproques ; composition des applications.
- Restriction d'une application.
- Image directe, image réciproque.

Fonctions polynômes

- Généralités.
- Factorisation. Pratique de la division euclidienne sur des exemples.
- Zéros d'une fonction polynôme.
- Signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x, f étant une fonction polynôme.

Equations, inéquations, systèmes

- Equations et inéquations du second degré.
- Equations et systèmes d'équations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$.
- Problèmes se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes.

ANALYSE

Fonctions numériques

- Comparaison de deux fonctions numériques.
- Opération sur les fonctions numériques.
- Fonctions associées à une fonction f :

$$x \mapsto f(x-a) \qquad x \mapsto |f(x)|$$
$$x \mapsto f(x) + b \qquad x \mapsto f(kx)$$
$$x \mapsto kf(x)$$

- Parité ; périodicité ; ensemble d'étude.

Etude locale d'une fonction numérique

- Limite et continuité d'une fonction en un point.
- Limite à gauche, limite à droite.
- Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, approximation par une fonction affine.
- Interprétation géométrique du nombre dérivé ; équation de la tangente en un point de la courbe représentative d'une fonction.
- Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite.
- Règles de dérivation de la somme, du produit, du quotient de fonctions dérivables en un point.

Etude globale d'une fonction numérique

- Fonction dérivable sur un intervalle.
  Fonction dérivée.
- Dérivation des fonctions sinus et cosinus.
- Fonction dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables ; d'une fonction du type :
  $$x \mapsto f(ax + b), f \text{ étant dérivable.}$$
- Enoncé du théorème donnant le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle, à partir du signe de $f'(x)$.

Etude de quelques fonctions

- Fonction polynôme f dont on peut déterminer le signe de $f'(x)$.
- Fonctions homographiques (asymptotes parallèles aux axes).
- Fonctions $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (exemples d'asymptotes obliques).
- Fonction rationnelle f dont on peut déterminer le signe de $f'(x)$.

Primitives de fonctions usuelles

- Monômes, sin, cos, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ et leurs combinaisons linéaires.

Suites numériques

- Suites arithmétiques, suites géométriques.
- Suite définie par une formule de récurrence.
- Suites monotones ; comparaison de deux suites.
- Suites convergentes (on admettra les théorèmes sur les suites convergentes).
- Initiation au raisonnement par récurrence.

ACTIVITÉS

- Sensibilisation aux méthodes numériques :
  - Approximation des zéros d'une fonction numérique.
  - Encadrements des nombres réels.
  - Calcul d'une aire par la méthode des rectangles.

STATISTIQUES, DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉ

- Caractéristique de dispersion d'une série statistique.
- Séries statistiques à deux caractères : corrélation linéaire.
- Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini ; arrangements, combinaisons, permutations sur un enseignement fini.
- Introduction élémentaire aux probabilités : événements, probabilité d'un événement dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

GÉOMÉTRIE

Géométrie plane

- Angle orienté défini à partir d'un couple de vecteurs.
- Coordonnées polaires d'un point.
- Distance d'un point à une droite.
- Vecteur normal à une droite.
- Relations métriques dans le triangle.
- Recherche de lieux géométriques.
- Projections, isométries, similitudes : propriétés géométriques, expression analytique, image de figures simples, utilisation de ces applications du plan pour la résolution de problèmes de construction ou de configuration.

Géométrie de l'espace

- Repérage d'un point dans l'espace.
- Technique de représentation par projection orthogonale sur deux plans perpendiculaires (géométrie descriptive) : représentation d'un point, d'une droite, d'un plan ; intersection de droites et plans ; droites et plans orthogonaux.
- Vecteurs de l'espace : définition, opérations, base.
- Produit scalaire : définition, propriétés, bases orthogonales, bases orthonormées, expression analytique dans une base orthonormée.
- Droites et plans :
  caractérisations vectorielles, équations cartésiennes, représentation paramétrique, vecteur normal à un plan, distance d'un point à un plan, étude analytique du parallélisme et de l'orthogonalité de droites et de plans.
- Approche géométrique de projections, translations, homothéties.

ACTIVITÉS

- Produit vectoriel dans un espace orienté.

TRIGONOMÉTRIE

- Calculs sur les angles orientés (définis à partir de couples de vecteurs) ; calculs sur les mesures de ces angles orientés.
- Formules usuelles de transformations.
- Equations dans $\mathbb{R}$: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\text{tg}\, x = a$.
  Equations se ramenant aux cas précédents.
  Equations : $a \cos x + b \sin x + c = 0$. Inéquations trigonométriques.
- Etudes des fonctions sinus, cosinus, tangente et fonctions associées.

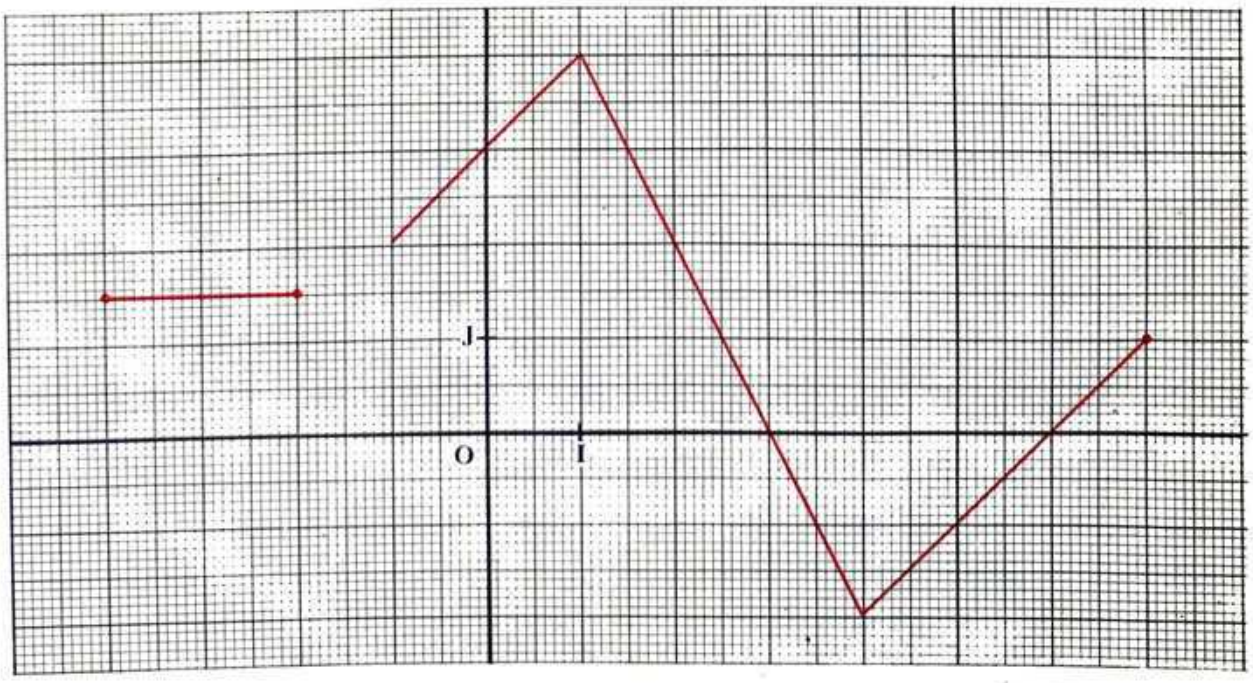
1 Fonctions - Applications

I. GÉNÉRALITÉS
II. FONCTIONS NUMÉRIQUES DE LA VARIABLE RÉELLE

1 Généralités

1) Image directe

Soit h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de la variable réelle dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) est la suivante :



Question 1 *Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?*

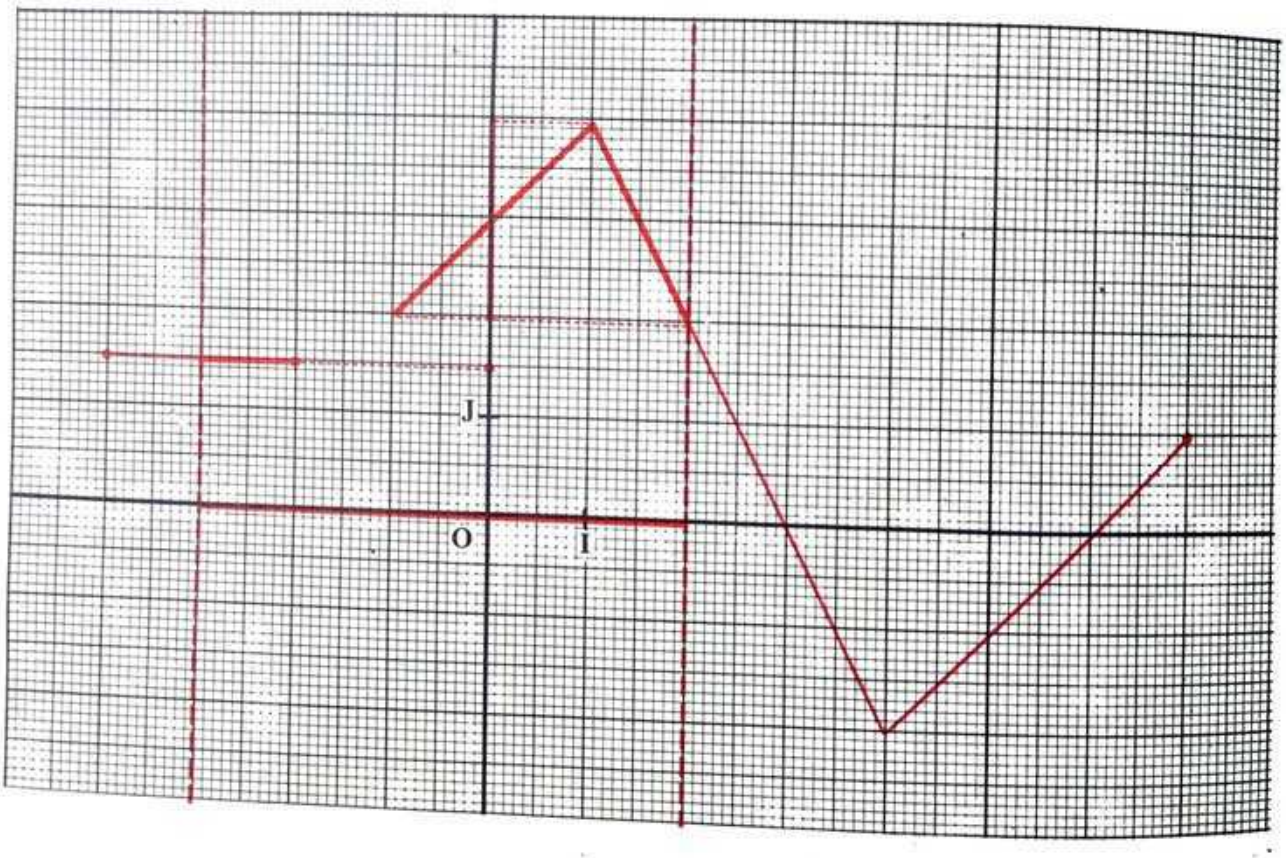
Cherchons l'ensemble des images par la fonction h des éléments de l'intervalle $]-3\ ;\ 2]$.

Pour cela hachurons la bande (B) des points du plan dont l'abscisse x est telle que :

$$-3 < x \leqslant 2$$

Soit (C') = (B) ∩ (C). L'ensemble cherché est l'ensemble des ordonnées des points de (C'), soit l'ensemble

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [2\ ;\ 4]$$



Cet ensemble se note $h(]-3\ ;\ 2])$ et s'appelle l'image directe de $]-3\ ;\ 2]$ par la fonction h.

Question 2 *Trouver l'ensemble des images, par h, de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :*

$$[-1\ ;\ 1]\ ,\ [-2\ ;\ 3]\ ,\ ]\leftarrow\ ;\ -4]\ ,\ \{3\ ;\ 6\}\ ,\ \mathbb{R}_+$$

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f.

Soit A une partie de E. L'**image directe** de A par f est la partie de F, notée f(A), des images par f de tous les éléments de $A \cap D_f$.

Méthode pratique

Pour trouver l'image directe d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction numérique f de la variable réelle :

* Soit on procède comme ci-dessus si l'on dispose de la courbe représentative (C) de f.

* Soit on utilise les propriétés de la relation d'ordre par rapport à la multiplication et l'addition dans $\mathbb{R}$.

Ainsi cherchons l'image directe de l'intervalle $[-1 ; 3[$ par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

On a $[-1 ; 3[= [-1 ; 0[\cup [0 ; 3[$

Soit un nombre réel x de $[-1 ; 0[$, alors son carré est un nombre réel de l'intervalle $]0 ; 1]$, c'est-à-dire que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad [-1 \leqslant x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 \leqslant 1]$

De même : $\forall x \in \mathbb{R} \quad [0 \leqslant x < 3 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 < 9]$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad [-1 \leqslant x < 3 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 < 9]$

Donc $f([-1 ; 3[) \subset [0 ; 9[$ (1)

A-t-on $f([-1 ; 3[) = [0 ; 9[$?

Pour cela étudions si $[0 ; 9[$ est inclus dans $f([-1 ; 3[)$, c'est-à-dire si tout nombre réel de l'intervalle $[0 ; 9[$ est le carré d'au moins un nombre réel de $[-1 ; 3[$; or on sait que tout nombre réel de $]0 ; 9[$ est le carré de deux nombres réels opposés : l'un dans $]-3 ; 0[$, l'autre dans $]0 ; 3[$, et que le carré de 0 est 0.

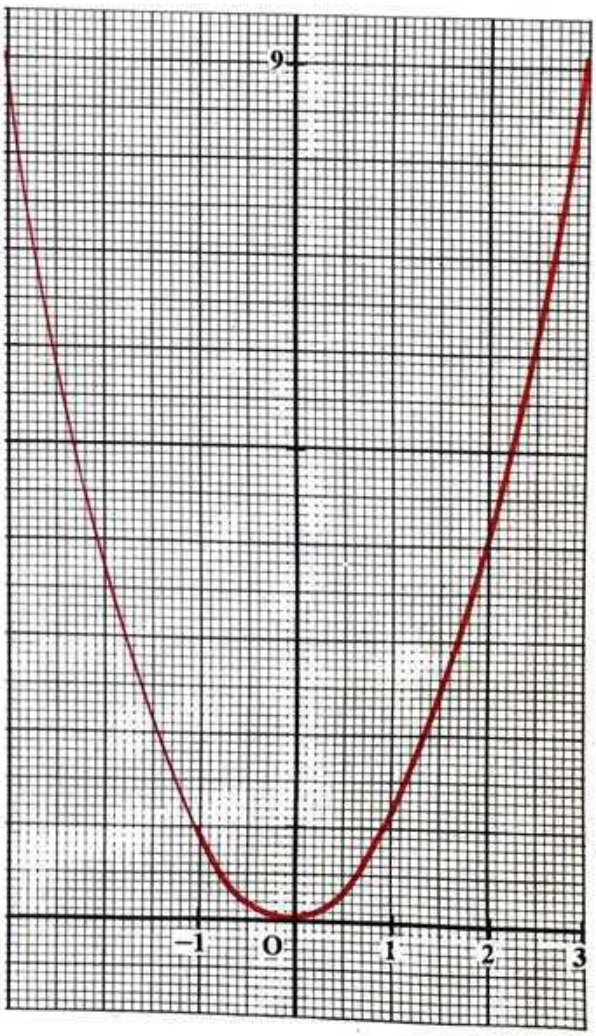
On en déduit que tout nombre réel de $[0 ; 9[$ est l'image d'au moins un nombre réel de $[-1 ; 3[$ et l'on a ainsi montré que :

$$[0 ; 9[\subset f([-1 ; 3[) \qquad (2)$$

Enfin, des inclusions (1) et (2), on déduit que :

$$f([-1 ; 3[) = [0 ; 9[$$

On vérifie graphiquement ce résultat à l'aide de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ tracée ci-contre.



Exercice 1

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 5$

Trouver les images directes par h des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :
$A = [0 ; 1]$, $B = [-1 ; 2]$, $C = \{-2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, $D = \mathbb{R}_+$

Exercice 2

a) Soit g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + 1$

Trouver g (]0 ; 2]) et g ([−1 ; 2])

b) Soit h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x - 1}$

Trouver h ([1 ; 4[) et h ([−2 ; 2]).

Exercice 3

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère le carré ABCD où les points A, B, C, et D ont pour coordonnées respectives (1 ; − 2) , (2 ; −2) ; (2 ; −3) et (1 ; −3).

Tracer l'image directe du carré ABCD pour chacune des 5 symétries suivantes $S_{(OI)}$, $S_{(OJ)}$, S_O, $S_{(\Delta)}$ et $S_{(\Delta')}$ où (Δ) et (Δ') sont respectivement les droites d'équation : y = x et y = −x.

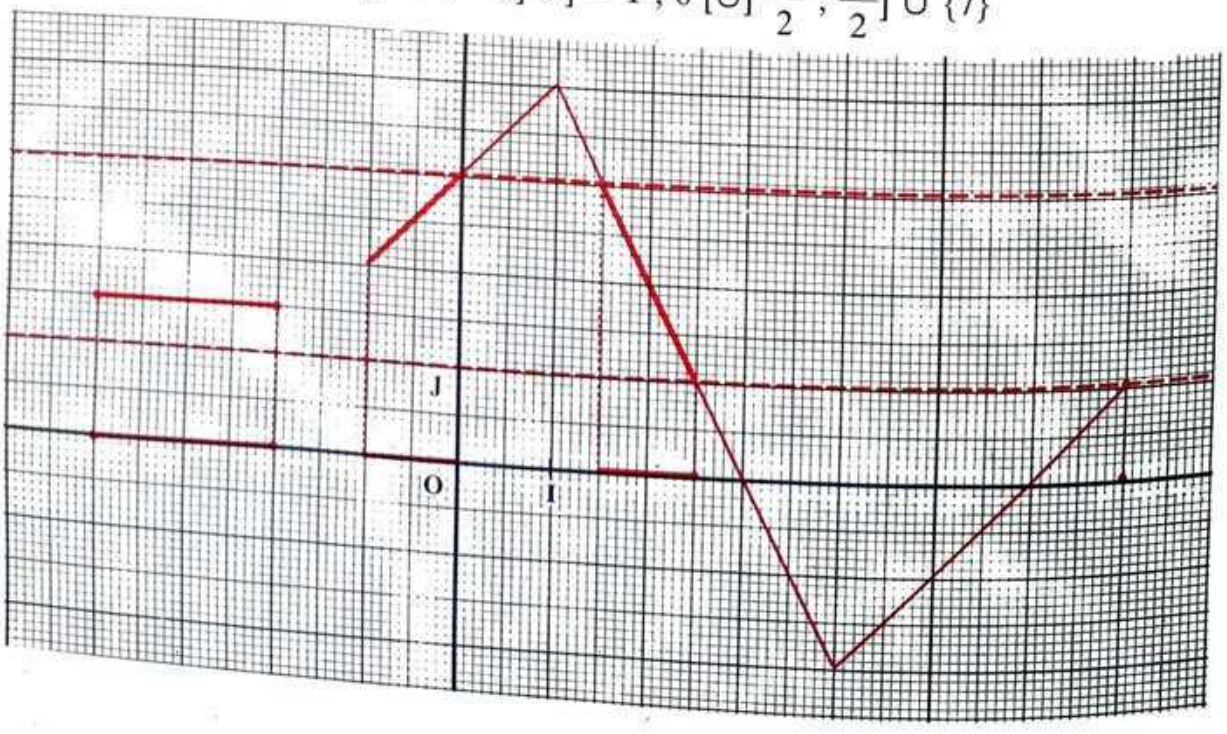
2) Image réciproque

Reprenons la fonction h du début du paragraphe et cherchons l'ensemble des antécédents par h des éléments de l'intervalle [1 ; 3[.

Pour cela hachurons la bande plane (F) des points du plan dont l'ordonnée y est telle que : $1 \leq y < 3$.

Soit (C") = (F) ∩ (C). L'ensemble cherché est l'ensemble des abscisses des points de (C"), soit l'ensemble :

$$[-4 ; -2] \cup]-1 ; 0[\cup \left]\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right] \cup \{7\}$$



Cet ensemble se note $h^{-1}([1 ; 3[)$ et s'appelle l'image réciproque de [1 ; 3[par h.

Attention, on veillera à ne pas confondre cette nouvelle notation avec celle désignant l'application réciproque d'une bijection.

Question 3 *Trouver l'ensemble des antécédents par h des éléments de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :*

$[5 ; 6[$, $[4 ; 5[$, $\{2\}$, $[-3 ; 1[$, $\mathbb{R}_+$

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f
L'**image réciproque** d'une partie B de l'ensemble d'arrivée F par la fonction f est la partie de D_f, notée $f^{-1}(B)$ constituée des antécédents par f de tous les éléments de B.

Méthode pratique

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B de $\mathbb{R}$ par une fonction numérique de la variable réelle f d'ensemble de définition D_f :

* Soit on dispose de la représentation graphique de f et l'on procède comme ci-dessus.
* Soit l'on résout l'un des systèmes d'inconnue x suivants :

Si $B = [a, b]$ on résout : $x \in D_f$ $\quad a \leq f(x) \leq b$

Si $B =]a, b[$ on résout : $x \in D_f$ $\quad a < f(x) < b$

Si $B = [a, b[$ on résout : $x \in D_f$ $\quad a \leq f(x) < b$

Si $B =]a, b]$ on résout : $x \in D_f$ $\quad a < f(x) \leq b$

Si $B = \{b\}$ on résout : $x \in D_f$ $\quad f(x) = b$

Si $B =]\leftarrow, a]$ on résout : $x \in D_f$ $\quad f(x) \leq a$

Si $B =]\leftarrow, a[$ on résout : $x \in D_f$ $\quad f(x) < a$

Si $B =]a, \rightarrow[$ on résout : $x \in D_f$ $\quad f(x) > a$

Si $B = [a, \rightarrow[$ on résout : $x \in D_f$ $\quad f(x) \geq a$

L'image réciproque de B par f étant l'ensemble solution trouvé.

Ainsi, cherchons quelle est l'image réciproque de l'intervalle

B égal à $[1, 4[$ par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) < 4)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow 1 \leq x^2 < 4)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \text{ et } x^2 < 4)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 1 \text{ et } x^2 - 4 < 0)$

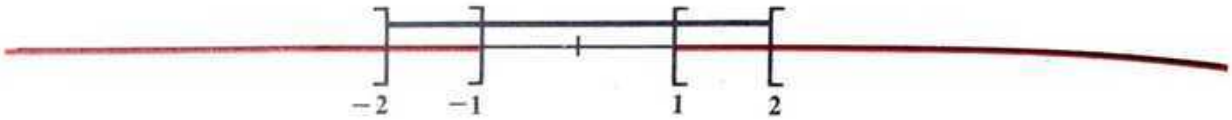
On est donc amené à résoudre le système d'inconnue x :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} & 0 \leq (x-1)(x+1) \qquad \text{(I)} \\ x \in \mathbb{R} & (x-2)(x+2) < 0 \qquad \text{(II)} \end{cases}$$

Soient S_1 et S_2 les ensembles solution des inéquations (I) et (II)

On vérifie à l'aide de tableaux que :

$$S_1 =]\leftarrow, -1] \cup [1 ; \rightarrow[\text{ et } S_2 =]-2, 2[$$



L'ensemble solution du système est donc : $S_1 \cap S_2 =]-2 ; -1] \cup [1 ; 2[$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in]-2 ; -1] \cup [1 ; 2[)$

donc : $f^{-1}([1, 4[) =]-2 ; -1] \cup [1 ; 2[$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - x - 2$

Trouver les images réciproques par f des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \{0\} \qquad B =]-2, \rightarrow[$$

Exercice 5

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x+3}{x+4}$

Trouver les images réciproques par f des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = [\frac{3}{2} ; 2[\qquad B =]\leftarrow ; -6]$$

Exercice 6

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J) dessiner l'image réciproque du segment [AB] où A $\binom{1}{1}$ et B $\binom{2}{2}$ par la projection orthogonale sur la droite (Δ) dont une équation est : $y - x = 0$

3) Restriction. Prolongement

On rappelle que :

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Soient f et g deux fonctions de E vers F d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g. La **fonction** f est **égale à la fonction** g si et seulement si :

$$D_f = D_g \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D_f \qquad f(x) = g(x)$$

Question 4

Dans chacun des cas suivants les fonctions considérées sont-elles égales ?

$f_1 : \mathbb{R} - \{0 ; 2\} \to \mathbb{R}$ et $g_1 : \mathbb{R} - \{0 ; 2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ $t \mapsto \dfrac{-2}{t^2 - 2t}$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ $x \mapsto (x+1)^2$

$f_3 : [-4 ; 4] \to \mathbb{R}$ et $g_3 : [-4 ; 4[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto x$ $\qquad$ $x \mapsto E(x)$

Exercice 7

Les fonctions f et g suivantes sont-elles égales :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$z \mapsto \dfrac{z^2 - 4}{z + 2}$ $\qquad$ $z \mapsto z - 2$

Exercice 8

Soient f, g et h les trois applications d'une partie A de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$\forall x \in A \quad f(x) = x^2$; $\forall x \in A \quad g(x) = |x|$;

$\forall x \in A - \{0\}$

$h(x) = 1$ et $h(0) = 0$

Trouver A de façon que f, g et h soient égales.

Question 5

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2 - 2x}$ $\qquad$ $\mapsto \dfrac{x-1}{x^2 - x}$

Vérifier que f et g sont distinctes mais coïncident sur $\mathbb{R} - \{0 ; 1 ; 2\}$

Plus généralement on rappelle que :

Définition

Soient f et g deux fonctions d'ensembles de définition respectifs D_f et D_g. Soit A une partie de $D_f \cap D_g$. On dit que f et g **coïncident sur** A si et seulement si :

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$$

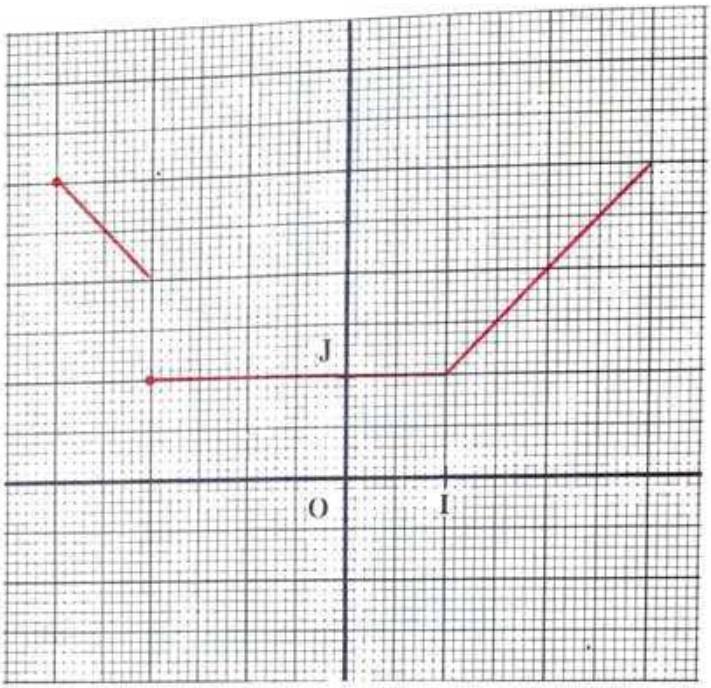
Exercice 9

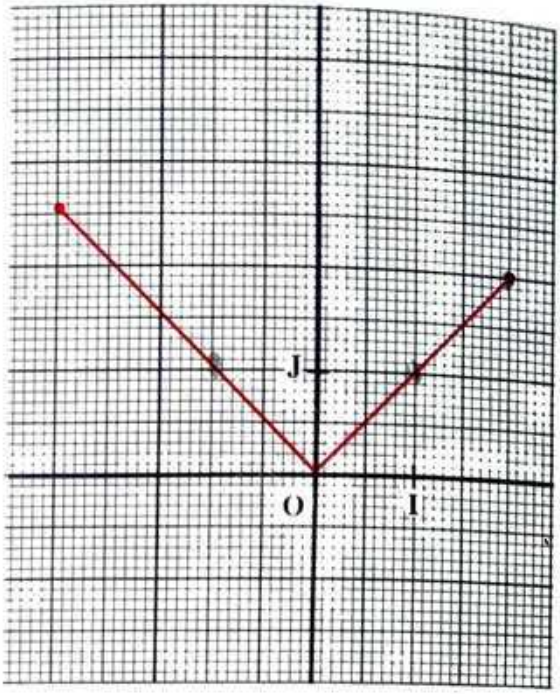
Dans chacun des cas suivants trouver la plus grande partie de $\mathbb{R}$ où les deux fonctions f et g coïncident.

a/ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x} + 2$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

b/ f et g sont définies par les représentations graphiques suivantes :



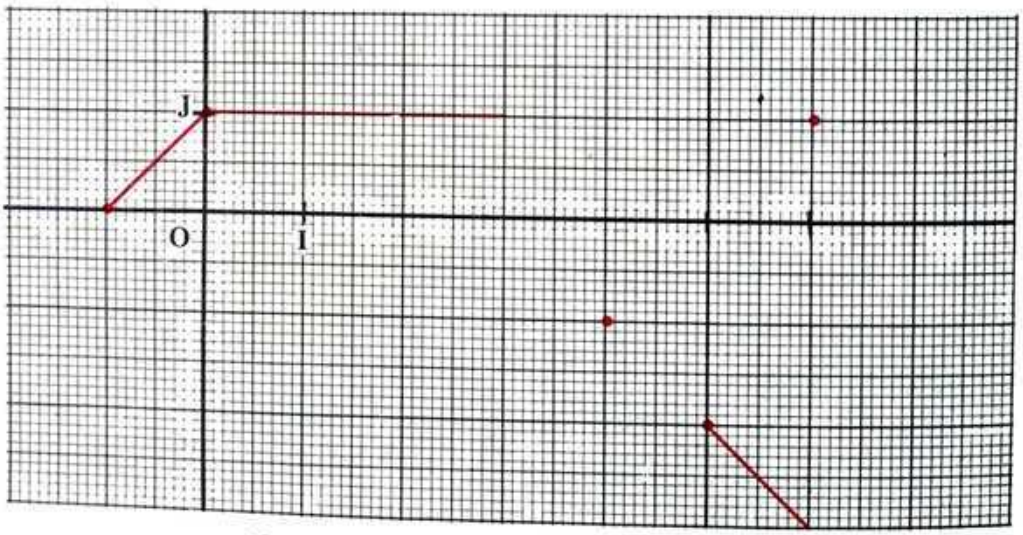


Remarque

Soit f une fonction d'une partie I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; f est affine par intervalles si et seulement si :

son ensemble de définition est la réunion d'un nombre fini de singletons et d'intervalles ouverts sur chacun desquels elle coïncide avec une fonction affine.

Soit f la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est la suivante :



f coïncide sur $[-1, 0]$ avec $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$

f coïncide sur $[0, 3[$ avec $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$

f coïncide sur $[5, 6[$ avec $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x + 3$

et $f(4) = -1$ et $f(6) = 1$

Soient $g_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $g_2 : [0, 3[\to \mathbb{R}$ et $g_3 : [5, 6[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto x + 1$ $\quad x \mapsto 1$ $\quad x \mapsto -x + 3$

On dit que g_1 est la **restriction** de f_1 à $[-1 ; 0]$
g_2 est la **restriction** de f_2 à $[0 ; 3[$
g_3 est la **restriction** de f_3 à $[5 ; 6[$

Définition

Soit f une fonction de E vers F, et A une partie non vide de son ensemble de définition Df.
L'**application** g de A vers F qui coïncide avec f sur A s'appelle **la restriction** de f à A et se note $f_{|A}$.
On dit que f est UN **prolongement** de g à Df.

Ainsi, dans l'exemple précédent on a :

$f_{|}[-1, 0] = g_1$ $\quad f_{|}[0, 3[= g_2$ $\quad f_{|}[5, 6[= g_3$

Remarques

1/ On constate qu'il n'existe qu'une seule restriction d'une fonction donnée à un ensemble donné mais que, par contre, une fonction peut avoir plusieurs prolongements à un même ensemble donné. Ainsi on a vu que f et f_1 sont deux prolongements distincts de g_1 à $\mathbb{R}$.

2/ Il résulte de la définition précédente que la restriction d'une fonction f de E vers F, à son ensemble de définition D_f est une application de D_f vers F que l'on veillera à noter différemment.

Exercice 10 Soient $f : [-3 ; 5] \to \mathbb{R}$ et $g : [3 ; 4] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x - 1| + |2 - x|$ $\quad x \mapsto 2x - 3$

Quelle est la restriction de f à $[0 ; 1]$?

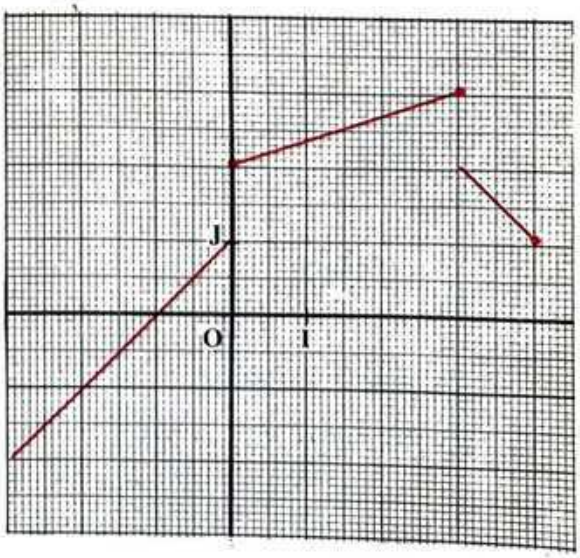
L'application g est-elle la restriction de f à $[3 ; 4]$?

Citer trois prolongements de g à $[1 ; 5]$.

4) Bijections

a) Définition

Soit g l'application de $]-3 ; 4]$ vers $]-2 ; 3]$ dont la courbe représentative (C) dans le repère (O, I, J) est donnée ci-contre.



Trouver l'ensemble des antécédents du nombre réel $\frac{3}{2}$ par g c'est trouver l'image réciproque de $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par g. On a : $g^{-1}(\{\frac{3}{2}\}) = \{\frac{7}{2}\}$

De même l'ensemble des antécédents de 2 par g est l'ensemble $g^{-1}(\{2\})$ égal à $\{0\}$.

Plus généralement soit b un élément de $]-2 ; 3]$ et (D_b) la droite d'équation $y = b$; l'ensemble des antécédents de b par g est l'ensemble des abscisses des points de l'ensemble $(C)\cap(D_b)$. Il apparaît graphiquement que pour tout b de $]-2 ; 3]$ l'ensemble $(C)\cap(D_b)$ est un singleton et donc que tout élément b de $]-2 ; 3]$ possède un et un seul antécédent par g dans $]-3 ; 4]$.

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Une application f de E vers F est une **bijection** (ou une application bijective) si et seulement si tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.

On a donc montré graphiquement que l'application g ci-dessus est une bijection de $]-3 ; 4]$ sur $]-2 ; 3]$.

Une bijection de E sur E s'appelle une **permutation** de E.

Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une application f de E vers F est une bijection on montre (éventuellement graphiquement) que pour tout élément b de F l'équation d'inconnue x dans E : $f(x) = b$ possède une et une seule solution.

Ainsi, par exemple, montrons que l'application :

$$f :]0,2] \to]1,5]$$
$$x \mapsto x^2 + 1$$

est bijective (on vérifiera que f est une application)

Soit $b \in]1 ; 5]$; résolvons l'équation $(\mathscr{E})$ d'inconnue x :

$(\mathscr{E}) : x \in]0,2]$ $\quad f(x) = b$

$(\mathscr{E})$ est équivalente à : $\quad x \in]0 ; 2]$ $\quad x^2 + 1 = b$

$(\mathscr{E})$ est équivalente à : $\quad x \in]0 ; 2]$ $\quad x^2 = b - 1$

Or, b appartient à $]1 ; 5]$ donc : $0 < b - 1$

donc : $(\mathscr{E}) : (x \in]0 ; 2]$ $\quad x = \sqrt{b-1}$ ou $x = -\sqrt{b-1})$

Or : $0 < b - 1 \leq 4$

donc : $0 < \sqrt{b-1} \leq 2$ et $-2 \leq \sqrt{b-1} < 0$

donc : $\sqrt{b-1} \in]0,2]$ mais $-\sqrt{b-1} \notin]0,2]$

donc : l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est, pour tout b de $]1 ; 5]$, le singleton $\{\sqrt{b-1}\}$

On a ainsi montré que f est une bijection de]0 ; 2] vers]1 ; 5].

2/ Pour montrer qu'une application f de E vers F n'est pas une bijection on exhibe au moins un élément b de F qui n'a pas d'antécédent par f ou qui en a plusieurs.

Ainsi, par exemple, $g : [-2 ; 2] \to [1,5]$
$x \mapsto x^2 + 1$

n'est pas bijective car l'élément 2 a deux antécédents dans $[-2 ; 2]$ à savoir : 1 et -1.

Quant à l'application $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

elle n'est pas bijective car l'élément -9 n'a pas d'antécédent par h.

Question 6 *Soit $A = \{a ; b ; c ; d\}$ et $B = \{1 ; 2 ; 3\}$. Citer trois applications non bijectives de A vers B. Existe-t-il une application bijective de A vers B ? Plus généralement trouver une condition nécessaire pour que, E et F étant deux ensembles finis, il existe au moins une bijection de E vers F.*

b) Application réciproque d'une bijection

Soit f une bijection de E vers F. La relation de F vers E qui, à tout élément de F, associe son unique antécédent dans E est une application appelée **application réciproque** de f et se note : f^{-1}

On a :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in E \quad (y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y))$$

Exercice 11 Trouver la plus grande partie A de l'ensemble de définition de f telle que la restriction g de f à A soit une bijection. Trouver alors g^{-1}

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n - 2$ *b)* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dfrac{x}{2}$

Exercice 12 Montrer que les applications suivantes sont des bijections ; trouver leurs applications réciproques.

a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+3, y-2)$

b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (y,x)$

c) $h : [0 ; 2] \to [0 ; 4]$, $x \mapsto x^2$

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x + 3}{5x - 7}$

Trouver l'ensemble de définition A de f. Trouver l'ensemble image B de A par f.

Soit $g : A \to B$.
$x \mapsto \dfrac{2x + 3}{5x - 7}$

Montrer que g est bijective. Trouver g^{-1}.

c) Propriété de l'application réciproque d'une bijection

Soit f une bijection de E vers F et f^{-1} de F vers E son application réciproque on a :

$$\forall \quad b \in E \qquad \forall\, x \in F\, [f^{-1}(x) = b \Leftrightarrow x = f(b)]$$

Ceci montre que, pour tout b de E l'équation d'inconnue x dans F :
$x \in F \qquad f^{-1}(x) = b$ possède une et une seule solution qui est f(b)

On a ainsi montré que f^{-1} est bijective et que son application réciproque est précisément f, c'est-à-dire que $(f^{-1})^{-1} = f$

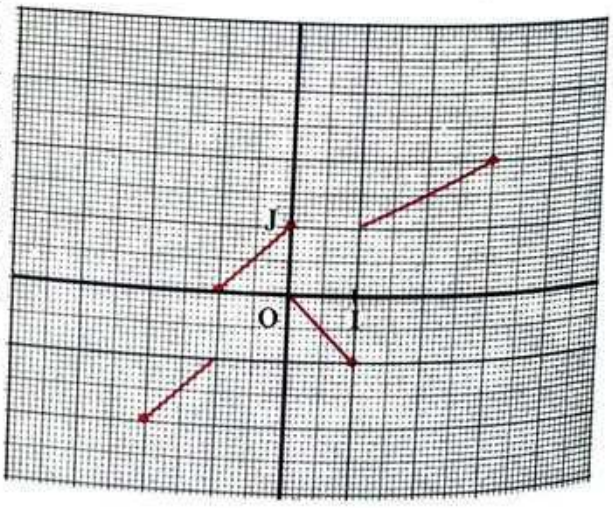
Théorème

Si f est une application bijective de E vers F alors son application réciproque f^{-1} est une bijection de F vers E.
L'application réciproque de f^{-1} est f.

d) Etude de la courbe représentative de l'application réciproque d'une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ sur une partie de $\mathbb{R}$.

Question 7

Soit f l'application de [−2 ; 3] vers [−2 ; 2] dont la représentation graphique (C) est ci-contre. Exprimer en fonction de x, l'image f(x) d'un nombre réel quelconque x de [−2 ; 3]. Montrer que f est bijective et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout nombre réel x de [−2 ; 2]. Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).
Trouver une transformation s du plan $\mathcal{P}$ telle que s(C) = (C').
(Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J)).



Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J), il est apparu dans la question 7 que les courbes représentatives (C) et (C') de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) dont une équation dans $\mathbb{R}$ est : y = x.

Plus généralement on a :

$\forall \quad M\binom{x}{y} \in \mathcal{P} \qquad M\binom{x}{y} \in (C) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } y = f(x))$

$\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } x = f^{-1}(y))$

$\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } M'\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in (C'))$

$\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in (C) \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(M) \in (C')$

où $S_{(\Delta)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à (Δ) définie par :

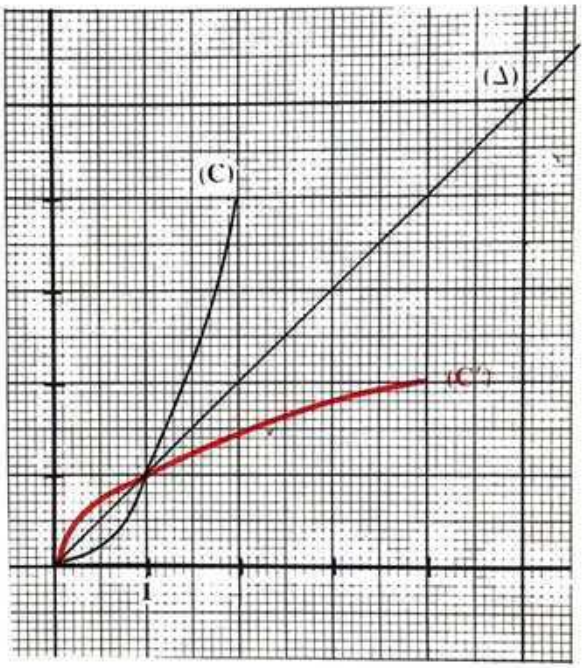
$$s_{(\Delta)} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit f une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de R. Dans un même repère orthonormé du plan les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice dont une équation est $y = x$.

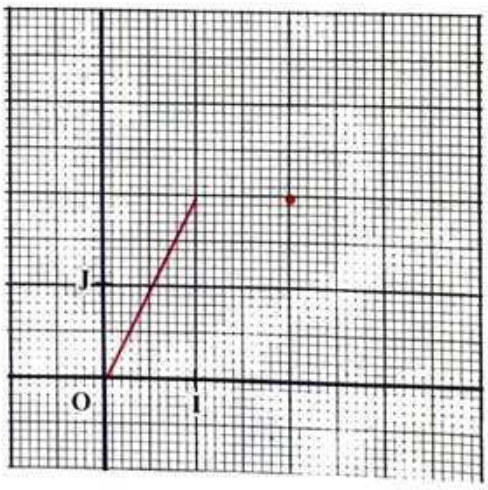
Ainsi, par exemple la réciproque de la bijection $f : [0 ; 2] \to [0, 4]$
$x \mapsto x^2$
est : $f^{-1} : [0, 4] \to [0, 2]$
$x \mapsto \sqrt{x}$

La courbe représentative (C') de f^{-1} dessinée ci-contre, est la symétrique de la courbe représentative (C) de f par rapport à la droite (Δ).



Exercice 14

Soit f l'application de $[0,1[\cup \{2\}$ vers [0,2] dont la représentation graphique C, dans le repère orthonormé (O, I, J) du plan est la suivante.
Montrer que f est une bijection puis tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} dans ce même repère.



Exercice 15 Montrer que les applications suivantes sont des bijections et trouver leurs bijections réciproques :

$$f : [1, 2] \to [\frac{1}{2}, 1] \qquad g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

Exercice 16 Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé (O, I, J)

$$\text{Soit } f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

Montrer que f est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$ et trouver sa bijection réciproque.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre 0 et de rayon 3. Soit $(\mathscr{D})$ le rectangle de sommets $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Dessiner $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{D})$, $f(\mathscr{C})$, $f(\mathscr{D})$, $f^{-1}(\mathscr{C})$ et $f^{-1}(\mathscr{D})$.

5) Surjections

Question 8 *Pour chacune des applications suivantes l'ensemble image est-il égal à l'ensemble d'arrivée ?*

$$F_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad f_3 : \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R}$$
$$n \mapsto n + 1 \qquad n \mapsto n + 2 \qquad (x,y) \mapsto (2,y)$$

$$f_4 : Q \to Q \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad f_6 : [-2,2[\to \{-2,-1,0,1\}$$
$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto E(x)$$

Définition

Une application f de E vers F est une **surjection** ou une application surjective si et seulement si on a : f(E) = F.

Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une application est surjective :

Soit f : E → F une application, comme on a f(E) ⊂ F, montrer que f est surjective revient à montrer que l'on a F ⊂ f(E) c'est-à-dire que :

$\forall b \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = b$

c'est-à-dire que :

Pour tout élément b de F, l'équation d'inconnue x dans E :

$x \in E$, $b = f(x)$

possède au moins une solution.

Ainsi, par exemple, soit $f : [-1 ; 2] \to [0 ; 2]$
$x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$

(On vérifiera que f est une application)
Montrons que f est surjective :
Soit b un élément quelconque fixé de [0 ; 2]
résolvons l'équation ($\mathscr{E}$) d'inconnue x :

$x \in [-1 ; 2]$, $\sqrt{4 - x^2} = b$

$b \in [0 ; 2]$ donc : $b \geq 0$. ($\mathscr{E}$) est donc équivalente à :
$x \in [-1 ; 2]$, $x^2 = 4 - b^2$

Il reste à voir si l'un au moins des deux nombres réels $\sqrt{4 - b^2}$ et $-\sqrt{4 - b^2}$ appartient à $[-1 ; 2]$

$$-1 \leq -\sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{4 - b^2}$$
$$-1 \leq -\sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq 4 - b^2$$
$$-1 \leq -\sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow b^2 \geq 3$$
$$-1 \leq -\sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq b \leq 2$$

(Regarder : 

)

On a ainsi montré que, pour tout nombre réel b de [0 ; 2], le nombre réel $-\sqrt{4 - b^2}$ appartient à $[-1 ; 2]$ si et seulement si b appartient à $[\sqrt{3} ; 2]$.

De la même manière on a :

$$-1 \leq \sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - b^2} \leq 2$$
$$-1 \leq \sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 4 - b^2 \leq 4$$
$$-1 \leq \sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq b^2$$
$$-1 \leq \sqrt{4 - b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq b \leq 2$$

On a ainsi montré que, quelque soit le nombre réel b de [0 ; 2], le nombre réel $\sqrt{4 - b^2}$ appartient à $[-1 ; 2]$

de plus : $\forall b \in [0 ; 2]$ $\quad (\sqrt{4 - b^2} = -\sqrt{4 - b^2} \Leftrightarrow b = 2)$

En conclusion :

Si b est élément de $[0 ; \sqrt{3}[\cup \{2\}$ b possède un et un seul antécédent : $\sqrt{4 - b^2}$

Si b est élément de $[\sqrt{3} ; 2[$, b possède deux antécédents : $\sqrt{4 - b^2}$ et $-\sqrt{4 - b^2}$

L'application f est donc une surjection de $[-1, 2]$ sur $[0 ; 2]$

2/ Pour montrer qu'une application n'est pas surjective :

On exhibe au moins un élément de l'ensemble d'arrivée qui ne possède pas d'antécédent par f c'est-à-dire que :

$\exists\, b \in F \quad \forall\, x \in E \quad f(x) \neq b$

Ainsi, par exemple, soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

f n'est pas surjective car -4 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 17 Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2^n$; $\mathbb{N} \to \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $n \mapsto r$ où r est le reste de la division de n par 5

Exercice 18 Trouver la partie A de $\mathbb{R}$ telle que la fonction f définie par

$f : [-1 ; 1] \to A$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

soit une application surjective.

Exercice 19 Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $|f(x)| < 1$

L'application f est-elle surjective ?

Remarque

Soit f une application de E vers F. L'application qui coïncide avec f sur E mais dont l'ensemble d'arrivée est l'image directe de E par f, est une surjection de E sur f(E) que l'on désignera également par f.

6) Injections

Question 9 *Pour chacune des applications suivantes trouver le nombre d'antécédents d'un élément quelconque de l'ensemble d'arrivée.*

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$; $f_3 : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto (3x, 5y)$

$f_4 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x, 1)$; $f_5 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$

Définition

Une application f de E vers F est une **injection** ou une application injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus un antécédent par f.

Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une application f de E vers F est injective :

On peut montrer que, pour tout élément b de F l'équation d'inconnue x dans E : $b = f(x)$ possède au plus une solution (c'est-à-dire une ou zéro solution).

Ainsi, par exemple, soit f de $[-2 ; 1]$ vers $[-2 ; 1[$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [-2 ; 0] & f(x) = x \\ \forall x \in]0 ; 1] & f(x) = \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$$

(On vérifiera que f est une application)
Montrons que f est injective.

Soit un nombre réel b de $[-2 ; 1[$, résolvons l'équation $(\mathscr{E})$ d'inconnue x :

$(\mathscr{E})$ $\quad x \in [-2,1]$, $f(x) = b$

Soient f_1 et f_2 les restrictions respectives de f aux intervalles $[-2 ; 0]$ et $]0 ; 1]$
L'ensemble (S) des solutions de $(\mathscr{E})$ est la réunion des ensembles (S_1) et (S_2) des solutions des deux équations $(\mathscr{E}_1)$ et $(\mathscr{E}_2)$ suivantes :

$(\mathscr{E}_1)$ $\quad x \in [-2 ; 0]$, $f_1(x) = b$
$(\mathscr{E}_2)$ $\quad x \in]0 ; 1]$, $\quad f_2(x) = b$

Résolvons $(\mathscr{E}_1)$: $x \in [-2 ; 0]$, $\qquad x = b$

Comme b est élément de $[-2, 1[$ on a :

$S_1 = \{b\}$ pour tout b de $[-2 ; 0]$
$S_1 = \emptyset$ pour tout b de $]0 ; 1[$

Résolvons $(\mathscr{E}_2)$: $x \in]0, 1]$, $\dfrac{x}{x+1} = b$

$(\mathscr{E}_2)$ est équivalente à : $x \in]0,1]$, $x = \dfrac{b}{1-b}$

Il reste donc à voir si $0 < \dfrac{b}{1-b} \leq 1$ pour $-2 \leq b < 1$

Pour cela résolvons le système d'inconnue b :

$$b \in [-2 ; 1[, \qquad 0 < \frac{b}{1-b} \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{1-b} \leq 1$$

c'est-à-dire : $b \in [-2 ; 1[, \qquad 0 < \dfrac{b}{1-b}$ et $\dfrac{2b-1}{1-b} \leq 0$

d'où les deux tableaux suivants :

b	-2		0		1
b		$-$	0	$+$	
$1-b$		$+$	|	$+$	0
$\frac{b}{1-b}$		$-$	0	$+$	|

b	-2		$1/2$		1
$2b-1$		$-$	0	$+$	
$1-b$		$+$	|	$+$	0
$\frac{2b-1}{1-b}$		$-$	0	$+$	|

$\forall\, b \in [-2\,;\,1[\qquad (0 < \frac{b}{1-b} \leq 1 \Leftrightarrow b \in\,]0\,;\,\frac{1}{2}])$

On a donc : $S_2 = \emptyset$ pour tout b de $[-2\,;\,0] \cup\,]\frac{1}{2}\,;\,1[$

$S_2 = \{\frac{b}{1-b}\}$ pour tout b de $]0\,;\,\frac{1}{2}]$

En conclusion :

L'ensemble S des solutions de l'équation :

$(\mathscr{E})$ $x \in [-2\,;\,1]$, $f(x) = b$

est :

$S = \{b\}$ si $-2 \leq b \leq 0$

$S = \{\frac{b}{1-b}\}$ si $0 < b \leq \frac{1}{2}$

$S = \emptyset$ si $\frac{1}{2} < b < 1$

L'application f est donc une injection de $[-2\,;\,1]$ vers $[-2\,;\,1[$.

2/ Pour montrer qu'une application f de E vers F n'est pas injective :

On montre qu'il existe au moins un élément de F qui a deux antécédents distincts dans E, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments distincts de E qui ont même image par f.

$$\exists\, x \in E \quad \exists\, x' \in E \quad (f(x) = f(x') \quad \text{et} \quad x \neq x')$$

Ce qui revient à trouver deux éléments distincts de E ayant même image par f.

Ainsi, par exemple, soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 1$

f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$

Remarques

On vient de voir que si f est une application de E vers F :

(1) (f non injective) est équivalent à : $(\exists (x,x') \in E \times E \qquad f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x')$

donc :

(2) (f injective) est équivalent à : $(\forall(x,x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

donc :

(3) (f injective) est équivalent à : $(\forall(x,x') \in E \times E \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

d'où :

Méthode pratique

Pour montrer qu'une application f de E vers F est injective en utilisant la deuxième équivalence on se donne deux éléments quelconques x et x' de E d'images égales et l'on montre qu'ils sont égaux.

Ainsi, par exemple, montrons que l'application f ci-dessous est injective

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto 3x^2 + 5$

Soient x et x' deux nombres réels positifs quelconques tels que $f(x) = f(x')$

alors on a : $3x^2 + 5 = 3x'^2 + 5$

donc : $3(x^2 - x'^2) = 0$
donc : $(x + x')(x - x') = 0$
donc : $x = -x'$ ou $x = x'$
donc : $x = x'$ car x et x' sont de même signe.

Remarque

La caractérisation (3) d'une application injective est d'un emploi peu aisé sauf lorsque f est une application strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
En effet, si f est strictement croissante sur I on a :

$$\forall(x,x') \in I \times I \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < (x'))$$

donc deux éléments quelconques distincts de I ont deux images distinctes.
Si f est strictement décroissante sur I, alors on a :

$$\forall(x,x') \in I \times I \quad (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$$

et donc encore, deux éléments quelconques distincts de I ont deux images distinctes.
Ainsi toute application strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est injective.
Par exemple : soit $f : [1 ; 3] \to \mathbb{R}$. f est injective car strictement décroissante sur [1;3].

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Exercice 20 Les applications suivantes sont-elles injectives ?

a/ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto (-1)^n$

b/ $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$x \mapsto (x + 1, 2x)$

c/ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x + 1)^2$

d/ La projection orthogonale P du plan $\mathcal{P}$ sur la deuxième bissectrice dont une équation est : $y + x = 0$

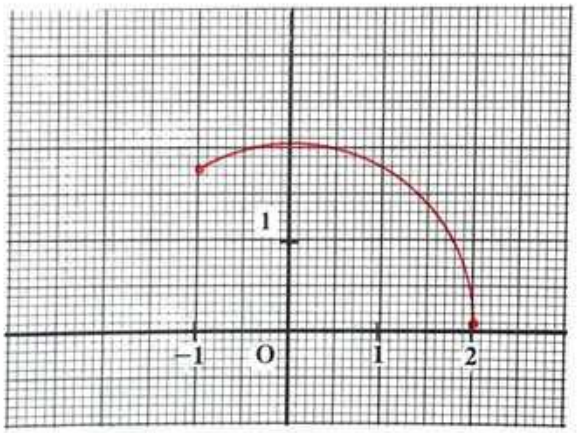
Exercice 21 Soit l'application $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (x + 1)^2$
Trouver la plus grande partie A de $\mathbb{R}$. telle que la restriction g de f à A soit injective.

7) Nature d'une application

Etudier la nature d'une application f de E vers F c'est chercher à savoir si elle est bijective, ou injective, ou surjective.
Il ressort des définitions précédentes que, pour étudier la nature de f, il faut, pour un élément quelconque b de F, évaluer le nombre d'éléments de l'ensemble S_b des solutions de l'équation ($\mathscr{E}$) d'inconnue réelle x :

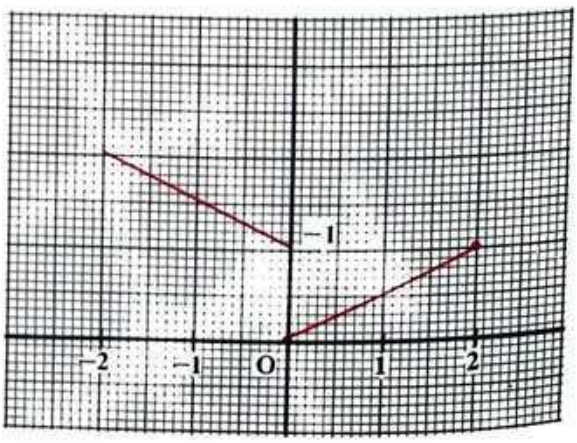
$$(\mathscr{E}) \qquad x \in E \,.\, f(x) = b$$

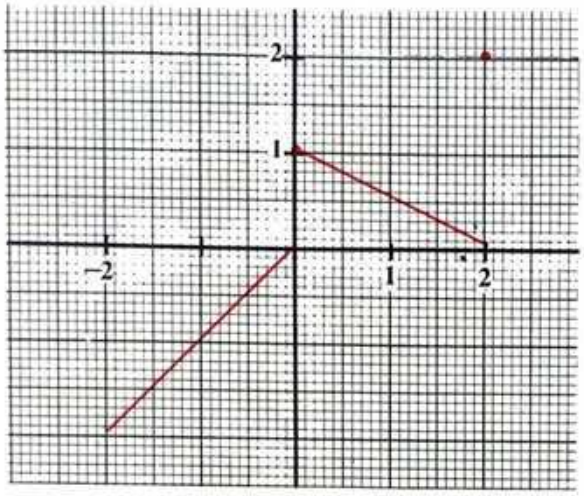
En notant card (S_b) (ce qui se lit **cardinal** de l'ensemble S_b) le nombre d'éléments de S_b, on obtient les trois caractérisations suivantes :
1/ (f est bijective) est équivalent à (pour tout b de F, card (S_b) est égal à 1)
2/ (f est surjective) est équivalent à (pour tout b de F, card (S_b) est supérieur ou égal à 1).
3/ (f est injective) est équivalent à (pour tout b de F, card (S_b) est inférieur ou égal à 1).
De ces trois caractérisations, on déduit qu'une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.
Si l'on dispose de la représentation graphique (C) de F dans un repère $\mathscr{R}$ du plan, chercher le nombre d'éléments de S_b revient à chercher le nombre de points d'intersection de (C) et de la droite (D_b) dont une équation est $y-b=o$ dans $\mathscr{R}$.
Ainsi, par exemple, étudions la nature des trois applications f, g et h dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :



$f : [-1, 2] \to [0, 2]$
$x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$
f est surjective mais n'est pas injective

g de $]-2, 2]$ vers $[0, 2[$ est bijective





h de]−2, 2] vers]−2, 2]
h est injective mais n'est pas surjective.

8) Composition des fonctions

On rappelle que, f étant une fonction de E vers F, g une fonction de F vers G, la fonction notée g o f est définie par :

$$g \circ f : E \to G$$
$$x \mapsto g[f(x)]$$

et s'appelle la composée de f par g.

Remarque

Soient id_E et id_F les applications définies par :

$id_E : E \to E$ $\quad$ $id_F : F \to F$

$x \mapsto x$ $\quad$ $x \mapsto x$

Pour toute application f de E vers F on a :

$$f \circ id_E = f \quad \text{et} \quad id_F \circ f = f$$

Exercice 22

Soit $f : [0 ; 2] \to \mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in [0 ; 1]$ $\quad f(x) = x$ $\quad ; \quad \forall x \in]1 ; 2]$ $\quad f(x) = -x + 2$

Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in [0 ; \frac{1}{2}]$ $\quad g(x) = 1$ $\quad ; \quad \forall x \in]\frac{1}{2}, 1]$ $\quad g(x) = x$

Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan. Trouver $f([0 ; 2])$, $f^{-1}([0 ; \frac{1}{2}])$ et $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$

Pour tout nombre réel x de [0,2], exprimer g o f(x).

Question 10

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Trouver u, v, k, et l telles que :

$u = g \circ f$ $\quad v = h \circ g$

$k = h \circ u$ $\quad 1 = v \circ f$.

Remarque

Soient f une fonction de E vers F, g une fonction de F vers G et h une fonction de G vers H on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Question 11

Soit $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$.
$x \mapsto \dfrac{x+3}{x+2}$

Montrer que f est bijective et trouver f^{-1}.
Trouver $f^{-1} \circ f$ *et* $f \circ f^{-1}$.

Plus généralement soit f une bijection de E vers F de bijection réciproque f^{-1} ; trouvons $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$.
Soit x un élément quelconque de E et y l'unique élément de F tel que $y = f(x)$.
On a : $x = f^{-1}(y)$
or : $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)]$
donc : $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y)$
donc : $f^{-1} \circ f(x) = x$
On a ainsi montré que :
$\forall x \in E \quad f^{-1} \circ f(x) = x$
c'est-à-dire que : $f^{-1} \circ f = id_E$
Soit g, égale à f^{-1}, g est une bijection de F vers E de bijection réciproque g^{-1} égale à f, d'après ce qui précède on a :

$$g^{-1} \circ g = id_F$$

c'est-à-dire : $f \circ f^{-1} = id_F$

Théorème

Soit f une bijection de E vers F de bijection réciproque f^{-1} on a :

$$f^{-1} \circ f = id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = id_F$$

Remarques

1/ Soit f une application de E vers F. S'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ alors f est une bijection et $f^{-1} = g$.
2/ On appelle **involution** toute application f d'un ensemble E vers lui-même telle que $f \circ f = id_E$. Il en est ainsi par exemple de toute symétrie plane, ou de l'application de $\mathbb{R}^*$ vers lui-même qui à un nombre réel associe son inverse. Il résulte de la remarque 1 que toute involution est une bijection qui est égale à son application réciproque.

Question 12

Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x, 2y)$ $\quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x+1, y+3)$
Montrer que f et g sont bijectives.
Trouver f^{-1} *et* g^{-1}. *Trouver* $f^{-1} \circ g^{-1}$ *et* $g^{-1} \circ f^{-1}$
Trouver g o f puis montrer que g o f est bijective et trouver $(g \circ f)^{-1}$

Remarque

Si f est une bijection de E vers F, g une bijection de F vers G alors g o f est une bijection de E vers G et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exercice 23

Soient les quatre applications de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ définies pour tout réel x non nul par :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Après avoir montré que chacune de ces quatre applications est une bijection, compléter la table de composition ci-contre

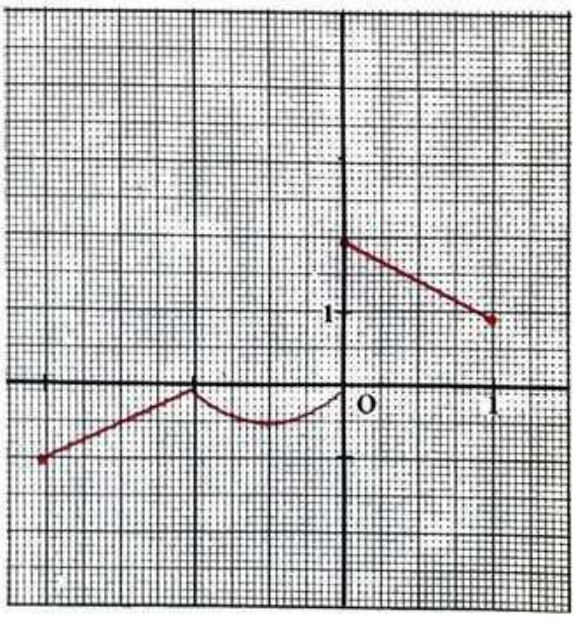
o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

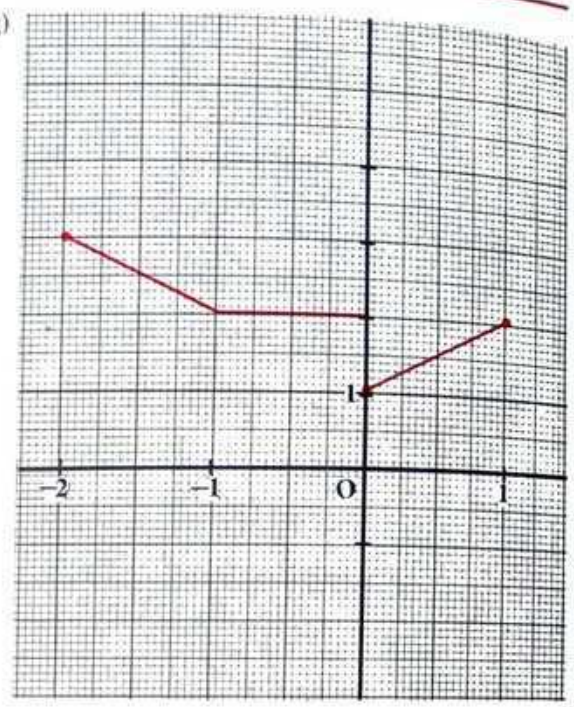
2 Fonctions numériques de la variable réelle

1) Somme. Produit. Produit par un nombre réel.

Soient f et g les deux applications de [−2 ; 1] vers $\mathbb{R}$ dont les représentations graphiques sont données ci-contre.
Sachant que chacune de ces deux applications coïncident sur chacun des trois intervalles [−2 ; −1[, [−1, 0[et [0, 1] avec une application affine ou une application polynôme de degré 2, exprimons, pour tout nombre réel x de [−2 ; 1] les nombres réels f(x) et g(x).

(Cf)





Sur $[-2 ; -1[$: f coïncide avec l'application affine :

$[f_1 : x \mapsto ax + b]$ telle que $f_1(-2) = -1$ et $f_1(-1) = 0$

On a donc : $-2a + b = -1$ et $-a + b = 0$

donc : $a = 1$ et $b = 1$

donc : $f_1 : x \mapsto x + 1$

Sur $[-1 ; 0[$: f coïncide avec l'application polynôme de degré 2 :

$[f_2 : x \mapsto ux^2 + ux + w]$ telle que :

$$f_2(-1) = 0 \qquad f_2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \text{ et } f_2(0) = 0$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} u - v + w = 0 \\ \frac{u}{4} - \frac{v}{2} + w = -\frac{1}{2} \\ w = 0 \end{cases}$$

donc : $u = 2 \qquad v = 2$ et $w = 0$

donc : $f_2 : x \mapsto 2(x^2 + x)$.

Sur $[0,1]$: f coïncide avec l'application affine f_3 telle que : $f_3(0) = 2$ et $f_3(1) = 1$

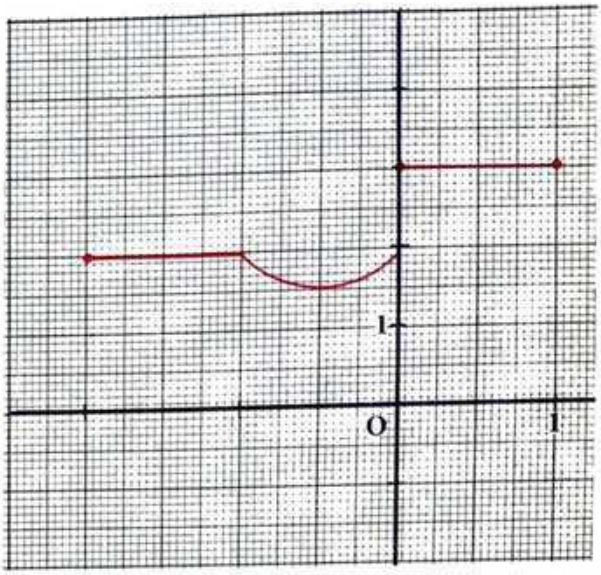
d'où : $f_3 : x \mapsto -x + 2$

On procédera de même pour g.

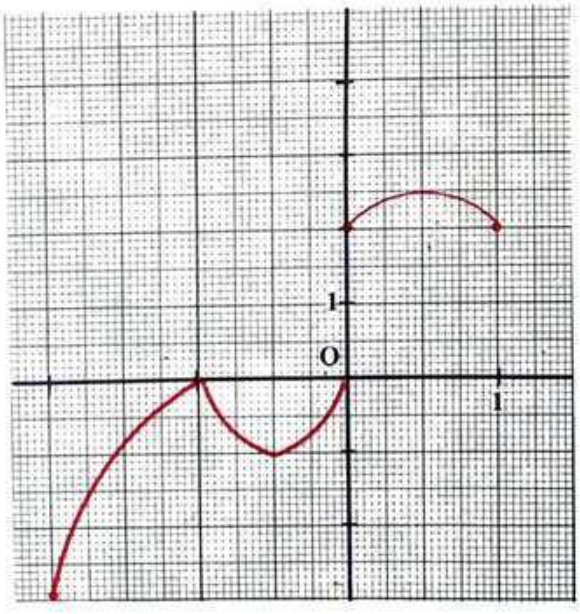
On résume les résultats dans le tableau ci-dessous :

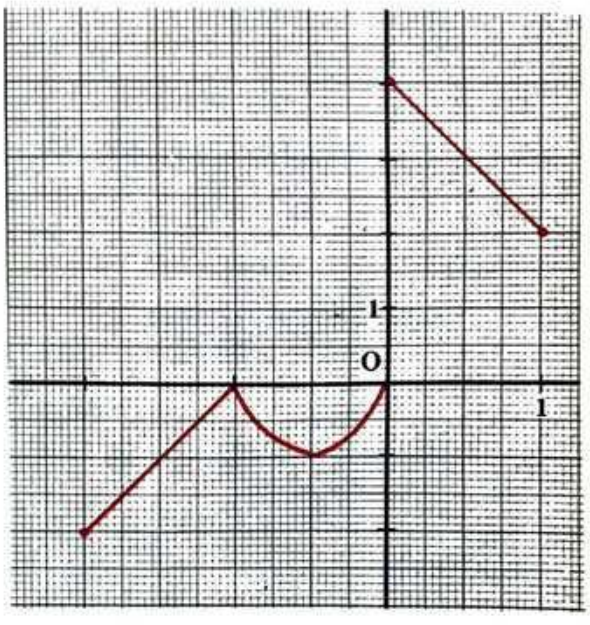
x	−2	−1	0	1
f(x)	x + 1	$2(x^2 + x)$	−x + 2	
g(x)	−x + 1	2	x + 1	

Question 13 *Soit s l'application de [−2 ; 1] vers ℝ qui, sur chacun des trois intervalles [−2 ; −1[, [−1 ; 0[, [0, 1], coïncide avec une application polynôme de degré au plus 2 et dont la représentation graphique est donnée ci-contre.*
Exprimer, pour tout nombre réel x de [−2, 1], le nombre réel s(x).
Montrer que : ∀x∈[−2;1] s(x) = f(x) + g(x).



Question 14 *Soient p et h les deux applications de [−2 ; 1] vers ℝ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous. Sachant que p et h coïncident sur chacun des intervalles [−2 ; −1[, [−1, 0[et [0, 1] avec une fonction affine ou une fonction polynôme de degré 2 montrer que :*
$\forall\, x \in [-2\,;\,1]$ $\quad p(x) = f(x)\ x\ g(x)$
$\forall\, x \in [-2\,;\,1]$ $\quad h(x) = 2f(x)$.





Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et soit k un nombre réel.
On appelle **fonction somme des deux fonctions** f et g la fonction :

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

On appelle **fonction produit des deux fonctions** f et g la fonction

$$f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \times g(x)$$

On appelle **fonction produit du nombre réel** k par **la fonction** f la fonction :

$$k.f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto k \times f(x).$$

Remarques

- Si les ensembles de définition de f et g sont respectivement les parties D_f et d_g de $\mathbb{R}$ l'ensemble de définition de f + g et de f × g sera $D_f \cap D_g$. Celui de k.f sera D_f.
- La fonction 1.f est la fonction f.

La fonction (−1).f se note −f
La fonction 0.f est la fonction qui, à tout élément x de D_f associe 0.

2) Inverse d'une fonction

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$
telle que : $\begin{cases} \forall x \in]1, 3] & g(x) = x - 1 \\ \forall x \in]\leftarrow ; 1] \cup] 3 ; \rightarrow[& g(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

De la même manière que pour la somme ou le produit de deux fonctions on définit l'inverse de la fonction g par la fonction i telle que :

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$

Question 15 *Montrer que i est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Question 16 *La fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{1}{f(x)}$ est-elle une application ?*

On définit le quotient de la fonction f par la fonction g comme étant la fonction q définie par :

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

On note $q = \frac{f}{g}$

Question 17 *Montrer que q est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*
Soit la fonction t : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)}.$$

t est-elle une application ?

Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle **fonction inverse de la fonction** f la fonction :

$$\frac{1}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{g(x)}$$

On appelle **fonction quotient de la fonction** f **par la fonction** g la fonction :

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

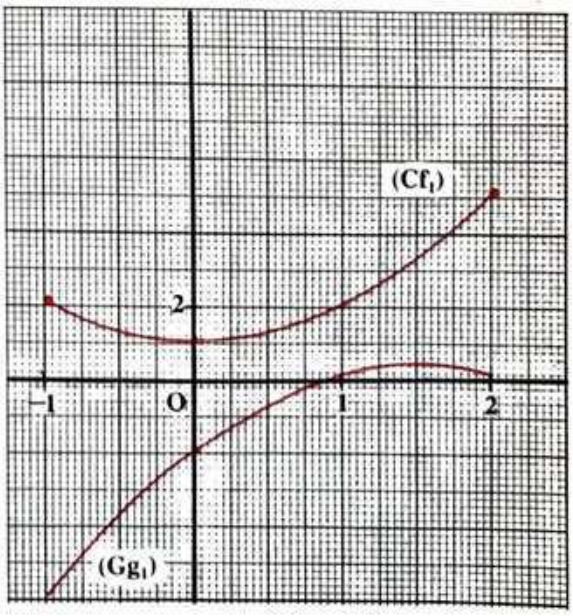
Remarques

On a : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$

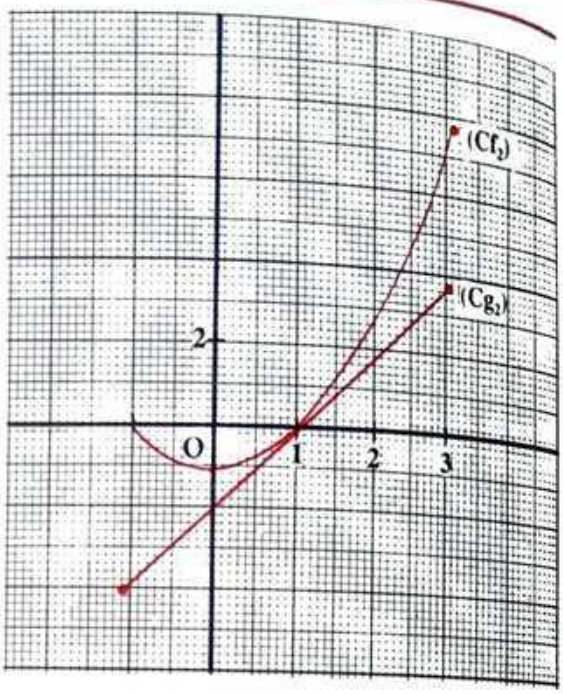
Soient D_f et D_g les ensembles de définition respectifs de f et de g et X l'ensemble des éléments x de D_g tels que $g(x) \neq 0$; l'ensemble de définition de $\frac{1}{g}$ est X, celui de $\frac{f}{g}$ est $D_f \cap X$.

3) Comparaison de deux fonctions

Soient f_1 et g_1 les deux fonctions de $[-1 ; 2]$ vers $\mathbb{R}$ telle que :
$f_1 : x \mapsto x^2 + 1$
$g_1 : x \mapsto -x^2 + 3x - 2$



Soient f_2 et g_2 les deux fonctions de $[-1\ ;3]$ vers $\mathbb{R}$ telles que :
$f_2 : x \mapsto x^2 - 1$
$g_2 : x \mapsto 2x - 2$



Question 18 *Que peut-on dire dans chacun des deux cas ci-dessus des positions relatives des représentations graphiques des deux fonctions considérées ?*

Question 19 *Calculer, pour tout nombre réel x de $[-1\ ;\ 2]$ le nombre réel $h_1(x)$ égal à $f_1(x) - g_1(x)$*
Calculer, pour tout nombre réel x de $[-1\ ;\ 3]$ le nombre réel $h_2(x)$ égal à $f_2(x) - g_2(x)$ et trouver les ensembles S_1 et S_2 tels que :
$S_1 = \{x/x \in [-1\ ;\ 2]$ et $h_1(x) > 0\}$
$S_2 = \{x/x \in [-1\ ;\ 3]$ et $h_2(x) \geq 0\}$

On a ainsi montré que :
$\forall x \in [-1\ ;\ 2] \quad f_1(x) > g_1(x)$
et $\forall x \in [-1\ ;\ 3] \quad f_2(x) \geq g_2(x)$
On dit que f_1 est strictement plus grande que g_1 et l'on écrit $f_1 > g_1$
De même on dit que f_2 est plus grande que (ou supérieure à) g_2 et l'on écrit $f_2 \geq g_2$.

Définition

Soient f et g deux fonctions de même ensemble de définition D
On dit que f est **plus grande que** g et l'on écrit $f \geq g$ si et seulement si :
$\forall x \in D \quad f(x) \geq g(x)$
On dit que f est **strictement plus grande que** g et l'on écrit $f > g$ si et seulement si :
$\forall x \in D \quad f(x) > g(x)$

Remarques

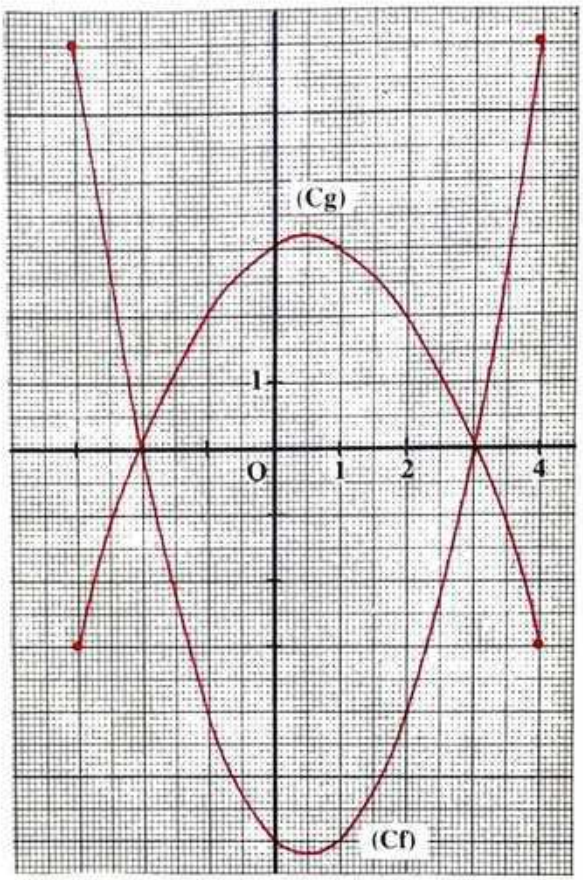
- Si f est plus grande (resp. strictement plus grande) que g on peut dire aussi que g est plus petite (resp. strictement plus petite) que f et l'on écrit $g \leq f$. (resp. $g < f$)
- Les relations $\leq$ et $\geq$ sont deux relations d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle d'ensemble de définition D.

• Dans la suite on notera $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle d'ensemble de définition D.

Question 20 *Soient f et g les deux applications de [−3 ; 4] vers ℝ définies par*

$\forall x \in [-3\,;\,4]$
$$f(x) = x^2 - x - 6$$
$\forall x \in [-3\,;\,4]$
$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 3$$

Les deux représentations graphiques de ces applications sont données ci-contre. Ces deux applications sont-elles comparables c'est-à-dire : l'une des deux est-elle plus grande ou plus petite que l'autre ?



Cas particuliers

Soit D ⊂ ℝ et f appartenant à $\mathbb{R}^D$. Soit M un nombre réel et g l'application constante telle que : g : D → ℝ
x ↦ M

Si f est plus petite que g on dit que f est **majorée** par M, ceci revient à dire que :
$\forall x \in D \quad f(x) \leq M$.

On écrit f ≤ M et on dit que M est un **majorant** de f.

De même on dit que f est **minorée** par le nombre réel m si f est plus grande que l'application constante h telle que h : D → ℝ
x ↦ m

ceci revient à dire que :
$\forall x \in D \quad m \leq f(x)$

On écrit m ≤ f et on dit que m est un **minorant** de f.

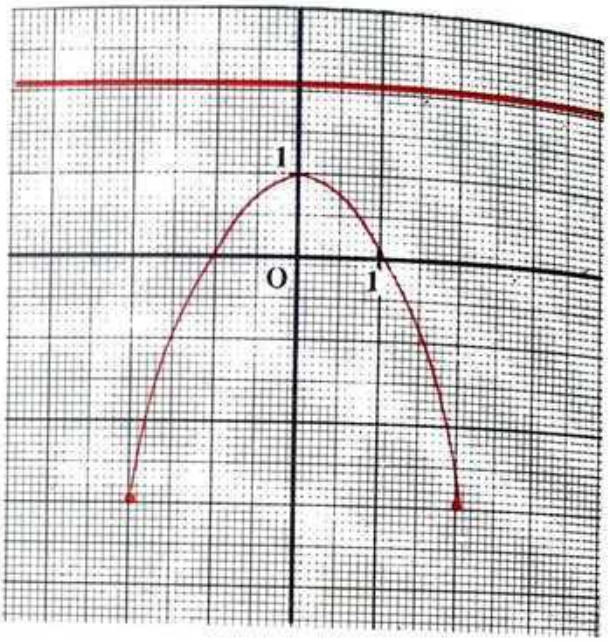
Définitions

Soit f une fonction numérique de la variable réelle d'ensemble de définition D.
On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**) si et seulement si il existe un nombre réel M (resp. m) tel que, pour tout élément x de D on a :
$f(x) \leq M \quad$ (resp. $m \leq f(x)$)
Si la fonction f est à la fois majorée et minorée on dit qu'elle est **bornée**.

Considérons les exemples ci-dessous :

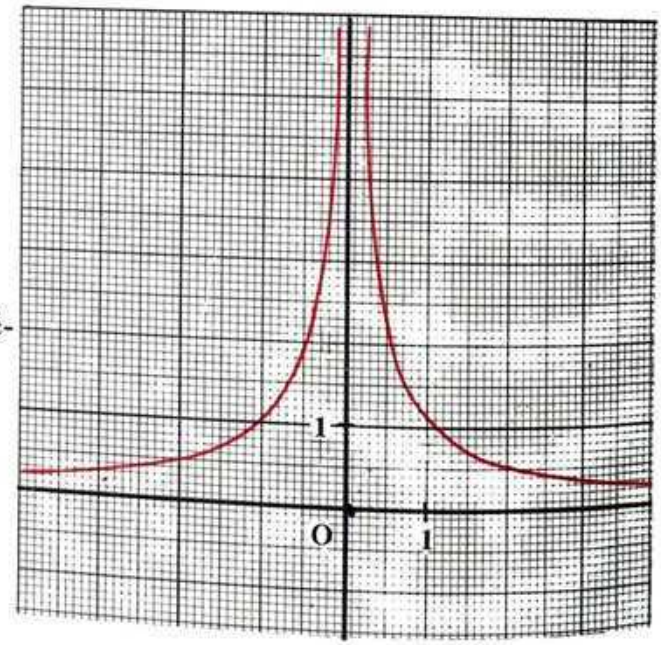
$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -x^2 + 1$

On a : $f \leq 2$
2 est un majorant de f.
Et plus généralement tout nombre réel plus grand ou égal à 1 est majorant de f.



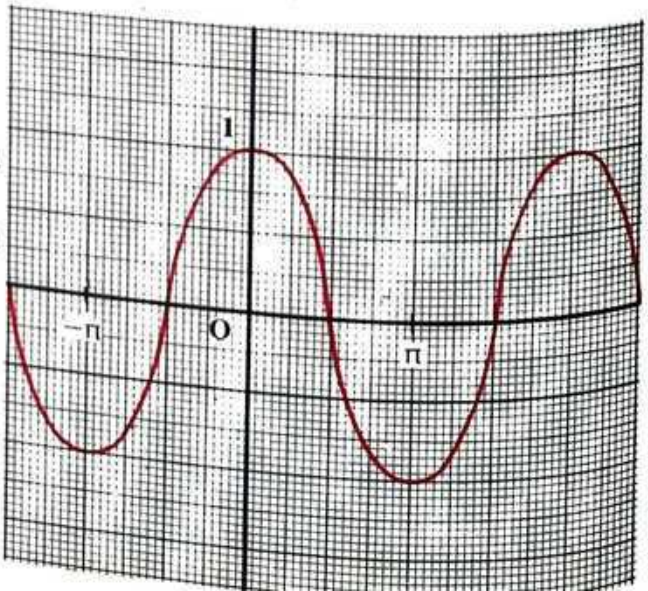
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$

On a : $f > 0$
0 est un minorant de f.
Et plus généralement tout nombre réel négatif est un minorant de f.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$

On a $-1 \leq f(x) \leq 1$
f est bornée.
Tout nombre réel plus grand que 1 est un majorant de f.
Tout nombre réel plus petit que -1 est un minorant de f.



Méthode pratique

1° Soit f un élément de $\mathbb{R}^D$, pour montrer que :

a/ Un nombre réel M donnée est un majorant de f on montre que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(x \in D , f(x) \leq M)$ est D.

b/ Un nombre réel m donné est un minorant de f on montre que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(x \in D , m \leq f(x))$ est D.

c/ f est bornée par les nombres réels m et M donnés on montre que l'ensemble des solutions du système : $(x \in D , m \leq f(x) \leq M)$ est D.

Montrons par exemple que $\frac{1}{3}$ est un majorant de la fonction

$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3}$

Soit $S = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}\right\}$

Pour tout nombre réel x, on a : $x^2 \geq 0$

$x^2 + 3 \geq 3$

donc $\frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}$

On a ainsi montré que : $S = \mathbb{R}$

c'est-à-dire que : t est majorée par $\frac{1}{3}$

2° Soit f un élément de $\mathbb{R}^D$ pour montrer que :

a/ f est majorée il suffit de trouver

- soit un majorant de f
- soit une fonction g dont on connaît un majorant et qui est plus grande que f.

b/ f est minorée il suffit de trouver

- soit un minorant de g
- soit une fonction h dont on connaît un minorant et qui est plus petite que f.

Soit par exemple, la fonction $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{\sin x}{x^2 + 3}$

Montrons que k est majorée

On sait que la fonction sinus est majorée par 1 donc : pour tout nombre réel x on a :

$\frac{\sin x}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{x^2 + 3}$

c'est-à-dire : $k \leq t$

Or t est majorée par $\frac{1}{3}$, d'après ce qui précède donc : k est majorée.

3°/ Soit f un élément de $\mathbb{R}^D$, il résulte de la définition que :

(f est majorée) est équivalent à $(\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M)$

donc :

(f n'est pas majorée) est équivalent à $(\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in D \quad f(x) > M)$

De la même manière
(f est minorée) est équivalent à $(\exists\, m \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in D \quad m \leq f(x))$
donc :
(f n'est pas minorée) est équivalent à $(\forall\, m \in \mathbb{R} \quad \exists\, x \in D \quad m > f(x))$
Soit par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 3$
Montrons que f n'est pas majorée
Soit M un nombre réel donné, il existe des nombres réels strictement plus grands que le nombre réel $\frac{M - 3}{2}$; soit x l'un d'entre eux, on a alors :

$$2x + 3 > M$$

c'est-à-dire : $f(x) > M$
On a ainsi montré que f n'est pas majorée.

Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x \sin x$
Les applications $f_{|\,[0\,;\,1]}$, $f_{|\,[-1\,;\,1]}$ et $f_{|\,[-10+6,\,+\,10+6]}$ sont-elles bornées ?

Exercice 25

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$. Citer des majorants et des minorants de f.

Exercice 26

Soient $f : [1, \to [\to \mathbb{R}$ et $g :]0\,;\,1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x \mapsto \frac{1}{x}$
Montrer que f est bornée.
Montrer que g est minorée mais n'est pas majorée

Réponses aux questions

Q 1 : $D_h = [-4 ; -2] \cup]-1 ; 7]$

Q 2 : $h(]-1 ; 1]) =]2 ; 4]$
$h([-2 ; 3]) = [0 ; 4]$
$h(]\leftarrow ; -4[) = \emptyset$
Remarque : si $A \cap D_h = \emptyset$ alors on a $h(A) = \emptyset$
$h(\{3 ; 6\}) = \{0\}$
$h(\mathbb{R}+) = [-2 ; 4]$

Q 3 : $h^{-1}([5 ; 6[) = \emptyset$
$h^{-1}([4 ; 5[) = \{1\}$
$h^{-1}(\{2\}) = \{2\}$
$h^{-1}(]-3 ; 1]) = \left[\frac{5}{2} ; 7\right[$
$h^{-1}(\mathbb{R}+) = [-4 ; -2] \cup]-1 ; 3] \cup [6 ; 7[$

Q 4 : * Puisque, pour tout nombre réel x différent de 0 et de 2 on a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{-2}{x^2 - 2x}$$

et que f_1 et g_1 ont même ensemble de départ, et même ensemble d'arrivée, on a $f_1 = g_1$.

* Puisque f_2 et g_2 n'ont pas même ensemble d'arrivée, on a $f_2 \neq g_2$.

* f_3 et g_3 ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée, et pour tout $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ on a $f_3(x) = g_3(x)$; mais ceci n'est pas vérifié pour tout x de $[-4 ; 4]$, par exemple

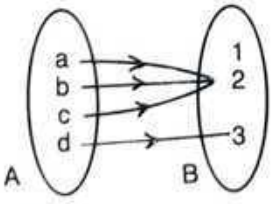
$f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $g_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $f_3 \neq g_3$.

On rappelle que, x étant un nombre réel donné, E(x) est l'unique nombre entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$

Q 5 : $D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ donc f et g sont distincts ; mais pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$ on a

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$$

Q 6 : Par exemple $f_1 : A \to B$ définie par son graphe :
{(a,1) ; (b,1) ; (c,2) ; (d,3)}
$f_2 : A \to B$ de diagramme



ou $f_3 : A \to B$ définie par le tableau :

x	a	b	c	d
$f_3(x)$	2	2	2	2

Non car A a quatre éléments et B n'en a que trois, donc nécessairement il y a deux éléments au moins de A qui ont la même image.

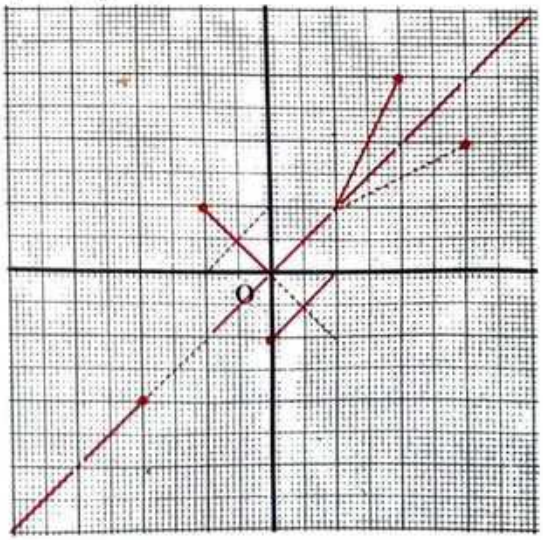
Pour qu'il existe une bijection de E vers F il faut que F ait au moins autant d'éléments que E (card F ⩾ card E) afin qu'un élément de F n'ait pas deux antécédents ; de plus, en considérant la bijection réciproque, il faut aussi card E ⩾ card F. Finalement pour qu'il existe une bijection de E vers F, il faut que E et F aient même cardinal.

Remarquons que card E = card F est une condition suffisante pour l'existence d'une bijection de E vers F (par exemple, au $p^{ième}$ élément de E on associe le $p^{ième}$ élément de F) mais ce n'est pas pour cela que toute application de E vers F est bijective, par exemple
$E = \{a, b, c, d\}$ $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : E \to F$, $x \to 1$
n'est pas bijective.

Q 7 :
$$\begin{cases} \forall x \in [-2 ; -1] & f(x) = x \\ \forall x \in [-1 ; 0] & f(x) = x + 1 \\ \forall x \in]0 ; 1] & f(x) = -x \\ \forall x \in]1 ; 3] & f(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$$

D'après la figure donnée, il est clair que, pour tout b de $[-2 ; 2]$ la droite D_b d'équation $y = b$ coupe la représentation graphique de f en un point et un seul, donc f est une bijection de $[-2 ; 3]$ vers $[-2 ; 2]$
$\forall b \in [-2 ; -1], \forall x \in [-2 ; -1]\ b = x \Leftrightarrow x = b$, donc $f^{-1}(b) = b$
$\forall b \in [-1 ; 0], \forall x \in]0 ; 1]\ b = -x \Leftrightarrow x = -b$, donc $f^{-1}(b) = -b$
$\forall b \in [0 ; 1], \forall x \in [-1 ; 0]\ b = x + 1 \Leftrightarrow x = b-1$, donc $f^{-1}(b) = b-1$
$\forall b \in]1 ; 2], \forall x \in]1 ; 3]\ b = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x = 2b-1$, donc $f^{-1}(b) = 2b-1$

s est la symétrie axiale orthogonale d'axe la première bissectrice c'est-à-dire la droite D d'équation $y = x$



Q 8 : * Pour f_1, oui
* Pour f_2, non car $f_2(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$
* Pour f_3, non car $f_3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{2\} \times \mathbb{R}$ (graphiquement, l'ensemble image est représenté par la droite dont une équation est $x = 2$)
* Pour f_4, non car $f_4(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_+$
* Pour f_5, oui
* Pour f_6, oui

Q 9 : * Pour f_1 tout nombre réel strictement positif b a deux antécédents : $\sqrt{b}$ et $-\sqrt{b}$
Le nombre 0 a un et un seul antécédent : 0 aucun nombre réel strictement négatif n'a un antécédent
* Pour f_2, tout b a un antécédent et un seul et c'est $\frac{b-3}{2}$
* Pour f_3, tout couple (u, v) tel que u soit divisible par 3 et v soit divisible par 5, a un antécédent unique : $(\frac{u}{3} \cdot \frac{v}{5})$
tout couple (u, v) tel que u ne soit pas divisible par 3 ou v ne soit pas divisible par 5, n'admet pas d'antécédent.
* Pour f_4, tout couple (u, v) tel que $v = 1$ a une infinité d'antécédents : tous les (u, y) avec y réel
Tout couple (u, v) tel que $v \neq 1$ n'admet aucun antécédent.
* Pour f_5, tout nombre réel b a une infinité d'antécédents : tous les couples (x, y) tels que $2x + 3y = b$ (graphiquement, l'ensemble des antécédents du nombre réel b est représenté par la droite D_b dont une équation est $2x + 3y = b$)

Q 10 : $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}^*$ $D_h = \mathbb{R}$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ $D_u = \mathbb{R} - \{-1\}$ ($u(x)$) existe si et seulement si $f(x) \in D_g$, donc $u(x)$ existe si et seulement si $x + 1 \neq 0$)

$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ $D_v = \mathbb{R}^*$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left[\frac{1}{x+1}\right]^2$ $D_k = \mathbb{R} - \{-1\}$

$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ $D_l = \mathbb{R} - \{-1\}$

$k = l$ c'est-à-dire $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Q 11 : Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ résolvons l'équation d'inconnue x

(E) $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $y = \frac{x+3}{x+2}$

(E) est équivalente à
$x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $x(y - 1) = 3 - 2y$
comme $y \neq 1$, (E) est équivalente à

$x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $x = \frac{3-2y}{y-1}$

De plus on a

$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\frac{3-2y}{y-1} = -2 \Leftrightarrow 3 = 2$

donc, tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R} - \{-2\}$, c'est $\frac{3-2y}{y-1}$.

f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est définie par $f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$

$$x \mapsto \frac{3-2x}{x-1}$$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ $(f^{-1} \circ f)(x) = \dfrac{3-2\frac{x+3}{x+2}}{\frac{x+3}{x+2}-1} = x$

donc $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}-\{-2\}}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $(f \circ f^{-1})(x) = \dfrac{\frac{3-2x}{x-1}+3}{\frac{3-2x}{x-1}+2} = x$

donc $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}-\{1\}}$

Q 12 : tout couple (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a un unique antécédent par f qui est $(x, \frac{y}{2})$

tout couple (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a un unique antécédent par g qui est $(x - 1, y - 3)$
d'où $f^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(xy) \mapsto (x, \frac{y}{2})$

et $g^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y) \to (x-1, y-3)$

$f^{-1} \circ g^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x,y) \to (x-1, \frac{y-3}{2})$

$g^{-1} \circ f^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x,y) \to (x-1, \frac{y}{2} - 3)$

(remarque : $f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$)
$g \circ f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$(x,y) \to (x+1, 2y + 3)$

Tout couple (x,y) a un unique antécédent par $g \circ f$, qui est
$(x-1, \frac{y-3}{2})$, donc on a
$(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$(x,y) \to (x - 1, \frac{y-3}{2})$

Ainsi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Q 13 :

x	−2	−1	0	1
s(x)	2	$2x^2+2x+2$	3	

x	−2	−1	0	1
f(x)	x + 1	$2(x^2+x)$	−x + 2	
g(x)	−x + 1	2	x + 1	
f(x)+g(x)	2	$2x^2+2x+2$	3	

Q 14 :

x	−2	−1	0	1
p(x)	$-x^2+1$	$4x^2+4x$	$-x^2+x+2$	

x	−2	−1	0	1
f(x)	x + 1	$2x^2 + 2x$	−x + 2	
g(x)	−x + 1	2	x + 1	
f(x)xg(x)	$-x^2+1$	$4x^2+4x$	$-x^2+x+2$	

x	−2	−1	0	1
h(x)	2x+2	$4x^2+4x$	−2x+4	

x	−2	−1	0	1
f(x)	x+1	$2x^2+2x$	−x+2	
2f(x)	2x+2	$4x^2+4x$	−2x+4	

Q 15 :

i est définie par $\begin{cases} \forall x \in]1\,;\,3] & i(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ \forall x \notin]1\,;\,3] & i(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$

or : $\forall x \in]1\,;\,3]$ $x - 1 \neq 0$
donc pour tout x de]1 ; 3] , i(x) existe (et est unique dans $\mathbb{R}$).
et : $\forall x \notin]1\,;\,3$ $x^2 + 1 > 0$
donc pour tout $x \notin]1\,;\,3]$, i(x) existe (et est unique dans $\mathbb{R}$).
Donc i est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Q 16 : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \{1\,;\,2\}$

donc $\dfrac{1}{f}$ n'est pas une application mais une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{1\,;\,2\}$.

Q 17 : Puisque pour tout nombre réel x on a $g(x) \neq 0$ (cf question 15), $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe dans $\mathbb{R}$ (et est unique) pour tout nombre réel x, q est donc une application.
Par contre t n'est pas une application car, d'après la question 16, f(1) = 0 et f(2) = 0 donc t n'est définie ni en 1 ni en 2.

Q 18 : Dans le premier cas, puisque, pour tout nombre réel de [−1 ; 2], le point de C_{g_1} d'abscisse x est situé strictement au-dessous du point de C_{f_1} de même abscisse, la courbe représentative de g_1 est au-dessous de celle de f_1 (strictement). Dans le deuxième cas, pour tout nombre réel x de [−1 ; 3] le point de C_{g_2} d'abscisse x est situé au-dessous du point de G_{g_2} de même abscisse.
La courbe représentative de g_2 est au-dessous de celle de f_2 (au sens large, elles sont tangentes au point $\binom{1}{0}$).

Q 19 : $\forall x \in [-1\,;\,2]$ $_1(x) = (x^2+1)-(-x^2+3x-2)$
$= 2x^2 - 3x + 3$
$\forall x \in [-1\,;\,3]$ $h_2(x) = (x^2 - 1)-(2x - 2)$
$= x^2 - 2x + 1$
$\forall x \in [-1\,;\,2]$ $x \in S_1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 > 0$
$\Leftrightarrow 2\left[(x - \dfrac{3}{4})^2 + \dfrac{15}{16}\right] > 0$

d'où $S_1 = [-1\,;\,2]$
$\forall x \in [-1\,;\,3]$ $x \in S_2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
d'où $S_2 = [-1, 3]$

Q 20 : f et g ne sont pas comparables car $g(0) > f(0)$ mais $g(4) < f(4)$.

Résultats ou indications des exercices

1/ $f(A) = [5,7]$; $f(B) = [3,9]$
$f(C) = \{1, 5, 7, 9, 11\}$; $f(D) = [5 ; \rightarrow[$

2/ *a)* $g(]0,2]) =]1,5]$; $g([-1,2] = [1,5]$
b) $h([1,4]) = [0,\sqrt{3}[$; $h([-2,2]) = [0,1]$

4/ $f^{-1}(A) = \{-1,2\}$; $f^{-1}(B) =]\leftarrow ; 0[\cup]1 ; \rightarrow[$

5/ $g^{-1}(A) = [-6,-5[$; $g^{-1}(B) = \left]-4,\frac{27}{7}\right]$

7/ Non, car elles n'ont pas le même ensemble de définition.

8/ A est une partie de $\{-1, 0, 1\}$ contenant 0

9/ *a)* $A = \mathbb{R} - \{4\}$ *b)* $[-5/2, 2[\cup [1,2] \cup \{-1\}$

10/ Utiliser le tableau suivant :

x	$\leftarrow$		1		2	$\rightarrow$
$\lvert x-1\rvert$	$1-x$	0	$x-1$		$x-1$	
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$x-2$	
$f(x)$	$3-2x$	1	1	1	$2x-3$	

11/ $A = \mathbb{N} - \{0, 1\}$ A = ensemble des multiples de 2

12/ *a)* $f^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto (x-3, y+2)$
b) $g^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto (y,x)$
Remarque : g est involutive
c) $h^{-1} : [0, 4] \rightarrow [0, 2]$
$x \mapsto \sqrt{x}$

13/ $g^{-1} : \mathbb{R} - \{2/5\} \rightarrow \mathbb{R} - \{7/5\}$
$x \mapsto \frac{7x+3}{5x-2}$
On vérifie que 7/5 n'a pas d'antécédent par g^{-1}.

14/ $f^{-1} : [0,2[\cup \{2\} \rightarrow [0,1[\cup \{2\}$
telle que $\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \text{ si } 0 \leqslant x < 2 \\ f^{-1}(2) = 2 \end{cases}$

15/ $f^{-1} : [1/2, 1] \rightarrow [1,2]$ $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto x^2$

17/ Non car 3, qui est impair, ne peut pas être une puissance de 2.
Oui car tout élément de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ possède un antécédent qui est lui-même.

18/ $B = f(A) = [0,1]$

19/ f n'est pas surjective car 2, par exemple, n'a pas d'antécédent par f.

20/ *a)* Non car $f(2) = f(4)$ et $2 \neq 4$
b) Non car $f(0) = f(-2)$ et $0 \neq -2$
c) Oui
d) Faire un dessin.

21/ $A =]\leftarrow ; -1]$

22/
$\begin{cases} \forall x \in [0, 1/2] & g \circ f(x) = 1 \\ \forall x \in 1/2, 1] & g \circ f(x) = x \\ \forall x \in]1, 3/2] & g \circ f(x) = -x + 2 \\ \forall x \in]3/2, 2] & g \circ f(x) = 1. \end{cases}$

23/

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

24/ Utiliser le fait que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant x$

25/ Utiliser l'exercice 19

26/ Utiliser : $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\left(0 < x \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geqslant 1\right)$

Exercices

27 Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{|x+2| - |x+3|}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$z \mapsto \dfrac{\sqrt{(3-z)(z+1)}}{z^2 - 3z + 2}$

$i : [-3 ; 3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x - E(x)}$

28 Le plan étant rapporté au repère orthonormé (O, I, J) dessiner dans $\mathcal{P}$ l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\sqrt{-x^2 - y^2 + 1}}{|x - y|}$

$g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{|xy| - 1}$

$h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{(y - x^2)(x - y)}$

29 Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé (O, I, J)
Soit $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{(x - y)(x + y - 2)(y - 2)}$

Dessiner l'ensemble de définition de f.
Trouver l'image par f de la droite D dont une équation est : $y + x - 2 = 0$.

30 Trouver une fonction de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$ dont l'ensemble de définition est l'intérieur, côtés exclus, du triangle (A, B, C) tel que $A\binom{1}{0}$, $B\binom{0}{1}$ et $C\binom{-1}{0}$.

31 Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$(x,y) \mapsto (x+y)^{|xy|+1}$
Calculer $f(1 ; -1)$, $f(1 ; -3)$ et $f(-2 ; 2)$.
Quelle est l'image directe de la partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que : $\mathcal{A} = \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} ; p + q = 0\}$

32 Soient les fonctions f et g telles que :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

Trouver les ensembles de définition de ces deux fonctions.
Sont-elles égales ? L'une d'elles est-elle la restriction de l'autre à une partie de $\mathbb{R}$ que l'on trouvera ?

33 Trouver la restriction à l'intervalle [2 ; 3] de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x^2 - 5x + 6|$

34 Trouver la restriction aux intervalles [1 ; 2] et [2 ; 3] de la fonction

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x - 1| + |2 - x| - |x - 3|$

35 Trouver la fonction constante g qui prolonge à $\mathbb{R}$ la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)(3 - x)}$

36 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \Pi x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} \Pi x$
Les deux fonctions f et g sont-elles égales ?
Que peut-on dire des restrictions à $\mathbb{N}$ de f et de g ?

37 Quel est l'ensemble de définition de

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{2x - 1}{|x-3| + |-x+2|}$

Trouver les images réciproques par f des parties de $\mathbb{R}$ suivantes : {0} , {1 ; 2} et [2 ; 3]

38 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{3(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$

Montrer que l'ensemble image de f est $\left[\dfrac{9}{4} ; \to\right[$

39 Soient
$f : [-5 ; 7] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 1$ et $g : [-5 ; 7] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto E[f(x)]$
Trouver $g(-1{,}5)$; $g(-\sqrt{3})$; $g(\Pi)$; $g(5)$
En utilisant la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, partager $f([-5 ; 7[)$ en intervalles de la forme $[n, n+1[$ (où n est élément de Z). En déduire la courbe représentative de g.

40 Soit f de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{N}$ qui, à tout nombre décimal, associe le dernier chiffre non nul de son développement décimal. Trouver $f(\mathbb{D})$.

41 Soit $f : [0 ; 2] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in [0 ; \frac{1}{2}] & f(x) = 0 \\ \forall x \in]\frac{1}{2} ; 1] & f(x) = x \\ \forall x \in [1 ; 2] & f(x) = -x + 2 \end{cases}$$

Trouver $f([0 ; 2])$; $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]\right)$; $f^{-1}(\{0\})$

42 Trouver une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = \{1 ; 2 ; 3\}$.

43 Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x - 8y \end{cases}$$

Le plan étant rapporté au repère (O, I, J)
Soit (D) la droite dont une équation dans (O, I, J) est :
$2x + 3y - 1 = 0$. Trouver f(D). Tracer (D) et f(D)
Soit $B = \{M \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P} ; 2 \leq x \leq 4\}$. Trouver $f^{-1}(B)$.
Dessiner B et $f^{-1}(B)$.

44 Soit $g : [-3 ; 2] \to [-1 ; 1]$

$$x \mapsto \frac{2x}{x - 3}$$

Quel est l'ensemble de définition de g ?

Trouver $g^{-1}\left([0 ; \frac{1}{2}[\right)$

45 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + x$
quelle est l'image réciproque par f de $[2, \to[$?

46 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x - 4}{x + 3}$$

quelle est l'image réciproque de]1,999 ; 2,001[par g ?

47 E étant la fonction partie entière définie par
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow E(x) = n)$.
Déterminer les ensembles suivants

$E(\mathbb{R})$, $E(\mathbb{Z})$, $E([-6,2 ; 3,4[)$; $E\left(\left[\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right]\right)$.

48 Soit l'ensemble E égal à {a, b, c} ; on considère l'application f de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans lui-même définie par

$\forall x \in \mathcal{P}(E) \qquad f(X) = X \cup \{c\}$

a) Déterminer les images par f des ensembles suivants :
$\emptyset$, {a} , {c} , {a,b} , {a,b,c}

b) Déterminer les images réciproques des ensembles suivants : $\emptyset$, {c} , {a,c} , {a,b} , {a,b,c}

c) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? (justifier la réponse).

d) Soit $\mathcal{B} = f(\mathcal{P}(E))$. Trouver $\mathcal{B}$
Trouver une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que l'application g de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ qui coïncide avec f sur $\mathcal{A}$, soit une bijection. Trouver la bijection réciproque de g.

e) Citer deux prolongements de g à $\mathcal{P}(E)$.

49 Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on désigne par $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E. Montrer que l'application c de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans lui-même, définie par :
$\forall X \in \mathcal{P}(E) \qquad c(X) = \bar{X}$
est bijective. Quelle est son application réciproque ?

50 Soient (D) et (D') deux droites du plan $\mathcal{P}$ de directions distinctes et p la projection sur (D) parallèlement à (D').

1. Trouver $p(\mathcal{P})$
2. Trouver l'image réciproque du singleton {A} où A est un point de (D).
3. Soit (Δ) une droite non parallèle à (D') ; quelle est la nature de la restriction de p à (Δ).

51 Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \to [1, \to[$
$x \mapsto (x-1)^2 \qquad x \mapsto \sqrt{x} + 1$

1) Montrer que f et g sont des applications
2) Montrer que f o g et g o f sont des applications et exprimer, pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}_+$, f o g(x) et g o f(x)
3) L'application f est-elle bijective ? Pourquoi ?
4) Montrer que g est bijective et trouver son application réciproque.

52 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x - 1}{x}$$

Discuter, suivant les valeurs du nombre réel b, du nombre des solutions de l'équation d'inconnues x :

$$x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = b$$

En déduire l'existence de deux parties E et F de $\mathbb{R}$ telles que l'application g définie par :

$$g : E \to F$$
$$x \mapsto f(x)$$

soit une bijection de E vers F.
Déterminer la bijection réciproque de la bijection g.

53 Soit $f : [1 ; 16] \to [1 ; 10]$

$$x \mapsto \frac{2 + 3x}{5}$$

1) Montrer que f est une application.
2) Montrer que f est une injection.
3) Montrer que f est une bijection et trouver son application réciproque f^{-1}.

54 Soit f de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ telle que :

- l'image d'un nombre entier n pair est $\frac{n}{2} + 4$,
- l'image d'un nombre entier impair est $n\,\frac{(n-1)}{2}$.

Vérifier que f est une application.
f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

55 Le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$$

L'application f est-elle injective ? surjective ? Bijective ? (justifier les réponses).
Etudier de même l'application g :

$g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 6x - 4y \end{cases}$$

56 Soit l'application f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ses chiffres.
L'application f est-elle injective ? surjective ?
Soit la partie T de $\mathbb{N}$ telle que
$T = \{n \in \mathbb{N} ; \exists\, h \in \mathbb{N} ; n = 3h\}$
Trouver $f^{-1}(T)$

57 Montrer que l'application f définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (x - 2)(x + 3)$$

n'est pas injective.

58 Soit une application d'un ensemble E vers un ensemble F.
1) Montrer que, s'il existe une application g de F vers E telle que $g \circ f = id_E$, alors f est injective.
2) Montrer que, s'il existe une application h de F vers E telle que $f \circ h = id_F$, alors f est surjective.
3) Montrer que s'il existe deux applications g et h de F vers E telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ h = id_F$ alors f est bijective et l'on a $h = g$.

59 Soient f et g les deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$\begin{cases} \forall\, x \in]\leftarrow ; 3] & f(x) = x^2 \\ \forall\, x \in]3 ; \rightarrow[& f(x) = 2x \end{cases}$

$\begin{cases} \forall\, x \in]\leftarrow ; 1] & g(x) = x^2 + 2x \\ \forall\, x \in]1 ; \rightarrow[& g(x) = x \end{cases}$

Déterminer les fonctions suivantes :

$f + g$, $f \times g$, $2f + 3g$ et $f \circ g$.
Sont-elles des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

60 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x + 3 \cos x}{x^2 + 1}$$

Trouver un majorant de f.

61 Soit $f :]0 ; 1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^4}$$

Montrer que f n'est pas majorée. Est-elle minorée ?

62 Soit un nombre réel b tel que $0 \leq b \leq 1$. Dessiner la partie du plan $\mathcal{P}$ dans laquelle se trouve la courbe représentative de la fonction

$f : [-1 ; 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x + b$

63 Soit un nombre réel a tel que $1 \leq a \leq 2$.
Dessiner la partie du plan dans laquelle se situe la courbe représentative de la fonction
$g : [-1 ; 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$

64 Soient a et b deux nombres réels tels que $1 \leq a \leq 2$ et $0 \leq b \leq 1$. Dessiner la partie du plan dans laquelle se situe la courbe représentative de la fonction

$h : [-1 ; 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$

65 Montrer que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \to x \sin x$
n'est pas majorée.

66 Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

est bornée.

67 On considère les applications de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans lui-même définie par :

$f_1 : x \mapsto x$ $\quad f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x - 1}$

$f_2 : x \mapsto 1 - x$ $\quad f_5 : x \mapsto \dfrac{x - 1}{x}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$

Montrer que ces six applications sont bijectives.
Compléter le tableau suivant :

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

2 Fonctions polynômes

I. Généralités
II. Division euclidienne d'une fonction polynôme par une autre
III. Zéros d'une fonction polynôme
IV. Equations et inéquations du second degré
V. Equations et inéquations se ramenant au second degré

1 Généralités

Question 1 *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^3 + (x-\sqrt{x^2-1})^3 - 2}{x-1}$$

Quel est l'ensemble de définition D de g ?
Montrer, après avoir développé le produit $(x-1)(8x^2+8x+2)$, *que g coïncide sur D avec une fonction polynôme f que l'on trouvera. Est-ce que g est une fonction polynôme ?*

Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme** si et seulement si, il existe des nombres réels $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Remarques

Toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$, c'est donc une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Les $(n+1)$ nombres réels $a_0, a_1 \ldots a_n$ s'appellent les « **coefficients** » de f. Si le coefficient a_n est non nul on dit que f est de **degré** n et l'on écrit : d°f=n ou degf=n et l'on dit que a_n est le **coefficient dominant** de f. Une fonction polynôme de coefficient dominant égal à 1 s'appelle une fonction polynôme **unitaire**.
La fonction nulle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui a tout nombre réel x associe le réel zéro est la fonction polynôme dont tous les coefficients sont égaux à zéro. Elle n'a pas de degré.

Exercice 1 Ecrire sous forme réduite et ordonnée le produit des deux fonctions polynômes f et g définies pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = x^2 + x\sqrt{2+\sqrt{2}} + 1 \text{ et } g(x) = x^2 + x\sqrt{2-\sqrt{2}} + 1.$$

Exercice 2 Soient a et b deux réels, développer le produit $(a+b)^4$.
En déduire la forme réduite et ordonnée des fonctions polynômes f et g définies par : $f(x) = (x+1)^4$, $g(x) = (2x-1)^4$

Exercice 3 Ecrire sous forme réduite et ordonnée le produit des deux fonctions polynômes f et g données dans chacun des deux cas suivants :
1/ $f(x) = 1 - x$ $\quad g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$
2/ $f(x) = x - 2$ $\quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

Méthode pratique

Pour identifier une fonction polynôme à une autre

Soient les deux fonctions polynômes f et g telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

avec a_n et b_m non nuls.
f et g étant deux fonctions polynômes non nulles elles sont égales si et seulement si :

$$d°f = d°g \text{ (c'est-à-dire } n = m)$$

et, pour tout i de $\{0, 1, \ldots n\}$ on a : $a_i = b_i$
En particulier une fonction polynôme est égale à la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Identifier une fonction polynôme g à une fonction polynôme f consiste à réduire et à ordonner f(x) et g(x) et à traduire leur égalité.
Par exemple, montrons qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^3 = a + bt + \frac{c}{2}t(t-1) + \frac{d}{6}t(t-1)(t-2)$$

Ceci revient à identifier les deux fonctions polynômes f :

$f : t \mapsto t^3$

$g : t \mapsto a + bt + \frac{c}{2}t(t-1) + \frac{d}{6}t(t-1)(t-2)$

En réduisant et ordonnant g on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{d}{6}t^3 + \left(\frac{c-d}{2}\right)t^2 + \left(b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3}\right)t + a$$

d'où :
(f=g) si et seulement si

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{d}{6} \\ 0 = \dfrac{c-d}{2} \\ 0 = b - \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{3} \\ 0 = a \end{cases}$$

On a ainsi (f = g) si et seulement si (a=0 b=1 c=6 et d=6)

Exercice 4 Trouver une fonction polynôme p du second degré telle que :
$p(0) = -1$, $p(-1) = -1$ et $p(2) = 1$

Exercice 5 Montrer que la fonction polynôme $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$
est le carré d'une fonction polynôme r que l'on trouvera, c'est-à-dire telle que : q = r.r.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x - 1}$
Trouver trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

2 Division euclidienne d'une fonction polynôme par une autre

1) Factorisation d'une fonction polynôme

Soient les fonctions polynômes f et g telles que
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 3$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = x^2 + x + 1$
Cherchons s'il existe une fonction polynôme q telle que : f=g.q
c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)\, q(x)$
Comme d°f = 4 et d°g = 2 on en déduit que si q existe alors d°q = 2. Trouver q revient alors à trouver trois nombres réels a, b et c tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 3 = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c)$
En procédant par identification on trouve :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $q(x) = 3x^2 - 7x + 3$

Définition

Soient f et g deux fonctions polynômes. On dit que f est **factorisable** ou **divisible** par g si et seulement si il existe une fonction polynôme q telle que :
$f = g.q$
c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)\, q(x)$
On dit aussi que g divise f

Remarques

Si q existe alors elle est unique et on l'appelle **le quotient** de f par g, et, par abus de langage, on dira que f(x) est divisible ou factorisable par g(x) et on a alors d°f=d°g+d°q. Il en résulte que : pour que la fonction polynôme f soit divisible par la fonction polynôme g il est nécessaire que le degré de f soit supérieur ou égal au degré de g.

Méthode pratique

Pour trouver le quotient de f par g sachant que g divise f

La méthode générale consiste à procéder par identification mais lorsque les degrés de f et de g ne sont pas trop élevés (par exemple inférieurs à 5) on disposera, par analogie avec la division de deux entiers naturels, les calculs de la façon suivante :

On a : $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$; $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x + 1$

	$2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$	$x^2 + 2x + 1$
$- q'_1(x)\, g'(x)$	$- 2x^4 - 4x^3 - 2x^2$	$2x^2 + x + 3$
$r'_1(x)$	$x^3 + 5x^2 + 7x$	
$- q'_2(x)\, g'(x)$	$- x^3 - 2x^2 - x$	$q'_1(x) = 2x^2$
$r_2(x)$	$3x^2 + 6x + 3$	$q'_2(x) = x$
$- q'_3\, g'(x)$	$- 3x^2 - 6x - 3$	$q'_3(x) = 3$
$r'_3(x)$	0	

Le monôme de plus haut degré q'_1 du quotient de f'_1 par g' est le quotient du monôme de plus haut degré de f' par le monôme de plus haut degré de g'.
q'_2 est le quotient du monôme de plus haut degré de r'_1 par le monôme de plus haut degré de g' où r'_1 est la fonction polynôme $f' - q'_1 g'$
Enfin q_3 est le quotient du monôme de plus haut degré de r'_2 par le monôme de plus haut degré de g' où r'_2 est la fonction polynôme $r'_1 - q'_2\, g'$
On a donc

$$f' = q'g' \text{ avec } q' = q'_1 + q'_2 + q'_3$$

On a ainsi montré que f' est divisible par g' et que le quotient est : $x \mapsto 2x^2 + x + 3$

De même pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x + 3$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$

	$3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 3$	$x^2 + x + 1$
$- g(x)\, q_1(x)$	$- 3x^4 - 3x^3 - 3x^2$	$3x^2 - 7x + 3$
$r_1(x)$	$- 7x^3 - 4x^2 - 4x$	
$- g(x)\, q_2(x)$	$7x^3 + 7x^2 + 7x$	$q_1(x) = 3x^2$
$r_2(x)$	$3x^2 + 3x + 3$	$q_2(x) = - 7x$
$- g(x)\, q_3(x)$	$- 3x^2 - 3x - 3$	$q_3(x) = 3$
$r_3(x)$	0	

$$f = q'g \text{ avec : } q = q_1 + q_2 + q_3$$

On a ainsi montré que g divise f et que le quotient est :
$x \mapsto 3x^2 - 7x + 3$

Exercice 7

Soient f et g les deux fonctions polynômes telles que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^4 - 2x^3 + 19x - 28$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 - 3x + 7$
Montrer que f est divisible par g et trouver le quotient.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1}$$
Trouver l'ensemble de définition de f puis montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 9

Soient f, g et h trois fonctions polynômes et soit α un nombre réel
Montrer que si f et g sont divisibles par h alors f+g est divisible par h.
Montrer que si f est divisible par h alors αf est divisible par h.

2) Factorisation par (x − b) (b réel donné)

Question 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto a_1x + a_0 \quad$ *avec* $a_1 \neq 0$
Trouver une condition portant sur les deux réels a_0 *et* a_1 *pour que f(x) soit divisible par (x − 2). Calculer alors f(2).*

Question 3

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad$ *avec* $a_2 \neq 0$
Trouver une condition portant sur les trois réels a_0, a_1 *et* a_2 *pour que g(x) soit divisible par (x + 1). Calculer alors g(−1).*

On rappelle :

Théorème

Soit f une fonction polynôme et b un nombre réel
f(x) est divisible par (x − b) si et seulement si : f(b) = 0

Exercice 10

Montrer que :

1/ $x^4+6x^3-7x^2+3x-3$ est divisible par $x-1$ et trouver le quotient
2/ $t^4 - 4$ est divisible par $t-\sqrt{2}$ et trouver le quotient
3/ $2z^3-6z^2+\frac{13}{2}z-2$ est divisible par $z - \frac{1}{2}$ et trouver le quotient
4/ $u^4-2u^3+\sqrt{3}u^2+(1-2\sqrt{3})u-2$ est divisible par $u - 2$ et trouver le quotient
5/ $x^{n+1}-1$ est divisible par $x - 1$ et trouver le quotient (où n est un entier naturel)

Exercice 11 La fonction rationnelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x - 3)}$$

coïncide-t-elle sur $\mathbb{R} - \{1 ; 3\}$ avec une fonction polynôme ?

3) Division euclidienne par $(x - b)$

Question 4 *Soit f et g les deux fonctions polynômes telles que :*

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = t^2 + t - 1$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = t - 2$

f est-elle divisible par g ?

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t) - f(2)$

Dites pourquoi h est divisible par g.

Trouver la fonction polynôme q telle que :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (t - 2)\, q(t) + 5$

Plus généralement soient f une fonction polynôme non nulle et b un nombre réel.

• Si $f(b) = 0$ alors $f(x)$ est divisible par $(x - b)$ et donc il existe une unique fonction polynôme q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - b)\, q(x)$$

On dit que $q(x)$ est le **quotient** de la division euclidienne du **dividende** $f(x)$ par le **diviseur** $(x - b)$.

• Si $f(b) \neq 0$ alors la fonction polynôme h définie par $(\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f(x) - f(b))$ est telle que : $h(b) = 0$. Donc il existe une unique fonction polynôme q' telle que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = (x - b)\, q'(x)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - f(b) = (x - b)\, q'(x)$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - b)\, q'(x) + f(b)$

On dit que $q'(x)$ et $f(b)$ sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne de $f(x)$ par $(x - b)$

Remarque

Le reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $(x - b)$ est égal à $f(b)$ c'est-à-dire une fonction polynôme constante donc de degré égal à 0, strictement inférieur au degré du diviseur $(x - b)$ à savoir 1.

On a ainsi montré que pour toute fonction polynôme f et toute fonction polynôme $[g : x \mapsto x - b]$ de degré égal à 1 il existe un unique couple (q, r) de fonctions polynômes tel que :

$$f = gq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant d^\circ r < d^\circ g$$

4) Division euclidienne d'une fonction polynôme f par une fonction polynôme g

On admettra le théorème suivant :

Théorème

Soient f et g deux fonctions polynômes non nulles. Il existe un et un seul couple (q, r) de fonctions polynômes tel que :

$$f = qg + r \text{ et } \begin{pmatrix} r = 0 \\ \text{ou} \\ 0 \leqslant \deg r < \deg g \end{pmatrix}$$

On dit que q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la division euclidienne du **dividende** f par le **diviseur** g.

Méthode pratique

Pour effectuer la division euclidienne d'une fonction polynôme par une autre.

On utilise la disposition déjà utilisée et l'on s'arrête lorsque le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.
Ainsi, par exemple, soient :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^4 + 3x^3 - x^2 & x^2 + 4x + 5 \\ \cline{1-1} \quad 8x^3 - 2x^2 + 2x & \\ -8x^3 + 12x^2 - 4x & \\ \cline{1-1} \quad 10x^2 - 2x + 1 & \\ -10x^2 + 15x - 5 & \\ \cline{1-1} \quad 13x - 4 & \end{array}$$

On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1 = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x + 5) + (13x - 4)$
soit $f = gq + r$
avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 4x + 5$; $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 13x - 4$
et $d°r < d°g$

Exercice 12 Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de la fonction polynôme f par la fonction polynôme g dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x)=x^3+4x^2+2x-1$ $\quad g(x)=x-1$
2/ $f(x)=x^3+4x^2+2x-1$ $\quad g(x)=x^2+2x-3$
3/ $f(x)=5x^4-3x^3+x^2-7x+1$ $\quad g(x)=x^2+x-6$
4/ $f(x)=5x^2+2x$ $\quad g(x)=x-1$
5/ $f(x)=x^2+2x+1$ $\quad g(x)=x^3+3x^2$

Exercice 13 Trouver deux nombres réels a et b tels que la fonction polynôme f définie par $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b)$ soit divisible par la fonction polynôme g définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 - 5x + 6.$

Exercice 14 Soient f et g les deux fonctions polynômes définies par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (x - 2)^2$
Effectuer la division euclidienne de f par g. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 2)^2}$$

Exercice 15 Soit la fonction rationnelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad f(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x - 1}$$

Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \qquad f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

(On pourra utiliser la question 4 de l'exercice 12).

3 Zéros d'une fonction polynôme

On rappelle la définition suivante :

Définition

Soient une fonction polynôme f et a un nombre réel.
a est un **zéro** de f si et seulement si $f(a) = 0$.

Remarque

Soit f une fonction polynôme, résoudre l'équation d'inconnue x : $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 0$, c'est trouver tous les zéros de f.

Exercice 16 Résoudre les équations d'inconnue x suivantes :
1/ $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
2/ $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x + 2 = 0$
(On vérifiera que 1 est une solution de chacune de ces deux équations)

Question 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$
Calculer f(1). En déduire qu'il existe une fonction polynôme q telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x - 1)\, q(x)$
Calculer q(1). En déduire qu'il existe une fonction polynôme r telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x - 1)^2\, r(x)$
Calculer r(1). En déduire qu'il existe une fonction polynôme s telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x - 1)^3\, s(x)$
Calculer s(1)
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$

Définition

Soient f une fonction polynôme, a un nombre réel et n un entier naturel non nul. On dit que a est un **zéro** de f d'**ordre de multiplicité** n si et seulement si f(x) est divisible par $(x - a)^n$ mais pas par $(x - a)^{n+1}$.

Dans l'exemple précédent 1 est zéro d'ordre de multiplicité 3 et 2 un zéro d'ordre de multiplicité 2 de f.

Remarques

* L'ordre de multiplicité d'un zéro donné est unique
* Un zéro d'ordre 1 (resp. d'ordre 2, resp. d'ordre 3) s'appelle un zéro simple (resp. double, resp. triple).
* Soit f une fonction polynôme, on appelle ordre de multiplicité d'une solution a de l'équation (E) : ($x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$), l'ordre de multiplicité du zéro a de f.

Question 6 *Discuter, suivant les valeurs des nombres réels a et b, du nombre des éventuels zéros de la fonction polynôme* $(x \mapsto ax+b)$.

Exercice 17 Soit la fonction polynôme $f : x \mapsto x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$.
Calculer f(2) et f(−3). En déduire une factorisation de f(x).
Trouver les zéros de f et indiquer leur ordre de multiplicité.

Exercice 18 Trouver le nombre réel k pour que dans chacun des cas suivants le nombre réel a donné soit un zéro double de f, puis factoriser f(x) par $(x - a)^2$
1/ $f : x \mapsto kx^5 + 5x^2 - 12$ avec $a = -2$
2/ $f : x \mapsto x^4 + kx^3 + 10x^2 + kx + 9$ avec $a = 3$

Exercice 19 Trouver toutes les fonctions polynômes de degré 2 qui ont 2 et −5 pour zéros.

Question 7 *Trouver, si elle existe, une fonction polynôme unitaire f de degré donné n dans chacun des cas suivants :*
1/ f possède quatre zéros simples −1, 1, 2 et 3 et n=4
2/ f possède deux zéros simples 1 et 3 et ces deux zéros seulement et n=4
3/ f possède trois simples, 0, 1 et 2 et n=3
4/ f possède quatre zéros simples, 0, −1, 1, 2 et n=3

Plus généralement montrons que si une fonction polynôme f admet p zéros distincts $x_1, x_2 \ldots x_p$ alors f(x) est factorisable par $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p)$
x_1 étant un zéro de f il existe une fonction polynôme q telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - x_1)\, q(x)$
x_2 étant un zéro de f, $f(x_2)=0$ donc :

$$(x_2 - x_1)\, q(x_2) = 0$$

or : $x_2 - x_1 \neq 0$ donc $q(x_2) = 0$
donc il existe une fonction polynôme r telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) = (x - x_2)\, r(x)$$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\, r(x)$

En poursuivant ce raisonnement on montre qu'il existe une fonction polynôme g telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_p)\, g(x)$$

Théorème
Soit f une fonction polynôme possédant p zéros distincts $x_1, x_2 \ldots x_p$ alors f(x) est divisible par $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p)$.

Conséquences

Si une fonction polynôme possède p zéros distincts alors son degré est supérieur ou égal à p.
Une fonction polynôme de degré n possède au plus n zéros.

Exercice 20 Existe-t-il une fonction polynôme de degré deux ayant un seul zéro, celui-ci étant simple ?

Exercice 21 Montrer que si une fonction polynôme de degré 3 possède exactement deux zéros alors un de ces deux zéros est double.

Exercice 22 Existe-t-il une fonction polynôme de degré 4 possédant exactement trois zéros simples ?

Exercice 23 Soit f la fonction polynôme de degré 5, de coefficient dominant 12 et possédant 2 pour zéro triple et −1 pour zéro double.
Soit g la fonction polynôme de degré 3, de coefficient dominant 4 et possédant 2 pour zéro double et −1 pour zéro simple.
Montrer que f est divisible par g et trouver le quotient.

Exercice 24 Soit f une fonction polynôme de degré 6 possédant 3 comme zéro simp
−1 pour zéro double et 2 pour zéro triple. Quels sont les zéros de
fonction polynôme f × f, préciser l'ordre de multiplicité de chacun
zéros trouvés.

4 Equations et inéquations du second degré

1) Zéro d'un trinôme du second degré

Question 8 *En écrivant éventuellement sous sa forme canonique chacune des fon
tions polynômes f de degré deux suivantes trouver les zéros éventuels
f ainsi que leurs ordres de multiplicité*

1. $f : x \mapsto 2x^2 - 9$
2. $f : y \mapsto y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3$
3. $f : z \mapsto 2z^2 - 5z + 3$
4. $f : u \mapsto u^2 + u + 1$
5. $f : t \mapsto 3t^2 + 16$
6. $f : w \mapsto \pi^2 w^2 - 2w + \frac{1}{\pi^2}$

Il ressort des exemples précédents qu'une fonction polynôme de degré 2 peut avoir 0
1 ou 2 zéros.
Plus généralement soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

d'où : si $b^2 - 4ac = 0$ alors f possède un zéro double égal à $-\frac{b}{2a}$

si $b^2 - 4ac > 0$ alors f possède deux zéros simples :

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac < 0$ alors f ne possède aucun zéro.

Théorème

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ une fonction polynôme du second degré, le **réel** Δ égal à $b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** de f.

Si : $\Delta = 0$ alors f possède 1 zéro double égal à $-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$ alors f possède 2 zéros simples qui sont :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta < 0$ alors f n'a pas de zéro.

Remarque

Toute fonction polynôme de degré 2 dont le coefficient dominant et le coefficient du monôme constant sont de signes contraires possède au moins un zéro (car alors $\Delta \geqslant 0$)

Exercice 25 Trouver, s'ils existent, les zéros des fonctions polynômes de degré 2 suivantes :

1/ $x \mapsto x^2 - 6x + 5$
2/ $t \mapsto t^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})t + \sqrt{6}$
3/ $x \mapsto 2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6$
4/ $x \mapsto x^2 - 9$
5/ $z \mapsto z^2 + 4$
6/ $u \mapsto u^2 + u + 1$
7/ $x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$
8/ $x \mapsto \pi x^2 - (2 + \pi^2)\, x + 2\pi$
9/ $x \mapsto x^2 - 8x - 4$
10/ $m \mapsto 8m - 9m^2$

Exercice 26 Trouver tous les fonctions polynômes unitaires de degré 2 prenant la valeur 1 en 0. Quel est le nombre de zéros d'une telle fonction polynôme.

Exercice 27 Pour tout nombre réel m, résoudre l'équation (E_m) d'inconnue réelle x suivante :

$$(E_m) : x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - (2m - 1)\, x + m^2 - m = 0$$

Exercice 28 Pour tout nombre réel m, résoudre l'équation (E_m) d'inconnue réelle t suivante :

$$(E_m) : t \in \mathbb{R}\,,\ mt^2 + 3t - 1 = 0$$

Remarque

Pour trouver les zéros éventuels de $(f : x \mapsto ax' + bx + c)$ avec $a \neq 0$ on pourra poser $b = 2b'$ car alors $\Delta = 4\,(b'^2 - ac)$ d'où, en posant $\Delta' = b'^2 - ac$, Δ et Δ' sont de même signe ou s'annulent simultanément donc :

* si $\Delta' = 0$ alors f a un zéro double : $-\dfrac{b'}{a}$
* si $\Delta' > 0$ alors f a deux zéros simples :

$$\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ et } \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

* si $\Delta' < 0$ alors f n'a pas de zéros.

Exercice 29 Pour tout nombre réel m, résoudre l'équation (E_m) d'inconnue réelle x :

$$(E_m) : x \in \mathbb{R}\,,\ (m - 1)\, x^2 + 2\,(m + 3)\, x + m + 6 = 0$$

2) Relations entre les zéros et les coefficients d'une fonction polynôme du second degré

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ de discriminant Δ égal à $b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$ alors f admet les deux zéros simples $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, leur somme est S avec $S = -\frac{b}{a}$ et leur produit est P avec $P = \frac{c}{a}$

Si $\Delta = 0$ alors f admet le zéro double $-\frac{b}{2a}$ que l'on interprète comme deux zéros égaux qui ont encore pour somme S avec $S = -\frac{b}{a}$ et pour produit P avec $P = \frac{c}{a}$

Théorème

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme de degré deux possédant deux zéros (distincts ou non) alors la somme S et le produit P de ces zéros sont tels que :

$S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$:

Remarque

On peut utiliser l'un de ces deux résultats pour, connaissant un zéro d'une fonction polynôme de degré 2 donnée, calculer l'autre.
Ainsi par exemple soit $f : x \mapsto 3x^2 - 15x + 18$

2 est un zéro « évident ».

L'autre zéro, noté z, est tel que : $2z = \frac{18}{3}$ $\left(\text{ou } z + 2 = \frac{15}{3}\right)$.

Il est donc égal à 3. Les zéros de f sont donc 2 et 3.

Exercice 30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$

2/ $x \in \mathbb{R}$, $\pi x^2 - (\pi + 1)x + 1 = 0$

Exercice 31 Soit $f : x \mapsto x^2 - ax + \frac{4}{3}$, où a est un élément de $\mathbb{R}$; Trouver a pour que 4 soit un zéro de f. Quel est alors l'autre zéro de f ?

Question 9 *Connaissant les signes de la somme S et du produite P de deux nombres réels x_1 et x_2 utiliser les propriétés de la relation d'ordre pour compléter le tableau ci-dessous : indiquer les signes respectifs de ces deux nombres x_1 et x_2, en précisant, dans le cas où ils sont de signes différents, celui qui est le plus grand en valeur absolue.*

P		S	
+	Les deux nombres sont de même signe	+	$x_1 > 0$ et $x_2 > 0$
		0	
		−	
0		+	
		0	
		−	
−		+	
		0	
		−	

Appliquons ces résultats aux zéros, quand ils existent, d'une fonction polynôme du second degré.

Soit $f : x \mapsto x^2 + (2m - 1)x + m^2 - 1$
Cherchons pour quelles valeurs du nombre réel m, f possède deux zéros distincts de signes contraires et tels que le plus grand en valeur absolue soit celui qui est positif.
On a
$\Delta_m = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - 1)$
$S_m = -(2m - 1)$
$P_m = m^2 - 1$

Les conditions imposées ci-dessous reviennent à résoudre le système d'inconnue m suivant :

$$\begin{cases} \Delta_m > 0 \\ P_m < 0 \\ S_m > 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} -4m + 5 > 0 \\ m^2 - 1 < 0 \\ -(2m - 1) > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $m \in \left]\leftarrow, \frac{5}{4}\right[\cap]-1, 1[\cap \left]\leftarrow, \frac{1}{2}\right[$

ou encore $m \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$

Exercice 32 Soit $(x \mapsto ax^2 + bx + c)$ une fonction polynôme de degré 2.
Dans chacun des cas suivants, trouver les conditions portant sur les nombres réels a, b et c de façon que :
1/ f a deux zéros opposés.
2/ f a deux zéros dont l'un est l'inverse de l'autre.
3/ f a un zéro nul.
4/ f a un zéro égal à 1.
5/ f a un zéro égal à −1

Exercice 33 Sachant que chacune des fonctions polynômes de degré 2 ci-dessous possède deux zéros (distincts ou confondus), sans les calculer, répondre aux questions suivantes :

Quels sont leurs signes ? s'ils sont de signes contraires quel est celui qui a la plus grande valeur absolue ?

1/ $f : x \mapsto x^2 - 8x + 15$ 4/ $f : t \mapsto t^2 + 2t - 3$
2/ $f : z \mapsto z^2 + 5z + 6$ 5/ $f : t \mapsto 2t^2 - 5t - 2$
3/ $f : t \mapsto t^2 - 9$ 6/ $f : m \mapsto 2m^2 - 4\sqrt{3m} + 6$

Exercice 34 Discuter, selon les valeurs du nombre réel m, de l'existence et du signe des solutions de l'équation d'inconnue x suivante :

$$(E_m) : x \in \mathbb{R}\ ,\ (m-2)\,x^2 + 2\,(m-2)\,x - 2 = 0$$

3) Recherche de deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit

Chercher s'il existe deux nombres réels de somme S et de produit P c'est résoudre le système (T).

$$(T) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\ , \quad x + y = S \text{ et } x\,y = P$$

Ainsi, par exemple, pour trouver deux nombres réels a et b de somme 5 et de produit 6 on résout le système

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2\ , \quad a + b = 5 \text{ et } a.b = 6$$

Question 10 *Montrer que si a et b existent alors ils sont solutions de l'équation d'inconnue X de $\mathbb{R}$. $X^2 - 5X + 6 = 0$. En déduire l'ensemble des couples de nombres réels (a, b) qui conviennent.*

Plus généralement, résolvons le système (T).
Soit (a, b) une solution, s'il en existe, de (T)

alors on a : $\begin{cases} b = S - a \\ a\,(S - a) = P \end{cases}$ et $\begin{cases} a = S - b \\ b\,(S - b) = P \end{cases}$

donc : a est tel que : $a^2 - Sa + P = 0$
et b est tel que : $b^2 - Sb + P = 0$
En conclusion : si (a, b) est solution de (T) alors les nombres réels a et b sont les solutions de l'équation d'inconnue réelle X : $(X \in \mathbb{R}\ ,\ X^2 - SX + P = 0)$ et donc si (a, b) est solution de (T) alors (b, a) est aussi une solution de (T).

La réciproque étant évidente on a :

Théorème

S'il existe deux nombres réels de somme S et de produit P donnés alors ce sont les solutions de l'équation d'inconnue réelle X

$$X \in \mathbb{R}\ ,\ X^2 - SX + P = 0$$

Exercice 35 Trouver, s'ils existent, deux nombres réels de somme S et de produit P dans chacun des cas suivants :

1/ $S = -1$ $P = -12$ 3/ $S = 3$ $P = 4$

2/ $S = -9$ $P = 20$ 4/ $S = \sqrt{2}$ $P = \frac{1}{2}$

Exercice 36 Trouver deux nombres réels sachant que leur somme est 13 et la somme de leurs inverses est 13/40.

Exercice 37 Le produit de l'âge d'Aminata et de celui de son père est 630 ; il y a deux ans ce produit était égal à 520. Quel est l'âge d'Aminata ? Quel est l'âge de son père ?

4) Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction polynôme de degré 2

Question 11 *Dans chacun des cas suivants factoriser ou écrire sous forme canonique les fonctions polynômes f données puis en s'aidant éventuellement d'un tableau, trouver, pour tout nombre réel x, le signe du nombre réel f(x)*

1/ $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$ *4/* $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$

2/ $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *5/* $f(x) = -x^2 - 5$

3/ $f(x) = 5x^2 + 13$

Plus généralement soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ une fonction polynôme de degré 2.

1/ Si $\Delta > 0$ alors f possède deux zéros distincts x_1 et x_2 avec (par exemple) $x_1 < x_2$ et se factorise sous la forme : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

d'où le tableau suivant :

x	$\leftarrow$	x_1		x_2	$\rightarrow$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f(x)	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

2/ Si $\Delta = 0$ alors f possède un zéro double x_1 et se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)^2$, d'où le tableau suivant :

x	$\leftarrow$	x_1	$\rightarrow$
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
f(x)	signe de a	0	signe de a

3/ Si $\Delta < 0$ alors f ne possède aucun zéro et s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Puisque $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif, pour tout nombre réel x, le nombre réel $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est strictement positif donc, pour tout nombre réel x, le signe du nombre réel f(x) est celui de a.

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2. Pour tout nombre réel x qui n'est pas un zéro de f, le nombre réel f(x) est du signe de son coefficient dominant sauf lorsque f possède deux zéros distincts x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) car f(x) est alors du signe contraire à celui de son coefficient dominant pour tout nombre réel x de l'intervalle $]x_1, x_2[$.

Exercice 38 Résoudre les inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 6x - 9 > 0$

2/ $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 - x - 1 > 0$

3/ $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + 8 \leqslant 0$

4/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3}x^2 - 6x + 3\sqrt{3} > 0$

5/ $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2 - 5x - 7}{x^2 + 1} < 0$

6/ $x \in \mathbb{R}$, $\frac{3x^2 + 3x - 18}{x^2 + 6x - 16} \leqslant 0$

Exercice 39 Dans chacun des cas suivants écrire, pour tout nombre réel x, le nombre réel f(x) sans valeur absolue :

1/ $f : x \mapsto |x^2 + 2x + 3|$

2/ $f : x \mapsto |x^2 + 2x| + 3$

3/ $f : x \mapsto x^2 + 2|x| + 3$

4/ $f : x \mapsto x^2 + |2x + 3|$

Exercice 40 Discuter suivant les valeurs du nombre réel m, du nombre de zéros de la fonction polynôme f définie par :

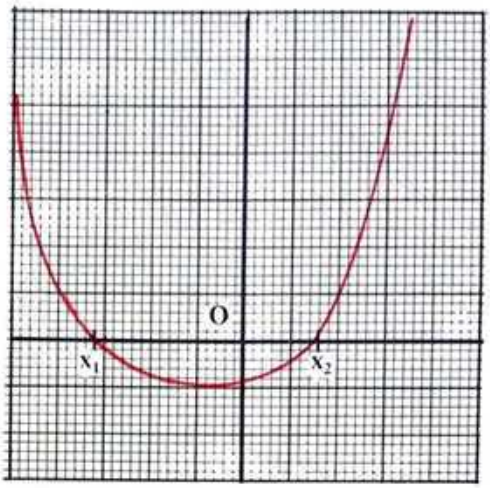
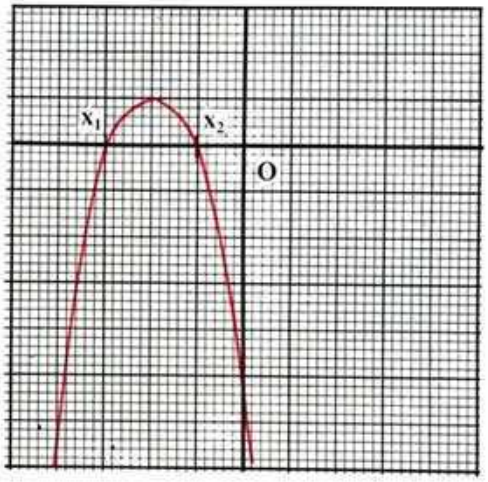
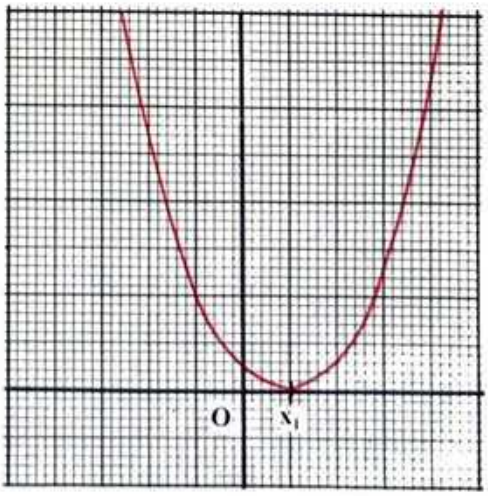
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 + m(m - 6)x + m^2$$

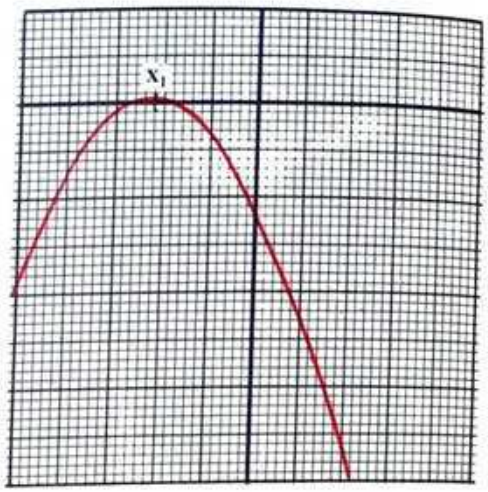
Quand f possède deux zéros, éventuellement confondus, quelle est la position de ces zéros par rapport à 0.

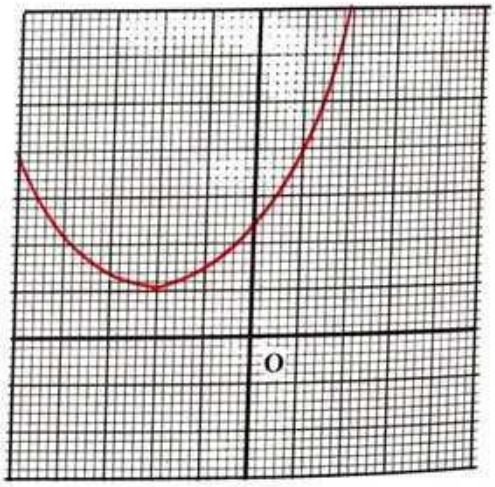
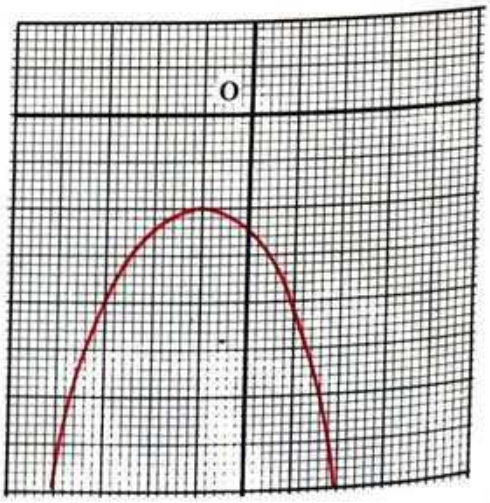
5) Interprétation graphique

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme de degré 2 et de discriminant Δ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Selon les signes de Δ et de a on obtient les six cas suivants :

<table>
<tr><th colspan="2">$\Delta > 0$</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">(C) coupe D $(O, \vec{i})$ en deux points distincts A et B d'abscisses respectives x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$
Soit (C_1) la courbe représentative de $f_{]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[}$,
Soit (C_2) la courbe représentative de $f_{]x_1, x_2[}$</td><td>$a > 0$
(C_1) au-dessus de D $(O, \vec{i})$
(C_2) au-dessous de D $(O, \vec{i})$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$
(C_1) au-dessous de D $(O, \vec{i})$
(C_2) au-dessous de D $(O, \vec{i})$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">$\Delta = 0$</th><th></th></tr>
<tr><td>(C) coupe D $(O, \vec{i})$ en un unique point A d'abscisse x_1</td><td>$a > 0$
(C) est au-dessus de D $(O, {}_1\vec{i})$</td><td></td></tr>
</table>

	a < 0 (C) est au-dessous de D $(O, \vec{i})$	

Δ < 0		
(C) ne rencontre pas D $(O, \vec{i})$	**a > 0** (C) est au-dessous de D $(O, \vec{i})$	
	a < 0 (C) est au-dessous de D $(O, \vec{i})$	

5 Equations et inéquations se ramenant au second degré

Question 12 *Soient f, g, h et c les fonctions polynômes suivantes :*
$f : x \mapsto x^2 + 4x + 5$ $\quad g : t \mapsto t + 1$
$h : z \mapsto z^2$ $\quad c : u \mapsto 2$
Trouver fog, foh et foc.

De même que, pour tout nombre réel u, foc(u) se note f(2) et s'obtient en remplaçant la variable x par le nombre réel 2 dans l'expression de f(x), on note f(t + 1) l'image par fog du nombre réel t et $f(z^2)$ l'image par foh du nombre réel z.

Exercice 41 Soit la fonction polynôme de degré 2 : $f : x \mapsto 5x^2 - 4x + 8$
Trouver, pour tout nombre réel z les nombres réels suivants : f(z + 1), $f(z^2)$, f(cos z), f(2z − 3).

1) Equation bicarrée

Question 13 *Soit $f : t \to t^4 - 5t^2 + 4$. Trouver une fonction polynôme g de degré deux telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(t^2) = f(t)$$

Trouver les zéros de g ; en déduire ceux de f.

Plus généralement résolvons l'équation dite **bicarrée**
(E) $x \in \mathbb{R}$, $ax^4 + bx^2 + 0 = 0$
où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
* Soit x_0 une solution de (E) c'est-à-dire tel que

$$ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0$$

alors on a : $a(x_0^2)^2 + bx_0^2 + c = 0$
ce qui montre que X_0 égal à x_0^2 est une solution positive de l'équation d'inconnue réelle X :

$$(E') \quad X \in \mathbb{R}, \quad aX^2 + bX + c = 0$$

* Réciproquement soit X_0 une solution positive de l'équation (E') c'est-à-dire telle que :

$$aX_0^2 + bX_0 + c = 0$$

puisque X_0 est un nombre réel positif posons :

$$x_0 = \sqrt{X_0} \text{ et } x'_0 = -\sqrt{X_0}$$

alors on a :

$$ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0 \text{ et } ax'^4_0 + bx'^2_0 + c = 0$$

ce qui montre que $\sqrt{X_0}$ et $-\sqrt{X_0}$ sont solutions de (E)
On a ainsi montré que l'équation (E) est équivalente au système d'inconnue x :

$$x \in \mathbb{R}, \ x^2 = X \quad \text{et} \quad aX^2 + bX + c = 0$$

Exercice 42 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue réelle x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$
2/ $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$
3/ $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + x^2 + 1 = 0$
4/ $x \in \mathbb{R}$, $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$
5/ $x \in \mathbb{R}$, $2x^4 + 11x^2 + 5 = 0$

Exercice 43 Pour quelles valeurs du nombre réel m l'équation suivante (E_m) d'inconnue réelle t possède-t-elle quatre solutions distinctes ?

$$(E_m) \quad t \in \mathbb{R}, t^4 + (m-2)t^2 + m + 1 = 0$$

Exercice 44 Trouver une condition portant sur les nombres réels a, b et c de façon que la fonction polynôme de degré 4 : $(x \mapsto ax^4 + bx^2 + c)$ possède deux zéros simples et un zéro double.

Exercice 45 En s'inspirant de la méthode de résolution d'une équation bicarrée résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle x suivante :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

et indiquer l'ordre de multiplicité des solutions trouvées.

2) Exemples d'équations contenant des radicaux

On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad [a = b \Rightarrow a^2 = b^2]$ mais que la réciproque de cette implication $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad [a^2 = b^2 \Rightarrow a = b])$ est fausse, car, par exemple : $2^2 = (-2)^2$ et $2 \neq -2$.

Il résulte de cette remarque que si f et g sont dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ toute solution de l'équation.

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$$

est solution de l'équation :

$$(E') \quad x \in \mathbb{R}, [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

donc : $S_E \subset S_{E'}$

Mais une solution de (E') n'est pas nécessairement une solution de (E), c'est-à-dire que l'on n'a pas nécessairement $S_{E'} \subset S_E$.

Premier exemple

Résolvons l'équation :

$$(E) \; x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3 - x} = x - 1$$

L'ensemble de validité V de l'équation (E) est :

$$V = \{x \in \mathbb{R}, \quad 3 - x \geqslant 0\}$$

c'est-à-dire : $V =]\leftarrow, 3]$

Soit a dans V une solution de (E) alors :

$$3 - a = (a - 1)^2$$

donc : $0 = (a + 1)(a - 2)$

donc : $a = -1$ ou $a = 2$ car $\{-1, 2\} \subset V$

d'autre part, en remplaçant dans (E) on a :

* Si $a = -1$ $\quad \sqrt{3 - (-1)} = 2$ et $-1 - 1 = -2$

donc (-1) n'est pas solution de (E)

* Si $a = 2$ $\quad \sqrt{3 - 2} = 1$ et $2 - 1 = 1$

donc : 2 est solution de (E)
Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est le singleton {2}.

Par contre : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2)$

Deuxième exemple

Résolvons l'équation :

(E) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x - 4}$

L'ensemble de validité de cette équation est :

$$V = \{x \in \mathbb{R} \ ; x^2 - 2 \geqslant 0 \text{ et } 3x - 4 \geqslant 0\}$$

c'est-à-dire : $V =]\leftarrow, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \rightarrow[\cap ([4/3, \rightarrow[)$

c'est-à-dire : $V = [\sqrt{2}, \rightarrow[$

Soit x un nombre réel. Les équations suivantes sont ici équivalentes

$x \in V, \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x - 4}$
$x \in V, x^2 - 2 = 3x - 4$
$x \in V, x^2 - 3x + 2 = 0$
$x \in V, x \in \{1, 2\}$

d'où : $S = \{2\}$ (car $1 \notin V$)

Exercice 46 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue réelle x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{9 - x^2} = x - 1$
2/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{1 - x^2}$
3/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x^2 (+ 5x + 2)} = \sqrt{x^2 + x - 2}$
4/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2 (x + 3)} - \sqrt{6 - x} = \sqrt{x}$
5/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{5 + x} = -2$

3) Exemples d'inéquations contenant des radicaux

On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2)$
mais que, par exemple, $-3 > -4$ et $(-3)^2 < (-4)^2$, tandis que
$2 > -5$ et $2^2 < (-5)^2$
Il résulte de cette remarque que si f et g sont deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, un nombre réel a tel que $f(a) \geqslant 0$ et $g(a) \geqslant 0$ est solution de $(x \in \mathbb{R}, \ \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)})$ si et seulement si il est solution de $(x \in \mathbb{R}, \ f(x) > g(x)$

Premier exemple

Résolvons l'inéquation :

(I) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1 - x} > \sqrt{2x - 3}$

L'ensemble de validité de cette inéquation est :

$$V =]\leftarrow, 1] \cap [3/2, \rightarrow[$$

V est donc vide, de ce fait : $S = \emptyset$

Deuxième exemple

Résolvons maintenant l'inéquation d'inconnue réelle x

(I) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{5 - x} > \sqrt{x - 3}$

L'ensemble de validité est : $V =]\leftarrow, 5] \cap [3, \rightarrow[$
c'est-à-dire : $V = [3, 5]$

Les inéquations suivantes sont équivalentes :

(I) $x \in [3, 5]$, $\sqrt{5 - x} > \sqrt{x - 3}$
(I) $x \in [3, 5]$, $5 - x > x - 3$
(I) $x \in [3, 5]$, $x < 4$
d'où $S = [3, 4]$

De même si f et g sont deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et V la partie de $\mathbb{R}$ telle que :

$$V = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \geqslant 0\}$$

l'ensemble des solutions de l'inéquation :

(I) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} > g(x)$
est la réunion des deux ensembles solution S_1 et S_2 des inéquations :

(I_1) $x \in V$, $g(x) \geqslant 0$ et $\sqrt{f(x)} > g(x)$
(I_2) $x \in V$, $g(x) < 0$ et $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Soit : $V' = \{x \in V ; g(x) \geqslant 0\}$
$V'' = \{x \in V ; g(x) < 0\}$

* (I_1) est équivalente à :
(I_1) $x \in V \cap V'$, $f(x) > [g(x)]^2$
* (I_2) est équivalente à :
(I_2) $x \in V \cap V''$, $\sqrt{f(x)} > g(x)$

or, pour tout x de $V \cap V''$, $\sqrt{f(x)}$ étant positif ou nul, et g(x) étant strictement négatif on a : $S_2 = V \cap V''$

Troisième exemple

Résolvons l'inéquation d'inconnue réelle x :

(I) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x + 1} > 5 - x$
on a : $V = [-1, \rightarrow]$, $V' =]\leftarrow, 5]$, $V'' =]5, \rightarrow[$
d'où :
$V \cap V' = [-1, 5]$, $V \cap V'' =]5, \rightarrow[$
Résolvons (I_1) :

(I_1) $x \in [-1, \rightarrow [\cap] \leftarrow, 5]$, $(x + 1) > (5 - x)^2$
(I_1) $x \in [-1, 5]$, $0 > (x - 3)(x - 8)$
(I_1) $x \in [-1, 5]$, $x \in]3,8[$
donc : $S_1 =]3, 5]$
Résolvons (I_2)

(I_2) $x \in [-1, \rightarrow [\cap] 5, \rightarrow[$, $\sqrt{x + 1} > 5 - x$
donc : $S_2 =]5, \rightarrow[$
Puisque $S = S_1 \cup S_2$ on a : $S =]3, 5] \cup]5, \rightarrow[$
donc : $S =]3, \rightarrow[$.

Exercice 47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x + 3} > \sqrt{x - 2}$
2/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x - 3} > \sqrt{5 - x}$
3/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3(x^2 - 1)} < 2x - 1$
4/ $x \in \mathbb{R}$, $2 - x < \sqrt{x^2 - 5x + 4}$
5/ $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2(x^2 - x - 6)} > \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

Réponses aux questions

Q 1 :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \right]$

or $\forall x \in \mathbb{R} \quad [x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]\leftarrow, -1] \cup [1, \rightarrow[]$
d'où $D =]\leftarrow, -1] \cup]1, \rightarrow[$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x - 1)(8x^2 + 8x + 2;) = 8x^3 - 6x - 2$
$\forall x \in D \quad (x + \sqrt{x^2 - 1})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{x^2 - 1}$
$+ 3x(x^2 - 1) + (\sqrt{x^2 - 1})^3$
$= 4x^3 + 4x^2\sqrt{x^2 - 1} - 3x - \sqrt{x^2 - 1}$
$(x - \sqrt{x^2 - 1})^3 = x^3 - 3x^2\sqrt{x^2 - 1}$
$+ 3x(x^2 - 1) - (\sqrt{x^2 - 1})^3$
$= 4x^3 - 4x^2\sqrt{x^2 - 1} - 3x + \sqrt{x^2 - 1}$
d'où : $\forall x \in D \quad g(x) = \dfrac{8x^3 - 6x - 2}{x - 1}$
g coïncide sur D avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x^2 + 8x + 2$
g n'est pas une fonction polynôme car $D \neq \mathbb{R}$

Q 2 : S'il existe une fonction polynôme q telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - 2)\,q(x)$
alors $d^0\, q = 0$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel a tel que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) = a$
par identification on a alors : $\begin{cases} a_1 = a \\ a_0 = -2a \end{cases}$
donc la condition est $(a_0 = -2a_1)$, c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_1 x - 2a_1$
on a alors $f(2) = 2a_1 - 2a_1 = 0$

Q 3 : S'il existe une fonction polynôme q' telle que
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (x + 1)\,q'(x)$
alors $d^0 q' = 1$: il existe deux nombres réels a et b tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad q'(x) = ax + b.$
Par identification on obtient $\begin{cases} a_2 = a \\ a_1 = a + b \\ a_0 = b \end{cases}$

Donc, pour que g(x) soit divisible par $x + 1$ il faut $a_1 = a_2 + a_0$ c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = a_2x^2 + (a_2 + a_0)x + a_0$
on a alors $g(-1) = a_2 - (a_2 + a_0) + a_0$
$= 0$

Q 4 : $f(2) = 5$ donc f n'est pas divisible par g.
$h(2) = f(2) - f(2) = 0$ donc h est divisible par g.
$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = t^2 + t - 6$
donc $h = g.q$ avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + 3$
on a alors :
$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) - f(2) = g(t)\,q(t)$
c'est-à-dire :
$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (t - 2)\,q(t) + 5$

Q 5 : $f(1) = 1 - 7 + 19 - 25 + 16 - 4 = 0$ donc f(x) est divisible par $x - 1$, et en effectuant la division on trouve :
$q(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$
$q(1) = 1 - 6 + 13 - 12 + 4 = 0$ donc q(x) est divisible par $x - 1$ et, en posant la division on trouve :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) = (x - 1)\,r(x)$
où : $r : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 8x - 4$,
ce qui donne :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - 1)(x - 1)\,r(x)$
on a $r(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$ donc r(x) est divisible par $x - 1$ et le quotient est s(x) avec
$s(x) = x^2 - 4x + 4$
on obtient alors en remplaçant r(x) par $(x - 1)\,s(x)$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - 1)^3\,s(x)$
$s(1) = 1 - 4 + 4 = 1$, s(x) n'est pas divisible par $x - 1$ mais, comme $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ on a
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$

Q 6 : Ceci revient à résoudre l'équation d'inconnue x :
$x \in \mathbb{R}$, $ax + b = 0$
1er cas : a = 0 l'équation est équivalente à
$x \in \mathbb{R}, \quad b = 0$
1) si $b = 0$ alors $S = \mathbb{R}$
2) si $b \neq 0$ alors $S = \emptyset$

2e cas : $a \neq 0$ l'équation est équivalente à
$x \in \mathbb{R}, \; x = -\dfrac{b}{a}$
donc : $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Conclusion : si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout nombre réel est zéro de la fonction $f : x \mapsto ax + b$
si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors f ne possède aucun zéro
si $a \neq 0$ alors f a un seul zéro : $-\dfrac{b}{a}$

Q 7 : 1/ $f : x \mapsto (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
2/ $f : x \mapsto (x - 1)(x - 3)(x^2 + 1)$ car
$\forall x \in \mathbb{R} \; x^2 + 1 \neq 0$
3/ $f : x \mapsto x(x - 1)(x - 2)$
4/ ce n'est pas possible car f doit être divisible par $[g : x \mapsto x(x + 1)(x - 1)(x - 2)]$ qui est de degré 4

Q 8 : 1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^2 - 9 = (\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 3)$
donc les zéros de f sont $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, ils sont simples.
2. $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3 = (y - \sqrt{3})^2$
donc f possède un seul zéro : $\sqrt{3}$, il est double.
3. $\forall z \in \mathbb{R} \quad 2z^2 - 5z + 3 = (z - 1)(2z - 3)$ donc f possède deux zéros simples 1 et $\dfrac{3}{2}$
4. $\forall u \in \mathbb{R} \quad u^2 + u + 1 = \left(u + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

donc f ne possède aucun zéro
$\left(\forall u\in\mathbb{R}, \left(u+\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0\right)$ donc $\left(\forall u\in\mathbb{R}\ f(u) > 0\right)$

5. $\forall t\in\mathbb{R}\quad 3t^2 \geqslant 0$
donc $\forall t\in\mathbb{R}\quad 3t^2 + 16 > 0$
f ne possède aucun zéro.

6. $\forall w\in\mathbb{R}\quad \pi^2w^2 - 2w + \frac{1}{\pi^2} = \left(\pi w - \frac{1}{\pi}\right)^2$

donc f possède un zéro double : $\frac{1}{\pi^2}$

Q 9 :

P		S	
+	Les deux nombres x_1 et x_2 sont de même signe	+	$x_1 > 0$ et $x_2 > 0$
		0	$x_1 = 0$ et $x_2 = 0$
		−	$x_1 < 0$ et $x_2 < 0$
0	Un des deux nombres est nul x_1 par exemple	+	$x_1 = 0$ et $x_2 > 0$
		0	$x_1 = 0$ et $x_2 = 0$
		−	$x_1 = 0$ et $x_2 < 0$
−	Les deux nombres x_1 et x_2 sont de signes contraires ($x_1 > 0$ par ex.)	+	$x_1>0$ et $x_1<0$ et $\lvert x_2\rvert<\lvert x_1\rvert$
		0	$x_1>0$, $x_2<0$ et $x_1=-x_2$
		−	$x_1>0$ et $x_2<0$ et $\lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$

Q 10 : (T) : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x+y=5$ et $xy=6$
(T) : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x=5-y$ et $(5-y)y=6$
or : $\forall y\in\mathbb{R}\quad ((5-y)y=6 \Leftrightarrow y^2-5y+6=0)$
De même :
(T) : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $y=5-x$ et $x(5-x) = 6$
or : $\forall x\in\mathbb{R}\quad (x(5-x)\ 6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0)$
Donc x et y, s'ils existent, tels que (x,y) soit solution de (T), sont solutions de
(E) : $X\in\mathbb{R}$, $X^2 - 5X + 6 = 0$
or les solutions de (E) sont 2 et 3 donc l'ensemble des solutions du système (T) est
$\{(2,3), (3,2)\}$

Q 11 : 1/ $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$
$\Delta = 11^2$, $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{2}$
$f(x) = (x + 5)(2x - 1)$

x	←	−5		$\frac{1}{3}$	→
x+5	−	0	+	|	+
2x−1	−	|	−	0	+
f(x)	+	0	−	0	+

2/ $f(x) = (x + 1)^2$
$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ \forall x\in\mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) > 0 \end{cases}$

3/ $f(x) = 5x^2 + 13$
$\forall x\in\mathbb{R}\quad 5x^2 \geqslant 0$
donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x) > 0$

4/ $f(x) = -3[(x-1)^2 - 4]$
$= -3(x - 3)(x + 1)$

x	←	−1		3	→
x+1	−	0	+	|	+
x−3	−	|	−	0	+
(x−3)(x+1)	+	0	−	0	+
f(x)	−	0	+	0	−

5/ $f(x) = -x^2 - 5$
$\forall x\in\mathbb{R}\quad -x^2 \leqslant 0$
donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x) < 0$

Q 12 : $\forall x\in\mathbb{R}\quad fog(x) = f(x+1)$
$= (x + 1)^2 + 4(x + 1) + 5$
$= x^2 + 6x + 10$
$fog : x \mapsto x^2 + 6x + 10$
$\forall x\in\mathbb{R}\quad foh(x) = f(x')$
$= (x^2)^2 \to 4x^2 + 5$
$foh : x \mapsto x^4 + 4x^2 + 5$
$\forall x\in\mathbb{R}\quad foc(x) = f(2)$
$= 2^2 + 4.2 + 5$
$foc : x \mapsto 17$

Q 13 : $g : t \mapsto t^2 - 5t + 4$
$g(1) = 0$ donc 1 est zéro de g ; l'autre est a tel que $1.a = 4$, donc $a = 4$. Les zéros de g sont 1 et 4.
Chercher les zéros de f c'est résoudre l'équation :

(E) $t\in\mathbb{R}$, $f(t) = 0$
(E) $t\in\mathbb{R}$, $g(t^2) = 0$
(E) $t\in\mathbb{R}$, $t^2\in\{1, 4\}$
or : $\forall t\in\mathbb{R}\quad [t^2 = 1 \Leftrightarrow t\in\{-1, 1\}]$
et : $\forall t\in\mathbb{R}\quad [t^2 = 4 \Leftrightarrow t\in\{-2, 2\}]$
Donc les zéros de f sont −2, −1, 1 et 2

Résultats ou indications des exercices

4/ $p(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 3)$

5/ $r(x) = x^2 + 2x + 4$ ou $r(x) = -(x^2 + 2x + 4)$

6/ $a = 3, b = 7, c = 8$

10/ Les quotients sont
$x^3 + 7x^2 + 3$
$t^3 + \sqrt{2}\,t^2 + 2t + 2\sqrt{2}$
$2z^2 - 5z + 4$
$u^3 + \sqrt{3}\,u + 1$
$x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1$

11/ non car $x^2 - 3x + 2$ est divisible par $x-1$ mais pas par $x - 3$

13/ $a = -418, b = 732$

14/ $a = 1, b = 8, c = 33, d = 31$

17/ les quatre zéros $2, -3, -1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$ sont simples.

18/ 1/ $k = \frac{1}{4}$ 2/ $k = -6$

19/ k étant un nombre réel non nul
$p(x) = k(x - 2)(x + 5)$

20/ Supposons qu'il existe une fonction polynôme du second degré possédant un seul zéro a. Le quotient q de p par $x - a$ est une fonction polynôme du 1er degré. Donc q admet un zéro ; ce zéro b de q est aussi un zéro de p donc b est égal à a ; ce qui montre que a est un zéro double de p.

22/ Non, s'inspirer de l'exercice 20

23/ $f(x) = 12(x - 2)^3(x + 1)^2$
$g(x) = 4(x - 2)^2(x + 1)$

26/ $p(x) = x^2 + bx + 1$ où b est un nombre réel.

28/ Dans le cas où m est non nul, distinguer les cas
$m = -9/4$
$m < -9/4$
et $m > -9/4$

29/ Avez-vous étudié le cas $m = 1$?

32/ 1/ $b = 0$ et $ac < 0$
2/ $c = a$ et $b^2 > 4a^2$
3/ $c = 0$
4/ $a + b + c = 0$
5/ $a - b + c = 0$

34/
- $m < 0$: deux zéros distincts et négatifs
- $m = 0$: un zéro double $= -1$
- $0 < m \leqslant 2$: pas de solution
- $m > 2$: deux zéros de signes contraires

36/ $\begin{cases} x + y = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{13}{40} \end{cases}$ et $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 40 \end{cases}$
sont équivalents

42/ 1/ $S = \{-3 ; -\sqrt{2}, \sqrt{2} ; 3\}$
2/ $S = \{-1 ; 1\}$
3/ $S = \emptyset$
4/ $S = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}} ; \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$
5/ $S = \emptyset$

43/ L'équation :
$T \in \mathbb{R}, T^2 + (m - 2)T + m + 1 = 0$
doit être telle que son discriminant soit strictement positif ainsi que la somme et le produit de ses solutions.

44/ $c = 0$ et $ab < 0$

46/ 1/ $V = [-3 ; 3]$ $S = \left\{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right\}$
2/ $V = \emptyset$
3/ $V =]\leftarrow ; -2] \cup [1 ; \rightarrow[$ $S = \{-2\}$
4/ $V = [0 ; 6]$ $S = \{0 ; 3\}$
5/ $V = \left[-5 ; \frac{3}{2}\right]$ $S = \emptyset$

47/ 1/ $[2 ; \rightarrow[$
2/ $\left]\frac{8}{3} ; 5\right]$
3/ $[1 ; 2[\cup]2 ; \rightarrow[$
4/ $]\leftarrow ; 0[\cup [4 ; \rightarrow[$
5/ $]\leftarrow ; -4] \cup \left]\frac{5 + \sqrt{57}}{2} ; \rightarrow[\right.$

Exercices

48 Les fonctions numériques suivantes de la variable réelle x sont-elles des fonctions polynômes ?

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2}(x^4 + x^2)$ 2. $x \mapsto \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$
3. $x \mapsto x^2 + 3|x| + 1$ 4. $x \mapsto |x|^2 + 3x + 5$

49 Trouver toutes les fonctions polynômes de degré deux dont la courbe représentative dans un repère $\mathcal{R}$ du plan passe par les points de coordonnées $(0 ; -1)$ et $(2 ; 5)$

50 Trouver poq dans chacun des cas suivants :

1/ $p : x \mapsto 2x + 3$ $q : x \mapsto x^2 + 1$
2/ $p : x \mapsto x^3 + 1$ $q : x \mapsto 3 - x^2$
3/ $p : x \mapsto x^2 + 3x + 1$ $q : x \mapsto 1 - x^2 + 3x$

51 Soit p la fonction polynôme de degré 4 telle que :
$p(0) = -10$, $p(1) = -11$, $p(-1) = -7$, $p(2) = 56$ et $p(-2) = 4$
Trouver $p(x)$ pour tout nombre réel x.

52 Trouver la fonction polynôme p de degré 2 qui coïncide avec la fonction
$x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $\left\{0 ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$

53 Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :
$x \mapsto 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k$
soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.

54 Calculer le produit des deux fonctions polynômes p et q dans chacun des cas suivants :

$p(x) = x^2 + x + 3$ $q(x) = 2x + 1$
$p(x) = x^2 - x + 1$ $q(x) = x^2 - x + 1$
$p(x) = 5x^3 + 4x^2$ $q(x) = x^4 + 2x^3 + 5x + 2$

55 Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 f(x) + (x-1)^2 g(x) = 1$

56 Soit p la fonction polynôme telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = x^2 + x + 1$
Trouver trois nombres réels a, b et c tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

57 Soit p la fonction polynôme telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4$
Trouver deux nombres réels a et b tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$
En déduire une factorisation de p.

58 Reprendre l'exercice 57/ dans chacun des cas suivants :

a/ $p(x) = 10x^3 + 29x^2 + 20x + 4$
b/ $p(x) = 6x^3 + 5x^2 + 12x + 4$
c/ $p(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

59 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction polynôme p est divisible par la fonction polynôme q :

1/ $p : x \mapsto x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 3$ $q : x \mapsto x - 1$
2/ $p : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 13x - 8$ $q : x \mapsto x - 1$
3/ $p : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ $q : x \mapsto (x-1)^2$
4/ $p : x \mapsto x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ $q : x \mapsto (x-1)^3$
5/ $p : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 24$ $q : x \mapsto (x-1)^2$

60 Trouver les deux nombres réels k et k' tels que la fonction polynôme p :
$x \mapsto x^5 - 8x^4 + x^3 + 17x^2 + kx + k'$
soit divisible par la fonction polynôme
$q : x \mapsto x^2 - 8x + 3$

61 Dans chacun des cas suivants, trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de la fonction polynôme f par la fonction polynôme g :

1/ $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 1$ $g : x \mapsto 2x - 1$
2/ $f : x \mapsto x^3 - 1$ $g : x \mapsto 2x^4 - 3x^2 + 1$
3/ $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{2}$ $g : x \mapsto x - 2$
4/ $f : x \mapsto \frac{6}{7}x^3$ $g : x \mapsto \frac{3}{5}$

62 Effectuer la division euclidienne de la fonction polynôme $(f : x \mapsto x^2 - 5x + 8)$ par la fonction polynôme $(g : x \mapsto x - 2)$. En déduire qu'il existe trois nombres réels a, b et c que l'on trouvera tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

63 Effectuer la division euclidienne de la fonction polynôme $(f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7)$ par la fonction polynôme $(g : x \mapsto x^2 + 2x - 3)$. En déduire qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3 ; 1\} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 2x - 3}$$

64 Trouver les deux nombres réels p et q tels que la fonction polynôme $(f : x \mapsto x^4 + px + q)$ soit divisible par la fonction polynôme $(g : x \mapsto x^2 + px + q)$.

65 Montrer que la fonction polynôme p telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 1$
est divisible par la fonction polynôme q telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) = (x-1)^2(x+1)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

66 Dans chacun des cas ci-dessous effectuer la division euclidienne de f par g :

1/ $f : x \mapsto x^8 + x^3 + x$ $g : x \mapsto x^2 + x + 1$
2/ $f : x \mapsto (x+1)^4 - (x+1)^2$ $g : x \mapsto x(x+1)(2x+1)$
3/ $f : x \mapsto (1-x)^2$ $g : x \mapsto x^2 + 3x$

67 Effectuer les divisions euclidiennes successives suivantes :
$(1 - x)^3 = x^3 q_1(x) + r_1(x)$
$x^3 = r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x)$
$r_1(x) = r_2(x)\, q_3(x) + r_3(x)$
En déduire qu'il existe deux fonctions polynômes u et v telles que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 - x)^3 u(x) + x^3 v(x) = 1$

68 Développer la fonction polynôme
$$x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$$

En déduire que la fonction $[p : x \mapsto x^4 + x^2 - 6]$ peut s'écrire $\left\{p : x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right\}$.

Trouver les zéros de p et indiquer leur ordre de multiplicité.

69 Utiliser la méthode employée dans l'exercice précédent pour trouver les zéros de la fonction polynôme
$p : x \mapsto 12x^4 + 10x^2 - 12$

70 Soit p la fonction polynôme telle que :
$p : t \mapsto t^5 - 8t^4 + 24t^3 - 34t^2 + 23t - 6$
Montrer que 1 est zéro triple de p. Trouver tous les zéros de p.

71 Trouver le nombre réel k tel que 3 soit un zéro de la fonction polynôme
$[p : t \mapsto t^3 - 6t^2 + (2 + 3k)t - 2k]$.
Trouver tous les zéros de p.

72 Montrer que le nombre réel a est un zéro de la fonction polynôme f définie par :
$\forall z \in \mathbb{R} \quad f(z) = z^4 - 2(a+1)\, z^3 - 3z^2 + (3a-2)z + 2a$
Trouver tous les zéros de f et indiquer leur ordre de multiplicité.

73 Dans chacun des cas suivants trouver une fonction polynôme p vérifiant les conditions imposées :
1/ $d°p = 3$ et, 2 et -2 sont des zéros de p
2/ $d°p = 5$ et, 2 est zéro double, 3 zéro triple de p
3/ $d°p = 6$ et p possède un unique zéro : 2
4/ $d°p = 5$ et p possède un unique zéro : 4 qui est simple

74 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R},\ 4x^2 - 9x - 13 = 0$
2/ $x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 2x - 24 = 0$
3/ $x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}x^2 + (5\sqrt{3}+1)x + 5 = 0$
4/ $x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
5/ $x \in \mathbb{R},\ 3x^2 + 2x - 1 = 0$
6/ $x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + x + 1 = 0$
7/ $x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + 4\sqrt{2}x + 18 = 0$
8/ $x \in \mathbb{R},\ 40x^2 - 194x - 30 = 0$

75 Simplifier, dans leur ensemble de définition, les fractions rationnelles suivantes :

$x \mapsto \dfrac{5x^2+9x+4}{4x^2+7x+3}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{4\sqrt{2}x^2+4x}{2x^2-2\sqrt{2}x-3}$

$x \mapsto \dfrac{6x^2-2x-4}{10x^2-12x+2}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{8x-26}{4x^2-9x-13}$

$x \mapsto \dfrac{18x^2-3x-1}{3x^2+2x-1}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{8x^2+16x}{24x^2+8x}$

$x \mapsto \dfrac{20x^2-57x-9}{40x^2+94x-30}$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}x^2+(5\sqrt{3}+1)x+15}{x^2+25}$

76 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes :

1/ $x \in \mathbb{R},\ x^2+3x+2=0$
2/ $x \in \mathbb{R},\ x^2-2\sqrt{3}+3=0$
3/ $x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{4}x^2-7x+49=0$
4/ $x \in \mathbb{R},\ x^2-x+5=0$
5/ $x \in \mathbb{R},\ -2x^2+3x-5=0$
6/ $x \in \mathbb{R},\ 4x^2+4x-3=0$
7/ $x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2}x^2-\sqrt{7}x+1=0$
8/ $x \in \mathbb{R},\ x^2-(\pi+\sqrt{2})x+\pi\sqrt{2}=0$

77 Sachant que chacune des fonctions polynômes p suivantes possède un zéro évident trouver tous les zéros de p.

1/ $p(x)=x^2-5x+6$
2/ $p(x)=x^2-15x+26$
3/ $p(x)=x^3-x^2-2x+3$
4/ $p(x)=x^6-64$
5/ $p(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4$
6/ $p(x)=x^3-2x^2-2x-3$
7/ $p(x)=x^3-(\sqrt{2}+2)x^2+(1+2\sqrt{2})x-\sqrt{2}$
8/ $p(x)=x^4-x^3-3x^2+2x$

78 Trouver, selon les valeurs du nombre réel m, le nombre et l'ordre de multiplicité des solutions de chaque équation d'inconnue x suivante :

1/ $x \in \mathbb{R},\ (2m-1)x^2 + 3x - 2 = 0$
2/ $x \in \mathbb{R},\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0$
3/ $x \in \mathbb{R},\ (m-1)^2x^2 + x - 5 = 0$
4/ $x \in \mathbb{R},\ \dfrac{m-2}{2}x^2 + (m-3)x + \dfrac{m+5}{2} = 0$

79 Trouver la valeur du nombre réel k telle que la fonction polynôme p définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = x^2 - zkx + 2k = 7$
possède 2 comme zéro. Trouver alors l'autre zéro de p.

80 Trouver les valeurs du nombre réel m telles que la fonction polynôme p définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m + 2$
possède deux zéros distincts.

81 Dans chacun des cas suivants trouver, s'ils existent, deux nombres réels de somme S et de produit P

1/ $S = \frac{5}{6}$ $P = \frac{1}{6}$
2/ $S = 17$ $P = -84$
3/ $S = \sqrt{10}$ $P = 1 + \sqrt{2}$

82 Trouver tous les couples de nombres réels dont la somme est égale au produit.

83 Résoudre les systèmes suivants :

1/ $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 = 13$ et $xy = -6$
2/ $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $xy = 6$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
3/ $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $x - y = \sqrt{2}$ et $xy = 4$
4/ $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2 + xy + y^2 = 2$ et $xy = 3$
5/ $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 + 5xy = -10$ et $xy = -2$

84 Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 9 hectares et de périmètre 1 500 m.

85 Trouver le nombre réel k tel que les fonctions polynômes f et g définies par :
$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - kx + 1$
$\forall x\in\mathbb{R}$ $g(x) = x^3 - 3x + k$
aient un zéro commun.

86 A tout nombre réel m, on associe l'équation $(\mathscr{E}_m)$ d'inconnue réelle x suivante :
$(\mathscr{E}_m) : x\in\mathbb{R}$, $x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$
Dans chacun des cas suivants trouver les valeurs du nombre réel m telles que :
a/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions distinctes
b/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a une solution double
c/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions de signes contraires.
d/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions distinctes négatives
e/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a une solution double positive.
f/ le nombre réel 1 est solution de $(\mathscr{E}_m)$, trouver alors l'autre solution.

87 A tout nombre réel m, on associe la fonction polynôme du second degré f_m définie par :
$\forall x\in\mathbb{R}$ $f_m(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1$
a/ Discuter suivant les valeurs du nombre réel m, du nombre et du signe des zéros de f_m
b/ Trouver la valeur du nombre réel m telle que la fonction polynôme f_m possède deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que : $x_1^2 + x_2^2 = 29$ (Pour cela on exprimera le nombre réel $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de $(x_1 + x_2)$ et de $x_1 \cdot x_2$)
c/ Trouver la valeur du nombre réel m telle que la fonction polynôme f_m possède deux zéros distincts x_1 et x_2 tels que $|x_1 - x_2| = 1$

88 Etudier suivant les valeurs du nombre réel x le signe du nombre réel f(x) dans chacun des cas suivants :

a/ $f(x)=9x^2-30x+56$
b/ $f(x)=4x^2-24x+27$
c/ $f(x)=-7+5x-x^2$
d/ $f(x)=(x-1)^2$
e/ $f(x)=3x^2+3x+4$
f/ $f(x)=8x-3x^2+35$
g/ $f(x)=-x^2-7$
h/ $f(x)=3x^2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}x$

89 Résoudre les inéquations suivantes :

a/ $x\in\mathbb{R}$, $x^2 + 4x - 21 \geqslant 0$
b/ $x\in\mathbb{R}$, $9x - 2x^2 + 5 < 0$
c/ $x\in\mathbb{R}$, $(x - 3)^2 \leqslant 0$
d/ $x\in\mathbb{R}$, $-3x^2 + 7x < 0$
e/ $x\in\mathbb{R}$, $5x^2 - 7 + 6x > 0$
f/ $x\in\mathbb{R}$, $9x^2 - 1 > 0$

90 Discuter suivant les valeurs du nombre réel m du nombre des solutions de l'équation suivante :

1/ $x\in\mathbb{R}$, $x^2 + m(m - 6)x + m^2 = 0$
2/ $x\in\mathbb{R}$, $x^2 - (4 - 3m)x + 2m^2 - 5m + 3 = 0$
3/ $x\in\mathbb{R}$, $(m - 1)x^2 + (3 - 2m)x + m - 2 = 0$

91 A tout nombre réel m, on associe l'équation :
$(\mathscr{E}_m) : x\in\mathbb{R}$, $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 = 0$
Dans chacun des cas suivants trouver les valeurs du nombre réel telles que :

a/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions distinctes
b/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions de signes contraires
c/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a une solution double
d/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ n'a pas de solution
e/ l'équation $(\mathscr{E}_m)$ a deux solutions opposées

92 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a/ $x\in\mathbb{R}$, $-5x^2 + 6x - 1 > 0$
b/ $x\in\mathbb{R}$, $40x^2 - 194x - 30 > 0$
c/ $x\in\mathbb{R}$, $-3x^2 - 2x + 1 < 0$
d/ $x\in\mathbb{R}$, $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 < 0$
e/ $x\in\mathbb{R}$, $\frac{4x^2 - 9x - 13}{2(3x+1)} > 0$
f/ $x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2 + 2\sqrt{3}x + 9}{3x^2 + 2x - 1} < 0$
g/ $x\in\mathbb{R}$, $\frac{4x^2 + 10x - 6}{2x^2 + x + 1} < 0$

93 A tout nombre réel m, on associe l'équation :
$(\mathscr{E}_m) : x\in\mathbb{R}$, $x^2 - 2mx - 5 = 0$
Trouver, dans chacun des cas suivants, une valeur du nombre réel m pour que les solutions x_1 et x_2 de l'équation correspondante vérifient la relation imposée :

a/ $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 3$
b/ $x_1^2 + x_2^2 = 4$
c/ $x_1^3 + x_2^3 = 8$
d/ $\frac{x_1 - 2}{x_2 - 2} + \frac{x_2 - 2}{x_1 - 2} = 5$

94 On désigne par x_1 et x_2 les solutions, quand elles existent, de l'équation :

$$x\in\mathbb{R}\ ,\ ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des réels.
Sans calculer x_1 et x_2, exprimer en fonction des nombres réels a, b et c chacune des expressions suivantes :

a/ $\dfrac{1}{x_1 - 3} + \dfrac{1}{x_2 - 3}$

b/ $x_1^2 + x_2^2$

c/ $x_1^3 + x_2^3$

d/ $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)$

e/ $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$

f/ $\dfrac{x_2}{x_2^2 - 1} + \dfrac{x_1}{x_1^2 - 1}$

95 Résoudre les équations suivantes :

a/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

b/ $t\in\mathbb{R}\ ,\ t^4 + t^2 - 6 = 0$

c/ $z\in\mathbb{R}\ ,\ z - 3\sqrt{z} + 2 = 0$

d/ $u\in\mathbb{R}\ ,\ E(u)^2 - 5E(u) + 6 = 0$

où E est la fonction partie entière et $E(u)^2$ le nombre $[E(u)]^2$.

96 Résoudre les équations suivantes :

a/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \dfrac{2x - 1}{x - 3} = \dfrac{8}{5x - 2}$

b/ $t\in\mathbb{R}\ ,\ \dfrac{5t}{t - 2} + \dfrac{3 - t}{t} = \dfrac{4t + 3}{t^2 - 2t}$

97 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ 3x^2 - 2|x| + 1 = 0$

b/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ |x^2 - 4x + 3| \leqslant 5$

c/ $t\in\mathbb{R}\ ,\ 4t^4 - 5t^2 + 1 \leqslant 0$

d/ $u\in\mathbb{R}\ ,\ E(5x^2 + 7x + 3) = 5$

f/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2 + x + 1} = 3x - 1$

g/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{22x - 3x^2 - 35} = x - 3$

h/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

i/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{1 - x} + \sqrt{x + 3} = 2$

j/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{3 - x} > x - 2$

k/ $x\in\mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2 - 5x + 6} > \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

98 m désignant un nombre réel, on considère l'équation :

$$(\mathscr{E}_m) : x\in\mathbb{R}\ ,\ x^2 + (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$$

Trouver pour quelles valeurs du nombre réel m l'équation $(\mathscr{E}_m)$ possède deux solutions telles que l'une soit le carré de l'autre

99 Résoudre le système S :

$$S : (x, y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ \begin{cases} 7x^2 + 3xy + x - 1 = 0 \\ 7y^2 + 3xy - y - 1 = 0 \end{cases}$$

100 Un générateur électrique (en courant continu) fournit une puissance P de 500 Watts quand la tension U à ses bornes est de 10 volts. Quelle est l'intensité I du courant débité sachant que sa résistance interne r est de 0,05 ohms
On rappelle que la puissance totale fournie par le générateur est la somme de la puissance U.I utilisable dans le circuit et de la puissance perdue par effet joule rI^2 dans le générateur

101 Une charge électrique positive Q de 4.10^{-6} Coulomb est placée en un point A. Une charge électrique positive Q' de 5.10^{-6} Coulomb est placée en un point B distant de A de 10 cm. On rappelle que le champ électrique $\vec{E}$ en un point M créé par une charge Q en un point A est donné par la formule :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, AM^2}\,\vec{u}$$

avec $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{AM}\|}\,.\,\overrightarrow{AM}$

où AM est exprimée en mètres :

1°/ Soient $\vec{E}_A$ et $\vec{E}_B$ les champs électriques créés en un point M par les charges situées respectivements en A et en B.
Montrer qu'il existe un et seul point M dont on déterminera la position tel que :

$\vec{E}_A + \vec{E}_B = \vec{O}$.

2°/ Répondre au même problème avec la même charge en A et une charge Q'' égale à -5.10^{-6} Coulomb en B.

3 Tracés de courbes

I. COURBES REPRÉSENTATIVES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN
II. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIES

Dans tout ce chapitre $\mathcal{R}$ désigne un repère orthogonal égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine $\mathcal{P}$.

1 Courbes représentatives et transformations du plan

Soit f une fonction numérique de la variable réelle. On désigne par D_f son ensemble de définition et par (C_f) sa courbe représentative dans $\mathcal{R}$.

On a : $(C_f) = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \; ; \; x \in D_f \text{ et } y = f(x) \right\}$

On dira que l'équation a deux inconnues :

$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; , \; y - f(x) = 0$$

est une équation de (C_f) dans le repère $\mathcal{R}$, son ensemble de validité étant $D_f \times \mathbb{R}$.

Exercice 1 Représenter graphiquement les ensembles de points caractérisés par les équations suivantes dans $\mathcal{R}$; préciser pour chacun d'entre eux s'il s'agit de la courbe représentative d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1/ $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(2x + y - 3)(x - 3y + 1) = 0$

2/ $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $|x| + |y| = 1$

3/ $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y(y - x + 2) + 5y - 3 + (y - 2)(3 + x - y) = 0$

4/ $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\max(|x| , |y|) = 1$

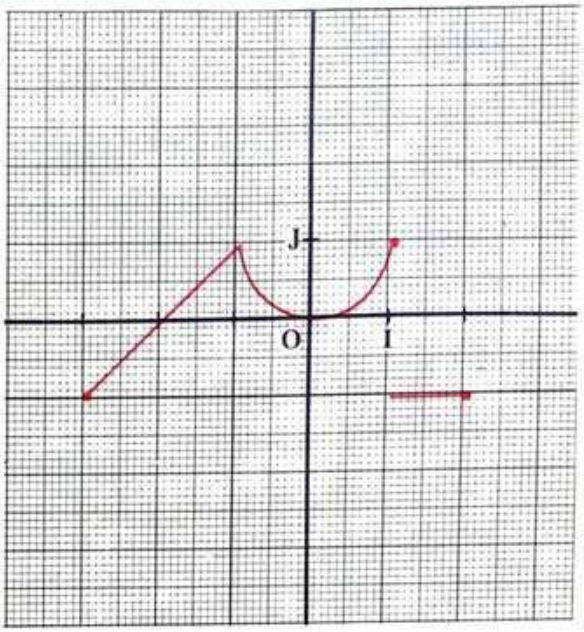
1) Étude de $|f| : x \mapsto |f(x)|$

Soit f l'application de $[-3;2]$ vers $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique (C_f) dans le

repère $\mathcal{R}$ est donnée ci-contre :
On va construire la représentation graphique de l'application :

$$|f| : [-3;2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |f(x)|$$

à partir de celle de f.



Soit $P = \{x \in [-3;2] ; f(x) \geqslant 0\}$
$N = \{x \in [-3;2] ; f(x) \leqslant 0\}$
On a : $P = [-2;1]$ et $N = [-3;-2] \cup]1,2] \cup \{0\}$

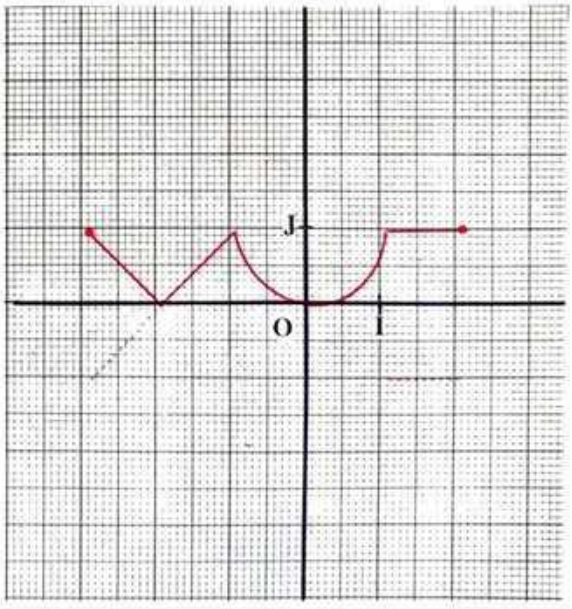
Il résulte de la définition de la valeur absolue d'un nombre réel que :

$\forall x \in P \quad |f(x)| = f(x)$
$\forall x \in N \quad |f(x)| = -f(x)$

Donc, en désignant par (C') la représentation graphique de la restriction de f à P et par (C'') celle de la restriction de f à N, on a :

$$(C_{|f|}) = (C') \cup S_{(O,\vec{i})}(C'')$$

où $S_{(O,\vec{i})}$ est la symétrie orthogonale d'axe la droite D $(O, \vec{i})$. En effet l'image d'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$ par cette symétrie est le point $M'\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.



Exercice 2 Construire le tableau de variation de la fonction f de l'étude précédente. En déduire le tableau de variation de |f|.

Exercice 3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ bornée ; la fonction |f| est-elle bornée ?

Exercice 4

Soit f : $[-4;4] \to \mathbb{R}$ définie par :

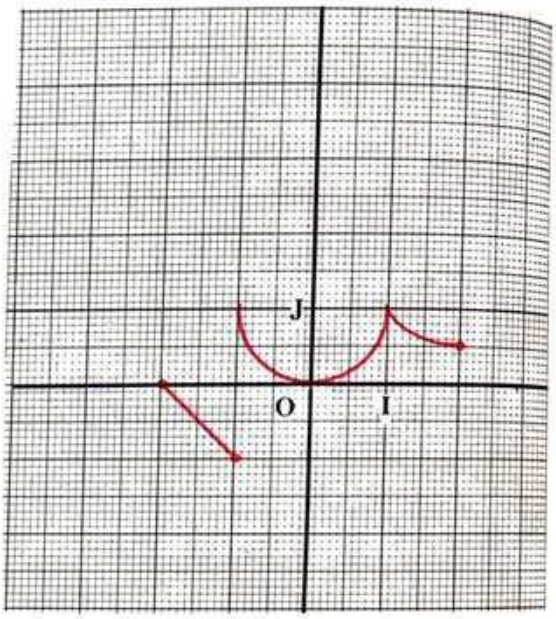
$\forall x \in [-4;1] \quad f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $\forall x \in]1;4] \quad f(x) = |x-3|$.

Construire la courbe représentative de f.

2) Étude de g : x ↦ f(x) + b (b nombre réel donné)

Soit f la fonction de $[-2;2]$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in [-2;1] & f(x) = -x-2 \\ \forall x \in]-1;1] & f(x) = x^2 \\ \forall x \in]1;2] & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}.$$



Soit g : $[-2;2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) + 4$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$.

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_g)$ si et seulement si $M'\begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix} \in (C_f)$.

Soit $T_{-4\vec{j}}$ la translation de vecteur $-4\vec{j}$

$$T_{-4\vec{j}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

$$N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto N'\begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix}$$

On a : $\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in (C_g) \Leftrightarrow T_{-4\vec{j}}(M) \in (C_f)$

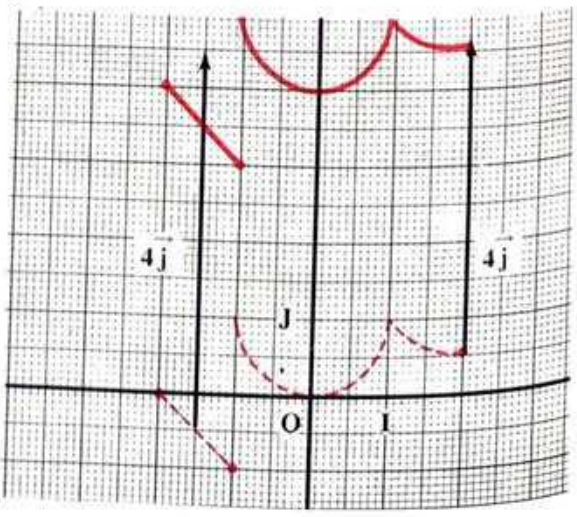
donc : $\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in (C_g) \Leftrightarrow M \in T_{4\vec{j}}(C_f)$

car $(T_{-4\vec{j}})^{-1} = T_{4\vec{j}}$

donc :

$$\boxed{(C_g) = T_{4\vec{j}}(C_f)}$$

Ce qui nous permet de construire point par point la courbe (C_g) à partir de (C_f).



Plus généralement :

Théorème

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et b un nombre réel.

La courbe représentative (C_g) de la fonction :

$$g : D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) + b$$

est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $b\vec{j}$

$$(C_g) = T_{b\vec{j}}\,(C_f)$$

Exercice 5

Construire la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{+1+2x}{x}$

à partir de celle de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 6

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ bornée et b un nombre réel donné.
Soit g la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + b$

Montrer que g est bornée.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction affine par intervalle définie par le tableau ci-dessous.

x	$\leftarrow$	-2		3		5	$\rightarrow$
f(x)	3	4	$-\frac{3}{2}x + 1$	-2	$x - 5$	0	-2

Dresser le tableau de variation de f, puis celui de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + 3$

Tracer (C_f) et (C_g).

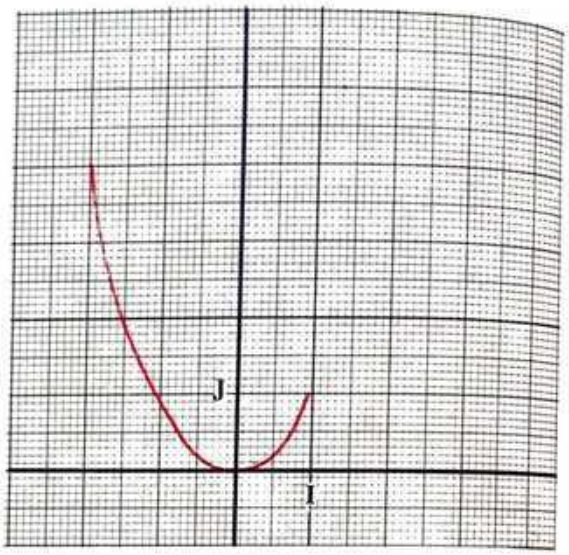
3) Étude de g : x ↦ f(x−a) (a nombre réel donné)

Soit f $[-2;1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$
et g : $x \mapsto f(x-3)$

Cherchons D_g : Soit un nombre réel x, g(x) existe si et seulement si f(x−3) existe c'est-à-dire si et seulement si

$$x - 3 \in D_f$$

or : $\forall x \in \mathbb{R}$
$[-2 \leqslant x-3 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x \leqslant 4]$
donc : $D_g = [1;4]$



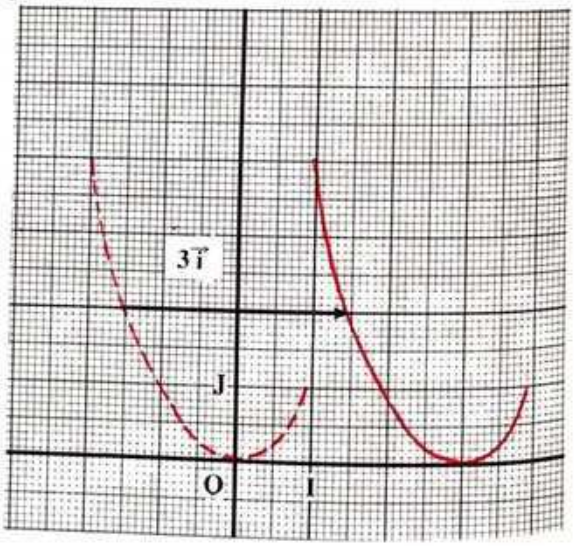
Question 1

Montrer que : $\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad [M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C_g) \Leftrightarrow M'\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix} \in (C_f)]$

En déduire que : $T_{3\vec{i}}(C_f) = (C_g)$

On en déduit la construction point par point de (C_g) à partir de (C_f).

Plus généralement :



Théorème

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et a un nombre réel.

Soit $D_g = \{x \in \mathbb{R} ; x-a \in D_f\}$.

La courbe représentative (C_g) de g : $D_g \to \mathbb{R}$ est l'image de (C_f) par la translation
$x \mapsto f(x-a)$

de vecteur $a\vec{i}$

$$(C_g) = T_{a\vec{i}}(C_f)$$

Exercice 8

Soit l : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 2x + 3$

Ecrire l(x) sous sa forme canonique.

Construire (C_l) en utilisant la courbe représentative (C_c) de la fonction
c : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Exercice 9

Soit k : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{3x + 7}{x + 2}$

Construire (C_k) à partir de (C_h) avec h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 10

Soit t : $\mathbb{R} \not\to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x^2 - 2x|$

Pour tout nombre réel x, exprimer le nombre réel t(x) sans le symbole de valeur absolue.
En remarquant que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2-2x = (x-1)^2-1$, construire (C_t) à partir de (C_c) où c : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Exercice 11

Soit f la fonction de $[-5;10]$ vers $\mathbb{R}$ définie par le tableau ci-dessous :

x	−5		2		3		10
f(x)	2	2	3	−4x + 11	4	x + 1	5

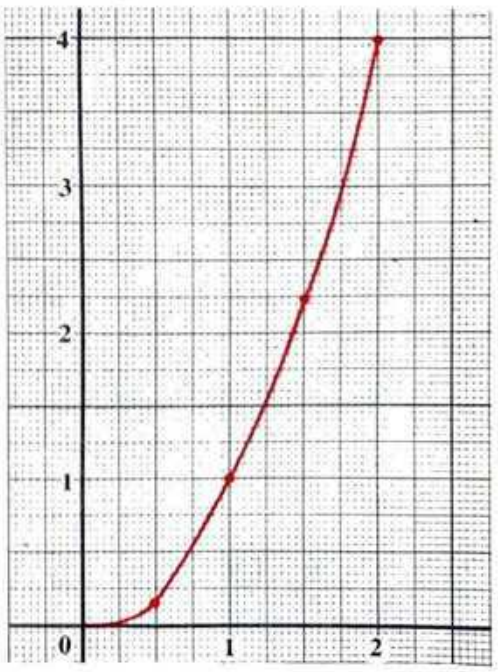
Soit g la fonction définie par : g(x) = f(x−2). Trouver l'ensemble de définition de g et dresser le tableau de variation de g.

4) Étude de g : x ↦ k f(x) (k nombre réel non nul donné)

Soient f : $[0;2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$
et g : $[0;2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2\,f(x)$

Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$ on a :

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_g) \Leftrightarrow [x \in [0;2] \text{ et } y=g(x)]$
$\Leftrightarrow [x \in [0;2] \text{ et } y=2\,f(x)]$
$\Leftrightarrow [x \in [0;2] \text{ et } M'\begin{pmatrix} x \\ y_{/2} \end{pmatrix} \in (C_f)]$



Soit $A_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$N\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \mapsto N'\begin{pmatrix} z \\ 2t \end{pmatrix}$$

A_2 s'appelle l'affinité orthogonale d'axe la droite D $(O, \vec{i})$ et de rapport 2.
A_2 est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ de bijection réciproque :

$A_2^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto T'\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

On a : $A_2^{-1} = A_{1/2}$

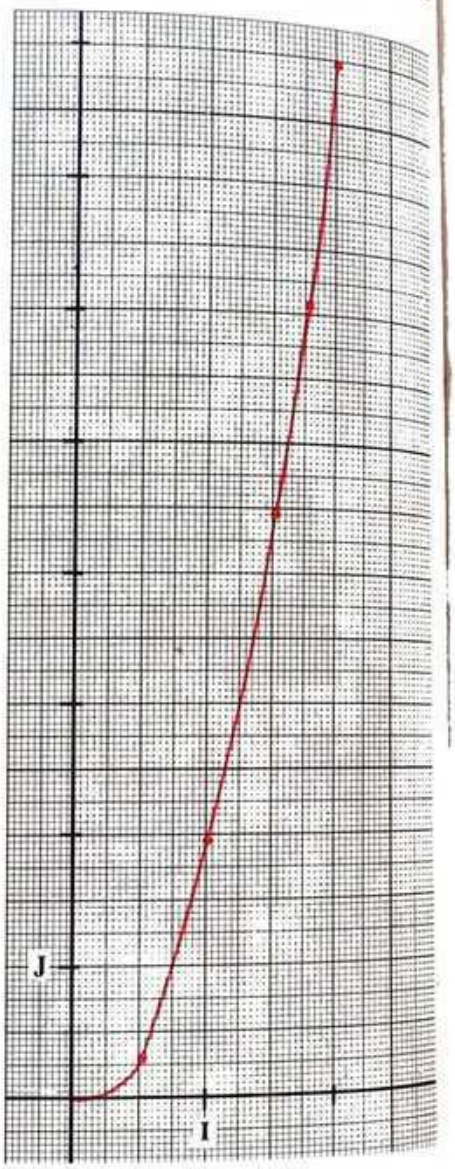
Donc :
Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$:

$$[M \in (C_g) \Leftrightarrow A_2^{-1}(M) \in (C_f)]$$

Donc :

$$(C_g) = A_2 (C_f)$$

d'où la construction point par point de (C_g) à partir de (C_f) : à chaque point de (C_f) correspond le point de (C_g) de même abscisse et d'ordonnée double.



Plus généralement :

Théorème

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et k un nombre réel non nul.

La courbe représentative (C_g) de g : $D_f \to \mathbb{R}$
$x \mapsto k\, f(x)$

est l'image de (C_f) par la transformation ponctuelle A_k définie par :

$$A_k : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$$

on a donc :

$$(C_g) = A_k (C_f)$$

Exercice 12 Soient $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2-8x+6$ $x \mapsto x^2$

Construire (C_f) à partir de la courbe représentative de la restriction de c à un intervalle que l'on précisera.

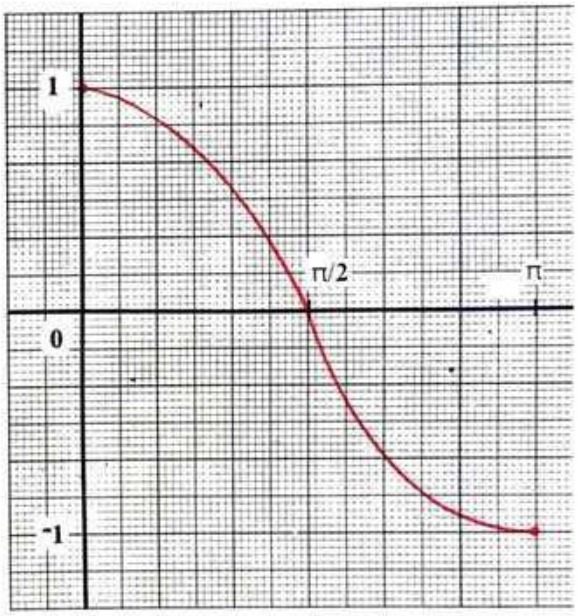
Exercice 13 Construire la représentation graphique de $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -3x^2-6x+3$

à partir de celle de $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

5) Étude de g : x ↦ f(kx). (k nombre réel non nul donné)

Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \cos t$

dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



Soit $g : x \mapsto f(2x)$
Cherchons D_g. Un nombre réel x est élément de D_g si et seulement si f(2x) existe donc si et seulement si 2x est élément de $[0;\pi]$ donc :

$$D_g = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

On a :

$$\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \left[M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_g) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } y = \cos 2x\right]$$

$$\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \quad \left[M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_g) \Leftrightarrow 2x \in [0,\pi] \text{ et } M' \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} \in (C_f)\right]$$

Soit $A_{1/2} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
$N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto N' \begin{pmatrix} x/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_{1/2}$ s'appelle l'affinité orthogonale d'axe D $(O, \vec{i})$ et de rapport 1/2. $A_{1/2}$ est bijective de bijection réciproque :

$$A_{1/2}^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto P' \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$$

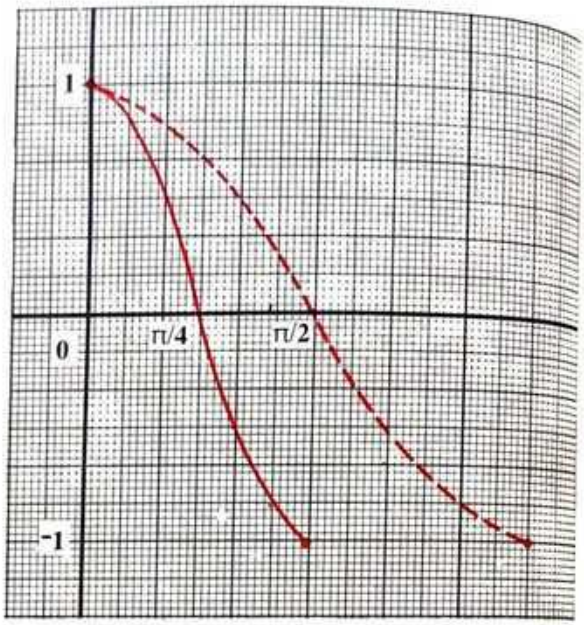
on a : $A_{1/2}^{-1} = A_2$.

On a ainsi :

$$\forall M \in \mathcal{P} \qquad [M \in (C_g) \Leftrightarrow A_{1/2}^{-1}(M) \in (C_f)]$$

donc : $\boxed{(C_g) = A_{1/2}(C_f)}$

d'où la construction point par point de (C_g) : à chaque point de (C_f) correspond le point de (C_g) de même ordonnée et d'abscisse moitié.



Plus généralement :

Théorème

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble et k un nombre réel non nul.

Soit $D_g = \{x \in \mathbb{R} ; kx \in D_f\}$.

La courbe représentative (C_g) de $g : \begin{matrix} D_g \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(kx) \end{matrix}$ est l'image de (C_f) par la transformation ponctuelle $A_{1/k}$ définie par :

$$A_{1/k} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x/k \\ y \end{pmatrix}$$

On a donc : $(C_g) = A_{1/k}(C_f)$

Exercice 14 Construire la représentation graphique de $g : \begin{matrix} [0,\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(-2x) \end{matrix}$

Exercice 15 Construire la représentation graphique de g : $\begin{matrix} [0,\pi] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \end{matrix}$

6) Fonction périodique

Soit P l'ensemble des entiers relatifs pairs.

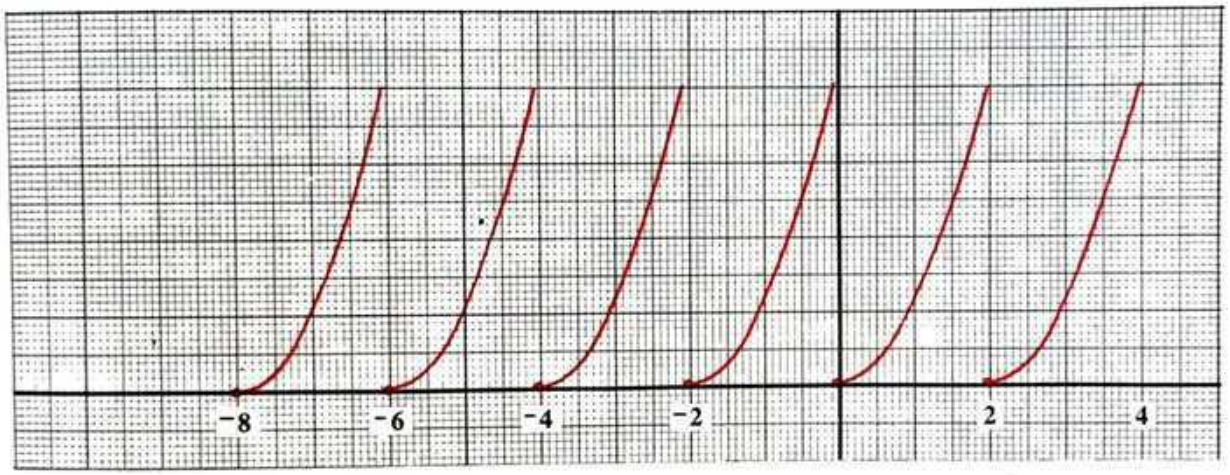
$P = \{\ldots -10,-8,-6,-4,-2;0;2;4;6\ldots\ldots\}$

Il est clair que tout nombre réel est compris entre deux entiers relatifs pairs consécutifs c'est-à-dire que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists k \in P \quad k \leqslant x < k + 2$

Cet entier k étant unique, on définit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivante :
$\forall k \in P \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [x \in [k;k+2[\Rightarrow f(x) = (x-k)^2]$
La restriction de f à l'intervalle $[-8;4]$ est précisée par le tableau et la représentation graphique ci-dessous :

x	−8		−6		−4		−2		0		2		4
f(x)	0	$(x+8)^2$	0	$(x+6)^2$	0	$(x+4)^2$	0	$(x+2)^2$	0	x^2	0	$(x-2)^2$	0



Question 2 *Tracer, dans des repères différents, les représentations graphiques des fonctions* $g_1 : x \mapsto f(x+2)$, $g_2 : x \mapsto f(x-6)$, $g_3 : x \mapsto f(x+8)$. *Que remarque-t-on ?*

Plus généralement montrons que :
$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2n) = f(x)$.

Soit un nombre réel x, il existe un unique entier relatif k pair tel que :

$$k \leqslant x < k+2$$

d'où $k+2n \leqslant x+2n < k+2n+2$

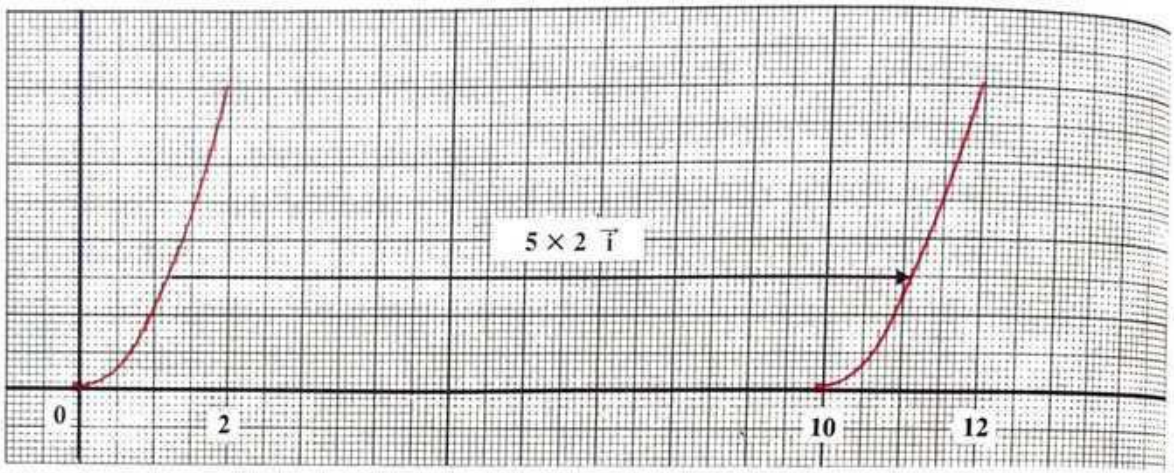
d'où $f(x+2n) = [(s+2n) - (k+2n)]^2$
$= (x-k)^2$
$f(x+2n) = f(x)$

En utilisant cette égalité calculons par exemple f(11,5).
On a : $11,5 = 1,5 + 2 \times 5$
donc : $f(11,5) = f(1,5 + 2 \times 5)$
$f(11,5) = f(1,5) = 2,25$

Et plus généralement tout nombre réel x' de [10,12[s'écrivant $x' = x + 2 \times 5$ où $x \in [0,2[$

On a : $f(x') = f(x)$

Soit (C_0) la courbe représentative de la restriction de f à [0;2[. La courbe représentative C_5 de la restriction de f à l'intervalle [10;12[est l'image de C_0 par la translation de vecteur $5 \times 2\vec{i}$.



De même la courbe représentative (C_{53}) de la restriction de f à l'intervalle [106,108[est l'image de (C_0) par la translation de moteur $53 \times 2\vec{i}$ car pour tout nombre réel x de [106,108[on a $x = x' + 2\times53$ où $x' \in [0,2[$, donc on a : $f(x) = f(x')$.

Soit (C_n) la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle [2n;2(n+1)[.

Il résulte de ce qui précède que, pour construire la courbe représentative (C) de f il suffit de connaître la courbe représentative (C_0) de la restriction de f à [0,2[ou à tout autre intervalle d'amplitude 2. On obtient (C) en mettant bout à bout les images de (C_0) par les translations de vecteur $2\vec{i}$, $4\vec{i}$, $6\vec{i}$,... $2n\vec{i}$ et $-2\vec{i}$, $-4\vec{i}$, $-6\vec{i}$, $-8\vec{i}$... $-2n\vec{i}$ car :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad (C_{2n}) = T_{n.2\vec{i}\,(C_0)}$$

On dit que f est périodique et que 2 est sa période car toute restriction de f à un intervalle d'amplitude strictement plus petite que 2 ne permettrait pas de construire entièrement la courbe représentative de f.

Définitions

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f on dit que f est **périodique** si et seulement s'il existe un nombre réel strictement positif α tel que :

$$(P) \quad \forall x \in D_f \quad [x+\alpha \in D_f\,,\ x-\alpha \in D_f \text{ et } f(x+\alpha) = f(x)]$$

Si, parmi les nombres réels strictement positifs vérifiant cette propriété, il en existe un plus petit noté p alors on l'appelle **la période** de la fonction f. On dit alors que f est **périodique de période** p.

Question 3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ périodique et α un nombre réel strictement positif vérifiant (P). Démontrer que pour tout entier relatif non nul k, le nombre réel $k\alpha$ vérifie (P).*

Il résulte de la question précédente que, si f est une fonction périodique alors il existe des nombres réels strictement négatifs vérifiant (P).

Tout nombre réel β non nul vérifiant la propriété (P) s'appelle **une période** de la fonction f.

On dira que « f admet pour période β »
ou que « β est une période de f ».

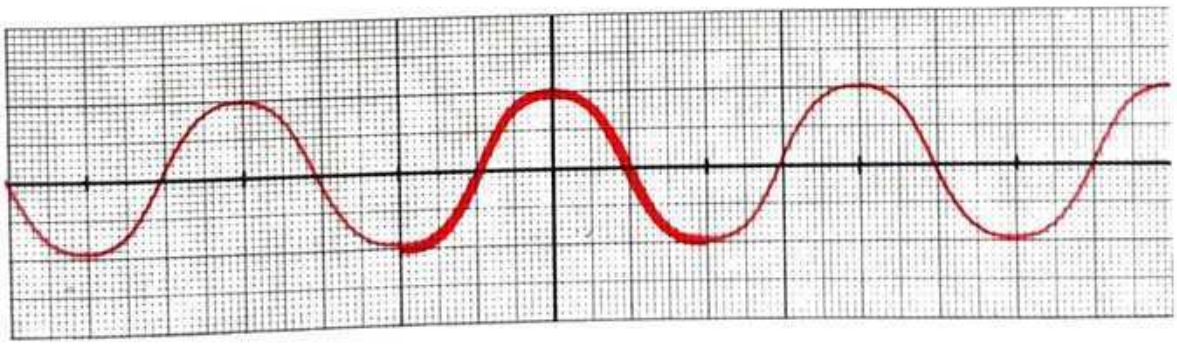
Méthode pratique

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction périodique.

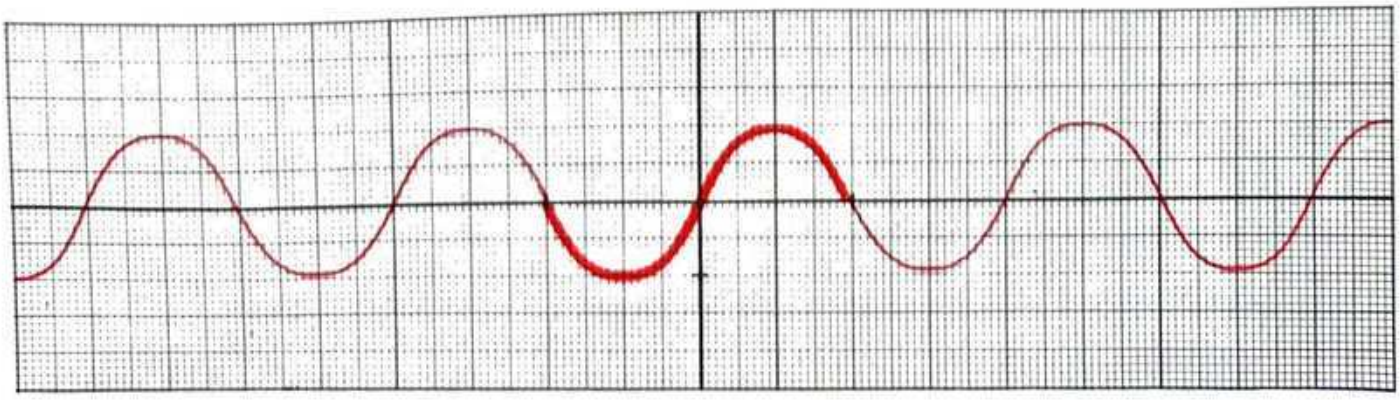
Si f est une fonction périodique de période p il suffit de construire la courbe représentative (C_0) de la restriction de f à un quelconque intervalle d'amplitude p c'est-à-dire de la forme $[x_0, x_0+p[$. Alors pour tout n de $\mathbb{Z}$ la représentation graphique (C_n) de la restriction de f à l'intervalle $[x_0 + np, x_0 + (n+1)p[$ est l'image de (C_0) par la translation de vecteur $np\vec{i}$.

$$(C_n) = T_{np\vec{i}\,(C_0)}$$

Ainsi, par exemple, pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, qui a pour période 2π, il suffit de connaître la courbe représentative (C_0) de la restriction de la fonction cosinus à $]-\pi,\pi]$ et d'appliquer les translations $T_{n.2\pi\vec{i}}$ où n est élément de $\mathbb{Z}$.



De même la fonction sinus est périodique de période 2Π.



Exercice 16 Les applications suivantes sont périodiques. Trouvez-en une période.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos 4x \qquad x \mapsto \sin \dfrac{x}{6} \qquad x \mapsto \sin 3x + \cos 2x$

Exercice 17 Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$

Construire la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-10,10[$. En déduire graphiquement que f est périodique et de période 1. Vérifier par le calcul que 1 est effectivement une période de f.

Exercice 18 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont une période est 6 et telle que :

$\forall x \in [2,5[\quad f(x) = x - 2$

$\forall x \in [5,8[\quad f(x) = x - 5$

Tracer la représentation graphique de f. Quelle est sa période ?

2 Éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction numérique de la variable réelle

1) Fonction impaire

Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x}{13}$

Question 4 *Compléter le tableau suivant :*

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

Que peut-on dire, pour tout i de {0,1,2,3,4} des points $M_i(i;f(i))$ et $M_i(-i,f(-i))$?

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$

Soit un réel quelconque x ; on a :

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{13} = \frac{-x^3 + 3x}{13} = -\frac{(x^3 - 3x)}{13} = -f(x)$$

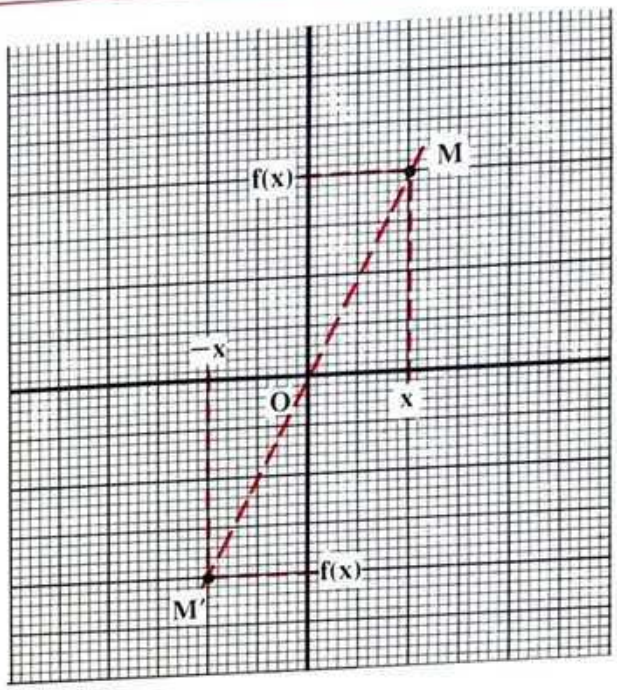
Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle d'ensemble de définition D.

On dit que f est **impaire** si et seulement si :

$$\forall x \in D \quad [-x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)]$$

Interprétons graphiquement cette définition :



Puisque pout tout nombre réel x de D on a $f(-x) = -f(x)$, pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ de (C_f) le symétrique $M'\begin{pmatrix} -x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ du point M par rapport à O est un point de (C_f).

Soit S_0 la symétrie centrale de centre O on a donc :

$$S_0 (C_f) \subset (C_f)$$

Comme S_0 est involutive on en conclut que $S_0(C_f) = (C_f)$ c'est-à-dire que (C_f) est invariante par S_0.

Réciproquement :

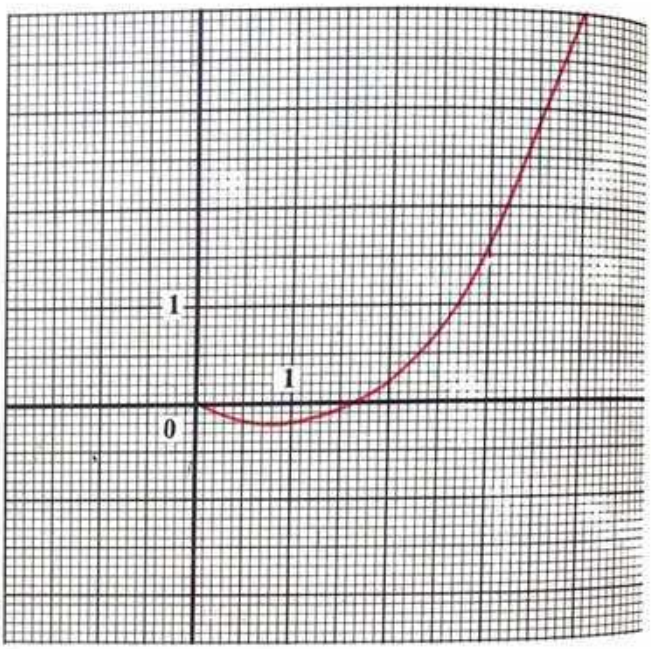
Si (C_f) est invariante par S_0, alors pour tout nombre réel x de D, le point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ étant un élément de (C_f).

Le symétrique $M'\begin{pmatrix} -x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ de M par rapport à O est un point de (C_f) donc $-f(x) = f(-x)$. On a ainsi montré que f est impaire.

Théorème

Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe représentative est invariante par la symétrie centrale de centre l'origine du repère.

Question 5 *Sachant que la courbe représentative de la restriction de* $\left[f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x}{13}\right]$ *à l'intervalle [0,4] est la suivante, construire la courbe* (C_f).



2) Centre de symétrie

Soit f : $[-4;2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$

Question 6 *Placer, dans le repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *les points de* (C_f) *d'abscisses respectives* $-1,0,-2,1,-3,2$ *et* -4.

Vérifier que ces points sont deux à deux symétriques par rapport au point $\Omega\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que $S_\Omega(C_f) = (C_f)$ *où* S_Ω *est la symétrie centrale de centre* Ω.

Définition

On dit qu'un point Ω est un **centre de symétrie** d'une courbe (C) si et seulement si (C) est invariante par la symétrie centrale de centre Ω, c'est-à-dire si et seulement si $S_\Omega(C) = (C)$.

Par exemple, le centre d'un cercle est un centre de symétrie de ce cercle, le point d'intersection des diagonales d'un rectangle est un centre de symétrie de ce rectangle.

Exercice 19

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (D) la droite dont une équation dans $\mathcal{R}$ est : $x + y + 1 = 0$.
Soit (€) le cercle dont une équation dans $\mathcal{R}$ est : $x^2 + y^2 = 1$.

Soit $\mathcal{R}_1$ le repère $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ où O_1 est le point de coordonnées (1,2) dans $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{R}_2$ le repère $(O, 2\vec{i}, 3\vec{j})$.
Trouver une équation de (D) et une équation de ($\mathscr{C}$) dans le repère R_1.

Trouver une équation de (D) dans le repère $\mathcal{R}_2$.
Quelle est l'image ($\mathscr{C}'$) du translaté du cercle ($\mathscr{C}$) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$? Montrer que le centre de symétrie de ($\mathscr{C}'$) est le translaté par t du centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).

Remarque :

Il est clair que la notion de centre de symétrie est indépendante du repère choisi.

Examinons maintenant le cas où la courbe considérée est la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Méthode pratique

Pour montrer qu'un point Ω du plan est un centre de symétrie de la courbe représentative (C) d'une fonction f.

Une équation de (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant

$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,\ y - f(x) = 0$$

On utilise les formules de changement de repère pour trouver la fonction F telle que :

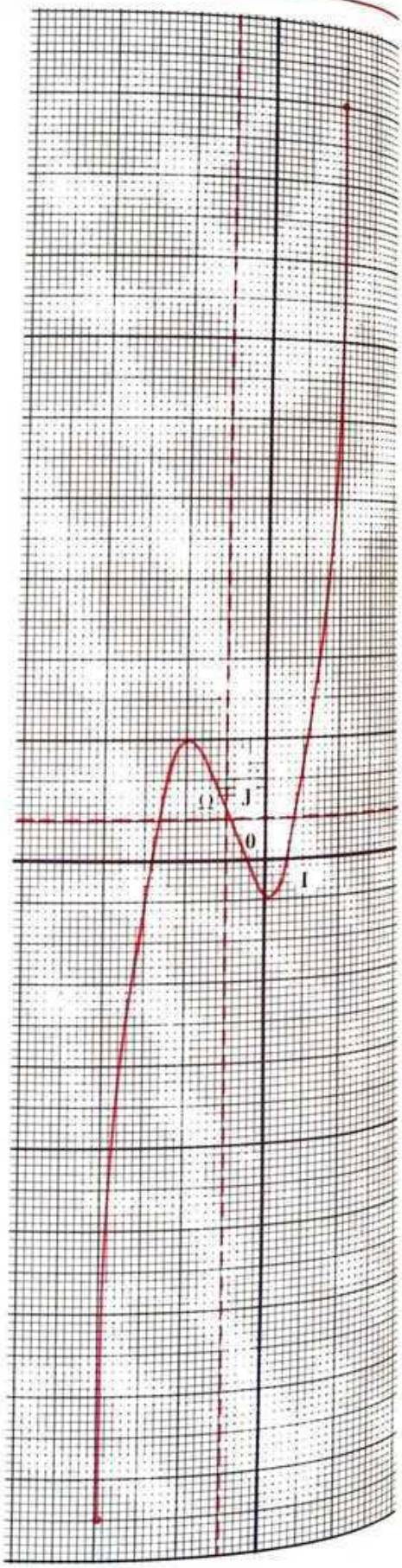
$$(X,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,\ Y - F(X) = 0$$

soit une équation de (C) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
On montre ensuite que F est impaire.

Ainsi, par exemple, montrons que le point $\Omega\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de la courbe

représentative (C) de

$$f : [-4;2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$$



Soit M un point du plan de coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées X et Y dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On a :

$$x = X-1 \quad \text{et} \quad y = Y+1$$

On remplace x et y par leur valeur en fonction de X et Y dans l'équation :

$$(x;y) \in [-4,2]\times\mathbb{R}\ ,\ y-(x^3+3x^2-1) = 0$$

on obtient :

$$(X;Y) \in [-3;3]\times\mathbb{R}\ ,\ Y-(X^3-9X) = 0$$

Donc (C) est, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction F telle que :

$$F : [-3;3] \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto X^3-9X$$

et, puisque F est impaire, Ω est un centre de symétrie de (C).

Exercice 20

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3 - 2x}{x + 1}$$

Montrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de la courbe (C) représentative de f.

Exercice 21

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$$

Montrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de la courbe (C) représentative de f.

3) Fonction paire

Soit f : $[-2;2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 5$$

Soit x un nombre quelconque de $[-2;2]$, $-x$ appartient à $[-2;2]$ et on a :

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$$
$$= x^4 - 2x^2 + 5$$

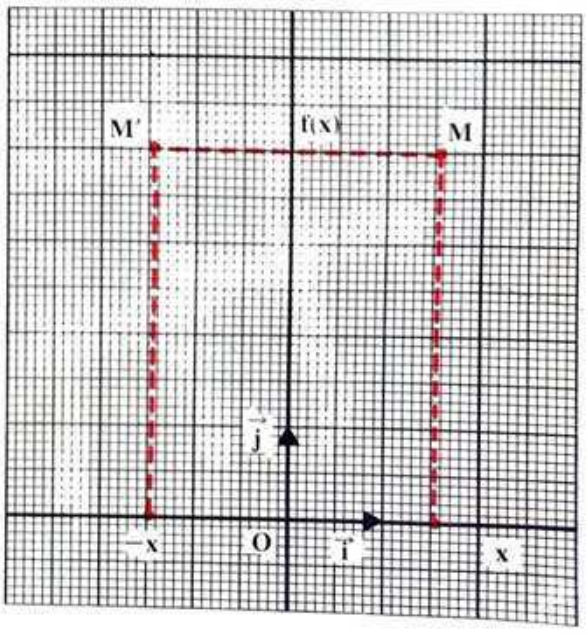
donc : $f(-x) = f(x)$

Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle d'ensemble de définition D. On dit que f est **paire** si et seulement si :

$$\forall x \in D \qquad [-x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)]$$

Interprétons graphiquement cette définition :



Puisque, pour tout nombre réel x de D on a $f(-x) = f(x)$, pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ de (C_f) le symétrique $M'\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix}$ du point M par rapport à l'axe des ordonnées est un point de (C_f).

Soit $S_{(O,\vec{j})}$ la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$, on a donc :

$$S_{(O,\vec{j})}(C_f) \subset (C_f)$$

Comme $S_{(O,\vec{j})}$ est involutive on en conclut que $S_{(O,\vec{j})}(C_f) = (C_f)$ c'est-à-dire que (C_f) est invariante par $S_{(O,\vec{j})}$.

Réciproquement :

Si (C_f) est invariante par $S_{(O,\vec{j})}$ alors pour tout nombre réel x de D le point $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ appartient à (C_f). Le symétrique de M par rapport à D $(O, \vec{j})$, c'est-à-dire $M'\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est un élément de (C_f).
donc : $f(x) = f(-x)$ et f est paire.

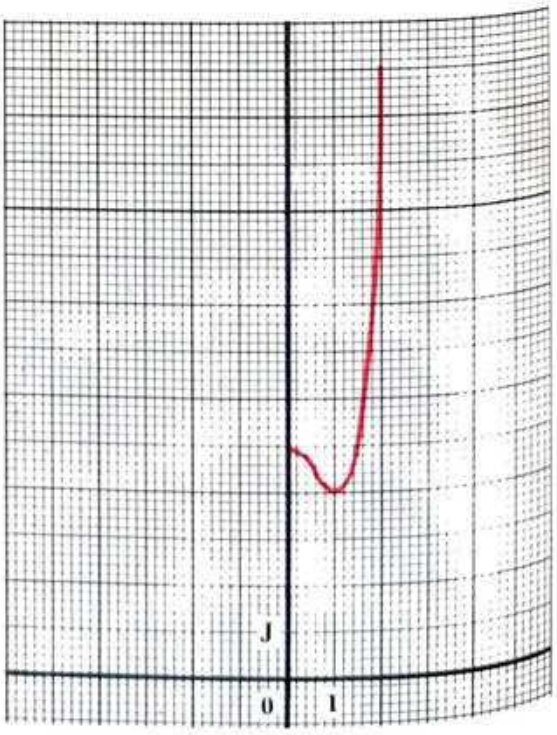
Théorème

Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est invariante par la symétrie orthogonale d'axe D $(O, \vec{j})$.

Question 7

Soit $f : [-2;2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 5$

La représentation graphique de sa restriction à [0,2] est la suivante. Tracer C_f.



4) Axe de symétrie

Soit $f : [-4;2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 3}{10}$$

Question 8 *Placer les points d'abscisses $-2,0, -3,1, -4,2$ de la courbe représentative (C) de f.*
Vérifier que ces points sont deux à deux symétriques par rapport à la droite (Δ) dont une équation dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $x + 1 = 0$.
Montrer que $S_\Delta(C) = C$ où $S_{(\Delta)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Définition

On dit que la droite (Δ) est un **axe de symétrie** d'une courbe plane (C) si et seulement si (C) est invariante par la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ) c'est-à-dire si et seulement si $S_{(\Delta)}(C) = (C)$.

Par exemple, tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie de ce cercle ; les deux diagonales d'un losange sont des axes de symétrie de ce losange.

Remarque :

Il est clair que la notion d'axe de symétrie est indépendante du repère orthogonal choisi.
Examinons maintenant le cas où la courbe considérée est la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Méthode pratique

Pour montrer qu'une droite (Δ) parallèle à la droite $D(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie de la courbe représentative (C) d'une fonction f.

Une équation de (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \; y - f(x) = 0.$$

On choisit arbitrairement un point Ω de la droite (Δ).

On utilise les formules de changement de repère pour trouver la fonction F telle que

$$(X,Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \; Y - F(X) = 0$$

soit une équation de (C) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On montre ensuite que F est paire.

Montrons, par exemple, que la droite (D) d'équation $x + 1 = 0$ est un axe de symétrie de la courbe représentative (C) de

$f : [-4,2] \to \mathbb{R}$

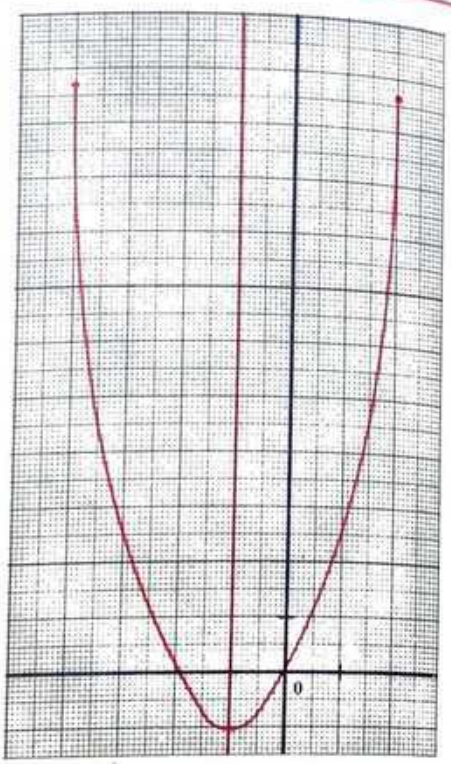
$x \mapsto (x^4+4x^3+9x^2+10x+3)/10$

soit $\Omega\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ un point de (D).

Soit M un point du plan de coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées X et Y dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

On a :

$$x = X-1 \quad \text{et} \quad y=Y$$



En remplaçant x et y par leur valeur en fonction de X et de Y dans :

$$(x,y) \in [-4;2] \times \mathbb{R} \quad , \; y - \frac{(x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 3)}{10} = 0$$

on obtient :

$$(X,Y) \in [-3;3] \times \mathbb{R} \quad , \quad Y - \frac{(X^4 + 3X^2 - 1)}{10} = 0$$

Donc (C) est, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction

$F : [-3;3] \to \mathbb{R}$

$X \to (X^4 + 3X^2 - 1)/10$

Puisque F est paire, (Δ) est un axe de symétrie de (C).

Exercice 22

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Construire la courbe représentative de f.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(|x|)$

En utilisant le fait que g est paire, construire la courbe représentative de g à partir de celle de f.

Exercice 23/

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2 - \frac{1}{|x+3| + 1}$$

Montrer que la droite (Δ) dont une équation est $x+3=0$ est un axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f.

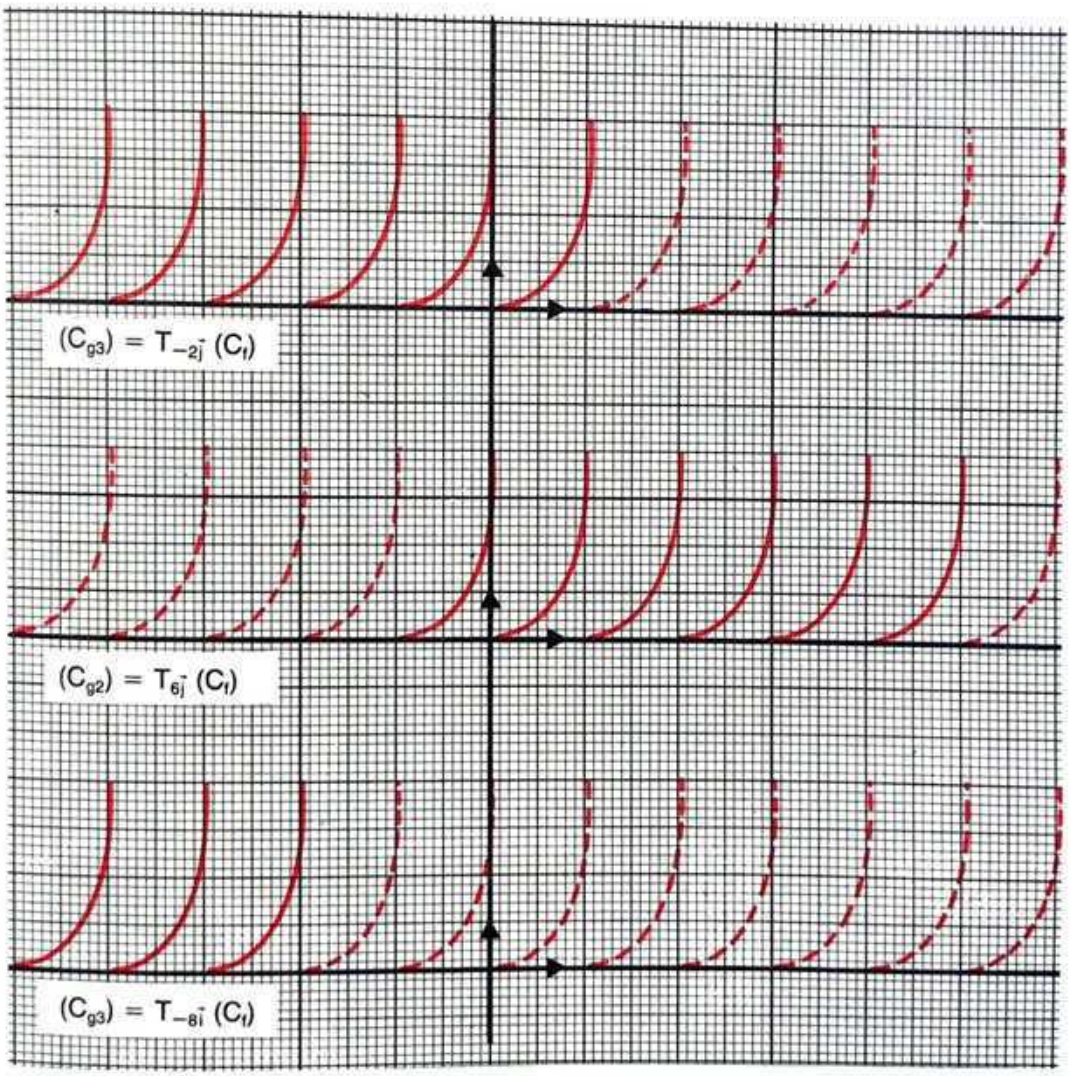
Réponses aux questions

Q 1 :

$$\forall M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}\quad M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(C_g) \Leftrightarrow y = g(x)$$
$$\Leftrightarrow y = f(x-3)$$
$$\Leftrightarrow M'\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix} \in (C_f)$$
$$\Leftrightarrow T_{-3\vec{i}}(M) \in (C_f)$$
$$\Leftrightarrow M \in T_{3\vec{i}}(C_f)$$

d'où $(C_g) = T_{3\vec{i}}(C_f)$

Q 2 :



on a $(C_{g1})=(C_{g2})=(C_{g3})=(C_f)$

Q 3 :

On a :

(P) : $\forall x \in Dg$ ($x+\alpha \in Dg$ et $x-\alpha \in Dg$ et $f(x+\alpha)=f(x)$)

Soit $x \in Dg$, $x+\alpha \in Dg$. Puisque $x+2\alpha = (x+\alpha)+\alpha$, d'après la propriété (P) on a : $x+2\alpha \in Dg$ et $f(x+2\alpha)=f(x+\alpha)$.

En utilisant encore la propriété (P), on a :

$$f(x+2\alpha) = f(x)$$

1/ Plus généralement, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, en utilisant k fois la propriété (P), puisque

$x+k\alpha = x+ (\alpha+...+\alpha)$ (k termes)·

on a $x+k\alpha \in Dg$ et $f(x+k\alpha)=f(x)$. Ainsi $k\alpha$ vérifie (P).

2/ On a aussi $x-\alpha \in Dg$. On a : $f(x-\alpha)=f(x)$ car $(x-\alpha)+\alpha=x$, et il suffit d'appliquer (P). Ainsi $-\alpha$ vérifie (P).

Soit k' un entier relatif strictement négatif. D'après le 1/ puisque $-k'$ est élément de $\mathbb{N}^*$, $-k'\alpha$ vérifie (P). D'après le 1/ $-(-k'\alpha)$, qui est égal à $k'\alpha$, vérifie (P).

On a ainsi montré que :

$\forall x \in Dg \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (x+k\alpha \in Dg \text{ et } f(x+k\alpha)=f(x))$.

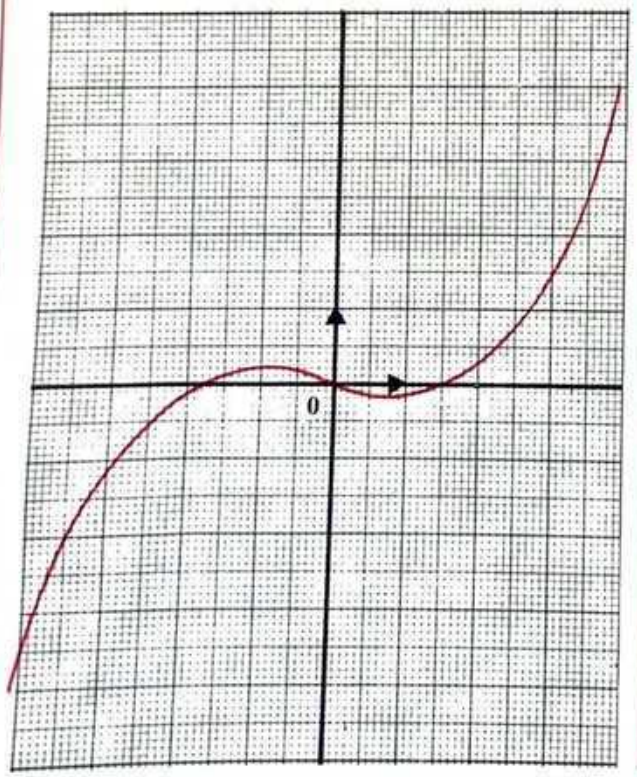
Q 4 :

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−4	$-\frac{18}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{-2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{18}{13}$	4

Puisque, pour tout i de {0,1,2,3,4} on a $f(-i)=-f(i)$, les points M_i et M_{-i} sont symétriques par rapport à O.

Q 5 :

En appliquant la symétrie centrale de centre O, on obtient :



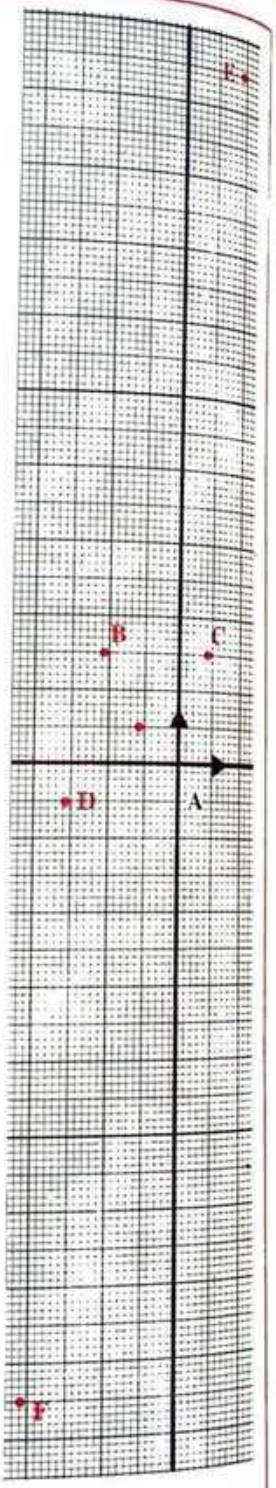
Q 6 :

x	f(x)
−1	1
0	−1
−2	3
1	3
−3	−1
2	19
−4	−17

$A\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à $\Omega\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

$C\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à Ω.

$E\begin{pmatrix}2\\19\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}-4\\-17\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à Ω.



$S_\Omega : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que

$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ c'est-à-dire

$\begin{cases}x'=-x-2\\y'=-y+2\end{cases}$

Pour tout point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$

$M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in S_\Omega(C_f)$

$\Leftrightarrow \exists M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (C_f) \quad M'=S_\Omega(M)$

$\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases}y=f(x)\\x'=-x-2\\y'=-y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases}y=f(x)\\x=-x'-2\\y=-y'+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow -y'+2= f(-x'-2)$

or $f(-x'-2) = (-x'-2)^3 + 3(-x'-2)^2-1$

$= -x'^3 - 3x'^2 + 3$

d'où :

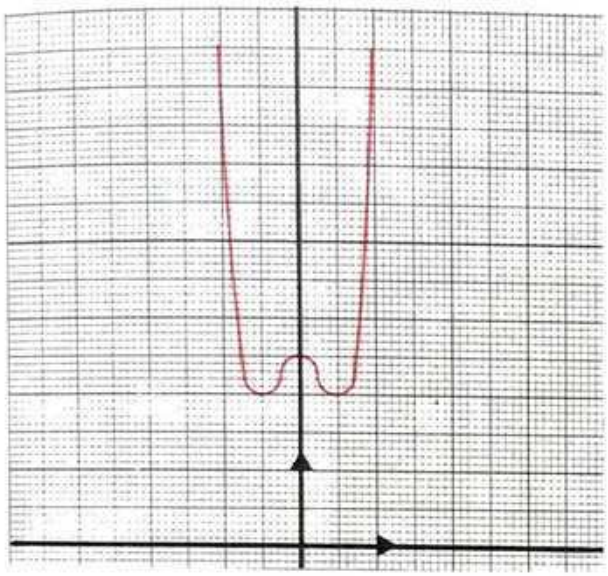
$\forall M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \; M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in S_\Omega(C_f) \Leftrightarrow -y'+2=-x'^3-3x'^2+3$

$\Leftrightarrow \quad y'=x'^3+3x'^2-1$

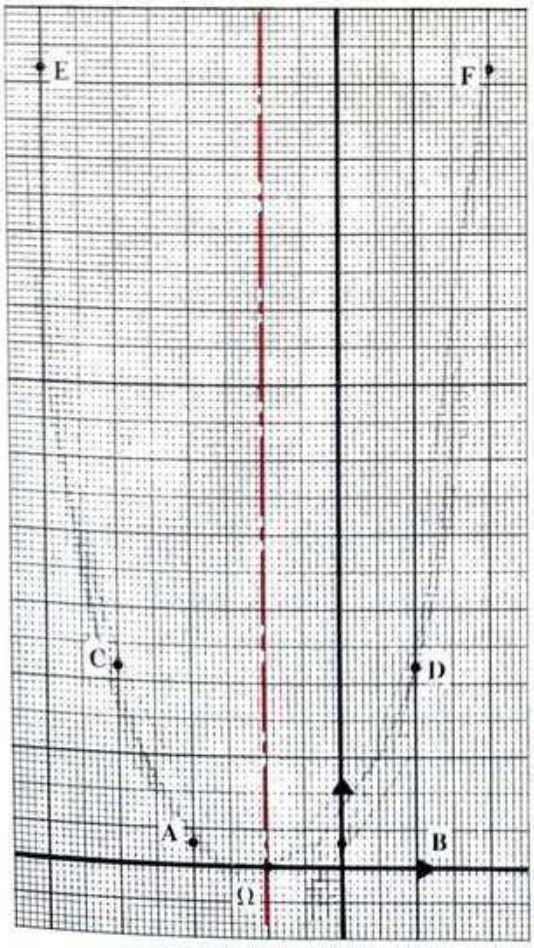
$\Leftrightarrow \quad M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in (C_f)$

d'où l'égalité $S_\Omega(C_f)=(C_f)$.

Q 7 :
Il suffit d'appliquer la symétrie orthogonale d'axe $D(O, \vec{j})$.



Q 8 :



x	f(x)
−2	0,3
0	0,3
−3	2,7
1	2,7
−4	10,7
2	10,7

$A\begin{pmatrix}-2\\0,3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\0,3\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) dont une équation est $x=-1$.

$C\begin{pmatrix}-3\\2,7\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\2,7\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à (Δ).

$E\begin{pmatrix}-4\\10,7\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}2\\10,7\end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à (Δ).

$S_\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que le milieu de [M,M'] soit sur (Δ) et $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{j} = 0$ (car $\vec{j}$ est un vecteur directeur de (Δ))

c'est-à-dire $\frac{x+x'}{2} + 1 = 0$ et $y'-y=0$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} x' = -x-2 \\ y' = y \end{cases}$$

$\forall M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in\mathcal{P}$ $M'\in S_{(\Delta)}(C) \Leftrightarrow \exists M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(C)$ $M'=S_{(\Delta)}(M)$

$$\Leftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} y=f(x) \\ x'=-x-2 \\ y'=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} y=f(x) \\ x=-x'-2 \\ y=y' \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y'=f(-x'-2)$

or $f(-x'-2)$

$$=\frac{1}{10}\left[(-x'-2)^4 + 4(-x'-2)^3 + 9(-x'-2)^2 + 10(-x'-2) + 3\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[x'^4 + 4x'^3 + 9x'^2 + 10x' + 3\right]$$

$=f(x')$

d'où : $\forall M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in\mathcal{P}$ $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in S_{(\Delta)}(C) \Leftrightarrow y'=f(x')$

$\Leftrightarrow M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in(C)$

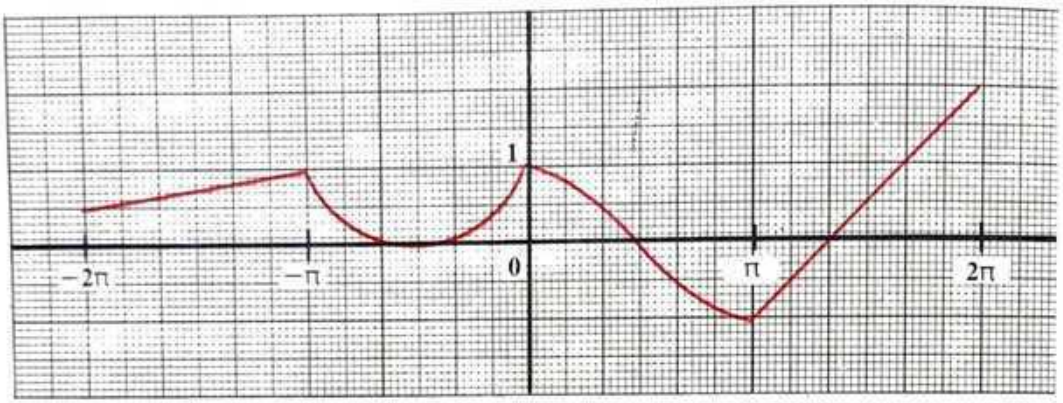
on peut donc conclure :

$$S_{(\Delta)}(C) = (C)$$

Exercices

Sauf mention explicite du contraire le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthogonal $\mathcal{R}$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

24 Soit f la fonction définie par sa courbe représentative (C) dans le repère $\mathcal{R}$.



Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

$x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto f(|x|)$, $x \mapsto f(x+\pi)$

$x \mapsto -\frac{1}{\pi} f(x)$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{\pi}\right)$

$x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$ $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$

25 Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan soit (C) la courbe représentative de la fonction

$f : [-1;1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2+1$

Trouver une équation, dans le repère $\mathcal{R}$ de chacune des courbes suivantes :

$(C_1) = T_{2\vec{i}+\vec{j}}(C)$ $(C_2)=S_0(C)$ $(C_3)=S_{(O,\vec{j})}(C)$
$(C_4) = S_{(O,\vec{i})}(C)$ $(C_5)=A_2(C)$ $(C_6)=A_{\frac{1}{2}}(C)$

Tracer chacune de ces six courbes.
Soit $(C_7)=S_{(\Delta)}(C)$ où (Δ) est la droite de $\mathcal{P}$ dont une équation est $x-y=0$. Tracer (C_7). La courbe (C_7) est-elle la courbe représentative d'une fonction ?

26 Montrer que la courbe représentative (C') de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2 + \frac{3}{x-1}$

est l'image de la courbe représentative (C) de $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par une composée de transformations planes. Construire (C').
$x \mapsto 1/x$

27 Construire la courbe représentative (C'') de

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{3x-2}{x+1}$

(On écrira, pour tout nombre réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$, le nombre réel g(x) sous la forme $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$).

28 Trouver la fonction polynôme p, de degré 2 telle que

$$\forall x \in \left\{0;\frac{\pi}{2};\pi\right\} \qquad p(x)=\sin x$$

Tracer dans un même repère du plan les courbes représentatives des fonctions p et sin sur $[0;\pi]$.

29 Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (-1)^{\in(x)} + [x-\in(x)]^2$
est périodique.

30 Soit f la fonction périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont une période est 4 et telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1,0] & f(x) = -x \\ \forall x \in]0;1] & f(x) = x \\ \forall x \in]1;2] & f(x) = -x+2 \\ \forall x \in]2;3[& f(x) = x-2 \end{cases}$$

Tracer la courbe représentative de f. Quelle est la période de f ?

31 Après avoir trouvé l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions numériques de la variable réelle, étudier si elle est paire ou impaire.

$x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{x^2}}$ $x \mapsto \frac{2x}{x^4-3x^2+2}$

$x \mapsto \frac{2}{|x^2-4x+3|}$ $x \mapsto 2x^3 - 5x + 7$

32 Montrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de la courbe représentative (C) de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{2(x-2)}$

33 Montrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}-1\\+9\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de la courbe représentative (C) de la fonction

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{3}(2x+5)^2(x-2)$

34 Trouver une valeur du nombre réel m telle que le point $\Omega(-1,-16)$ soit un centre de symétrie de la courbe représentative (C) de la fonction :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (x+1+m)^2(x+1-2m)$

35 Trouver les nombres réels a et b tels que le point $\Omega(-1,3)$ soit un centre de symétrie de la courbe représentative C de la fonction :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{ax+2}{x+b}$

36 Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{-x^2+4x-2}{2(x^2-4x+3)}$. Montrer que la droite d'équation $x-2=0$ est un axe de symétrie de (C).

37 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2 + \sqrt{|x-1|}$

Montrer que la droite d'équation $x-1=0$ est un axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f.

38 Soit un entier naturel n et f_n la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n(x-2)^n$

Montrer qu'il existe un nombre réel a que l'on déterminera tel que, quel que soit l'entier naturel n, la droite dont une équation est $x-a=0$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f_n.

39 Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a) Montrer que s'il existe un point $\Omega(a,b)$ de $\mathscr{P}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2a-x)=2b-f(x)$$

alors Ω est un centre de symétrie de la courbe (C) de f.

b) Montrer que s'il existe une droite (D) d'équation $x-a=0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2a-x) = f(x)$$

alors la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe représentative (C) de f.

c) Etudier la réciproque de chacune des propositions démontrées en a) et b).

40 Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

a) Montrer que les applications f_1 et f_2 sont respectivement paire et impaire et calculer leur somme.

b) Trouver f_1 et f_2 dans chacun des cas suivants :

1/ $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+1}$ $\qquad$ 3/ $f : x \mapsto 3x+5$

2/ $f : x \mapsto x^2+3x+2$ $\qquad$ 4/ $f : x \mapsto \cos x$

c) Montrer que si, f étant donnée, il existe une application paire p et une application impaire q telles que : $f=p+q$ alors on a $p=f_1$ et $q=f_2$.

En déduire que toute application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est la somme d'une application paire et d'une application impaire.

41 Soit E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$$E = \{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{P} \ ; \ x+y=|xy|-1\}$$

Dessiner E.

Montrer que la droite (Δ) dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $x-y=0$ est un axe de symétrie de E.

42 Dessiner les sous-ensembles de $\mathscr{P}$ suivants :

$$B = \{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{P} \ ; \ |x|+|y|=1\}$$

$$C = \{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathscr{P} \ ; \ \max(|x|,|y|)=1\}$$

Trouver les éléments de symétrie de B et de C.

43 Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; soit (C) la courbe représentative de la fonction f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x+2 + \dfrac{1}{x-4}$

Soit Ω le point de coordonnées 4 et 6 et $\vec{u}$ le vecteur tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

Soit $\mathscr{R}'$ le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{j})$. Montrer que dans le repère $\mathscr{R}'$, $Y=\dfrac{1}{X}$ est une équation de (C).

Résultats ou indications des exercices

1/ Le premier ensemble est la réunion de deux droites.
Le second ensemble est le carré ABCD où $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Le troisième ensemble est le seul à être la courbe représentative d'une fonction.
Le quatrième ensemble est le carré EFGH où $E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

5/ $(C_g) = T_{2\vec{i}} \circ S_{(O,\vec{i})}(C_f)$

8/ $(C_f) = T_{\vec{i}+2\vec{j}}(C_c)$.

12/ Soit $g = C_{[[-1,2]]}$, $(C_f) = A_2 \circ T_{2\vec{i}-\vec{j}}(C_g)$.

14/ Soit $f = \sin_{[[-2\pi,0]]}$, $(C_g) = A_{-\frac{\pi}{2}}(C_f)$.

15/ Soit $f = \cos_{\left[\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]\right]}$, $(C_g) = A_3 \circ T_{-\frac{\pi}{3}\vec{i}} \circ A_{\frac{1}{2}}(C_f)$.

17/ $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x+1) = E(x)+1$

19/ Dans $\mathcal{R}_1$:
(D) : $x+y+4=0$
(C) : $(x+1)^2+(y+2)^2=1$

Dans $\mathcal{R}_2$:
(D) : $2x+3y+1=0$

Dans $\mathcal{R}$:
(C') : $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

20/ $Y = \frac{5}{X}$

21/ $Y = X^3 - 3X$.

23/ Une équation de (C) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ est :

$$Y = 2 - \frac{1}{|X|+1}.$$

4 Suites numériques

I. Généralités
II. Démonstrations par récurrence
III. Suites arithmétiques
IV. Suites géométriques

1 Généralités

1) Définition

Question 1 *En calculant le quotient* $A = \dfrac{43177}{99000}$ *on trouve 0,436131313...*
Quelle est l'approximation décimale d'ordre 0 par défaut de A ?
Quelle est celle d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 3 ? d'ordre 30 ?

On vient ainsi de définir une application u de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels vers l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui, à tout entier naturel n, associe l'approximation décimale d'ordre n par défaut de A.

Définition

Une **suite numérique** est une fonction u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$:

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto u(n)$

Remarques

* Au lieu de noter u(n) l'image du naturel n par la suite u on la note u_n, ce qui se lit : « u indice n ». u_n s'appelle le terme général de la suite u.

* Une suite u définie sur la partie I de $\mathbb{N}$ peut également se noter : $(u_n)_{n\in I}$. Ainsi par exemple si $I_a = \{a, a+1, a+2, ...\}$, où a est un entier naturel donné, est l'ensemble de définition de la suite u alors on écrira :
$(u_n)_{n\in Ia}$ ou $(u_n)_{n\geq a}$ ou encore $(u_a, u_{a+1}, u_{a+2}, ...)$
u_a s'appelle alors le premier terme de la suite, u_{a+1} le second...
Dans la plupart des cas on aura $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$
* On notera que la restriction à $\mathbb{N}$ de toute fonction numérique de la variable réelle est une suite. Ainsi la restriction à $\mathbb{N}$ de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x-3}$

est la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \sqrt{n-3}$ dont l'ensemble de définition est $I_3 = \{3, 4, 5, 6, ...\}$

Exercice 1

Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes définie par l'expression de son terme général :

1/ $n \mapsto \dfrac{1}{n}$

2/ $n \mapsto (-1)^n$

3/ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

4/ $n \mapsto \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

5/ $n \mapsto \sqrt{n^2 - 25}$

6/ $n \mapsto \sqrt{(n+5)(3-n)}$

7/ $u_n = 2 \times 3^n$

8/ si n est pair alors $u_n = n$
si n est impair alors $u_n = \dfrac{1}{n}$

Exercice 2

Soit u la suite du terme général $(3 + 5n)$ et v la suite de terme général $\dfrac{3}{2^n}$, où n désigne un entier naturel quelconque.
Exprimer u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} puis v_{n+1}, v_{n+2} et v_{n+3} en fonction de n.
Quel est, en fonction de n, l'expression du terme général de la suite w définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+3} - u_{n+2}$$

2) Formule de récurrence

Monsieur Kouakou place une somme de 1 000 000 CFA à la BIAO le 1er janvier 1986. Ce capital produit des intérêts à raison de 8,5 % l'an. Ces intérêts s'ajoutent chaque année au capital précédent. On suppose que M. Kouakou n'ajoute ni ne retire d'argent à son placement de départ. Soient C_1, C_2... C_n le montant du capital, intérêts compris, au bout de 1, 2, ... n années.
On a ainsi défini une suite C qui, à tout n, de $\mathbb{N}$ associe le capital C_n au 1er janvier de l'année $(1986 + n)$.

Question 2

Donner C_0. Trouver C_1 en fonction de C_0 ; en déduire C_1
De même, calculer C_2 et C_3.

Plus généralement soit $n \geq 1$. Trouvons C_n en fonction de C_{n-1}.

On a : $C_n = C_{n-1} + \dfrac{8,5}{100} \times C_{n-1}$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; C_n = 1{,}085 . C_{n-1}$ (R)

Une telle égalité, vraie pour tout couple de termes d'indices consécutifs de la suite C, s'appelle une « **formule de récurrence** ».

Cette formule (R) permet, connaissant le capital au 1er janvier de l'année (1986 + (n − 1)), de calculer le capital au 1er janvier de l'année (1986 + n).

Question 3 *Pour calculer le capital au 01.01.1996 calculer C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9 et enfin C_{10}.*

On peut ainsi, de proche en proche, grâce à la formule (R) obtenir n'importe quel terme de la suite C, mais si l'indice est trop grand ce procédé sera très « laborieux » aussi cherchons à exprimer directement le terme C_n en fonction de n. C'est-à-dire trouvons l'expression du terme général de la suite C. Soit un entier naturel n, en utilisant plusieurs fois la formule (R) on a :

$C_n = 1{,}085 . C_{n-1}$

$C_{n-1} = 1{,}085 . C_{n-2}$

⋮

$C_2 = 1{,}085 . C_1$

$C_1 = 1{,}085 . C_0$ Multiplions membre a membre ces n égalités. On obtient :

$C_1.C_2 \ldots C_n = (1{,}085)^n . C_0.C_1 \ldots C_{n-1}$

d'où, en simplifiant :

$$C_n = (1{,}085)^n \, C_0$$

On a ainsi montré que :

$$\forall_n \in \mathbb{N} \qquad C_n = (1{,}085)^n . C_0$$

Question 4 *Calculer le capital au 01.01.1996 et au 01.01.2012.*

Question 5 *Si M. Kouakou déposait non pas 1 000 000 CFA mais 2 500 000 CFA quel serait son capital au 01.01.96 ?*

Plus généralement la seule connaissance d'une formule de récurrence entre deux termes consécutifs d'une suite ne suffit pas pour connaître la suite.

Par contre la donnée d'une formule de récurrence entre deux termes consécutifs et la donnée du premier terme définissent une suite unique.

Exercice 3 Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites définies par la formule de récurrence donnée et le premier terme :

1/ $u_0 = 2$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt{u_{n-1}}$

2/ $u_1 = 1$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \; 2u_n + 3u_{n-1} = 5$

3/ $u_5 = 2$ et (R) : $\forall n \in I_6 \qquad u_n = 3u_{n-1}$

4/ $u_0 = 3$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 2$

5/ $u_0 = 2$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} . u_n = 3$

De même la donnée d'une formule de récurrence permettant de calculer u_{n+2} en connaissant u_{n+1} et u_n et la donnée des deux premiers termes définissent une suite unique u.

Par exemple $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la formule (R) :

$$(R) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

définissent la suite u dont les cinq premiers termes sont 1, 2, 3, 5, 8.

Exercice 4 Trouver les cinq premiers termes de chacune des suites ci-dessous définies par la formule (R) et ses deux premiers termes :

1/ $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$

2/ $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et (R) : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{3}{4} u_{n-1}$

3/ $u_5 = 2$, $u_6 = 6$ et (R) : $\forall n \in I_5 \quad (u_{n+1})^2 = u_n \times u_{n+2}$

3) Lecture graphique des termes d'une suite définie par une formule de récurrence

Soit u une suite définie par son premier terme et une formule de récurrence du type : $u_n = f(u_{n-1})$ où f est une fonction numérique dont on a la représentation graphique (C) dans un repère du plan. Voyons, sur un exemple, comment utiliser (C) pour placer, sur l'axe des abscisses, les premiers termes de cette suite u.
u est définie par :

$$u_0 = -9 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2}$$

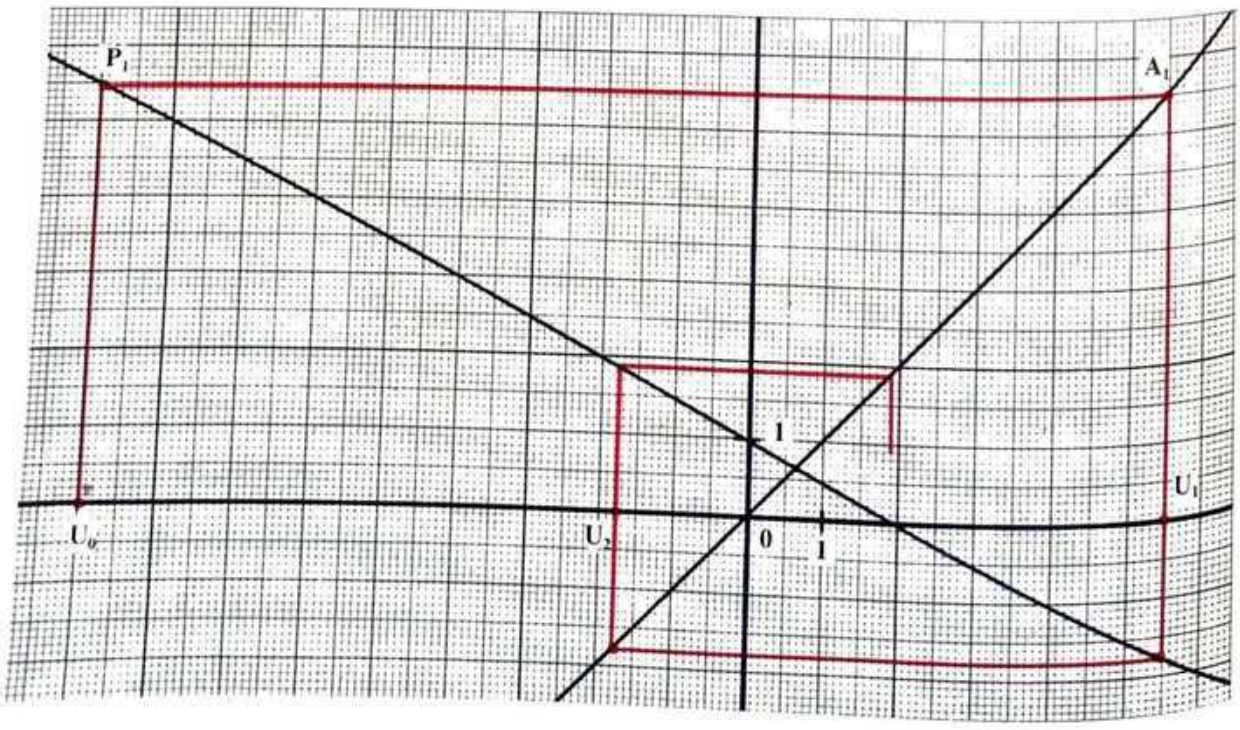
On a donc ici : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 - \frac{x}{2}$$

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique (C) de f est la droite dont une équation est : $y = 1 - \frac{x}{2}$.

Traçons la droite (Δ) dont une équation est : $y = x$

A chaque u_n on va associer le point U_n de coordonnées (u_n, o) de l'axe $(O, \vec{i})$
Ainsi à u_0 est associé le point $U_0 \begin{pmatrix} -9 \\ o \end{pmatrix}$



La parallèle a $(O, \vec{j})$ passant par U_0 coupe (C) en un point P_1. Les coordonnées de P_1 sont $(u_0, f(u_0))$ c'est-à-dire $(-9, u_1)$.

Soit A_1 le projeté de P_1 sur (Δ) parallèlement à $(O, \vec{i})$, on a $A_1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

Soit enfin U_1 le projeté de A_1 sur $(O, \vec{i})$, parallèlement à $(O, \vec{j})$ on a $U_1\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schématiquement :

projection sur (C)	Projection sur (Δ)	Projection sur $(O, \vec{i})$
parallèlement à $(O, \vec{j})$	parallèlement à $(O, \vec{i})$	parallèlement à $(O, \vec{j})$

$$U_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow U_1$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le même procédé on placera le point $U_2\begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Utiliser la méthode précédente pour placer sur $(O, \vec{i})$ les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3 - \frac{3}{2}u_n$$

Exercice 6

Utiliser la même méthode pour placer sur $(O, \vec{i})$ les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{1}{5}u_n^2$$

4) Sens de variation d'une suite

Question 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = 3.2^n$.
Calculer les dix premiers termes de la suite u ; puis, pour tout élément j de {0, 1, 2, ... 8} comparer u_j et u_{j+1}.
Plus généralement, pour tout entier naturel n, comparer u_n et u_{n+1}.
Enfin montrer que :

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad \forall q\in\mathbb{N} \quad [p < q \Rightarrow u_p < u_p]$$

La question précédente nous conduit à :

Définitions

Soit u une suite définie sur l'ensemble I_a des entiers naturels supérieurs ou égaux à l'entier naturel donné a. Soit b un élément de I_a.
On dit que la suite u est **croissante** (resp. strictement croissante) à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall p \in I_b \quad \forall q \in I_b \quad [p < q \Rightarrow u_p \leqslant u_q] \quad (\text{resp. } u_p < u_q)$$

On dit que la suite u est **décroissante** (resp. strictement décroissante) à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall p \in I_b \quad \forall q \in I_b \quad [p < q \Rightarrow u_p \geqslant u_q] \quad (\text{resp. } u_p > u_q)$$

On dit que la suite u est **constante** à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall p \in I_b \quad u_p = u_b.$$

Etudions maintenant une caractérisation plus commode de ces notions.
Soit u une suite définie sur I_a et telle qu'il existe un entier naturel b de I_a vérifiant

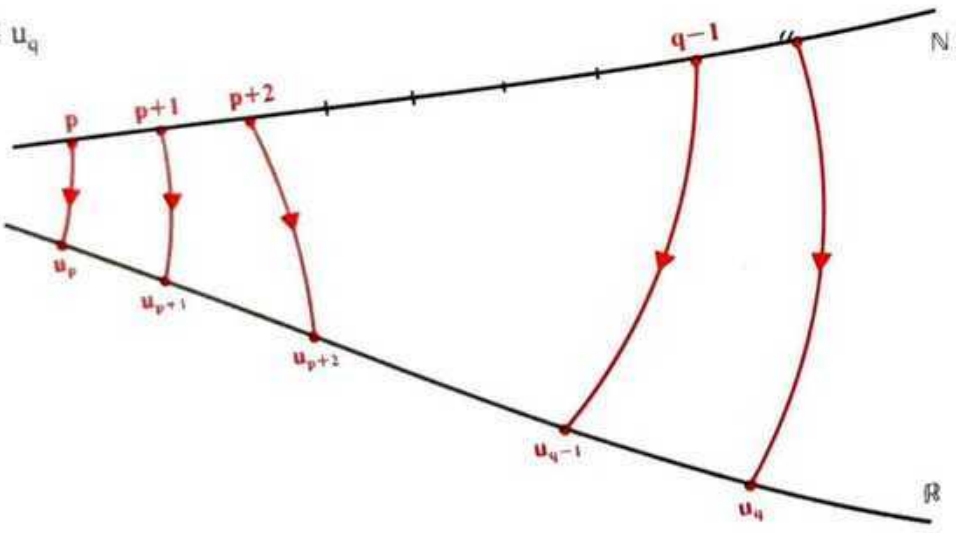
$$\forall n \in I_a \quad [n \geqslant b \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+1}] \quad (1)$$

Montrons que la suite u est croissante à partir du rang b. Ceci revient à montrer que :

$$\forall p \in I_b \quad \forall q \in I_b \quad [p < q \Rightarrow u_p \leqslant u_q]$$

Soient p et q deux éléments de I_b.

On a, d'après (1) :
$u_p \leqslant u_{p+1}$
$u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$
$\vdots$
$u_{q-1} \leqslant u_q$



donc, en utilisant la transivité de la relation $\leqslant$ on a : $u_p \leqslant u_q$
Réciproquement si u est croissante sur I_b alors on a évidemment : $\forall n \in I_b \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

Théorème

Soit u une suite numérique définie sur I_a et b un élément de I_a
La suite u est croissante (resp. strictement croissante) à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+1}] \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1})$$

La suite u est décroissante (resp. strictement décroissante) à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow u_n \geqslant u_{n+1}] \quad (\text{resp. } u_n > u_{n+1})$$

La suite u est constante à partir du rang b si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow u_{n+1} = u_n]$$

Si une suite est soit croissante soit décroissante soit constante (resp. strictement croissante, strictement décroissante) à partir du rang b on dit qu'elle est **monotone** (resp. strictement monotone) à partir du rang b.

Remarques

* Une suite définie sur I_a et monotone (resp. strictement monotone) à partir du rang a est dite monotone (resp. strictement monotone). Ainsi, par exemple, la suite u définie par $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, est strictement monotone

$$x \mapsto \frac{1}{n}$$

* Il existe des suites qui ne sont pas monotones, à partir d'aucun rang. Il en ainsi, par exemple, de la suite $[n \mapsto (-1)^n]$.

Exercice 7/ Au cours de l'année 1975 le relevé mensuel des précipitations (en mm) à Abidjan a permis de dresser le tableau ci-contre. Soit I l'ensemble {1 ; 2 ; ... 12}
Représenter graphiquement l'application v de I vers $\mathbb{R}$ qui, au numéro d'ordre d'un mois, associe la hauteur en mm des précipitations au cours de ce mois. Etudier le sens de variation de v.

Janvier	50
Février	76
Mars	101
Avril	139
Mai	182
Juin	710
Juillet	360
Août	45
Septembre	70
Octobre	90
Novembre	130
Décembre	90

Exercice 8 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite, qui, à un entier naturel quelconque, associe son carré s'il est pair, l'opposé de son carré s'il est impair. Trouver les six premiers termes de la suite w. La suite w est-elle monotone ?

Exercice 9 Que peut-on dire du sens de variation de la suite u définie par :

si n est pair, alors $u_n = \dfrac{n}{2}$

si n est impair, alors $u_n = \dfrac{n-1}{2}$

Méthode pratique

Pour étudier le sens des variations d'une suite $(u_n)_{n\in I_a}$.

On choisit un entier naturel n quelconque de I_a puis on étudie le signe nombre réel $(u_{n+1} - u_n)$.

S'il existe un élément b de I tel que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow (u_{n+1} - u_n) \geqslant 0]$, alors la suite u est croissante à partir du rang b.

S'il existe un élément b de I tel que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0]$, alors la suite u est décroissante à partir du rang b.

Montrons, par exemple, que la suite v définie par :

$v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante.

$n \mapsto \dfrac{1}{2n+1}$

Soit un entier naturel quelconque n. On a :

$$v_n = \frac{1}{2n+1} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1}$$

d'où : $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$$

c'est-à-dire : $$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+1-2n-3}{(2n+3)(2n+1)}$$

ou encore : $$v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{(2n+3)(2n+1)}$$

donc : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n < 0$

On a ainsi montré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Exercice 10 Montrer que la suite $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto \frac{3n+2}{2n-1}$$

est strictement décroissante

Exercice 11 Montrer que la suite $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto |n-4| + |n-7|$$

est croissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.

Exercice 12 Etudier le sens des variations de la suite t définie par :

$$t_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1} = t_n + 3$$

Méthode pratique

Dans le cas où tous les termes d'une suite u sont strictement positifs à partir d'un certain rang b, pour étudier le sens de variation de u, on pourra comparer le quotient de deux termes consécutifs d'indices supérieurs à b au nombre réel 1.

En effet, puisque : $\forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geqslant b \Rightarrow u_n > 0]$
On a :

$$\forall n \in I_b \quad [u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1]$$

$$\forall n \in I_b \quad [u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1]$$

$$\forall n \in I_b \quad [u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1]$$

Ainsi, par exemple, étudions le sens de variation de la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto 3^n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n}$

donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$

La suite u est strictement croissante.

Exercice 13 Etudier le sens de variation des suites suivantes :

1/ $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto (1/2)^n$
2/ $v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \quad n \mapsto n+1/n$
3/ $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que : $t_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1}=(t_n)^2$
4/ $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que

$$w(\mathbb{N}) = \left\{1, \frac{1}{2} ; 2 ; \frac{1}{3} ; 3 ; \frac{1}{4} ; \ldots ; n ; \frac{1}{n} ; \ldots\right\}$$

5) Opérations et ordre sur les suites

Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in J}$ deux suites qui sont des fonctions numériques définies respectivement sur I et sur J. La somme u + v des suites u et v est définie par :

$$\forall n \in I \cap J \qquad (u + v)_n = u_n + v_n$$

Question 7 *Soient $(u_n)_{n \in I}$, $(v_n)_{n \in J}$ deux suites ; soit k un nombre réel.*
- *Définir le produit de la suite u par la suite v.*
- *Définir le produit de la suite u par le nombre réel k.*

– *Si, pour tout élément n de I, u_n est non nul, définir l'inverse de la suite u, le quotient de la suite v par la suite u.*

Soient u et v deux suites définies sur la même partie I de $\mathbb{N}$ on dit que la suite u est plus petite que la suite v si et seulement si on a :
$\forall n \in I \quad u_n \leqslant v_n$

Question 8 *Traduire, dans le langage et les notations des suites, la définition d'un majorant, d'un minorant d'une fonction, dans le cas où l'ensemble de départ de cette fonction est $\mathbb{N}$.*

Question 9 *De même traduire la définition de fonction majorée, minorée ou bornée. En déduire une caractérisation d'une suite non majorée, d'une suite non minorée.*

Exercice 14 Montrer que la suite u telle que, pour entier naturel n, $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, est majorée par le nombre réel 1,5. Citez cinq autres majorants de la suite u. La suite u est-elle bornée ?

Exercice 15 La suite des approximations décimales d'ordre n par défaut de $\dfrac{43177}{99000}$ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

Exercice 16 Pour chacune des suites ci-dessous, montrer que le nombre réel k donné est soit un majorant, soit un minorant :

1/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n \qquad k = 2$

2/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{2} \sin n \qquad k = -\dfrac{3}{4}$

3/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{2n+3}{5n+6} \qquad k = \dfrac{1}{2}$

4/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n + 1 \qquad k = -1{,}242$

5/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^{n+1} \qquad k = -3$

6/ $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \qquad k = 2$

Exercice 17 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = n^2$, n'est pas majorée.

6) Suites périodiques

Question 10 *Soit z la suite qui, à tout entier naturel n, associe le reste de sa division par 5. Tracer la représentation graphique de z dans un repère du plan. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+5} = z_n$*

Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq a}$ est **périodique** si et seulement si il existe un entier naturel p non nul tel que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à a, on a : $u_{n+p} = u_n$
Le plus petit entier naturel vérifiant cette propriété s'appelle **la période** de la suite u.

Exercice 18 Montrer que la suite définie, pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$, est périodique et de période 2.

Exercice 19 Soit la suite $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Montrer que v est périodique. Quelle est sa période ?

Exercice 20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -u_n + 2$
En utilisant la méthode de lecture graphique du paragraphe I.3, montrer que cette suite est périodique.

Exercice 21 Une suite constante est-elle périodique ?

2 Démonstration par récurrence

Question 11 *Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n}$*

Calculez les dix premiers termes de cette suite.
Que pressentez-vous ?

Question 12 *A tout entier naturel n, on associe la phrase notée D(n) : « n divise 120 »*
les propositions D(1), D(2), D(3), D(4), D(5) et D(6) sont-elles vraies ?
Que pressentez-vous ?
D(7) est-elle vraie ?

Question 13 *A tout entier naturel n, on associe la phrase notée P(n) :*
« $(n-3)(n-11) \leq 0$ ». Montrer que, pour tout entier naturel n compris entre 3 et 11, P(n) est vraie.
La proposition P(26) est-elle vraie ?

Question 14 *Soient s et t les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$s_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_{n+1} = s_n + n + 1$

$\forall t \in \mathbb{N}^* \quad t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n										
t_n										

Que pressentez-vous ?

Plus généralement : soit P(n) une phrase dépendant de l'entier naturel n. On cherche la partie A de $\mathbb{N}$ constituée des entiers naturels k tels que P(k) est une proposition vraie.

Soit a un entier naturel fixé.

D'après les questions 12 et 13, il est clair qu'on ne peut pas conclure que A est égal à I_a (c'est-à-dire que pour tout n supérieur ou égal à a, P(n) est vraie) simplement après avoir constaté que, pour quelques entiers supérieurs à a, et se suivant, les propositions considérées sont vraies.

Reprenons la question 11 où l'on étudie la suite u définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n}$$

On a montré que les dix premiers termes de cette suite sont égaux à 4.

Soit un entier naturel p tel que $u_p = 4$, montrons que $u_{p+1} = 4$.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n}$

on a : $u_{p+1} = \dfrac{3u_p + 4}{u_p}$

comme u_p est égal à 4 on peut écrire :

$$u_{p+1} = \frac{3\times 4 + 4}{4}$$

donc : $u_{p+1} = 4$

On vient ainsi de montrer que la proposition R :

$$R : \forall n \in \mathbb{N} \quad [u_n = 4 \Rightarrow u_{n+1} = 4]$$

est VRAIE.

Ceci revient à dire que, si un terme quelconque u_n de la suite u est égal à 4, alors le terme suivant u_{n+1} est aussi égal à 4.

Or on a montré que : $u_0 = 4$ donc : $u_1 = 4$ (grâce à (R))

de même, puisque : $u_1 = 4$ on a : $u_2 = 4$ (grâce à (R))

de même, puisque : $u_2 = 4$ on a : $u_3 = 4$

et ainsi de suite.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4$

On admet le théorème suivant :

Théorème (Démonstration par récurrence)

Soit P(n) une phrase dépendant de l'entier naturel n.
Soit a un entier naturel fixé. On considère la proposition

$$R : \forall p \in I_a \quad [P(p) \Rightarrow P(p+1)].$$

Si les propositions P(a) et R sont vraies, alors, pour tout entier naturel p de I_a, la proposition P(p) est vraie.

Remarque

Le fait que R soit vraie ne suffit pas pour conclure que, pour tout entier naturel p de I_a, la proposition P(p) est vraie. On le constatera dans la question suivante.

Question 15 *Soit la phrase dépendant de l'entier naturel n :*

$$P(n) : \text{« 9 divise } 10^n + 1 \text{ »}$$

Montrer que la proposition : $[\forall n \in \mathbb{N} \quad [P(n) \Rightarrow P(n+1)]]$ est vraie
La proposition P(n) est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Méthode pratique

Pour montrer que R est vraie on prouve que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à a, si P(p) est vraie, alors P(p+1) l'est aussi.
C'est-à-dire que l'on se donne un élément p de I_a tel que P(p) soit vraie, et on démontre qu'alors P(p+1) est aussi vraie.
Ainsi par exemple, démontrons par récurrence que la somme t_n des n premiers entiers naturels non nuls, est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

On considère la phrase P(n) : $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

- P(1) est vraie car $t_1 = 1$

$$\text{et } \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$

- soit un entier naturel p non nul tel que P(p) est vraie, c'est-à-dire que :

$t_p = \frac{P(p+1)}{2}$; montrons que P(p+1) est vraie.

On a : $t_{p+1} = t_p + (p+1)$

d'où : $t_{p+1} = \frac{(p+1)}{2} + (p+1)$

d'où : $t_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

c'est-à-dire : $t_{p+1} = \frac{(p+1)[(p+1)+1]}{2}$

donc : P(p+1) est vraie

On a ainsi montré que la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$$

est vraie.
c'est-à-dire que R est vraie.
P(1) et R étant donc vraies, on en déduit, d'après le théorème de démonstration par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n la proposition P(n) est vraie, c'est-à-dire que :

Théorème

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{35 + 2u_n}$
Montrer par récurrence que la suite u est majorée par 7.

Exercice 23 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 24 Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a : $2n > n + 1$. Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N} - \{1\} \quad 2^n > n$.

3 Suites arithmétiques

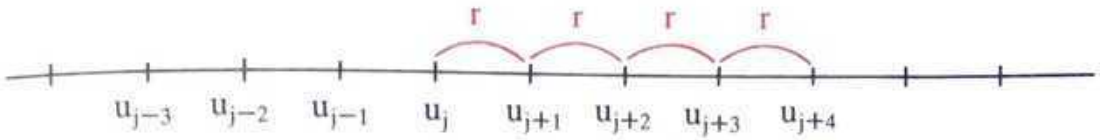
1) Généralités

Le prix d'une course en taxi à Abidjan est la somme d'un forfait (la prise en charge) de 100 CFA, indépendant de la distance parcourue, et d'un supplément kilométrique égal à 30 CFA par kilomètre parcouru. Chaque kilomètre commencé est entièrement dû. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite qui, à une course de n kilomètres associe son prix.

Question 16 *Calculer t_1, t_2, t_3, t_4, et t_5*
Montrer que $t_5 - t_4 = t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1$
Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul que peut-on dire de la différence $t_{n+1} - t_n$?

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in I_n}$ est **arithmétique** si et seulement si la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante et égale à un nombre réel r appelé **raison** de la suite u.



Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq a}$ est arithmétique on cherche un nombre réel r tel que :

tout terme d'indice strictement supérieur à a est la somme du terme précédent et de r c'est-à-dire :

$$\forall n \in I_a \qquad u_{n+1} - u_n = r$$

Ainsi, par exemple, montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $[u_n = 3n + 5]$ est arithmétique

Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $u_n = 3n + 5$ et $u_{n+1} = 3(n+1) + 5$

d'où : $u_{n+1} - u_n = 3n + 8 - 3n - 5$

donc : $u_{n+1} - u_n = 3$

On a ainsi montré que la suite u est arithmétique de raison égale à 3. Son premier terme est 5.

2/ Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geq a}$ n'est pas arithmétique on montre que la proposition :

$$(\forall p \in I_a \quad \forall q \in I_a \quad u_{p+1} - u_p = u_{q+1} - u_q) \text{ est fausse}$$

c'est-à-dire que :

$$(\exists p \in I_a \quad \exists q \in I_a \quad u_{p+1} - u_p \neq u_{q+1} - u_q) \text{ est vraie}$$

Ainsi, par exemple, la suite u définie par : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n^2 + 1$

n'est pas arithmétique car, par exemple, on a :

$$u_9 - u_8 = 17 \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = 3$$

2) Expression du terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_a et de raison r

Il résulte de l'étude générale des suites définies par une formule de récurrence qu'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq a}$ est définie de façon unique par son premier terme u_a et la formule de récurrence : $\forall n \in I_a \quad u_{n+1} - u_n = r$, le nombre réel r étant alors la raison de cette suite arithmétique.

Une suite arithmétique est donc déterminée par l'un de ses termes et sa raison.

Question 17 *Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie à la question 16. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = 100 + 30n$.*

Plus généralement, soit $(u_n)_{n\in I_a}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_a, montrons que :

$$\forall n \in I_a \quad u_n = u_a + (n - a)\, r$$

Soit la phrase P(n) : « $u_n = u_a + (n - a)\,r$ »

P(a) est vraie car $u_a = u_a + (a - a)\,r$

Soit un entier naturel p de I_a tel que P(p) est vraie c'est-à-dire tel que :

$u_p = u_a + (p - a)\,r$

La suite $(u_n)_{n\in I_a}$ étant arithmétique de raison r on sait que :

$: \forall n \in I_a \quad u_{n+1} - u_n = r$

ainsi on a : $u_{p+1} = u_p + r$

d'où : $u_{p+1} = [u_a + (p - a)\,r] + r$

ou encore : $u_{p+1} = u_a + [(p + 1) - a]\,r$

donc : P(p+1) est vraie.

Conclusion

- P(a) est vraie
- $[\forall n \in I_a \quad (P(n) \Rightarrow P(n + 1))]$ est vraie

donc : $\forall n \in I_a$ P(n) est vraie.

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in I_a}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_a on a :

$$\forall n \in I_a \quad u_n = u_a + (n-a)\,r.$$

On notera qu'une suite arithmétique est la restriction à une partie de $\mathbb{N}$ d'une fonction affine.

Le plus souvent on a $I_a = \mathbb{N}$ ou $I_a = \mathbb{N}^*$, dans chacun de ces deux cas on a alors respectivement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + n.r$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 + (n-1)\,r$$

Exercice 25 Calculer le 125e terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 2}$ de premier terme (-1) et de raison 2.

Exercice 26 Soient x et r deux nombres réels donnés et a un entier naturel.
On considère la suite u définie par :

$$\forall n \in I_a \quad u_n = x + (n-a)\,r$$

Montrer que la suite u est une suite arithmétique.

Exercice 27 Une progression arithmétique est une suite arithmétique dont l'ensemble de définition est de la forme $\{a, a + 1, a + 2, \ldots a + p\}$ où a et p sont des entiers naturels.
Trouver la progression arithmétique de quatre termes dont le premier est 5 et le quatrième 14.

Exercice 28 On désigne par a un nombre réel non nul. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme u_0 et, $\forall u \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + 3$.
Quelle valeur faut-il donner au nombre réel a pour que la suite u soit une suite arithmétique ? Calculer alors, en fonction de u_0 le 17e terme de la suite trouvée.

3) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique de raison r ; en utilisant le fait que, pour tout entier naturel n de l'ensemble de définition I_a de la suite u on a : $u_{n+1} - u_n = r$
on déduit :

Théorème

Une suite arithmétique de raison r est :
1/ strictement croissante si et seulement si $r > 0$
2/ strictement décroissante si et seulement si $r < 0$
3/ constante si et seulement si $r = 0$

Exercice 29/ Trouver une suite arithmétique décroissante telle que le produit des neuvième et dixième termes soit 4 et leur somme $3\sqrt{2}$.

4) Somme des (n+1) premiers termes d'une suite arithmétique

On a montré (page 110) que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette somme $S = 0 + 1 + 2 + \quad + n$ se note

$$S = \sum_{k=0}^{k=n} k$$

Question 18 *Soit $(u_n)_{n \geq a}$ une suite arithmétique de premier terme u_a et de raison r montrer, en utilisant le résultat précédent que l'on a :*

$$u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \ldots + u_{a+n} = \frac{1}{2}(n+1)(u_a + u_{a+n})$$

c'est-à-dire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_{a+k} = \frac{1}{2}(n+1)(u_a + u_{a+n})$

Cas particuliers :
Le plus souvent on a $I_a = \mathbb{N}$ ou $I_a = \mathbb{N}^*$, dans chacun de ces deux cas on a alors respectivement

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n) \qquad \text{ou}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_{1+k} = \frac{1}{2}(n+1)(u_1 + u_{n+1})$$

(Formules que l'on se gardera bien d'apprendre par cœur)

Question 19 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r*
a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ p \leq n \Rightarrow u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$
b/ En écrivant la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ d'une autre façon calculer 2S puis S.

Exercice 30

1/ Calculer la somme des (n+1) premiers entiers impairs
2/ Calculer la somme des (n+1) premiers entiers pairs.

Exercice 31

Soit u la suite arithmétique de premier terme u_0, égal à 1, et de raison 3.
Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et D_n la différence $S_{2n} - S_n$.
Calculer S_n et D_n en fonction de n. Déterminer un entier naturel p tel que $\frac{D_p}{S_p} = \frac{82}{35}$; calculer alors S_{2p}.

4 Suite géométrique

1) Généralités

Une bille de métal presque parfaitement élastique est laché d'une hauteur de 20 m et rebondit sur le sol. Après chaque rebond on observe la hauteur jusqu'à laquelle la bille remonte. Soit h(n) la mesure en mètres de la hauteur atteinte après le n^{eme} rebond, h(0) étant la mesure de la hauteur initiale (h(0) = 10). On définit ainsi une suite h :

Rang du rebond	Hauteur du rebond	Accroissement relatif : $\frac{h(n+1) - h(n)}{h(n)}$
0	10	
1	9,50	
2	9,02	
3	8,57	
4	8,14	
5	7,74	
6	7,35	
7	6,98	
8	6,63	
9	6,30	
10	5,99	

Question 20

En arrondissant à deux chiffres après la virgule, compléter le tableau ci-dessus. En déduire que le quotient $\frac{h(n+1) - h(n)}{h(n)}$ *est constant quand n parcourt l'ensemble {0, 1, 2, 3, ... 9}.*
Montrer que : $\forall n \in \{0, 1, \ldots 9\} \quad h(n+1) = 0{,}95\, h(n)$.

Définition

Une suite est **géométrique** si et seulement si chaque terme, sauf le premier, est le produit du précédent par un nombre réel constant appelé **raison** de la suite géométrique.

Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq a}$ est géométrique on cherche un nombre réel q tel que :
tout terme d'indice strictement supérieur à a est le produit du terme précédent par q, c'est-à-dire que :

$$\forall n\in I_a \quad u_{n+1} = qu_n$$

Dans le cas où la suite u ne s'annule pas (c'est-à-dire que : $\forall n\in I_a \quad u_n \neq 0$) pour montrer que la suite u est géométrique, on montre qu'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier naturel n de I_a le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à q.

Ainsi, par exemple, montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est géométrique.

Soit un entier naturel n quelconque, on a :

$$u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } u_{n+1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

donc : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$

On a ainsi montré que la suite u est géométrique raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

En remarquant que la suite u ne s'annule pas on aurait pu calculer, pour un entier naturel n quelconque, le quotient : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, égal à $\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ qui vaut $\frac{1}{2}$.

2/ Pour montrer qu'une suite, qui ne s'annule pas, n'est pas géométrique on montre que la proposition :

$$\left[\forall r\in I_a \quad \forall s\in I_a \quad \frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{u_{s+1}}{u_s}\right] \text{ est FAUSSE}$$

c'est-à-dire que la proposition

$$\left[\exists r\in I_a \quad \exists s\in I_a \quad \frac{u_{r+1}}{u_r} \neq \frac{u_{s+1}}{u_s}\right] \text{ est VRAIE}$$

Ainsi, par exemple, la suite u, définie par : $\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto n^2\end{array}$

n'est pas géométrique car, par exemple, on a :

$$\frac{u_2}{u_1} = 4 \text{ et } \frac{u_5}{u_4} = 1{,}5625$$

2) Expression du terme général

Il résulte de l'étude générale des suites définies par une formule de récurrence qu'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq a}$ est définie de façon unique par son premier terme u_a et la formule de récurrence : $\forall n \in I_a \quad u_{n+1} = qu_n$, le nombre réel q étant alors la raison de cette suite géométrique. Une suite géométrique et donc déterminée par son premier terme et sa raison.

Question 21 *Soit u la suite géométrique de premier terme u_o, égal à 2, et de raison q, égale à 3*
Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 en fonction de u_0 et de q. Quelle semble être l'expression de u_n en fonction de u_o et de q ?
Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$

Plus généralement, soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite géométrique de premier terme u_a et de raison q. Montrons par récurrence que l'on a :
$\forall n \in I_a \quad u_n = u_a\, q^{n-a}$

Soit la phrase P(n) : « $u_n = u_a\, q^{n-a}$ »
P(a) est vraie car $u_a = u_a\, q^{a-a}$.
Soit un entier naturel p de I_a tel que P(p) est vraie c'est-à-dire tel que : $u_p = u_a\, q^{p-a}$.
La suite $(u_n)_{n\in I_a}$ étant géométrique de raison q on sait que :

$\forall n \in I_a \quad u_{n+1} = qu_n$
d'où : $u_{p+1} = qu_p$
c'est-à-dire : $u_{p+1} = qu_a\, q^{p-a}$
ou encore : $u_{p+1} = u_a\, q^{(p+1)-a}$
donc : P(p+1) est vraie.

Conclusion

P(a) est vraie
$[\forall n \in I_a \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vraie
donc : $\forall n \in I_a \quad P(n)$ est vraie

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in I_a}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_a. On a :

$$\forall n \in I_a \quad u_n = u_a\, q^{n-a}$$

Remarque

Le plus souvent on a $I_a = \mathbb{N}$ ou $I_a = \mathbb{N}^*$, dans chacun de ces deux cas on a alors respectivement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_o q^n$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1\, q^{n-1}$$

Exercice 32 Le nombre réel u_a étant donné, on considère la suite u définie par :

$$\forall n \in I_a \qquad u_n = u_a\, q^{n-a}$$

Montrer que la suite u est une suite géométrique.

Exercice 33 Calculer le 9e terme de la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 3}$ de premier terme 3 et de raison -2.

Exercice 34 Une progression géométrique est une suite géométrique dont l'ensemble de définition est une partie de la forme {a ; a+1 ; a+2 ; ... a+p} où a et p sont deux entiers naturels. Trouver la progression géométrique de cinq termes dont le deuxième est 7, le quatrième 63 et dont tous les termes sont positifs.

Exercice 35 Soient u et v les deux suites telles que :

$$u_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+2u_n} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$$

Démontrer que la suite u est positive. En déduire que u et v sont définies sur $\mathbb{N}$. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Calculer, pour tout entier naturel n, v_n puis u_n en fonction de n.

3) Sens de variation d'une suite géométrique

Question 22 *Quel est le sens de variation de la suite géométrique u de premier terme u_o et de raison q dans chacun des cas suivants :*
a/ $u_o = 0$ b/ $q = 0$ c/ $q = 1$

Question 23 *Quel semble être le sens de variation de la suite géométrique u de premier terme $u_o = 2$ et de raison q dans chacun des cas suivants :*
a/ $q = 3$ b/ $q = 1/3$ c/ $q = -2$

Question 24 *Quel semble être le sens de variation de la suite géométrique u de premier terme $u_o = -2$ et de raison q dans chacun des cas suivants :*
a/ $q = 3$ b/ $q = 1/3$ c/ $q = -2$

D'après ce qui précède il semble que le sens de variation d'une suite géométrique dépend du signe du premier terme u_a, du signe de la raison q et de la place de q par rapport à 1. C'est ce que nous allons montrer maintenant :
Soit $(u_n)_{n\geqslant a}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_a.
On a : $\forall n \in I_a \quad u_n = u_a q^{n-a}$
donc : $\forall n \in I_a \quad u_{n+1} - u_n = u_a \cdot q^{n-a}(q-1)$

- Si $u_a = 0$ ou $q = 0$ ou $q = 1$, alors la suite u est constante à partir du premier ou du deuxième terme.
- Si $u_a \neq 0$ et $q \neq 0$ et $q \neq 1$, alors le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de u_a, du signe de q et du signe de $q - 1$; on obtient les deux tableaux suivants :

1er cas : $u_a > 0$

q	←	0	1 →
signe de q^{n-a}	+ si (n−a) est pair − si (n−a) est impair	+	+
signe de q−1	−	−	+
signe de $u_{n+1} - u_n$	− si (n−a) est pair + si (n−a) est impair	−	+
sens de variation de u	non monotone	décroissante	croissante

2e cas : $u_a < 0$

De la même manière, on obtiendra les résultats suivants :

q	←	0	1 →
sens de variation de u	non monotone	croissante	décroissante

Remarque

Dans le cas où tous les termes de la suite géométrique sont positifs c'est-à-dire lorsque le premier terme u_a est strictement positif et que la raison q l'est aussi, on applique la seconde méthode d'étude du sens de variation d'une suite.
Cette méthode consiste à comparer à 1 le quotient de deux termes consécutifs quelconques : si $q > 1$ alors la suite est croissante
si $0 < q < 1$ alors la suite est décroissante
si $q = 1$ alors la suite est constante.

Exercice 36 Soit k un nombre réel. Montrer que la suite v définie par : $v_o = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = kv_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Discuter, suivant les valeurs du nombre réel k, du sens de variation de la suite v.

4) Somme des (n+1) premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme égal à 1
Soit $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

Question 25 *Calculer S dans chacun des cas suivants :*
a/ $q = 0$ b/ $q = 1$ c/ $q = -1$

Question 26 *Soit $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n$ la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.*
Calculer $3S_n - S_n$. En déduire S_n.

Plus généralement, soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite géométrique de premier terme u_a et de raison q. Calculons, pour tout entier n de I_a la somme S_n :

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_{a+k}$$

$S_n=u_a+u_{a+1}+u_{a+2}+\ldots+u_{a+n}$

d'où : $S_n=u_a+u_aq+u_aq^2+\ldots+u_aq^n$

car : $\forall k\in\{0,1,2,\ldots n\}\quad u_{a+k}=u_aq^{(a+k)-a}=u_aq^k$

donc : $S_n=u_a(1+q+q^2+\ldots+q^n)$

on sait que : $(1+q+q^2+\ldots+q^n)(1-q)=1-q^{n+1}$

- $q = 1$, $S_n = (n+1)\,u_a$
- $q \neq 1$, $S_n = u_a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Théorème

La somme des (n+1) premiers termes d'une suite géométrique de premier u_a et de raison q est :

$$S_n = u_a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \text{ ; } S_n = (n+1)u_a \text{ si } q = 1$$

Exercice 37 Calculer la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique u de premier terme u_a et de raison q dans chacun des cas suivants :

a/ $u_0 = 2$ $\quad q = \dfrac{1}{2}$ $\quad n = 7$

b/ $u_0 = 3$ $\quad q = -5$ $\quad n = 4$

c/ $u_0 = -1$ $\quad q = -\dfrac{1}{3}$ $\quad n = 5$

d/ $u_0 = 2$ $\quad q = -1$ $\quad n = 12$

Exercice 38 Soit u une suite géométrique de premier terme u_a et de raison q. Calculer $qS_n - S_n$. En déduire S_n.

Réponses aux questions

Q 1 :
L'approximation décimale d'ordre
0 par défaut de A est : 0
1 par défaut de A est : 0,4
2 par défaut de A est : 0,43
3 par défaut de A est : 0,436
30 par défaut de A est :
0,436131313131313131313131313131

Q 2 :
$C_0 = 1\,000\,000$

$C_1 = 1\,000\,000 + \frac{8{,}5 \times 1\,000\,000}{100} = 1\,085\,000$

$C_2 = C_1 + \frac{8{,}5 \times C_1}{100} = 1{,}085 C_1$ d'où $C_2 = 1\,177\,225$

$C_3 = C_2 + \frac{8{,}5 \times C_2}{100} = 1{,}085 C_2$ d'où $C_3 = 1\,277\,289$

Q 3 :
$C_4 = 1{,}085 C_3$ d'où $C_4 \simeq 1\,385\,859$
$C_5 = 1{,}085 C_4$ d'où $C_5 \simeq 1\,503\,657$
$C_6 = 1{,}085 C_5$ d'où $C_6 \simeq 1\,631\,468$
$C_7 = 1{,}085 C_6$ d'où $C_7 \simeq 1\,770\,142$
$C_8 = 1{,}085 C_7$ d'où $C_8 \simeq 1\,920\,604$
$C_9 = 1{,}085 C_8$ d'où $C_9 \simeq 2\,083\,856$
$C_{10} = 1{,}085 C_9$ d'où $C_{10} \simeq 2\,260\,984$

Q 4 :
Le capital au 01.01.1996 est C_{10} :
$C_{10} = (1{,}085)^{10}\ 1\,000\,000$
$= 2{,}260983.\ 1\,000\,000 = 2\,260\,984$
Le capital au 01.01.2012 est C_{26} :
$C_{26} = (1{,}085)^{26}\ 1\,000\,000$
$= 8\,340\,137$

Q 5 :
$C_0 = 2\,500\,000$, comme on a encore
$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n = (1{,}085)^n C_0$
Le capital au 01.01.1996 est C_{10} :
$C_{10} = (1{,}085)^{10}\ 2\,500\,000$
c'est-à-dire 5 652 459.

Q 6 :
$U_0 = 3.2^0 = 3$, $U_1 = 3.2^1 = 6$ $\quad U_0 < U_1$
$U_2 = 3.2^2 = 12$ $\quad U_1 < U_2$
$U_3 = 3.2^3 = 24$ $\quad U_2 < U_3$
$U_4 = 3.2^4 = 48$ $\quad U_3 < U_4$
$U_5 = 3.2^5 = 96$ $\quad U_4 < U_5$
$U_6 = 3.2^6 = 192$ $\quad U_5 < U_6$
$U_7 = 3.2^7 = 384$ $\quad U_6 < U_7$
$U_8 = 3.2^8 = 768$ $\quad U_7 < U_8$
$U_9 = 3.2^9 = 1\,536$ $\quad U_8 < U_9$

- $\forall \in \mathbb{N} \quad U_n = 3.2^n$ et $U_{n+1} = 3.2^{n+1}$
donc $\forall \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 2U_n$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = U_n$
or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 0$
d'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < U_{n+1}$
- Soient p et q deux entiers naturels tels que p<q on a $U_p < U_{p+1} < \ldots < U_{q-1} < U_q$ d'où le résultat demandé
$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad p < q \Rightarrow U_p < U_q$

Q 7 :
Le produit de la suite u par la suite v est la suite notée u.v définie par :
$\forall n \in I \cap J \quad (u.v)_n = u_n v_n$
Le produit de la suite u par le nombre réel k est la suite k.v définie par :
$\forall n \in I \quad (ku)_n = k.u_n$
Si on a :
$\forall n \in I \quad u_n \neq 0$
alors l'inverse de la suite u est la suite $\frac{1}{u}$ définie par :

$\forall n \in I \quad \left(\frac{1}{u}\right)_n = \frac{1}{u_n}$

Le quotient de la suite v par la suite u est la suite notée $\frac{v}{u}$ et définie par :

$\forall n \in I \cap J \quad \left(\frac{v}{u}\right)_n = \frac{v_n}{u_n}$

Q 8 :
Un nombre réel M est un majorant de la suite u si et seulement si $\forall n \in I \quad u_n \leq M$
Un nombre réel m est un minorant de la suite u si et seulement si $\forall n \in I \quad m \leq u_n$

Q 9 :
Une suite est majorée si et seulement si elle admet un majorant
Une suite est minorée si et seulement si elle admet un minorant
Une suite est bornée si et seulement si elle admet un majorant et un minorant
Une suite $(u_n)_{n \in I}$ n'est pas majorée si et seulement si $M \in \mathbb{R} \quad n \in I \quad u_n > M$
Une suite $(u_n)_{n \in I}$ n'est pas minorée si et seulement si $m \in \mathbb{R} \quad n \in I \quad m > u_n$

Q 10 :
Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel q_n et un entier naturel z_n tels que :
$n = 5.q_n + z_n$ avec $z_n < 5$
d'où $n + 5 = 5(q_n + 1) + z_n$
on en déduit $q_{n+5} = q_n + 1$ et $z_{n+5} = z_n$

Q 11 :
$u_0 = 4$, $u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0} = \frac{3.4+4}{4} = 4$,
$u_2 = \frac{3u_1 + 4}{u_1} = 4$, $u_3 = \frac{3u_2 + 4}{u_2} = 4$,

$u_4 = \frac{3u_3+4}{u_3} = 4,\ u_5 = \frac{3u_4+4}{u_4} = 4,$

$u_6 = \frac{3u_5+4}{u_5} = 4,\ u_7 = \frac{u_6+4}{u_6} = 4,$

$u_8 = \frac{3u_7+4}{u_7} = 4,\ u_9 = \frac{3u_8+4}{u_8} = 4$

Il semble que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante :

$$n\in\mathbb{N} \quad u_n = 4$$

Q 12 :

120 = 1.120 donc D(1) est vraie
120 = 2.60 donc D(2) est vraie
120 = 3.40 donc D(3) est vraie
120 = 4.30 donc D(4) est vraie
120 = 5.24 donc D(5) est vraie
120 = 6.20 donc D(6) est vraie
Il semble que pour tout $n\in\mathbb{N}$, D(n) soit vraie
Mais 120 = 7.17 + 1 donc D(7) est fausse

Q 13 :

D'après le cours sur les fonctions polynômes, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad (x-3)(x-11) \leq 0$$

si et seulement si $x\in[3,11]$
donc $\forall n\in\mathbb{N}\cap[3,11] \quad (n-3)(n-11) \leq 0$
c'est-à-dire : pour tout entier naturel compris entre 3 et 11, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. P(26) est fausse car (26−3)(26−11) = 345.

Q 14 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
t_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Il semble que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad s_n = t_n$

Q 15 :

Soit n un entier naturel tel que 9 divise $10^n + 1$: il existe un entier naturel q tel que $10^n + 1 = 9q$
or $10^{n+1} + 1 = 10.10^n + 10 - 9$
$= 10(10^n + 1) - 9$
d'où $10^{n+1} + 1 = 10.9q - 9$
$= 9(10q - 1)$
posant $q' = 10q - 1$, on a $10^{n+1} + 1 = 9q'$ avec $q'\in\mathbb{N}$: P(n+1) est vraie.
P(1) est fausse car 9 ne divise pas 11, donc P(n) n'est pas vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

Q 16 :

$t_1 = 100 + 30 = 130,$
$t_2 = 100 + 30 + 30 = 160,$
$t_3 = 100 + 30 + 30 + 30 = 190$
$t_4 = 100 + 30 + 30 + 30 + 30 = 220,$
$t_5 = 100 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 = 250$
$t_5 - t_4 = 30,\ t_4 - t_3 = 30,\ t_3 - t_2 = 30,\ t_2 - t_1 = 30$
$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad t_{n+1} - t_n = 30$ (prix du $(n+1)^{ième}$ kilomètre)

Q 17 :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $t_n = 100 + 30n$
$\mathcal{P}(1)$ est vraie car $t_1 = 130 = 100 + 30.1$
Soit p un entier naturel tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie :
$t_p = 100 + 30p$
D'après la question 16, on a : $t_{p+1} - t_p = 30$
donc : $t_{p+1} = tp + 30$
$t_{p+1} = 100 + 30p + 30$
$= 100 + 30(p+1)$: $\mathcal{P}_{(p+1)}$ est vraie
D'après le théorème de démonstration par récurrence on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad t_n = 100 + 30n$$

Q 18 :

on a : $\forall p\in\mathbb{N} \quad u_p = u_a + (p-a)r$
donc : $\forall k\in\{0, 1, 2, \ldots n\} \quad u_{a+k} = u_a + kr$
donc :

$$\begin{aligned} u_a+u_{a+1}+\ldots+u_{a+n} &= u_a+ \text{ or } +u_a+1r+\ldots u_a+nr \\ &= (n+1)u_a+r(0+1+\ldots+n) \\ &= (n+1)u_a+r\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left[\frac{u_a+u_a+nr}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(u_a+u_{a+n}) \end{aligned}$$

Q 19 :

a) soient n et p deux entiers naturels tels que $p\leq n$ comme on a :

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad u_k = u_0 + k.r$$

on a : $u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r$
$= u_0 + u_0 + nr$
$= u_0 + u_n$

b) $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_p + \ldots + u_{n-1} + u_n$
$S = u_n + u_{n-1} + \ldots u_{n-p} + \ldots u_1 + u_0$

En additionnant, on obtient :

$2S = (u_0+u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \ldots + (u_p+u_{n-p})$
$+ \ldots (u_{n-1} + u_1) + (u_n+u_0)$
$= (u_0+u_n) + (u_0+u_n) + \ldots + (u_0+u_n) + \ldots +$
$(u_0+u_n) + (u_0+u_n)$
$2S = (n+1)(u_0+u_n)$
$S = \frac{1}{2}(n+1)(u_0+u_n)$

Q 20 :

Rang n	Hauteur h(n)	Accroissement
0	10	$\frac{9,50-10}{10} \simeq -0,05$
1	9,50	$\frac{9,02-9,50}{9,50} \simeq -0,05$
2	9,02	$\frac{8,57-9,02}{9,02} \simeq -0,05$
3	8,57	$\frac{8,14-8,57}{8,57} \simeq -0,05$
4	8,14	$\frac{7,74-8,14}{8,14} \simeq -0,05$
5	7,74	$\frac{7,35-7,74}{7,74} \simeq -0,05$
6	7,35	$\frac{6,98-7,35}{7,35} \simeq -0,05$
7	6,98	$\frac{6,63-6,98}{6,98} \simeq -0,05$
8	6,63	$\frac{6,30-6,63}{6,63} \simeq -0,05$
9	6,30	$\frac{5,99-6,30}{6,30} \simeq -0,05$
10	5,99	

$\forall n \in \{0, 1, \dots 9\} \quad \frac{h(n+1) - h(n)}{h(n)} = -0,05$
d'où : $\forall n \in \{0, 1, \dots 9\} \quad h(n+1) = h(n) - 0,05\, h(n)$
c'est-à-dire : $\forall n \in \{0, 1, \dots 9\} \quad h(n+1) = 0,95\, h(n)$

Q 21 :
$u_1 = 3.2$, $u_2 = 3(3.2) = 2.3^2$, $u_3 = 3(2.3^2) = 2.3^3$,
$u_4 = 3(2.3^3) = 2.3^4$
il semble : $u_n = 2.3^n$
soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2,3^n$; $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(4)$ sont vrais. Soit p un entier naturel tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai : $u_p = 2.3^p$
on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3\, u_n$
d'où : $u_{p+1} = 3\, u_p$
$= 3(2.3^p)$
$= 2.3^{p+1}$
ce qui montre que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
On vient donc de montrer que
$(\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1))$ est vraie
On a ainsi montré par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2.3^n$

Q 22 :
a) Puisque : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0\, q^n$
et que $u_0 = 0$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$
donc la suite u est constante et égale à la suite nulle
b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0\, q^n$, or $q = 0$,
donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 0$
la suite u est constante à partir du rang 1
c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0\, q^n$, or $q = 1$,
donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0$
la suite u est constante et égale à la suite $[n \mapsto u_0]$

Q 23 :
a) $q = 3$, $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 18$, $u_3 = 54$
la suite u semble être croissante
b) $q = \frac{1}{3}$, $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{2}{9}$, $u_3 = \frac{2}{27}$
la suite u semble être décroissante
c) $q = -2$, $u_0 = 2$, $u_1 = -4$, $u_2 = 8$, $u_3 = -16$
la suite u semble être ni croissante, ni décroissante, ni constante.

Q 24 :
a) $u_0 = -2$, $q = 3$, $u_1 = -6$, $u_2 = -18$, $u_3 = -54$
la suite u semble être décroissante
b) $u_0 = -2$, $q = \frac{1}{3}$, $u_1 = -\frac{2}{3}$,
$u_2 = -\frac{2}{9}$, $u_3 = -\frac{2}{27}$
la suite u semble être croissante
c) $u_0 = 2$, $q = -2$, $u_1 = 4$, $u_2 = -8$, $u_3 = 16$
la suite u semble être ni croissante, ni décroissante, ni constante.

Q 25 :
a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_0\, q^n = 0$
d'où $s_n = u_0 + 0 + \dots + 0 = u_0$
b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0\, q^n = u_0$
d'où : $s_n = u_0 + \dots + u_0 = (n+1)\, u_0$
c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0\, q^n = u_0\, (-1)^n$
d'où : si n est pair
alors $s_n = u_0 - u_0 + \dots + u_0 = u_0$
si n est impair
alors $s_n = u_0 - u_0 + \dots - u_0 = 0$

Q 26 :
$s_n = 1 + 3 + \dots 3^{n-1} + 3^n$
$3s_n = 3 + 3^2 + \dots 3^n + 3^{n+1}$
$3s_n - s_n = 3^{n+1} - 1$
d'où : $s_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

Résultats ou indications des exercices

2/ $w_n = \dfrac{3}{2^{n+3}} - 5n - 13$

5/ $u_0 = -2$, $u_1 = 6$, $u_2 = -6$, $u_3 = 12$, $u_4 = -15$

11/ 4

13/ 1/ décroissante
2/ décroissante
3/ constante
4/ non monotone

14/ La suite est croissante donc minorée par u_0

15/ Il est clair que la suite considérée est bornée par 0 et 1.

19/ La période est 4.

20/ La période est 2.

22/ On a : $u_0 < 7$
Soit p un entier naturel tel que : $u_p < 7$
on a : $2u_p < 14$, d'où : $35 + 2u_p < 49$, d'où :
$\sqrt{35+2u_p} < \sqrt{49}$
donc : $u_{p+1} < 7$
On a aussi montré que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 7$.

23/ Pour n égal à 0, on a : $3^{2n} - 2^n = 0$
Soit p un entier naturel tel que : $3^{2p} - 2^p$ soit divisible par 7.

on a : $3^{2(p+1)} - 2^{p+1} = 3^2.3^{2p} - 2.2^p$
$= 9.3^{2p} - 2.2^p$
$= 9.3^{2p} - (9-7).2^p$
$= 9.(3^{2p} - 2^p) + 7.2^{2p}$

ce qui montre que $3^{2(p+1)} - 2^{p+1}$ est divisible car $3^{2p} - 2^p$ l'est ainsi que 7.2^{2p}.
On a ainsi montré que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2p} - 2^n$ est divisible par 7.

25/ Le 125e terme est u_{126} soit 247.

27/ {5 ; 8 ; 11 ; 14}

29/ $\begin{cases} u_8 \times u_9 = 4 \\ u_8 + u_9 = 32 \end{cases}$

30/ 1/ $(n+1)^2$. 2/ $n(n+1)$

31/ p = 4.

33/ Le 9e terme est u_{11} soit 768.

34/ $\left\{\dfrac{7}{3} ; 7 ; 21 ; 63 ; 189\right\}$

Exercices

39 Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites ci-dessous

a/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n$

b/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n+1}{3}$

c/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + (-1)^n$

d/ $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3$

e/ $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n$

f/ Si n est pair alors $u_n = \dfrac{n}{2}$

Si n est impair alors $u_n = \dfrac{n+1}{2}$

g/ $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$

h/ $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

40 Démontrer que la suite u_n définie par

$\left(u_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n}\right)$

est constante

Pour quelles valeurs du nombre réel α la suite v définie par :

$\left(v_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 3}{v_n}\right)$

est-elle constante ?

41 Trouver deux suites non nulles dont la somme soit la suite nulle.

42 Trouver deux suites non nulles dont le produit soit la suite nulle.

43 Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction donnée f, placer sur l'axe $(O, \vec{i})$ le plus de termes possibles de la suite u définie par son premier terme u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ $u_0 = 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 4$

2/ $u_0 = 0$ et $f : x \mapsto \sqrt{2x + 35}$

3/ $u_0 = 3$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$

4/ $u_0 = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{25}{x}\right)$

5/ $u_0 = 4$ et $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

6/ $u_0 = 1$ et $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$

7/ $u_0 = 0$ et $f : x \mapsto -0{,}2x^2 + x + 1$

8/ $u_0 = 1$ et $f : x \mapsto x + 3$

9/ $u_0 = 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

10/ $u_0 = 0$ et $f : x \mapsto 1 - \dfrac{x}{2}$

44 Utiliser l'exercice précédent pour formuler, à propos de chaque suite u étudiée, des hypothèses portant :

- sur le sens de variation de u
- sur l'existence d'un majorant ou d'un minorant de la suite u
- sur la périodicité de la suite u.

45 Montrer que la suite u définie par

$\left(u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} - 4\right)$ est décroissante et minorée par -6.

46 On considère la suite u définie par

$(u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35})$

a/ Soit $u_0 = 0$. Calculer les cinq premiers termes de la suite u puis montrer que u est croissante et majorée par 7.

b/ Soit $u_0 = 8$. Calculer les cinq premiers termes de la suite u puis montrer que u est décroissante et minorée par 7.

c/ Que peut-on dire de la suite u quand $u_0 = 7$?

47 Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ et u la suite définie par son premier terme u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ Montrer que si la fonction f est croissante et si u_1 est supérieur à u_0, alors il en est de même de la suite u.

2/ Trouver une fonction f telle que u soit croissante sans que f le soit.

3/ Trouver une fonction périodique f sans que la suite u le soit.

4/ Trouver une suite périodique u sans que la fonction f le soit.

48 Montrer que la suite u définie par :

$(u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n + 1)$

est périodique. Quelle est sa période ?

49 Soient u et v deux suites géométriques, de même raison a distincte de -1, et vérifiant :

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

Prouver que l'on a : $u_1 = v_1(1 + a^2)$

Trouver les valeurs de a telles que $\dfrac{u_1}{v_1} = 5$ et, si $u_1 + u_2 = 45$ calculer, pour chaque valeur de a, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 et v_4

50 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$\left(u_0 = 0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N} \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{1}{3}(n^2+n)\right)$

1/ Calculer u_1, u_2 et u_3.
2/ Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n.
3/ En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

51 Soit v la suite définie par :

$\left(v_0 = 1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N} \quad v_1\times v_2\times\ldots\times v_n = \frac{1}{3^{n^2+n}}\right)$

1 Calculer v_1, v_2 et v_3.
2 Calculer v_n et v_{n+1} en fonction de n.
3 En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

52 Etant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on appelle suite des carrés la suite v, définie par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = (u_n)^2$

et suite des alternés la suite u' définie par :
pour tout entier naturel n
si n est pair alors $u'_n = u_n$
si n est impair alors $u'_n = -u_n$

Supposons que la suite u soit géométrique de raison q.
Quelle est la nature des suites v et u' ?
Pour tout entier p, on note S_p, S'_p, S''_p les sommes suivantes :
$S_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_p$
$S'_p = u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_p$
$S''_p = v_0 + v_1 + \ldots + v_p$
Pour quels entiers p a-t-on $S''_p = S_p \cdot S'_p$?

53 Trouver les suites géométriques de premier terme non nul et de raison non nulle telles que $4u_3 = 49\,u_5$.

54 Les cinq termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 d'une progression géométrique sont strictement positifs. On note x la raison de cette suite et a le 3e terme.
Exprimer à l'aide de a et x les sommes $S = u_1 + u_5$ et $s = u_2 + u_4$.
Montrer que $s^2 = aS + 2a^2$. En déduire a et x pour que $s = 34$ et $S = \frac{257}{2}$.

55 Démontrer par récurrence que :
$\forall n\in\mathbb{N} \quad n^3 - n$ est divisible par 3.
Trouver une autre méthode de démonstration.

56 Démontrer par récurrence que :

1/ $\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2/ $\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ $\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

57 Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) = \frac{(2x+1)^2 - 1}{8}$$

1/ Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R} \quad [x\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x)\in\mathbb{N}]$
2/ Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad f(n) = f(n-1) + n$
En déduire que, pour tout entier naturel n, f(n) est égal à la somme des n premiers nombres entiers.

58 Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x) = \frac{(2x+1)^3 - (2x+1)}{24}$$

1/ a/ Montrer que :
$\forall x\in\mathbb{R} \quad 2x^3 + 3x^2 + x = x(x+1)(2x+1)$
b/ Montrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 2x^3 + 3x^2 + x$ est divisible par 6
2/ Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad g(n) = g(n-1) + n^2$
En déduire que, pour tout entier naturel n, g(n) est égal à la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

59 Une suite u est définie par son premier terme u_1 avec

$$u_1 = \frac{1}{3} \quad \text{et :} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$$

1/ Calculer u_2, u_3 et u_4.
2/ On pose $u_n = \frac{1}{v_n}$ et $v_n = w_n + 1$; en déduire, en fonction de n, l'expression de w_n puis celle de u_n.
3/ Calculer à 0,001 près $\frac{u_{12}}{(u_6)^2}$.

60 Soient ω un nombre réel et u la suite définie par :
$(u_0 = 1,\ u_1 = \cos\omega \quad \text{et} \quad \forall n\geq 2 \quad u_{n+1} = 2u_1\,u_n - u_{n-1})$
Calculer u_2, u_3 et u_4.
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \cos(n\omega)$.

61 Selon des estimations de l'ONU la population mondiale était en 1975 de 3 968 millions d'habitants et s'accroissait de 1,9 % par an. Supposons que ce taux de croissance reste constant. Quelle est la population mondiale estimée en l'an 2000 ?
Déterminer, à une année près, le temps nécessaire pour que la population mondiale double d'effectif.

62 Trouver deux réels positifs a et b tels que (a, a + 2b, 2a + b) soit une progression arithmétique et $((b+1)^2,\ ab+5,\ (a+1)^2)$ soit une suite géométrique.

63 Trouver trois nombres réels a, b et c tels que (a, b, c) soit une progression arithmétique de somme 24 et (2a, 3b − 4, 4c − 4) soit une progression géométrique.

64 Trouver trois nombres formant une progression géométrique croissante tels que leur somme soit 63 et la somme de leurs inverses $\frac{7}{16}$.

65 Trouver une progression géométrique de 5 termes tels que la somme des termes de rangs pair soit 30 et celle des termes de rang impair 91.

66 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par u_0 et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1} = a\,u_n + b$ où a et b sont deux nombres réels.
Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :
1) a=0 2) b=0 3) a=1
Considérant $a \neq 1$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$$

est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Calculer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n. Trouver $v_u + \ldots + v_n$ puis $u_0 + \ldots u_n$ en fonction de n.

67 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
($u_4 = 31$, $u_5 = 63$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$)
Etudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n = u_{n+1} - 2u_n$$

En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n puis celle de u_n en fonction de n.
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
($\forall n\in\mathbb{N}\quad w_n = u_n + 1$)
est géométrique
Calculer $w_0 + \ldots + w_n$ en fonction de n puis de u_n en déduire $u_0 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

68 Trouver une progression arithmétique de 4 termes dont la somme est 22 et la somme de leurs carrés 166.

69 Sachant que U est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_1 = 12$, calculer n tel que $u_n = 309$ et $u_1 + \ldots + u_n = 16\,692$.

70 La suite u est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
1) $u_0 = 5$ et $u_3 = 17$. Trouver r calculer u_{37}
2) $u_8 = 3$ et $u_{11} = 4$. Trouver r, u_0 et u_{22}
3) $u_2 + u_3 = 12$ et $u_8 = 22$. Trouver u_0 et r

71 Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$V_0 = 5 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\quad V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n}$$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad V_n > 0$. Calculer V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5.
On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $U_n = \frac{1}{V_n}$. Montrer que la suite U est arithmétique en déduire l'expression de V_n en fonction de n.

72 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -5.
Calculer la somme S_n des n premiers termes de cette suite.
Trouver n pour que $S_n = 354$.

73 Dans un bouillon de culture prolifère une population de bactéries.
On mesure toutes les heures le nombre de bactéries par millilitre et on désigne par N_n ($n\geq 0$) le nombre de bactéries par millilitre ainsi observés au bout de n heures.
On trouve $N_0 = 3.10^2$
et $\frac{N_1-N_0}{N_0} = \frac{N_2-N_1}{N_1} = \ldots = \frac{N_n-N_{n-1}}{N_{n-1}} = 9$
1) Exprimer N_n en fonction de N_{n-1}
Quelle est la nature de la suite N ?
Trouver N_2, N_3 et N_4. Exprimer N_n en fonction de N_0 et de n.
2) Au bout de combien d'heures le nombre de bactéries sera-t-il supérieur à 30.10^5 ?

74 On se propose de choisir entre les deux contrats d'embauche suivant commençant le 1er janvier 1986 :
Contrat 1 : le salaire mensuel est 100 000 F pendant la première année et augmente de 15 000 F au 1er janvier de chaque année.
Contrat 2 : le salaire mensuel est 100 000 F pendant la première année et augmente de 12 % au 1er janvier de chaque année.
a) Etablir la formule donnant la valeur du salaire mensuel au cours de la n^{ième} année ($n\in\mathbb{N}^*$) soit : $M_1(n)$ pour le contrat 1, $M_2(n)$ pour le contrat 2.
b) Que vaut le salaire mensuel en 1998 pour chacun des contrats ?

75 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison strictement positive et de premier terme u_1 égal à $\frac{1}{2}$ et telle que : $81u_{10} = 16u_6$.
Trouver la raison de cette suite.

76 On prévoit que le loyer annuel d'un appartement augmente de 6 % chaque année ; on désigne par f(0) le loyer annuel payé en 1986 f(1) le loyer payable en 1987, f(n) le loyer annuel payable en 1986 + n.
1) Exprimer f(n+1) en fonction de f(n) puis f(n) en fonction de n et de f(0).
2) On suppose que f(0) = 300 000 CFA ; quel sera le loyer en 1990 ?

77 a) Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, cependant que b, a, c sont, dans ce nouvel ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.
Sachant que abc = -512, déterminer les trois nombres réels distincts a, b et c. Donner la raison r de la suite arithmétique et la raison q de la suite géométrique.

b) Soit u la suite définie par
$u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n$
Exprimer u_n en fonction de n. Déterminer l'entier p tel que
$|u_{p-1}| < 10^4 < |u_p|$

78 Trouver deux nombres réels a et b tels que a, a+4b, 5a+2b forment une progression arithmétique et que b+3, 3a+1, 6a+b forment une progression géométrique. Préciser les progressions ainsi obtenues :

79 Déterminer les nombres réels a, b et c, tels que $a+b+c = \frac{19}{2}$ et 2a, b et c−5 sont, dans cet ordre, les termes d'une progression arithmétique dont la somme est 9. Vérifier que (a, b, c) est une progression géométrique.

80 Soient u et v les deux suites définies par :

$$\left(u_1 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}\right)$$
$$\left(v_1 = 12, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}\right)$$

1) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n - u_n$
Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites u, v et w.
Démontrer que la suite w est une suite géométrique.
Exprimer w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

2) Démontrer que u est une suite croissante et v une suite décroissante.
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que t est une suite constante.

5 Suites numériques convergence - divergence

I. SUITES NUMÉRIQUES DE LIMITE NULLE.
II. SUITES CONVERGENTES. SUITES DIVERGENTES.
III. APPROXIMATIONS DE NOMBRES RÉELS.

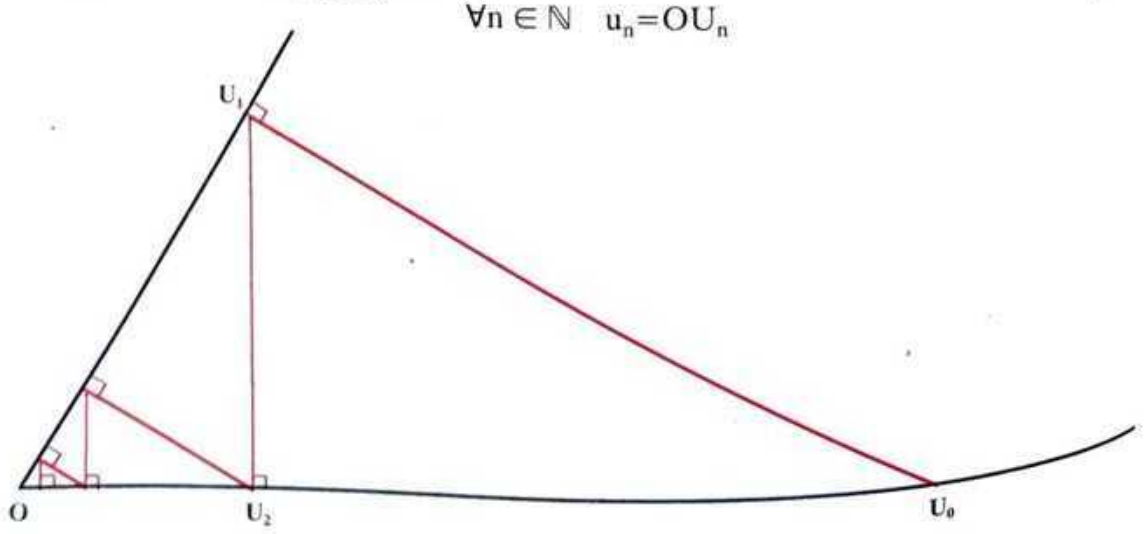
1 Suites numériques de limite nulle

1) Exemples

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites d'origine O telles que mes (o) $(\widehat{Ox, Oy})=60°$.

Soit U_0 le point de [Ox) tel que $OU_0=10$.
Soit U_1 le projeté orthogonal de U_0 sur [Oy).
Soit U_2 le projeté orthogonal de U_1 sur [Ox)...
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n=OU_n$$



Question 1

Placez les points U_1, U_2... U_6.
Pouvez-vous placer le point U_{10} ? Pourquoi ?
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on indiquera le premier terme et la raison.
Compléter le tableau suivant :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}

En utilisant une calculatrice trouver u_{30}. Que remarquez-vous ?

Question 2

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{R}^*$ $v_n = \dfrac{1+2(-1)^n}{4n}$.
Compléter le tableau suivant :

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}

Après avoir convenablement gradué un axe, placer tous les termes de la suite v que l'on peut. Que remarque-t-on ?

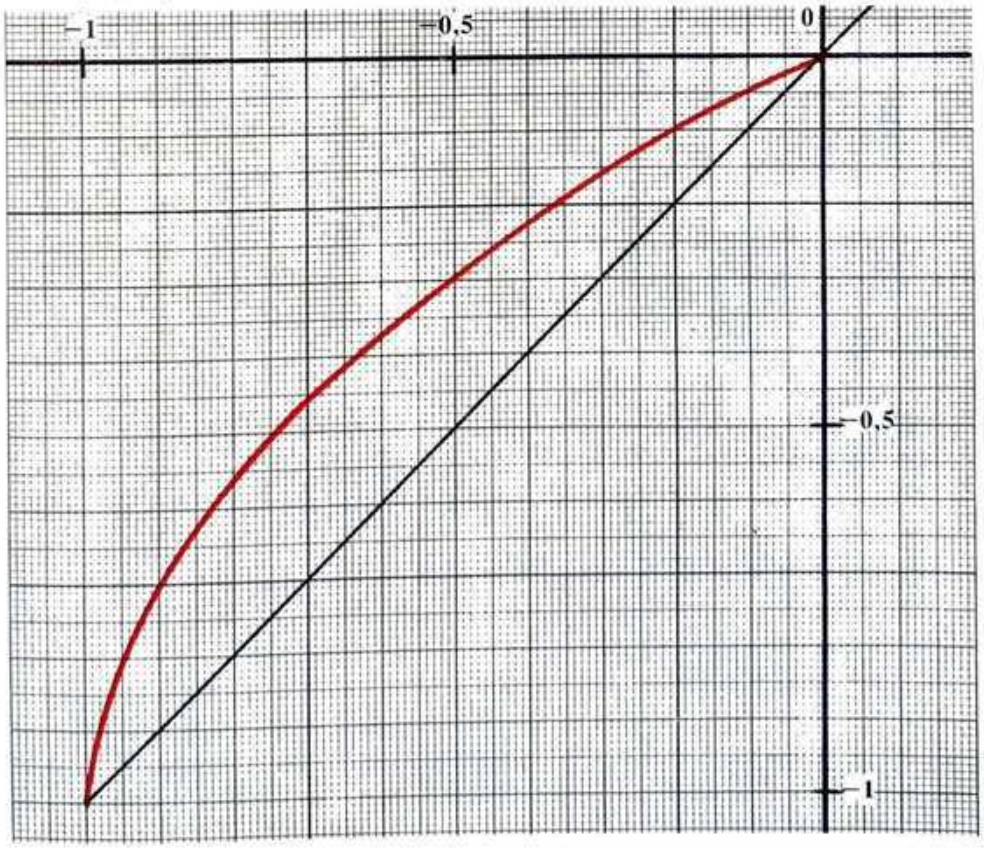
Question 3

Soit w la suite définie par :

$$w_0 = -\frac{4}{5} \quad et \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \qquad w_{n+1}=\sqrt{w_n+1}-1.$$

Soit g : $[-1,0] \to [-1,0]$
$x \mapsto \sqrt{x+1}-1$

Utiliser la courbe représentative de g, donnée ci-dessous, pour placer sur l'axe $(O, \vec{i})$ tous les termes de la suite w possibles. Que remarque-t-on ?



Question 4

Soit $(z_n)_{n>0}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad z_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Calculer les dix premiers termes de cette suite.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (n>100 \Rightarrow |z_n|<0{,}0001)$.
Trouver un entier naturel B tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (n>B \Rightarrow |z_n|<10^{-6})$
Trouver un entier naturel C tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (n>C \Rightarrow |z_n|<10^{-3})$.

Soit p un entier naturel, montrons que :

$$\exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow |z_n| < 10^{-p})$$

On cherche un entier naturel A tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(n>A \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < 10^{-p}\right)$$

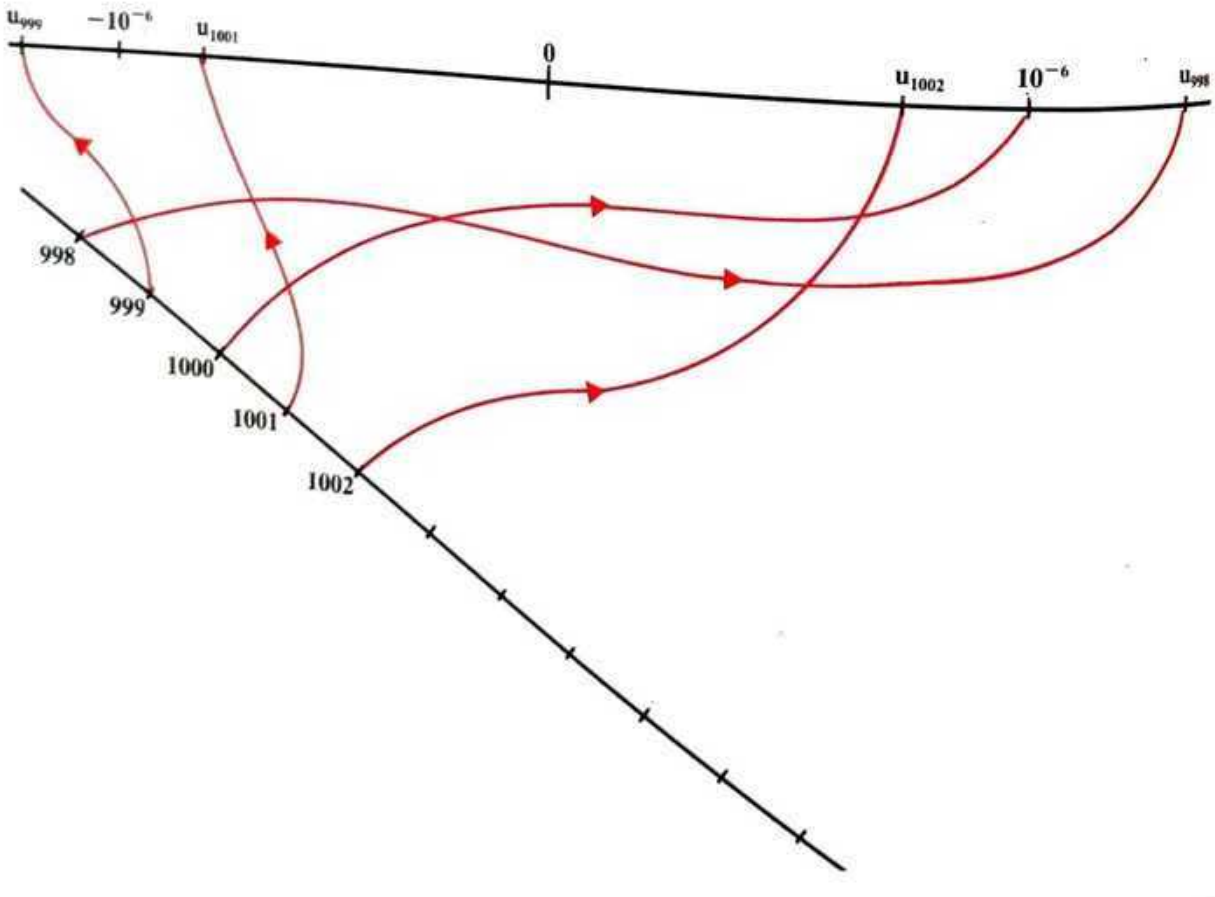
$$\text{Or : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < 10^{-p} \Leftrightarrow n^2>10^p\right) \quad \text{car} \quad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

Il suffit donc de choisir A égal à $E(\sqrt{10^p})$ ou tout entier naturel supérieur à A.
car : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow n > \sqrt{10^p})$
et : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(n>\sqrt{10^p} \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < 10^{-p}\right)$
donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow |z_n| < 10^{-p})$

On a ainsi montré que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow |z_n| < 10^{-p})$$

Ainsi pour p=6 (Question 4) le résultat obtenu ($A=10^3$) s'interprète de la façon suivante : tous les termes d'indice supérieur à 1 000 appartiennent à l'intervalle $]-10^{-6};10^{-6}[$.



On vient ainsi de voir que tout intervalle de la forme $]-10^{-p};10^{-p}[$ où p est un entier naturel, contient tous les z_n à partir du rang A, c'est-à-dire, tous les termes sauf un nombre fini d'entre eux. Montrons que cette propriété est vraie pour tout intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$ où ε est un nombre réel strictement positif mais pas nécessairement de la forme 10^{-p}.

Soit ε un nombre réel strictement positif, montrons que :

$$\exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(n>A \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon\right)$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

et : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

or : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}\right)$

On a ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow |z_n|<2)$$

il suffit en effet de choisir A égal à $E\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$ ou tout entier naturel supérieur ou égal à A.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite numérique, on dit que la suite u **converge vers zéro** ou est de **limite nulle** si et seulement si pour tout nombre réel strictement positif ε il existe un entier naturel A tel que tous les termes d'indice strictement supérieur à A sont dans l'intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$ et l'on écrit alors lim u=0 ou lim u_n=0.

Remarques

* La suite u étant définie sur I_a, lim u=0 signifie que :

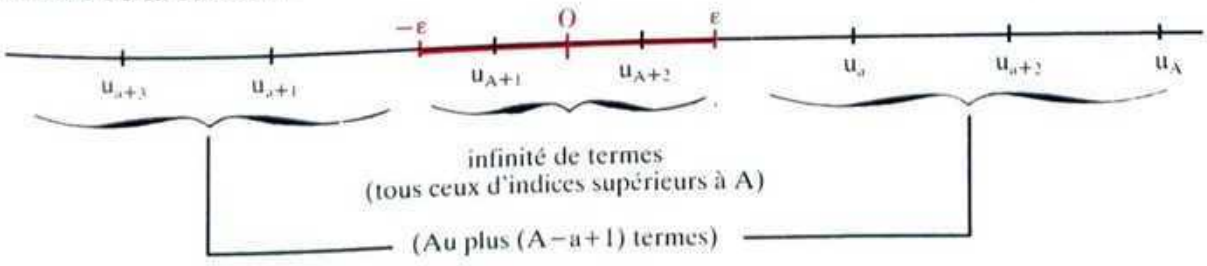
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in I_a \quad (n>A \Rightarrow |u_n| <\varepsilon)$$

* L'inégalité $|u_n|<\varepsilon$ peut s'écrire de l'une des quatre autres façons suivantes :

$$d(u_n,0)<\varepsilon; \quad -\varepsilon<u_n<\varepsilon; \quad u_n\in]-\varepsilon;\varepsilon[; \quad u_n\in I(0,\varepsilon)$$

* Comme pour tout nombre réel b on a : $||b||=|b|$, la suite u converge vers zéro si et seulement si la suite |u| converge vers zéro.

* lim u=0 signifie que : tout intervalle ouvert de centre 0 et de rayon ε contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux, c'est-à-dire que le complémentaire de **tout** intervalle de la forme $]-\varepsilon;\varepsilon[$ $(\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*)$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite u :



* Soit k un nombre réel et u une suite. Si la suite u converge vers zéro, alors la suite k·u converge aussi vers zéro.

Méthode pratique

1/ Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq a}$ converge vers zéro.

Pour tout nombre réel strictement positif ε on résout le système d'inconnue n :

$$n \in I_a \quad , \quad -\varepsilon < u_n < \varepsilon$$

et lim u=0 si et seulement si l'ensemble des solutions S_ε de ce système est de la forme :

$$S_\varepsilon =]A;\rightarrow[\cap I_a$$

Ainsi, par exemple, montrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers zéro.

Soit ε un nombre réel strictement positif.

le système : $n\in\mathbb{N}^* \quad , \quad -2 < \frac{1}{n} < 2$

est équivalent à : $n\in\mathbb{N}^* \quad , \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad$ car $(\frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+^*)$

qui est équivalent à : $n\in\mathbb{N}^* \quad , \quad \frac{1}{\varepsilon} < n$

donc : $S_\varepsilon = \left]\frac{1}{\varepsilon} ; \rightarrow \right[\cap \mathbb{N}^*$

On a ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exists A \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n>A \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon)$$

Il suffit, en effet, de choisir A égal à $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ou tout entier naturel supérieur à A.

On retiendra le résultat suivant :

Théorème

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ appelée suite **harmonique** converge vers 0, c'est-à-dire que $\lim \frac{1}{n} = 0$.

2/ Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq a}$ ne converge pas vers zéro.

Il faut montrer que :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \qquad \forall A \in \mathbb{N} \qquad \exists n \in I_a \quad (n>A \text{ et } |u_n| \geq \varepsilon)$$

ou encore montrer qu'il existe au moins un intervalle de centre 0 et de rayon ε dont le complémentaire contient une infinité de termes de la suite u.

Ainsi, par exemple, montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ ne converge pas vers zéro.

En effet l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ ne contient que deux termes : u_0 et u_1 ; car les systèmes ci-dessous sont équivalents :

$$n \in \mathbb{N} \quad , \quad -\frac{1}{4} < \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{4}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad , \quad -\frac{3}{4} < -\frac{1}{n+2} < -\frac{1}{4}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{3}{4} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{4}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{4}{3} < n+2 < 4$$

$$n \in \mathbb{N} \quad , \quad -\frac{2}{3} < n < 2$$

Les seules valeurs de n qui conviennent sont : 0 et 1.



De même, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n=2^n$ ne converge pas vers zéro car tous ses termes sont supérieurs à 1.

Exercice 1

En utilisant une calculatrice, étudier si les suites ci-dessous convergent vers zéro :

1/ (0,2;0,04;0,008;0,0016;.....)

2/ $w_0=2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1}=\sqrt{w_n}$

3/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n=3n+4$

4/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n=n^2$

Exercice 2

Démontrer que les suites ci-dessous convergent vers zéro.

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n=\frac{5}{n+1}$

2/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n=\frac{1}{n^2}$

3/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$

4/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n=\frac{6}{2n+5}$

5/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 3

Démontrer que les suites ci-dessous ne convergent pas vers zéro.

1/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n + 4$

2/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

3/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$

4/ Si n est pair : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Si n est impair : $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$

5/ Si n est pair : $u_n = n$

Si n est impair : $u_n = \dfrac{1}{n}$

3) Comparaison de deux suites

Question 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n^2}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$

En déduire, en utilisant le fait que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ *, que l'on a :* $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Plus généralement, soient u et v deux suites définies sur I_a telles que :

$$\begin{cases} (1) \ \forall n \in I_a \quad |u_n| \leqslant v_n \\ (2) \ \lim v = 0 \end{cases}$$

On notera que (1) impose à v d'être une suite positive.
Montrons que : $\lim u_n = 0$.
Soit un nombre réel strictement positif ε, puisque $\lim v_n = 0$, il existe un nombre entier naturel A tel que :

$\forall n \in I_a \quad (n > A \Rightarrow |v_n| < \varepsilon)$
or on a : $\forall n \in I_a \quad |u_n| \leqslant v_n$
d'où : $\forall n \in I_a \quad (n > A \Rightarrow |u_n| < \varepsilon)$
donc : $\lim u_n = 0$.

Théorème

Soit $(v_n)_{n\in I_a}$ une suite de limite nulle.

Soit $(u_n)_{n\in I_a}$ une suite telle que :

$$\forall n \in I_a \qquad |u_n| \leqslant v_n$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in I_a}$ converge vers zéro.

Méthode pratique

Pour montrer qu'une suite positive u converge vers zéro on peut, en application du théorème précédent, exhiber une suite v, plus grande que la suite |u| et qui converge vers zéro.
Ainsi, par exemple, montrons que la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{3n+2}$$

converge vers zéro.

On a : • $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$

• $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{3n+2} \leqslant \frac{1}{n}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3n+2 \geqslant n$)

• $\lim \frac{1}{n} = 0$

donc : $\lim \frac{1}{3n+2} = 0$.

Il sera donc très utile de connaître quelques suites v positives et de limite nulle car elles permettent de déduire, en appliquant le théorème précédent, la convergence vers zéro de suites dont la valeur absolue est plus petite que v. De telles suites sont appelées **suites de références**, nous allons en étudier quelques-unes :
– les suites des inverses des puissances :

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1} ; \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1} ; \ldots \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geqslant 1} \text{ où } p \in \mathbb{N}^*$$

– les suites géométriques de la forme :

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} ; \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} ; \ldots \left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ où } k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

Question 6 *En utilisant le théorème précédent et le fait que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^p \geqslant n$$

montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \lim \frac{1}{n^p} = 0$

Question 7 *En utilisant le théorème précédent et le fait que :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$

montrer : $\lim \frac{1}{2^n} = 0$.

En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad (k \geqslant 2 \Rightarrow \lim \frac{1}{k^n} = 0)$

On retiendra que toutes les suites ci-dessous sont positives et convergent vers zéro :

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$; $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$; plus généralement : $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geqslant 1}$ où $p \in \mathbb{N}^*$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$; $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geqslant 0}$; plus généralement : $\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $k \in \mathbb{N} - \{0;1\}$

Exercice 4

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 < \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n^2+n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers zéro.

Représenter sur un même graphique les sept premiers termes des suites $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 5

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 10, on a :

$$0 \leqslant \frac{n-10}{n^2-8n} < \frac{1}{n}$$

En déduire que la suite $\left(\frac{n-10}{n^2-8n}\right)_{n\geqslant 10}$ converge vers zéro.

Exercice 6

Montrer que, pour tout nombre réel x on a : $2x^2-4x+4\geqslant 2$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$2^n < (2n^2-4n+4)^n$$

La suite $\left(\frac{1}{(2n^2-4n+4)^n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle vers zéro ? Pourquoi ?

Exercice 7

Montrer que chacune des suites ci-dessous converge vers zéro.

1/ $\left(\frac{2\cos n}{3^n}\right)_{n\geqslant 0}$ 2/ $\left(\frac{\sin^2 n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$

3/ $\left(\frac{0,5}{n^3}\right)_{n\geqslant 1}$ 4/ $\left(\frac{n-6}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$

2 Suites convergentes - Suites divergentes

1) Exemples et définition

Question 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

Montrer que la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 2$, *converge vers zéro.*

Question 9

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad x_{n+1}=1-\frac{x_n}{2}$.

Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites (D) et (D') d'équations respectives :

$y=1-\frac{x}{2}$ et $y-x=0$. Placer les points $P_1 \ldots P_5$ de (D) d'abscisses respectives $x_0, x_1 \ldots x_4$.

Vers quel point L la « suite » des points $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle s'approcher ?

Calculer les coordonnées de L. En déduire le nombre réel vers lequel la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble « converger ».

Montrer, par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad x_n=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad \left|x_n-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{2^n}$. En déduire que la suite v définie par $v_n=x_n-\frac{2}{3}$, converge vers zéro.

Définitions

Soit $(u_n)_{n\in I_a}$ une suite numérique et l un nombre réel.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I_a}$ **converge vers le nombre réel** l ou a pour **limite le nombre réel** l si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in I_a}$ où $v_n=u_n-l$ converge vers zéro et l'on écrit $\lim u=l$ ou $\lim u_n=l$.

On dit qu'une suite u est **convergente** s'il existe un nombre réel l tel que $\lim u=l$.

On admet :

Théorème

Si une suite est convergente et de limite l alors cette limite est unique.

Remarque

Dire que $\lim u=l$ c'est dire que, pout tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang.
Donc, si $\lim u=l$, pour tout nombre réel strictement positif ε, l'intervalle $]l-\varepsilon.l+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite.

Méthode pratique

Pour montrer qu'une suite u est convergente.

1/ Si la limite l est donnée, on montre que la suite v telle que, pour tout $n\in I_a$, $v_n=u_n-l$, est convergente et de limite nulle :

– soit en utilisant la définition,
– soit en utilisant une suite de référence.

Ainsi, par exemple, montrons que la suite u définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{2n+1}{n}$

est convergente et de limite 2.

Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_n - 2$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \dfrac{1}{n}$.

Donc : lim v=0 , donc : lim u=2.

2/ Si la limite l n'est pas donnée mais que l'on est capable par un moyen quelconque tel que l'utilisation d'une calculatrice ou d'une représentation graphique de pressentir la valeur possible de l, on applique alors la méthode ci-dessus.

Ainsi, par exemple, montrons que la suite u définie par :

$$u_a = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_{n-1} + \frac{3}{10^n}$$

est convergente.

Calculons les premiers termes de cette suite :

$u_0=0$; $u_1=0{,}3$; $u_2=0{,}33$; $u_3=0{,}333$; $u_4=0{,}3333$; $u_5=0{,}33333$.

La suite u semble donc être convergente et de limite $\dfrac{1}{3}$.

Exprimons u_n en fonction de n.

On a : $u_0 = 0$

$u_1 = \dfrac{3}{10}$

$u_2 = u_1 + \dfrac{3}{10^2}$

$u_3 = u_2 + \dfrac{3}{10^3}$

$\vdots$

$u_{n-1} = u_{n-2} + \dfrac{3}{10^{n-1}}$

$u_n = u_{n-1} + \dfrac{3}{10^n}$

d'où : $u_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \ldots + \dfrac{3}{10^2}$ en additionnant membres à membres ces (n+1) égalités. Il apparaît que u_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\dfrac{3}{10}$ et de raison $\dfrac{1}{10}$

donc : $u_n = \dfrac{3}{10} \dfrac{1 - \dfrac{1}{10^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{10}}$

donc : $u_n = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right]$.

Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{10^n}$

ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, en valeur absolue par la suite de référence de limite nulle : $\left(\frac{1}{10^n}\right)_{n\geq 0}$

donc : la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers zéro.

donc : la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente de limite $\frac{1}{3}$.

Exercice 8 Montrer que chacune des suites ci-dessous est convergente et trouver sa limite :

1/ $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\geq 1}$

2/ $\left(5 + \frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$

3/ $\left(\frac{10\cdot 3^n + 5}{3^{n+1}}\right)_{n\geq 0}$

4/ $\left(\frac{3n - 8}{n + 3}\right)_{n\geq 4}$

5/ $\left(\frac{6n^2+5}{2n^2+1}\right)_{n\geq 1}$

6/ $\left(\frac{\cos^2 n - 4n^2}{n^2}\right)_{n\geq 1}$

7/ $\left(\frac{1 + 3(-1)^n}{4n}\right)_{n\geq 1}$

8/ $\left(\frac{1 - 2^{n+3}}{2^n}\right)_{n\geq 0}$

Avant d'étudier comment montrer qu'une suite u n'est pas convergente, c'est-à-dire est divergente, précisons quelques propriétés que possède nécessairement une suite convergente (c'est-à-dire que si une suite u ne possède pas l'une de ces propriétés alors elle est divergente).
On en a déjà vu une, à savoir que si la suite u est convergente et de limite le nombre réel l, alors pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite.
Voyons-en une autre :

Question 10 *Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.*

Montrer que la suite v est convergente.
Montrer que la suite v est majorée par 4 et minorée par 1.

Plus généralement, montrons que toute suite convergente est bornée.
Soit $(u_n)_{n\geq a}$ une suite convergente de limite l.

On a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in I_a \quad (n>A \Rightarrow l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon)$

Choisissons $\varepsilon=1$, alors il existe un entier naturel B tel que :

$$\forall n \in I_a \quad (n>B \Rightarrow l-1 < u_n < l+1)$$

Posons $M=\max\{u_a, u_{a+1}, \dots u_{B-1}, u_B, l+1\}$
alors on a : (1) $\forall n \in I_a \quad u_n \leq M$.
De même, posons $m=\min\{u_a, u_{a+1}, \dots u_{B-1}, u_B, l-1\}$
alors on a : (2) $\forall n \in I_a \quad m \leq u_n$.

(1) et (2) nous permettent de déduire que u est bornée par m et M.

Théorème

Si une suite est convergente, alors elle est bornée.

Méthodes pratiques

1/ Pour montrer qu'un nombre réel l n'est pas limite de la suite.

Soient l un nombre réel et u une suite définie sur I_a. On a vu que si l est limite de la suite u, alors pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite. Donc, pour montrer que l n'est pas limite de u, il suffit de montrer qu'il existe un certain nombre réel ε strictement positif tel que l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite.

Ainsi, par exemple, montrons que 2 n'est pas limite de la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{n+5}{n}$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, cherchons quels sont les termes de la suite qui sont dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{3}{2} < \frac{n+5}{n} < \frac{5}{2}$$

est équivalente à : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{2} < \frac{5}{n} < \frac{3}{2}$

qui est équivalente à : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{10}{3} < n < 10.$

Donc les seuls termes de la suite dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[$ sont : u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 et u_9.

Puisque l'intervalle $\left]2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\right[$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite u, 2 n'est pas limite de la suite u.

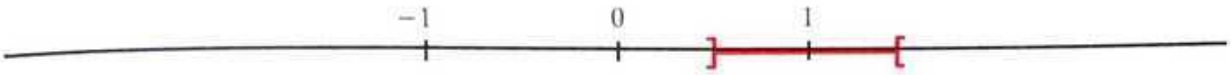
2/ Pour montrer qu'une suite n'est pas convergente.

a) Il suffit de montrer que, quel que soit le nombre réel l, l n'est pas limite de la suite.
Ainsi, montrons par exemple que la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n=(-1)^n$, n'est pas convergente.

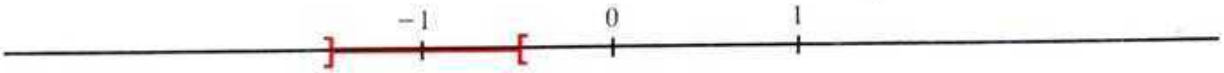
On sait déjà que 0 n'est pas limite, montrons que la suite u ne converge vers aucun nombre réel l, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel l, il existe un nombre réel strictement positif ε tel que le complémentaire de l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ contienne une infinité de termes de la suite u

• si l=1, le complémentaire de l'intervalle $\left]1-\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right[$ contient une infinité de termes :

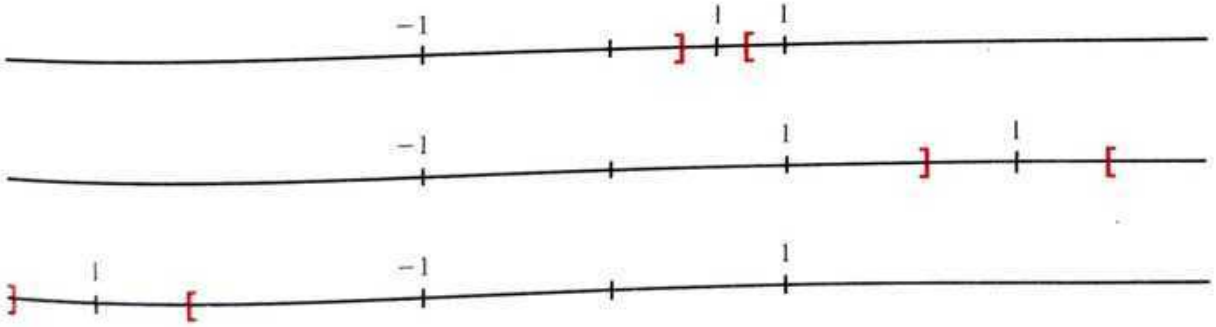
à savoir tous ceux d'indice impair (car égaux à -1).



• si l=−1, le complémentaire de l'intervalle $\left]-1-\frac{1}{2};-1+\frac{1}{2}\right[$ contient une infinité de termes à savoir toux ceux d'indice pair (car égaux à 1).



• si l≠1 et l≠−1, il est clair que l'intervalle $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ où $\varepsilon<\min(|l-1|, |l+1|)$, ne contenant ni 1 ni -1, ne contient aucun terme de la suite, et que donc son complémentaire en contient une infinité.



On a ainsi montré qu'aucun nombre réel n'est limite de la suite u, celle-ci est donc divergente.

b) Il suffit de montrer qu'elle n'est pas bornée.
Montrons par exemple que la suite $[u : n \mapsto 3n+5]$ n'est pas convergente en montrant qu'elle n'est pas bornée.
La suite u est minorée par 5 (car $n \geq 0$), montrons qu'elle n'est pas majorée, c'est-à-dire que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > M$$

Soit un nombre réel M, on cherche un entier naturel n tel que $n_n > M$.
or : $\forall n \in \mathbb{R} \quad u_n > M$
est équivalent à : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3n+5 > M$

ce qui est équivalent à : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad n > \dfrac{M-5}{3}$

Ainsi posant $A = E\left(\dfrac{M-5}{3}\right)$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [n > A \Rightarrow u_n > M]$$

La suite u n'est pas majorée par M et ceci pour tout nombre réel M donc la suite u est divergente.

Exercice 9 Démontrer que les suites ci-dessous ne sont pas convergentes :

1/ $((-1)^n \cdot n)_{n\geq 0}$

2/ $(-3n+1)_{n\geq 0}$

3/ $(n^3)_{n\geq 0}$

4/ Si n est pair alors $u_n = n$

Si n est impair alors $u_n = \dfrac{1}{n}$

5/ $(n^{(-1)^n})_{n\geq 1}$

6/ $(3+2\cdot(-1)^n)_{n\geq 1}$

7/ $\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)_{n\geq 0}$

Exercice 10 Trouver une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ divergente telle que $(|u_n|)_{n\geq 0}$ converge vers 2.

2) Opérations sur les suites convergentes

Question 11 *On considère les suites u et v définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = 3 + \frac{1}{n}$$

Etudier la convergence des suites u et v. Donner le terme général de la suite w=u+v. Montrer que la suite w est convergente et trouver sa limite.

Sur cet exemple, on constate que, ayant l=lim u et l'=lim v alors en notant w=u+v, on a : lim w=l+l'. On admettra les théorèmes suivants :

Théorèmes

Soient $(u_n)_{n\geq a}$ et $(v_n)_{n\geq a}$ deux suites convergentes telles que lim u=l et lim v=l'.

1) la suite (u+v) est convergente et de limite l+l'.
2) la suite (uv) est convergente et de limite ll'.
3) pour tout nombre réel k, la limite (ku) est convergente et de limite kl.
4) si $l\neq 0$ et $[\forall n \in I_a \quad u_n \neq 0]$ alors la suite $\left(\dfrac{1}{u}\right)$ est convergente et de limite $\dfrac{1}{l}$.
5) si $l\neq 0$ et $[\forall n \in I_a \quad u_n \neq 0]$ alors la suite $\left(\dfrac{v}{u}\right)$ est convergente et de limite $\dfrac{l'}{l}$.

Remarque

La somme de deux suites divergentes peut être convergente : par exemple les suites de terme général n et $-n$ divergent alors que leur somme converge vers 0.

Exercice 11

Montrer que chacune des suites ci-dessous est convergente et trouver sa limite

1/ $n \mapsto \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}$

2/ $n \mapsto \left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)$

3/ $n \mapsto \frac{3}{2 + \frac{1}{n^3}}$

4/ $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

5/ $n \mapsto \frac{3n + 1}{n + 2}$

6/ $n \mapsto \frac{2n + \sin n}{n}$

Exercice 12

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3u_{n+1}=u_n+4$.
Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n=u_n-2$.
Montrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire que la suite u est convergente et trouver sa limite.

3) Comparaison de suites et convergence

Question 12

Soient u, v et w les trois suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2 + \frac{1}{(\sqrt{5})^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = 2 + \frac{1}{2^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = 2 + \frac{1}{3^n}$$

Montrer que les suites v et w sont eonvergentes et de limite égale à 2.
Montrer que $w \leqslant u \leqslant v$.
Soit ε un nombre réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel A et un entier naturel B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow u_n \leqslant v_n < 2+\varepsilon]$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n>N \Rightarrow 2-\varepsilon < w_n \leqslant u_n]$$

En déduire qu'il existe un entier naturel C tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n>C \Rightarrow 2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon]$$

En déduire que la suite u est convergente et de limite 2.

Plus généralement, soient v et w deux suites convergentes et de même limite l, et u une suite telle que $v \leqslant u \leqslant w$. Montrons que la suite u est convergente et de limite l.
Soit ε un nombre réel strictement positif, puisque les suites v et w convergent vers l, on a :

$$\exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow l-\varepsilon<v_n<l+\varepsilon]$$
$$\exists B \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n>B \Rightarrow l-\varepsilon<w_n<l+\varepsilon]$$

Soit C=max (A,B), pour tout entier naturel p tel que p>C on a :

$$l-\varepsilon < v_p \leqslant u_p \leqslant w_p < l+\varepsilon$$

donc : $\forall p \in \mathbb{N} \quad [p>C \Rightarrow l-\varepsilon<u_p<l+\varepsilon]$

On a ainsi montré que u est convergente et de limite l ; d'où le résultat :

Théorème

Soient u, v et w trois suites telles que $v \leqslant u \leqslant w$, si v et w sont convergentes et de même limite l, alors la suite u est convergente et a aussi pour limite l.

Question 13 *Soit u une suite géométrique définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = q^n$$

où q est un nombre réel non nul. Soit $k=E\left(\left|\frac{1}{q}\right|\right)$, *montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{(k+1)^n} \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{k^n}$$

Montrer que si $|q|$ *est inférieure ou égale à* $\frac{1}{2}$ *alors la suite u converge vers zéro. En déduire que toute suite géométrique de raison inférieure en valeur absolue à* $\frac{1}{2}$ *est convergente et de limite nulle.*

Plus généralement, on admettra le théorème suivant :

Théorème

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q|<1$ est convergente et de limite nulle.

Exercice 13 Soient q un nombre réel de valeur absolue strictement plus petite que 1, a un nombre réel et u la suite géométrique de premier terme u_0 égal à a et de raison q. Donner S_n égal à $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n

Démontrer que la suite S est convergente et de limite $\frac{a}{1-q}$.

Exercice 14 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$u_1=13$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1.$

Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n=u_n-3$.
Montrer que la suite v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. En déduire que la suite u est convergente et trouver sa limite.

Exercice 15 Montrer que la suite $\left(\frac{5}{6}+3\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ est convergente et trouver sa limite.

4) Suites divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$

Question 14 *Calculer les 10 premiers termes de chacune des suites ci-dessous :*

1/ $n \mapsto 5\cdot 3^n$
2/ $n \mapsto -3\cdot 2^n$
3/ $n \mapsto -5n+3$
4/ $n \mapsto 2n-5$
5/ $n \mapsto 10^n$

On remarque que, pour ces cinq suites, les termes deviennent « très grands » en valeur absolue. Précisons cette notion.

Question 15 *Pour chacune des suites u ci-dessous, trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que* $|u_n|>10^6$.

1/ $n \mapsto 2n-5$
2/ $n \mapsto -5n+3$
3/ $n \mapsto 10^n$
4/ $n \mapsto -n^2$
5/ $n \mapsto \sqrt{n}$

Montrons plus généralement que la suite $[u : n \mapsto 2n-5]$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+ \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow u_n>M].$$

Soit M un nombre réel positif, on cherche un entier naturel A tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow u_n>M]$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n>A \Rightarrow n>\frac{M+5}{2}\right]$$

Il suffit donc de prendre A égal à $E\left(\frac{M+5}{2}\right)$.

On a ainsi montré que, pout tout nombre réel positif M, il existe un entier naturel A tel que tous les termes de la suite u, d'indice strictement supérieur à A, soient strictement supérieurs à M.

On dit que la suite u « **diverge vers** $+\infty$ » où le symbole « $+\infty$ » se lit « **plus l'infini** ».

De même, montrons que la suite $[u : n \mapsto -5n+3]$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall m \in \mathbb{R}_- \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow u_n<m].$$

Soit m un nombre réel négatif, on cherche un entier naturel A tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [n>A \Rightarrow u_n<m]$$

ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n>A \Rightarrow n>\frac{3-m}{5}\right]$$

Il suffit donc de prendre A égal à $E\left(\frac{3-m}{5}\right)$ car $m \in \mathbb{R}_-$ donc $\frac{3-m}{5} > 0$.

On a ainsi montré que, pour tout nombre réel négatif m, il existe un entier naturel A tel que tous les termes de la suite u, d'indice strictement supérieur à A, soient strictement inférieurs à m. On dit que la suite u « **diverge vers** $-\infty$ » où le symbole « $-\infty$ » se lit « **moins l'infini** ».

Exercice 16

Soient u et v les deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -8n + 3 \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Montrer que ces deux suites sont décroissantes, que l'une converge et que l'autre diverge vers $-\infty$

Trouver deux suites croissantes l'une divergente l'autre convergente.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants trouver deux suites u et v vérifiant les conditions imposées.

1/ u est convergente de limite zéro, v diverge vers $+\infty$, uv converge vers zéro

2/ u est convergente de limite zéro, v diverge vers $+\infty$, uv diverge vers $-\infty$

3/ u diverge vers $-\infty$, v diverge vers $+\infty$, $\frac{u}{v}$ est convergente de limite -1

4/ u et v convergent vers zéro, $\frac{u}{v}$ vers $+\infty$

Remarque

Sur une calculatrice on peut remarquer que les suites $[n \mapsto 5.3^n]$ et $[n \mapsto -3.2^n]$ examinées dans la question 14, divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$, mais actuellement on ne peut pas trouver l'entier A comme ci-dessus. On démontrera, en classe de terminale, ce résultat plus général :

Toute suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 diverge vers $+\infty$ si le premier terme est positif, vers $-\infty$ si le premier terme est négatif.

3 Approximations de nombres réels

On rappelle (classe de quatrième) que tout nombre réel possède une écriture décimale propre :

- limitée s'il est décimal (1,31 ; 213,427 ; ...)
- illimitée périodique s'il est rationnel $\left(\frac{1}{3} ; 3 ; \frac{3}{7}, \ldots\right)$

– illimitée non périodique s'il n'est pas rationnel.
Il résulte de cela qu'un nombre réel non décimal ne pourra être connu que par une certaine propriété le caractérisant mais non par son écriture décimale. La question se pose alors de trouver un encadrement décimal de ce nombre réel et pour ce faire on va utiliser des suites convergeant vers ce nombre réel.

1) Développement décimal illimité périodique d'un nombre rationnel

On a déjà vu (chapitre IV. Question 1) que pour obtenir un encadrement décimal d'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$) il suffit d'effectuer la division de p par q pour obtenir les suites u et v des approximations décimales d'ordre n par défaut et par excès de $\frac{p}{q}$.

Ainsi, par exemple, au nombre rationnel $\frac{5}{3}$ on associe les deux suites u et v telles que :

$u_0 = 1$ $\quad v_0 = 2$
$u_1 = 1{,}6$ $\quad v_1 = 1{,}7$
$u_2 = 1{,}66$ $\quad v_2 = 1{,}67$
$u_3 = 1{,}666$ $\quad v_3 = 1{,}667$

Etudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a : $u_0 = 1$
$u_1 = 1 + 6.10^{-1}$
$u_2 = 1 + 6.10^{-1} + 6.10^{-2}$
$u_3 = 1 + 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + 6.10^{-3}$
.
.
.
$u_n = 1 + 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + \ldots + 6.10^{-n}$

soit : $u_n = 1 + \frac{6}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right]$

En utilisant l'expression de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$ on obtient :

$$u_n = 1 + \frac{6}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

d'où : $\lim u = 1 + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$ (car $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$ donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ est convergente de limite nulle)

d'où : $\lim u = \frac{5}{3}$

Cherchons une incertitude, associée à la valeur approchée $\frac{5}{3}$ du terme d'indice n la suite u :

on a : $u_n = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

donc : $\frac{5}{3} - u_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10^n}$

donc : $\left|\frac{5}{3} - u_n\right| < \frac{1}{10^n}$

Question 16 *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$*

En déduire que la suite v est convergente, quelle est sa limite ?

Remarques

Les suites u et v vérifient les conditions suivantes :
1/ u est croissante et v est décroissante.
2/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$.
3/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$
4/ u et v sont convergentes, de même limite : $\frac{5}{3}$
On dit que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 18 Trouver le développement décimal illimité périodique des nombres rationnels suivants :

$$\frac{22}{7} ; \frac{4}{9} ; \frac{1}{2} ; \frac{26}{99}$$

Exercice 19 Trouver les nombres rationnels représentés par chacune des écritures ci-dessous :
1,2419999...
0,3333...
2,16161616...

Plus généralement on admettra que :
Un nombre réel est un nombre rationnel si et seulement si son écriture décimale propre est périodique à partir d'un certain rang.

2) Existence de nombres réels non rationnels

L'application du théorème de Pythagore à un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont comme longueur 1 montre qu'il existe un nombre réel strictement positif dont le carré est égal à 2, on le note $\sqrt{2}$.
Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Pour cela supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel dont l'écriture sous forme de fraction irréductible est $\frac{p}{q}$ (c'est-à-dire telle que $(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+^*$ et pgcd $(p, q)=1$)

On a : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

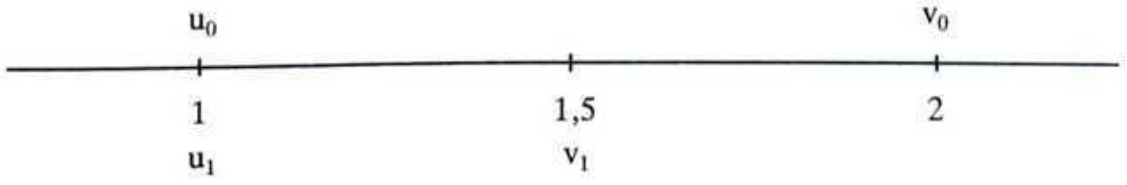
donc : $2 = \frac{p^2}{q^2}$

donc : $2q^2 = p^2$
Soit 2^a (avec $a \in \mathbb{N}$) la plus grande puissance de 2 divisant q, donc $q = 2^a q'$ avec q' impair.
Soit 2^b (avec $b \in \mathbb{N}$) la plus grande puissance de 2 divisant p, donc $p = 2^b p'$ avec p' impair.
L'égalité $2q^2 = p^2$ est donc équivalente à : $2^{a+1}q'^2 = 2^{2b}p'^2$ et comme p' et q' sont impairs il en est de même de leur carré. Il en résulte que si A est l'entier naturel égal à la fois à $2^{a+1}q'^2$ et $2^{2b}p'^2$ alors la plus grande puissance de 2 qui divise A est d'exposant à la fois pair (2b) et impair (2a+1). ce qui est absurde.
On a ainsi montré que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ; de même $\sqrt{3}$ et π sont des nombres irrationnels.
La question se pose alors de trouver un encadrement décimal de ces nombres irrationnels.

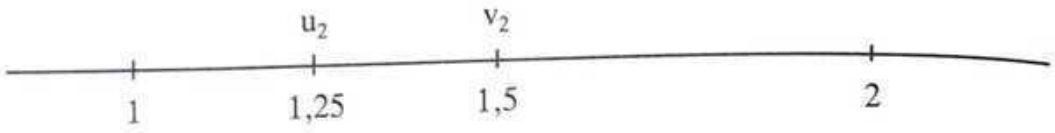
3) Méthode par dichotomie (partage en deux)

On va définir deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que :
1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < \sqrt{2} < v_n$
2. La suite $(v_n - u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers zéro.

On sait que deux nombres réels positifs sont dans le même ordre que leurs carrés.
donc : $1 < \sqrt{2} < 2$
Soit : $u_0 = 1 \quad , \quad v_0 = 2$
Partageons l'intervalle [1 ; 2] en [1 ; 1,5], [1,5 ; 2]
Comme $1{,}5^2 = 2{,}25$ on a : $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$
Soit : $u_1 = 1 \quad , \quad v_1 = 1{,}5$



Partageons l'intervalle [1 ; 1,5] en [1 ; 1,25], [1,25 ; 1,5]
Comme $1{,}25^2 = 1{,}5625$ on a : $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$
Soit : $u_2 = 1{,}25 \quad v_2 = 1{,}5$



Question 17 *Compléter le tableau suivant :*

n	u_n	v_n	$v_n - u_n$	$\frac{1}{2}(u_n+v_n)$	$\left[\frac{1}{2}(u_n+v_n)\right]^2$	$u_{n+1}<\sqrt{2}<v_{n+1}$
0	1	2	1	1,5	2,25	$1<\sqrt{2}<1{,}5$
1	1	1,5	0,5	1,25	2,5625	$1{,}25<\sqrt{2}<1{,}5$
2	1,25	1,5	0,25			
3						
. . .						
10						

En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\sqrt{2}$.

On construit ainsi deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que :

1/ u est croissante et majorée par $\sqrt{2}$
2/ v est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$
3/ $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n}$

Il résulte de cela que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \sqrt{2} - u_n \leqslant v_n - u_n$$

et comme la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ est convergente de limite 0

on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et de limite égale à $\sqrt{2}$.

Question 18 *Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et de limite égale à $\sqrt{2}$.*

Il apparaît que la méthode ci-dessus n'est pas « performante » ; en effet, pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3}, il faut trouver les termes u_n et v_n tels que :

$v_n - u_n = \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{10^3}$

Il faut donc effectuer les calculs jusqu'au terme d'indice p tel que : $2^p > 10^3$
Soit $p = 10$.

Question 19 *Montrer que, pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-5} il faut effectuer les calculs jusqu'aux termes d'indice 17.*

Exercice 20 En utilisant la méthode par dichotomie trouver un encadrement d'ordre 2 de chacun des nombres réels suivants :

$$\sqrt{3,2},\ \sqrt{0,628},\ \sqrt{51,2}$$

Étudions maintenant une méthode plus performante.

4) Méthode de Héron

Une approximation par excès de $\sqrt{2}$ est v_0 égal à 2 et, u_0 égal à $\frac{2}{v_0}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{2}$ (en effet $u_0 = 1$)

pour : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, on a un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1.

Soit $v_1 = \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{2}{v_0}\right)$, c'est-à-dire $v_1 = 1,5$

v_1 est une approximation par excès de $\sqrt{2}$, et u_1 égal à $\frac{2}{v_1}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{2}$ $\left(\text{car } u_1 = \frac{4}{3}\right)$

Montrons que, pour tout nombre réel a strictement positif le nombre réel b égal à $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ est une approximation par excès de $\sqrt{2}$ et le nombre réel $\frac{2}{b}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{2}$.

Etudions le signe du nombre réel $(b - \sqrt{2})$

$$\text{On a : } b - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) - \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2a}(a^2 - 2\sqrt{2}a + 2)$$

$$= \frac{1}{2a}(a - \sqrt{2})^2$$

Ce qui montre que le nombre réel $(b - \sqrt{2})$ est positif.

D'autre part, comme $b > \sqrt{2}$

$$\text{on a : } \frac{b}{\sqrt{2}} > 1$$

$$\text{d'où : } \frac{\sqrt{2}}{b} < 1$$

$$\text{donc : } \frac{2}{b} < \sqrt{2}$$

On a ainsi montré que b et $\frac{2}{b}$ sont respectivement une approximation par excès et une approximation par défaut de $\sqrt{2}$.
Ces deux valeurs nous permettent alors d'obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$.

Pour $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ l'amplitude est 1, pour $u_1 = \frac{4}{3}$ et $v_1 = 1{,}5$ l'amplitude est $\frac{1}{6}$.

Soient $v_2 = \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{2}{v_1}\right)$ et $u_2 = \frac{2}{v_2}$

on a : $v_2 = \frac{17}{12}$ et $u_2 = \frac{24}{17}$

d'où un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $\frac{1}{204}$.

Soient $v_3 = \frac{1}{2}\left(v_2 + \frac{2}{v_2}\right)$ et $u_3 = \frac{2}{v_3}$

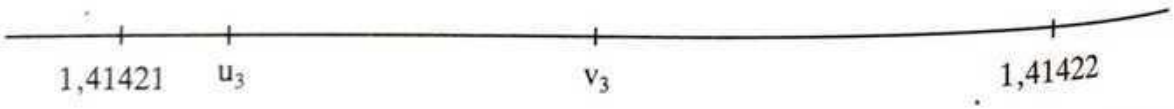
On a : $v_3 = \frac{577}{408}$ et $u_3 = \frac{816}{577}$

d'où un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude $\frac{1}{23546}$

Portons ces résultats dans un tableau.

n	u_n	v_n
0	1	2
1	1,33	1,5
2	1,411	1,416
3	1,414211438	1,414215686

Au bout du quatrième calcul on a donc obtenu un encadrement décimal d'ordre 5 de $\sqrt{2}$.



Il est donc clair que la méthode de Héron est plus performante que la méthode par dichotomie car elle permet d'obtenir plus rapidement un encadrement d'amplitude donnée.

La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ que nous avons construite est définie par :

$$v_0 = 2 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$$

Montrons que cette suite est convergente et de limite $\sqrt{2}$.
Soit n un entier naturel, on a vu que :

$$v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2v_n}\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2$$

donc : $v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(v_n - \sqrt{2}).\frac{v_n - \sqrt{2}}{v_n}$

or : $\frac{v_n - \sqrt{2}}{v_n} < 1$ car $0 < \sqrt{2}$ et $0 < v_n$

donc : $v_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(v_n - \sqrt{2})$

d'où : $v_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(v_{n-1} - \sqrt{2})$

$v_{n-1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(v_{n-2} - \sqrt{2})$

.
.
.

$v_1 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(v_0 - \sqrt{2})$

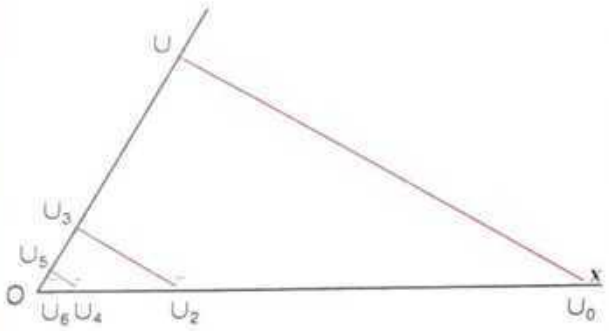
En multipliant membre à membre ces n inégalités à membres positifs on obtient :

$$0 < v_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}(v_0 - \sqrt{2})$$

donc $(v_n)_{n\geq 0}$ est convergente et de limite $\sqrt{2}$ car $\lim \frac{1}{2^n} = 0$.

Réponses aux questions

Q 1 :



On ne peut pas placer le point U_{10} car tous les points U_n sont, très rapidement (après U_6), proches de O.
On a :

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\cos(([\overrightarrow{Ox}), [\overrightarrow{Oy}])) = \cos 60° = \frac{OU_{n+1}}{OU_n}$

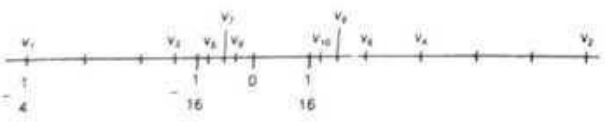
d'où $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, sa raison est $\frac{1}{2}$, son premier terme u_0 égal à 10.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
10	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{128}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{5}{512}$

Q 2 :

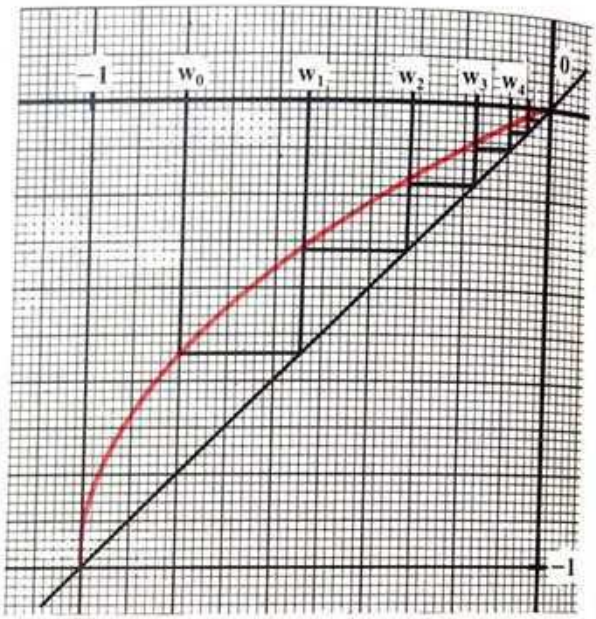
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{28}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{3}{40}$



Les v_n semblent « s'approcher » de 0.

Q 3 :

Il semble que, plus n est grand, plus w_n est proche de 0.



Q 4 :

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{49}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{81}$	$\frac{1}{100}$

- Soit n un entier naturel strictement supérieur à 100, on a :

$n^2 > 10\,000$ donc $\frac{1}{n^2} < 0{,}0001$

or $|z_n| = \frac{1}{n^2}$ d'où $|z_n| < 0{,}0001$

- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $|z_n| < 10^{-6}$ si et seulement si $\frac{1}{n^2} < 10^{-6}$, donc $|z_n| < 10^{-6}$ si et seulement si $n^2 > 10^{+6}$, pour cela il suffit de prendre $n > 10^{+3}$.
Ainsi $B = 10^{+3}$ est un entier naturel et vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [n > B \Rightarrow |z_n| < 10^{-6}]$

- pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $|z_n| < 10^{-3}$ si et seulement si $n^2 > 10^{+3}$; si $n > \sqrt{10^{+3}}$ alors $n^2 > 10^{+3}$.
Mais puisque C doit être un entier naturel, il suffit de prendre l'entier naturel C égal à $E(\sqrt{10^3})$ qui est tel que $C \leq \sqrt{10^3} < C+1$.
En effet si l'entier naturel n est tel que $n > C$, c'est-à-dire $n \geq C + 1$, alors on a $n > \sqrt{10^3}$, donc si $n > C$ alors $|z_n| < 10^{-3}$.

Q 5 :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$: $n \geqslant 1$ donc $n^2 \geqslant n$, donc $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$.

Puisque $\lim \frac{1}{n} = 0$, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel A tel que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\text{si} \quad n > A \text{ alors on a } \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$ car $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$;

or $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$ donc si $n > A$ alors on a $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$

c'est-à-dire $\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$. On a ainsi montré que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad [n > A \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon]$$

c'est-à-dire : $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

Q 6 :

Soit p un entier naturel non nul ; notons u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n^p}$$

on a : (1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > 0$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant \frac{1}{n}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^p \geqslant n$)

(3) $\lim \frac{1}{n} = 0$

donc $\lim u_n = 0$. On a ainsi montré que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \lim \frac{1}{n^p} = 0$$

Q 7 :

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; notons u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{k^n}$

on a (1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant 0$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad k^n \geqslant 2^n$)

(3) $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

donc $\lim u_n = 0$. On a ainsi montré que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad [k \geqslant 2 \Rightarrow \lim \frac{1}{k^n} = 0]$$

Q 8 :

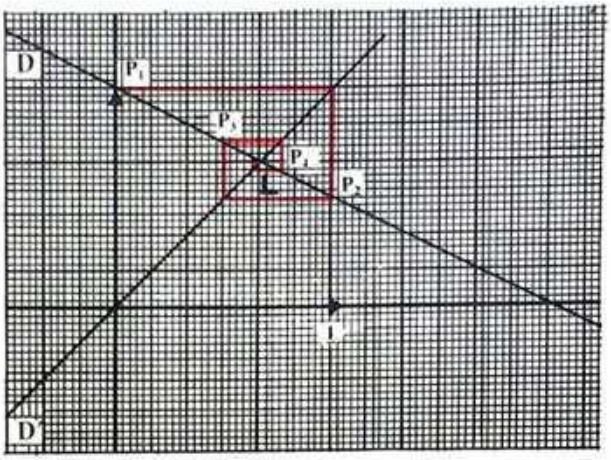
Soit n un entier naturel, $v_n = \left[2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right] - 2$

c'est-à-dire $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; on a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$ $|v_n| = \frac{1}{n+1}$

et, puisque $n < n+1$, $0 \leqslant |v_n| < \frac{1}{n}$.

La suite $|v|$ converge vers zéro car $\lim \frac{1}{n} = 0$. La suite v converge donc aussi vers zéro.

Q 9 :



La suite des points $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble s'approcher du point L tel que $(D) \cap (D') = \{L\}$. Les coordonnées x et y de L vérifient le système :

$$y = 1 - \frac{x}{2} \text{ et } y - x = 0$$

Les coordonnées de L sont donc $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble donc « converger » vers $\frac{2}{3}$.

Pour $n = 0$ on a $x_0 = 0$ et $\frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^0\right] = 0$:

la propriété est vérifiée.

Soit p un entier naturel tel que $x_p = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^p\right]$,

on a : $x_{p+1} = 1 - \frac{x_p}{2}$

donc : $x_{p+1} = 1 - \frac{1}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^p\right]$

c'est-à-dire : $x_{p+1} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^p$

c'est-à-dire : $x_{p+1} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right]$

Par récurrence on a ainsi montré que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

On en déduit, puisque $\left|\frac{2}{3}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \frac{2}{3}\frac{1}{2^n}$, que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\frac{1}{2^n}$

et, puisque $\frac{2}{3} < 1$, on a

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{2^n}$

Posant, pour tout entier naturel n, $v_n = x_n - \frac{2}{3}$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant |v_n| < \frac{1}{2^n}$

et comme la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

Q 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $u_n = v_n - 2$; on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = \frac{1}{n}$

donc lim u = 0, et la suite v est convergente de limite 2.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\quad 4 - v_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$

et puisque $n \geqslant 1$ on a : $\frac{1}{n} \leqslant 1$ donc

$\frac{(-1)^n}{n} \leqslant 1$ et $2 - \frac{(-1)^n}{n} \geqslant 1$

de ce fait, $4 - v_n \geqslant 0$: la suite v est majorée par 4.

De même, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$v_n - 1 = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ donc $v_n - 1 \geqslant 0$; la suite v est minorée par 1.

Q 11 :

Puisque pour tout nombre entier naturel non nul n on a $|u_n - 2| = \frac{1}{n}$, on a lim u = 2 ;

de même $|v_n - 3| = \frac{1}{n}$ donc lim v = 3.

Le terme général de la suite w est $w_n = u_n + v_n$ c'est-à-dire

$w_n = 5 + \frac{1 + (-1)^n}{n}$; donc

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |w_n - 5| \leqslant \frac{2}{n}$

Et comme la suite $\left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro, la suite w converge vers 5.

Q 12 :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n - 2| = \frac{1}{2^n}$, $|w_n - 2| = \frac{1}{3^n}$

Comme pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\lim \frac{1}{k^n} = 0$, on a lim v = 2 et lim w = 2

Puisque $2 < \sqrt{5} < 3$, on a, pour tout entier naturel n,

$2^n \leqslant (\sqrt{5})^n \leqslant 3^n$ donc $\frac{1}{3^n} \leqslant \frac{1}{(\sqrt{5})^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$,

d'où $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$

On a ainsi montré $w \leqslant u \leqslant v$.

Puisque v converge vers 2 on a :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists A \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$[n > A \Rightarrow |v_n - 2| < \varepsilon]$

Or pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant v_n$, de plus si $|v_n - 2| < \varepsilon$ alors $v_n < 2 + \varepsilon$, d'où le résultat.

De même l'existence de B vient de la convergence de la suite w vers 2 et du fait que si $|w_n - 2| < \varepsilon$ alors $2 - \varepsilon < w_n$.

En prenant pour valeur de C le plus grand des deux entiers naturels A et B on a, pour tout entier naturel n strictement supérieur à C,

$u_n \leqslant v_n < 2 + \varepsilon$ et $2 - \varepsilon < w_n \leqslant u_n$,

donc $2 - \varepsilon < u_n < 2 + \varepsilon$

On a ainsi montré que

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \quad \exists C \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$[n > C \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon]$

c'est-à-dire : u est convergente et de limite 2.

Q 13 :

$k = E\left(\frac{1}{|q|}\right) \Leftrightarrow k \leqslant \frac{1}{|q|} < k + 1$

$0 \leqslant |q| < 1$ donc $\frac{1}{|q|} > 1$ ainsi $k \geqslant 1$ et on a :

$k \leqslant \frac{1}{|q|} < k + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < |q| \leqslant \frac{1}{k}$

donc pour tout n de $\mathbb{N}$ $\quad \left(\frac{1}{k+1}\right)^n \leqslant |q|^n \leqslant \left(\frac{1}{k}\right)^n$

Ainsi, il existe un entier naturel k ($k \geqslant 1$) tel que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{(k+1)^n} \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{k^n}$

Comme, pour tout entier naturel k ($k \geqslant 2$) la suite $\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro, on en déduit que la suite $(|U_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro et par conséquent, que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro

Soit $(v_n)_{n\geqslant a}$ une suite géométrique de raison q, avec $|q| < 1$

Si q = 0, pour tout $n > a$ on a $v_n = 0$ d'où lim v = 0

Si $q \neq 0$, pour tout $n \geqslant a$ on a : $v_n = v_a q^{n-a}$ donc

$\forall n \in I_a \quad v_n = k q^n$

avec $k = \frac{v_a}{q^a}$. D'après ce qui précède, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite l égal à 0, donc la suite v est convergente et de limite kl c'est-à-dire zéro.

Q 14 :

n	5.3^n	-3.2^n	$-5n.3$	$2n-5$	10^n
0	5	−3	3	−5	1
1	15	−6	−2	−3	10
2	45	−12	−7	−1	100
3	135	−24	−12	1	1000
4	405	−48	−17	3	10000
5	1215	−96	−22	5	100000
6	3645	−192	−27	7	1000000
7	10935	−384	−32	9	10000000
8	32805	−768	−37	11	100000000
9	98415	−1536	−42	13	1000000000

Q 15 :

Pour n entier naturel on a :

1/ $|2n-5| > 10^6$ est équivalent à $n > \frac{5+10^6}{2}$

2/ $|-5n+3| > 10^5$ est équivalent à $n > \frac{10^5+3}{5}$

3/ $|10^n| > 10^6$ est équivalent à $n > 6$

4/ $|-n^2| > 10^6$ est équivalent à $n > 10^3$

5/ $|\sqrt{n}| > 10^6$ est équivalent à $n > 10^{12}$

Q 16 :

Par définition des approximations d'ordre n par défaut et par excès, on a $v_n - u_n = 10^{-n}$

c'est-à-dire : $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$.

Puisque la suite $\left[n \mapsto \frac{1}{10^n}\right]$ converge vers zéro et que la suite u converge vers $\frac{5}{3}$, la somme v de ces deux suites converge vers $\frac{5}{3}$.

Q 17 :

n	u_n	v_n	v_n-u_n	$\frac{1}{2}(u_n+v_n)$	$\left[\frac{1}{2}(u_n+v_n)\right]^2$	$u_{n+1} < \sqrt{2} < v_{n+1}$
0	1	2	1	1,5	2,25	$1 < \sqrt{2} < 1,5$
1	1	1,5	0,5	1,25	2,5625	$1,25 < \sqrt{2} < 1,5$
2	1,25	1,5	0,25	1,375	1,890625	$1,375 < \sqrt{2} < 1,5$
3	1,375	1,5	0,125	1,4375	2,06640625	$1,375 < \sqrt{2} < 1,4375$
4	1,375	1,4375	0,0625	1,40125	1,963501562	$1,40125 < \sqrt{2} < 1,4375$
5	1,40125	1,4375	0,03625	1,41935	2,014625391	$1,40125 < \sqrt{2} < 1,41935$
6	1,40125	1,41935	0,0181	1,4103	1,98894609	$1,4103 < \sqrt{2} < 1,41935$
7	1,4103	1,41935	0,00905	1,414825	2,001729781	$1,4103 < \sqrt{2} < 1,414825$
8	1,4103	1,414825	0,004525	1,4125625	1,995332816	$1,4125629 < \sqrt{2} < 1,414825$
9	1,4125625	1,414825	0,0022625	1,41369375	1,998530019	$1,41369375 < \sqrt{2} < 1,414825$
10	1,41369375	1,414825	0,00113125	1,41425935	2,00012958	$1,41369375 < \sqrt{2} < 1,41425935$

On en déduit l'encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\sqrt{2}$: $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Q 18 :

Puisque pour tout entier naturel n on a :

$v_n \geq \sqrt{2} \geq u_n$, on a donc $0 \leq v_n - \sqrt{2} \leq v_n - u_n$

c'est-à-dire : $0 \leq v_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$

et comme $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, la suite v est convergente et de limite $\sqrt{2}$.

Q 19 :

Il faut trouver les termes u_n et v_n tels que $v_n - u_n < 10^{-5}$

c'est-à-dire : $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^5}$ ou encore : $2^n > 10^5$; le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^5$ est 17 car $2^{16} = 65536$ et $2^{17} = 131072$.

Résultats ou indications des exercices

2/ Il suffit de choisir : 1/ $A = E\left(\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$

2/ $A = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$

3/ $A = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

3/ 1/ Utiliser : u_n est minorée par 4.
2/ L'intervalle $]-1, 1[$ ne contient aucun terme de la suite.
4/ Tous les termes d'indice impair sont en dehors de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.

5/ Tous les termes d'indices pair non nuls sont en dehors de l'intervalle $]-2 ; 2[$.

6/ Utiliser : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2(x-1)^2 > 0$ et
$\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [k \geq 2 \Rightarrow k^n \geq 2^n]$

8/ Les suites données ont respectivement pour limite : 1 ; 5 ; $\frac{10}{3}$; 3 ; 3 ; -4 ; 0 et -8.

9/ Les cinq premières suites ne sont pas bornées. Les sixième et septième sont périodiques et non constantes.

10/ $u_n = 2.(-1)^n$

11/ Les suites données ont respectivement pour limites : 0 ; 6 ; $\frac{3}{2}$; 2 ; 3 et 2.

12/ Utiliser le fait que v est la suite géométrique de premier terme -1 et de raison $\frac{1}{3}$.

17/

1. $u_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad v_n = n$
2. $u_n = -\frac{1}{n}$ $\quad v_n = n^2$
3. $u_n = -n$ $\quad v_n = n$
4. $u_n = \frac{1}{n}$ $\quad v_n = \frac{1}{n^2}$

20/ Voir la question 17.

Exercices

21/ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1°/ Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2°/ Pour tout entier naturel n non nul calculer.

$$D = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad Q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Quel est le sens de variation de la suite u ?
3°/ Trouver un entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad [n > p \Rightarrow |u_n| < 10^{-2}]$$

4°/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n| < \frac{1}{n}$

En déduire que la suite u est convergente. Quelle est sa limite ?

22/ Démontrer que chacune des suites ci-dessous converge vers zéro.

1/ $n \mapsto \frac{2n-1}{n^2+1}$
2/ $n \mapsto \frac{n}{n^3+1}$
3/ $n \mapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4/ $p \mapsto \frac{\cos p}{p^2}$
5/ $m \mapsto (0,1)^m + (-0,1)^m$
6/ $k \mapsto \frac{3}{k^2 - \sin k}$
7/ $n \mapsto \frac{n}{2^n}$

23/ Soit x la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n-1}$$

Soit T la suite définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad T_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$$

Calculer T_n en fonction de n. Prouver que T converge vers zéro.

24/ Soit z la suite définie par :

$$z_0 = 10 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{5z_n}{n+1}$$

Montrer que : $\forall n \geqslant 10 \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} < \frac{1}{2}$

En déduire que la suite z est convergente et trouver sa limite.

25/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par u_0 et

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n + 1\,800$$

a) Déterminer u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.

b) On choisit $u_0 = 1$

- Déterminer le nombre réel b pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par tout entier naturel n par : $v_n = u_n + b$, soit une suite géométrique.
- Justifier la convergence de la suite v et donner sa limite.
- Trouver la limite de la suite u.

26/ Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique positive de premier terme t_1 égal à 3 et telle que $t_3 + t_5 = \frac{15}{16}$

Déterminer la raison de cette suite

Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

27/ Soit a un nombre réel non nul, u la suite définie par son premier terme u_0 et

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = a\,u_n + 3$

a) Pour quelle valeur de a la suite u est arithmétique ?

b) a étant différent de cette valeur, montrer que u_0 peut être choisi de façon que la suite u soit constante.

c) La suite u n'étant ni arithmétique, ni stationnaire, on définit la suite v par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = b\,u_n + c$ où b et c sont deux nombres réels non nuls. Montrer que si la suite v est géométrique alors sa raison est a, donner dans ce cas la valeur de c en fonction de a et de b. Comment faut-il choisir a pour que la suite v soit une suite géométrique convergente ? Montrer qu'alors la suite u est convergente et donner sa limite.

Application : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 3$ est convergente et donner sa limite.

28/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique décroissante de raison q telle que

$u_1\,u_2\,u_3 = \frac{125}{8}$ et $(u_1 - \frac{5}{12}, u_2, u_3)$ soit une progression arithmétique.

Déterminer u_1 et q.

Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la somme $S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n$. Quelle est la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

29/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique positive telle que :

$4(u_1 + u_2 + u_3) = 7$

$u_3 + u_4 + u_5 = \frac{7}{16}$

1°/ Calculer le premier terme u_1 et la raison q de la suite u.

2°/ Calculer la somme S_n des n premiers termes de cette suite.

3°/ Trouver le plus petit entier naturel p tel que :

$$|S_p - 2| < 10^{-6}$$

30/ On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_1 égal à -48 et de 8e terme $\frac{3}{8}$.

Déterminer la raison de cette suite. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n. Montrer que la suite u est convergente et trouver sa limite.

31/ Après avoir tracé la courbe représentative de la fonction f donnée, placer sur l'axe des abscisses le plus de termes possibles de la suite u définie par son premier terme u_0 et la formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ puis énoncer des hypothèses à propos de la convergence de cette suite, dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \frac{2}{1+x} \quad u_0 = 3$

2) $f : x \mapsto \frac{2}{1+x} \quad u_0 = -4$

3) $f : x \mapsto x + \frac{1}{1+x} \quad u_0 = 1$

4) $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \quad u_0 = 1$

5) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 4 \quad u_0 = 2$

32/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par u_0 égal à 24 et

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$$

En utilisant la représentation graphique de $[x \mapsto \frac{1}{3}x + 1]$

énoncer une hypothèse sur la convergence de la suite u.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_n - \frac{3}{2}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique convergente.
En déduire la limite de la suite u.

33/ Soit t la suite définie par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad t_n = \dfrac{(-1)^n n + 3}{n + 2}$

Calculer les 6 premiers termes de la suite. On considère les suites p et q définies par :
$\forall n\in\mathbb{N} \quad p_n = t_{2n}$, $q_n = t_{2n+1}$
Démontrer que les suites p et q sont décroissantes et convergentes.
Formuler des hypothèses sur le comportement de la suite t.

34/ Soit x la suite définie par : $x_1 = \sqrt{2}$ et

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad x_n < 2$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 2 - x_{n+1} < \dfrac{2 - x_n}{2}$

En déduire que la suite x converge vers 2.

35/ Soient a et b deux nombres réels.
On considère la suite u définie par son premier terme u_0 et la formule de récurrence :
$u_{n+1} = au_n + b$.

1) Que peut-on dire de la suite u lorsque a est égal à 1 ?
On suppose désormais que a est distinct de 1 et on pose :

$k = \dfrac{b}{1 - a}$

Soit v la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = u_n - k$

2) Démontrer que la suite v est une suite géométrique.
En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n, de a, de b et de u_0.

3) Utiliser les questions précédentes pour trouver la limite, quand elle existe, de la suite u dans chacun des cas suivants :

a) $u_0 = 2$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 5$.

b) $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3$.

c) $u_0 = -2$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad 3u_{n+1} = u_n + 4$.

d) $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad 5u_{n+1} = u_n + 10$.

36/ Soit u la suite récurrente définie par :

$u_0 = 2$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{-u_n + 4}{u_n + 2}$

1) Démontrer par récurrence que :
$\forall n\in\mathbb{N} \quad 0 < u_n \leqslant 2$
Soit v la suite définie par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4}$

2) Montrer que la suite v est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. Trouver la limite de la suite u.

37/ On considère la suite f définie, pour tout entier naturel n par

$$f(n) = 25\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

1) Calculer f(0), f(1), f(2) et f(3) puis la somme S(3) égale à f(0) + ... + f(3)

2) Soit S(n) la somme des (n+1) premiers termes de la suite f
Démontrer que :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad f(1) + ... + f(n+1) = \dfrac{1}{100} S(n)$

Former la différence $S(n) - \dfrac{1}{100} S(n)$
En déduire l'expression de S(n) en fonction de n.

3) On étudie la suite S ainsi déterminée.
Trouver sa limite.
En déduire que chacun des nombres réels 25, 252525... et 0,252525... est un nombre rationnel.

38/ Soit u la suite définie par :

$u_0 = 4$ et $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$

On considère la suite v définie par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

On admet que les suites u et v sont définies sur $\mathbb{N}$.

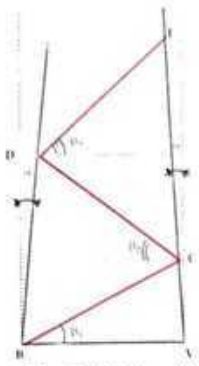
1) Montrer que la suite v est une suite arithmétique.

2) En déduire l'expression du terme général de la suite u.

3) Justifier l'existence des suites u et v.

4) La suite u est-elle convergente ?

39/

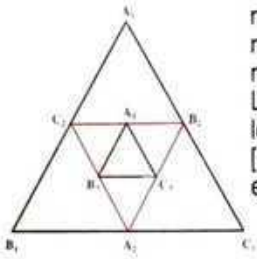


Un pylône métallique est construit avec des entretoises [BC], [CD], [DE], ... qui ont même longueur.
Les montants des pylônes forment un angle $\hat{\alpha}$ avec la verticale.

1) Montrer que les $\hat{\beta}_i$, angles formés par la i^{eme} entretoise avec l'horizontale, ont leurs mesures β_i qui forment une progression arithmétique dont on donnera la raison.

2) Soit h_i la différence de hauteur entre les deux fixations de la i^{eme} entretoise. Est-ce que h_i est le terme général d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?

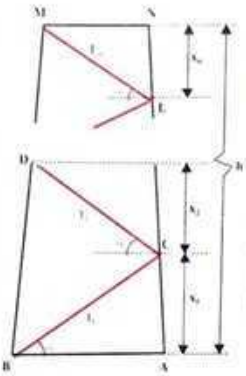
40/



Les adeptes du Tântrisme symbolisent la notion d'infini en représentant une construction réitérée de triangles équilatéraux $A_i B_i C_i$
Les sommets de $A_i B_i C_i$ étant les milieux respectifs des côtés $[B_{i-1} C_{i-1}]$, $[A_{i-1} C_{i-1}]$ et $[A_{i-1} B_{i-1}]$.

Calculer la somme des aires des n premiers triangles de ce type. Calculer la limite de cet aire quand n tend vers l'infini.

41/



Un pylône métallique est construit avec des entretoises [BC], [CD], [DE],... qui forment toutes un angle $\hat{\alpha}$ avec l'horizontale.
La hauteur du pylône est h, sa grande base [AB] a une longueur égale à a, sa petite base [MN] a une longueur égale à b.

L'entretoise i a une longueur l_i, ses fixations ont une différence de hauteurs égale à x_i.

1) Montrer que les grandeurs x_i forment une progression géométrique de raison : q telle que $q^n = \frac{b}{a}$, sachant que le pylône a n entretoises.

2) Calculer x_i en fonction de h et de q.

3) Montrer que les longueurs l_i forment aussi une progression géométrique.

4) Calculer la somme $l_1 + l_2 + ... + l_n$ en fonction de a, b, h et x_1.

6 Étude locale d'une fonction

I. COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE
II. ÉTUDE LOCALE DE QUELQUES COURBES REPRÉSENTATIVES
III. RÉDUCTION DU PROBLÈME
IV. LIMITES EN ZÉRO
V. APPROXIMATION AFFINE – NOMBRE DÉRIVÉ

1 Coefficient directeur d'une droite

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Question 1

1/ Soient A et B les points de $\mathcal{P}$ de couples de coordonnées respectifs $(-1, 0)$ et $(1, 4)$.

Tracer la droite (AB). Donner une équation de cette droite. Déterminer le vecteur directeur de la droite (AB) dont la première coordonnée est 1.

2/ Soient C et D les points de $\mathcal{P}$ de couples de coordonnées respectifs $(-1, -2)$ et $(-1, 3)$.

Tracer la droite (CD) et en donner une équation.

Un vecteur de première coordonnée 1 peut-il être vecteur directeur de (CD) ?

Plus généralement, soit (Δ) une droite du plan $\mathcal{P}$.

(Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si tout vecteur directeur de (Δ) appartient à droite vectorielle de base $(\vec{j})$. Ainsi (Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si tout vecteur directeur de (Δ) a pour première coordonnée 0.

Si (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors tout vecteur directeur de (Δ) a une première coordonnée non nulle, et il existe un et un seul vecteur directeur $\vec{u}_1$ de (Δ) dont la première coordonnée est 1 ; la deuxième coordonnée de $\vec{u}_1$ est alors le **coefficient directeur** de la droite (Δ).

Méthode pratique

Pour trouver le coefficient directeur d'une droite (Δ) non parallèle à l'axe des ordonnées :

- si on connait un vecteur directeur de (Δ) : $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

D'après ce qui précède, α est non nul ; le vecteur $\frac{1}{\alpha}\vec{u}$ est le vecteur directeur de (Δ) de première coordonnée 1, sa deuxième coordonnée est $\frac{\beta}{\alpha}$.

Le coefficient directeur de (Δ) est $\frac{\beta}{\alpha}$.

- si on connait deux points distincts A et B de (Δ) par leurs couples de coordonnées respectifs : (x_1, y_1) et $x_2, y_2)$:

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (Δ) et x_1 est différent de x_2, le coefficient directeur de (Δ) est donc $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

- si l'équation de (Δ) est donnée sous la forme $y = mx + p$ (ceci est toujours possible lorsque (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées) alors $\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) donc m est le coefficient directeur de (Δ).

Exercice 1

Trouver, s'ils existent, les coefficients directeurs des droites suivantes :

1/ La droite a pour vecteur directeur $2\vec{i} - 3\vec{j}$

2/ La droite passe par les points $E\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$

3/ La droite a pour équation $y = 8x - 4$

4/ La droite a pour équation $3x - 5y + 7 = 0$

5/ La droite a pour équation $x - 3 = 0$

6/ La droite a pour équation $y - 5 = 0$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$

Tracer la courbe représentative (Cf) de f dans un repère orthonormé du plan.

Soient M_1 et M_2 les points de (Cf) d'abscisses respectives 1 et 4.

Calculer le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).

Plus généralement, soient N_1 et N_2 les points distincts de (Cf) d'abscisses respectives x_1 et x_2.

Déterminer le coefficient directeur de la droite (N_1N_2)

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées de coefficients directeurs respectifs a et a'.

Les vecteurs $\vec{i} + a\vec{j}$ et $\vec{i} + a'\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs de (D) et de (D') respectivement, ils sont colinéaires si et seulement si $a = a'$. D'où le résultat :

Théorème

Deux droites, non parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Exercice 3

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à $D(O, \vec{j})$, de coefficients directeurs respectifs m et m'.

Trouver une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier ces nombres pour que (D) soit perpendiculaire à (D').

Méthode pratique

Pour tracer une droite (D) dont on connaît un point A et le coefficient directeur a :

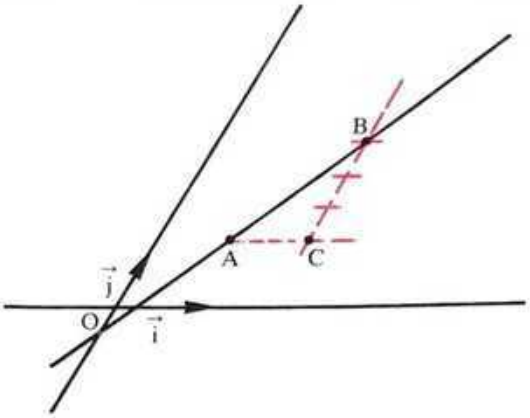
Puisque le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D), il suffit d'utiliser le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; et on aura (D) = (AB).

Pour placer le point B : à partir du point A, on place le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{i}$: « on se déplace d'une unité de l'axe des abscisses vers la droite ».

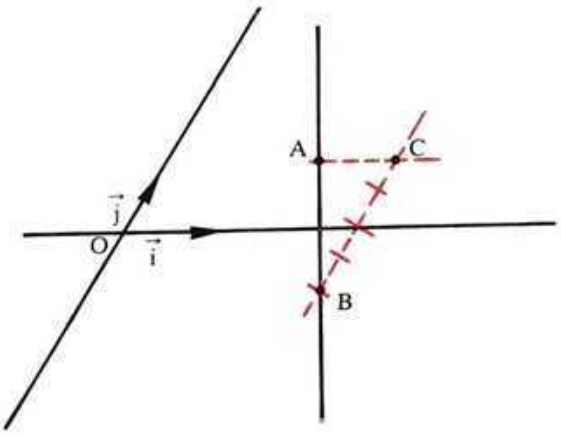
Puis, à partir du point C, on place le point B tel que $\overrightarrow{CB} = a\vec{j}$: « on se déplace de a unités de l'axe des ordonnées » (penser à utiliser le signe de a).

Ainsi par exemple, la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur 3 est la droite (AB) ci-dessous :

La droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur -4 est la droite (AB) ci-dessous :



De même, la droite passant par $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur -4 est la droite (AB) ci-dessous :



Exercice 4

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Tracer la droite (D) passant par A $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et de coefficient directeur -4.

2/ Soient O' $\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\mathcal{R}'$ le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

Quel est le coefficient directeur de (D) dans le repère $\mathcal{R}'$?

3/ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs définis par :

$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

Vérifier que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de $\mathcal{P}$.

Quel est le coefficient directeur de (D) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$?

Exercice 5

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de couple de coordonnées (5, 3).

A tout nombre réel a, on associe la droite (Da) passant par A et de coefficient directeur a.

Tracer (D_0), $(D_{\frac{1}{2}})$, (D_1), (D_2), (D_{10}) et (D_{-3}).

On note de même (Δ_a) la droite passant par O et de coefficient directeur a.

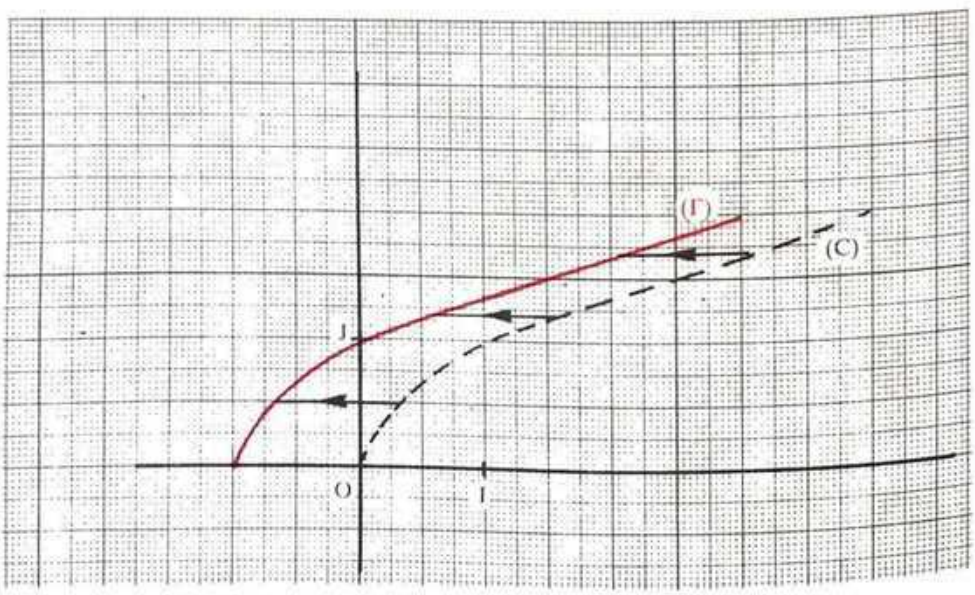
Tracer (Δ_0), $(\Delta_{\frac{1}{2}})$, (Δ_1), (Δ_2), (Δ_{10}) et (Δ_{-3}).

2 Étude locale de quelques courbes représentatives

On considère la fonction f définie par :

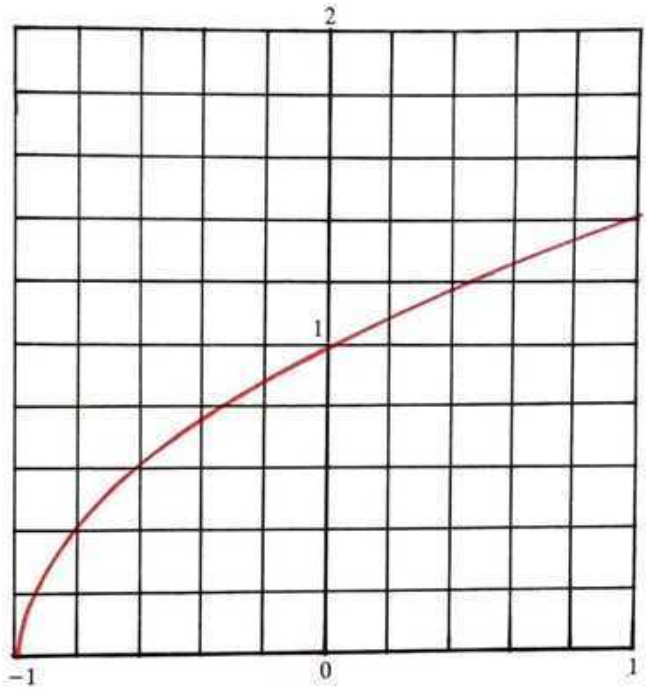
$$f : [-1, \to [\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$

Sa courbe représentative (Γ) dans le repère orthonormé (O, I, J) du plan est donnée ci-dessous : elle a été obtenue par la translation de vecteur $\vec{i}$ à partir de la courbe représentative (C) de la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

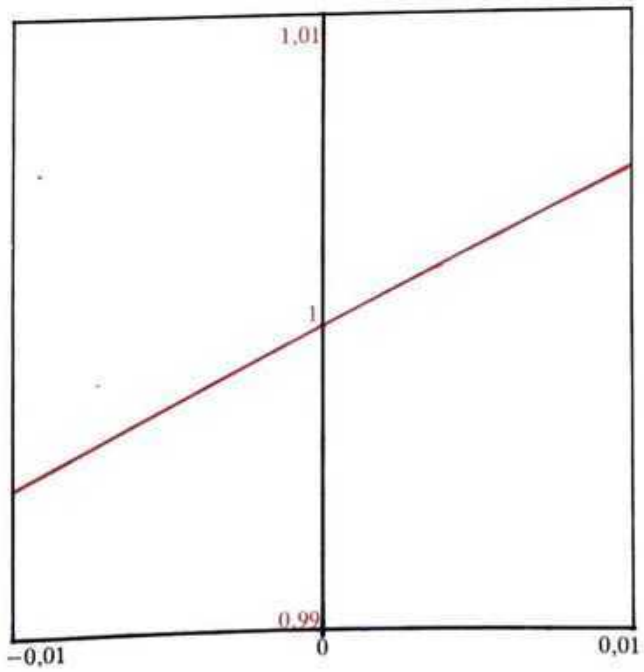


Agrandissons deux fois de suite la courbe (Γ) « au voisinage » du point J dont le couple de coordonnées est (0, 1).

1[er] agrandissement : on multiplie par $\frac{5}{2}$



2[e] agrandissement : on multiplie par 100



Sur cette dernière figure, il apparaît que la représentation graphique de la restriction de f à [− 0,01 ; 0,01] ne se distingue plus de celle d'une application affine : [t : x ↦ ax + b].

Question 2 *Déterminer à partir de cette dernière figure, cette fonction affine. Compléter, à l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant :*

x	$-0,01$	$-0,008$	$-0,006$	$-0,004$	$-0,002$	0	$0,002$	$0,004$	$0,006$	$0,008$	$0,01$
arrondi d'ordre 6 de f(x)											
t(x)											

Dans le deuxième agrandissement (3e dessin), l'échelle a été choisie de manière à pouvoir distinguer deux points distincts de 0,001. Pour chaque valeur de x du tableau de la question 2, f(x) et t(x) différent de moins de 0,00001 ; il n'est donc pas étonnant que l'on ne puisse distinguer les courbes représentatives de t et de f dans la bande considérée.

Question 3 *Placer sur le premier graphique la courbe représentative de la fonction t.*

Examinons maintenant, de la même manière, la fonction g telle que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$

On note (C_g) la courbe représentative de g dans un repère (O, I, J) orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

Question 4

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$

Vérifier que M appartient à (C_g) si et seulement si y est positif ou nul et $x^2 + y^2 = 5^2$.

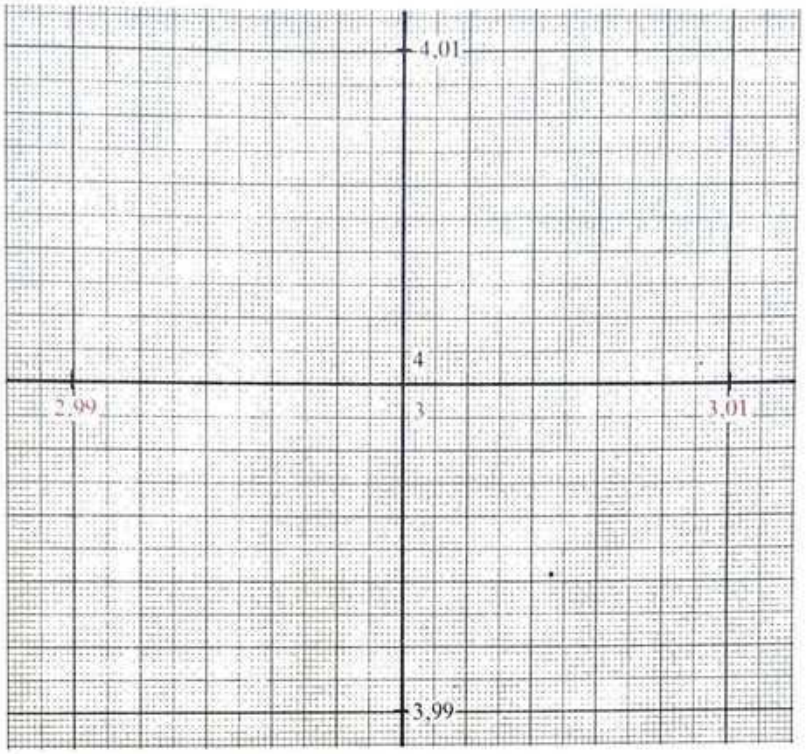
En déduire que (C_g) est la partie du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 5, située dans le demi-plan de bord l'axe des abscisses et contenant le point J : [(OI), J).

Vérifier que le point $A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à (C_g).

Agrandissons la partie de la courbe (C_g) au voisinage du point $A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Question 5 *A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant, et placer les points de (C_g) sur le graphique ci-dessous.*

x	$2,99$	$2,992$	$2,994$	$2,996$	$2,998$	3	$3,002$	$3,004$	$3,006$	$3,008$	$3,01$
arrondi d'ordre 6 de g(x)											



Là encore, il apparaît que la représentation graphique de la restriction de g à [2,99 ; 3,01] ne se distingue plus de celle d'une application affine T.

Question 6 *Déterminer cette fonction affine T. Tracer dans le repère (O, I, J) initial, les courbes représentatives respectives (C_g) et (T) des fonctions g et T.*

Vérifier que leur intersection est réduite au point A et que les droites (OA) et (T) sont perpendiculaires.

Qu'est la droite (T) pour le demi-cercle (C_g) ?

Puisque, dans ce deuxième exemple, on a exhibé une droite (T) tangente à un cercle, et que, dans le premier exemple la droite tracée a été obtenue par le même procédé, on dira que la droite d'équation y = t(x) est **tangente** à (C_g) au point J de couple de coordonnées (0,1).

On a ainsi une notion graphique de tangente à une courbe en un point donné A : c'est une droite obtenue en considérant la partie de la courbe « au voisinage » de A tracée dans un repère avec une unité au moins 100 fois plus grande que l'unité initiale ; c'est-à-dire la droite telle que sur une « petite partie » du plan autour du point A, la courbe et la droite ne se distinguent pas quand on les « regarde à la loupe ».

Dans la suite de ce chapitre on va définir mathématiquement cette notion de tangente, en un point A, à la courbe représentative d'une fonction f. Pour cela on va d'abord ramener le problème à l'étude d'une courbe au voisinage de l'origine.

Exercice 6

. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = x^2 + 3$

$\forall x \in]1, \rightarrow[$ $\quad f_2(x) = \dfrac{x + 5}{x - 1}$

On considère la fonction f_3 qui coïncide avec f_1 sur $]\leftarrow, 2[$ et avec f_2 sur $[2, \rightarrow[$.

Vérifier que f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.

Tracer les courbes représentatives, dans un repère (O, I, J) orthonormé (unités : 1 cm), de f_1, de f_2 puis celle de f_3 (on utilisera les méthodes du chapitre 3).

Vérifier que le point A $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est sur la représentation graphique (C_3) de f_3.

Tracer, après avoir fait un tableau de valeurs grâce à une calculatrice, dans un graphique où l'unité est 100 cm avec « au centre » le point A, la représentation graphique de la restriction de f_3 à [1,99 ; 2,01].

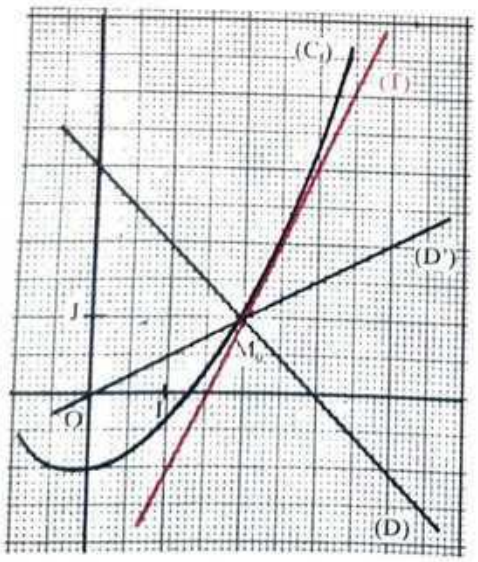
Existe-t-il une tangente en A à (C_3) ?

3 Réduction du problème

Soient f une fonction de courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé (O, I, J) et x_0 un nombre réel tel que f soit définie sur un intervalle de centre x_0 et que (C_f) semble admettre une tangente au point M_0 d'abscisse x_0.

Afin de trouver une condition pour qu'une droite (Δ) passant par M_0 soit tangente à (C_f) en M_0, examinons les figures suivantes :

1/



$f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 1$

$x_0 = 2 \qquad f(x_0) = 1$

(T) : $y = 2x - 3$

(D) : $y = -x + 3$

(D') : $y = \dfrac{x}{2}$

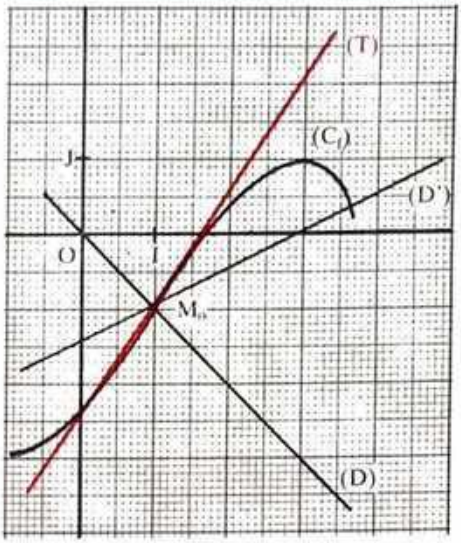
2/ $f : x \mapsto \frac{1}{8}(-x^3 + 3x^2 + 9x - 19)$

$x_0 = 1$

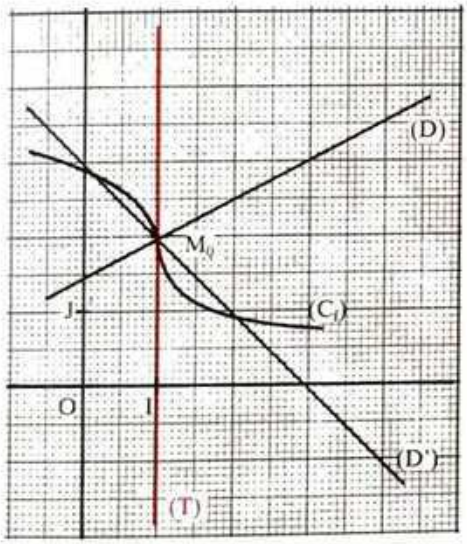
$(T) : y = \frac{3x - 5}{2}$

$(D) : y = -x$

$(D') : y = \frac{x - 3}{2}$



3/



$f : x \mapsto -\sqrt[3]{x - 1} + 2$

$x_0 = 1$

$(T) : x = 1$

$(D) : y = \frac{x + 3}{2}$

$(D') : y = -x + 3$

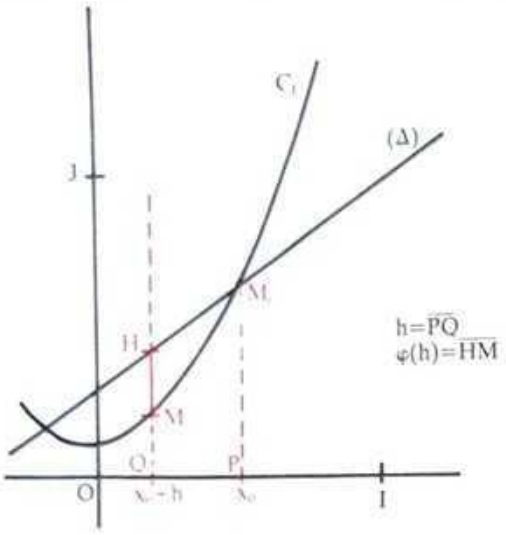
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \qquad (b = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow b^3 = a)$

Dans chacun de ces trois cas on constate, graphiquement, que les droites (D) et (D') ne sont pas tangentes à (C_f) en M_0 mais que la droite (T) semble être tangente à (C_f) en M_0.

Question 7 *Vérifier, dans les deux premiers cas, les résultats ci-dessus en remplissant, grâce à une calculatrice, un tableau donnant les images de x par les fonctions f, t, d et d' de courbes représentatives respectives (C_f), (T), (D) et (D') pour x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon 0,01.*

Pour qu'une droite (Δ) passant par M_0 soit tangente à (C_f) en M_0, il faudrait que, « près de M_0 » « l'écart entre (Δ) et (C_f) » soit « assez petit ».

On souhaite comparer ces écarts suivant la position de (Δ). Dans le cas où (Δ) n'est pas parallèle à (OJ), il semble commode d'évaluer cet écart de la manière suivante :

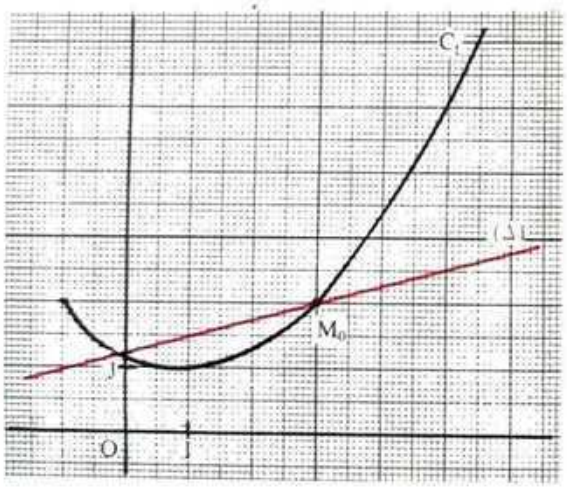


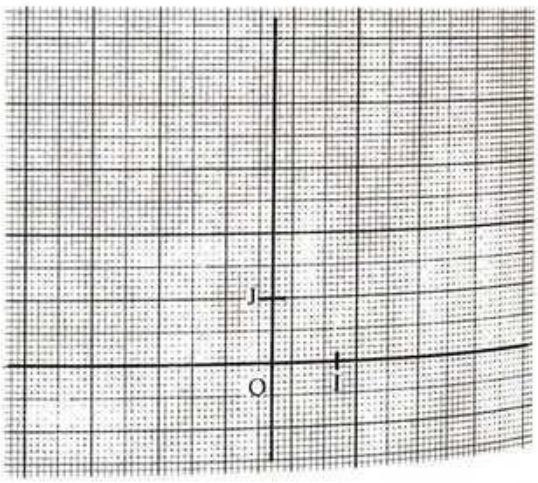
Pour tout nombre réel h, assez petit en valeur absolue pour que $x_0 + h$ soit dans D_f, on place les points H et M d'abscisse $x_0 + h$ de (Δ) et de (C_f) respectivement ; ils sont situés sur une parallèle à (OJ).

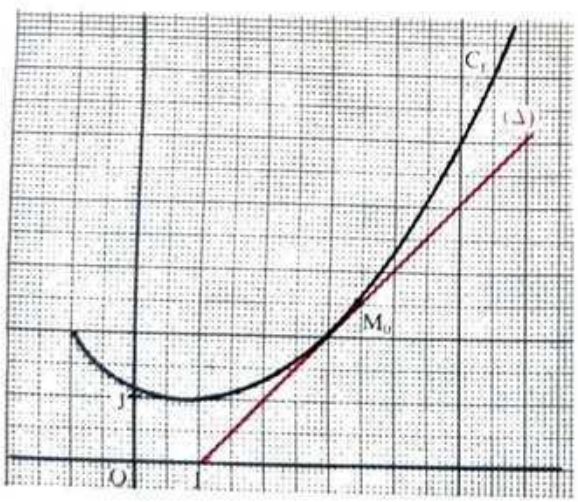
On considère la mesure algébrique HM, calculée dans un repère de vecteur $\overrightarrow{OJ}$; ainsi on définit une fonction φ qui au nombre réel h associe le nombre réel HM.

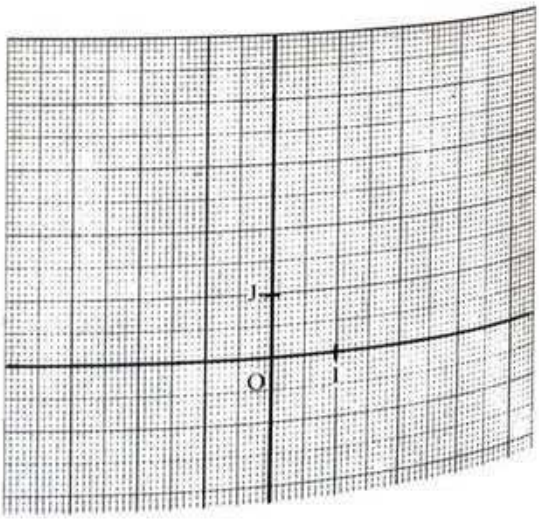
Dans le cas de la figure 3/, la tangente (T) étant parallèle à (OJ), il n'y a pas de fonction φ associée à (T). Ce cas sera étudié ultérieurement.

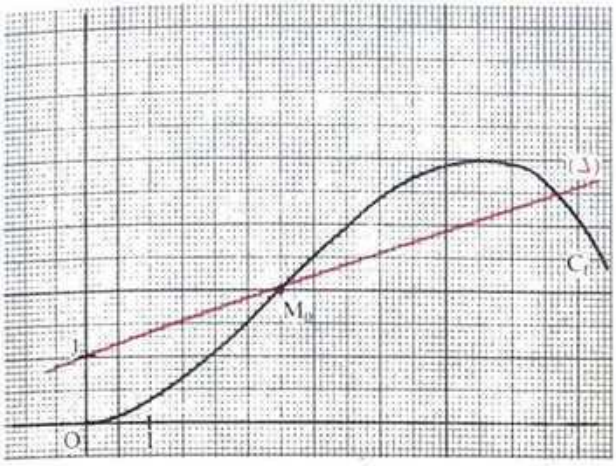
Question 8 *A partir des quatre figures de gauche ci-dessous, tracer, dans le repère situé à droite la courbe représentative de φ : on procédera point par point en reportant au compas la distance HM et en utilisant le signe de HM.*

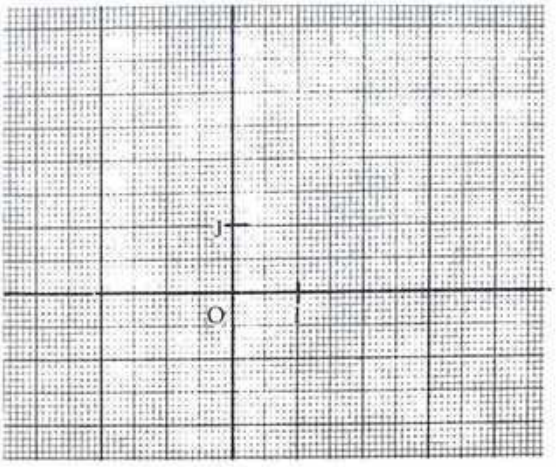


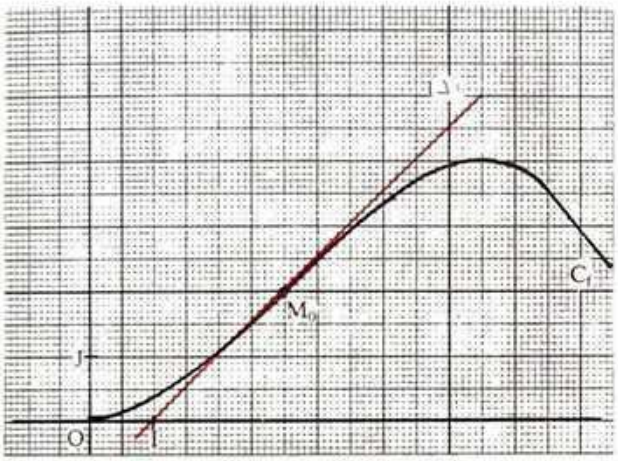


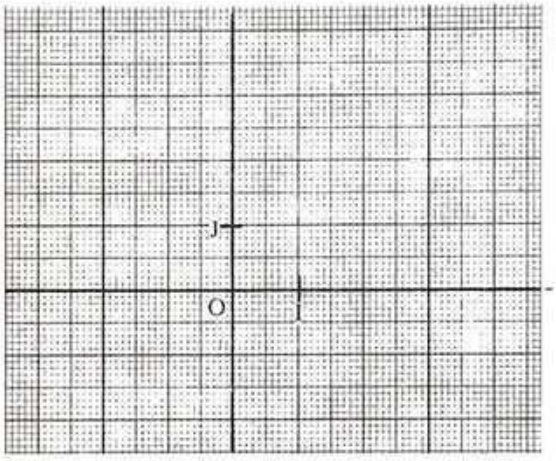












A travers ces exemples, il semble que, pour une droite (Δ) non parallèle à (OJ), il y ait équivalence entre :

[(Δ) est tangente à (C_f) en M_0]

et [la droite (OI) est tangente à la courbe représentative (C_f) de φ en O].

Ainsi on a déplacé le problème de tangence en M_0 à (C_f) en le problème suivant :

Étant donné un intervalle I de centre 0 et une fonction φ définie sur I et telle que φ(0) = 0, à quelle condition la droite (OI) est-elle tangente en O à (C_φ) ?

Question 9

Sur six graphiques différents, tracer dans un repère (O, I, J) orthonormé (unité : 2 cm) la courbe représentative de chacune des fonctions de [−1, 1] sur ℝ suivantes :

$\varphi_1 : h \mapsto h$ $\quad \varphi_3 : h \mapsto h^3$ $\quad \varphi_5 : h \mapsto h\sqrt{|h|}$

$\varphi_2 : h \mapsto h^2$ $\quad \varphi_4 : h \mapsto \sqrt{|h|}$ $\quad \varphi_6 : h \mapsto \sin h$

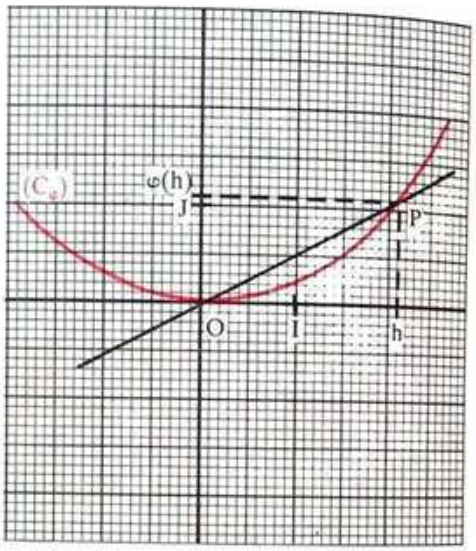
(A part φ_5, ces fonctions sont connues, mais on utilisera le plus possible de points au voisinage de O).

Constater graphiquement quelles sont les φ_i qui vérifient la propriété (P) suivante :

(P) : (OI) est tangente à (C_{φ_i}) en O.

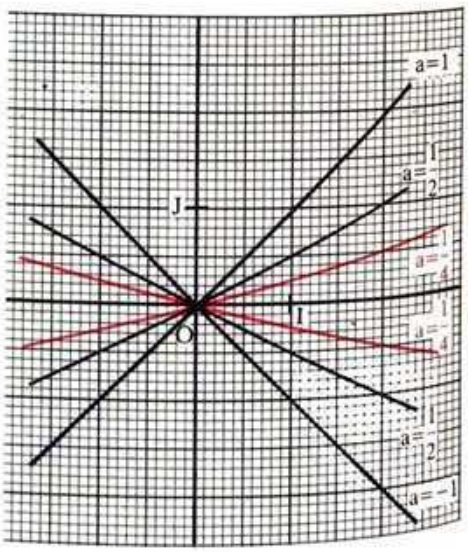
Pour qu'une fonction φ vérifie la propriété (P), il faut que « en agrandissant » assez la courbe (C_φ), elle soit « presque confondue au voisinage de O » avec la droite (OI).

Pour un nombre réel h non nul on considère la droite (OP) passant par O et par le point P de (C_φ) d'abscisse h.



L'évaluation du « degré de proximité » de (OP) et de (OI) donne une indication concernant le « degré de proximité » de (C_φ) et (OI). En effet, dans les cas où (OI) est tangente en O à (C_φ), cette dernière courbe est, pour h assez petit, entre (OP) et (OI).

La droite (OP) doit être « presque confondue » avec la droite (OI). Comme elles passent toutes deux par O, il suffit qu'elles aient presque le même coefficient directeur.



Comparons donc les coefficients directeurs des droites (OP) et (OI) c'est-à-dire comparons les nombres $\frac{\varphi(h)}{h}$ et 0 (car le coefficient directeur de la droite (OP) est $\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h-0}$ c'est-à-dire $\frac{\varphi(h)}{h}$. Plus précisément introduisons une nouvelle notion : celle de **limite en 0 d'une fonction** pour donner un sens à la phrase : « pour h assez proche de 0, le rapport $\frac{\varphi(h)}{h}$ est proche de 0 ».

4 Limites en zéro

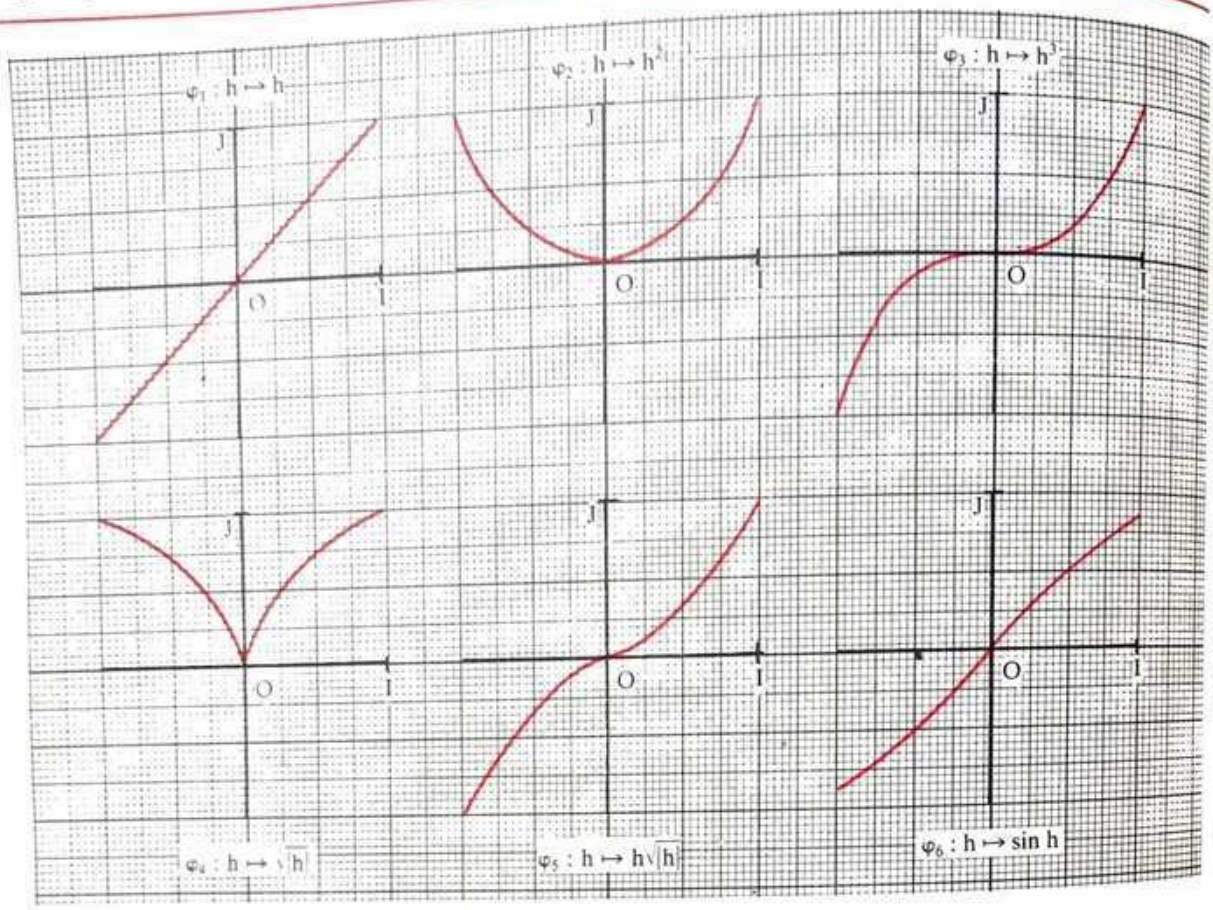
1) Limites de référence

Question 10 *Donner, pour tout i de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}, l'expression de* $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ *en fonction de h.*

A l'aide d'une calculatrice (mise en mode radian) compléter le tableau de valeurs suivant :

h	$\frac{\varphi_1(h)}{h}$	$\frac{\varphi_2(h)}{h}$	$\frac{\varphi_3(h)}{h}$	$\frac{\varphi_4(h)}{h}$	$\frac{\varphi_5(h)}{h}$	$\frac{\varphi_6(h)}{h}$
− 0,1						
− 0,08						
− 0,06						
− 0,04						
− 0,02						
0,02						
0,04						
0,06						
0,08						
0,1						

Examinons à nouveau les courbes représentatives des fonctions φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 et φ_6.



On constate, en comparant avec le tableau de la question 10, que les cas où la droite (OI) est tangente en O à la courbe (C_{φ_i}) sont les cas où les nombres $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ « se rapprochent de 0 » lorsque h « devient proche de 0 » ; c'est le cas pour i = 2, i = 3 et i = 5.

On écrit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_2(h)}{h} = 0 \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_3(h)}{h} = 0 \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_5(h)}{h} = 0$$

(On lit : limite quand h tend vers zéro de $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ égale zéro ou

limite de $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ égale zéro lorsque h tend vers zéro).

Cette écriture exprime que le rapport $\frac{\varphi_i(h)}{h}$, bien que non défini en 0, prend des « valeurs très proches de 0 » lorsque h est « proche de 0 ».

Par contre, dans le tableau de la question 10, on constate que lorsque h est « proche de 0 », $\frac{\varphi_1(h)}{h}$ et $\frac{\varphi_6(h)}{h}$ prennent des « valeurs très proches de 1 ». On écrit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_1(h)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_6(h)}{h} = 1$$

(On lit : limite de $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ égale un lorsque h tend vers zéro).

Pour $\frac{\varphi_4(h)}{h}$, d'après le tableau, les valeurs ne semblent pas proches d'un nombre réel, quel qu'il soit, on étudiera ce cas ultérieurement.

En remplaçant, pour tout i de $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, les rapports $\frac{\varphi_i(h)}{h}$ par leurs expressions explicites, valables pour h non nul, on obtient les résultats suivants :

Limites de référence

$$\lim_{h\to 0} h = 0 \qquad \lim_{h\to 0} h^2 = 0 \qquad \lim_{h\to 0} \sqrt{|h|} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Ces résultats traduisent le comportement au voisinage de zéro de fonctions non définies en zéro. On remarquera que, lorsque l'expression de la fonction peut être simplifiée, la limite s'obtient en remplaçant h par 0 dans l'expression simplifiée.

Nous allons maintenant chercher à exprimer à l'aide du langage des limites le comportement d'autres fonctions « usuelles ».

Un cas simple est celui d'une fonction g, obtenue comme produit de l'une des fonctions précédentes $\left(h \mapsto h,\ h \mapsto h^2,\ h \mapsto \sqrt{|h|},\ h \mapsto 1 \text{ et } h \mapsto \frac{\sin h}{h}\right)$ par un nombre réel k ; dans ce cas la limite est évidemment multipliée par k.

Théorème

Soient f une fonction définie sur un intervalle de centre 0 sauf peut-être en 0, k et l deux nombres réels

Si $\lim_{h\to 0} f(h) = l$ alors $\lim_{h\to 0} kf(h) = kl$

Remarque :

On note souvent $\lim_{0} f = l$ pour l'écriture $\lim_{h\to 0} f(h) = l$ et on dit que f a pour limite l en 0 (cette définition sera précisée page 181).

Ainsi par exemple, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3\frac{\sin x}{x}$$

On sait que la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

vérifie $\lim_{0} f = 1$.

Comme on a g = 3f, on peut conclure que : $\lim_{0} g = 3$.

Arrivé à ce stade on ne sait que prouver qu'une fonction, produit d'une fonction de référence par un nombre réel, a une limite, et donner cette limite. D'autres cas de calculs peuvent se présenter.

2) Limites obtenues par majoration

Question 11 *Soit la fonction* $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$h \mapsto \frac{\sin 3h - 3 \sin h}{h^2}$$

1/ En écrivant sin 3h en fonction de sin h, montrer que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \qquad g(h) = -4 \frac{\sin^3 h}{h^2}$$

2/ A l'aide d'une calculatrice, en mode radian, compléter le tableau suivant, après avoir vérifié que g est paire.

h	*− 0,01*	*− 0,008*	*− 0,006*	*− 0,004*	*− 0,002*	*0,002*	*0,004*	*0,006*	*0,008*	*0,01*
arrondi d'ordre 8 de g(h)										

On constate sur le tableau de cette question que, pour |h| proche de 0, g(h) prend des valeurs proches de 0.

Plus précisément, on a montré que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \qquad g(h) = -4 \frac{\sin^3 h}{h^2}$$

Or, on sait (voir géométrie chapitre 2) que :

$$\forall h \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad |\sin h| \leqslant |h|$$

On en déduit que :

$$\forall h \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{|\sin h|}{|h|} \leqslant 1$$

ou encore : $\forall h \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \left|\frac{\sin h}{h}\right| \leqslant 1$

Or on a, vu l'expression ci-dessus de g(h) :

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \qquad |g(h)| = 4\,|h| \left|\frac{\sin h}{h}\right|^3$$

On a donc :

$$\forall h \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\ [\cup]\ 0, \frac{\pi}{2}\right] \quad . \quad |g(h)| \leqslant 4\,|h|$$

Ainsi, sur l'ensemble $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\ [\cup]\ 0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction g prend des valeurs plus proches de 0 que la fonction j définie par : $\forall h \in \mathbb{R} \qquad j(h) = 4h$.

Or cette fonction j a pour limite 0 en 0.

Nous dirons donc encore que g a pour limite 0 en 0 c'est-à-dire que nous écrirons $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$.

Définition

Soit g une fonction dont l'ensemble de définition D_g contient un ensemble de la forme $]-r, 0[\cup]\ 0, r[$ (où r est un nombre réel strictement positif). On dit que la fonction g a pour **limite 0 en 0** et on écrit $\lim\limits_{0} g = 0$ ou $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$ si et seulement si il existe une fonction de référence j telle que $\lim\limits_{0} j = 0$ et un intervalle ouvert I de centre 0 et un nombre réel positif k tels que :

$$\forall h \in I \cap D_g \ |g(h)| \leqslant k|j(h)|$$

Remarques :

1/ La fonction j sera nécessairement l'une des fonctions $h \mapsto h$, $h \mapsto h^2$, $h \mapsto \sqrt{|h|}$, ces fonctions de référence sont définies en 0 et y prennent la valeur 0.

2/ Il se peut que g soit définie aussi en 0, dans ce cas, si $\lim\limits_{0} g = 0$ alors $g(0) = 0$.

Dans la pratique, on utilisera soit cette définition, soit le théorème suivant, que l'on admet et qui permet d'élargir le champ des fonctions que l'on peut utiliser pour majorer $|g(h)|$.

Théorème

Soit g une fonction dont l'ensemble de définition D_g contient un ensemble de la forme $]-r, 0\ [\cup]\ 0, r[$ (où r est un nombre réel strictement positif). Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{0} f = 0$ et k un nombre réel positif.

S'il existe un intervalle ouvert de centre 0 tel que

$$\forall h \in I - \{0\} \qquad |g(h)| \leqslant k|f(h)|$$

et si $g(0) = 0$ lorsque g est définie en 0 alors : $\lim\limits_{0} g = 0$.

Méthode pratique

Pour montrer qu'une fonction g a pour limite 0 en 0, il suffit de trouver un nombre réel k de $\mathbb{R}_+$ et une fonction de référence j ($h \mapsto h$, $h \mapsto h^2$ ou $h \mapsto \sqrt{|h|}$ à ce stade de notre étude) tels que $|g| \leqslant k\,|j|$, ceci étant au moins vrai pour les restrictions de g et j sur un intervalle de centre 0, sauf en 0 si g n'y est pas définie.

Ainsi par exemple, montrons que la fonction g définie par : $\forall h \in \mathbb{R} \quad g(h) = h\sqrt{|h|}$ a pour limite 0 en 0.

Pour tout h de $]-1, 1[$ on a : $\sqrt{|h|} \leqslant 1$

donc : $|h|\sqrt{|h|} \leqslant |h|$

En prenant $k = 1$ et $j : h \mapsto h$

on a : $|g| \leqslant k\,|j|$

donc $\lim_0 g = 0$ c'est-à-dire $\lim_{h \to 0} h\sqrt{|h|} = 0$

(Cette fonction : $h \mapsto h\sqrt{|h|}$ peut alors être considérée comme une fonction de référence, de limite 0 en 0).

Exercice 7

Montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall h \in [-1, 1] \qquad |h^n| \leqslant |h|$

Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \lim_{h \to 0} h^n = 0$

On retiendra le résultat suivant comme fonction de référence.

Théorème

Quel que soit l'entier naturel non nul n, la fonction $h \mapsto h^n$ a pour limite 0 en 0.

Exercice 8

On considère la fonction g, définie sur $]-1\ ;\ 0\ [\cup]\ 0\ ;\ 1[$, qui à chaque nombre réel de cet ensemble, associe le produit de ce nombre et du premier chiffre non nul de son écriture décimale illimitée.

Calculer $g\left(\frac{3}{4}\right)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, g (0,125)

Vérifier que g est une fonction impaire.

Compléter le tableau suivant :

h	0,0001	0,0005	0,0009	0,001	0,005	0,009	0,01	0,05	0,09	0,1
arrondi de g(h)										

La fonction g est-elle monotone ?

Montrer que la limite de g en 0 est 0.

Exercice 9 En utilisant l'inégalité :

$\forall h \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad |\sin h| \leqslant |h|$

montrer que la limite de la fonction sinus en 0 est 0.

On retiendra comme limite de référence

Théorème

La limite de la fonction sinus en 0 est 0.

Question 12 *Soit la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 6 + 3x^2$

Compléter le tableau suivant :

h	$-0{,}01$	$-0{,}008$	$-0{,}006$	$-0{,}004$	$-0{,}002$	0	$0{,}002$	$0{,}004$	$0{,}006$	$0{,}008$	$0{,}01$
arrondi de $g(x)$ d'ordre 6											

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} [g(x) - 6] = 0$.

Dans cette question, puisque $\lim\limits_{x \to 0} [g(x) - 6] = 0$, lorsque x est « proche de 0 », $g(x) - 6$ prend des valeurs très voisines de 0, donc $g(x)$ prend des valeurs très voisines de 6. On écrira $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 6$ ou encore $\lim\limits_{0} g = 6$.

Définition

Soient l un nombre réel et g une fonction numérique. On dit que **la limite de g en zéro est l** et on écrit $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = l$ ou $\lim\limits_{0} g = l$, si et seulement si la fonction f définie par :

$f : h \mapsto g(h) - l$

a pour limite 0 en 0.

Remarques :

1/ La condition $\lim\limits_{h \to 0} [g(h) - l] = 0$ exige évidemment que la fonction g soit définie sur un ensemble de la forme $]-\alpha, \alpha[$, ou $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$).

2/ On peut démontrer à l'aide de majorations, et nous admettrons que :

$\lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{\sin h}{h} - 1\right] = 0$. Nous retrouvons ainsi la limite de référence donnée au paragraphe 1 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

3/ Si une fonction g a une limite en 0 alors celle-ci est unique.

Méthode pratique

• Pour montrer qu'une fonction g a pour limite l en 0 on écrit g(h) sous la forme $l + j(h)$, puis on montre (à l'aide de la méthode précédente) que $\lim\limits_{0} j = 0$.

• Lorsque le nombre l n'est pas indiqué par l'énoncé, on le « choisit » après avoir examiné l'expression de g(h), ou calculé des valeurs prises par g(h) pour h proche de 0.

Ainsi, par exemple, déterminons la limite l en 0 de la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x + \sin x}{x}$$

Ne connaissant pas l, commençons par calculer quelques valeurs g(h) par |h| « petit ». Puisque g est paire (on le vérifie facilement), il suffit de prendre des valeurs positives de h :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
arrondi d'ordre 4 de g(h)	2,8415	2,9589	2,9983	3	3

Ce tableau incite fortement à penser que la limite cherchée est 3. Montrons-le :

Soit h un nombre réel non nul, on a :

$$g(h) - 3 = \frac{2h + \sin h}{h} - 3$$
$$= \frac{\sin h - h}{h}$$
$$= \frac{\sin h}{h} - 1$$

Or on a vu (remarque 2 ci-dessus) que :

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin h}{h} - 1\right] = 0$$

Par conséquent, $\lim\limits_{h \to 0} [g(h) - 3] = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{0} g = 3$.

Exercice 10 Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1/ $h \mapsto 2 + h$

2/ $h \mapsto \cos h$

3/ $h \mapsto \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + 2x + 2$

On retiendra $\lim\limits_{h \to 0} \cos h = 1$

3) Opérations sur les limites

Dans les derniers exemples traités on constate qu'il serait commode, connaissant la limite de deux fonctions en 0, de connaître la limite de leur somme ou de leur produit.

On admet les résultats suivants :

Théorème

Soient g_1 et g_2 deux fonctions définies toutes deux sur un intervalle I de centre 0, ou sur $I - \{0\}$, et l_1 et l_2 deux nombres réels.

Si g_1 a pour limite l_1 en 0 et si g_2 a pour limite l_2 en 0 alors

* $g_1 + g_2$ a pour limite $l_1 + l_2$ en 0
* $g_1 g_2$ a pour limite $l_1 l_2$ en 0
* si, de plus, $\dfrac{g_1}{g_2}$ est définie sur $I - \{0\}$ et si l_2 est non nul, alors $\dfrac{g_1}{g_2}$ a pour limite $\dfrac{l_1}{l_2}$ en 0.

De même on admet :

Théorème

Soit g une fonction qui admet pour limite en 0, le nombre réel l.

* la fonction $|g|$ a pour limite $|l|$ en 0
* si la fonction $\sqrt{g}$ est définie sur un intervalle I de centre 0, ou sur $I - \{0\}$, alors l est un nombre positif ou nul et la fonction $\sqrt{g}$ a pour limite $\sqrt{l}$ en 0.

Remarque :

On a : $\sqrt{g}$ est définie sur I $\Leftrightarrow$ g est positive sur I.

Donc : si une fonction positive sur un intervalle de centre 0, admet pour limite en 0 le nombre réel l, alors l est positif ou nul.

Exercice 11 Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1/ $h \mapsto h^3 + 4h^2 - 3h + 2$

2/ $x \mapsto (1 + \sqrt{|x|})(3 + x^2)$

3/ $h \mapsto \text{tg } h$

4/ $x \mapsto \dfrac{x}{1 + x}$

5/ $y \mapsto \dfrac{\text{tg } y}{y}$

6/ $x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

7/ $t \mapsto \dfrac{|t + 1| - 2|t|}{1 + |t|}$

8/ $x \mapsto \sqrt{(x - 2)(x - 3)}$

9/ $h \mapsto \dfrac{h + 1 - \sqrt{h + 1}}{h}$

10/ $x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x^2 - x}{3x^2 - 2x}$

4) Limite à droite, limite à gauche

Considérons la fonction $g : h \mapsto \sqrt{h}$.

Puisque g n'est pas définie sur un intervalle de centre 0, même privé de 0, g n'a pas de limite en 0 au sens précédent.

Cependant, g coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction j définie par :

$j : h \mapsto \sqrt{|h|}$

et on sait que $\lim\limits_{0} j = 0$

On dira que la limite à droite de g en 0 est 0, comme celle de j, et on écrira :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \sqrt{h} = 0$$

Définition

Si une fonction g, définie sur un intervalle de la forme]o, r[(où r est un nombre réel strictement positif), coïncide sur cet intervalle avec une fonction j de limite l en 0, on dit que g **admet la limite l à droite en 0** et on écrit :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} g(h) = l$$

De même si g est définie sur un intervalle]– r, o[(avec $r \in \mathbb{R}_+^*$) et coïncide sur cet intervalle avec une fonction de limite l en 0, on dit que g **admet la limite l à gauche en 0** et on écrit :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} g(h) = l$$

Méthode pratique

Pour étudier la limite à gauche, ou à droite d'une fonction g en 0.

On étudie une fonction j avec laquelle g coïncide sur un intervalle $]-r, 0[$ (respectivement $]0, r[$) et, de la limite de j en 0, on déduit la limite de g à gauche (respectivement à droite) en 0.

Ainsi par exemple la fonction E, qui à un nombre réel associe sa partie entière, coïncide

sur $[0, 1[$ avec $j_0 : x \mapsto 0$
sur $[-1, 0[$ avec $j_1 : x \mapsto -1$

Comme $\lim\limits_{0} j_0 = 0$ et $\lim\limits_{0} j_1 = -1$

on a : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} E(h) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} E(h) = -1$

donc la fonction E n'a pas de limite en 0.

Remarques :

1/ Si une fonction admet une limite à droite (respectivement à gauche) en 0 alors celle-ci est unique.

2/ Soit une fonction qui admet une limite à droite et une limite à gauche en 0. Si celles-ci sont toutes deux le même nombre réel l alors la restriction de f à $\mathbb{R}^*$ admet l pour limite en 0. Si elles sont différentes alors la fonction f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 12 Étudier la limite en 0 (éventuellement à droite, ou à gauche), des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto \sqrt{x\,(x-1)}$

2/ $h \mapsto \dfrac{\sin h}{\sqrt{h}}$

3/ $t \mapsto E(|t|)$

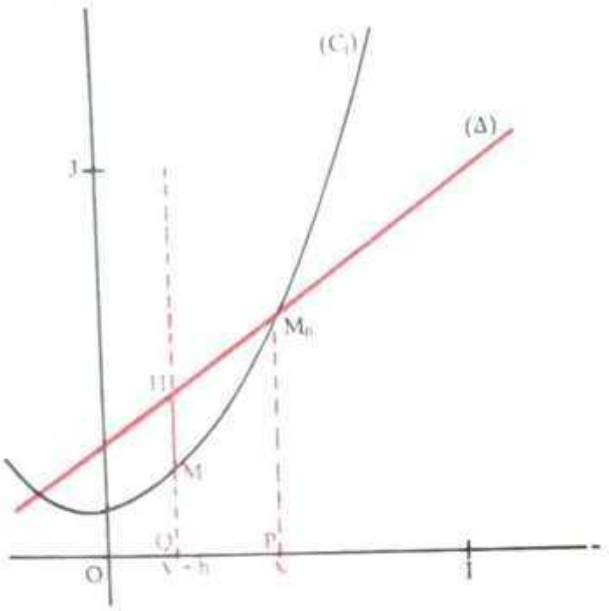
4/ $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$

5 Approximation affine — Nombre dérivé

1) Développement limité à l'ordre 1

Soient f une fonction de courbe représentative (C_f) dans un repère (O, I, J) du plan et x_0 un nombre réel tel que f soit définie sur un intervalle de centre x_0.

On considère le point M_0 de (C_f) d'abscisse x_0 et (Δ) une droite non parallèle à (OJ) de coefficient directeur a et passant par M_0.



Pour h « assez proche » de 0 on a considéré le point M de (Cf) d'abscisse $x_0 + h$ et le point H de (Δ) d'abscisse également $x_0 + h$, et on a posé $\varphi(h) = HM$.

Question 13 *Donner une équation de la droite (Δ).*
Calculer l'ordonnée du point H.
Vérifier que $\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$.

On a vu que le cas où (Δ) est tangente à (Cf) en M_0 correspond au cas où :
$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$.

Il faut donc étudier la fonction j définie par : $j(h) = \frac{\varphi(h)}{h}$, ou, plus précisément étudier $\lim_{0} j$.

Or, on a : $\varphi(h) = h\, j(h)$ pour $h \neq 0$
donc, en remplaçant $\varphi(h)$ par l'expression trouvée à la question 13, on a :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\, j(h)$.

Definition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le nombree réel x_0.

On dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0** si et seulement si il existe un nombre réel a et une fonction j définie sur un intervalle I de centre 0 (sauf peut-être en 0) tels que

- $\forall h \in I - \{0\}$ $\quad f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\, j(h)$
- $\lim_{0} j = 0$

Cette écriture de la fonction $[h \mapsto f(x_0 + h)]$ comme somme d'une fonction affine $[h \mapsto f(x_0) + ah]$ et d'une fonction $[h \mapsto h\, j(h)]$ avec $\lim_{0} j = 0$ est appelée **développement limité à l'ordre 1 de f en x_0.**

Remarques :

1/ On admettra que si une fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, alors ce développement est unique (c'est-à-dire le nombre réel a et la fonction j sont uniques).

2/ Lorsque $[h \mapsto f(x_0) + ah + h\,j(h)]$ est le développement limité à l'ordre 1 de f en x_0, le nombre $f(x_0) + ah$ est, pour tout h élément de I, une valeur approchée de $f(x_0 + h)$, l'erreur commise étant $h\,j(h)$ (l'**erreur** est la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée).

3/ Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 alors :
$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. On notera que : $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{0} f \circ t_{x_0}$, où $t_{x_0} : h \mapsto h + x_0$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre x_0. f est **continue en x_0** si et seulement si $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Ainsi on a le résultat :

Théorème

Si une fonction admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 alors cette fonction est continue en x_0.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple la fonction $[x \mapsto |x|]$ est continue en zéro mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1. (Voir exercice 36).

Question 14 *Soit f la fonction définie par :*

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

Vérifier à l'aide d'une calculatrice que pour des valeurs de x proches de 1, f(x) est très proche de 4.

On dit dans ce cas que, lorsque x tend vers 1, f(x) tend vers 4 ou que la limite de f(x) quand x tend vers 1 est 4 et on note $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$.

Question 15 *A partir de la fonction f de la question 14, vérifier que la fonction g définie par*

$g : h \mapsto f(1 + h)$

a pour limite 4 en 0.

Ainsi on aura $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$ lorsque $\lim_{h \to 0} f(1 + h) = 4$

Plus généralement on pose :

Definition

Soient x_0 et l deux nombres réels et f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[$, où r est un nombre réel strictement positif.

La **fonction f a pour limite en x_0 le nombre réel l**, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$, si et seulement si la fonction $[h \mapsto f(x_0 + h)]$ a pour limite l en 0.

Remarque :

1/ Si la fonction f a une limite en x_0, cette limite est unique.

2/ Si f est définie en x_0 alors on dit que f a pour limite le nombre réel l en x_0 si et seulement si la restriction de f à $D_f - \{x_0\}$ a pour limite l en x_0 et $f(x_0) = l$.

Ainsi, lorsqu'une fonction f est définie sur un intervalle de centre x_0, f a pour limite le nombre réel l en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = l$ et $l = f(x_0)$.

C'est-à-dire f est continue en x_0 si et seulement si f a pour limite en x_0 le nombre réel $f(x_0)$.

3/ De même que l'on a défini la notion de limite à droite (et à gauche) en 0 d'une fonction, on a la notion de limite à droite (et à gauche) en x_0 d'une fonction :

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ signifie que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h) = l$.

De même on a la notion de continuité à droite (et à gauche) d'une fonction en x_0 :

Si f est définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + r[$, alors f est continue à droite en x_0 si et seulement si la limite à droite en x_0 de f est $f(x_0)$.

Si une fonction f est continue à droite et à gauche en x_0 alors f est continue en x_0.

Question 16 *Utiliser la limite de la valeur absolue d'une fonction en 0 pour prouver que si une fonction f a pour limite le nombre réel l en x_0 alors la fonction $|f|$ a pour limite $|l|$ en x_0.*

En déduire que si une fonction f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est continue en x_0.

On retiendra le résultat :

Théorème

Soient x_0 un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de centre x_0.

Si f est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est aussi continue en x_0.

Plus généralement les théorèmes portant sur les opérations sur les limites en 0 d'une fonction sont encore vrais pour les limites en x_0.

Question 17 *Soit f la fonction définie par :*

$\forall x \in]\leftarrow, 1]$ $\quad f(x) = 2x - 3$

$\forall x \in]1, \rightarrow[$ $\quad f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

Démontrer que f est continue à gauche en 1 mais pas à droite en 1. Pour dire que f n'est pas continue en 1, on dit que f est **discontinue** *en 1.*

Tracer la courbe représentative de f.

La fonction f admet-elle un développement limité à l'ordre 1 en 1 ?

Exercice 13 Étudier la continuité en x_0 pour chacune des fonctions données ci-dessous :

1/ $x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$ et $x_0 = 2$

2/ $x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x - 1}$ et $x_0 = 3$

3/ $x \mapsto |x^2 + 5x - 6|$ et $x_0 = 1$

4/ f définie par :

$\forall x \in]\leftarrow, -2[$ $\quad f(x) = 8x^2 - 3x$

$f(-2) = -1$

$\forall x \in]-2, \rightarrow[$ $\quad f(x) = 5x + 9$

et $x_0 = -2$

Méthode pratique

Pour trouver l'éventuel développement limité à l'ordre 1 de la fonction en x_0.

On cherche à exprimer, pour tout nombre réel h assez proche de 0 (l'intervalle I sera donné par les calculs) le nombre réel $f(x_0 + h) - f(x_0)$ sous la forme $ah + h\,j(h)$ où a est un nombre réel indépendant de h et j une fonction de limite nulle en 0.

Ainsi par exemple montrons que la fonction f définie par $f(x) = x^2$, admet un développement limité à l'ordre 1 en tout nombre réel x_0 :

Soit h un nombre réel. On a :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2$$
$$= 2x_0 h + h^2$$

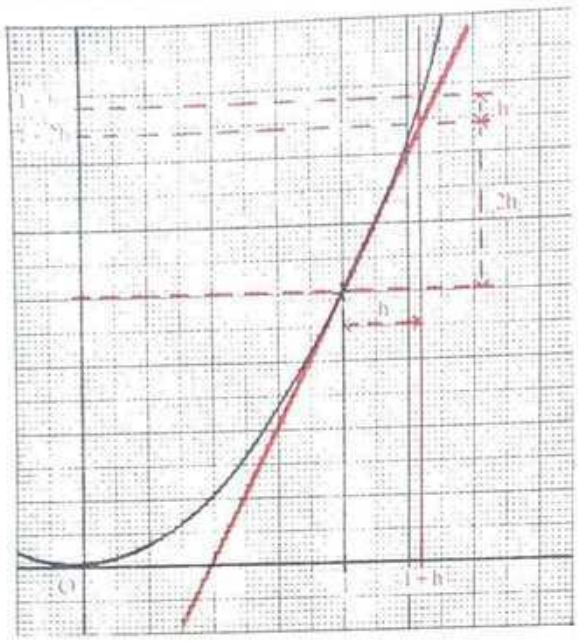
En prenant : I un intervalle quelconque de centre 0

$a = 2x_0$

et $j : h \mapsto h$

On a : $\forall h \in I \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,j(h)$

et $\lim_0 j = 0$



Utilisons ce développement limité pour donner une valeur approchée du carré d'un nombre proche de 1.

D'après le calcul précédent, en prenant x_0 égal à 1, $(1 + h)^2$ a pour valeur approchée $1 + 2h$ avec une erreur égale à h^2 (pour tout h, tel que $|h|$ soit « petit »).

Ainsi, par exemple, $(1{,}0001)^2$ a pour valeur approchée 1,0002 avec une erreur de 10^{-8} (on prend $h = 10^{-4}$).

Question 18 *Quelle est la valeur affichée par la calculatrice pour $(1{,}000\,000\,6)^2$?*
Quelle est l'erreur commise par la calculatrice ?
Quel est le résultat exact ?

Question 19 *Déterminer l'ensemble des nombres réels h tels que $1 + 2h$ soit une valeur approchée de $(1 + h)^2$ avec une incertitude égale à 10^{-6}.*

L'erreur commise en remplaçant $(1 + h)^2$ par $1 + 2h$ est h^2. Le nombre h étant dans l'intervalle trouvé, l'incertitude 10^{-6} est un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise.

Plus généralement, un nombre a est une valeur approchée d'un nombre réel x avec une incertitude égale à l si et seulement si l'erreur commise en remplaçant x par a est, en valeur absolue, inférieure ou égale à l. Autrement dit, l'**incertitude l** est un majorant de la valeur absolue de l'erreur $x - a$.

Exercice 14 Calculer mentalement une valeur approchée de $(1{,}000\,002\,9)^2$ et donner, sous la forme 10^{-n} avec n entier naturel, l'incertitude associée.

Exercice 15 Donner une valeur approchée à 10^{-n} près (l'entier naturel n étant le plus grand possible) des carrés des nombres réels suivants :
1/ 0,9999 3/ 0,998
2/ 1,003 4/ 1,00076

Exercice 16 Utiliser la même méthode pour déterminer une valeur approchée des carrés des nombres réels suivants :
1/ 2,006 3/ − 1,004
2/ 2,9997 4/ − 3,999

2) Approximation affine

Le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f en un nombre réel x_0, fait apparaître une fonction affine ; en effet dans l'égalité

$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,j(h)$

notons x le nombre réel $x_0 + h$; on a alors

$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\,j(x - x_0)$

et, d'après ce qui précède, pour $x - x_0$ dans I, f(x) a pour valeur approchée $f(x_0) + a(x - x_0)$, c'est-à-dire $ax + [f(x_0) - ax_0]$.

Soit $t : x \mapsto ax + [f(x_0) - ax_0]$.

Pour x proche de x_0, t(x) est une valeur approchée de f(x). Cette fonction affine t, obtenue à partir du développement limité de f en x_0 est appelée **l'approximation affine de f au voisinage de x_0.**

Reprenons l'exemple de $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

On a vu, graphiquement, que pour x proche de 0, le nombre réel f(x) a pour valeur approchée $1 + \frac{x}{2}$; et la position de la courbe représentative (Γ) de f et de la droite représentant la fonction affine $\left[t : x \mapsto 1 + \frac{x}{2}\right]$ montre que f(x) est inférieur à t(x).

Cherchons, pour tout x élément de $[-1, \to[$, un majorant de t(x) − f(x).

Soit x un nombre réel supérieur ou égal à − 1. On a :

$t(x) - f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1 + x}$.

Puisque $x \geqslant -1$, on a $1 + \frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{2}$

donc $1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1 + x}$ est non nul.

Ainsi on a :

$$t(x) - f(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (\sqrt{1 + x})^2}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1 + x}}$$

$$= \frac{x^2}{4} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1 + x}}$$

Or on a : $1 + \frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{2}$

d'où : $1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1 + x} \geqslant \frac{1}{2}$

par conséquent :

$$0 \leqslant \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1 + x}} \leqslant 2$$

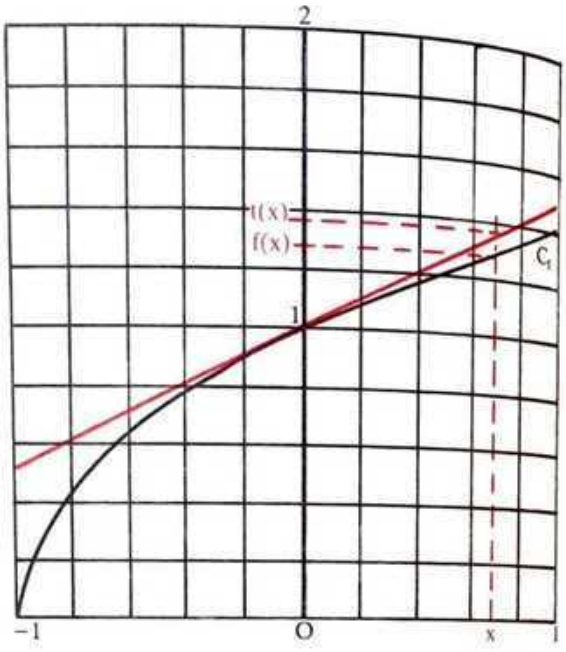
Donc

$$0 \leqslant t(x) - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Pour tout x élément de $[-1, \to[$, $\frac{x^2}{2}$ est donc un majorant de $|t(x) - f(x)|$.

Autrement dit on a le résultat suivant :

lorsque le nombre réel x est proche de 0, $1 + \frac{x}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1 + x}$ à $\frac{x^2}{2}$ près.



Exercice 17 Donner une valeur approchée, grâce à ce procédé et en précisant l'incertitude, des nombres réels suivants :

1/ $\sqrt{1{,}04}$ 3/ $\sqrt{0{,}9998}$

2/ $\sqrt{1{,}0002}$ 4/ $\sqrt{0{,}994}$

Exercice 18 En se ramenant au procédé ci-dessus, donner une valeur approchée et l'incertitude associée, des nombres réels suivants :

1/ $\sqrt{4{,}08}$ 2/ $\sqrt{9{,}0018}$ 3/ $\sqrt{15{,}9998}$

Question 20 *Soit f :* $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Trouver le développement limité à l'ordre 1 de f en 1.

En déduire qu'une valeur approchée, pour h proche de 0, de $\frac{1}{1 + h}$ *est* $1 - h$ *avec une erreur de* $\frac{h^2}{1 + h}$.

Exercice 19 Trouver le plus petit nombre de la forme $k\,10^{-n}$ (avec $k \in \{1, 2, \ldots 9\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) tel que pour tout nombre réel h de $]-10^{-2}, 10^{-2}[$, $1 - h$ soit une valeur approchée de $\frac{1}{1 + h}$ à $k.10^{-n}$ près.

Exercice 20 Trouver le plus grand intervalle de centre 2 tel que, pour tout nombre réel x de cet intervalle, le nombre réel $4x - 4$ soit une valeur approchée à 10^{-2} près de x^2.

Exercice 21 Donner une valeur approchée, pour h dans un certain intervalle de centre 0 à préciser, du nombre réel $(1 + h)^3$.

3) Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0. Si f admet au voisinage de x_0 le développement limité à l'ordre 1 : $f(x_0) + ah + h\,j(h)$, où a est un nombre réel et j une fonction de limite nulle en 0, alors le nombre réel a est unique, on l'appelle le **nombre dérivé de la fonction f en x_0**, et on le note $f'(x_0)$.

La fonction f est dite **dérivable en x_0** si et seulement si f admet un nombre dérivé en x_0, c'est-à-dire si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

Question 21 *Montrer que la fonction $[f : x \mapsto 3x - 2]$ est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.*

Plus généralement, soit f une fonction affine :

$f : x \mapsto ax + b$

Puisque, pour tout nombre réel x_0 et pour tout nombre réel h, on a :

$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah$

on en déduit que la fonction f admet un développement limite à l'ordre 1 en x_0 (la fonction j est alors la fonction nulle). Ainsi la fonction affine $[x \mapsto ax + b]$ est dérivable en tout x_0 et de nombre dérivé a.

Exercice 22 Utiliser le développement limité pour prouver que la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ est dérivable en tout x_0 non nul et de nombre dérivé $-\frac{1}{x_0^2}$ en x_0.

Soit f une fonction admettant pour développement limité à l'ordre 1 en x_0 :

$f(x_0) + ah + h\,j(h)$

où $\lim_0 j = 0$ et a est le nombre dérivé de f en x_0.

On a, pour tout nombre réel h dans un certain intervalle I de centre 0

$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\,j(h)$

c'est-à-dire, pour h dans I et non nul

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + j(h)$$

Et alors $\lim_{0} j = 0$ se traduit par :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

On admet que réciproquement si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$ alors il existe un développement limité d'ordre un en x_0 pour f. (Exercice 37). On a alors :

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre x_0.

f est dérivable en x_0 si et seulement si la fonction qui au nombre réel h associe $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un nombre réel a lorsque h tend vers 0 ; et dans ce cas, on a : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Méthode pratique

Pour trouver l'éventuel nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0, on forme le rapport $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, qu'il est nécessaire de transformer, pour chercher sa limite quand h tend vers 0. Souvent mettre h en facteur dans le numérateur et remplacer h par 0 dans l'expression simplifiée permettront d'obtenir le résultat. Ainsi par exemple, montrons que la fonction

$f : x \mapsto x^2 + 4x + 7$

est dérivable en 1 et trouvons son nombre dérivé :

soit h un nombre réel non nul

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + h)^2 + 4(1 + h) + 7 - (1 + 4 + 7)}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$= h + 6$$

d'où : $\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 6)$

$$= 6$$

f est donc dérivable en 1 et $f'(1) = 6$.

($[h \mapsto 12 + 6h + h^2]$ est le développement limité de f à l'ordre 1).

Exercice 23 Montrer que la fonction $[x \mapsto x^2 - 3x + 4]$ est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$ et trouver son nombre dérivé en x_0.

Exercice 24 Trouver le nombre dérivé en tout point x_0 de l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{3x}{x-2}$.

Exercice 25 Montrer que la fonction $[x \mapsto \sqrt{x}]$ est dérivable en tout nombre réel x_0 strictement positif et trouver son nombre dérivé en x_0.

4) Nombre dérivé et tangente

D'après l'étude faite au paragraphe précédent, si une fonction f est dérivable au point x_0 de son ensemble de définition, et de nombre dérivé $f'(x_0)$ en x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, donné par :

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + h\, j(h)$, avec $\lim_0 j = 0$.

En notant x le nombre $x_0 + h$, on a obtenu :

$f(x) = t(x) + (x - x_0)\, j(x - x_0)$

où $t : x \mapsto f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

c'est-à-dire que t est l'approximation affine de f en x_0. Cette application affine t est représentée par une droite que, graphiquement, on a appelé tangente au début du chapitre.

Définition

Soient x_0 un nombre réel, f une fonction dérivable en x_0 et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère $\mathcal{R}$ du plan.

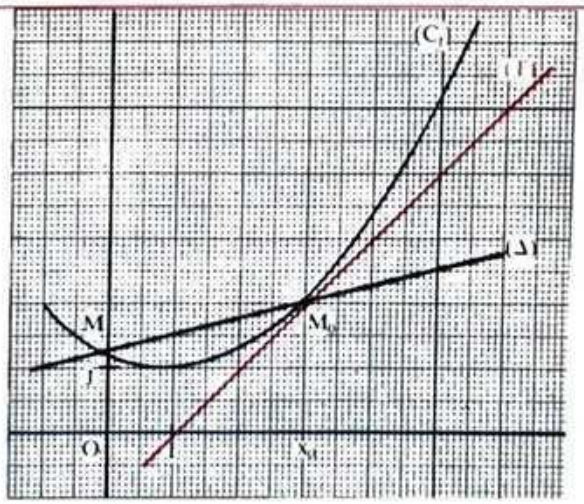
On appelle **tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0,** la droite représentant graphiquement dans $\mathcal{R}$, l'approximation affine de f en x_0.

Remarques :

1/ Soit M_0 le point de (C_f) d'abscisse x_0.

La tangente (T) en M_0 à (C_f) est la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Elle a pour équation :
$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$.



2/ A tout nombre réel h tel que $x_0 + h$ soit dans l'ensemble de définition de f, on associe le point M de (C_f) d'abscisse $x_0 + h$. Pour h non nul, le nombre $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (M_0M). Or $f'(x_0)$ est la limite de ce rapport quand h tend vers 0, et c'est le coefficient directeur de la tangente (T) à (C_f) en M_0. Cette tangente (T) apparaît donc comme la « position limite » de la sécante (M_0M) lorsque le point M s'approche du point M_0.

3/ Il n'y a pas équivalence entre [f est dérivable en x_0] et [(C_f) admet une tangente en M_0]. Exemple : la fonction $[x \mapsto -\sqrt[3]{x - 1} + 2]$ au point d'abscisse 1 étudiée au début du paragraphe III.

Exercice 25 Tracer et donner une équation de la tangente au point d'abscisse 3 de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.

5) Demi-tangentes

Question 22 *Tracer la représentation graphique (C_f) de la fonction $[f : x \mapsto x^2 - 1]$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.*

Déterminer et tracer la tangente (T) à (C_f) en $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Pourquoi la fonction g n'est-elle pas dérivable en 0 ?

On dit que le point A est un **point d'arrêt** de la courbe (C_g) de g dans (O, I, J). La demi-droite obtenue comme intersection de (T) et du demi-plan [(OJ), I) est appelée **demi-tangente** à la courbe (C_g) en A.

Question 23 *Démontrer que la fonction h de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1, \rightarrow[$ qui, à tout nombre réel positif x associe g(x), égal à $(x^2 - 1)$, est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}.*

Tracer la représentation graphique de h^{-1}, en utilisant la courbe (C_g) et une symétrie convenablement choisie. Tracer l'image de la demi-tangente en A à (C_g) par cette symétrie, et la caractériser analytiquement.

Cette dernière demi-droite [A'y) est encore appelée **demi-tangente** à la courbe représentative (C) de h^{-1} au point $A' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le point A' est encore appelé **point d'arrêt** pour (C).

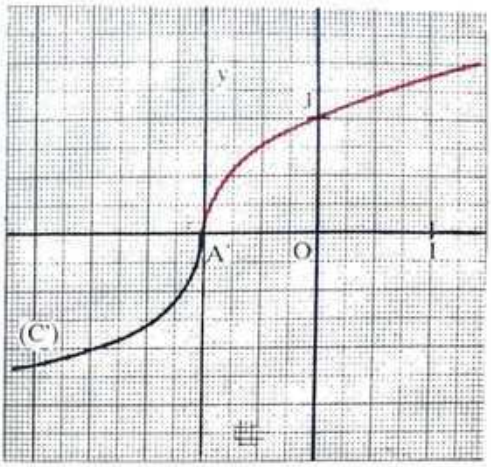
La fonction h^{-1} n'est pas dérivable en -1 car son ensemble de définition est $[-1, \rightarrow[$.

Précédemment la fonction g n'était pas dérivable en 0 mais f, qui était un prolongement de g à $\mathbb{R}$, était dérivable en 0. Le cas de la fonction h^{-1} est différent :

Question 24

La courbe (C') ci-contre représente un prolongement j de h^{-1} à $\mathbb{R}$. (C') admet la droite d'équation $x = -1$ comme tangente en A'.

Cette fonction j est-elle dérivable en -1 ?



La droite, support de la demi-tangente [A'y) à (C) en A', a pour équation $x = -1$, donc elle n'a pas de coefficient directeur. Soit j un prolongement de h^{-1} à $\mathbb{R}$. Si j est dérivable en -1 alors sa courbe (C_j) admet une tangente en A', qui a comme coefficient directeur le nombre dérivé de j en -1.

Or, si (C_j) admet une tangente en A', cette tangente est nécessairement la droite d'équation $x = -1$.

Donc, aucun prolongement de h^{-1} ne peut être dérivable en -1.

Question 25

Soit f la fonction définie par :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 + 3x - 4$

1/ Vérifier que f est dérivable en tout nombre réel x_0 et donner le nombre dérivé de f en x_0.

Tracer, dans un repère orthonormé (O, I, J) ; la courbe représentative (C_f) de f, et les tangentes respectives (T_1) et (T_4) aux points de (C_f) d'abscisse 1 et (-4).

2/ On considère la fonction g, égale à $|f|$.

Tracer, dans le repère (O, I, J) la courbe représentative (C_g) de g.

Vérifier que g est dérivable en tout nombre réel x_0 de $]\leftarrow, -4[\cup]1, \rightarrow[$.

Sur $]\leftarrow, -4[$, g coïncide avec f et comme f est dérivable en 1 et de nombre dérivé (-5), on dit que g est **dérivable à gauche en (-4)** et **le nombre dérivé à gauche en 1 de g** est (-5).

De même, g coïncide avec f sur $[1, \rightarrow[$ et f est dérivable en 4 dont g est **dérivable à droite** en 1 et le **nombre dérivé à droite en** 1 de g est $f'(1)$.

Question 26

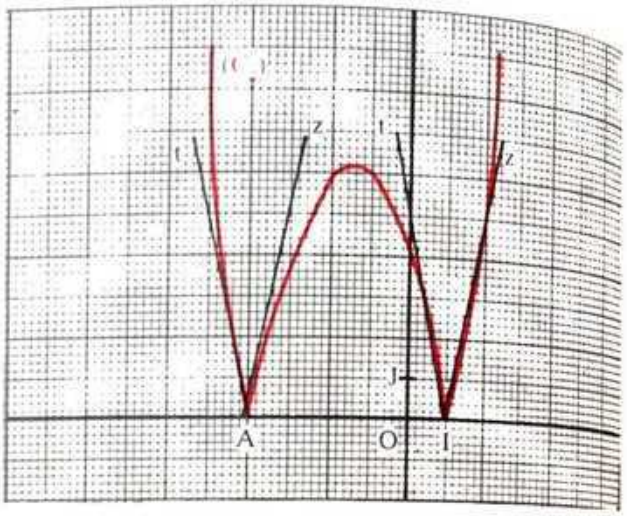
Vérifier que la fonction $(-f)$ est dérivable en tout nombre réel x_0 et calculer ses nombres dérivés en 1 et (-4).

En déduire que g est dérivable à droite en (-4) et donner son nombre dérivé à droite en (-4).

Montrer que g est dérivable à gauche en 1 et donner son nombre dérivé à gauche en 1.

Ainsi g est dérivable à gauche et à droite en 1 mais comme les nombres dérivés à gauche et à droite sont distincts, g n'est pas dérivable en 1.

La courbe (C_g) de g admet au point $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ deux demi-tangentes : l'une de coefficient directeur 5 : [Iz)
l'autre de coefficient directeur -5 : [It).



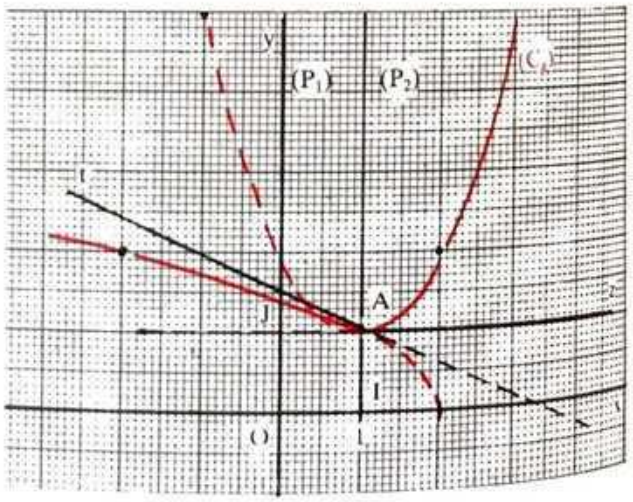
[Iz) est la partie de (T_1) contenue dans le demi-plan [(OI), J).

[It) est la symétrique par rapport à (OI) de la demi-droite partie de (T_1) contenue dans l'autre demi-plan de frontière (OI). Comme ces deux demi-droites ne sont ni opposées ni confondues, on dit que le point I est un **point anguleux de** (C_g).

Autre exemple : soit f la fonction définie par :

$\forall x < 1 \quad f(x) = \sqrt{2 - x}$
$\forall x \geqslant 1 \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$

représentée par la courbe (C_f) dans le repère ci-contre.



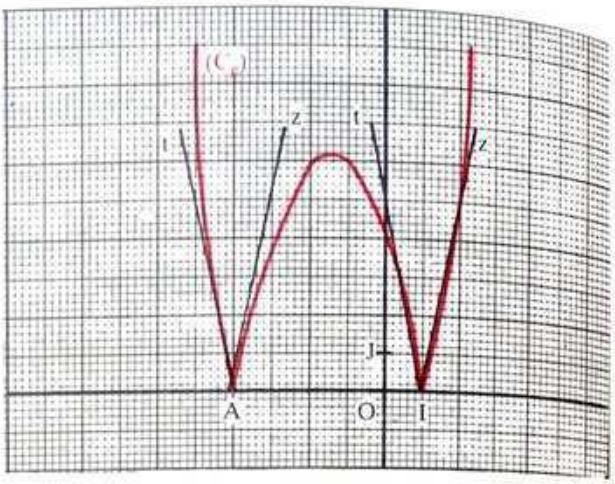
• f coïncide sur $]\leftarrow, 1]$ avec la fonction $[f_1 : x \mapsto \sqrt{2 - x}]$. Cette fonction f_1 est dérivable en 1 et $f'_1(1)$ est égal à $\left(-\frac{1}{2}\right)$, qui est le coefficient directeur de la tangente (T_1) à la courbe (C_{f_1}) représentant f_1, au point d'abscisse 1. On en conclut que f est dérivable à gauche en 1.

• f coïncide sur $[1, \rightarrow[$ avec la fonction $[f_2 : x \mapsto x^2 - 2x + 2]$. Cette fonction f_2 est dérivable en 1 et $f'_2(1) = 0$. Ce nombre est le coefficient directeur de la tangente (T_2) au point d'abscisse 1 à la courbe (C_{f_2}) représentant f_2. La fonction f est donc dérivable à droite en 1.

• Les deux nombres dérivés à gauche et à droite sont différents. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

Ainsi g est dérivable à gauche et à droite en 1 mais comme les nombres dérivés à gauche et à droite sont distincts, g n'est pas dérivable en 1.

La courbe (C_g) de g admet au point $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ deux demi-tangentes : l'une de coefficient directeur 5 : [Iz)
l'autre de coefficient directeur -5 : [It).



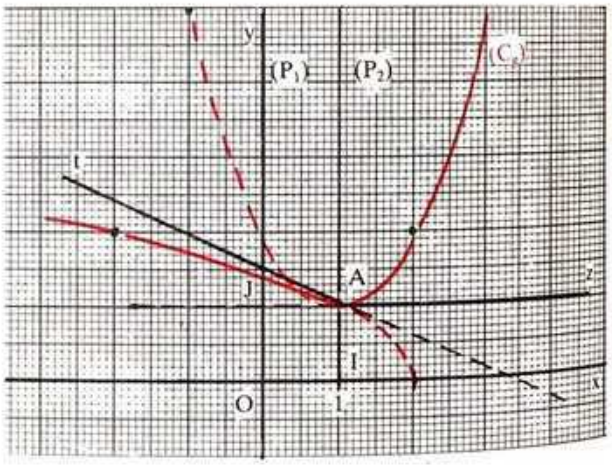
[Iz) est la partie de (T_1) contenue dans le demi-plan [(OI), J).

[It) est la symétrique par rapport à (OI) de la demi-droite partie de (T_1) contenue dans l'autre demi-plan de frontière (OI). Comme ces deux demi-droites ne sont ni opposées ni confondues, on dit que le point I est un **point anguleux de** (C_g).

Autre exemple : soit f la fonction définie par :

$\forall x < 1 \quad f(x) = \sqrt{2 - x}$
$\forall x \geqslant 1 \quad f(x) = x^2 - 2x + 2$

représentée par la courbe (C_f) dans le repère ci-contre.



• f coïncide sur $]\leftarrow, 1]$ avec la fonction $[f_1 : x \mapsto \sqrt{2 - x}]$. Cette fonction f_1 est dérivable en 1 et $f'_1(1)$ est égal à $\left(-\frac{1}{2}\right)$, qui est le coefficient directeur de la tangente (T_1) à la courbe (C_{f_1}) représentant f_1, au point d'abscisse 1. On en conclut que f est dérivable à gauche en 1.

• f coïncide sur $[1, \rightarrow[$ avec la fonction $[f_2 : x \mapsto x^2 - 2x + 2]$. Cette fonction f_2 est dérivable en 1 et $f'_2(1) = 0$. Ce nombre est le coefficient directeur de la tangente (T_2) au point d'abscisse 1 à la courbe (C_{f_2}) représentant f_2. La fonction f est donc dérivable à droite en 1.

• Les deux nombres dérivés à gauche et à droite sont différents. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1.

• La courbe (C_1) admet au point A $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ deux demi-tangentes, l'une de coefficient directeur zéro (notée [Az)), l'autre de coefficient directeur $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (notée [At)).

[At) est la partie de (T_1) contenue dans le demi-plan (P_1) tel que :

$$(P_1) = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \; ; \; x \leqslant 1\right\}$$

[Az) est la partie de (T_2) contenue dans le demi-plan (P_2) tel que :

$$(P_2) = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{P} \; ; \; x \geqslant 1\right\}$$

Remarque : on peut toujours caractériser les parties de $\mathcal{P}$ (demi-plans ou bandes) en se référant à l'ensemble de définition de la fonction étudiée. C'est-à-dire, « régionaliser $\mathcal{P}$ en fonction de x ».

Définition

Soient x_0 un nombre réel, g une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0]$ (respectivement $[x_0, x_0 + r[$) où r est un nombre réel strictement positif et l un nombre réel.

g est **dérivable à gauche en** x_0 (resp. **à droite** en x_0) et **admet pour nombre dérivé à gauche en** x_0 (resp. **à droite** en x_0) le nombre réel l si et seulement si le rapport $\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$ admet la limite l à gauche (resp. à droite) quand h tend vers 0.

Remarque

Si une fonction g est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors :

• si les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux au même nombre réel l alors g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = l$.

• si les nombres dérivés à gauche et à droite sont distincts, alors g n'est pas dérivable en x_0 mais la courbe de g admet deux demi-tangentes au point A d'abscisse x_0 ; le point A est un point anguleux de la courbe.

Méthode pratique

Pour étudier la dérivabilité en x_0 d'une fonction g qui coïncide avec deux fonctions différentes f_1 et f_2 respectivement sur des intervalles $]x_0 - r_1, x_0]$ et $[x_0, x_0 + r_2[$ avec f_1 et f_2 dérivables en x_0 (ce qui suppose donc que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$).

g est dérivable à gauche en x_0 et de nombre dérivé à gauche $f'_1(x_0)$

g est dérivable à droite en x_0 et de nombre dérivé à droite $f'_2(x_0)$.

On examine alors si $f'_1(x_0)$ et $f'_2(x_0)$ sont égaux ou distincts.

Dans le 1er cas, g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = f'_1(x_0)$.

Dans le 2e cas, g n'est pas dérivable en x_0.

Ne pas oublier de montrer la coïncidence de g avec f_1 et f_2 sur les intervalles fermés en x_0 ! Ainsi si $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, inutile d'étudier la dérivabilité de g en x_0, car g n'y est pas continue.

Étudions par exemple la dérivabilité en 2 de la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-3, 2] & g(x) = x^2 - 3x + 3 \\ \forall x \in]2, 4[& g(x) = x - 1 \end{cases}$$

On considère les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(x) = x^2 - 3x + 3$ et $f_2(x) = x - 1$

Soit h un nombre réel non nul

$$\frac{f_1(2+h) - f_1(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 3 - (4 - 6 + 3)}{h}$$

$$= \frac{h^2 + h}{h}$$

$$= h + 1$$

donc f_1 est dérivable en 2 et $f'_1(2) = 1$.

f_2 est affine donc dérivable en tout nombre réel x_0, en particulier en 2, et $f'_2(2) = 1$.

La fonction g coïncide avec f_1 sur $]-3, 2]$, comme f_1 est dérivable en 2, g est dérivable à gauche en 2 et de nombre dérivé à gauche en 2 : $f'_1(2)$, c'est-à-dire 1.

Puisque $f_2(2) = 1$ et $g(2) = f_1(2)$
$= 1$

la fonction g coïncide avec f_2 sur $[2, 4[$, de plus f_2 est dérivable en 2, donc g est dérivable à droite en 2 et de nombre dérivé à droite en 2 : $f'_2(2)$, c'est-à-dire 1.

Comme les nombres dérivés à gauche et à droite en 2 de g sont tous deux égaux à 1, g est dérivable en 2 et $g'(2) = 1$.

Exercice 27 Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans chacun de cas suivants :

1/ $f : x \mapsto |x^2 - 6x + 9|$ $\quad x_0 = 3$

2/ $f : x \mapsto |x - 2| + 4$ $\quad x_0 = 2$

3/ $f : x \mapsto \sqrt{x - 3}$ $\quad x_0 = -1$

4/ $f : x \mapsto |x + 1| + |x + 2|$ $\quad x_0 = -2$

5/ f est définie par : $\forall x \in]\leftarrow, 1]$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad x_0 = 1$
$\forall x \in]1, \rightarrow[$ $\quad f(x) = -x + 1$

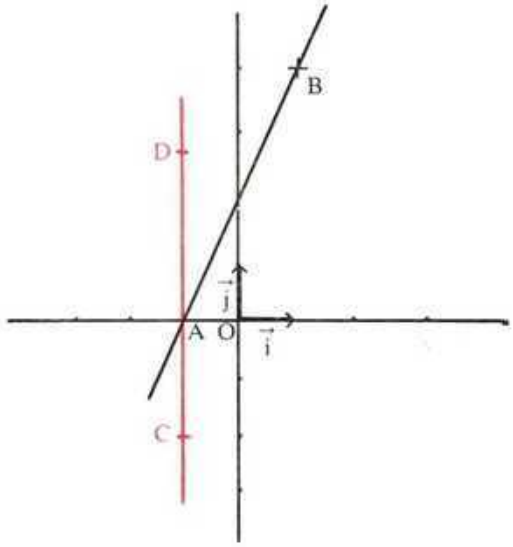
Exercice 28 Soient x_0 un nombre réel et f une fonction dérivable en x_0 et s'annulant en x_0.

Montrer que si le nombre dérivé de f en x_0 est 0, alors la fonction $|f|$ est dérivable en x_0.

Montrer que si le nombre dérivé de f en x_0 n'est pas nul, alors la fonction $|f|$ est dérivable à gauche et à droite en x_0 mais n'est pas dérivable en x_0.

Réponses aux questions

Q 1 :



1/ Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{P}$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées 1 et 2 et c'est un vecteur directeur de (AB). C'est le seul vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ de première coordonnée égale à 1.

2/ $M \in (CD) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ y+2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 5(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{CD}$, qui est un vecteur directeur de (CD) a pour première coordonnée 0, tout vecteur directeur de (CD), étant colinéaire à $\overrightarrow{CD}$, a aussi pour première coordonnée 0. Donc un vecteur de première coordonnée 1 ne peut pas être vecteur directeur de (CD).

Q 2 : Puisque t est affine il existe deux nombres réels a et b tels que :

$t : x \mapsto ax + b$

Sur la figure on constate que le coefficient directeur de la droite représentant t est $\frac{1}{2}$, en effet quand « on se déplace de 1 cm vers la droite on monte de $\frac{1}{2}$ cm » donc $a = \frac{1}{2}$. De plus la droite passe par le point $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ donc $a \cdot 0 + b = 1$, c'est-à-dire $b = 1$.

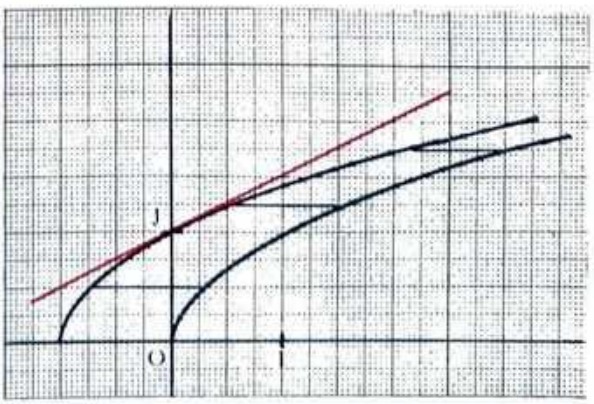
Ainsi on a

$t : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$

x	− 0,01	− 0,008	− 0,006	− 0,004	− 0,002
arrondi d'ordre 6 de f(x)	0,994987	0,995992	0,996995	0,997998	0,998999
t(x)	0,995	0,996	0,997	0,998	0,999

x	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
arrondi d'ordre 6 de f(x)	1	1,001000	1,001998	1,002996	1,003992	1,004988
t(x)	1	1,001	1,002	1,003	1,004	1,005

Q 3 :



Q 4 : $M \in (C_g) \Leftrightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

1er cas $y < 0$, alors $y = \sqrt{25 - x^2}$ est impossible car $\sqrt{25 - x^2}$ est positif ou nul.

2e cas $y \geqslant 0$ alors on a

$$y = \sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = 25 - x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Ainsi on a :

$M \in (C_g) \Leftrightarrow (y \geqslant 0$ et $x^2 + y^2 = 25)$.

C'est-à-dire que (C_g) est l'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + y^2 = 25$, qui a pour centre 0 et pour rayon 5, et du demi-plan, ensemble des points d'ordonnée positive ou nulle, autrement dit [(OI), J).

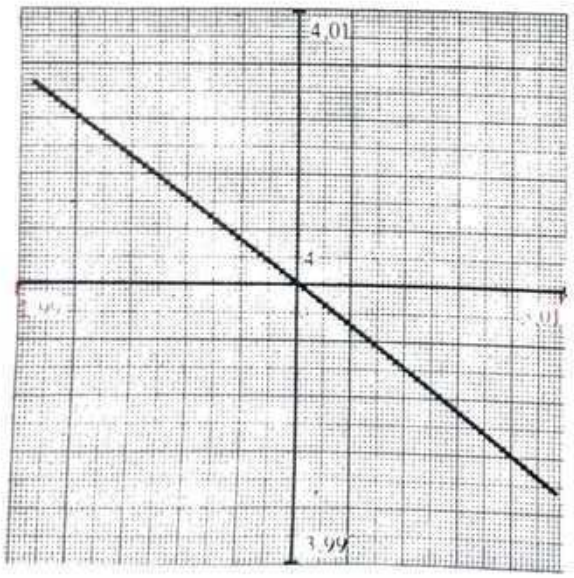
puisque $\sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16}$
$= 4$

le point $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ appartient à (C_g).

Q 5 :

x	2,99	2,992	2,994	2,996	2,998
arrondi d'ordre 6 de g(x)	4,007481	4,005988	4,004493	4,002997	4,001499

x	3	3,002	3,004	3,006	3,008	3,01
g(x)	4	3,998499	3,996997	3,995493	3,993987	3,992480



Q 6 : Cette droite a pour coefficient directeur $-\frac{3}{4}$ (on le constate sur le dessin ou on calcule par exemple $\frac{g(3,004) - g(3)}{0,004}$) donc T est de la forme

$T : x \mapsto -\frac{3}{4}x + b$

De plus on a $T(3) = 4$ donc

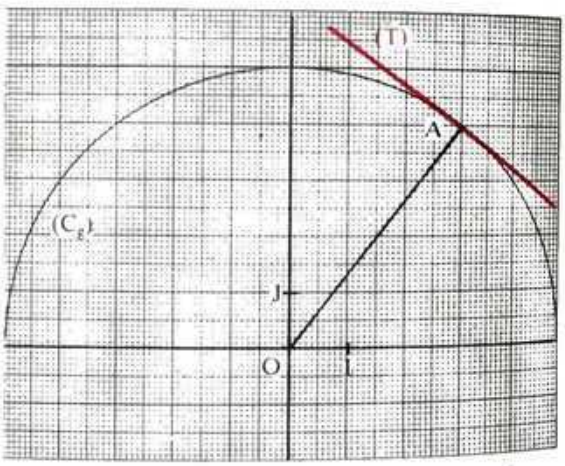
$-\frac{3}{4} \cdot 3 + b = 4$

c'est-à-dire $b = 4 + \frac{9}{4}$

$= \frac{25}{4}$

Ainsi on a :

$T : x \mapsto \frac{-3}{4}x + \frac{25}{4}$



Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de $\mathscr{P}$

$$M \in (C_g) \cap (T) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \\ y^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

$$M \in (C_g) \cap (T) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \\ \left(-\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\right)^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \\ (x - 3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ainsi $(C_g) \cap (T) = \{A\}$. On a :

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3/4\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (T).

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u} = 3.1 + 4\left(-\frac{3}{4}\right)$

$= 0$

donc les droites (OA) et (T) sont perpendiculaires.
La droite (T) est la tangente au demi-cercle (C_g) au point $A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Q 7 : 1er cas : $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x_0 = 2$

$t : x \mapsto 2x - 3$

$d : x \mapsto -x + 3$

$d' : x \mapsto \frac{x}{2}$

x	1,994	1,996	1,998	2	2,002	2,004	2,006
arrondi d'ordre 3 de f(x)	0,988	0,992	0,996	1	1,004	1,008	1,012
t(x)	0,998	0,992	0,996	1	1,004	1,008	1,012
d(x)	1,006	1,004	1,002	1	0,998	0,996	0,994
d'(x)	0,997	0,998	0,999	1	1,001	1,002	1,003

2e cas $f : x \mapsto \frac{1}{8}(-x^3 + 3x^2 + 9x - 19)$

$x_0 = 1$

$t : x \mapsto \frac{3x - 5}{2}$

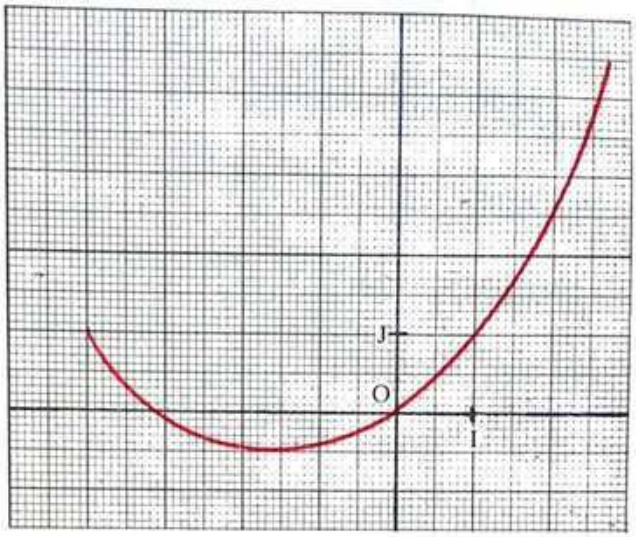
$d : x \mapsto -x$

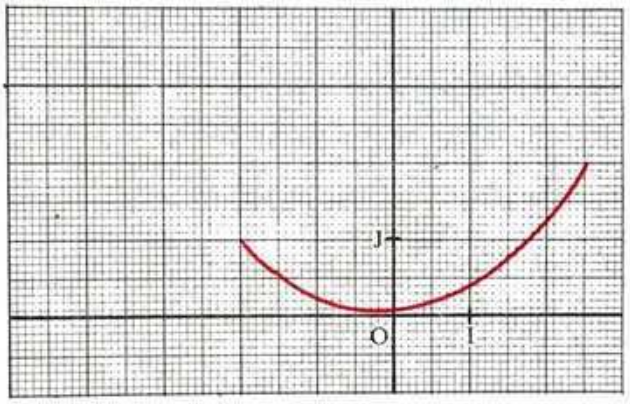
$d' : x \mapsto \frac{x - 3}{2}$

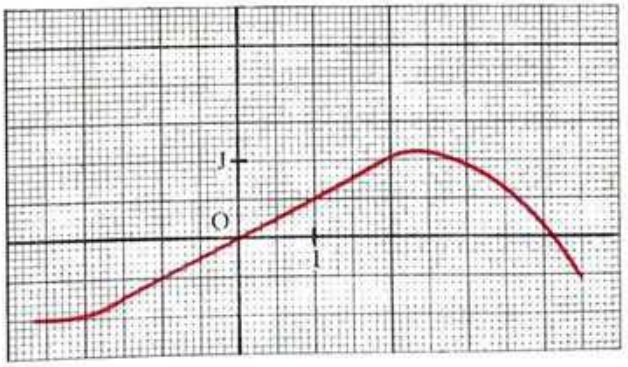
x	0,994	0,996	0,998	1	1,002	1,004	1,006
arrondi d'ordre 3 de f(x)	- 1,009	- 1,006	- 1,003	- 1	- 0,997	- 0,994	- 0,991
t(x)	- 1,009	- 1,006	- 1,003	- 1	- 0,997	- 0,994	- 0,991
d(x)	- 0,994	- 0,996	- 0,998	- 1	- 1,002	- 1,004	- 1,006
d'(x)	- 1,003	- 1,002	- 1,001	- 1	- 0,999	- 0,998	- 0,997

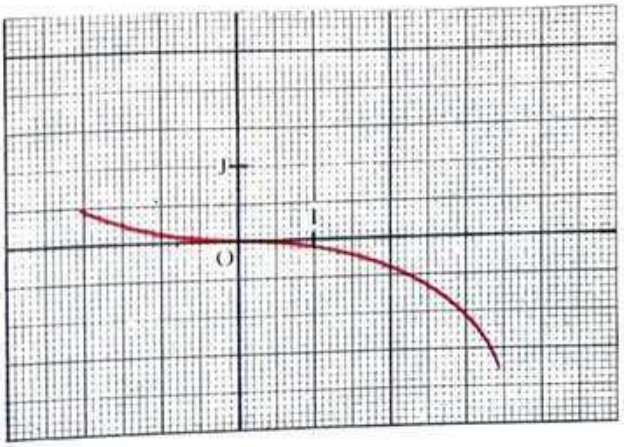
Ainsi, puisque, dans les 2 tableaux les valeurs de t(x) et f(x) sont les mêmes à 10^{-3} près, (T) est tangente à (C_f) en M_0.
Mais, comme d(x) (respectivement d'(x) n'est pas une valeur approchée de f(x) à 10^{-3} près, (D) (respectivement (D') n'est pas tangente à (C_f) en M_0.

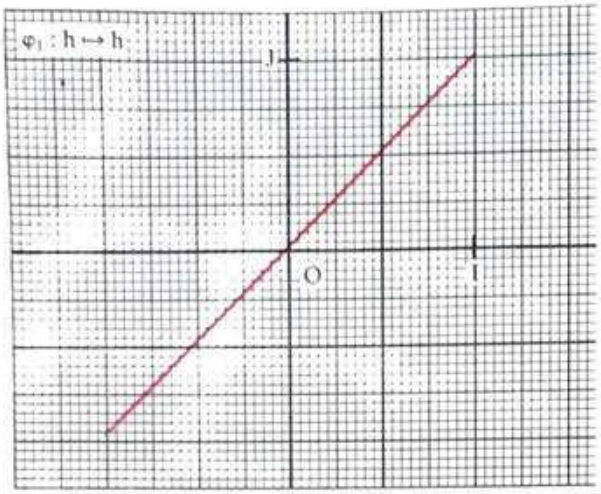
Q 8 :

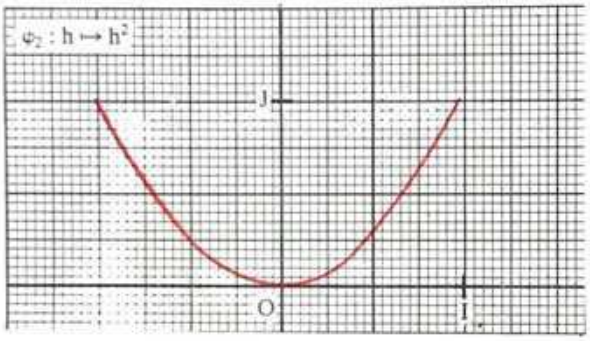


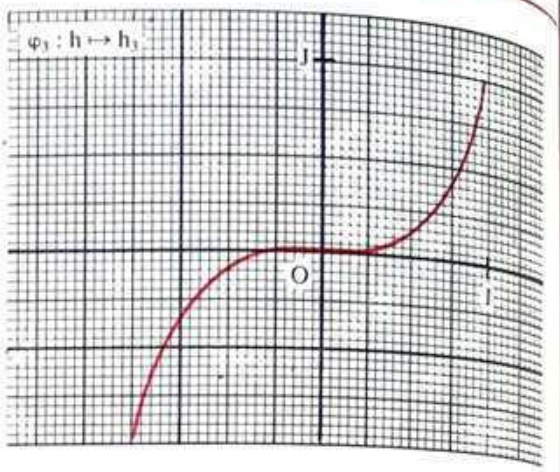


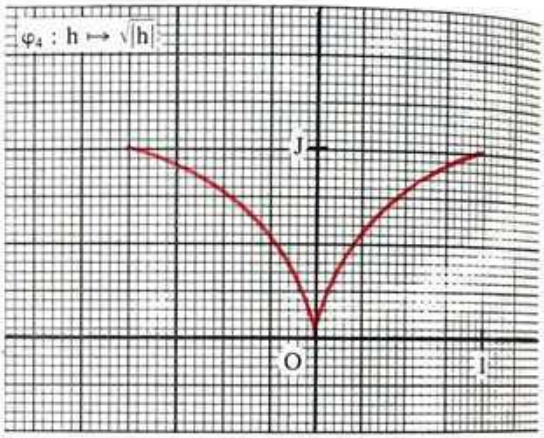


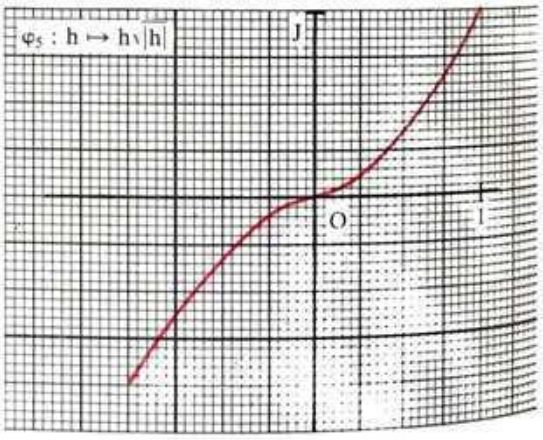


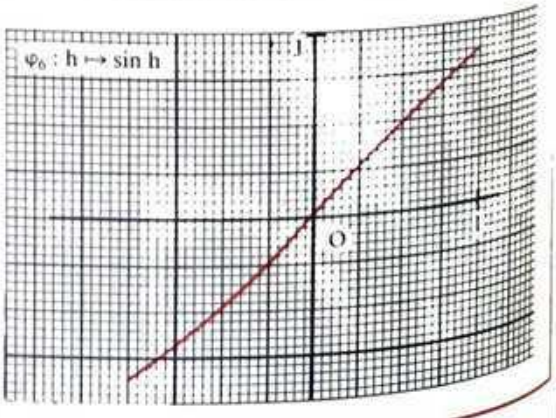












Q 9 : φ_1 est affine, φ_2 est connue.

h	0,25	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
h^3	0,016	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729	1

et on utilise la symétrie de centre O.

• On connaît la courbe de $[h \mapsto \sqrt{h}]$ sur $\mathbb{R}_+$ (symétrique de celle de $[h \mapsto h^2]$ par rapport à la première bisectrice), pour avoir celle de $[h \mapsto \sqrt{|h|}]$ on complète par sa symétrique par rapport à (OJ).

h	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
arrondi d'ordre 3 de $h\sqrt{\|h\|}$	0,089	0,253	0,354	0,465	0,586	0,716	0,854	1

et on utilise la symétrie de centre O car φ_5 est impaire.

• φ_6 est vue au chapitre trigonométrie (chapitre 2 du tome géométrie)

h (radians)	0,25	0,5	0,75	1
arrondi d'ordre 3 de sin h	0,247	0,479	0,682	0,841

et sin est impaire.

D'après ces six graphiques, seules φ_2, φ_3 et φ_5 vérifient : (OI) est tangente en O à (C_{φ_i}).

Q 10 :

i	1	2	3	4	5	6
$\varphi_i(h)$	h	h^2	h^3	$\sqrt{\lvert h\rvert}$	$h\sqrt{\lvert h\rvert}$	sin h
$\frac{\varphi_i(h)}{h}$	1	h	h^2	$\frac{\sqrt{\lvert h\rvert}}{h}$	$\sqrt{\lvert h\rvert}$	$\frac{\sin h}{h}$

h	$\frac{\varphi_1(h)}{h}$	$\frac{\varphi_2(h)}{h}$	$\frac{\varphi_3(h)}{h}$	$\frac{\varphi_4(h)}{h}$
- 0,1	1	- 0,1	0,01	3,1622777
- 0,08	1	- 0,08	0,0064	3,5355339
- 0,06	1	- 0,06	0,0036	4,0824829
- 0,04	1	- 0,04	0,0016	5
- 0,02	1	- 0,02	0,0004	7,0710678
0,02	1	0,02	0,0004	7,0710678
0,04	1	0,04	0,0016	5
0,06	1	0,06	0,0036	4,0824829
0,08	1	0,08	0,0064	3,5355339
0,1	1	0,1	0,01	3,1622777

h	$\frac{\varphi_5(h)}{h}$	$\frac{\varphi_6(h)}{h}$
- 0,1	0,3162278	0,9983342
- 0,08	0,2828427	0,9989337
- 0,06	0,244949	0,9994001
- 0,04	0,2	0,9997334
- 0,02	0,1414214	0,9999333
0,02	0,1414214	0,9999333
0,04	0,2	0,9997334
0,06	0,244949	0,9994001
0,08	0,2828427	0,9989337
0,1	0,3162278	0,9983342

Q 11 : 1/ Soit h un nombre réel

$\sin 3h = \sin(2h + h)$
$= \sin 2h \cos h + \cos 2h \sin h$
$= 2 \sin h \cos^2 h + (1 - 2\sin^2 h) \sin h$
$= 2 \sin h - 2 \sin^3 h + \sin h - 2 \sin 3h$
$= 3 \sin h - 4 \sin^3 h$

si h est non nul on a :

$$g(h) = \frac{\sin 3h - 3 \sin h}{h} = \frac{(3 \sin h - 4 \sin^3 h) - 3 \sin h}{h} = -\frac{4 \sin^3 h}{h}$$

2/

h	- 0,01	- 0,008	- 0,006	- 0,004	- 0,002
arrondi d'ordre 8 de g(h)	- 0,0003998	- 0,00025599	- 0,00014400	- 0,000064	- 0,000016

h	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
arrondi d'ordre 8 de g(h)	- 0,000016	- 0,000064	- 00014400	- 0,00025599	- 0,0003998

Q 12 :

x	- 0,01	- 0,008	- 0,006	- 0,004	- 0,002	0
arrondi de g(x)	6,0003	6,00019	6,0001	6,000048	6,000012	6

x	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
arrondi de g(x)	6,000012	6,000048	6,0001	6,00019	6,0003

pour tout nombre réel x on a :

$g(x) - 6 = 3x^2$

on sait :

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 0} [g(x) - 6] = 0$

Q 13 : (Δ) a pour coefficient directeur a donc son équation est de la forme

$y = ax + b$ avec $b \in \mathbb{R}$

$M_0 \in (\Delta)$ si et seulement si $f(x_0) = ax_0 + b$ c'est-à-dire $b = f(x_0) - ax_0$.

D'où l'équation de (Δ) :

$y = ax + f(x_0) - ax_0$

H est le point de (Δ) d'abscisse $x_0 + h$ donc son ordonnée est y_H tel que $y_H = a(x_0 + h) + f(x_0) - ax_0 = ah + f(x_0)$

$M\begin{pmatrix} x_0 + h \\ f(x_0 + h) \end{pmatrix}$ $\quad$ $H\begin{pmatrix} x_0 + h \\ ah + f(x_0) \end{pmatrix}$

$\varphi(h)$ est la différence de l'ordonnée de M et de H d'où :

$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$

Q 14 :

x	1,002	1,004	1,006	1,008	0,998	0,996	0,994	0,992
arrondi de f(x)	4,002	4,004	4,006	4,008	3,998	3,996	3,994	3,992

on remarque que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad f(x) = x + 3$

Q 15 : $D_f = \{h \in \mathbb{R} ; 1 + h \neq 1\}$ car $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$
D'où $D_g = \mathbb{R}^*$. On a, pour tout nombre réel h non nul :

$$g(h) = \frac{(1 + h)^2 + 2(1 + h) - 3}{(1 + h) - 1}$$
$$= \frac{h^2 + 4h}{h}$$
$$= h + 4$$

donc $\lim_{0} g = 4$

Q 16 : Soit f telle que $\lim_{x_0} f = l$.

Notons g la fonction définie par :
$g : h \mapsto f(x_0 + h)$
On a : $\lim_{0} g = l$
donc $\lim_{0} |g| = |l|$
De ce fait $\lim_{h \to 0} |f|(x_0 + h) = |l|$
c'est-à-dire $\lim_{x_0} |f| = |l|$

On a :
f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x_0} f = f(x_0)$.

D'après ce qui précède, si f a pour limite $f(x_0)$ en x_0, alors |f| a pour limite $|f(x_0)|$, c'est-à-dire $|f|(x_0)$, en x_0 autrement dit |f| est continue en x_0.

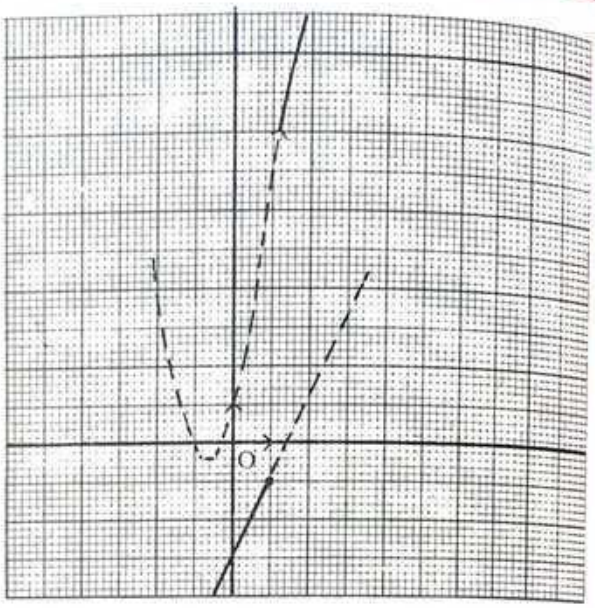
Q 17 : $f(1) = 2.1 - 3$
$= -1$
$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (2x - 3)$
$= -1$
donc f est continue à gauche en 1.
$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (3x^2 + 4x + 1)$
$= 3.1^2 + 4.1 + 1$
$= 8$
donc f n'est pas continue à droite à 1.

Sur $]\leftarrow, 1]$ f coïncide avec la fonction affine : $[x \mapsto 2x - 3]$

Sur $]1, \rightarrow]$ f coïncide avec la fonction polynôme de degré 2 : $[x \mapsto 3x^2 + 4x + 1]$.

D'où le tracé de la courbe représentative de f en utilisant la méthode du chapitre 3 et :

$$3x^2 + 4x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$$



f n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en 1 car f n'est pas continue en 1.

Q 18 : 1,0000012 sur une calculatrice simple. La calculatrice donne la valeur 1 + 2h pour $(1 + h)^2$, elle « fait une erreur » de h^2 c'est-à-dire $(6.10^{-7})^2$, ou encore 36.10^{-14} le résultat exact est 1,000 001 200 000 36

Q 19 : L'erreur commise en remplacant $(1 + h)^2$ par $1 + 2h$ est h^2, et on a :
$h^2 \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow |h| \leqslant 10^{-3}$
L'ensemble cherché est donc
$]-10^{-3} ; 10^{-3}[$.

Q 20 : Soit h un nombre réel distinct de -1 (ainsi $1 + h$ appartient à l'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ de f).
On a :

$$f(1 + h) - f(1) = \frac{1}{1 + h} - \frac{1}{1}$$
$$= \frac{1}{1 + h} - 1$$
$$= \frac{-h}{1 + h}$$
$$= \frac{-h(1 + h) + h^2}{1 + h}$$
$$= -h + \frac{h^2}{1 + h}$$

Comme $\lim_{h \to 0} \frac{h}{1 + h} = 0$, on a ainsi le développement limité à l'ordre 1 de f en 1 :
$f(1 + h) = 1 - h + h\,j(h)$
avec $j : h \mapsto \frac{h}{1 + h}$. Ainsi pour h proche de 0, $1 - h$ est une valeur approchée de $f(1 + h)$, c'est-à-dire $\frac{1}{1 + h}$, avec une erreur de $h\,j(h)$, c'est-à-dire $\frac{h^2}{1 - h}$.

Q 21 : Pour tout nombre réel h on a :
$f(1 + h) - f(1) = [3(1 + h) - 2] - [3 - 2]$
$= 3h$

d'où :
$f(1 + h) = f(1) + ah + h\,j(h)$
avec $a = 3$ et $j(h) = 0$, donc $\lim_0 j = 0$.

Ainsi f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 3.

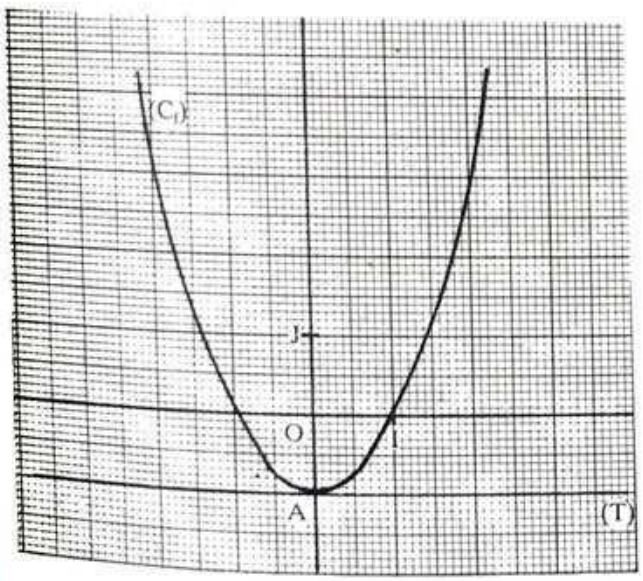
Q 22 : $[c : x \mapsto x^2]$ ayant pour courbe représentative (C_c), on a :

$(C_f) = T_{-\vec{i}}(C_c)$

Pour tout nombre réel h non nul, on a :

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - 1 - (-1)}{h}$$
$$= h$$

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Ainsi (T) a pour équation :
$y = f(0)$
c'est-à-dire : $y = -1$



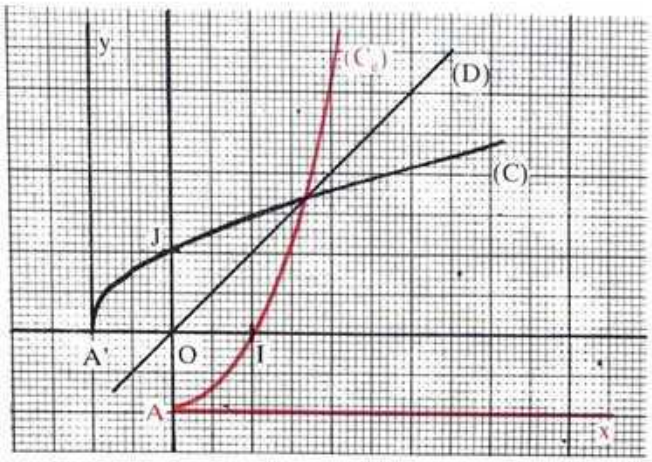
$g : [0, \to[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - 1$

g n'est pas dérivable en 0 car son ensemble de définition ne contient pas un intervalle de centre 0.
La courbe représentative (C_g) de g est la partie de (C_f) située dans le demi-plan [(OJ), I).

Q 23 : $h : [0, \to[\to [-1, \to[$
$x \mapsto x^2 - 1$

h est une application car, quel que soit le nombre réel x (positif) on a : $x^2 \geqslant 0$
d'où $x^2 - 1 \geqslant -1$
c'est-à-dire $h(x) \in [-1, \to[$
Soit y un nombre réel, élément de $[-1, \to[$.
On cherche s'il existe un nombre réel x de $[0, \to[$ tel que : $y = h(x)$.

On a :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = y + 1$
Or $y \in [-1, \to[$, d'où :
$y + 1 \geqslant 0$
Ainsi on a :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = y+1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$ ou $x = -\sqrt{y+1}$
Donc y a un et un seul antécédent par h : le nombre réel positif $\sqrt{y + 1}$. L'application h est donc bijective et sa bijection réciproque est
$h^{-1} : [-1, \to[\to [0, \to[$
$x \mapsto \sqrt{x + 1}$



La courbe représentative de h est en fait (Cg) ; la courbe représentative (C) de h^{-1} est l'image de (Cg) par la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (D) (droite d'équation $y = x$).
Dans cette symétrie, la demi-droite [Ax), demi-tangente à (C_g) en A est transformée en la demi-droite [A'y), qui a pour support la droite d'équation $x = -1$ (image de (T) par la symétrie d'axe (D)) et d'origine $A'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, image de A par cette symétrie.

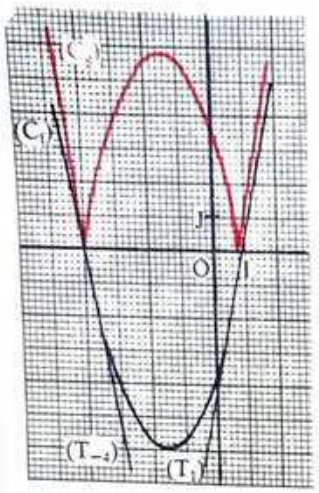
Ainsi [A'y) est caractérisée par :
$[A'y) = \{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, y \geqslant 0 \text{ et } x = -1\}$

Q 24 : Non, j n'est pas dérivable en -1 car sinon sa courbe admettrait une tangente en A' dont le coefficient directeur serait $j'(-1)$. Or cette tangente serait nécessairement la droite d'équation $x = -1$, qui n'a pas de coefficient directeur.

Q 25 : 1/ Soient x_0 un nombre réel et h un nombre réel non nul ; on a :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \frac{[(x_0 + h)^2 + 3(x_0 + h) - 4] - [x_0^2 + 3x_0 - h]}{h}$$
$$= \frac{2x_0\,h + 3h + h^2}{h}$$
$$= 2x_0 + 3 + h$$

donc f est dérivable en x_0 et son nombre dérivé en x_0 est $2x_0 + 3$.



soit (C_c) la courbe représentative de $c : x \mapsto x^2$.
puisque, pour tout nombre réel x on a :
$x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

on a :
$(C_f) = T_{-\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{25}{4}\vec{j}}(C_c)$

$f'(1) = 5$ donc (T_1) a pour équation :
$y = 5(x - 1)$ (car $f(0) = 0$)
de même on a $f(-4) = 0$ et $f'(-4) = -5$
donc (T_2) a pour équation :
$y = -5(x + 4)$

2/ (C_g) est la réunion de la partie de (C_f) située dans le demi-plan [(OI), J) et de l'image de l'autre partie de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
Soit x_0 un nombre réel appartenant à $]\leftarrow, -4[\cup]1, \rightarrow[$, il existe un intervalle I de centre x_0 et inclus dans cet ensemble ; sur I, g coïncide avec f donc g est dérivable en x_0.

Q 26 : Soit x_0 un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a :

$$\frac{(-f)(x_0 + h) - (-f)(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= -(2x_0 + 3)$$

donc $(-f)$ est dérivable en x_0 et
$(-f)'(x_0) = -(2x_0 + 3)$
en particulier on a
$(-f)'(1) = -5$
et $(-f)'(-4) = 5$
Puisque g coïncide avec $(-f)$ sur $[-4, 1]$, g est dérivable à droite en (-4) et son nombre dérivé à droite en (-4) est 5, de même g est dérivable à gauche en 1 et son nombre dérivé à gauche en 1 est (-5).

Résultats ou indications des exercices

2/ $(N_1N_2) : \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

3/ $mm' = -1$

4/ Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: -4
Dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $-\dfrac{11}{16}$

7/ Utiliser
$\left.\begin{array}{l} |h^n| \leqslant |h| \\ |h| \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |h^n| \cdot |h| \leqslant |h| \cdot 1$

8/ Montrer que :
$\forall h \in]-1 ; 1[- \{0\} \quad |g(h)| \leqslant 9|h|$

10/ 1/ 2

2/ 1 : écrire $\cos h - 1 = -2 \sin^2 \dfrac{h}{2}$

d'où $|\cos h - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}|h|^2$

3/ 4 : voir $h + 4$

11/ 5/ $\dfrac{\text{tg } y}{y} = \dfrac{\sin y}{y} \times \dfrac{1}{\cos y}$

6/ $\dfrac{\sin 2x}{2x} \times \dfrac{3x}{\sin 3x} \times \dfrac{2x}{3x}$

9/ $\dfrac{(h+1)^2 - (h+1)}{h\,[h + 1 + \sqrt{h+1}]}$ et simplifier

10/ simplifier

12/ 1/ pas définie à droite

2/ pas définie à gauche, écrire $\dfrac{\sin h}{h} \cdot \sqrt{h}$

3/ 0

4/ 1 à droite, -1 à gauche

13/ 4/ f continue à droite en -2 mais pas à gauche car $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} (8x^2 - 3x) = 38$

14/ $h = 29.10^{-7}$, $29 < 30$,
d'où $29^2 < 900$ d'où $h^2 < 1000.10^{-14}$.

16/ 1/ $(2 + h)^2$ a pour valeur approchée $4 + 4h$ avec pour erreur h^2
2/ $(3 + h)^2$ a pour valeur approchée $9 + 6h$
3/ $(-1 + h)^2$ a pour valeur approchée $1 - 2h$
4/ $(-4 + h)^2$ a pour valeur approchée $16 - 8h$

18/ $4{,}08 = 4(1 + 0{,}02)$
$9{,}0018 = 9(1 + 0{,}0002)$
$15{,}9998 = 16\left(1 - \dfrac{10^{-4}}{8}\right)$

19/ Utiliser le résultat de la question 20 et majorer $\dfrac{h^2}{1 + h}$ pour tout h de $]-10^{-2}, 10^{-2}[$

20/ $(2 + h)^2 - 4 = 4h + h^2$
pour $x = 2 + h$
l'erreur $(x - 2)^2$ doit être majorée par 10^{-2}

21/ $(1 + h)^3 = 1 + 3h + h(3h + h^2)$

22/ $\dfrac{-h}{x_0(x_0 + h)} = \dfrac{-h(x_0 + h) + h^2}{x_0^2\,(x_0 + h)}$

23/ $2x_0 - 3$

24/ $\dfrac{-6}{(x_0 - 2)^2}$

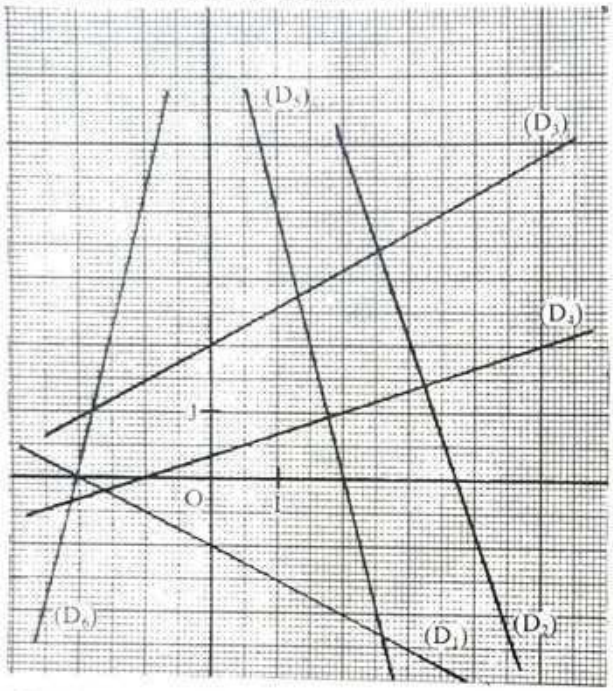
25/ $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

26/ $f'(3) = 6$

27/ 1/ $f'(3) = 0$
2/ à droite et à gauche
3/ -1 n'appartient pas à D_g
4/ à gauche et à droite
5/ dérivable à gauche, non continue à droite.

Exercices

29 Ranger les droites, représentées ci-dessus, par coefficients directeurs croissants.



30 Soit la fonction f définie par :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x$

Représenter cette fonction dans un repère orthonormé. On note ($\mathscr{C}$f) la courbe représentative de f.

A l'aide d'une calculatrice compléter le tableau :

α	-10^{-3}	-10^{-2}	-10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
arrondi d'ordre de f(−3+α)						

Chaque couple (α, f(− 3 + α)) est représenté par un point de ($\mathscr{C}$f).

Les points A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, A'_3 correspondent respectivement aux valeurs de α : 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, -10^{-1}, -10^{-2} et -10^{-3}.

Vérifier que les points A_2, A_3, A'_2 et A'_3 sont sur une même droite (D) passant par $A\begin{pmatrix}-3\\ f(-3)\end{pmatrix}$ dont on donnera une équation cartésienne.

Vérifier que les points A_1 et A'_1 sont « proches » de (D).

Tracer (D) dans le même repère que ($\mathscr{C}$f).

31 Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec la fonction g définie par :

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{2 - x}$

et g(4 + α) dans le tableau de valeurs.

32 Soient f et g les fonctions définies par :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{2 - x}$

Soit h la fonction qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}^*_-$ et avec g sur $\mathbb{R}_+$.

Représenter les fonctions f et g dans le repère orthonormé (O, I, J). On note ($\mathscr{C}$f) et ($\mathscr{C}$g) les courbes représentatives respectivement de f et de g.

Construire les « tangentes au sens graphique » (T_1) et (T_2) respectivement aux courbes ($\mathscr{C}$f) et ($\mathscr{C}$g) à l'origine du repère O après avoir cherché, avec la calculatrice des valeurs de f(α) et de g(α) avec α proche de zéro.

On note (P_2) le demi-plan de frontière (OJ) contenant I et (P_1) le complémentaire de (P_2) dans $\mathscr{P}$.

Dans le repère (O, I, J) représenter la fonction h, la partie de la tangente (T_1) située dans le demi-plan (P_1) et la partie de la tangente (T_2) située dans le demi-plan (P_2).

La courbe représentative ($\mathscr{C}$h) de la fonction h admet-elle une tangente en O ?

33 Montrer que les fonctions f_i définies ci-dessous admettent une limite nulle en O.

$f_1 : x \mapsto -3x^2$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 2x$

$f_3 : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$

$f_4 : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1 + x}}$

$f_5 : x \mapsto \tan 2x$

$f_6 : x \mapsto \sin 2x$

$f_7 : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \cos 2x}$

$f_8 : x \mapsto x \cdot \sin \frac{1}{x}$

$f_9 : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$

34 Calculer la limite en zéro, si elle existe, pour les fonctions f_i définies ci-dessous :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 \sqrt{x+1}}{x+1}$

$f_2 : x \mapsto x^2 \sqrt{x-1}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$

$f_4 : x \mapsto \left|\dfrac{x}{|x|}\right|$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$

$f_8 : x \mapsto E(x) \cdot \sin x$

$f_9 : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{2} E(x)\right)$

$f_{10} : x \mapsto E(|\sin x|)$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$

35 Pour chacune des fonctions ci-dessous étudier la limite, éventuellement à droite et à gauche en x_0, et la continuité en ce point.

1/ $x \mapsto \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ $\qquad x_0 = -1$

2/ f est définie par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f(x) = \sqrt{x+2} \\ \forall x \in \mathbb{R}_- \; f(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

3/ $x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

4/ $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x \cdot \cos x}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

5/ f est définie par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right) \\ \forall x \in \mathbb{R}_- \; f(x) = \sin x \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

36 Soit v la fonction définie par :
$v : x \mapsto |x|$

Pourquoi v est-elle continue en 0 ?

Pourquoi v n'admet-elle pas de développement limité à l'ordre 1 en 0 ?

37 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de centre x_0 et telle que la fonction, qui, à tout nombre réel h, non nul et tel que $x_0 + h$ soit dans I, associe $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, ait pour limite en 0 un nombre réel a.

Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

38 Soit f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \{-1\} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

et $f(-1) = \dfrac{1}{3}$

Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0, puis en -1 (préciser éventuellement à droite et à gauche).

39 Peut-on donner une valeur à f(1) pour que la fonction f définie pour x différent de 1 par

$f(x) = \dfrac{|x-1|\,(x+3)}{2x-2}$

soit continue en 1 ?

40 Vérifier que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \; f(x) = \frac{|x| \sqrt{|x|}}{x}$$

et $f(0) = 0$
est continue en 0.

41 Soit $f : x \mapsto (-1)^{E(x)} [x - E(x)]$

1/ Montrer que f est périodique et préciser sa période. A quel intervalle I de borne inférieure 0 peut-on réduire l'étude de f ?

2/ Montrer que f est continue en tout x n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$. Etudier la continuité de f en tout entier relatif.

3/ Donner l'expression de f(x) selon les valeurs de x dans I.

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

42 Donner la valeur du nombre réel k de façon que la fonction f définie ci-dessous soit continue en 3.

$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 3] & f(x) = x + 4 \\ \forall x \in]3, \rightarrow[& f(x) = kx \end{cases}$

La fonction f est-elle alors dérivable en 3 ?

43 Étudier si chacune des fonctions suivantes possède une limite au point x_0 considéré et si elle est éventuellement continue en ce point

1/ $x \mapsto \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ $\qquad x_0 = 4$

2/ $x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4}$ $\qquad x_0 = 2$

3/ $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ $\qquad x_0 = -5$

4/ $x \mapsto |x - 1| + |x + 2|$ $\qquad x_0 = 1$

5/ $x \mapsto \sup(x + 3, 4x)$ $\qquad x_0 = 1$

7 Étude globale d'une fonction

I. FONCTIONS DÉRIVABLES SUR UN INTERVALLE
II. SENS DE VARIATION ET DÉRIVÉE
III. ÉTUDE DE FONCTIONS
IV. ÉTUDE DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES
V. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1 Fonctions dérivables sur un intervalle

1) Fonction dérivée

Question 1 *Soient a, b et c trois nombres réels et f la fonction polynôme :*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^2 + bx + c.$

Démontrer que f est dérivable en tout nombre réel x_0 et que le nombre dérivé de f en x_0 est $2ax_0 + b$.

Ainsi on peut définir une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x_0 de $\mathbb{R}$ associe $2ax_0 + b$, qui est le nombre dérivé de f en x_0 ; cette fonction est notée f' (comme le nombre dérivé de f en x_0 est noté $f'(x_0)$) et on l'appelle la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f est **dérivable sur l'intervalle ouvert** I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

L'application qui à tout nombre réel de I associe le nombre dérivé de f en ce point est appelée **fonction dérivée** de f sur I et notée f'.

Remarques :

1/ On dira, par abus, qu'une fonction f est dérivable sur une réunion d'intervalles ouverts si et seulement si f est dérivable sur chacun de ces intervalles ouverts. Sa fonction dérivée sur cette réunion est alors déterminée par ses restrictions à chacun de ces intervalles. Ainsi par exemple, la fonction f définie par :

$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 2]\ f(x) = 3x + 1 \\ \forall x \in]2, \rightarrow[\ f(x) = x^2 \end{cases}$

est dérivable sur $]\leftarrow, 2[\cup]2, \rightarrow[$ et sa fonction dérivée est f' :

x	$\leftarrow$	2	$\rightarrow$
f'(x)	3	||	2x

2/ De même une fonction f est continue sur un intervalle ouvert si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

De plus, on dit souvent qu'une fonction est continue sur un intervalle $[a, b[$, (respectivement $]a, b]$) si et seulement si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite en a (respectivement à gauche en b) ; et f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b.

Ainsi si f coïncide sur $]a, b]$ avec une fonction continue sur un intervalle contenant $]a, b]$ alors f est continue sur $]a, b]$. (De même pour un intervalle d'une autre forme).

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, -1[& f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \\ \forall x \in [-1, 1] & f(x) = x^2 - 3 \\ \forall x \in]1, 3[& f(x) = 2x - 4 \\ f(3) = 2 & \\ \forall x \in]3, \rightarrow[& f(x) = -x^2 + 7 \end{cases}$

Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles ouverts $]\leftarrow, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, \rightarrow[$ et donner la fonction dérivée de f sur chacun de ces intervalles.

Démontrer que f est continue en -1 et en 1.

Etudier la dérivabilité de f en -1, 1 et 3.

2) Fonctions dérivées « usuelles »

Le résultat trouvé à la question 1 permet d'affirmer que toute fonction polynôme de degré au plus égal à 2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction dérivée de $[x \mapsto ax^2 + bx + c]$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $[x \mapsto 2ax + b]$.

Cas particulier (vu au chapitre précédent) toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction dérivée de $[x \mapsto mx + p]$ est la fonction constante $[x \mapsto m]$.

Dans le cas d'une fonction constante, sa fonction dérivée est la fonction constante nulle.

Question 2 *Démontrer que la fonction $[x \mapsto \sqrt{x}]$, d'ensemble de définition $[0, \to[$, est dérivable sur $]0, \to[$ et que sa fonction dérivée est : $\left[x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$.*

Question 3 *Démontrer que la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$, d'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, est dérivable sur $]\leftarrow, 0[$ et sur $]0, \to[$ et que sa fonction dérivée sur chacun de ces intervalles est $\left[x \mapsto -\frac{1}{x^2}\right]$.*

Question 4 *Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que c soit non nul et f la fonction homographique :*

$$f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

Montrer que f est dérivable sur $\left]\leftarrow, -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c}, \to\right[$ et que sa dérivée sur chacun de ces intervalles est f' :

$$f' : x \mapsto \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Question 5 *Montrer que $[x \mapsto x^3]$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée $[x \mapsto 3x^2]$.*

3) Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle

Question 6 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0.*

Pour tout nombre réel h non nul tel que $x_0 + h$ soit dans I, calculer $\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h}$ et la limite de ce rapport quand h tend vers zéro.

Ainsi f + g est dérivable en x_0 et de nombre dérivé en x_0 : $f'(x_0) + g'(x_0)$. Plus généralement : si f et g sont dérivables sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors f + g est dérivable en tout x_0 de I donc f + g est dérivable sur I, et la fonction dérivée de f + g est

$(f + g)' : x \mapsto f'(x_0) + g'(x_0)$

Ainsi $(f + g)' = f' + g'$

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. La fonction somme f + g est dérivable sur I et on a :

$(f + g)' = f' + g'$

Exercice 2 En utilisant la dérivabilité de $[x \mapsto x^3]$ et d'une fonction polynôme de degré 2, donner la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de f :

$f : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x - 4$

Question 7 *Soient k un nombre réel et f une fonction dérivable sur un intervalle I. Montrer que, en tout x_0 de I, la fonction kf est dérivable et donner son nombre dérivé en x_0.*

Ainsi kf est dérivable sur I et sa fonction dérivée est :

$(kf)' : x \mapsto k f'(x)$

Théorème

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.

La fonction kf, produit de la fonction f par le nombre réel k, est dérivable sur I et on a :

$(kf)' = kf'$

Exercice 3 Montrer que la fonction $[x \mapsto 3\sqrt{x}\,]$ est dérivable sur $]0, \rightarrow[$ et donner sa fonction dérivée.

Exercice 4 Montrer que la fonction $\left[x \mapsto \frac{3}{x} + 7x^3 + 2x + \frac{4x}{x-2}\right]$ est dérivable sur $]\leftarrow, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, \rightarrow[$ et donner sa fonction dérivée sur ces intervalles.

Question 8 *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, x_0 un nombre réel de I et h un nombre réel non nul, tel que $x_0 + h$ soit dans I.*

Vérifier que l'on a :

$$\frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} =$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0 + h) + f(x_0)\, \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

En utilisant le fait que la fonction g est continue en x_0 car elle y est dérivable, calculer la limite de ce rapport quand h tend vers 0.

Le résultat de cette question étant vrai pour tout x_0 de I, on a l'égalité des fonctions ci-dessous :

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. La fonction produit fg est dérivable sur I, et on a :

$(fg)' = f'g + fg'$

Question 9 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On note f^2 la fonction produit $f \cdot f$, et f^3 la fonction $f^2 \cdot f$.*

Déterminer la fonction dérivée de f^2 puis celle de f^3 sur I.

Vu les résultats obtenus à la question 9, il semble que l'on ait : pour tout entier naturel non nul n, la fonction f^n, égale au produit $f \cdot f \ldots\ldots f$ (n facteurs), est dérivable sur I et de fonction dérivée $(f^n)'$:

$(f^n)' = nf^{n-1}f'$

Notons $\mathcal{P}(n)$ la phrase : f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'$.
$\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vérifiées d'après la question 9.

Considérons un entier naturel p non nul tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie.

Puisque $f^{p+1} = f^p f$, que f^p et f sont dérivables sur I, alors f^{p+1} est dérivable sur I et on a :

$$(f^{p+1})' = (f^p f)'$$
$$= (f^p)'f + f^p f'$$

Or $(f^p)' = p\, f^{p+1}\, f'$

d'où : $(f^{p+1})' = pf^{p-1}\, f'f + f^p f'$
$= pf^p\, f' + f^p f'$
$= (p + 1)\, f^p f'$

Ainsi $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.

Par le principe du raisonnement par récurrence (voir chapitre 4) on peut affirmer que, pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Ainsi on a le résultat suivant :

Théorème

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel strictement supérieur à 1.

La fonction f^n, définie sur I par :

$\forall x \in I \qquad f^n(x) = [f(x)]^n$

est dérivable sur I et on a :

$(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'$

Exercice 5 Déterminer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = (3x + 1)^4$

Question 10 *Soit n un entier naturel non nul.*

On note g_n la fonction définie par :

$g_n : x \mapsto x^n$

Montrer que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction g_n' définie par

$g_n' : x \mapsto nx^{n-1}$

De cette question et des théorèmes sur la dérivabilité de la somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par un nombre réel, on déduit le résultat suivant :

Théorème

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Puisque toute fonction dérivable en un point est continue en ce point, on a : toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes et donner leur fonction dérivée.

1/ $x \mapsto 3x^4 - 4x^2 + 8x - 7$

2/ $x \mapsto (2x + 1)^3 - 9x^4 + 5x^3 + 7x$

3/ f définie par :

$\forall x \in]\leftarrow, 1]$ $\quad f(x) = 8x^2 - 3x + 1$

$\forall x \in]1, \rightarrow[$ $\quad f(x) = 5x^3 - 2x + 3$

Question 11 *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I qui ne s'annule pas sur I, c'est-à-dire telle que :*

$\forall x \in I \quad f(x) \neq 0$

et x_0 un nombre réel de I

Pourquoi la fonction $\frac{1}{f}$ est-elle définie sur I ?

Vérifier que, pour tout nombre réel non nul h tel que $x_0 + h$ soit dans I, on a :

$$\frac{\frac{1}{f}(x_0 + h) - \frac{1}{f}(x_0)}{h} = -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \times \frac{1}{f(x_0 + h)\, f(x_0)}$$

En déduire, en utilisant la continuité de f en x_0, que $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et donner son nombre dérivé en x_0.

Le calcul de cette question étant possible pour tout x_0 de I, on a le résultat ci-dessous :

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Si f ne s'annule pas sur I alors sa fonction inverse $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

Exercice 7

Démontrer que pour tout entier relatif n strictement inférieur à -1, la fonction $[x \mapsto x^n]$ est dérivable sur $]\leftarrow, 0\,[\cup]\,0, \rightarrow[$ et que sa fonction dérivée est $[x \mapsto n\,x^{n-1}]$.

En déduire que ce résultat est vrai pour tout n élément de $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$.

Question 12

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert I, telles que g ne s'annule pas sur I.

En écrivant que la fonction quotient $\frac{f}{g}$, qui est définie sur I, s'écrit comme produit de f et de $\frac{1}{g}$, montrer que $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et donner sa fonction dérivée.

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I, et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exercice 8

Déterminer sur quels intervalles la fonction f est dérivable et donner sa fonction dérivée, pour chacune des fonctions f suivantes :

1/ $f : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

2/ $f : x \mapsto 8x - 1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4x + 1}{6x - 5}$

3/ $f : x \mapsto \dfrac{5\sqrt{x}}{3x - 2}$

4/ $f : x \mapsto \dfrac{8}{x - 3} - \dfrac{|3x - 1|}{4x}$

Du théorème précédent, du fait que toute fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes, et du fait que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, on déduit :

Théorème

Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition.

Remarque :

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Exercice 9

Déterminer, pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction dérivée f′ de f en précisant l'ensemble de définition de f′.

1/ $f : x \mapsto \dfrac{8x^2 - 3x + 4}{5x^2 + 4x - 9}$

2/ $f : x \mapsto \dfrac{3x - 1}{x^2 + x + 1}$

3/ $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 + x - 12}$

Question 13

1/ Soient t_1 la fonction $[x \mapsto 3x + 2]$, f la fonction $[x \mapsto x^5]$ et g la fonction fot_1.

Déterminer la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

2/ Soient a et b deux nombres réels et t la fonction affine :

$t : x \mapsto ax + b$

Déterminer la fonction dérivé de fot sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout nombre réel x on a :

$(fot)'(x) = a f'(ax + b)$

Question 14

Soient a et b deux nombres réels avec a non nul et I un intervalle ouvert de I.

Montrer que l'ensemble des nombres réels x tels que $ax + b$ appartienne à I est un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On admet la généralisation de la question 13 sous la forme du résultat suivant.

Théorème

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a et b, deux nombres réels, avec a non nul, J l'intervalle ouvert, ensemble des nombres réels x tels que $ax + b$ appartienne à I, et g la fonction définie sur I par :

$\forall x \in J \quad g(x) = f(ax + b)$

La fonction g est dérivable sur J et on a :

$\forall x \in J \quad g'(x) = a f'(ax + b)$

Exercice 10 Déterminer les intervalles de dérivabilité et la fonction dérivée sur ces intervalles, des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto \sqrt{3x + 1}$

2/ $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x - 5}}{x - 3}$

3/ $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$

4/ $x \mapsto (2x - 5)^{10}$

Question 15 *Soient g et f les fonctions définies par :*

$g : x \mapsto \sqrt{5x - 7}$ *et* $f : x \mapsto 5x - 7$

Donner l'ensemble de définition de g et l'intervalle I sur lequel elle est dérivable.

Vérifier que la fonction g a pour fonction dérivée sur I : $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Plus généralement on admet le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Si f est positive et non nulle sur I alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a :

$(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exercice 11 Démontrer que la fonction $[x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée.

Exercice 12 Déterminer sur quels intervalles ouverts la fonction $[x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 12}]$ est dérivable et préciser sa fonction dérivée.

Exercice 13 Étudier la dérivabilité, et donner la fonction dérivée, de la fonction f définie par :

$f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x + 3}$

sur chacun des intervalles ouverts intervenant dans l'ensemble de définition de f.

Tableaux récapitulatifs

fonction	fonction dérivée	sur
$x \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$	$x \mapsto 2ax + b$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]\leftarrow, 0[\cup]0, \rightarrow[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, \rightarrow[$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$]\leftarrow, 0[\cup]0, \rightarrow[$

Si f' est la fonction dérivée de f sur I, et g' la fonction dérivée de g sur I alors on a :

fonction	fonction dérivée	
kf $(k \in \mathbb{R})$	$k\,f'$	
$f + g$	$f' + g'$	
$f \cdot g$	$f'g + fg'$	
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$	(si f ne s'annule pas sur I)
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	(si f est strictement positive sur I)
f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$n\,f^{n-1}\,f'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	(si g ne s'annule pas sur I)
$f(ax + b)$ $((a,b) \in \mathbb{R}^2)$	$af'(ax + b)$	(sur $J = \{x \in \mathbb{R}, ax + b \in I\}$)

2 Sens de variation et fonction dérivée

1) Lien entre le signe du taux de variation et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On sait que :

* f est strictement croissante sur I si et seulement si :

$\forall u \in I \quad \forall v \in I \quad u > v \Rightarrow f(u) > f(v)$

* f est strictement décroissante sur I si et seulement si :

$\forall u \in I \qquad \forall v \in I \qquad u > v \Rightarrow f(u) < f(v)$

D'autre part le **taux de variation** de f entre deux nombres réels distincts u et v de I est le rapport τ défini par :

$$\tau = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

Ainsi on a les résultats suivants :

* f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tout couple (u,v) de nombres réels distincts de I, les nombres réels $(u - v)$ et $(f(u) - f(v))$ sont de même signe. C'est-à-dire f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tout couple (u, v) de nombres réels distincts de I, le taux de variation de f entre u et v est strictement positif.

* f est strictement décroissante sur I si et seulement si, pour tout couple (u, v) de nombres réels distincts de I, le taux de variation de f entre u et v est strictement négatif.

* f est constante sur I si et seulement si, pour tout couple (u, v) de nombres réels distincts de I, le taux de variation de f entre u et v est nul.

Exercice 14 Montrer que la fonction carrée $[x \mapsto x^2]$ est, sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, strictement **monotone** c'est-à-dire, soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Exercice 15 Montrer que la fonction homographique $\left[x \mapsto \frac{2x + 3}{x - 1}\right]$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]\leftarrow, 1[$ et $]1, \rightarrow[$.

Exercice 16 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et telle que l'image f(I) de I soit un intervalle J de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur J.

Montrer que si f est croissante sur I et g est croissante sur J alors gof est croissante sur I.

Que peut-on dire du sens de variation de gof sur I.

- lorsque f est décroissante sur I et g est décroissante sur J ?
- lorsque f est croissante sur I et g est décroissante sur J ?

2) Lien entre le signe de la fonction dérivée et le sens de variation d'une fonction sur un intervalle

On a vu que la fonction carrée $[x \mapsto x^2]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $[x \mapsto 2x]$, cette dernière est donc négative sur $]\leftarrow, 0[$ et positive sur $]0, \rightarrow[$. Or d'après l'exercice 12 la fonction carrée est strictement décroissante sur $]\leftarrow, 0[$ et strictement croissante sur $]0, \rightarrow[$. Il semble donc y avoir un lien entre le signe de la fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et le sens de variation de cette fonction sur I.

Ce lien apparaît de façon plus évidente encore pour une fonction affine $[f : x \mapsto ax + b]$ car alors la fonction dérivée f' est une fonction constante : $[x \mapsto a]$ qui à tout élément de $\mathbb{R}$ associe le taux de variation de f entre deux nombres réels distincts quelconques.

Question 16 *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et croissante sur I, et x_0 un élément de I.*

Appliquer le résultat vu au chapitre 6 : si une fonction positive admet pour limite en 0 le nombre réel l, alors l est positif ou nul, pour prouver que f' (x_0) est positif ou nul.

Ainsi en utilisant ce résultat en tout x_0 de I on a :

Si une fonction f est dérivable et croissante sur I alors sa fonction dérivée f' est positive sur I.

Question 17 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la fonction $(-f)$ et le résultat précédent, que si f est décroissante sur I alors sa fonction dérivée f' est négative sur I.*

Remarque :

On notera que, par exemple, la fonction $[x \mapsto x^3]$ est strictement croissante sur $]-1 ; 2[$ bien que sa fonction dérivée s'annule en zéro.

Le cas des fonctions constantes ayant été étudié précédemment, on a aussi montré les résultats suivants :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f est constante sur I alors sa fonction dérivée est nulle sur I.

Si f est croissante sur I alors sa fonction dérivée est positive sur I.

Si f est décroissante sur I alors sa fonction dérivée est négative sur I.

On admet les réciproques de ces implications et l'on retiendra le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

* f est constante sur I si et seulement si sa fonction dérivée est nulle sur I.
* f est croissante sur I si et seulement si sa fonction dérivée est positive sur I.
* f est décroissante sur I si et seulement si sa fonction dérivée est négative sur I.

Remarques :

1/ En fait si la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert I et telle que sa fonction dérivée, en s'annulant éventuellement en un nombre fini de points de I, garde sur I un signe constant, alors f est strictement monotone sur I.

Ainsi, par exemple, la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction f' telle que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

c'est-à-dire

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 (x - 1)^2$

Cette fonction f' est strictement positive en tout point de $\mathbb{R}$ distinct de 0 et 1, où elle s'annule. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2/ Si I est un intervalle fermé ou semi-fermé l'hypothèse de dérivabilité aux bornes de I (à gauche ou à droite) n'est pas nécessaire pour avoir le sens de variation de f sur I, seule la continuité de f en ces bornes (à gauche ou à droite) est nécessaire ainsi que le montre les deux exercices 15 et 16.

3/ Le théorème ne s'applique pas lorsque I n'est pas un intervalle ainsi qu'on le constatera dans l'exercice 17.

Exercice 17

Soit $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(x)$

Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

Montrer que f est dérivable sur $]1, 2[$ et de fonction dérivée nulle sur cet intervalle.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en 2.

Est-ce que f est constante sur $[1, 2[$? sur $[1, 2]$?

Exercice 18

Soit $f : [3, \to[\to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x - 3}$

Montrer que f est dérivable sur $]3, \to[$ et de fonction dérivée strictement positive sur cet intervalle.

La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

Quel est le sens de variation de f sur $[3, \to[$?

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - E(x)$

Tracer la représentation graphique de f dans un repère du plan.

Montrer que, pour tout entier relatif n, f est dérivable sur l'intervalle $]n, n + 1[$.

En déduire que f est dérivable en tout nombre réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$, et de nombre dérivé en ce point strictement positif.

La fonction f est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

Méthode pratique

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ qui est réunion d'intervalles ouverts il suffit de réaliser une partition de D en intervalles où la fonction dérivée de f garde un signe constant.

On présentera les résultats dans un tableau, appelé **tableau de variation** de la fonction f où figureront le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x de D et le sens de variation de f.

Ainsi par exemple, étudions le sens de variation de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1[\quad f(x) = x^2 \\ \forall x \in [1, \rightarrow[\quad f(x) = \dfrac{x}{x-2} \end{cases}$$

Il résulte des théorèmes généraux sur les fonctions dérivables que f est dérivable sur chacun des trois intervalles ouverts $]\leftarrow, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, \rightarrow[$ car elle y coïncide avec soit une fonction polynôme $(x \mapsto x^2)$ soit une fonction rationnelle $\left(x \mapsto \dfrac{x}{x-2}\right)$ qui y est définie.

Et on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1[\quad f'(x) = 2x \\ \forall x \in]1, 2[\cup]2, \rightarrow[\quad f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2} \end{cases}$$

Puisque sur $]\leftarrow, 1[$ f coïncide avec la fonction $[f_1 : x \mapsto x^2]$ la limite de f à gauche en 1 est $f_1(1)$ c'est-à-dire 1.

Puisque sur $[1, 2[$ f coïncide avec la fonction $\left[f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}\right]$ la fonction f est continue à droite en 1 et on a :

$$\begin{aligned} f(1) &= f_2(1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

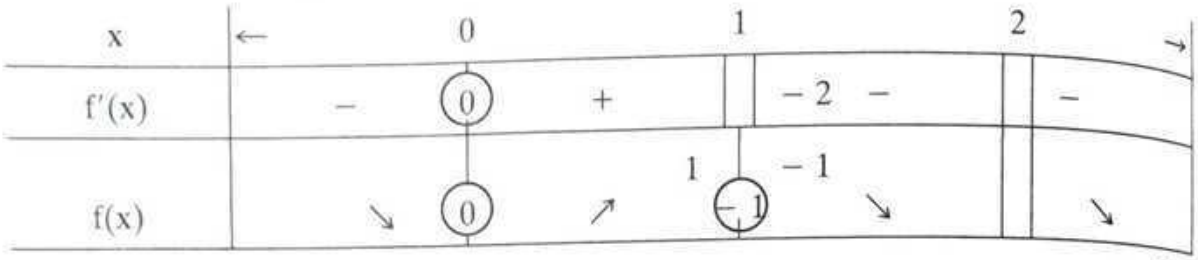
et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -1$

Ainsi la fonction f n'est pas continue à gauche en 1 (car $1 \neq -1$), donc f n'est pas continue en 1, donc f n'est pas dérivable en 1 (on sait que si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0).

Par contre, puisque f coïncide avec f_2 sur $[1, 2[$ et que f_2 est dérivable en 1, f est dérivable à droite en 1 et de nombre dérivé à droite $f_2'(1)$, c'est-à-dire -2

car $f_2' : x \mapsto \dfrac{-2}{(x-2)^2}$.

On obtient ainsi le tableau de variation de f ci-dessous :



en utilisant le signe de 2x sur]←, 1[et le fait que pour tout x différent de 2, $\frac{-2}{(x-2)^2}$ est négatif.

Dans ce tableau, la double barre signifie que la fonction considérée, f ou f', n'est pas définie au point considéré ; on a fait apparaître l'image de 0 par f, ainsi que celle de 1 par f et les limites à gauche (1) et à droite (− 1) de f en 1, et aussi le nombre dérivé à droite (− 2) en 1.

Exercice 20 Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes.

1/ $x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux nombres réels donnés. (On distinguera les cas $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$).

2/ $x \mapsto \frac{1}{x}$.

3/ $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ où a, b, c et d sont quatre nombres réels donnés avec c non nul (on distinguera 3 cas).

4/ $x \mapsto x^3$.

5/ $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels donnés avec a non nul (on distinguera 2 cas).

Exercice 21 Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes.

1/ $x \mapsto 3x^4 + 4x^3 + 5$

2/ $x \mapsto |x - 1| - |x + 3|$

3/ $x \mapsto |x^2 - 5x + 6|$

4/ $x \mapsto |x^2 + x - 5| + |x + 2|$

5/ $x \mapsto |x^2 - x - 12| - |x^2 - 3x - 10|$

6/ $x \mapsto \frac{x + 3}{|x + 1|}$

Exercice 22 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 5$

Étudier les variations de f.

En déduire les variations des fonctions g et h définies par

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(2x + 1)$

et

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f(-3x + 4)$

3 Étude de fonctions

Le but de ce paragraphe est de faire ressortir, au travers de quelques exemples de fonctions, une méthode générale d'étude d'une fonction numérique de la variable réelle, et de préciser, dans chaque sous-paragraphe, une notion ou une propriété de ces fonctions ou de leurs courbes représentatives, et enfin d'exploiter les divers résultats obtenus au cours de ces études pour résoudre quelques systèmes de contraintes.

1) Notion d'extremum – Étude de $[x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4]$

Question 18 *Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$*

Pourquoi f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe selon les valeurs de la variable.

Ainsi on obtient le tableau de variation de la fonction f :

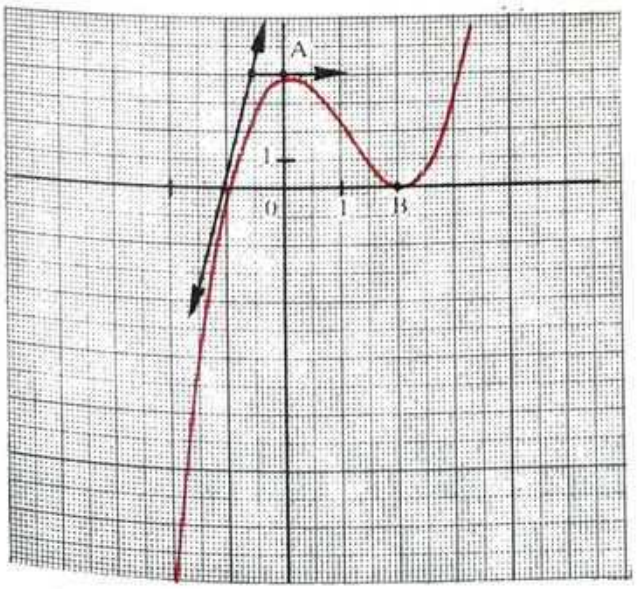
x	$\leftarrow$	0		2	$\rightarrow$
f'(x)	+	(0)	−	(0)	+
f(x)	↗	(4)	↘	(0)	↗

Pour obtenir un meilleur tracé de la courbe représentative, précisons quelques points grâce au tableau de valeurs suivant :

x	− 2	− 1	1	3
f(x)	− 16	0	2	4

Traçons également les tangentes à la courbe aux points d'abscisse respectives − 1, 0 et 2 sachant que

$f'(-1) = 9$ $\quad f'(0) = 0$ $\quad$ et $\quad f'(2) = 0$



En fait souvent on trace un segment de chaque tangente et on dessine, à chaque extrémité de ce segment une flèche pour signifier graphiquement que cette droite est tangente au point marqué de la courbe.

L'étude du comportement de f au voisinage de 0 fait apparaître l'existence d'un intervalle de centre 0, de la forme $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, tel que :

$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\qquad f(x) \leqslant f(0)$

Il suffit en effet de choisir α inférieur ou égal à 3.

On dit que la fonction f possède un maximum relatif (ou local) en 0, de valeur 4 (car $4 = f(0)$).

Question 19 *Montrer qu'il existe un intervalle de centre 2, de la forme $]2 - \beta, 2 + \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :*

$\forall x \in]2 - \beta, 2 + \beta[\qquad f(x) \geqslant f(2)$

On dit que la fonction f possède un minimum relatif (ou local) en 2, de valeur 0 (car $0 = f(2)$).

Plus généralement, on a vu en classe de seconde la notion de maximum et de minimum d'une fonction sur une partie de son ensemble de définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

A une partie de l'ensemble de définition de f

M et m deux nombres réels.

M est le maximum de f sur A si et seulement si $M = \max f(A)$; et ce maximum est atteint en α si $\alpha \in A$ et $f(\alpha) = M$.

m est le minimum de f sur A si et seulement si $m = \min f(A)$; et ce minimum est atteint en β si $\beta \in A$ et $f(\beta) = m$.

On dira que f admet un maximum relatif (respectivement minimum relatif) en x_0 si et seulement si il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(x_0)$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur l'intersection de l'intervalle I et de l'ensemble de définition de f.

Ainsi on pose :

Définition

Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de son ensemble de définition Df.

On dit que f possède un **minimum relatif** en x_0 (respectivement un **maximum relatif** en x_0) si et seulement si il existe un intervalle I de centre x_0 tel que :

$\forall x \in I \cap Df \qquad f(x) \geqslant f(x_0)$

(respectivement :

$\forall x \in I \cap Df \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$)

On dit que f possède un **extremum relatif** en x_0 si et seulement si f possède soit un maximum soit un minimum relatif en ce point x_0. **La valeur de cet extremum** est $f(x_0)$.

Exercice 23 Donner le tableau de variation et tracer la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes, puis trouver les points éventuels en lesquels chacune d'entre elles possède un extremum relatif, en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum et en calculant la valeur de cet extremum.

1/ $f_1 : [-2, 3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$

2/ $f_2 : [-1, 2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(x)$

3/ $f_3 : [-2, 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

4/ $f_4 : [-3, 2] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x + 2| + |x + 1|$

5/ $f_5 : [-2, 3] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^4 - 2x^2$

6/ $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \ f_6(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \\ f_6(0) = 1 \end{cases}$$

7/ $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1[\ f_7(x) = -x + 3 \\ \forall x \in]1, \rightarrow[\ f_7(x) = 2x \\ f_7(1) = 2 \end{cases}$$

Il ressort des exemples étudiés dans l'exercice précédent qu'une fonction peut posséder un extremum relatif en un point sans être dérivable ni même continue en ce point, par contre il est évidemment nécessaire qu'elle y soit définie !

L'étude de la fonction $[x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4]$ montre que f possède deux extremums : en 0 et en 2, et que la fonction dérivée de f s'annule justement en ces points.

Question 20 *Vérifier que pour la fonction f_5 de l'exercice 21, sa fonction dérivée s'annule en tout point où f_5 possède un extremum.*

Plus généralement on admet le résultat :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert de centre x_0. Si f possède un extremum relatif en x_0 alors sa fonction dérivée s'annule en ce point x_0.

De ce fait si f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I alors les nombres réels de I où f possède éventuellement un extremum relatif sont à chercher dans l'ensemble des solutions de l'équation :

$x \in I \quad , \quad f'(x) = 0$

On notera par contre, par exemple pour la fonction f_3 de l'exercice 21, qu'une fonction peut être dérivable sur un intervalle I, de nombre dérivé nul en un point de I sans pour autant posséder un extremum relatif en ce point (pour f_3 il s'agit de 0 dans $]-2, 1[$).

Question 21 *Soit $f : x \mapsto 4x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 70x^2 + 120x$*

Trouver les zéros de la fonction dérivée f' de f.

Parmi ces zéros de f' quels sont ceux en lesquels f possède un extremum ? (Utiliser le tableau de variation de f).

Question 22 *Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I tel que la fonction dérivée de f s'annule en x_0 et y change de signe.*

Montrer, en dressant les deux tableaux de variations possibles de f dans un intervalle de centre x_0 inclus dans I, que f possède un extremum en x_0.

On retiendra le résultat suivant qui regroupe celui vu après la question 20 et celui de la question 21 :

Théorème

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f possède un extremum en x_0 si et seulement si la fonction dérivée de f s'annule en x_0 en y changeant de signe.

Exercice 24

Soit $f : x \mapsto |x^2 - 3x + 2| + |8 - 2x^2|$

1/ Donner selon les valeurs de x, l'expression de f(x) sans le symbole valeur absolue. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2/ Dans quels intervalles ouverts f est-elle dérivable ?
Étudier la dérivabilité de f aux bornes de ces intervalles.

3/ Dresser le tableau de variation de f et préciser les extremums.

4/ Après avoir dressé un tableau de valeurs de f, tracer la courbe représentative de f (on précisera les demi-tangentes au point d'abscisse -2, 1 et 2).

Exercice 25

Soit $f : x \mapsto |x^2 - x - 12| - |x^2 - 3x - 10|$

1/ Dresser le tableau donnant l'expression de f(x), selon les valeurs de x, sans le symbole valeur absolue.

2/ Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Tracer la courbe représentative de f en précisant les tangentes ou les demi-tangentes aux points dont les abscisses sont les bornes des intervalles trouvés à la première question.

2) Discussion graphique – Étude de $\left[x \mapsto \left|\frac{x^3}{3}\right| - 2x^2 + 3|x| + 1\right]$

On se propose de discuter graphiquement, selon les valeurs du nombre réel m, du nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E_m) : x \in \mathbb{R} \quad , \quad \left|\frac{x^3}{3}\right| - 2x^2 + 3|x| + 1 = m$$

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Question 23 *Étudier et représenter graphiquement la fonction f :*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$

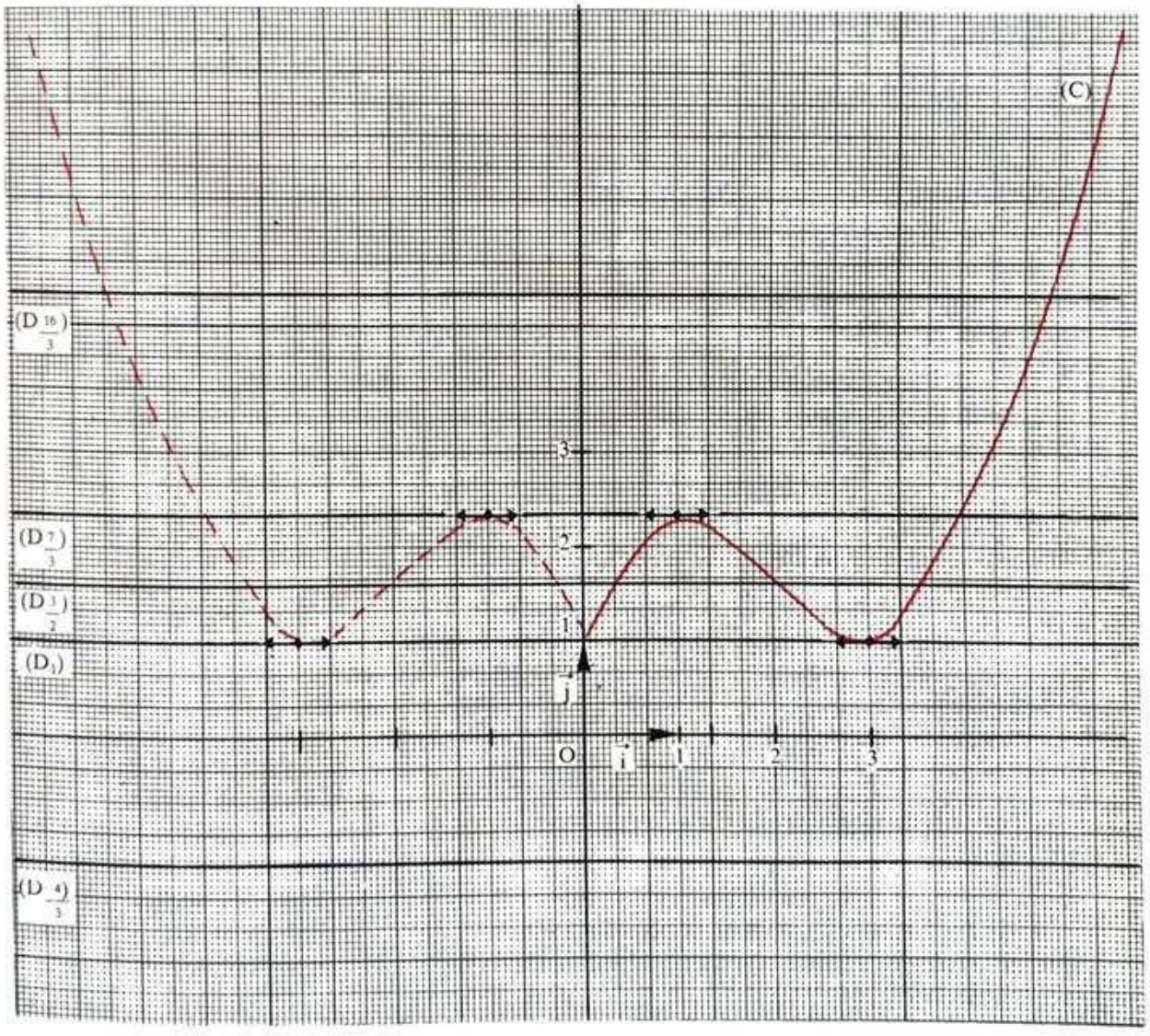
Vérifier que la fonction g définie par :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \left|\frac{x^3}{3}\right| - 2x^2 + 3|x| + 1$

est paire et coïncide avec f sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire le tableau de variation de g.

Ainsi la courbe représentative (C) de g est la réunion de la courbe représentative de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ et de l'image de cette courbe par la symétrie orthogonale d'axe D(O, $\vec{j}$). D'où le tracé ci-dessous de (C) :



Pour tout nombre réel m on considère la droite (D_m) d'équation : y = m

Puisque une équation de la courbe (C) de g est $y = \left|\frac{x^3}{3}\right| - 2x^2 + 3|x| + 1$, résoudre l'équation (E_m) :

$$(E_m) : x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{x^3}{3}\right| - 2x^2 + 3|x| + 1 = m$$

c'est trouver les abscisses des points d'intersection de (C) et de (D_m).

D'où la discussion suivante où S_m désigne l'ensemble des solutions de (E_m) :

Si $m < 1$ alors card $S_m = 0$: $S_m = \varnothing$

Si $m = 1$ alors card $S_1 = 3$: $S_1 = \{-3, 0, 3\}$

Si $1 < m < \frac{7}{3}$ alors card $S_m = 6$

Si $m = \frac{7}{3}$ alors card $S_{7/3} = 4$: $S_{\frac{7}{3}} = \{-4, -1, 1, 4\}$

Si $m > \frac{7}{3}$ alors card $S_m = 2$

Exercice 26

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 - x + 1$

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Discuter graphiquement, selon les valeurs du nombre réel k, du nombre de solutions de l'équation (E_k) :

$(E_k) : x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + k$

Exercice 27

1/ Tracer la courbe représentative (C) de la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$$

dans un repère orthonormé du plan.

2/ A tout nombre réel m on associe l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient :

$(m + 3)x + 2(m + 1)y = 2$

Vérifier que, pour tout nombre réel m cet ensemble est une droite (D_m) et qu'il existe un unique point A qui appartient à toutes les droites (D_m), que l'on précisera.

3/ Constater graphiquement qu'il existe exactement deux droites passant par A et tangentes à (C) et trouver graphiquement les points de contact de ces droites avec (C).
Après avoir examiné le cas de la droite (D_m) parallèle à $D(O, \vec{j})$, déterminer pour quelles valeurs du nombre réel m, la droite (D_m) est tangente à (C) et calculer les coordonnées des deux points de contact.

4/ Étudier selon les valeurs du nombre réel m le nombre de points d'intersection de la droite (D_m) et de la courbe (C).

3) Extension de la notion de limite : Étude de $\left[x \mapsto \dfrac{3x-4}{x-2}\right]$

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{x-2}$

Question 24 *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	1,8	1,9	1,92	1,94	1,96	1,98	2,02	2,04	2,06	2,08	2,1	2,2
arrondi d'ordre 0 de f(x)												

Il semble d'après ce tableau qu'il n'existe pas de nombre réel qui soit la limite de f en 2, par contre on constate que pour x proche de 2, la valeur absolue de f(x) est un nombre très grand.

Question 25 *1/ Soit* $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Donner l'ensemble de définition de g. Pourquoi g est-elle impaire ? Compléter le tableau suivant :

x	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
gx)							

2/ Pour tout h dans un ensemble convenablement choisi, écrire f(2 + h) en fonction de g(h).

3/ Donner les ensembles de définition respectifs des fonctions $\dfrac{1}{f}$ *et* $\dfrac{1}{g}$ *inverses respectives des fonctions f et g, et montrer que :*

$\lim\limits_{2} \dfrac{1}{f} = 0$ *et* $\lim\limits_{0} \dfrac{1}{g} = 0$

Ainsi pour les fonctions f et g, leurs fonctions inverses ont pour limite 0 respectivement en 2 et en 0 ; et lorsque x est proche de 2 (respectivement de 0), la valeur absolue de f(x) (respectivement de g(x)) est un nombre très grand.

On dit que lorsque x tend vers 2, |f(x)| tend vers **plus l'infini** et on note $\lim\limits_{x \to 2} |f(x)| = +\infty$ ou $\lim\limits_{2} |f| = +\infty$ où le symbole « $+\infty$ » est lu « plus l'infini ».

De même on dit que lorsque x tend vers 0, |g(x)| tend vers plus l'infini, et on note $\lim\limits_{x \to 0} |g(x)| = +\infty$ ou $\lim\limits_{0} |g| = +\infty$.

Plus généralement on a :

Définition

Soit f une fonction définie, ainsi que sa fonction inverse $\frac{1}{f}$, sur un ensemble de la forme $]a - r, a[\cup]a, a + r[$ où a est un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.

On dit que lorsque x tend vers a, valeur absolue de f(x) tend vers plus l'infini, ou la **limite de |f| en a est plus l'infini** et on note $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = + \infty$ ou $\lim\limits_{a} |f| = + \infty$ si et seulement si la fonction $\frac{1}{f}$ a pour limite 0 en a.

Dans le cas où, pour tout x dans un ensemble E de la forme $]a - r, a[\cup]a, a + r[$, f(x) garde un signe constant on a :

- **la limite de f en a est plus l'infini,** et on note $\lim\limits_{a} f = + \infty$, si et seulement si

  $\lim\limits_{a} |f| = + \infty$ et, $\forall x \in E \qquad f(x) > 0$.

- **la limite de f en a est moins l'infini,** et on note $\lim\limits_{a} f = - \infty$, si et seulement si

  $\lim\limits_{a} |f| = + \infty$ et, $\forall x \in E \qquad f(x) < 0$.

Remarque :

Les symboles $+ \infty$ et $- \infty$, qu'on lit plus l'infini et moins l'infini ne sont pas des nombres réels ; ils s'écrivent dans les phrases $\lim\limits_{a} f = + \infty$ et $\lim\limits_{a} f = - \infty$ pour signifier que lorsque x est proche de a, f(x) est un nombre très grand (ou un nombre négatif et de valeur absolue très grande).

Exercice 28 Déterminer la limite de la fonction f en a dans chacun des cas suivants :

1/ $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ $\qquad a = 0$

2/ $f : x \mapsto \frac{-1}{|x - 2|}$ $\qquad a = 2$

Souvent, sachant que |f| a pour limite $+ \infty$ en a, pour préciser si f a pour limite $+ \infty$ ou $- \infty$, il est nécessaire de chercher une limite à gauche et une limite à droite en a, c'est-à-dire de rechercher la limite de la restriction de f à un intervalle de la forme $]a - r, a[$ et celle de la restriction de f à un intervalle de la forme $]a, a + r[$.

Ainsi par exemple pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x - 2}$, on a vu $\lim\limits_{2} |f| = + \infty$. De plus on a :

x	$- \infty$		4/3		2		$+ \infty$
f(x)		+	0	−	‖	+	

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = - \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = + \infty$

De même pour $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{0} |g| = + \infty$, et plus précisément :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = - \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = + \infty$.

Exercice 29 Étudier la limite en a de la fonction f dans chacun des cas suivants :

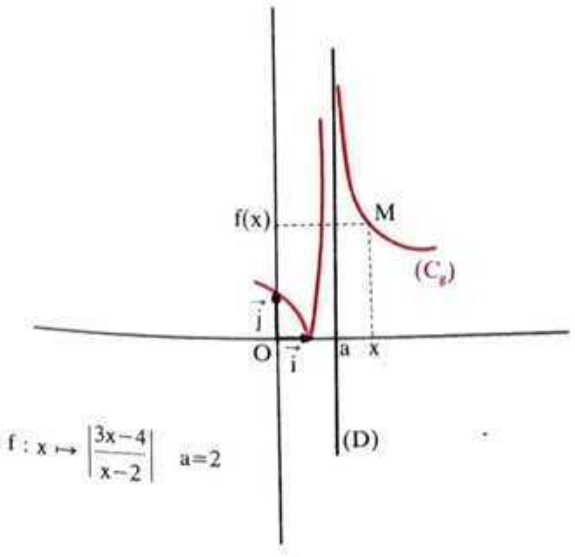
1/ $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2}$ $\quad a = 1$

2/ $f : x \mapsto \dfrac{5x^2 + 3x - 6}{x - 3}$ $\quad a = 3$

3/ $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + x - 6}$ $\quad a = - 2$

4/ $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x - 4)^2}$ $\quad a = 4$

Soient f une fonction et a un nombre réel tels que $|f|$ ait pour limite $+ \infty$ en a. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note (C_f) la courbe de f dans ce repère et (D) la droite d'équation $x = a$.



Soit x un élément de l'ensemble de définition de f, on note M le point de (C_f) de coordonnées x et f(x). La distance du point M à la droite (D) est $|x - a|$ or $\lim\limits_{h \to a} |x - a| = 0$, ainsi quand x s'approche de a le point M « s'approche de la droite (D) ». On dit que la droite (D) est **asymptote à la courbe** (C_f).

Ainsi $\lim_{a} |f| = +\infty$ se traduira pour la courbe représentative (C_f) de f par : la droite d'équation $x = a$ est asymptote à (C_f).

On a vu (chapitre 6, question 23) que la courbe représentative de la fonction $[f : x \mapsto \sqrt{x + 1}]$ admet au point $A'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ une demi-tangente $[A'y)$ « verticale ». On constate que le rapport $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$, qui est égale à $\frac{1}{\sqrt{h}}$, a pour limite $+\infty$ à droite en 0.

Plus généralement : soit f une fonction continue en x_0 et telle que $\lim_{h \to 0} \left| \frac{h(x_0 + h) - f(x)}{h} \right| = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en x_0 mais la courbe représentative de f admet une tangente « verticale » c'est-à-dire parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse x_0.

Ainsi par exemple la fonction $[x \mapsto -\sqrt[3]{x - 1} + 2]$, dont la courbe est tracée au début du paragraphe III du chapitre 6, n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe admet une tangente « verticale » au point de coordonnées 1 et 2.

De même pour la notion de demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées en considérant la limite à droite (ou à gauche) du rapport.

Question 26 *On considère à nouveau la fonction* $f : x \mapsto \frac{3x - 4}{x - 2}$

Compléter le tableau suivant grâce à une calculatrice :

x	10	10^2	10^3	5.10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$									

On constate sur ce tableau que pour des valeurs très grandes de x, f(x) est très proche de 3, on dira que : lorsque x tend vers plus l'infini f(x) tend vers 3 et on notera $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$, ou encore $\lim_{+\infty} f = 3$ qu'on lit : **la limite en plus l'infini** de f est 3.

De même, en prenant pour x des valeurs négatives mais très grandes en valeur absolue, on constate que f(x) est très proche de 3, on dira que : lorsque x tend vers moins l'infini f(x) tend vers 3 et on notera $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, ou encore $\lim_{-\infty} f = 3$ qu'on lit : **la limite en moins l'infini de f est** 3.

De même pour la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$, en prenant des valeurs de x très grandes, on constate que $\frac{1}{x}$ est très proche de 0 ; on écrira $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Et, comme en prenant des valeurs de x négatives et de valeur absolue très grande, le nombre $\frac{1}{x}$ est très proche de 0, on écrira aussi $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Question 27 *Pour* $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{x-2}$, *on note g la fonction définie par :* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donner l'ensemble de définition de g.

Vérifier que l'on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = 3$

Ainsi pour cet exemple on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Plus généralement on pose :

Définition

Soient l un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme]a, →[où a est un nombre réel strictement positif, g la fonction définie par : $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction g est définie sur un intervalle de la forme]0, r[où r est un nombre réel strictement positif.

On dit que **f a pour limite l en plus l'infini** et on écrit $\lim\limits_{+\infty} f = l$, ou que f(x) a pour limite l quand x tend vers plus l'infini et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ si et seulement si la limite à droite en 0 de la fonction g est l, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$.

De même, on pose :

Définition

Soient l un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme]←, a[où a est un nombre réel strictement négatif, g la fonction définie par : $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction g est définie sur un intervalle de la forme]− r, 0[où r est un nombre réel strictement positif.

On dit que **f a pour limite l en moins l'infini** et on écrit $\lim\limits_{-\infty} f = l$, ou que f(x) a pour limite l quand x tend vers moins l'infini et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si et seulement si la limite à gauche en 0 de la fonction g est l, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$.

Remarque :

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ sont aussi utilisés dans l'écriture des intervalles non bornés :

Soit b un nombre réel, on note :
$[b, +\infty[$, l'intervalle $[b, \rightarrow[$,
ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à b
$]b, +\infty[$, l'intervalle $]b, \rightarrow[$,
ensemble des nombres réels strictement supérieurs à b
$]-\infty, b]$, l'intervalle $]\leftarrow, b[$,
ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à b
et $]-\infty, b[$, l'intervalle $]\leftarrow, b[$,
ensemble des nombres réels strictement inférieurs à b.

Exercice 30 Déterminer les limites en plus l'infini et en moins l'infini, si elles existent, des fonctions suivantes.

1/ $x \mapsto \dfrac{8x - 4}{3x + 2}$

2/ $x \mapsto \dfrac{5}{8x + 3}$

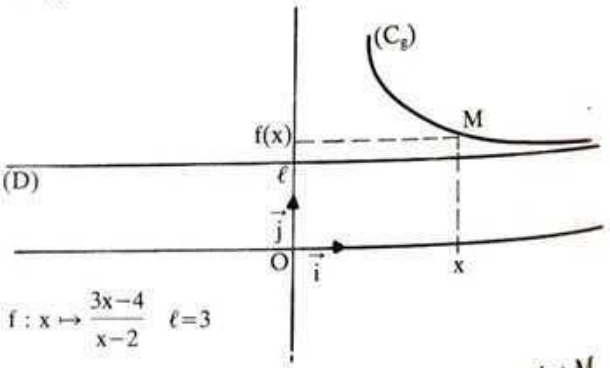
3/ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{2x + 3}}$

4/ $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Soient f une fonction et l un nombre réel tels que f ait pour limite l en plus l'infini. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note (C_f) la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = l$.

Soit x un élément de l'ensemble de définition de f, on note M le point de (C_f) de coordonnées x et f(x).

La distance du point M à la droite (D) est $|f(x) - l|$. Or on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.



Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - l| = 0$ (comme lorsque x tend vers un nombre réel). Le point M « s'approche de la droite (D) » quand x tend vers plus l'infini. On dit que la **droite** (D) est **asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de plus l'infini.**

Ainsi, $\lim\limits_{+\infty} f = l$ se traduira, pour la courbe représentative (C_f) de f par : la droite d'équation $y = l$ est asymptote à (C_f) au voisinage de plus l'infini.

De même, $\lim\limits_{-\infty} f = l$ se traduira par : la droite d'équation $y = l$ est asymptote à (C_f) au voisinage de moins l'infini.

Ainsi par exemple la courbe de $\left[x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x - 2}\right]$ a trois asymptotes : la droite d'équation $x = 2$, la droite d'équation $y = 3$ au voisinage de plus l'infini et cette même droite au voisinage de moins l'infini.

Dans ce cas, puisque la même droite (d'équation y = 3) est asymptote à la courbe au voisinage de plus l'infini et moins l'infini, on dit souvent que la courbe admet seulement deux asymptotes : l'une « verticale » : droite d'équation x = 2
l'autre « horizontale » : droite d'équation y = 3

Exercice 31 Déterminer, si elles existent, les asymptotes horizontales et verticales aux courbes représentatives, dans un repère orthonormé, des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto \dfrac{3x + 2}{5x - 4}$

2/ $x \mapsto \dfrac{7x^2 + 5x - 4}{2x^2 - 7x + 6}$

3/ $x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$

4/ $x \mapsto \dfrac{3x + 7}{x}$

5/ $x \mapsto \dfrac{|2x - 5|}{x + 3}$

6/ $x \mapsto \dfrac{3x + 4}{|x| + 1}$

Question 28 *Soient $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$.*

Vérifier, en dressant un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice que, pour des grandes valeurs de x, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont de très grands nombres.

Vérifier que la limite à droite en 0 des fonctions g_1 et g_2, définies par :

$$g_1(x) = \frac{1}{f_1\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ et } g_2(x) = \frac{1}{f_2\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \text{est 0.}$$

Plus généralement on pose :

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme]a, $+\infty$[où a est un nombre réel strictement positif, et g la fonction définie sur cet intervalle par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

On dit que lorsque x tend vers plus l'infini, valeur absolue de f(x) tend vers plus l'infini et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, ou **la limite de |f| en plus l'infini est plus l'infini,**

et on note $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$ si et seulement si la fonction $\dfrac{1}{f}$ a pour limite 0 en plus l'infini.

Comme précédemment dans le cas où, sur]a, $+\infty$[(ou]b, $+\infty$[avec b > a) f garde un signe constant :

- la limite en plus l'infini de f est plus l'infini, et on note $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$ et, $\forall x \in]a, +\infty[\quad f(x) > 0$
- la limite en plus l'infini de f est moins l'infini et on note $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$ et, $\forall x \in]a, +\infty[\quad f(x) < 0$.

Question 29 *De manière analogue, définir :*

$\lim_{-\infty} |f| = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$

Exercice 32 Déterminer les limites en plus l'infini et moins l'infini des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto 3x - 2$

2/ $x \mapsto -2x + 5$

3/ $x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux nombres réels (on distinguera les cas $a > 0$, $a < 0$ et $a = 0$)

4/ $x \mapsto x^2$

5/ $x \mapsto x^3$

Les théorèmes généraux, relatifs aux opérations sur les fonctions possédant en 0 pour limite un nombre réel, se généralisent selon les résultats présentés dans les tableaux ci-dessous que l'on admettra.

Il est bien entendu que si les fonctions f et g possèdent les limites l et l′ (où l et l′ sont des nombres réels) ou plus l'infini ou moins l'infini quand x tend vers le nombre réel x_0 (ou vers x_0 à droite ou vers x_0 à gauche ou vers plus l'infini ou vers moins l'infini) alors l'existence de la limite de la fonction f + g dans le premier tableau (fg dans le 2e et $\frac{f}{g}$ dans le 3e) se pose quand x tend vers x_0 (ou vers x_0 à droite ou vers x_0 à gauche ou vers plus l'infini ou vers moins l'infini respectivement).

si f a pour limite	et si g a pour limite	alors f + g a pour limite
l	l′	l + l′
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si |f| a pour limite	et si |g| a pour limite	alors |fg| a pour limite
l	l′	ll′
l ($l \neq 0$)	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Ces résultats s'appliquent également au produit d'une fonction par un nombre réel k (il suffit en effet de lui associer la fonction constante $[x \mapsto k]$ et de considérer les 2 premières lignes).

si $\lvert f\rvert$ a pour limite	et si $\lvert g\rvert$ a pour limite	alors $\left\lvert\frac{f}{g}\right\rvert$ a pour limite
l	l' $(l' \neq 0)$	$\frac{l}{l'}$
l	0	$+\infty$
l	$+\infty$	0
$+\infty$	l	$+\infty$

Question 30 *Dresser le tableau donnant la limite de l'inverse de la fonction quand on connaît la limite de celle-ci.*

On aura noté que les 3 tableaux ci-dessus ne donnent pas de résultat dans chacun des quatre cas suivants (on note a pour, soit x_0, soit x_0 à droite, soit x_0 à gauche, soit $+\infty$. soit $-\infty$).

Pour la somme : lorsque $\lim_a f = +\infty$ et $\lim_a g = -\infty$

Pour le produit : lorsque $\lim_a |f| = 0$ et $\lim_a |g| = +\infty$

Pour le quotient : lorsque $\lim_a |f| = 0$ et $\lim_a |g| = 0$

ou lorsque $\lim_a |f| = +\infty$ et $\lim_a |g| = +\infty$

En effet dans chacun de ces quatre cas, on ne peut pas donner la limite cherchée, dans le cas général, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 33

1/ Soient $f : x \mapsto x$, $g_1 : x \mapsto -x$ et $g_2 : x \mapsto -x + 3$.

Déterminer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{+\infty} g_1$, $f + g_1$ et $\lim_{+\infty} (f + g_1)$, $\lim_{+\infty} g_2$, $f + g_2$ et $\lim_{+\infty} (f + g_2)$

2/ Soient $f : x \mapsto x$, $h_1 : x \mapsto 0$ et $h_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Déterminer les limites en plus l'infini des fonctions f, h_1, fh_1, h_2, fh_2.

3/ Soient $f : x \mapsto x$, $j_1 : x \mapsto 2x$ et $j_2 : x \mapsto 3x$

Déterminer les limites des fonctions f, j_1, $\frac{f}{j_1}$, j_2, $\frac{f}{j_2}$.

a) en 0
b) en $+\infty$

Dans chacun des quatre cas où aucun théorème ne permet de conclure quant à la limite de la somme, ou du produit, ou du quotient, on essaye de trouver la limite par un autre moyen (souvent une autre écriture, par simplification ou factorisation).

Exercice 34 Déterminer la limite en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ de :

$$\left[x \mapsto \frac{|x|}{x^2}\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto \frac{x^2}{|x|}\right]$$

Question 31 *1/ Soit* $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$

Les théorèmes généraux permettent-ils de trouver l'éventuelle limite de la fonction f en $+\infty$ *?*

En remarquant que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x(x - 2) + 3,$

montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Déterminer la limite en $-\infty$ *de f.*

2/ Soit $g : x \mapsto -x^3 + x^2 - x$

Les théorèmes généraux permettent-ils de trouver l'éventuelle limite de la fonction g en $+\infty$ *?*

Peut-on conclure en remarquant que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x(-x^2 + x - 1)$ *?*

En remarquant que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

montrer que $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

Plus généralement, soit f une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) définie par :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec a_n non nul.

Pour tout nombre réel x non nul, on a :

$$f(x) = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} = 0$, …, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_0}{a_n x^n} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$

De même $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$

On a ainsi montré le résultat suivant :

Théorème

Toute fonction polynôme a, en plus l'infini ou en moins l'infini, même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.

Remarque :

Ne pas oublier que ce résultat n'est vrai que pour les limites en plus l'infini et moins l'infini :

$\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 1) = 3$ mais $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 = 12$

Ne pas oublier aussi qu'il n'est vrai que pour les fonctions polynômes.

Exercice 35

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto 5x^2 + 3x - 7$

2/ $x \mapsto 10x^7 - 6x^6 + 8x^5 - 3x^3 - 7x^2 + 36$

3/ $x \mapsto 8x^3 + 5|x + 2|$

4/ $x \mapsto 5|x|^5 - 3x^4 + 2|x - 4|$

Question 32

1/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 2x - 2}$$

Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

Les théorèmes généraux permettent-ils de trouver l'éventuelle limite de f en plus l'infini ?

En remarquant que l'on a :

$$\forall x \in D_f - \{0\} \qquad f(x) = \frac{2x^5\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^5}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Déterminer la limite de f en moins l'infini.

2/ Mêmes questions pour les fonctions g et h définies par :

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^2 + 8x - 4}{x^2 - 5}$$

et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x + 1}{4x^2 - 4x - 15}$$

Plus généralement, soit f une fonction rationnelle, c'est-à-dire quotient de deux fonctions polynômes ; il existe donc deux entiers naturels, n et p et des nombres réels a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, b_p, b_{p-1}, ..., b_0, avec a_n et b_p non nuls tels que

$$f : x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Pour tout nombre réel x non nul et n'annulant pas le dénominateur, on a :

$$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_p x^p \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \ldots + \frac{b_0}{b_p x^p}\right)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \ldots + \frac{b_0}{b_p x^p}\right) = 1$$

$$\text{donc } \lim_{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

$$\text{De même } \lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

On a ainsi montré le résultat :

Théorème

La limite d'une fonction rationnelle, en plus l'infini ou en moins l'infini, est égale à la limite du quotient des fonctions monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Remarque :

Là encore ce théorème ne peut pas s'utiliser pour la limite en un nombre réel, ni pour une fonction non rationnelle.

Exercice 36 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions

1/ $x \mapsto \dfrac{7x^8 - 3x^5 + 8x + 3}{5x^6 + 10x - 4}$

2/ $x \mapsto \dfrac{6x^3 - 5x + 2}{7x^4 - 3x^2 + 6}$

3/ $x \mapsto \dfrac{|x^2 - 3| + 5x}{|x + 1| + 4}$

Enfin on admet le résultat suivant où, quand on note $\lim_a$ ceci symbolise la limite en un nombre réel x_0, ou à droite en x_0 ou à gauche en x_0, ou la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ et I est un ensemble respectivement de la forme $]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[$, ou $]x_0, x_0 + r[$, ou $]x_0 - r, x_0[$ ou $]b, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$:

Théorème

Soient f une fonction positive sur I et ayant une limite en a

- Si $\lim_a f$ est un nombre réel l alors l est positif ou nul et $\lim_a \sqrt{f} = \sqrt{l}$
- Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a \sqrt{f} = +\infty$

Exercice 37

Déterminer l'ensemble Df de définition de f, que l'on mettra sous forme d'une réunion d'intervalles, et calculer les limites de f en chacune des bornes de ces intervalles (on dit calculer les limites de f aux bornes de Df), dans chacun des cas suivants :

1/ $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 3x - 12}$

2/ $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x - 1}{3 - x}}$

3/ $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$

4/ $f : x \mapsto \dfrac{8x + 7}{\sqrt{2x + 1}}$

5/ $f : x \mapsto \dfrac{5x - 3}{|x + 3| - 2}$

6/ $f : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

4) Notion d'asymptote oblique : Étude de $\left[x \mapsto x + 3 + \dfrac{4}{x}\right]$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + 3 + \frac{4}{x}$$

Question 33

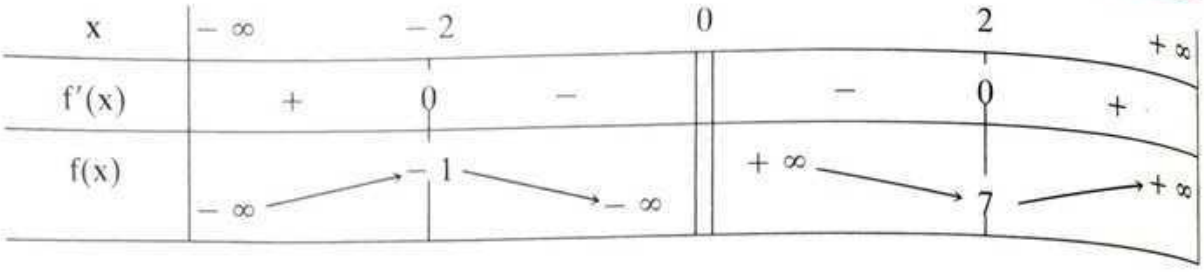
1/ Déterminer, sous forme de réunion d'intervalles, l'ensemble de définition D_f de f. Vérifier que pour tout x de D_f, on a $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

2/ Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

3/ Pourquoi f est-elle dérivable en tout point de D_f ?

Donner sa fonction dérivée f' et le signe de f'(x) selon les valeurs de x.

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant où, comme on le fera désormais, on a noté les limites calculées, aux bornes des intervalles de D_f, c'est-à-dire ici en $-\infty$, $+\infty$, 0 à droite et à gauche



On notera que f', la fonction dérivée de f, s'annule et change de signe en − 2 et 2, donc f possède un maximum en − 2 de valeur − 1 et un minimum en 2 de valeur 7.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On note (C) la courbe représentative de f dans ce repère.

Puisque $\lim_{0} |f| = +\infty$ la droite (OJ), d'équation x = 0, est asymptote à (C).

Avant de tracer (C), étudions ses **branches infinies,** c'est-à-dire étudions la position des points de (C) dont l'abscisse a une valeur absolue très grande.

Question 35 *Compléter le tableau ci-dessous*

x	-10^7	-10^5	-10^2	10^2	10^4	10^6
$f(x)$						
$x+3$						
$f(x)-(x+3)$						

Il ressort de cette question que, pour x assez grand en valeur absolue, le nombre réel (x + 3) est une valeur approchée du nombre réel f(x). Plus précisément, montrons que l'on a :

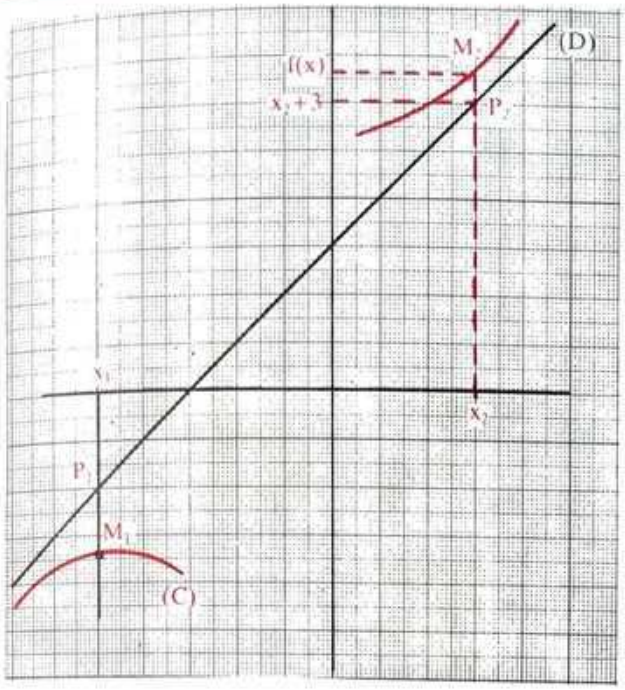
$|f(x) - (x + 3)| = 0$

et $\lim_{x \to -\infty} |f(x) - (x + 3)| = 0$

En effet, soit x un nombre réel non nul, on a :

$$|f(x) - (x + 3)| = \left|\frac{4}{x}\right|$$

or $\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{4}{x}\right| = 0$, et $\lim_{x \to -\infty} \left|\frac{4}{x}\right| = 0$



d'où le résultat cherché.

Interprétons graphiquement ce résultat :

Soit x un nombre réel non nul, M le point de (C) d'abscisse x et P le point de même abscisse x de la droite (D) d'équation $y = x + 3$.

$M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ $\quad$ $P\begin{pmatrix} x \\ x + 3 \end{pmatrix}$

La distance d(M, P) est égale à $|f(x) - (x + 3)|$, elle tend donc vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On dit que la **droite** (D) est **asymptote à (C)** au voisinage de plus l'infini.

Pour les mêmes raisons, (D) est aussi asymptote à (C) au voisinage de moins l'infini.

De plus on a : $\overline{PM} = f(x) - (x + 3)$

$$= \frac{4}{x}$$

donc pour x positif, M est au-dessus de P : la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) dans le demi-plan $\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P},\ x \geqslant 0\}$ et pour x négatif, M est au-dessous de P : la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) dans le demi-plan $\{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} ;\ x < 0\}$.

Plus généralement on pose :

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle $]x_0, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, x_0[$, a et b deux nombres réels.

On note d la fonction définie par :

$\forall x \in]x_0, +\infty[\quad d(x) = f(x) - (ax + b)$

(respectivement $\forall x \in]-\infty, x_0[\quad d(x) = f(x) - (ax + b)$)

Si $\lim\limits_{+\infty} |d| = 0$ (respectivement $\lim\limits_{-\infty} |d| = 0$) alors on dit que la droite (D) dont une équation dans un repère $\mathcal{R}$ du plan est $y = ax + b$ est **asymptote** à la courbe représentative (C) de f dans $\mathcal{R}$ au voisinage de plus l'infini (respectivement de moins l'infini).

Remarque :

Selon le signe de la fonction d on peut savoir si la courbe de f est située au-dessus ou au-dessous de l'asymptote « oblique » trouvée, dans un certain demi-plan, ensemble des points d'abscisse supérieure à un nombre donné, ou inférieure à un nombre donné.

Exercice 38 Tracer la courbe représentative (C) de f :

$f : x \mapsto x + 3 + \frac{4}{x}$

Vérifier que le point $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de (C), et que ce point est l'intersection des deux droites asymptotes à (C).

Méthode pratique

Pour trouver une éventuelle asymptote oblique à la courbe (C) de f au voisinage de plus l'infini (on ferait de même en moins l'infini).

Dans le cas où |f| a pour limite plus l'infini en plus l'infini, on cherche à exprimer, pour tout x dans un intervalle de la forme $]x_0, + \infty[$, f(x) sous la forme $ax + b + g(x)$ où a et b sont deux nombres réels, a est non nul et g une fonction de limite nulle en $+ \infty$. Alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote à (C) au voisinage de plus l'infini.

Ainsi par exemple la fonction f définie par

$f : x \mapsto \frac{3x^2 + 13x + 6}{x + 4}$

est définie sur $]- \infty, - 4 [\cup] - 4, + \infty[$ et a pour limite $+ \infty$ en $+ \infty$, car on a

$$\lim_{- \infty} f = \lim_{x \to + \infty} \frac{3x^2}{x}$$
$$= \lim_{x \to + \infty} 3x$$
$$= + \infty$$

Posons la division euclidienne de la fonction polynôme $[x \mapsto 3x^2 + 13x + 6]$ par $[x \mapsto x + 4]$

$3x^2 + 13x + 6$	$x + 4$
$- 3x^2 - 12x$	
$x + 6$	$3x + 1$
$- x - 4$	
2	

Ainsi, pour tout nombre réel x on a :

$3x^2 + 13x + 6 = (x + 4)(3x + 1) + 2$

D'où, pour tout nombre réel x distinct de -4 on a

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{2}{x+4}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+4} = 0$, la droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.

La recherche des nombres réels a et b et de la fonction g se fait souvent par identification.

Par exemple, la fonction f, définie par

$$f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x^3 - 7x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x-3)}$$

est définie sur $]-\infty, 0[$ et on a

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} 2x$$
$$= -\infty$$

Montrons l'existence de nombres réels a, b, c et d tels que :

$$(1) \quad \forall x \in]-\infty, 0[\qquad f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-2)(x-3)}$$

Puisque, pour tout nombre réel x distinct de 2 et 3 on a :

$$ac + b + \frac{cx + d}{(x-2)(x-3)} = \frac{ax^3 + (b-5)x^2 + (6a - 5b + c)x + (6b + d)}{(x-2)(x-3)}$$

La condition (1) est équivalente à la condition (1′) :

(1′) $\forall x \in]-\infty, 0[\quad 2x^3 - 7x^2 - 3x + 8 = ax^3 + (b - 5a)\ x^2 + (6a - 5b + c)\ x + (6b + d)$.

Or une fonction polynôme de degré 3 a au plus trois zéros donc (1′) est équivalente au système (S) :

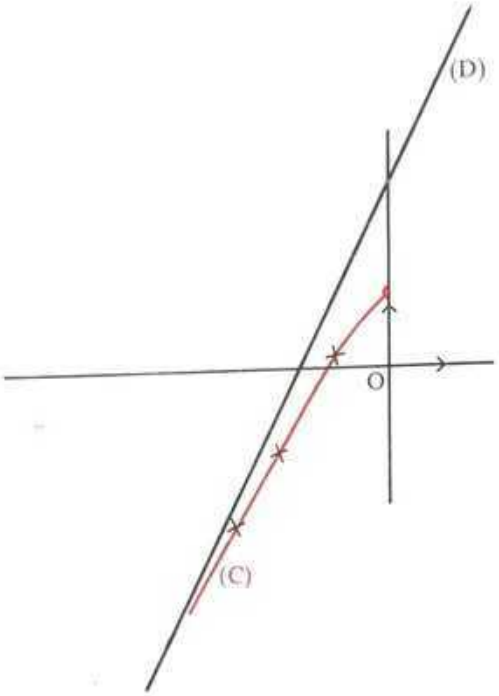
$$(S) \quad \begin{cases} 2 = a \\ -7 = b - 5a \\ -3 = 6a - 5b + c \\ 8 = 6b + d \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 + 5a \\ c = -3 - 6a + 5b \\ d = 8 - 6b \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -10 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\qquad f(x) = 2x + 3 + \frac{-10}{x^2 - 5 + 6}$$

$$\text{Or } \lim_{x \to -\infty} \frac{-10}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-10}{x^2}$$



Donc la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f.

Comme, de plus,

$$\forall x \in]-\infty, 0[\quad \frac{-10}{x^2 + 5x + 6} < 0$$

car, pour tout $x < 2$ on a

$x^2 + 5x + 6 > 0$,

la courbe (C) est située au-dessous de (D).

Exercice 39

1/ Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + 2 - \frac{3}{x}$$

Étudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ du plan en précisant ses asymptotes.

2/ Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2|x| - 3}{x}$$

Expliquer comment la courbe représentative (G) de g dans le repère $\mathcal{R}$ peut être déduite de celle de f.

Tracer (G) et préciser les équations des asymptotes à (G).

Exercice 40

Soit $f : x \mapsto \frac{|x^2 + 2x - 8|}{2x - 3}$

Étudier les variations de f.

Préciser les asymptotes à la courbe représentative (C) de f.

Tracer (C) dans un repère orthonormé du plan.

4 Étude de fonctions trigonométriques

1) Nombre dérivé en zéro des fonctions sinus et cosinus

On a vu que l'on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Puisque, pour tout nombre réel h non nul on a :

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin (0 + h) - \sin 0}{h}, \text{ car } \sin 0 = 0,$$

on en déduit que la fonction sinus est dérivable en 0 et de nombre dérivé égal à 1.

Ainsi la fonction sinus possède un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\sin h = \sin 0 + 1\,h + h\,j(h)$$

avec $\lim_{0} j = 0$

$$\left(\text{en fait } j : h \mapsto \frac{\sin h}{h} - 1\right)$$

Question 36 *Montrer que, pour tout nombre réel x non nul on a :*

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

En déduire que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Question 37 *1/ Vérifier que la fonction* $\left[x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}\right]$ *est impaire.*

Compléter, à l'aide d'une calculatrice le tableau suivant :

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
arrondi d'ordre 6 de cos x					
arrondi d'ordre 6 de $\frac{\cos x - 1}{x}$					

Quelle semble être la limite de ce rapport quand x tend vers 0 ?

2/ Vérifier que, pour tout nombre réel h non nul on a :

$$\frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h} = h\,\frac{\cos h - 1}{h^2}$$

Utiliser le résultat de la question 36 pour prouver que la fonction cosinus est dérivable en 0 et de nombre dérivé 0.

On a ainsi montré :

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en 0 et leurs nombres dérivés en 0 sont respectivement : 1 et 0.

Exercice 41 Écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction cosinus au voisinage de 0.

Exercice 42 Utiliser une calculatrice pour constater que la fonction $\left[x \mapsto \frac{\text{tg}x}{x}\right]$ semble avoir une limite 1 en 0.

Démontrer que ce résultat est vrai.

Montrer que la fonction tangente est dérivable en zéro et préciser son nombre dérivé en ce point.

Écrire le développement limité à l'ordre 1 de la fonction tangente au voisinage de zéro.

2) Fonctions dérivées des fonctions sinus, cosinus et tangente

Soit un nombre réel x_0, montrons que la fonction sinus est dérivable en x_0.

Soit h un nombre réel non nul.

$$\text{On a : } \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h}$$

$$= \cos x_0 \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$\text{Comme } \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ et que } \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$\text{on en déduit que : } \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \cos x_0$$

Théorème

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est la fonction cosinus.

Remarques :

La fonction sinus étant dérivable sur $\mathbb{R}$ est donc continue en $\mathbb{R}$.

La fonction sinus possède au voisinage de tout nombre réel x_0 le développement limité d'ordre 1 suivant :

$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + h \cos x_0 + h\, j(h)$ avec $\lim_0 j = 0$.

Exercice 43 Trouver une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus au point d'abscisse x_0 dans chacun des cas suivants :

$x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_0 = 8\pi$, $x_0 = 11\pi$

Question 38 *Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction $[x \mapsto \sin(ax + b)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée.*

Puisque, pour tout nombre réel x on a :

$$\cos x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$$

on en déduit que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto -\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire :

$$x \mapsto -\sin x$$

Théorème

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est la fonction opposée de la fonction sinus.

Remarques :

La fonction cosinus étant dérivable sur $\mathbb{R}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction cosinus possède au voisinage de tout nombre réel x_0 le développement limité à l'ordre 1 suivant :

$\cos(x_0 + h) = \cos x_0 - h \sin x_0 + h\, j(h)$
avec $\lim_0 j = 0$

Exercice 44 Soient a et b deux nombres réels.

Montrer que la fonction $[x \mapsto \cos(ax + b)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver sa fonction dérivée.

L'ensemble de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$ que l'on notera ici D. Puisque, pour tout nombre réel x de D on a : $\text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ on déduit que la fonction tangente est dérivable en x et de nombre dérivé :

$$\text{tg}'x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

c'est-à-dire : $\text{tg}'x = \frac{1}{\cos^2 x}$

ou encore : $\text{tg}'x = 1 + \text{tg}^2 x$

On retiendra le résultat suivant :

Théorème

La fonction tangente est dérivable en tout nombre réel x_0 de son ensemble de définition et de nombre dérivé en ce point égal à :

$1 + \text{tg}^2 x_0$.

Remarques :

La fonction tangente, étant dérivable sur D, est donc continue sur D.

La fonction tangente possède au voisinage de tout nombre réel x_0 de D le développement limité à l'ordre 1 suivant :

$\text{tg}(x_0 + h) = \text{tg}x_0 + h(1 + \text{tg}^2 x_0) + h\, j(h)$ avec $\lim_0 j = 0$.

Exercice 45 Soient a et b deux nombres réels montrer que la fonction $[x \mapsto \text{tg}\,(ax + b)]$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition et trouver sa fonction dérivée.

Exercice 46 On appelle fonction cotangente la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ notée cotg et définie par : $\text{cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

Montrer que la fonction cotangente est dérivable en tout nombre réel où elle est définie. Trouver sa fonction dérivée.

3) Étude des fonctions sinus, cosinus et tangente

La fonction sinus est périodique de période 2π, il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π soit, par exemple $]-\pi, \pi]$. La fonction sinus étant impaire on peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

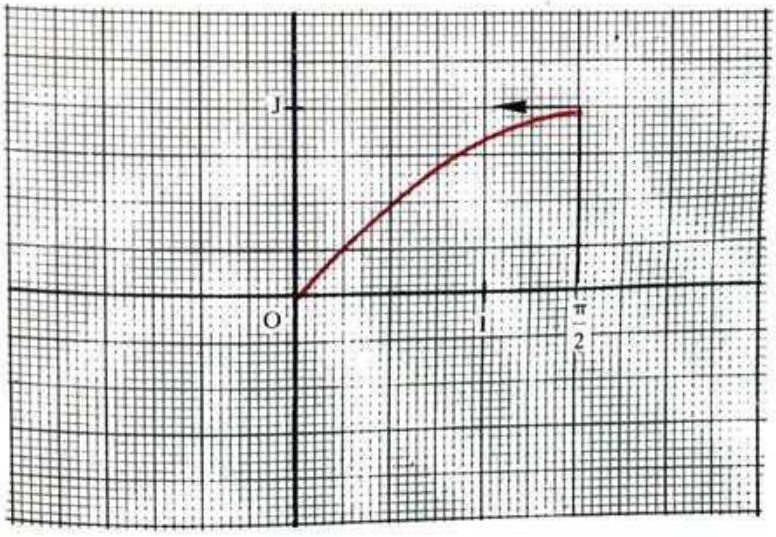
Question 39 *Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction sinus.*

En conclusion l'intervalle d'étude choisi est l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle la fonction sinus est dérivable, de fonction dérivée égale à la fonction cosinus ; celle-ci étant positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on en déduit que la fonction sinus est strictement croissante sur cet intervalle.

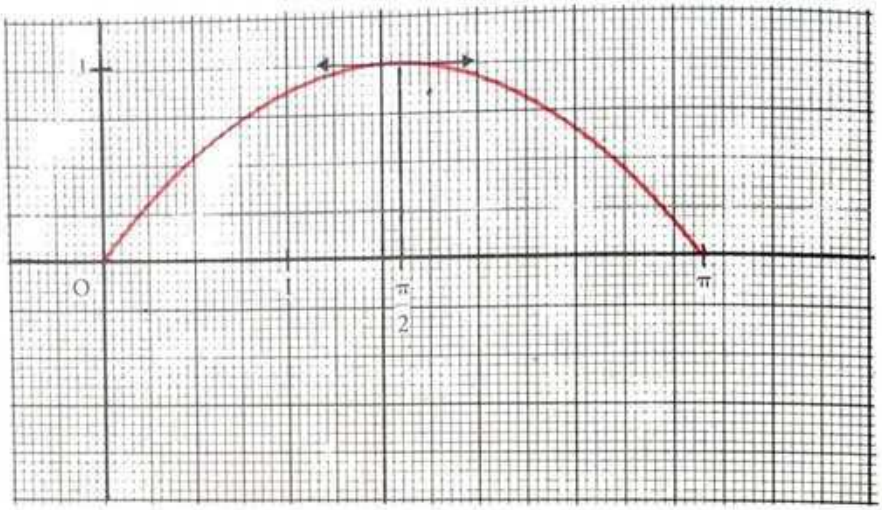
On peut alors dresser le tableau de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin'x	1		+		0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

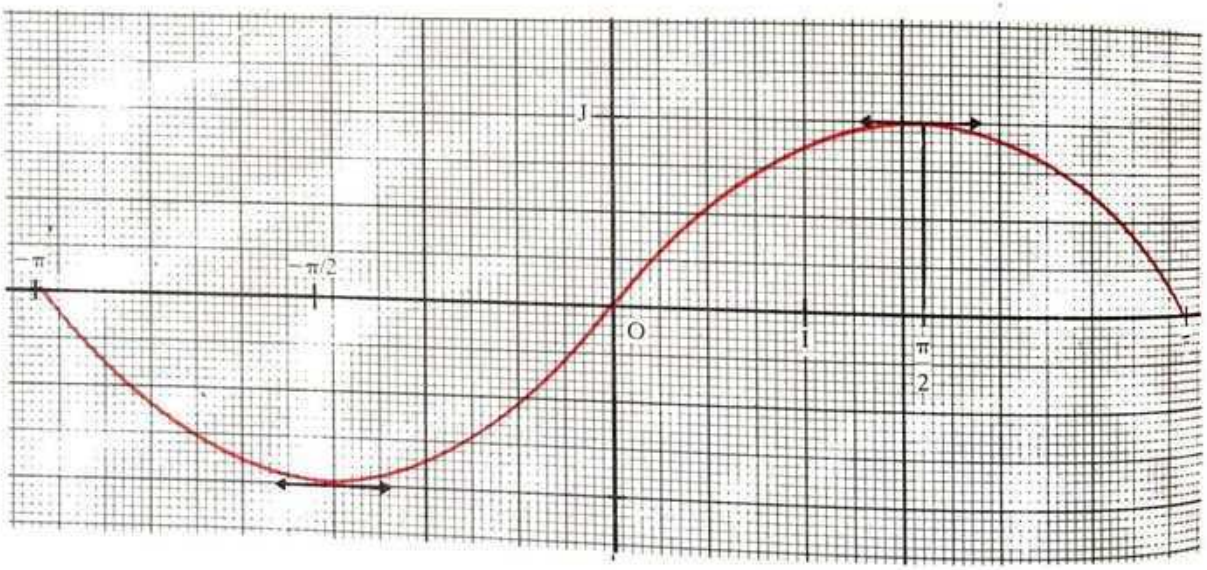
On en déduit alors la courbe représentative de la restriction de la sinus à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:



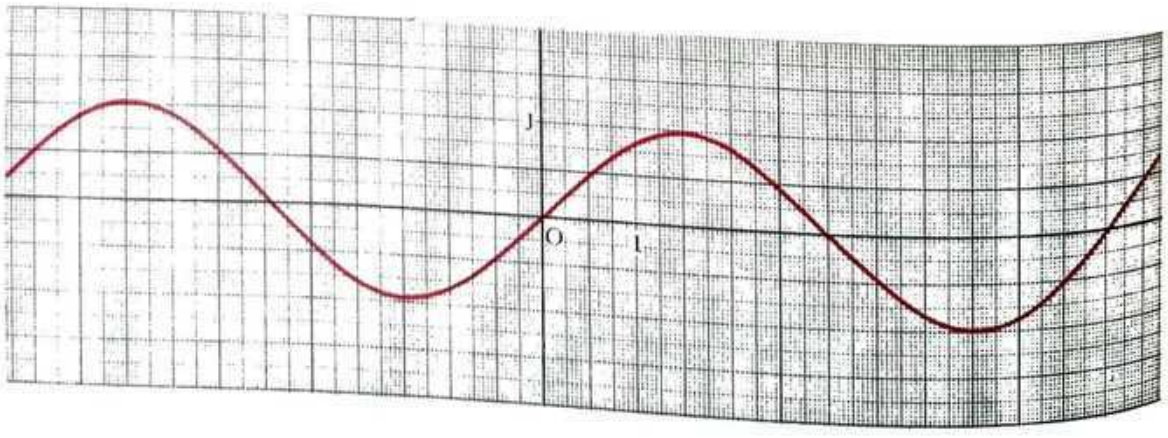
En utilisant la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient la courbe représentative de la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$.



Enfin, en utilisant la symétrie centrale de centre 0 on obtient la courbe représentative de la restriction à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



On obtient la courbe complète en utilisant les translations de vecteurs $k \cdot 2\pi \vec{i}$ où k est un entier relatif.

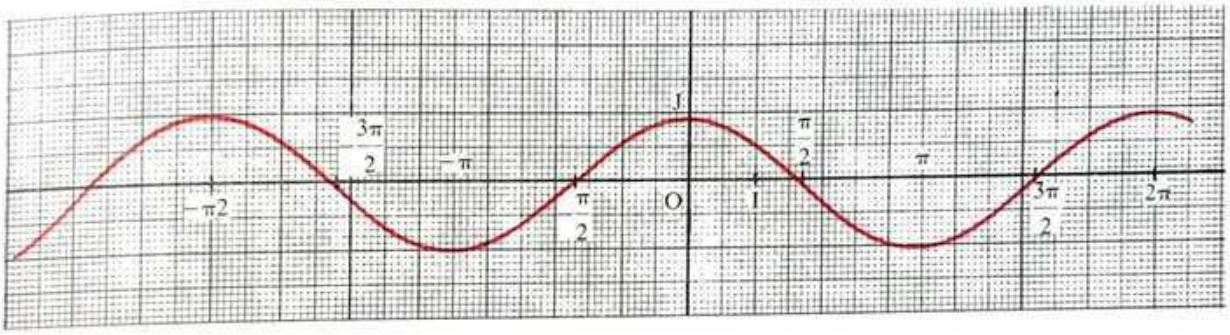


Pour ce qui est de la fonction cosinus, en utilisant le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

on en déduit que la courbe représentative de la fonction cosinus est l'image de la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$

on obtient ainsi :

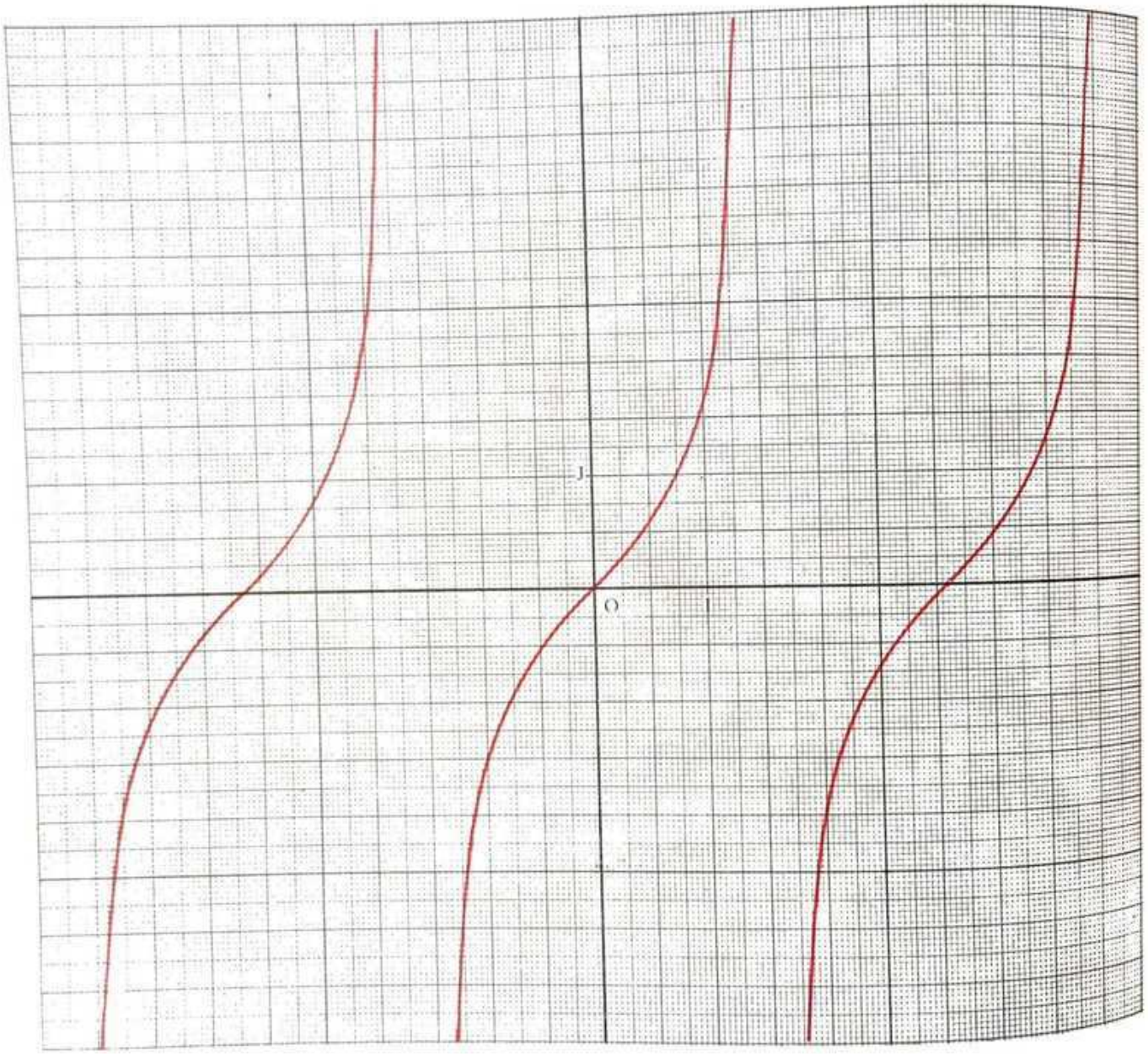


Exercice 47 Quels sont les éléments de symétrie de la courbe représentative de la restriction à $[-\pi, \pi]$ de la fonction cosinus ? Dresser le tableau de variation de la restriction à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction cosinus.

Enfin pour ce qui est de la fonction tangente, en remarquant qu'elle est périodique de période π et qu'elle est impaire, on en déduit qu'il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme, de plus, sur cet intervalle sa fonction dérivée $[x \mapsto 1 + tg^2x]$ est strictement positive, on peut dresser le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tg′x	1		+	
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$+\infty$

On notera que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente. On déduit alors la courbe représentative de la restriction à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en utilisant la symétrie centrale de centre 0, puis la courbe complète en utilisant les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif.



Exercice 48 Tracer la courbe représentative de la fonction cotg :

$$\text{cotg} : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

4) Premier exemple d'étude d'une fonction trigonométrique : $f : x \mapsto \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$

Cette fonction est périodique de période 2π ; de plus elle est impaire, on en effectuera donc l'étude sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

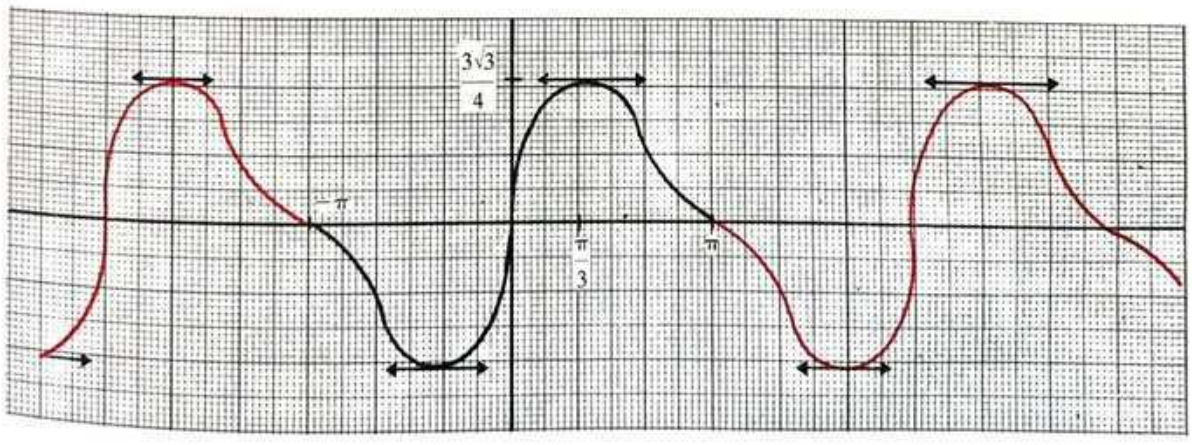
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x + \cos 2x$

Question 40 *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x + \cos 2x = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.*
En déduire le signe du nombre réel $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$.

En utilisant la question précédente, on déduit le tableau de variation de fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'(x)		+	0	−	0
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

d'où la courbe représentative suivante :



Une fois encore, pour obtenir la courbe complète on a d'abord utilisé la symétrie centrale de centre 0 puis les translations de vecteur $k\,2\pi\,\vec{i}$ où k est un entier relatif.

5) Second exemple d'étude d'une fonction trigonométrique : $g : x \mapsto \sin^2 x \cos 2x$

Cette fonction est périodique, une période est 2π de plus elle est paire, on en effectuera donc l'étude sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Question 41 *Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de g.*

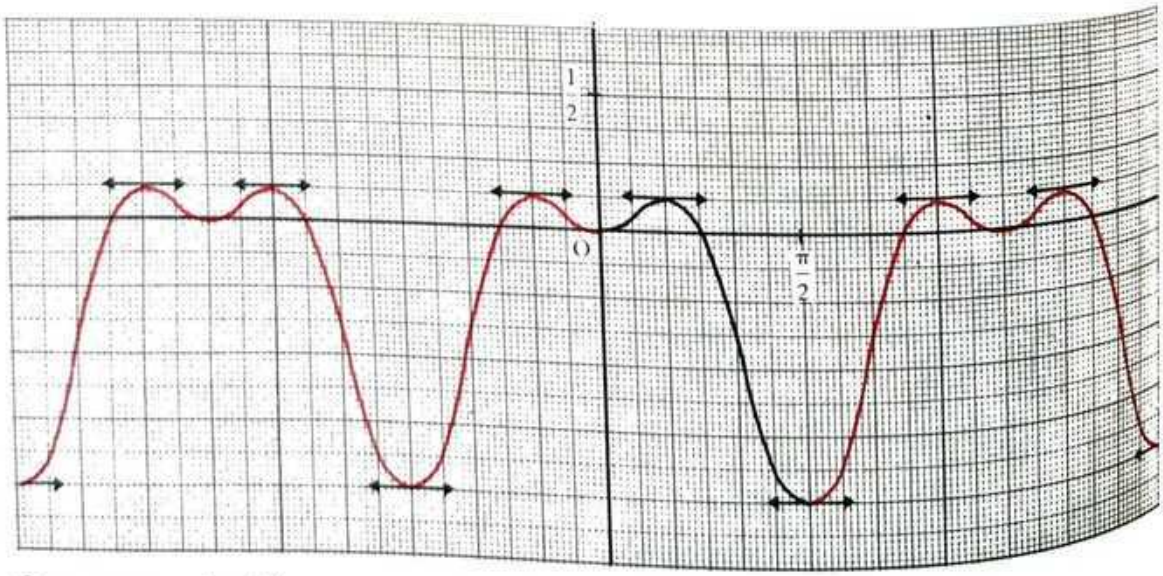
L'intervalle d'étude choisi est donc $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Question 42 *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \sin 2x\,(1 - 4\sin^2 x)$.*
En déduire le signe du nombre réel $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En utilisant la question précédente on déduit le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)	0	+	0	−	0		
g(x)	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0	↘	−1

d'où la courbe représentative suivante :



On notera qu'en fait g est périodique et de période π.

Exercice 49

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

Vérifier que f est périodique de période 2π.

Vérifier que f est impaire.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$, vérifier que la courbe représentative (C) de f admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

En déduire que le domaine d'étude peut être $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2/ Soit $g : x \mapsto \cos 5x + 5 \cos x$

Étudier les variations de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En déduire que :

$\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad g(x) \geqslant 0$

3/ Étudier les variations de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Tracer (C) en expliquant quelles transformations ponctuelles on utilise.

Remarque :

On admet le résultat suivant.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée f' continue sur I.

Si f' ne s'annule pas sur I, alors f' garde un signe constant sur I.

Ainsi lorsqu'on a déterminé tous les zéros de la fonction f' : $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (avec $x_0 \leq x_1 < \ldots < x_n$) il suffit d'utiliser une calculatrice pour trouver le signe de f' dans chacun des intervalles délimités, par les $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les valeurs intervenant dans l'ensemble de définition, et l'ensemble d'étude : en effet il suffit de calculer, pour un élément quelconque a d'un de ces intervalles, la valeur de f'(a) ou plus précisément le signe f'(a) pour avoir celui de f' dans l'intervalle.

Penser qu'on ne change pas nécessairement de signe pour f' quand on « traverse » un zéro ou une double barre.

Ainsi par exemple si f' est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$
par : $f' : x \mapsto (x-2)^2 (x+3)(x-5)$

on a :

x	$-\infty$		-3		1		2		3		5		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

car $f'(-4) > 0 \quad f'(0) < 0 \quad , \quad f'\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0 \quad , \quad f'\left(\dfrac{5}{2}\right) < 0 \quad , \quad f'(4) < 0 \quad , \quad f'(5) > 0$

5 Primitives d'une fonction

1) Généralités

Un taxi-brousse partant de Grand-Bassam à 7 heures, se rend à N'Douci. Sur la route de Grand-Bassam à Port-Bouet il roule à la vitesse moyenne de 90 km/h. De Port-Bouet à Yopougon, en raison des embouteillages d'Abidjan, sa vitesse moyenne descend à 30 km/h. Puis, de Yopougon à N'Douci, il roule sur l'autoroute à la vitesse moyenne de 120 km/h.

Les distances de Grand-Bassam à Port-Bouet, de Port-Bouet à Yopougon, et de Yopougon à N'Douci sont respectivement de 30 km, 20 km et 120 km.

Question 43 *A quelle heure le taxi-brousse arrive-t-il à Port-Bouet ? à Yopougen ? à N'Douci ?*

On note v(t) la vitesse moyenne, en km/h, du taxi à l'heure 7 + t où t est exprimé en heures.

Question 44 *Quel est l'ensemble de définition D de la fonction v ? Tracer la représentation graphique (V) de v dans un repère orthogonal (unités : 6 cm pour 1 heure, 1 cm pour 10 km/h).*

On note d(t) la distance, en km, parcourue par le taxi au temps 7 + t.

Question 45 *Exprimer d(t) pour tout t de D.*

Tracer la représentation graphique (C) de d dans le même repère que (V) (unités : 6 cm pour 1 heure, 1 cm pour 10 km).

Vérifier que d est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ *et* $]1, 2[$ *et donner, dans un tableau, les expressions de v(t), d(t) et d'(t) pour tout t de* $]0, 2[- \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

Que constate-t-on pour les fonctions v et d' sur les intervalles $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ *et* $]1, 2[$ *?*

Définition

Soient I un intervalle ouvert (ou une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$), f et F deux fonctions définies sur I.

On dit que la fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et la fonction dérivée F′ de F sur I est la fonction f.

Remarques :

1/ Si F est une primitive d'une fonction sur un intervalle I alors F est continue sur I (car dérivable sur I).

2/ On admettra que toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède au moins une primitive sur I.

Reprenons l'exemple du taxi-brousse et considérons un élément a de D ; on note $\mathcal{D}_a$ la partie du plan, rapporté au repère (O, I, J) utilisé pour le tracé de la courbe (V) de v, telle que :

$$\mathcal{D}_a = \left\{ M \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}, 0 \leqslant t \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant z \leqslant v(t) \right\}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{D}_a$ est la partie du plan limitée par les droites d'équation $t = 0$, $t = a$ et $z = 0$ et la courbe (V).

On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure de l'aire du domaine plan $\mathcal{D}_a$, l'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des points O, I et J.

Question 46 *Calculer* $\mathcal{A}\left(\frac{1}{3}\right)$, $\mathcal{A}\left(\frac{1}{3}\right)$, $\mathcal{A}(1)$, $\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right)$, *et* $\mathcal{A}(2)$.

Comparer ces nombres réels avec, respectivement $d\left(\frac{1}{3}\right)$, $d\left(\frac{2}{3}\right)$, $d(1)$, $d\left(\frac{3}{2}\right)$ *et* $d(2)$.

Remarque :

On pourra se reporter dans le chapitre 5 à une autre façon d'évaluer une aire en utilisant les suites : il s'agissait alors de l'aire du domaine plan limité par les droites $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et la courbe représentative de $[x \mapsto x^2]$.

2) Calcul des primitives d'une fonction continue

Question 47 *Soient F et G les fonctions définies par :*

$F : x \mapsto x^3 - x^2$, $G : t \mapsto t^3 - t^2 + 5$

Vérifier que F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ *d'une même fonction f que l'on précisera.*

Quelle est la fonction F − G ?

Plus généralement, soient F et f deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ telles que F soit une primitive de f, et k un nombre réel.

On note G la fonction définie par :

$G : x \mapsto F(x) + k$

c'est-à-dire $G = F + F_1$ où $F_1 : x \mapsto 1$.

G est définie et dérivable sur I et pour tout nombre réel x de I, on a : $G'(x) = F'(x) = f(x)$

donc G est une primitive de f sur I.

Soient, d'autre part, H une primitive de f sur I ; on a :

$F' = f$ et $H' = f$ sur I
donc $F' - H' = F_0$ sur I ou $F_0 : x \mapsto 0$.

c'est-à-dire :

$\forall x \in I \quad (F - H)'(x) = 0$

Ainsi F − H est une fonction constante sur l'intervalle I. Autrement dit, il existe un nombre réel k tel que :

$F - H = k F_1$ sur I

c'est-à-dire :

$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad F(x) = H(x) + k$

On dit que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

On constate que si F et H sont deux primitives d'une même fonction sur I alors la courbe représentative de F est l'image de celle de H par une translation de vecteur colinéaire à $\vec{j}$ (car $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto H(x) + k$ donne : $C_F = t_{k\vec{j}}(C_H)$)

Question 48 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$*

Pourquoi f admet-elle des primitives sur $\mathbb{R}$?

Vérifier que $[x \mapsto x^2 + 3x]$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donner la forme générale des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe une et une seule primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2) = 1$, et préciser la fonction F.

Plus généralement soient f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a un élément de I et b un nombre réel.

Puisque f est continue sur I, elle admet des primitives sur I. Notons G une primitive de f sur I et c l'image de a par G.

Quelle que soit la primitive F de f sur I il existe un nombre réel k tel que :

$\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + k$
D'où $F(a) = G(a) + k$
on a alors : $F(a) = b \Leftrightarrow G(a) + k = b$
$\Leftrightarrow k = b - c$

Ainsi il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(a) = b$, elle est définie par :

$\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + b - c$

On a ainsi montré le résultat :

Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a un élément de I et b un nombre réel.

Il existe une et une seule primitive de f sur I prenant la valeur b en a.

Connaissant les fonctions dérivées de quelques fonctions, on en déduit le tableau ci-dessous des primitives dites usuelles.

Fonction	UNE primitive de la fonction	sur
$x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{n^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \mathrm{tg}^2 x$	$x \mapsto \mathrm{tg}\, x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$x \mapsto \cos(ax + b) \begin{pmatrix} a \in \mathbb{R}^* \\ b \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b) \begin{pmatrix} a \in \mathbb{R}^* \\ b \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

De plus les propriétés de la dérivation permettent de dresser le tableau suivant où f et g sont deux fonctions admettant F et G comme primitives respectives sur un même intervalle I.

Fonction	UNE primitive de la fonction sur I	
$af + bg$	$aF + bG$	$(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$fG + Fg$	FG	
$\frac{Gf - gF}{G^2}$	$\frac{F}{G}$	
$af(ax + b)$	$F(ax + b)$	$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

Exercice 50 Déterminer dans chacun des cas suivants la primitive de f sur un intervalle I (que l'on précisera), prenant la valeur b en a :

1/ $f : x \mapsto 4x^2 - 3x + 5$ $\quad a = 2 \quad b = -1$

2/ $f : x \mapsto \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ $\quad a = 4 \quad b = 5$

3/ $f : x \mapsto \dfrac{2}{2x - 3}$ $\quad a = 2 \quad b = 0$

4/ $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ $\quad a = -1 \quad b = 2$

5/ $f : x \mapsto \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\quad a = \dfrac{\pi}{2} \quad b = 3$

Réponses aux questions

Q 1 : Soient x_0 un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{[a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c]-[ax_0^2+bx_0+c]}{h}$$
$$= \frac{(2ax_0+b)h+h^2}{h}$$
$$= 2ax_0+b+h$$

Ainsi f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Q 2 : Soit x_0 un élément de $]0, \to[$, la fonction $[f : x \mapsto \sqrt{x}]$ est définie sur un intervalle de centre x_0 car elle est définie sur $[0, \to[$.

Soit h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h$ soit dans $[0, \to[$. On a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$$
$$= \frac{x_0+h-x_0}{h\,[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Ainsi la fonction dérivée de f sur $]0, \to[$ est f' définie par :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Q 3 : Soit x_0 un élément de $]\leftarrow, 0[$ ou de $]0, \to[$, $\left[f : x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ est définie sur un intervalle de centre x_0.

Soit h un nombre réel non nul, tel que $x_0 + h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}$$
$$= \frac{\frac{-h}{(x_0+h)x_0}}{h}$$
$$= \frac{-1}{(x_0+h)x_0}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$. D'où le résultat demandé.

Q 4 : Soit x_0 un élément de $\left]\leftarrow, -\frac{d}{c}\right[$ ou $\left]-\frac{d}{c}, \to\right[$. Puisque f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, il existe un intervalle de centre x_0 sur lequel f est définie.

Soit h un nombre réel non nul et tel que $x_0 + h$ soit distinct de $-\frac{d}{c}$. On a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{a(x_0+h)+b}{c(x_0+h)+d}-\frac{ax_0+b}{cx_0+d}}{h}$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{ahd-bhc}{(cx_0+ch+d)(cx_0+d)}\right]$$
$$= \frac{ad-bc}{(cx_0+ch+d)(cx_0+d)}$$

Or $\lim_{h\to 0} (cx_0 + ch + d) = cx_0 + d$

d'où f est dérivable en x_0 et on a :

$$f'(x_0) = \frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}$$

Q 5 : Soient x_0 un nombre réel et f la fonction définie par :

$f : x \mapsto x^3$

Pour tout nombre réel non nul h on a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h}$$

comme on a :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

on obtient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = (x_0+h)^2 + (x_0+h)x_0 + x_0^2$$

Or $\lim_{h\to 0} [(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)x_0 + x_0^2] = 3x_0^2$

d'où : f est dérivable en x_0 et de nombre dérivé $3x_0^2$.

Ainsi la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de $[x \mapsto x^3]$ est $[x \mapsto 3x^2]$.

Q 6 : Notons A(h) le nombre réel $\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}$. On a :

$$A(h) = \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}$$
$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0} A(h) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Q 7 : Soit h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h$ soit dans I. On a :

$$\frac{(kf)(x_0 + h) - (kf)(x_0)}{h} = \frac{k[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h}$$

La limite de ce rapport quand h tend vers 0 est donc $kf'(x_0)$. Ainsi kf est dérivable en x_0 et $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$.

Q 8 : Notons A le nombre réel $(fg)(x_0 + h) - (f\,g)(x_0)$. On a :

$$\begin{aligned} A &= f(x_0 + h)\,g(x_0 + h) - f(x_0)\,g(x_0) \\ &= f(x_0 + h)\,g(x_0 + h) - f(x_0)\,g(x_0 + h) \\ &\quad + f(x_0)\,g(x_0 + h) - f(x_0)\,g(x_0) \\ &= [f(x_0 + h) - f(x_0)]\,g(x_0 + h) \\ &\quad + f(x_0)\,[g(x_0 + h) - g(x_0)] \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé en divisant par h.

On a : $\lim\limits_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

et $$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$$

d'où :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} = f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)$$

Q 9 : En appliquant le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned} (f^2)' &= f'f + ff' \\ &= 2\,ff' \\ (f^3)' &= (f^2f)' \\ &= (f^2)'\,f + f^2f' \\ &= 2ff'f + f^2f' \\ &= 3f^2f' \end{aligned}$$

Q 10 : • Pour n = 1, on a :

$g_1 : x \mapsto x$

g_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée

$g'_1 : x \mapsto 1$

c'est-à-dire : $g'_1 : x \mapsto nx^{n-1}$ avec n = 1

• Pour n strictement supérieur à 1 on a :

$g_n = (g_1)^n$

donc, d'après le théorème précédent, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$(g_n)' = n(g_1)^{n-1}\,g_1'$

c'est-à-dire, puisque $g'_1 : x \mapsto 1$, $g'_n : x \mapsto n\,x^{n-1}$

Q 11 : $\frac{1}{f}$ est définie sur I car f y est et f ne s'y annule pas.

Notons A(h) le rapport $\dfrac{\frac{1}{f}(x_0 + h) - \frac{1}{f}(x_0)}{h}$. On a :

$$\begin{aligned} A(h) &= \frac{\dfrac{1}{f(x_0 + h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{f(x_0 + h)\,f(x_0)}\right] \\ &= -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \times \frac{1}{f(x_0 + h)\,f(x_0)} \end{aligned}$$

Puisque f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0, d'où $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

de plus : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

d'où :

$$\lim_{h\to 0} A(h) = -f'(x_0) \times \frac{1}{f(x_0)\,f(x_0)}$$

Ainsi $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et son nombre dérivé en x_0 est $-\dfrac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

Q 12 : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$

D'après le théorème sur la dérivabilité du produit de deux fonctions, on a :

$\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)'$

Or : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$

d'où :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g}{g^2} + f\left(\frac{-g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Q 13 : On a : $g = (t_1)^5$

Comme t_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que t'_1 est $[x \mapsto 3]$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = 5(t_1)^4\,t'_1$

c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = 5\cdot(3x + 2)^4\cdot 3$

ou encore :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = 15\,(3x + 2)^4$

2/ $f \circ t = t^5$

Comme t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $t' : x \mapsto a$, on a :

$f \circ t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f \circ t)' = 5\,t^4\,t'$

c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (f \circ t)'(x) = 5(ax + b)^4\cdot a$

Or on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 5x^4$

d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (f \circ t)'(x) = af'(ax + b)$

Q 14 : Soit α un nombre réel. On a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha < ax + b \Leftrightarrow \alpha - b < ax$

donc :

si $a > 0$, alors on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha < ax + b \Leftrightarrow x > \dfrac{\alpha - b}{a}$

si $a < 0$, alors on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha < ax + b \Leftrightarrow x < \dfrac{\alpha - b}{a}$

Ainsi, en notant J l'ensemble des nombres réels x tels que $ax + b$ appartienne à I, on a :

- Si $I =]\alpha, \rightarrow[$:

  si $a > 0$, alors $J = \left]\dfrac{\alpha - b}{a}, \rightarrow\right[$

  si $a < 0$, alors $J = \left]\leftarrow, \dfrac{\alpha - b}{a}\right[$

- Si $I =]\leftarrow, \beta[$, de même on a :

  si $a > 0$, alors $J = \left]\leftarrow, \dfrac{\beta - b}{a}\right[$

  si $a < 0$, alors $J = \left]\dfrac{\beta - b}{a}, \rightarrow\right[$

- Si $I =]\alpha, \beta[$, de même on a :

  si $a > 0$, alors $J = \left]\dfrac{\alpha - b}{a}, \dfrac{\beta - b}{a}\right[$

  si $a < 0$, alors $J = \left]\dfrac{\beta - b}{a}, \dfrac{\alpha - b}{a}\right[$

Dans tous les cas J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Q 15 : L'ensemble de définition de g est $\left[\dfrac{7}{5}, \rightarrow\right[$.

Mais g est dérivable sur $\left]\dfrac{7}{5}, \rightarrow\right[$, en effet $g = t \circ f$ où $t : x \mapsto \sqrt{x}$, et f est affine ; comme t est dérivable sur $]0, \rightarrow[$ alors $t \circ f$ est dérivable sur l'intervalle J, ensemble des nombres réels x tels que $5x - 7$ appartienne à $]0, \rightarrow[$, c'est-à-dire $\left]\dfrac{7}{5}, \rightarrow\right[$.

De plus, pour tout nombre réel x de $\left]\dfrac{7}{5}, \rightarrow\right[$ on a :

$g'(x) = 5\, t'(5x - 7)$

c'est-à-dire, puisque t' est définie par :

$t' :]0, \rightarrow[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{5x - 7}}$

Comme $f : x \mapsto 5x - 7$ et $f' : x \mapsto 5$

On a : $g' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Q 16 : Quel que soit le nombre réel h non nul et tel que $x_0 + h$ soit dans I, le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ est $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Puisque f est croissante sur I, ce taux est positif ; donc, d'après le résultat rappelé, la limite de ce rapport quand h tend vers 0, qui est $f'(x_0)$, est un nombre positif ou nul.

Q 17 : Puisque f est dérivable sur I, la fonction $(-f)$ qui est $(-1)f$ est aussi dérivable sur I et on a $(-f)' = -f'$

Puisque, pour tout couple (u, v) de I^2 avec u distinct de v, on a :

$$\frac{(-f)(u) - (-f)(v)}{u - v} = -\frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

et que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $(-f)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le résultat précédent, la fonction dérivée de $(-f)$ est positive sur I, donc la fonction dérivée de f, qui est l'opposée de celle de $(-f)$, est négative sur I.

Q 18 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme. On a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$

d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x)$ est du signe de $x(x - 2)$ donc :

x	←		0		2	→
f'(x)		+	0	−	0	+

Q 19 : Puisque f est décroissante sur $]0, 2]$, on a :

$\forall x \in]0, 2] \quad f(x) \geqslant f(2)$

Puisque f est croissante sur $[2, \rightarrow[$, on a :

$\forall x \in [2, \rightarrow[\quad f(2) \leqslant f(x)$

d'où :

$\forall x \in]0, 4[\quad f(x) \geqslant f(2)$

Ainsi l'intervalle $]2 - \beta, 2 + \beta[$ avec $\beta = 2$ répond à la question.

Q 20 : Il suffit de se reporter à son tableau de variation. On a :

$\forall x \in]-2, 3[\quad f_5'(x) = 4x^3 - 4x$

donc

$\forall x \in]-2, 3[$ $f_5'(x)$ est du signe de $x(x^2 - 1)$

x	←		−1		0		1	→
$x^2 - 1$		+	0	−		−	0	+
x		−		−	0	+		+
$x(x^2 - 1)$		−	0	+	0	−	0	+

d'où :

x	-2		-1		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

f_5' s'annule effectivement en -1, 0 et 1 où f_5 admet un extremum.

Q 21 : f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$; et quel que soit le nombre réel x, on a :

$f'(x) = 20x^4 - 60x^3 - 60x^2 + 140x + 120$
$= 20(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6)$

$f'(-1) = 20(1 + 3 - 3 - 7 + 6)$
$= 0$

d'où, en posant la division par $x + 1$,
$f'(x) = 20(x + 1)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$

soit $P : x \mapsto x^3 - 4x^2 + x + 6$

on a : $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6$
$= 0$

d'où, en posant la division par $x + 1$,
$P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

De plus, on a :
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Ainsi on a :
$f'(x) = 20(x + 1)^2 (x - 2)(x - 3)$

d'où le tableau :

x	$\leftarrow$		-1		2		3	$\rightarrow$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		-49	$\nearrow$	248	$\searrow$	207	$\nearrow$

Les zéros de f' sont -1, 2 et 3 mais f possède un extremum seulement en 2 et en 3.

Q 22 : Considérons un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de centre x_0 et inclus dans I tel que f' ne change de signe ni sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ ni sur $]x_0, x_0 + \alpha[$; selon le signe de f', deux cas se présentent :

1er cas :

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

f possède un minimum en x_0

2e cas :

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

f possède un maximum en x_0.

Donc, lorsque f' s'annule en changeant de signe en x_0, la fonction f possède un extremum en x_0.

Q 23 : f est une fonction polynôme donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x on a :

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$
$= (x - 1)(x - 3)$

d'où le tableau de variation de f :

x	$\leftarrow$		1		3	$\rightarrow$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$7/3$	$\searrow$	1	$\nearrow$

où on a utilisé les calculs :

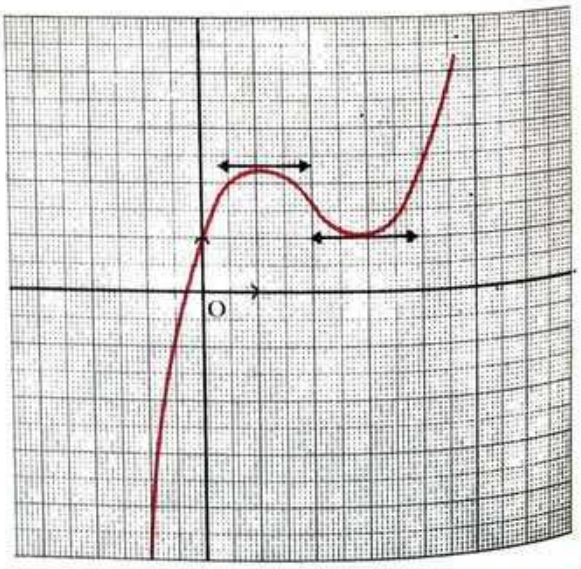
$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1$
$= \frac{7}{3}$

$f(3) = 9 - 18 + 9 + 1$
$= 1$

De plus on a le tableau de valeurs suivants :

x	-1	0	2	4
arrondi d'ordre 2 de f(x)	$-4{,}33$	1	$1{,}67$	$2{,}33$

d'où la courbe représentative de f :



La fonction g n'est pas une fonction polynôme mais elle est définie sur $\mathbb{R}$, et puisque, pour tout nombre réel x on a :

$-x = |x|$

et $(-x)^3 = -x^3$

on a donc :

$g(-x) = g(x)$

g est donc paire.

Pour x positif ou nul, $|x| = x$ d'où :

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$
$$= f(x)$$

Ainsi g coïncide avec f sur $\mathbb{R}_+$ et on obtient le tableau de variation de g en utilisant celui de f et la parité de g :

x	$\leftarrow$	-3		-1		0		1		3	$\rightarrow$
g(x)	$\searrow$	1	$\nearrow$	7/3	$\searrow$	1	$\nearrow$	7/3	$\searrow$	1	$\nearrow$

Q 24 :

x	1,8	1,9	1,92	1,94	1,96	1,98
arrondi de f(x)	-7	-17	-22	-30	-47	-97

x	2,02	2,04	2,06	2,08	2,1	2,2
arrondi de f(x)	103	53	36	28	23	13

Q 25 : 1/ L'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}^*$. Pour tout nombre réel non nul x, on a :

$$\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$$

donc g est impaire

x	10^{-2}	5.10^{-3}	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}	5.10^{-5}	10^{-5}
g(x)	100	200	10^3	2.10^3	10^4	2.10^4	10^5

2/ Soit h un nombre réel non nul ; $2 + h$ est différent de 2 et on a :

$$f(2+h) = \frac{3(2+h) - 4}{(2+h) - 2}$$
$$= \frac{2 + 3h}{h}$$
$$= 2g(h) + 3$$

3/ L'ensemble de définition de $\frac{1}{f}$ est

$\{x \in \mathbb{R} ; f(x) \text{ existe et } f(x) \neq 0\}$

c'est donc $\mathbb{R} - \left\{2, \frac{4}{3}\right\}$.

De même l'ensemble de définition de $\frac{1}{g}$ est $\mathbb{R}^*$

On a : $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{x-2}{3x-4}$

d'où $\lim_{2} \frac{1}{f} = 0$

et $\frac{1}{g} : x \mapsto x$

d'où $\lim_{0} \frac{1}{g} = 0$

Q 26 :

x	10	10^2	10^3	5.10^3	10^4	5.10^4	10^5	5.10^5	10^6
arrondi d'ordre 2 de f(x)	3,3	3,02	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00

Q 27 : L'ensemble de définition de g est

$\left\{x \in \mathbb{R} ; \frac{1}{x} \text{ existe et } \frac{1}{x} \neq 2\right\}$

c'est donc $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

Pour tout nombre réel x de $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, on a :

$$g(x) = \frac{3\frac{1}{x} - 4}{\frac{1}{x} - 2}$$
$$= \frac{3 - 4x}{1 - 2x}$$

$\lim_{0} g = 3$ donc les limites de g à gauche et à droite en 0 sont 3.

Q 28 :

x	10^2	10^4	10^6	10^8
$f_1(x)$	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}
$f_2(x)$	10	10^2	10^3	10^4

Pour tout nombre réel x non nul, $g_1(x)$ existe et on a :

$$g_1(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}}$$
$$= x^2$$

d'où $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g_1(x) = 0$

donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left|f_1\left(\frac{1}{x}\right)\right| = +\infty$

Pour tout nombre réel x strictement positif, $g_2(x)$ existe et on a :

$$g_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}$$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g_2(x) = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left| f_2\left(\frac{1}{x}\right) \right| = + \infty$

Q 29 : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]- \infty, a[$ telle que $\frac{1}{f}$ y soit aussi définie.

$\lim\limits_{-\infty} |f| = + \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{f} = 0$

Si f garde un signe constant sur $]- \infty, a[$, alors on a :

- $\lim\limits_{-\infty} f = + \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{-\infty} |f| = + \infty$ et f est positive sur $]- \infty, a[$
- $\lim\limits_{-\infty} f = - \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{-\infty} |f| = + \infty$ et f est négative sur $]- \infty, a[$

Q 30 :

Si f a pour limite	alors $\frac{1}{f}$ a pour limite
l $(l \neq 0)$	$\frac{1}{l}$
0, et f positive	$+ \infty$
0, et f négative	$- \infty$
$+ \infty$	0
$- \infty$	0

Q 31 : 1/ Puisque $\lim\limits_{x \to + \infty} x^2 = + \infty$ et $\lim\limits_{x \to + \infty} - 2x = - \infty$ les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure : il y a « forme indéterminée ».

Quel que soit le nombre réel x, on a :

$x(x - 2) + 3 = x^2 - 2x + 3$

de $\lim\limits_{x \to + \infty} x = + \infty$ et $\lim\limits_{x \to + \infty} (x - 2) = + \infty$ et $\lim\limits_{x \to + \infty} 3 = 3$, on déduit $\lim\limits_{+ \infty} f = + \infty$

de même on a :

$\lim\limits_{x \to - \infty} x = - \infty$, $\lim\limits_{x \to - \infty} (x - 2) = - \infty$

et $\lim\limits_{x \to - \infty} 3 = 3$ d'où $\lim\limits_{- \infty} f = + \infty$

2/ Puisque $\lim\limits_{x \to + \infty} - x^3 = - \infty$ et $\lim\limits_{x \to - \infty} x^2 = + \infty$ on a une forme indéterminée pour la somme.

On a, en effet, pour tout nombre réel x,

$g(x) = x(- x^2 + x - 1)$

mais comme $\lim\limits_{x \to + \infty} - x^2 = - \infty$

et $\lim\limits_{x \to + \infty} (x - 1) = + \infty$, on a encore une forme indéterminée pour la somme.

Par contre, pour tout nombre réel x non nul on a :

$$g(x) = - x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Puisque l'on cherche la limite en $+ \infty$, on peut se placer dans l'intervalle $]0, + \infty[$; on a :

$\lim\limits_{x \to + \infty} - \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to + \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to + \infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1$

et comme $\lim\limits_{x \to + \infty} (- x^3) = - \infty$

on en déduit $\lim\limits_{+ \infty} g = - \infty$

Q 32 : Puisque, pour tout nombre réel x, $x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 - 3$

l'ensemble de définition de f est

$\mathbb{R} - \{- 1 - \sqrt{3}, - 1 + \sqrt{3}\}$

On a :

$$\lim_{x \to + \infty} (2x^5 + x^3 - 1) = \lim_{x \to + \infty} 2x^5 = + \infty$$

$$\text{et } \lim_{x \to + \infty} (x^2 + 2x - 2) = \lim_{x \to + \infty} x^2 = + \infty$$

Mais pour le quotient on a une forme indéterminée.

Pour tout nombre réel x distinct de 0, $- 1 - \sqrt{3}$ et $- 1 + \sqrt{3}$, on a :

$$f(x) = \frac{2x^5 \left(1 + \frac{x^3}{2x^5} - \frac{1}{2x^5}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= 2x^3 \frac{1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^5}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

En considérant $x \in]- 1 + \sqrt{3}, + \infty[$, on a :

$\lim\limits_{x \to + \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to + \infty} - \frac{1}{2x^2} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to + \infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^5}\right) = 1$

De même
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$
d'où $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 1$
Ainsi on a :
$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^5}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$$
donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$

De même en prenant x dans $]-\infty, -1-\sqrt{3}[$ on a :
$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^5}\right) = 1$
$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 1$
et $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$
d'où $\lim_{-\infty} f = -\infty$

2/ $Dg = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 + 8x - 4) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2$
$= +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 5) = \lim_{x\to+\infty} x^2$
$= +\infty$
On a une forme indéterminée mais, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0\}$, on a :
$$g(x) = \frac{3x^2\left(1 + \frac{8x}{3x^2} - \frac{4}{3x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}$$
$$= 3\,\frac{1 + \frac{8}{3x} - \frac{4}{3x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}}$$
En prenant x dans $]\sqrt{5}, +\infty[$, on obtient :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{8}{3x} - \frac{4}{3x^2}}{1 - \frac{5}{x^2}} = 1$$
d'où $\lim_{+\infty} g = 3$

Avec le même raisonnement dans $]-\infty, -\sqrt{5}[$ on obtient $\lim_{-\infty} g = 3$

$Dh = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
$\lim_{x\to+\infty} (3x + 1) = \lim_{x\to+\infty} 3x$
$= +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} (4x^2 - 4x - 15) = \lim_{x\to+\infty} 4x^2$
$= +\infty$
On a encore une forme indéterminée.
Pour tout nombre réel x dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}$,
on a :
$$h(x) = \frac{3}{4x} \times \frac{1 + \frac{1}{3x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{15}{4x^2}}$$
Travaillant dans $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$ on a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{3x}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{15}{4x^2}} = 1$$
et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4x} = 0$
d'où $\lim_{+\infty} h = 0$

De même, en travaillant dans $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$ et en utilisant l'écriture ci-dessus de h(x), on obtient
$\lim_{-\infty} h = 0$

Q 33 : 1/ $D_f = \mathbb{R}^*$
$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
Pour tout nombre réel x non nul, on a :
$$f(x) = \frac{(x+3)x + 4}{x}$$
$$= \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$$
2/ f est une fonction rationnelle d'où :
$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x}$
$= \lim_{x\to-\infty} x$
$= -\infty$
et $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} x$
$= +\infty$
$\lim_{x\to0} (x^2 + 3x + 4) = 4$
$\lim_{h\to0} x = 0$ donc $\lim_{0} |f| = +\infty$

Du fait que, pour x proche de 0, $x^2 + 3x + 4 > 0$, et connaissant le signe de x on a :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

3/ f est dérivable en tout point de D_f car f est rationnelle.

Pour tout nombre réel x non nul on a :

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)\,x - (x^2 + 3x + 4)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

f'(x) est du signe de (x + 2)(x − 2) d'où le tableau de signe :

x	←	− 2		0		2	→
f'(x)	+	0	−	‖	−	0	+

Q 35 :

x	f(x)	x+3	f(x)−(x+3)
-10^7	−9999997,0000004	−9999997	−0,0000004
-10^5	−99997,00004	−99997	−0,00004
-10^2	−97,04	−97	−0,04
10^2	103,04	103	0,04
10^4	10003,0004	10003	0,0004
10^6	1000003,000004	1000003	0,000004

Q 36 : Soit x un nombre réel non nul.

Puisque (voir chapitre 2 du tome géométrie)

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

on a :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

On sait que la fonction $\left[h \mapsto \frac{\sin h}{h}\right]$ a pour limite 1 en 0, d'où $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$.

et comme $\frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Q 37 : Notons f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout nombre réel non nul x, $(-x) \in \mathbb{R}^*$ et

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) - 1}{-x}$$

$$= -f(x)$$

car la fonction cosinus est paire, donc f est impaire.

Ainsi le tableau demandé suffit pour avoir une idée du comportement de f au voisinage de o

x	arrondi d'ordre 6 de cos x	arrondi d'ordre 6 de f(x)
0,02	0,999800	− 0,01
0,04	0,999200	− 0,02
0,06	0,998201	− 0,02998
0,08	0,996802	− 0,039975
0,1	0,995004	− 0,04996

Il semble que l'on ait :

$\lim\limits_{0} f = 0$

2/ Soit h un nombre réel non nul, on a :

$$\frac{\cos(0 + h) - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \times \frac{h}{h}$$

car cos 0 = 1

d'où

$$\frac{\cos(0 + h) - \cos 0}{h} = h \cdot \frac{\cos h - 1}{h^2}$$

Puisque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

et $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$

on a :

$$\lim_{h\to 0} h \cdot \frac{\cos h - 1}{h^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(0 + h) - \cos 0}{h} = 0$$

ce qui prouve que la fonction cosinus est dérivable en 0 et de nombre dérivé nul.

Q 38 : On sait que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est la fonction cosinus et que si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $[x \mapsto f(ax + b)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée $[x \mapsto af'(ax + b)]$.
En appliquant ce résultat avec f = sin, on a :
$[x \mapsto \sin(ax + b)]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $[x \mapsto a\cos(ax + b)]$.

Q 39 : $y = \sin x$ est une équation de la courbe représentative (C) de la fonction sinus dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons le point $O'\begin{pmatrix}\pi/2\\0\end{pmatrix}$ et le nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.
Un point M du plan ayant pour coordonnées x et y dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a pour coordonnées X et Y dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ avec $\begin{cases} x = X + \frac{\pi}{2} \\ y = Y \end{cases}$
D'où :

$$M \in (C) \Leftrightarrow Y = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

Considérons la fonction F définie par

$$F : X \mapsto \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$

F est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel X, on a :

$$F(-X) = \sin\left(-X + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos X$$
$$\text{et } F(X) = \sin\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos X$$

donc F est paire, c'est-à-dire la courbe (C) est symétrique par rapport à la droite $D(O', \vec{j})$, autrement dit la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Q 40 : Soit x un nombre réel. On sait que :
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
d'où
$\cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1$
Posons $t = \cos x$, alors
$\cos x + \cos 2x = t + 2t^2 - 1$
$= 2t^2 + t - 1$
la fonction polynôme $[P : t \mapsto 2t^2 + t - 1]$ s'annule en -1 car $2 - 1 - 1 = 0$
donc P est divisible par $[t \mapsto t + 1]$ et on obtient
$P(t) = (t + 1)(2t - 1)$
d'où
$\cos x + \cos 2x = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$
Puisque f' est la fonction $[x \mapsto \cos x + \cos 2x]$ pour tout x de $[0, \pi]$, f'(x) est du signe de $(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$
De plus on a :

$$[x \in [0, \pi], 2\cos x - 1 = 0] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$
$$[x \in [0, \pi], \quad \cos x + 1 = 0] \Leftrightarrow x = \pi$$

et
$\forall x \in [0, \pi[\quad \cos x + 1 > 0$
Donc, pour tout x de $[0, \pi[$, f'(x) est du signe de $(2\cos x - 1)$.
Par ailleurs

$$[x \in [0, \pi[, 2\cos x - 1 > 0]$$
$$\Leftrightarrow \left[x \in [0, \pi[\ , \cos x > \frac{1}{2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[$$

d'où le tableau ci-dessous

x	0		$\pi/3$		π
f'(x)		+	0	−	0

Q 41 : Comme à la question 39, la fonction F sera alors

$$F : X \mapsto \sin^2\left(X + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left[2\left(X + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

F est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel X on a :
$F(X) = \cos^2 X \cos(2X + \pi)$
$= \cos^2 X[-\cos 2X]$
$= -\cos^2 X[2\cos^2 X - 1]$
$= -2\cos^4 X + \cos^2 X$
Comme la fonction cosinus est paire on a :
$F(-X) = F(X)$
F est donc paire ; la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de g.
Ceci permet de partager encore l'intervalle $[O, \pi]$.

Q 42 : On sait que les fonctions sinus et $[x \mapsto \cos 2x]$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée respective cosinus et $[x \mapsto -2\sin 2x]$. D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x on a :
$g'(x) = (2\sin x \cos x)\cos 2x + \sin^2 x(-2\sin 2x)$
$= \sin 2x[\cos 2x - 2\sin^2 x]$
car $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
comme de plus, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient :
$g'(x) = \sin 2x[1 - 4\sin^2 x]$
Par ailleurs on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 2x \in [0, \pi]$$

d'où :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin 2x \geqslant 0$

avec

$[x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin 2x = 0] \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$

donc, pour tout nombre réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, g'(x) est du signe de $(1 - 4\sin^2 x)$.

On a :

$\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 1 - 4\sin^2 x = 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Et de même :

$\left[x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 1 - 4\sin^2 x > 0\right]$

$\Leftrightarrow \left[x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$

d'où le tableau :

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
g'(x)	0	+	0	−	0

Q 43 : La vitesse moyenne est le quotient de la distance par la durée du trajet.

D'où :

la durée du trajet de Grand-Bassam à Port-Bouet est :

$\frac{30 \text{ km}}{90 \text{ km/h}}$ soit $\frac{1}{3}$ h, autrement dit 20 mn ;

Le taxi arrivera à Port-Bouet à 7 h 20.

La durée du trajet de Port-Bouet à Yopougon est :

$\frac{20 \text{ km}}{30 \text{ km/h}}$ soit $\frac{2}{3}$ h, autrement dit 40 mn.

Le taxi arrivera à Yopougon à 7 h 20 mn + 40 mn c'est-à-dire à 8 h.

La durée du trajet de Yopougon à N'Douci est :

$\frac{120 \text{ km}}{120 \text{ km/h}}$ soit 1 h

Le taxi-brousse arrivera à 9 h à N'Douci.

Q 44 : La voiture roule de 7 h à 9 h donc l'ensemble de définition de v est D : D = [0, 2]

Tracé voir figure (en noir)

Q 45 : Pour tout t dans [0, 1/3], on a :

d(t) = 90 t

Pour tout t dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, on a :

$d(t) = 30 + 30\left(t - \frac{1}{3}\right)$

$= 20 + 30t$

Pour tout t dans [1, 2] on a :

$d(t) = 50 + 120\,(t - 1)$

$= -70 + 120\,t$

Le tracé est en rouge sur la figure.

Sur chacun des trois intervalles $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ et]1, 2[, d coïncide avec une fonction affine, respectivement [t ↦ 90 t], [t ↦ 20 + 30 t] et [t ↦ − 70 + 120 t] donc d y est dérivable.

On obtient le tableau suivant :

t	0		1/3		1		2
v(t)		90		30		120	
d(t)	0	90t	30	20+30t	50	70+120t	170
d'(t)		90		30		120	

Sur chacun des intervalles $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ et]1, 2[, v et d' coïncident.

Q 46 : $\mathcal{A}\left(\frac{1}{3}\right)$ est l'aire du rectangle OABC où $A\binom{1/3}{0}$ $B\binom{1/3}{90}$ $C\binom{0}{90}$, d'où $\mathcal{A}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times 90 = 30$

$\mathcal{A}\left(\frac{2}{3}\right)$ est la somme de l'aire du rectangle OABC et de l'aire du rectangle ADEF où $D\binom{2/3}{0}$ $E\binom{2/3}{30}$ et $F\binom{1/3}{30}$, d'où

$\mathcal{A}\left(\frac{2}{3}\right) = 30 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \times 30$

$= 40$

$\mathcal{A}(1)$ est la somme de l'aire de OABC et de l'aire du rectangle AIGF où $G\binom{1}{30}$, d'où

$\mathcal{A}(1) = 30 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times 30 = 50$

$\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right)$ est la somme des aires de OABC, de AIGF et du rectangle IHKL, où $H\binom{3/2}{0}$, $K\binom{3/2}{120}$ et $L\binom{1}{120}$,

d'où

$\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}\right) = 30 + 20 + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \times 120$

$= 110$

$\mathcal{A}(1)$ est la somme des aires de OABC, de AIGF et du rectangle IMNL où M $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, N $\begin{pmatrix}2\\120\end{pmatrix}$ et L $\begin{pmatrix}1\\120\end{pmatrix}$ d'où

$\mathcal{A}(2) = 30 + 20 + (2 - 1) \times 120$

$= 170$

D'après le tableau de la question 45 on a :

$d\left(\frac{1}{3}\right) = 30$

$d\left(\frac{2}{3}\right) = 20 + 30 \cdot \frac{2}{3}$

$= 40$

$d(1) = 50$

$d\left(\frac{3}{2}\right) = -70 + 120 \cdot \frac{3}{2}$

$= 110$

$d(2) = 170$

Ainsi pour ces cinq valeurs de t, on a $\mathcal{A}(t) = d(t)$.

Q 47 : F et G sont des fonctions polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, et leurs fonctions dérivées sont F' et G' définies par :

$F' : x \mapsto 3x^2 - 2x$

$G' : t \mapsto 3t^2 - 2t$

d'où $F' = G'$:

F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de f définie par :

$f : x \mapsto 3x^2 - 2x$.

On a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) - G(x) = (x^3 - x^2) - (x^3 - x^2 + 5)$

donc :

$F - G : x \mapsto -5$

F − G est constante.

Q 48 : f est une fonction polynôme donc est continue sur $\mathbb{R}$, de ce fait elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

La fonction $[x \mapsto x^2 + 3x]$ est une fonction polynôme de fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ $[x \mapsto 2x + 3]$ c'est-à-dire f ; autrement dit $[x \mapsto x^2 + 3x]$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

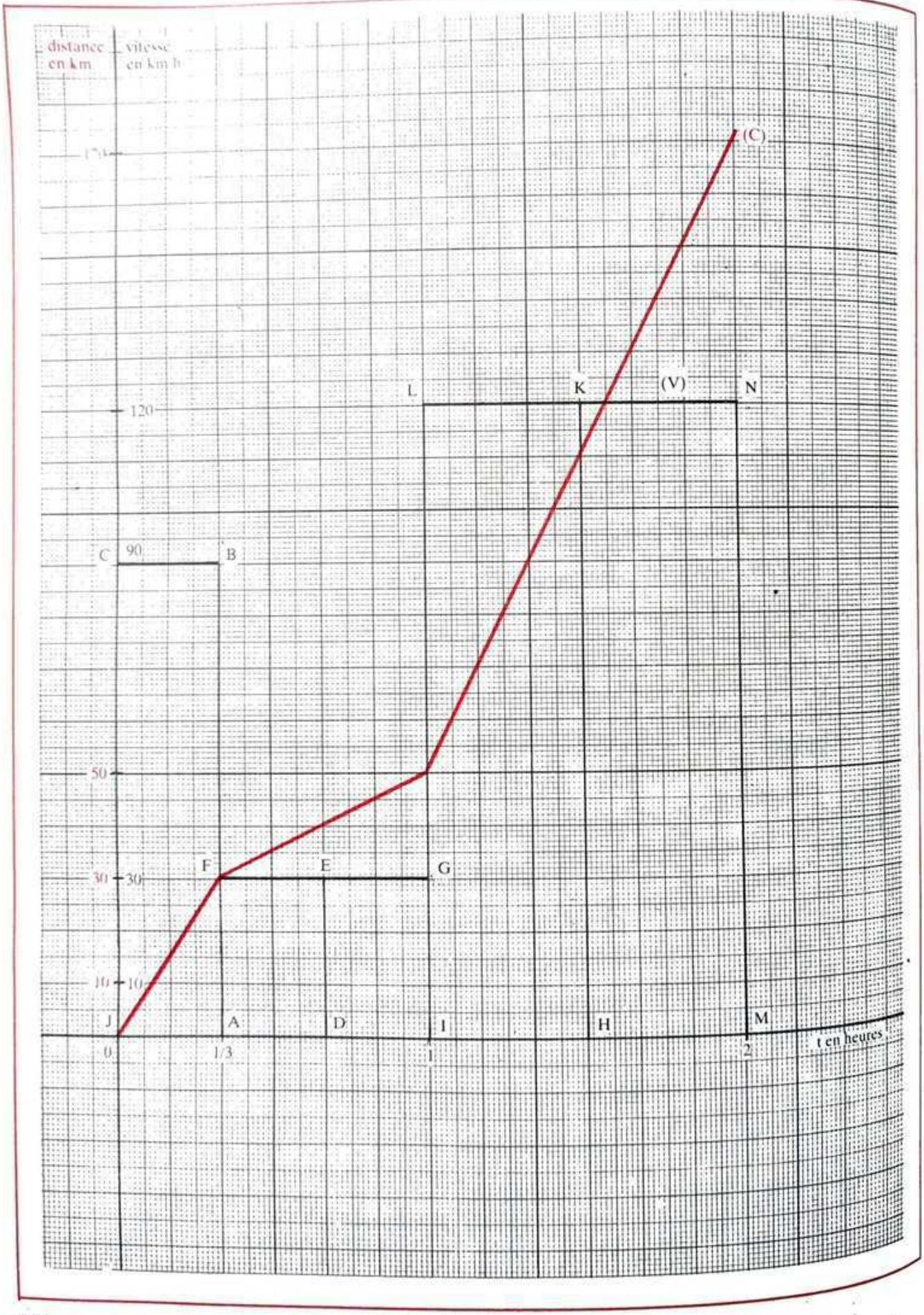
Une fonction F est une primitive de f si et seulement si elle est la somme de la fonction $[x \mapsto x^2 + 3x]$ et d'une fonction constante ; autrement dit, si et seulement si il existe un nombre réel k tel que

$F : x \mapsto x^2 + 3x + k$.

Alors $[F(2) = 1]$ est équivalent à : $4 + 6 + k = 1$ c'est-à-dire $k = -9$.

Donc il existe une et une seule primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2) = 1$ c'est :

$F : x \mapsto x^2 + 3x - 9$.


distance en km
vitesse en km/h
(C)
L
K
(V)
N
120
C
90
B
50
F
E
G
30
30
10
10
J
A
D
I
H
M
0
1/3
1
2
t en heures

Résultats ou indications des exercices

1/ f n'est pas dérivable en -1
$f'(1) = 2$
f n'est pas continue en 3

6/ 3/ $f'(1) = 13$

8/ 1/ $]\leftarrow, -4[,]-4, 1[$ et $]1, \rightarrow[$

$$\frac{18x^2 - 48x}{(x^2 + 3x - 4)^2}$$

2/ $]\leftarrow, 0[, \left]0, \frac{5}{6}\right[$ et $\left]\frac{5}{6}, \rightarrow\right[$

$$2 - \frac{3}{x^2} + \frac{26}{(6x - 5)^2}$$

3/ $\left]0, \frac{2}{3}\right[$ et $\left]\frac{2}{3}, \rightarrow\right[$

$$-\frac{5(3x + 2)}{2\sqrt{x}\,(3x - 2)^2}$$

4/

x	$\leftarrow$	0	$1/3$	3	$\rightarrow$
$f'(x)$	$f_1(x)$	|| $f_1(x)$	|| $f_2(x)$	|| $f_2(x)$	

avec $f_1 : x \mapsto \dfrac{-31x^2 - 6x + 9}{4x^2(x - 3)^2}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{-33x^2 + 6x - 9}{4x^2(x - 3)^2}$

14/ Utiliser
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2$
et
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_-^*$ $\quad u < v \Leftrightarrow u^2 > v^2$

15/ $\dfrac{2x + 3}{x - 1} = 2 + \dfrac{5}{x - 1}$
et, quels que soient les nombres réels a et b de même signe on a :
$a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

19/ $\forall x \in]n, n + 1[$ $\quad f(x) = x - n$
d'où : $\forall x \in]n, n + 1[$ $\quad f'(x) = 1$

22/

x	$\leftarrow$	-1	$-1/2$	$\rightarrow$
$g(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$ $\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

x	$\leftarrow$	$4/3$	$5/3$	$\rightarrow$
$h(x)$	$\searrow$	$f(0)$ $\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$

23/ 1/ minimum en 0
2/ en tout point de $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$
f possède à la fois un minimum et un maximum relatif
en -1, f possède un minimum relatif
en 1 et 2, f possède un maximum relatif et un minimum
3/ Aucun extremum
4/ minimum en -2 et -1
à la fois minimum et maximum en tout point de $]-2, -1[$
5/ minimum en -1 et 1
maximum en 0
6/ aucun extremum
7/ minimum en 1

26/ $k < 0$ pas de solutions
$k = 0$ $S = \{1\}$
$k > 0$ deux solutions

27/ $[\forall m \in \mathbb{R} \quad (2y + x)m + (2y + 3x - 2) = 0]$
est équivalent à
$[2y + x = 0$ et $2y + 3x - 2 = 0]$

2/ $(D_m) // D(O, \vec{j}) \Leftrightarrow m = -1$
Trouver x et m $(m \in \mathbb{R} - \{-1\})$
tels que :
$f'(x) = \dfrac{m + 3}{-2m - 2}$ et le point de coordonnées x et f(x) appartient à (D_m).
On trouve $m \in \left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$

29/ 1/ à gauche $-\infty$, à droite $+\infty$
2/ $+\infty$ à droite, $-\infty$ à gauche
3/ $\dfrac{6}{7}$
4/ $+\infty$

30/ 1/ 8/3 , 8/3
2/ 0 , 0
3/ 0 , pas définie sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$
4/ 0, 0

32/ 1/ $+\infty$, $-\infty$
2/ $-\infty$, $+\infty$
3/ $a > 0 : +\infty$, $-\infty$
$a < 0 : -\infty$, $+\infty$
$a = 0 : b$, b
4/ $+\infty$, $+\infty$
5/ $+\infty$, $-\infty$

34/ $\dfrac{|x|}{x^2} = \dfrac{1}{|x|}$, $\dfrac{x^2}{|x|} = |x|$

39/ • g coïncide avec f sur $\mathbb{R}_+$
• $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ $\quad g(x) = -f(-x)$
d'où l'utilisation de la symétrie de centre O appliquée à $(C_f) \cap [(OJ), I)$

40/ $x = \frac{3}{2}$
$y = \frac{x}{2} + \frac{7}{4}$ au voisinage de plus l'infini et de moins l'infini.

42/ $tg'(0) = 1$

46/ $x \mapsto -\frac{1}{\sin^2 x}$

48/

x	0		$\pi/2$
cotgx	‖	$+\infty$ ↘	0

49/ $g'(x) = -10 \sin 3x \cos 2x$ d'où

x	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
g'(x)	0	−	0	+	0	−	‖
g(x)	6	↘	$2\sqrt{2}$	↗	3	↘	0

$f'(x) = -\frac{g(x)}{2 \sin^2 3x}$

$y = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Exercices

51 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de
$x \mapsto |1 - x| + |x + 2|$

52 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, -1[& g(x) = x + 1 \\ \forall x \in]-1, 0] & g(x) = 0 \\ \forall x \in]0, \rightarrow[& g(x) = x^2 \end{cases}$$

53 Soient k un nombre réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 1] & f(x) = kx + \dfrac{11}{4} \\ \forall x \in]1, \rightarrow[& f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1} \end{cases}$$

Trouver le nombre k de façon que f soit dérivable en 1. Préciser alors le nombre dérivé de f en 1.

54 Soit f la fonction définie par
$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$
Quelle est l'application g, notée f^2, définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = (f(x))^2$
Vérifier que g est dérivable sur $]0, \rightarrow[$ et donner deux expressions de sa fonction dérivée. En déduire la fonction dérivée de f.

55 Montrer que la fonction f définie ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, 2[& f(x) = \dfrac{5x - 1}{x - 3} \\ \forall x \in [2, 5[& f(x) = 2x - 13 \\ \forall x \in [5, \rightarrow[& f(x) = -\dfrac{15}{x} \end{cases}$$

Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$, et donner sa fonction dérivée sur chacun des intervalles qui interviennent.

56 Étudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ (on précisera la fonction dérivée) des fonctions suivantes :

1/ $x \mapsto \dfrac{x + 3}{x^2 - x - 12}$

2/ $x \mapsto |x^2 - x + 1|$

3/ $x \mapsto \dfrac{1}{|x| + |x - 2|}$

3/ f est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} & f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} \\ f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4/ $x \mapsto \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

57 Soient a, b et c trois nombres réels, et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\leftarrow, -3[& f(x) = x^2 + bx + c \\ \forall x \in [-3, 0[& f(x) = \dfrac{3x + 8}{x + 4} \\ \forall x \in [0, 5] & f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2 \\ \forall x \in]5, \rightarrow[& f(x) = 8x + a \end{cases}$$

1/ Vérifier que f est dérivable et donner sa fonction dérivée sur chacun des intervalles ouverts
$]\leftarrow, -3[$, $]-3, 0[$, $]0, 5[$ et $]5, \rightarrow[$.
Vérifier que f est continue en 0 et préciser sa dérivabilité en ce point.
2/ Trouver le nombre réel a pour que f soit continue en 5. Est-ce que f est alors dérivable en 5 ? (On précisera éventuellement à droite, à gauche).
3/ Trouver une égalité portant sur b et c pour que f soit continue en -3. Trouver les nombres réels b et c pour que f soit dérivable en -3.
4/ Avec les valeurs trouvées de a, b et c, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan (préciser aux points d'abscisse -3, 0 et 5).
5/ Donner selon les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation :
$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$
6/ Résoudre l'équation
$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

58 Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ du plan, l'équation $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y = x^2 - 2mx + 3$
dans laquelle m est un nombre réel, définit, pour chaque valeur de m, la courbe représentative (C_m) d'une fonction.
1/ Démontrer que toutes les courbes (C_m) ont un point commun que l'on précisera.
2/ Vérifier qu'exactement deux courbes (C_m), que l'on précisera, sont tangentes à la droite des abscisses. On note A et B ces points de contact.
3/ Démontrer qu'il existe exactement deux valeurs de m pour lesquelles (C_m) a son sommet situé sur la droite (D) dont une équation est : $y = 2x + 2$.
Construire la courbe (C_m) qui correspond à la valeur de m positive ainsi trouvée. Dans la suite, on appelle (C) cette courbe et P son sommet.
4/ (C) coupe la droite des ordonnées au point E, et coupe la parallèle à (D) menée par E en un deuxième point F. (C) coupe la droite (D) en deux points : P et H.
Démontrer que le milieu de [EF], le milieu de [PH] et le point de contact de la tangente à (C) menée parallèlement à (D), sont trois points alignés.
5/ Déterminer l'ensemble décrit par les sommets des courbes (C_m). Vérifier que A, B et P sont des éléments de cet ensemble.

59 Soit $f : x \mapsto |1 - x^2| + |2x + 1|$
1/ Exprimer pour tout nombre réel x, f(x) sans aucun symbole de valeur absolue. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2/ Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f'(x) selon les valeurs de x, préciser éventuellement les nombres dérivés à droite et à gauche en certains points.
3 Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé du plan (unités : 4 cm).
4 Soient m un nombre réel et (D_m) la droite dont une équation est $y = x + m$.
Discuter suivant les valeurs du nombre réel m, du nombre des points d'intersection de (C) et (D_m). Tracer $(D_{5/4})$, (D_2) et $(D_{9/4})$.
5/ Résoudre l'équation
$x \in \mathbb{R}$, $E[f(x)] = p$
dans chacun des cas suivants :
$p = -1$, $p = 0$, $p = 1$ et $p = 2$.
(E désigne la fonction partie entière).

60 Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère le point A de coordonnées 1 et 1, et on note E l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :
MA = MH + MK
où H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OI) et (OJ) et où MA désigne la distance des points M et A.
1/ Montrer que la droite (Δ) dont une équation est $y = x$, est un axe de symétrie de E.
2/ Montrer que :
$$E = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; |x|\,|y| = 1 - x - y \right\}$$
3/ Dessiner E.

61 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2}{|x - 1| + 1}$$
1/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2/ Etudier la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative (C) de f ?
3/ Etudier les variations de f et construire (C).

62 Pour tout nombre réel m, on considère la fonction f_m définie par :
$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + 2(2 - m)x + m^2$.
On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
1/ Etudier les variations de f_m.
2/ Soient F_m les points de coordonnées $m - 2$ et $\frac{16m - 15}{4}$, et (D_m) la droite d'équation $y = \frac{16m - 17}{4}$.
Montrer que (C_m) est l'ensemble des points M du plan tels que la distance de M à F_m soit égale à la distance de M à la droite (D_m).
3/ Soit a un nombre réel, on note A_m le point de (C_m) d'abscisse a et (T_m) la tangente à (C_m) en A_m.
a) Déterminer une équation de (T_m). Quel est l'ensemble des nombres réels a tel que (T_m) soit parallèle à (D_m) ?
b) On note (Δ_m) la droite d'équation $y = 4(m - 1)$
Vérifier que pour a distinct de $(m - 2)$, (T_m) coupe (D_m) et (Δ_m). On note dans ce cas K_m le point d'intersection de (T_m) et (D_m), et I_m le point d'intersection de (T_m) et (Δ_m).
Démontrer que le triangle A_mFK_m est rectangle en F.
Démontrer que le triangle A_mFI_m est rectangle en I_m.
c) Démontrer que le point F'_m, symétrique du point F_m par rapport à (T_m) appartient à la droite (D_m).
4/ Soit M_0 un point du plan de coordonnées x_0 et y_0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
a) Donner, selon les valeurs de x_0 et y_0 le nombre de courbes (C_m) qui contiennent le point M_0.
b) En déduire que l'ensemble des points M_0 tel qu'il existe au moins une courbe (C_m) contenant M_0, est un demi-plan fermé dont on précisera la droite frontière (F).
c) Montrer que, pour tout nombre réel m, la droite (F) est tangente à (C_m) en un point dont on précisera les coordonnées.
5/ Soit J_m un point de la droite (Δ_m). Montrer que la droite perpendiculaire en J_m à la droite (FJ_m) est tangente à (C_m).
Donner les coordonnées du point de contact en fonction de l'abscisse b du point J_m.

63 Soient m un nombre réel non nul et f_m la fonction définie par :
$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{mx}{|x - m|}$$
1/ Déterminer l'ensemble de définition D_m de f_m et étudier les limites de f_m aux bornes de D_m.
2/ Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan. On note (C_m) la courbe représentative de f_m dans ce repère.
Etudier les variations de f_0, f_1 et f_{-2} et tracer (C_0), (C_1) et (C_{-2}).
3/ Préciser, pour tout m, les intersections respectives de (C_m) avec (OI) et (OJ).
4/ Déterminer m pour que la tangente en O à (C_m) coupe (C_m) au point d'abscisse 4.

64 Soient k un nombre réel et f la fonction définie par :
$$f : x \mapsto \frac{k(x + k + 1)}{x - 2}$$
Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (on discutera selon la valeur de k) et exhiber les asymptotes à la courbe représentative de f.

65 Soient k et k' deux nombres réels et f la fonction définie par :
$$f : x \mapsto \frac{2kx^2 + k'x - 1}{2x + 3}$$

Etudier les limites, selon les valeurs de k et k', de f aux bornes de son ensemble de définition D_f, et préciser les asymptotes à la courbe représentative de f (Dans le cas où k est non nul, on déterminera les nombres a, b et c tels que :

$\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x + 3}$).

66 Soient p et q deux nombres réels, f la fonction définie par :

$f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

et g la fonction affine définie par :

$g : x \mapsto px + q$

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, et les limites de f aux bornes de D_f.

Vérifier que la fonction f − g a pour ensemble de définition D_f.

Discuter selon les valeurs de p et q, les limites de f − g aux bornes de D_f, et préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

67 Soit f la fonction définie par :

$f : x \mapsto |3x - 1| + |x - 3| + \dfrac{4}{x - 2}$

1/ Préciser l'ensemble de définition D_f de f, et donner pour tout nombre réel x de D_f, l'expression de f(x) sans aucun symbole de valeur absolue.
2/ Etudier les limites de f aux bornes de D_f.
3/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
4/ Déterminer les variations de f.
5/ Préciser les droites asymptotes à la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé du plan et la position de (C) par rapport à ces asymptotes.
6/ Tracer la courbe (C) en précisant les points particuliers intervenus, notamment, en représentant les tangentes ou demi-tangentes en ces points.
7/ Etudier les intersections de (C) avec les asymptotes.

68 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{(x - 1)^2} + \dfrac{2}{x + 1}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.
Étudier la continuité de f et la dérivabilité de f.
2/ Etudier les variations de f.
3/ Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = -x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).
Déterminer, s'ils existent, les points d'intersections des asymptotes (D_1) et (D_2) avec la courbe (C).
4/ Déterminer l'intersection de (C) avec la droite $D(O, \vec{i})$.
5/ Tracer la courbe (C).

69 On considère la fonction f définie par :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2x^2}{|2 - x| + x}$

et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère cartésien.
1/ Déterminer l'ensemble de définition D de f. Exprimer f(x) sans valeurs absolues suivant les valeurs de x.
2/ Etudier la continuité de f en 2, puis sur D.
Etudier la dérivabilité de f en 2, puis sur D.
3/ Etudier les variations de f.
Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C). Tracer (C).

70 1/ Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Étudier les variations de f.
b) Vérifier qu'il existe deux nombres réels a et b, que l'on précisera, tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = x + 5 + \dfrac{ax + b}{(x - 1)^2}$

En déduire que la droite d'équation $y = x + 5$ est asymptote à (C)
c) Tracer (C).
2/ Soit g la fonction |f|
a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en − 1.
b) Tracer la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en expliquant ce tracé.
c) Pour tout nombre réel m, on note (Em) l'équation :
(Em) : $x \in \mathbb{R}, |x + 1|^3 = k(x - 1)^2$
Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de (Em) suivant les valeurs de m.

71 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0] \quad f(x) = -x + 4 - \dfrac{1}{x - 1} \\ \forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 - 1} \end{cases}$$

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
2/ Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3/ Etudier les variations de f.
4/ Montrer que la droite d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté a un repère $\mathcal{R}$.
5/ Tracer (C) en précisant la situation au point d'abscisse zéro.

72 Soit la fonction :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -2x + 1 - \dfrac{4}{x}$

1/ Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2/ Etudier les variations de f.
3/ On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation : $2x + y - 1 = 0$.
4/ Montrer que le point $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est centre de symétrie de la courbe (C).
5/ Tracer (C).
6/ Soit A le point de coordonnées -1 et 7 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout nombre réel m, on note (D_m) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{i} + m\vec{j}$.
a) Montrer que, pour tout m différent de -2, (D_m) est sécante à la droite (D).
Calculer les coordonnées du point Q d'intersection de (D_m) et (Δ).
b) Montrer que, pout tout m, (D_m) est sécante à la droite $D(O, \vec{j})$.
Calculer les coordonnées du point P d'intersection de (D_m) et $D(O, \vec{j})$.
b) Soient I le milieu de [PQ] et B le symétrique de A par rapport à I.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du point B.
c) Montrer que, lorsque m varie, l'ensemble des points B est la courbe (C).

73 Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction numérique f_m de la variable réel définie par

$$f_m : x \mapsto \frac{mx + 1}{x + m}$$

On appelle (C_m) la représentation graphique, dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J), de chaque fonction f_m.
1/ Montrer que, sauf pour deux valeurs de m que l'on précisera, les courbes (C_m) admettent deux points communs dont on calculera les coordonnées.
2/ Pour quelles valeurs de m, la restriction de f_m à $]-\infty, -m[$ est-elle décroissante ?
3/ a) Trouver m_0 pour que la droite d'équation : $3x - y + 2 = 0$ soit tangente à (Cm_0) au point de coordonnées $(-1, -1)$.
b) Etudier la fonction f_{m0}.
4/ a) Tracer (C_2) et (C_{-3}) dans le repère (O, I, J).
b) Résoudre l'inéquation

$$x \in \mathbb{R}, \frac{2x + 1}{x + 2} < \frac{-3x + 1}{x - 3}$$

par le graphique puis par le calcul.
c) Trouver l'image réciproque par f_{-3} de l'intervalle $[-1, 3]$, par le graphique.
Vérifier en résolvant :

$$x \in]-\infty, 3[, \left|\frac{-3x + 1}{x - 3} - 1\right| < 2$$

5/ Construire la représentation graphique, dans un repère orthonormé distinct de (O, I, J), de la fonction $[x \mapsto f_2(\cos x)]$.

74 Pour chaque valeur du nombre réel m on considère la fonction f_m définie par

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{mx^2 - 1}{x^2 - m}$$

On appelle (C_m) la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
1/ a) Donner, selon les valeurs de m, l'ensemble de définition de f_m.
b) Montrer que, quel que soit m, f_m est paire.
c) Préciser, selon les valeurs de m, sur quel ensemble f_m est continue, puis sur quel ensemble f_m est dérivable. Calculer alors $f_m'(x)$ pour x dans cet ensemble.
Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle constante sur son ensemble de définition ?
1/ Pour m différent de 1, calculer $f_m(1)$; en déduire qu'il existe deux points appartenant à toutes les courbes (C_m) sauf (C_1).
2/ Tracer (C_1).
3/ Etudier les variations de f_{-2} et tracer (C_{-2}).
4/ Faire l'étude complète de f_4 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé distinct du précédent.

75 Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3 + 2}{2x}$$

1/ a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudier les variations de f.
2/ a) Calculer les limites en plus l'infini et moins l'infini de la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{x^2}{2}$$

b) Que peut-on en déduire quant à la position de la courbe représentative (C) de f par rapport à la parabole, courbe représentative de la fonction $\left[h : x \mapsto \frac{x^2}{2}\right]$
c) Déterminer le plus petit nombre réel strictement positif A tel que, pour tout élément x de $]A, +\infty[$, on a : $|f(x) - h(x)| < 10^{-3}$.
3/ Tracer (C).

76 1/ Soit g la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + \frac{13}{12}$$

a) Étudier les variations de g.
b) Montrer que la représentation graphique (Γ) de g dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, admet pour axe de symétrie la droite d'équation : $x = 1$.

2/ On considère la fonction polynôme f définie par
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -\sqrt{3}\,x^2 + 2\sqrt{3}\,x$

a) Etudier rapidement f et tracer, dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C) de f, en plaçant les points O' et S de (C) d'abscisses respectives 2 et 1.
b) On note A le point de couple de coordonnées $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Soit M un point de (C) d'abscisse x. Calculer la distance AM en fonction de x.
On considère l'application d de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$d : x \mapsto AM$
et on note d^2 l'application définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (d^2)(x) = [d(x)]^2$
Vérifier que $g = d^2$
c) On admettra que d est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on notera d' sa fonction dérivée.
Exprimer d' en fonction de g et d.
En déduire les variations de d.

3/ Soit M un point de (C) de couple de coordonnées (x, y).
Vérifier que A et M sont distincts.
Déterminer l'ensemble des points M de (C) pour lesquels la tangente à (C) en M est perpendiculaire à la droite (AM).
Tracer la tangente à (C) en chacun de ces points.

77 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sin^2 x + \cos x$
1/ Montrer que f est paire et périodique de période 2π
2/ Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
3/ Tracer la courbe représentative de f, en explicitant les transformations ponctuelles utilisées.
4/ Discuter graphiquement du nombre des solutions de l'équation (Em) :
(Em) : $x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = m$
selon les valeurs du nombre réel m.

Sujets de recherche

Sup et Inf de trois fonctions (A_1)

Un établissement scolaire est équipé de 3 machines *A*, *B* et *C* servant à la duplication des documents. Voici quelles sont les caractéristiques de ces machines.

Machine A : Machine manuelle à alcool.

En tenant compte du prix de l'alcool, des matrices et du papier, le prix de revient des copies est établi par le tableau suivant :

Nombre de copies	[1, 10]	]10; 30]	]30; 70]
Prix d'une copie	40 F	10 F	2 F

Mais au-delà de 70 copies, la matrice est fichue et l'on doit en refaire une autre. Il faut donc ajouter aux prix de revient des copies au-delà de 70 (et toutes les 70 copies) la somme forfaitaire de 100 F. Cette somme s'ajoutant donc à partir des 71e, 141e, ... copies.

Machine B : Photocopieuse électronique avec préchauffage.

En tenant compte du prix du papier spécial utilisé et de l'encre en poudre on a le tableau ci-dessous :

Nombre de copies	[1; 10]	]10; 70]	]70; 110]	Au-delà de 110
Prix d'une copie	20 F	10/3 F	10/4 F	1 F

Mais, pour que la machine *B* fonctionne il faut la mettre en chauffe 1 heure avant son fonctionnement. Il en résulte une consommation d'électricité non négligeable qui se traduit par une majoration forfaitaire du prix de revient des copies, de 300 F.

Machine C : Ronéo électrique pour stencils à encre.

Nombre de copies	[1; 20]	]20; 30]	]30; 130]	]130; 210]	Au-delà de 210
Prix d'une copie	20 F	10 F	6 F	5/2 F	2 F

1) Sur une même feuille de papier millimétrique, tracer les trois courbes représentatives des machines *A*, *B* et *C* donnant le prix de revient d'un nombre quelconque de copies inférieur à 210.

2) Calculer pour chacune des trois machines A, B et C le prix de revient de 32 copies, 71 copies, 153 copies.

3) Existe-t-il un nombre de copies tel que le prix de revient de ces copies soit le même pour les trois machines?

4) Dresser un tableau indiquant, pour un nombre quelconque de copies inférieur à 210, quelle est la machine la plus avantageuse.

5) Une secrétaire dactylographe payée 500 F de l'heure met quinze minutes pour taper à la machine un texte d'une page. Elle a la possibilité d'utiliser 5 carbones en même temps.
Un professeur désirant 36 copies d'un texte d'une page a-t-il intérêt, du point de vue financier, de s'adresser à cette secrétaire ou bien doit-il utiliser une des machines? Si oui, laquelle?

Groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments (A_1)

1) E, F, G et H étant quatre ensembles, on considère trois applications :

$$f : E \longrightarrow F$$
$$g : F \longrightarrow G$$
$$h : G \longrightarrow H.$$

Exprimer, pour un élément quelconque x de E, $[h \circ (g \circ f)](x)$, puis $[(h \circ g) \circ f](x)$. En déduire l'égalité des applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ (cette application sera notée $h \circ g \circ f$).

2) Considérant les applications : $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, démontrer que :

a) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

b) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective

c) en déduire que, si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

3) Considérant encore $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, démontrer que :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

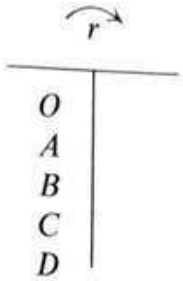
b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

En déduire, dans le cas où $E = G$, que, si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

4) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application donnée, déduire de ce qui précède que, s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ alors f et g sont bijectives. Notant f^{-1} la bijection réciproque de f, montrer alors que $g = f^{-1}$.

5) Soient f une bijection de E vers F et g une bijection de F vers G, f^{-1} et g^{-1} leurs bijections réciproques. Déterminer $f^{-1} \circ g^{-1}$. En utilisant les questions 2) et 4), en déduire que $g \circ f$ est bijective et de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

6) Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Soit r la rotation de centre O et d'angle dont une détermination de la mesure est $\frac{\Pi}{2}$. Compléter :



Démontrer que r est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ et trouver sa bijection réciproque.
On note : $r^2 = r \circ r$. Donner les images de O, A, B, C et D par r^2. Quelle est la nature de r^2?
Mêmes questions pour r^3, où $r^3 = r^2 \circ r$ puis r^4, où $r^4 = r^3 \circ r$.
Compléter alors le tableau suivant :

$\circ$	r	r^2	r^3	r^4
r				
r^2				
r^2				
r^4				

7) Soit $E = \{1, 2, 3\}$. La bijection f de E dans lui-même définie par :

$$\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = c. \end{cases} \quad \text{est notée} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a & b & c\end{pmatrix}$$

Donner la notation de id_E.
On considère $t_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ et $r' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
Définir les bijections suivantes :

$$t_2 \circ t_1, \quad t_1 \circ t_2, \quad t_3 \circ t_1, \quad t_1 \circ t_3,$$
$$t_2 \circ t_3 \text{ et } t_3 \circ t_2, \text{ puis } r^{-1} \text{ et } r'^{-1}.$$

Compléter alors le tableau suivant :

$\circ$	id_E	t_1	t_2	t_3	r	r'
id_E						
t_1						
t_2						
t_3						
r						
r'						

Illustration graphique des solutions d'une équation (A_2-G_1)

On considère l'équation :

$$(E_m) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad (m+1)x^2 - 2(2m+1)x + 1 - m = 0$$

où m est un nombre réel.

1) Étudier suivant les valeurs de m, l'existence et le signe des solutions de (E_m).

2) Peut-on déterminer m, pour que :

a) le nombre 4 soit solution de (E_m)?

b) le nombre $2 + \sqrt{5}$ soit solution de (E_m)?

c) un nombre réel x_0 donné soit solution de (E_m)?

3) Peut-on déterminer m pour que la somme des deux solutions de (E_m), lorsqu'elles existent, soit égale à un nombre réel s donné?

4) Peut-on déterminer m, pour que le produit des deux solutions de (E_m), lorsqu'elles existent soit égal à un nombre réel donné p?

5) Démontrer que, lorsque (E_m) admet deux solutions, éventuellement confondues, alors elles vérifient une égalité indépendante de m. Retrouver les solutions doubles éventuelles de l'équation (E_m).

6) Soient (D) une droite munie d'un repère (O, I), M' et M'' les points de (D) dont les abscisses respectives x' et x'' sont les solutions de (E_m), lorsque celle-ci en a deux.

a) Démontrer qu'il existe deux points fixes A et B de (D) tels que, quelle que soit la valeur de m pour lesquelles deux solutions de (E_m) existent, on a :

$$\overline{AM'} \cdot \overline{BM''} + \overline{AM''} \cdot \overline{BM'} = 0.$$

b) Soit Ω un point de (D) d'abscisse ω. Peut-on déterminer m pour que :

– les points M' et M'' soient symétriques par rapport à Ω?

– la distance du point Ω à l'origine soit moyenne proportionnelle entre les distances des points M' et M'' à l'origine? (On rappelle que c est moyenne proportionnelle de a et d si et seulement si $\frac{a}{c} = \frac{c}{d}$, où a, c et d sont des nombres réels non nuls).

c) Pour quelle valeur de m, l'abscisse du milieu de $[AB]$ est-elle solution de (E_m)?
On considère dans cette question que (E_m) a deux solutions.

d) Soient I un point du plan n'appartenant pas à la droite (AB), (Δ) la droite parallèle à (BI) menée par A. M' étant le point d'abscisse x' solution de (E_m), avec $M' \neq A$ et $M' \neq B$.
Vérifier que la droite (IM') coupe (Δ) en un point N. Construire le symétrique N' de N par rapport à A.
Montrer que la droite (IN') coupe la droite (AB) en un point M'' d'abscisse x'', l'autre solution de (E_m).

Différences finies (A_2)

Soit f une fonction. On note Δf la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Δf est appelée la 1re différence finie de f ou la différence finie d'ordre 1 de f. On a ainsi le tableau suivant pour $f : x \longmapsto 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-98	-41	-14	-5	-2	7	34	91	190	343
$\Delta f(x)$	57	27	19	3	9	27	57	99	153	

De même $\Delta^2 f$ est la fonction $\Delta(\Delta f)$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$$

$\Delta^2 f$ est la différence finie d'ordre 2 de f.
Plus généralement pour tout entier naturel k différent de 0 et de 1 on appelle différence finie d'ordre k de f la fonction, notée $\Delta^k f$, égale à $\Delta(\Delta^{k-1} f)$.

1) Pour $f : x \longmapsto 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$										
$\Delta f(x)$										
$\Delta^2 f(x)$										
$\Delta^3 f(x)$										
$\Delta^4 f(x)$										

Donner pour tout nombre réel x les expressions de $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$ et $\Delta^4 f(x)$.

2) Montrer que, pour toute fonction polynôme f de degré n, sa différence finie d'ordre 1, Δf, est une fonction polynôme de degré $n-1$. En déduire que les différences finies successives d'une fonction polynôme sont nulles à partir d'un certain rang.

3) Dresser les tableaux des différences finies d'ordre 1, 2, 3, 4 des fonctions polynômes f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies par :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad f_i : x \longmapsto x^i$$

(on prendra pour valeurs de x : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).
Dresser les tableaux de $f : x \longmapsto x + x^2$

$$g : x \longmapsto 3x^2$$
$$h : x \longmapsto 2x^2 - 3x^3.$$

Comparer ces tableaux avec ceux des f_i.
Montrer que, quelles que soient les fonctions f et g et le nombre réel k, on a :

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$$
$$\Delta(kf) \quad = k(\Delta f).$$

4) Compléter le tableau ci-dessous qui est le tableau incomplet des différences finies d'une fonction f.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5						
$\Delta f(x)$	-3						
$\Delta^2 f(x)$	2						
$\Delta^3 f(x)$	0	0	0	0	0		

Ainsi à partir de la 1re colonne et de la « ligne des zéros » on obtient les images de 1, 2, 3, 4, 5 et 6 par f (et on aurait celles de tous les entiers naturels en prolongeant le tableau).
Plus généralement on va montrer que l'on connaît une fonction polynôme f grâce à la donnée des valeurs $f(0)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0)$, ... $\Delta^n f(0)$ où n est le degré de f. Si f est constante on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0).$$

Si f est une fonction polynôme de degré 1 : il existe deux nombres réels a_1 et a_0 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_1 x + a_0.$$

Calculer $f(0)$ et $\Delta f(0)$ en fonction de a_1 et a_0.
En déduire les valeurs de a_1 et de a_0.
Si f est une fonction polynôme de degré 2, il existe trois nombres réels a_2, a_1 et a_0 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Calculer $f(0)$, $\Delta f(0)$ et $\Delta^2 f(0)$ en fonction de a_2, a_1 et a_0.

En déduire, en regroupant les termes de façon adéquate, que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 f(0).$$

Si f est une fonction polynôme de degré 3, faire le même genre de raisonnement pour prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 f(0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \times 3}\Delta^3 f(0).$$

D'une manière générale, si f est une fonction polynôme de degré n, alors on a, en notant $k!$ (lire factorielle k) le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0) + \ldots$$
$$\ldots + x\frac{x(x-1)\ldots(x-n-1)}{n!}\Delta^n f(0).$$

5) Lorsqu'on connaît les images par f des n premiers entiers naturels (c'est-à-dire $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... $f(n)$), on peut obtenir, grâce au tableau des différences finies les valeurs de $f(0)$, $\Delta f(0)$, ... $\Delta^n f(0)$. On peut alors obtenir l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x en utilisant la formule ci-dessus (appelée formule de Grégory).
Appliquer ce raisonnement pour connaître la fonction polynôme f de degré 3 telle que :

$$f(0) = 5 \qquad f(1) = -2 \qquad f(2) = 8 \quad \text{et} \quad f(3) = 0.$$

Polynômes d'interpolation de Lagrange (A_2)

1) Déterminer les fonctions polynômes f de degré n suivantes :

a) $n = 1$, $f(2) = 1$ et $f(3) = 0$

b) $n = 2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(5) = 36$

c) $n = 3$, $f(0) = 3$, $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{8}$.

2) Existe-t-il une fonction polynôme de degré 2 qui associe aux nombres réels 1, 0, 2 et 3 respectivement les images 3, -2, 0 et 2?
Existe-t-il une fonction polynôme de degré 2 qui associe aux nombres réels 2, -1, $\sqrt{2}$ et 3 respectivement les images -15, 0, $-5-8\sqrt{2}$ et -8?

3) Trouver toutes les fonctions polynômes f de degré 2 vérifiant :

$$f(-3) = 2 \quad \text{et} \quad f(2) = -3.$$

Trouver toutes les fonctions polynômes g de degré 3 vérifiant :

$$g(1) = 1, \qquad g(-1) = 3 \quad \text{et} \quad g(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

4) Soient $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ et $g : x \longmapsto a'x^2 + b'x + c'$ deux fonctions polynômes de degré 2. Soient x_1, x_2 et x_3 trois nombres réels distincts deux à deux. Démontrer que, si les images par f et g de chacun de ces trois nombres sont égales, alors on a :

$$(a-a')(x_1+x_2) + (b-b') = 0 \quad \text{et} \quad (a-a')(x_1+x_3) + (b-b') = 0;$$

en déduire que f et g sont égales.

Plus généralement prouver que deux fonctions polynômes de degré n qui coïncident pour $n+1$ nombres réels distincts, sont égales (on utilisera le fait que leur différence a $n+1$ zéros distincts). On déduit de ce résultat qu'une fonction polynôme de degré n est déterminée de façon unique par la donnée des images $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ de $n+1$ nombres réels distincts $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

5) Soit f une fonction polynôme de degré 1 au plus (affine) définie par $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ où x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts. f étant la fonction $[x \longmapsto ax + b]$, calculer a et b en fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2; en déduire que, pour tout nombre réel x on a :

$$f(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

6) Soit f une fonction polynôme de degré 2 au plus définie par $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ et $f(x_3) = y_3$ où x_1, x_2 et x_3 sont trois nombres réels distincts deux à deux. Vérifier que pour tout nombre réel x on a :

$$f(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

7) Plus généralement, vérifier que l'unique fonction polynôme f de degré au plus égal à $n - 1$ telle que les n nombres réels distincts deux à deux $x_1, x_2, \ldots x_n$ aient pour images respectives les nombres réels donnés $y_1, y_2, \ldots y_n$, est donnée par l'expression :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

dans laquelle le symbole $\sum_{i=1}^{n}$ que l'on lit « sigma de i égal 1 à n » désigne la somme de tous les termes que l'on calcule en remplaçant successivement i par 1, 2, 3, ... puis n. Cette formule est appelée formule d'interpolation de Lagrange. Elle permet de calculer l'image par f de n'importe quel nombre réel dès que l'on connaît les images de n nombres réels distincts (quand le degré de f est inférieur ou égal à $n - 1$).
Appliquer ce résultat pour calculer l'image de -2 par la fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui, aux nombres réels $-1, 0, 1, 2$, associe respectivement $2, -3, 5, -1$.
Appliquer ce résultat pour calculer l'image de 3 par la fonction polynôme de degré au plus égal à 4 qui admet 2, 0 et -1 pour zéros et qui prend les valeurs 1 et 3 pour 1 et -3 respectivement.

Construction d'une ellipse (A_3)

Le repère $\mathcal{R}$, égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$.

1re partie

Soient F le point de coordonnées (1 ; 2) dans $\mathcal{R}$ et (D_1) la droite dont une équation dans $\mathcal{R}$ est :

$$(D_1) : y + 1 = 0.$$

1) Soit x', y' les coordonnées du point M' projeté orthogonal du point M de coordonnées x, y sur la droite (D_1). Trouver x' et y' en fonction de x et de y.

2) Soit A l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF^2 = MM'^2.$$

Montrer que l'on a :

$$A = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x^2 - 2x - 6y + 4 = 0 \right\}.$$

3) Soit O_1 le point de couple de coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ dans $\mathcal{R}$. Soient X, Y les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_1$ égal à $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point M de coordonnées x et y dans $\mathcal{R}$.

Montrer que l'on a :

$$A = \left\{ M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ; X^2 - 6Y = 0 \right\}.$$

Dessiner A.

2e partie

Soit G le point de couple de coordonnées $(\sqrt{2}; 0)$ dans $\mathcal{R}$ et (D_2) la droite dont une équation dans $\mathcal{R}$ est :

$$2x - \sqrt{2} = 0.$$

1) Soit x', y' les coordonnées du point M' projeté orthogonal du point M de couple de coordonnées (x, y) sur la droite $(D_2$. Trouver x' et y' en fonction de x et de y.

2) Soit B l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MG^2 = 2MM'^2.$$

Montrer que l'on a :

$$B = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

3) Soient $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$, $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

Exprimer les coordonnées x et y d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées X et Y de ce même point dans le repère $\mathcal{R}_2$ égal à $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

Montrer que l'on a :

$$B = \left\{ M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ; XY = \frac{1}{2} \right\}.$$

Dessiner B.

3e partie

Soit C l'ensemble des points M de coordonnées x et y dans $\mathcal{R}$ tel que :

$$C = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x^2 + y^2 - xy - 1 = 0 \right\}.$$

1) Montrer que C possède un centre de symétrie.

2) Montrer que les droites d'équations dans $\mathcal{R}$: $y - x = 0$ et $y + x = 0$ sont des axes de symétrie de C.

3) Soient $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

Trouver une équation de C dans le repère $\mathcal{R}_2$ égal à $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

4) Tracer dans $\mathcal{R}_2$ le cercle dont une équation est : $X^2 + Y^2 = 2$; placer les points d'intersection de C avec les axes de coordonnées de $\mathcal{R}_2$.

5) Soit a l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ telle que :

$$a : \quad \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$
$$M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto M'\begin{pmatrix} X/\sqrt{3} \\ Y \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que a est une bijection.

b) Quelle est l'image par a du cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 2$.

c) Dessiner C.

Fonctions associées et changement d'origine ou de graduation (A_3)

On a vu dans le cours que l'on pouvait obtenir à partir de la courbe représentative d'une fonction donnée f dans un repère donné $\mathcal{R}$, la courbe représentative (C_g) d'une fonction associée g, en faisant subir une translation ou une affinité à la courbe (C_f) donnée, mais en conservant le repère initial $\mathcal{R}$.
On va étudier maintenant une méthode pour voir la courbe représentative de g comme étant celle de f mais, cette fois-ci, dans un autre repère $\mathcal{R}'$ que l'on va construire.

A 1) Soient $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$$x \mapsto \frac{1 - 2x}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x}$$

a) Construire la courbe représentative (C_1) de f_1 dans un repère $\mathcal{R}$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné.

b) Soit $\mathcal{R}_1$ le repère $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$ où le point O_1 est le translaté du point O dans la translation $T_{2\vec{j}}$ de vecteur $2\vec{j}$. Montrer que la courbe représentative de g_1 est l'ensemble des points de coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_1$ telles que $Y = \frac{1}{X}$. En déduire que g_1 est représentée par (C_1) dans le repère $\mathcal{R}_1$.

2) Soient $g_2 : [-1; \longrightarrow [\longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : [-2, \longrightarrow [\longrightarrow \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto \frac{1}{x - 1} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Tracer la courbe représentative (C_2) de f_2 dans un repère $\mathcal{R}$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ donné. Soit $\mathcal{R}_2$ le repère $(O_2, \vec{i}, \vec{j})$ où $O_2 = T_{\vec{i}}(0)$. Montrer que g_2 est représentée par (C_2) dans le repère $\mathcal{R}_2$.

3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et de courbe représentative (C_f) dans le repère $\mathcal{R}$ du plan $\mathcal{P}$. Soient a et b deux nombres réels donnés et g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x-a)+b \end{aligned}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

b) Montrer que la fonction g est représentée par (C_f) dans le repère $\mathcal{R}'$ égal à $(O', \vec{i}, \vec{j})$ où :

$$O' = T_{-a\vec{i}-b\vec{j}}(O).$$

4) Utiliser la méthode précédente pour représenter la fonction :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

et trouver graphiquement l'image réciproque de $[3; 4[$ par g.
(On obtient $]1-\sqrt{2}; 0] \cup [2; 1+\sqrt{2}[$)

5) Utiliser la méthode précédente pour représenter la fonction :

$$\begin{aligned} g : [-1; \longrightarrow [&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{-2x+7}{x-3} \end{aligned}$$

et trouver graphiquement l'image directe de $]1; 2[$ par g.

B 1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et de courbe représentative (C_f) dans le repère $\mathcal{R}$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$.
Soient k un nombre réel non nul et g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D_f \quad g(x) = kf(x).$$

Montrer que la fonction g est représentée par (C_f) dans le repère $\mathcal{R}'$ égal à $(O, \vec{i}, \vec{j}')$ avec $\vec{j}' = \frac{1}{k}\vec{j}$. (Ceci revient à changer la graduation sur l'axe des ordonnées.)

2) Appliquer cette méthode pour trouver graphiquement l'image réciproque de $[3; 5]$ par la fonction :

$$\begin{aligned} g : [-1; 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2. \end{aligned}$$

3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et de courbe représentative (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$. Soient k un nombre réel non nul et g la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(kx) \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et montrer que g est représentée par (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}', \vec{j})$ avec $\vec{i}' = k\vec{i}$ (ceci revient à changer la graduation sur l'axe des abscisses).

4) Soit $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -3 \sin 2x$$

En utilisant simultanément les méthodes précédentes, tracer la courbe représentative (C_g) de g. Étudier graphiquement le sens de variation de la fonction g.

Attention si vous avez fait le changement de graduation utilisant $\vec{j'} = -\frac{1}{3}\vec{j}$.

Calculer $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$...

N'aurait-il pas été plus pratique d'utiliser $\vec{j'} = \frac{1}{3}\vec{j}$ et la fonction $x \longmapsto -\sin x$?

5) Soit $g : \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

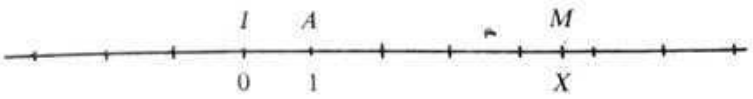
Résoudre graphiquement l'équation :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{12}\right] \quad , \quad g(x) = 2.$$

Utiliser éventuellement les résultats du sujet de recherche n° 1 du tome 2 (G1) pour lire les nouvelles abscisses en utilisant l'ancienne graduation.

Échelles fonctionnelles (A_3)

Dans cette étude on représente la droite (D) munie du repère (I, A) comme ci-dessous :



où le « pas » de la graduation mesure 1 cm.

- Soit M un point de la droite (D). On note X son abscisse dans le repère $(I; A)$.
- Sur cette droite graduée, une *échelle* est construite en marquant des petits tirets en regard desquels on inscrit des nombres appelés : *cotes de l'échelle*. La cote est désignée par la lettre x.

Pour placer un point M de cote x, c'est-à-dire pour trouver l'abscisse X dans le repère (I, A) du point M de cote x, on utilise une fonction numérique de la variable réelle x et un nombre réel ℓ et on a : $X = \ell f(x)$.

ℓ est appelé *module de l'échelle* : c'est un nombre exprimant une distance en centimètres si on a pris un « pas » de un centimètre pour le repère. On a ainsi une *échelle fonctionnelle* qui est caractérisée par la fonction f.

Exemples :

1° *Échelle des carrés ou quadratique*

Ici ℓ est égal à 1 et f est définie par :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$
$$x \longmapsto x^2$$



Le point de cote 2 a pour abscisse 4 dans le repère (I, A).
Le point de cote 3 a pour abscisse 9.
Le point de cote x a pour abscisse x^2.
On remarque que dans cette échelle il n'y a pas de repère (les tirets ne sont pas régulièrement espacés) et qu'il n'y a pas de cotes négatives dans cette échelle.

2° *Échelles fonctionnelles affines*

a) Construire l'échelle fonctionnelle définie par : $X = 2x - 3$.
Si on fait le lien avec les changements de repères, X correspond à l'abscisse dans l'ancien repère et x correspond à l'abscisse dans le nouveau repère.

b) Soit (I', A') le nouveau repère obtenu en construisant l'échelle fonctionnelle définie par : $X = ax + b$.
Définir la translation transformant I en I'.
Calculer $\overrightarrow{IA'}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$.

Utilisation d'une échelle quadratique

La puissance dissipée dans un conducteur de résistance R est donnée par la fonction P qui, à l'intensité I du courant associe le nombre réel RI^2.
Nous avons représenté cette fonction sur la figure ci-dessous dans un repère orthogonal, dans le cas où le conducteur a une résistance R de 10 Ω.
Dans la figure numéro 2, nous utilisons une échelle des carrés pour repérer les intensités. Nous y repérons un point comme dans un repère orthogonal.

c) Placer sur la figure 2, le point A correspondant à la cote 5 et ayant pour ordonnée $P(5)$ puis le point B correspondant à la cote 10 et ayant pour ordonnée $P(10)$.
Vérifier que ces points sont alignés avec le point O.
Montrer que la puissance est une fonction linéaire de X définie par :

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$X \longmapsto 10X.$$

Ainsi sur les figures 1 et 2, c'est la même fonction qui est représentée : celle qui, à l'intensité I associe la puissance dissipée.
Le changement d'échelle a modifié la forme de la courbe. On dit que l'on a fait une *anamorphose*.
Ce changement d'échelle pour placer les valeurs de I a l'avantage de transformer une demi-parabole en une demi-droite d'origine O ainsi la connaissance d'un seul point de fonctionnement $(I, P(I))$ permet de tracer la courbe représentative.

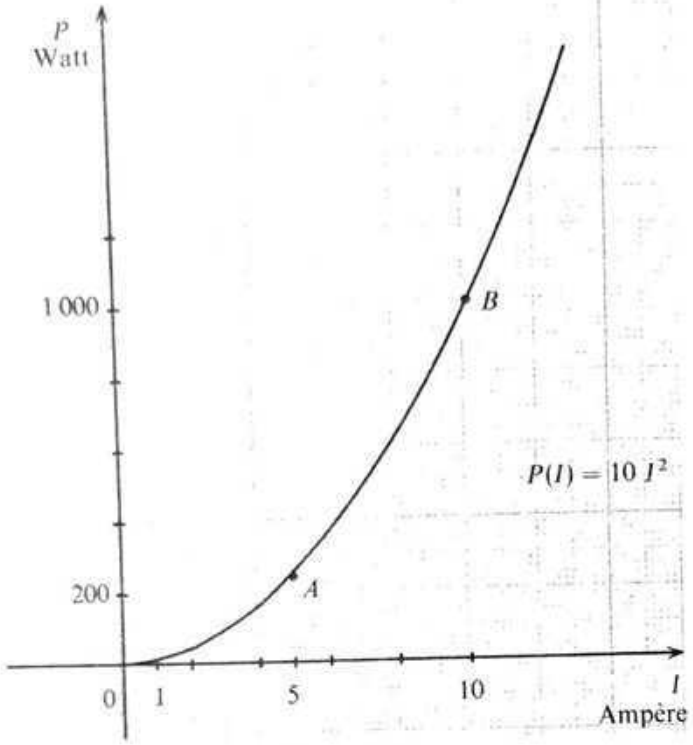


Figure 1

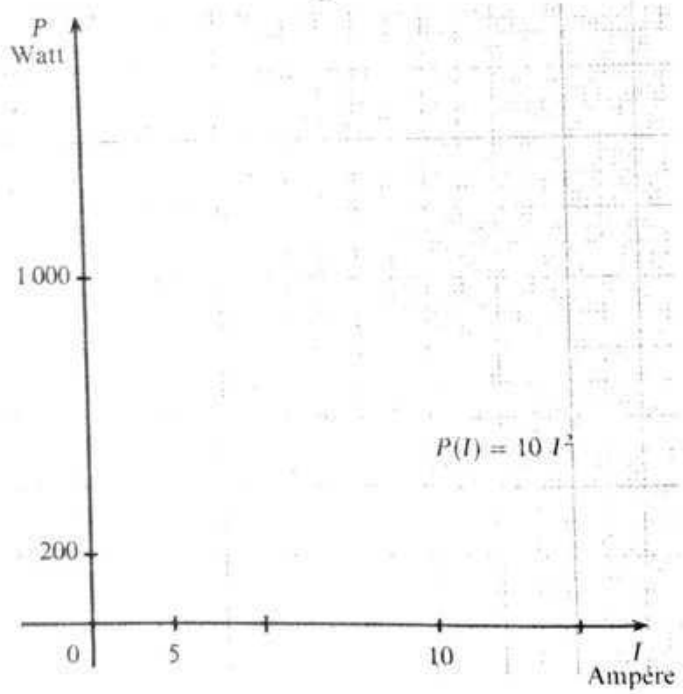


Figure 2

Il faudrait donc disposer d'une échelle quadratique. Nous allons voir un moyen pour nous en passer.

En utilisant les graduations du papier millimétré, dans le repère $(O,\ 10\vec{i}, \vec{j})$ la droite (AB) représente la fonction :

$$[I^2 \longmapsto P(I)].$$

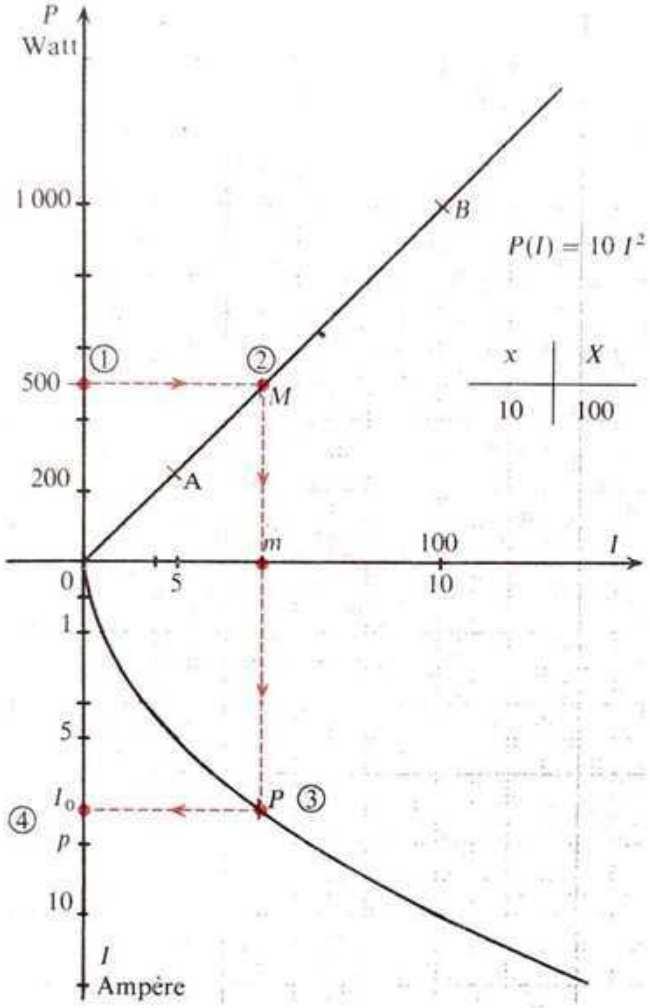


Figure 3

Il faut trouver un moyen de passer des valeurs de I^2 à celles de I correspondantes et réciproquement, d'où l'utilisation de la représentation de la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$
$$I \longmapsto I^2$$

dans le repère $(O, -100\vec{j}, 10\vec{i})$.
A tout point M de la droite (AB) distinct de O, on associe son projeté orthogonal m sur l'axe de repère $(O, 10\vec{i})$. La lecture de l'abscisse de m donnerait la valeur I^2 à X, c'est-à-dire l'image de I par la fonction f. On fait donc une recherche d'antécédent de I^2 en passant par le point P défini par $(C_f) \cap (Mm)$ et en lisant son abscisse dans le repère $(O, 100\vec{j})$.
Application :

1° Trouver l'intensité I_0 du courant dissipant une puissance de 500 W dans un conducteur de 10 ohms.

2° Dans le cas où le courant a une intensité variant entre 4 et 9 ampères et où la résistance est toujours de 10 Ω donner les puissances maximale et minimale dissipées (plage d'utilisation).

Avantage de l'utilisation de la fonction f auxiliaire : Construction d'abaques

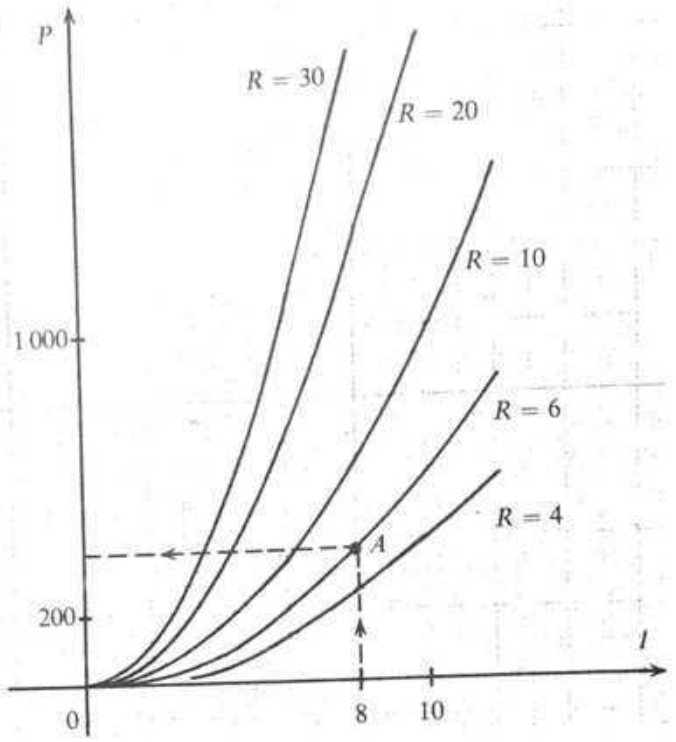


Figure 4

On considère maintenant que la résistance R du conducteur varie. On est amené à considérer les fonctions :

$$P_R : I \longmapsto RI^2 \quad \text{pour} \quad R \in \{4; 6; 10; 20; 30\}.$$

On obtient les courbes ci-contre dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Cette figure est appelée un *abaque*.

Utiliser cette figure pour trouver :

a) la puissance dissipée dans un conducteur de 6 Ω parcouru par un courant de 8 ampères,

b) trouver la résistance du conducteur qui dissipe 450 W quand il est parcouru par un courant de 7 ampères (on donnera une valeur approchée en « interpolant à vue » éventuellement).

On constate que ces réponses se trouvent facilement lorsqu'on a un abaque correspondant au problème sinon il faut le construire. Cette longue construction est simplifiée en utilisant une échelle quadratique. On remplace alors la construction de cinq branches de paraboles par celle de cinq demi-droites.

Construire l'abaque représentant les fonctions f_R en utilisant une échelle quadratique pour repérer les valeurs de I.

Retrouver les résultats des questions (*a*) et (*b*).

On remarquera que cette dernière figure facilite la lecture et permet une meilleure précision dans la question (*b*).

Il existe d'autres échelles fonctionnelles. *Les échelles hyperboliques* qui transforment les « branches » d'hyperboles en demi-droites.
On étudiera en classe de terminale *les échelles logarithmiques* qui sont d'usage courant en physique et en économie.

Comparaison de deux suites géométriques (A_4)

On suppose que, de l'année 1970 à l'année 1990, la hausse des prix a été, est, et restera constante et égale à :

dix pour cent par an dans un pays appelé A
x pour cent par an dans un pays appelé B.

On admettra que l'augmentation des prix, dans chacun des deux pays, prend effet au 1er janvier de chaque année et que le prix de chaque objet est constant, du 1er janvier au 31 décembre de la même année.
L'unité monétaire du pays A est symbolisée par a, celle du pays B par b.
En 1978, un objet M qui a suivi, suit et suivra les hausses de prix indiquées ci-dessus, coûtait $21\,436a$ dans le pays A.

1) Dans le pays A, quel était le prix de l'objet M en 1977? 1979?

2) On désigne par p et p' les prix de l'objet M en 1970 dans les pays A et B respectivement où p et p' sont exprimées en unités a et b respectivement. Soit n un entier naturel compris entre 0 et 20 inclus.

a) Exprimer, en fonction de p et de n, le prix $P(n)$ de l'objet M pour l'année $(1970 + n)$ dans le pays A; puis calculer p (unité a).

b) Exprimer, en fonction de p', n et x, le prix $P'(n)$ de l'objet M pour l'année $(1970 + n)$ dans le pays B (unité b).

c) On donne $x = 4$ et $p' = 12\,500$. Sachant qu'au cours des années considérées le taux de change des monnaies est resté le même : on échange $1b$ contre $2a$, à partir de quelle année sera-t-il plus avantageux d'acquérir l'objet A dans le pays B que dans le pays A?

Approximation de la racine cubique d'un nombre réel par les suites (A_5)

A Soit f la fonction définie par $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$

Vérifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On admet ici que f est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique antécédent du nombre réel x. Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \sqrt[3]{x} \iff x = y^3.$$

Pourquoi $\sqrt[3]{1}$ est égal à 1? Que vaut $\sqrt[3]{0}$?
Vérifier que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x < y \iff \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}.$$

Ainsi pour connaître la racine cubique d'un nombre réel quelconque, il suffit de pouvoir connaître celle d'un nombre réel strictement positif et différent de 1.
Dans la suite du problème, on désigne par a un nombre réel donné, strictement positif et différent de 1.
On note u_0 le plus petit des deux nombres a et 1
et v_0 le plus grand des deux nombres a et 1.

B On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par u_0 et v_0 et, pour tout entier naturel n :

si $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^3 \leqslant a$, alors $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=v_n$

si $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^3 > a$, alors $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

1) *a*) Prouver que la suite u est plus petite que la suite v.

b) Montrer que la suite u est croissante et majorée par $\sqrt[3]{a}$.

c) Montrer que la suite v est décroissante et minorée par $\sqrt[3]{a}$.

2) *a*) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant \sqrt[3]{a}-u_n \leqslant v_n-u_n \leqslant \frac{|a-1|}{2^n}.$$

b) En déduire que les suites u et v convergent vers $\sqrt[3]{a}$.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, les nombres réels u_n et v_n sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès de $\sqrt[3]{a}$ et préciser l'incertitude.

3) Montrer que, s'il existe un entier naturel p tel que $\left(\frac{u_p+v_p}{2}\right)^3 = a$, alors la suite est constante à partir du rang p. Quelle est sa valeur?

4) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la racine cubique de a dans chacun des cas suivants :

a) $a=\frac{1}{3}$ *b*) $a=3$ *c*) $a=-2+\sqrt{5}$ *d*) $a=-5+2\sqrt{13}$.

C Dans cette partie on va encore trouver deux suites pour obtenir un encadrement de $\sqrt[3]{a}$.

1) *a*) On note α le nombre $\sqrt[3]{a}$, vérifier que α est strictement positif.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel z strictement positif, le nombre réel $2z^3-3\alpha z^2+\alpha^3$ est positif ou nul (Factoriser).

c) Soit z un nombre réel strictement positif, on note b le nombre réel défini par :

$$b=\frac{1}{3}\left(2z+\frac{a}{z^2}\right).$$

Vérifier que :

$$b \geqslant \sqrt[3]{a}, \quad b \text{ est non nul et } \quad \frac{a}{b^2} \leqslant \sqrt[3]{a}.$$

2) On considère la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$y_0 = v_0 \quad \text{et,} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2y_n + \frac{a}{y_n^2}\right) .$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{a}{y_n^2}.$$

a) Pourquoi les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent-elles?
Vérifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\sqrt[3]{a}$.
Vérifier que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt[3]{a}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$y_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{(y_n - \sqrt[3]{a})^2(2y_n + \sqrt[3]{a})}{3y_n^2} \quad \text{(on peut poser } z = y_n\text{)}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$y_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leqslant \frac{2(y_n - \sqrt[3]{a})}{3}.$$

c) Prouver que, pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leqslant y_n - \sqrt[3]{a} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (y_0 - \sqrt[3]{a}).$$

3) *a*) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\sqrt[3]{a}$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, les nombres réels x_n et y_n sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès de $\sqrt[3]{a}$, et préciser l'incertitude.

4) Même question que la B 4).

Approximation d'un zéro d'une fonction grâce à la tangente : Méthode de Newton (A_6)

Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad .$$
$$x \longmapsto x^3 - 2$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) du plan.

1) On note g la fonction $[x \longmapsto x^3]$.

a) Quelle est la transformation géométrique qui permet de construire (C) à partir de la courbe représentative de g?

b) Tracer (C) dans un repère où les unités sur les deux axes sont : 1 cm.
En examinant la courbe (C) on constate, et on admettra ici, que l'équation (E) :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$$

a une solution et une seule a dans $\mathbb{R}$.
On peut remarquer que a est l'unique nombre réel dont le cube est 2, on dit que a est la *racine cubique* de 2. Dans la suite on va chercher des encadrements de ce nombre a.

2) *a*) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est dérivable en tout x_0 de $\mathbb{R}$.

c) Trouver graphiquement un encadrement d'amplitude 1 du nombre a.

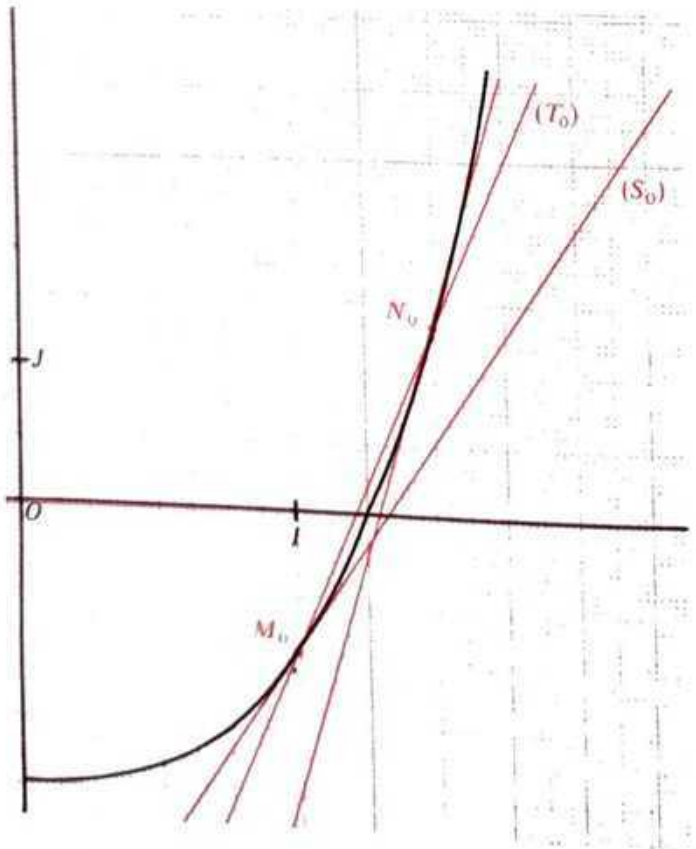
d) Calculer $f(1)$, $f(1{,}5)$, $f(2)$. En déduire un encadrement de a :

$$u_0 \leqslant a \leqslant v_0$$

tel que : $$v_0 - u_0 = 0{,}5.$$

3) On donne ci-contre une partie de la représentation graphique (C) de f dans un repère orthogonal (O, I, J) (unités : 4 cm sur (OI), 2 cm sur (OJ)).
On note M_0 le point de (C) d'abscisse u_0 et N_0 le point de (C) d'abscisse v_0.
Pour déterminer un encadrement de a, meilleur que le précédent, on va utiliser les points d'intersection de la droite (OI) avec les droites : (M_0N_0), la tangente (S_0) à (C) en M_0 et la tangente (T_0) à (C) en N_0.

a) On note u_1 l'abscisse du point d'intersection de (M_0N_0) et de (OI).
Déterminer graphiquement la position relative des nombres réels u_1 et a.



Déterminer une équation de la droite (M_0N_0).
En déduire la valeur de u_1.

b) Déterminer graphiquement la position relative des abscisses des points d'intersection avec (OI) des tangentes (S_0) et (T_0), ainsi que de a.
On note v_1 celle des deux abscisses qui permettra d'obtenir la meilleure valeur approchée de a.

c) Vérifier que $f'(1,5) = 6,75$.
En déduire une équation de la tangente (T_0).
Calculer l'abscisse v_1 du point d'intersection des droites (OI) et (T_0).

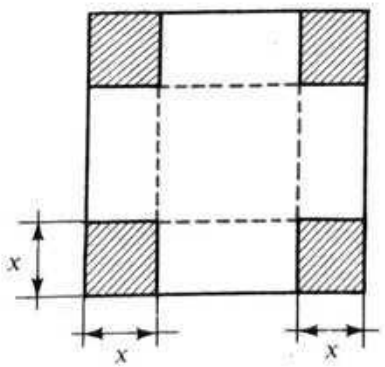
d) Donner l'encadrement de a ainsi obtenu par u_1 et v_1.
En remplaçant u_1 et v_1 par leurs approximations décimales d'ordre 1 par défaut pour u_1 et par excès pour v_1, donner un encadrement de a d'amplitude 0,1.

4) On note M_1 le point de (C) d'abscisse 1,2 et N_2 le point de (C) d'abscisse 1,3.
A l'aide de la méthode précédente (on utilisera la tangente à (C) en N_1 pour obtenir la valeur approchée v_2 par excès de a et (M_1N_1) pour la valeur approchée u_2 par défaut de *a)*, déterminer un autre encadrement de a.

Problèmes d'optimisation (A_7)

Beaucoup de problèmes de la vie courante peuvent être résolus grâce à une « mise en fonction » : une quantité étudiée est fonction des autres. L'étude des variations de ces fonctions permet de déterminer des extrémums qui sont souvent utiles pour prendre une décision. Ce sont les *problèmes d'optimisation.*

1er exemple : Construction d'un bac parallélépipédique à partir d'une tôle de 100 cm de côté. On enlève des carrés de côté de longueur x aux quatre coins de la tôle.
On veut déterminer x pour que le volume obtenu en repliant les bords suivant la ligne pointillée, donne un volume maximum.

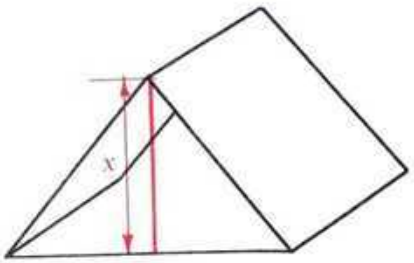


a) Soit V la fonction qui à un nombre réel x, associe le volume du bac.
Déterminer son ensemble de définition et montrer que :

$$V(x) = 4x^3 - 400x^2 + 10\,000x.$$

b) Donner le tableau de variation de cette fonction et déterminer une valeur approchée de la capacité maximale du bac exprimée en litres (incertitude 0,1).

2e *exemple* : Étant donnée une toile de longueur $2L$, on veut déterminer la longueur x du piquet pour que le volume de la tente soit maximum.



a) Montrer que la fonction V qui à x associe le volume de la tente est définie par :

$$V :]0, L[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{L^2 - x^2} \times x \times \ell$$

où ℓ désigne la largeur de la toile.

b) Étudier les variations de cette fonction pour montrer que V admet un maximum pour une valeur x_0 que l'on déterminera.

3e *exemple* : Soient ABC un triangle, λ un nombre réel appartenant à $[0; 1]$, P, Q et R trois points définis par :

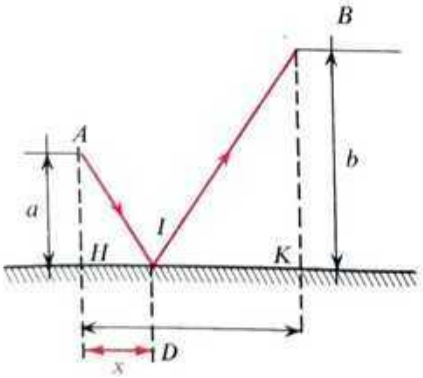
$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \lambda\overrightarrow{CA}.$$

Montrer que les triangles APR, CRQ et BQP ont même aire.
Calculer l'aire du triangle PQR.
Trouver la valeur de λ pour laquelle l'aire est minimale.
Calculer ce minimum.

Exemples d'utilisation de la fonction dérivée en physique (A_7)

Loi de Descartes sur la réflexion d'un rayon lumineux

On considère un rayon lumineux partant d'un point A, se réfléchissant sur un miroir plan et passant par B.



1) Déterminer la fonction d qui, à la longueur x du segment $[HI]$, associe la longueur du chemin : $AI + IB$.
Donner l'ensemble de définition de d et calculer $d(x)$ en fonction de a, b et D.

2) En examinant les trois cas :

$$(a > b) \quad , \quad (a = b) \quad \text{et} \quad (a < b),$$

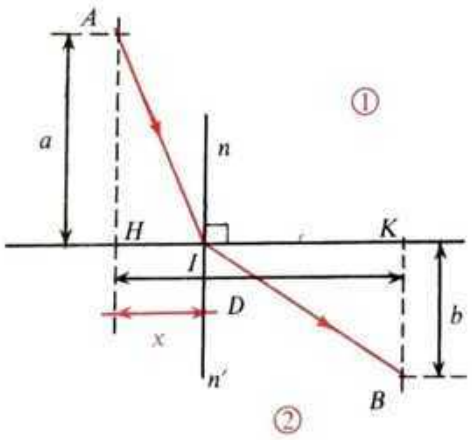
puis en construisant les tableaux de variations correspondants, montrer que d admet un minimum.

3) Traduire le principe de Physique suivant : La lumière se réfléchissant sur un miroir plan, prend le « chemin » le plus rapide, par une égalité d'angle, que l'on appelle loi de Descartes sur la réflexion d'un rayon lumineux.

Loi de Descartes sur la réfraction d'un rayon lumineux

La lumière se propage à la vitesse v_1 dans le milieu ① et à la vitesse v_2 dans le milieu ②.
La limite de séparation des deux milieux est figurée par la droite (HK).
Ici aussi nous allons chercher le « chemin » le plus rapide.

1) x étant la longueur du segment $[HI]$, on note t la fonction donnant le temps mis par la lumière pour aller de A vers B en passant par le point I (déterminé par x). L'ensemble de définition D_t de t est $[O, D]$. Pour tout x de D_t calculer $t(x)$ en fonction de a, b, D, v_1 et v_2.



2) Montrer que la fonction dérivée de t s'annule pour toute valeur x_0 de l'ensemble de définition D_t, vérifiant l'égalité :

$$E(x) : \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{D - x}{v_2\sqrt{b^2 + (D - x)^2}}.$$

On admettra que la valeur x_0 est unique et que la fonction t admet un minimum en x_0.

3) En posant $\alpha = \text{mes } \widehat{AIn}$ et $\beta = \text{mes } \widehat{BIn'}$, montrer que :

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}.$$

Propriétés géométriques de la courbe représentative d'une fonction (A_7-G_1)

On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Étudier l'ensemble de définition D de f et les limites de f aux bornes de D. Déterminer la fonction dérivée de f et dresser le tableau de variation f.

2) Prouver qu'il existe trois nombres réels α, β et γ tels que :

$$\forall x \in D \quad f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}.$$

Préciser les deux asymptotes à la courbe (C).
Prouver que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C).
Tracer (C).

3) Soient a et b deux éléments distincts de D et A et B les points de (C) d'abscisses respectives a et b.

a) Montrer que la droite (AB) a pour équation :

$$(ab - a - b)x - (ab - a - b + 1)y + a + b - 1 = 0.$$

b) Vérifier que la droite (AB) est sécante à la droite (Δ_1) d'équation : $y = x$; on note M_1 le point d'intersection de (AB) et (Δ_1).

c) Vérifier que la droite (AB) est sécante à la droite (Δ_2) d'équation : $x = 1$; on note M_2 le point d'intersection de (AB) et de (Δ_2).

d) Montrer que les segments $[AB]$ et $[M_1 M_2]$ ont même milieu.

e) En déduire une construction géométrique de la courbe (C) points par points à partir d'un point donné de (C) et des droites (Δ_1) et (Δ_2).

4) Soient p un élément de D, et P le point de (C) d'abscisse p.

a) Déterminer une équation de la tangente (T_p) à (C) au point P.

b) Vérifier que (T_p) est sécante à (Δ_1) en un point noté N_1.

c) Vérifier que (T_p) est sécante à (Δ_2) en un point noté N_2.

d) Vérifier que P est le milieu de $[N_1 N_2]$.

e) Calculer l'aire du triangle $N_1 I N_2$ (on pourra utiliser *le fait que l'aire d'un triangle* $N_1 I N_2$ est $\frac{1}{2}$ det $(\overrightarrow{IN_1}, \overrightarrow{IN_2})$).

5) *a*) Vérifier que l'ensemble des points équidistants de (Δ_1) et de (Δ_2) est la réunion des deux droites d'équations :

$$(\sqrt{2}-1)x+y-\sqrt{2}=0, \qquad (\sqrt{2}+1)x-y-\sqrt{2}=0.$$

b) Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, chacun vecteur directeur de l'une de ces deux droites tels que :

$$\det(\vec{i},\vec{u})>0, \quad \det(\vec{j},\vec{u})<0, \quad \det(\vec{i},\vec{v})>0 \quad \text{et} \quad \det(\vec{j},\vec{v})>0.$$

c) Déterminer alors deux vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ tels que :

$\vec{u}_1$ appartient à la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$,
$\vec{v}_1$ appartient à la demi-droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$.

d) Vérifier que $(I, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ est un repère orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées X et Y dans le repère $(I, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$.
Calculer les coordonnées x et y de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de X et Y.

e) Vérifier que l'on a :

$$M\in(C) \iff \frac{X^2}{2+2\sqrt{2}}-\frac{Y^2}{2\sqrt{2}-2}=1.$$

f) Vérifier que l'unique nombre réel strictement positif c tel que :

$$c^2=(2+2\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-2), \quad \text{est :} \quad \frac{2\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

g) On note F le point de couple de coordonnées dans $(I, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$: $(c, 0)$.
Vérifier que l'on a :

$$M\in(C) \Leftrightarrow d(M,F)=\left|2+2\sqrt{2}-\frac{cX}{2+2\sqrt{2}}\right|.$$

h) On note F' le symétrique de F par rapport à I.
Vérifier que l'on a :

$$M\in(C) \Leftrightarrow d(M,F')=\left|2+2\sqrt{2}+\frac{cX}{2+2\sqrt{2}}\right|.$$

En déduire que l'on a :

$$M\in(C) \iff |d(M,F)-d(M,F')|=2[2+2\sqrt{2}].$$

i) On note (D) la droite d'équation $X=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{c}$ dans $(I, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$.
Vérifier que M appartient à (C) si et seulement si $d(M,F)$ est égal au produit par $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ de la distance de M à (D).

Application de la dérivabilité à la cinématique : mouvements rectilignes (A_7-G_2)

La *cinématique* est l'étude du déplacement d'un corps en mouvement en fonction du temps. Dans la pratique on peut remplacer le corps en mouvement par son centre de gravité M, on l'appellera alors *mobile*. Un mobile M a un *mouvement rectiligne* lorsqu'il se déplace sur une droite (D). On considère un repère (O, I) de cette droite (D). La position du point M est alors repérée par la valeur de son abscisse en fonction du temps; on définit ainsi une fonction qui, à l'instant t associe l'abscisse $x(t)$ du point M, à cet instant t, dans le repère (O, I) de (D); cette fonction $[t \longmapsto x(t)]$ est appelée la *loi horaire du mouvement*, sa représentation graphique est le *diagramme des espaces.*

1) Un mobile A est animé d'un mouvement rectiligne de loi horaire : $[x : t \longmapsto -3t-1]$.
Tracer le diagramme des espaces.
On appelle *vitesse moyenne* de A entre les instants t_1 et t_2 (distincts) le rapport de la différence $x(t_2) - x(t_1)$ par la différence de temps $t_2 - t_1$. (On remarquera qu'une vitesse peut être négative!). Calculer la vitesse moyenne de A entre les instants 2 et 5.
Quelle est la fonction dérivée de x?
On appelle *vitesse instantanée*, et on dit souvent vitesse, à l'instant t, le nombre dérivé $v(t)$ de la loi horaire en t; ainsi la fonction vitesse v est la fonction dérivée x' de la loi horaire x.
La courbe représentative de la fonction vitesse est le *diagramme des vitesses.* De même *l'accélération* à l'instant t est le nombre dérivé $\gamma(t)$ de la fonction vitesse en t :
pour tout t de l'ensemble de définition de x ($\mathbb{R}_+$ si rien n'est précisé) on a :

$$v(t) = x'(t), \quad \gamma(t) = v'(t)$$

(on dit que γ est la fonction dérivée seconde de x, on note $\gamma = x''$).

2) *a*) Un mobile B est animé d'un mouvement rectiligne suivant la loi horaire :

$$\left[\begin{array}{l} x : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad t \longmapsto 2t + \dfrac{4}{3t} \end{array}\right].$$

Déterminer sa fonction vitesse v et sa fonction accélération γ.
Tracer le diagramme des espaces.
Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $[v(t)]^2$ que l'on note $v^2(t)$.
Vérifier que la fonction $[t \longmapsto v^2(t)]$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right[$.

Un *mouvement* rectiligne est dit *accéléré* lorsque la valeur absolue de sa vitesse augmente, et *retardé* lorsque la valeur absolue de sa vitesse diminue.

b) Utiliser la dérivabilité de v^2 pour montrer que le mouvement est accéléré (respectivement retardé) sur l'intervalle de temps I si et seulement si on a :

$$\forall t \in I \quad v(t)\gamma(t) > 0 \quad \text{(respectivement } v(t)\gamma(t) < 0\text{)}.$$

A quelles dates les mouvements de A et de B sont-ils retardés?

3) Un mouvement rectiligne est *uniforme* lorsque sa vitesse est constante.

a) Vérifier qu'un mouvement est uniforme si et seulement si son accélération est nulle. Vérifier qu'un mouvement est uniforme si et seulement si sa loi horaire est de la forme $x(t) = vt + x_0$ où on précisera ce que sont v et x_0.

b) Un cycliste C roule sur une route droite avec une vitesse constante de 30 km/h, sachant qu'il passe la borne kilométrique 12 à 15 h, déterminer sa loi horaire, puis à quelle heure il passera la borne 24.

c) Un automobiliste D roule à vitesse constante sur la même route, en sens inverse, à 15 h il dépasse la borne 67 et à 15 h 30 il sera devant la borne 12.
A quelle heure le cycliste croise-t-il l'automobiliste (recherche graphique puis par le calcul)?

4) Un mouvement rectiligne est *uniformément varié* lorsque son accélération est constante.

a) Montrer qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié si et seulement si sa loi horaire est de la forme :

$$x(t) = \frac{\gamma}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

où on précisera ce que sont γ, v_0 et x_0.

b) On admet que la chute verticale d'une pierre dans l'air est un mouvement dont l'accélération est de 9,8 m/s^2. En considérant pour origine des temps l'instant où on lâche la pierre, pour origine des abscisses l'endroit d'où on la lâche, et en « orientant l'axe des abscisses vers le bas », vérifier que la loi horaire est donnée par :

$$x(t) = 4{,}9t^2 \quad \text{avec } t \text{ en secondes et } x \text{ en mètres.}$$

Si on lâche la pierre au-dessus d'un puit et que b secondes après, elle atteind l'eau. A quelle profondeur se situe l'eau?
Si la profondeur d'un deuxième puit (distance de l'eau du puit au sol) est de 44,1 m, combien de temps mettra la pierre, lâchée au ras du sol, pour atteindre l'eau, et à quelle vitesse rentrera-t-elle dans l'eau?
Dans l'air le son se propage uniformément à la vitesse de 340 m/s, ayant lâché sans vitesse initiale la pierre au-dessus d'un troisième puit, on entend, 10 secondes après, le « floc » de la pierre atteignant l'eau. Quelle est la profondeur du puit?

5) Un mouvement rectiligne est *vibratoire simple* lorsque sa loi horaire est de la forme :

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

où a, ω, φ et x_0 sont des nombres réels, avec ω et a non nuls.

a) Vérifier que le mouvement est périodique de période, notée T, $\frac{2\pi}{\omega}$. Vérifier que pour tout t on a :

$$x(t) \in [x_0 - a,\ x_0 + a];$$

on dit que x_0 est *le centre du mouvement*. Vérifier que l'accélération γ est : $-\omega^2 x$.

b) Déterminer la loi horaire d'un mouvement rectiligne vibratoire simple de période 6,

de centre du mouvement l'origine du repère de la droite et tel que à l'instant 3 on ait l'abscisse $-\frac{3}{2}$ et la vitesse $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Construire le diagramme des espaces et celui des vitesses.

c) Vérifier que la loi horaire $[t \longmapsto \sin^2 t]$ définit un mouvement rectiligne vibratoire simple dont on précisera le centre et la période. Tracer les diagrammes des espaces et des vitesses.

d) Vérifier que la loi horaire :

$$\left[t \longmapsto \cos\frac{\pi t}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\pi t}{2} + 4\right]$$

définit un mouvement vibratoire dont on précisera le centre, la période et « l'amplitude » du mouvement.
Quelle est la position du mobile à l'instant 0?

Approximation de la solution d'une équation par la méthode du point fixe ($A_5 - A_7$)

A On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x - \sin x$$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unités : 2 cm).

1) Calculer la fonction dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1.$

On note (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.
Déterminer les points communs à (C) et à (D_1) puis à (C) et à (D_2). Préciser les tangentes à (C) en ces points.

3) Étudier la parité de f. Par quelle transformation ponctuelle passe-t-on de la partie de (C) représentant la restriction $f_{|\mathbb{R}_+}$ de f à $\mathbb{R}_+$, à la partie de (C) représentant la restriction $f_{|\mathbb{R}_-}$ de f à $\mathbb{R}_-$?

4) Calculer, pour tout nombre réel x, $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
Par quelle transformation ponctuelle passe-t-on de la partie de (C) représentant $f_{|[-\pi,\pi]}$ à la partie de (C) représentant $f_{|[-\pi+k.2\pi,\pi+k.2\pi]}$ où k est un entier relatif?

5) Tracer dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la partie de (C) représentant $f_{|[0,\pi]}$.
Déterminer et tracer les tangentes au point O puis au point A d'abscisse π. Tracer (D_1) et (D_2).
Sur un autre graphique (unités : 1 cm) tracer la partie de la courbe (C) représentant la restriction $f_{|[-\pi,3\pi]}$ de f à $[-\pi, 3\pi]$, en plaçant aussi les éléments demandés ci-dessus.

6) Pour tout nombre réel m, on considère l'équation (E_m) :

$$(E_m) \quad x \in \mathbb{R}, \quad 2x - \sin x = m.$$

Déterminer graphiquement le nombre de solutions de (E_m).

7) On appelle (E) l'équation (E_4).
Utiliser le premier graphique de la courbe (C) pour avoir une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution x_0 de (E).
Contrôler le résultat par un calcul.

B Dans cette partie, on dégage une méthode pour obtenir une meilleure approximation de la solution x_0 de l'équation (E).

1) On considère la fonction g, définie par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}(4 + \sin x)$$

Montrer que $[f(x_0) = 4]$ est équivalent à $[x_0 = g(x_0)]$.
Ainsi pour chercher la solution de (E), on va chercher le *point fixe* de g c'est-à-dire le nombre réel x_0 tel que $g(x_0) = x_0$.
Tracer, à partir de la courbe représentative de la fonction sinus, la courbe représentative (C') de g dans un nouveau repère du plan (unités : 2 cm).

2) *a*) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad -\frac{1}{2} \leqslant g'(u) \leqslant 0.$$

b) On note h la fonction définie par :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2} + g'(x)$$

Vérifier que h est positive sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, et est la fonction dérivée de la fonction k définie par :

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}x + g(x)$$

c) En déduire que, quel que soient les nombres réels x_1 et x_2 de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a :

$$g(x_1) - g(x_2) \leqslant \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

d) Déterminer le sens de variation de g sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; en déduire que :

$$\forall x_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \forall x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

On verra en classe de terminale C ou E une généralisation de ce résultat appelée *inégalité des valeurs intermédiaires* :
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si la valeur absolue de la fonction

dérivée g' de g sur I est majorée par un nombre réel strictement positif M, alors on a :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2 \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant M\,|x_1 - x_2|.$$

3) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $g(x)$ est encore dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (On pourra utiliser le sens de variation de g sur cet intervalle et les images de $\frac{\pi}{2}$ et π).

4) On définit la suite u sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

a) Placer, sur le graphique où est tracée (C'), le plus possible de valeurs de u_n sur l'axe des abscisses dans le cas où u_0 est égal à π.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - x_0|.$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\,|u_0 - x_0|.$$

d) Montrer que la suite u converge, et déterminer sa limite.

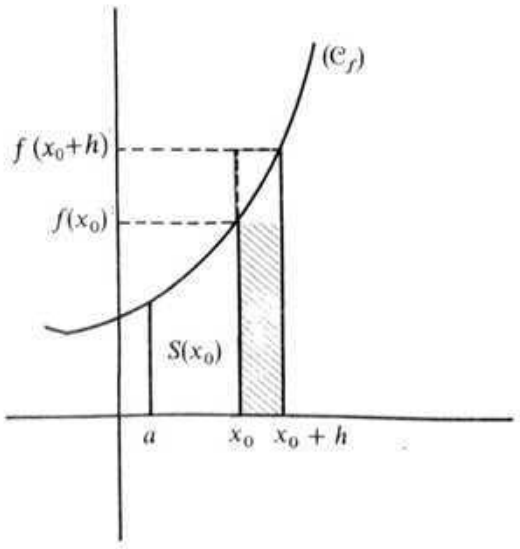
3) On prend pour u_0 la valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près trouvée en A 7).

a) Combien faut-il calculer de termes de la suite u pour obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près? à 10^{-3} près?

b) Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Applications des primitives aux calculs d'aires et de volumes

A Soient f une fonction continue sur un intervalle I et représentée par la courbe (C_f) ci-contre, et a un élément de I.



On admet que

- la fonction S qui à tout x_0 de I associe l'aire du domaine-plan défini par :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant x_0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

est une fonction continue sur I et croissante sur $[a, +\infty[\cap I$.

- Étant données trois fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3$ et, x_0 étant un élément de J, si $\lim\limits_{x_0} \varphi_1 = \lim\limits_{x_0} \varphi_3 = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x_0} \varphi_2 = \ell$.

1) Soit x un élément de I.
Montrer que, pour tout nombre réel h non nul tel que $x_0 + h$ appartient à I, on a :

$$h \,.\, f(x_0) \leqslant S(x_0 + h) - S(x_0) \leqslant h \,.\, f(x_0 + h).$$

En déduire que S est dérivable en x_0 et que le nombre dérivé de S en x_0 est $f(x_0)$.

2) Montrer le même résultat quand la fonction f est décroissante sur $[a, +\infty[\cap I$, en utilisant l'encadrement :

$$h \,.\, xf(x_0 + h) \leqslant S(x_0 + h) - S(x_0) \leqslant h \,.\, f(x_0)$$

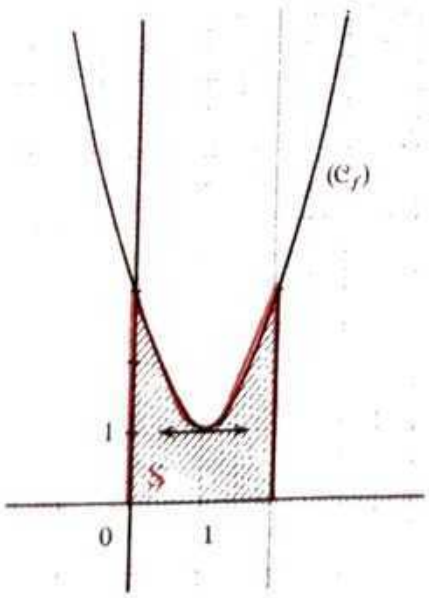
que l'on démontrera.

3) Montrer que la fonction S est la primitive de la fonction f, sur I, qui s'annule en a.

4) Application :
Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

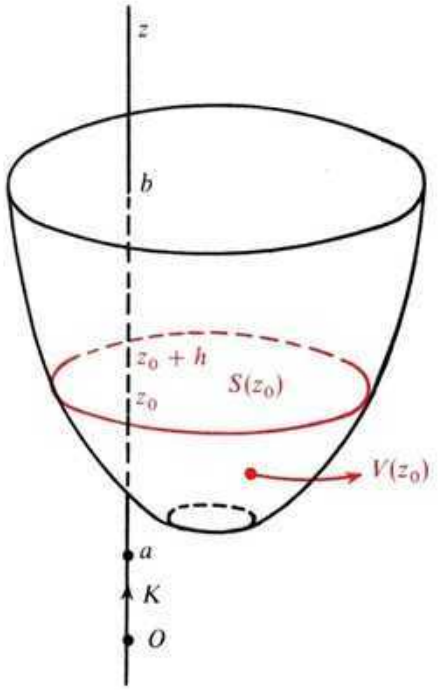
Représentée ci-contre par (C_f) :



Calculer l'aire du domaine défini par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

B On considère un volume à « bases parallèles » contenues dans des plans orthogonaux à la droite (OK).



Si nous coupons le volume par un plan de cote z_0 nous obtenons une surface dont l'aire S est une fonction continue de z_0.

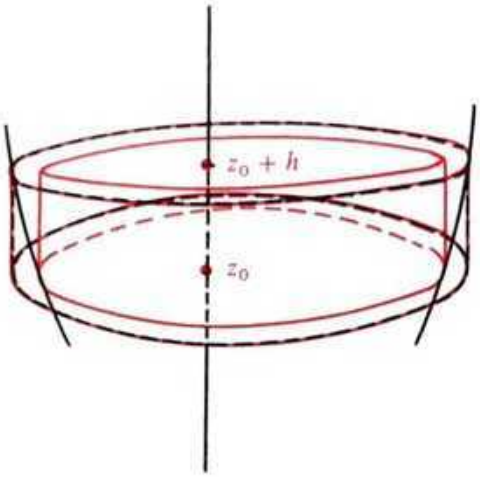
Le volume V du solide compris entre les plans de cotes respectives a et z_0 est aussi une fonction continue de z_0.

1) En utilisant la méthode de la partie *I*, montrer que :

$$V'(z_0) = S(z_0)$$

où V' est la fonction dérivée de V, en montrant dans le cas où S est une fonction croissante de z comme dans le cas de la figure :

$$h \times S(z_0) \leqslant V(z_0 + h) - V(z_0) \leqslant h \,.\, S(z_0 + h)$$

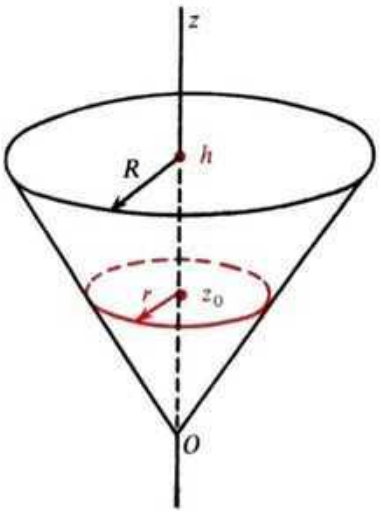


(encadrement par les volumes de deux « cylindres »).

2) Montrer que la fonction V est la primitive de la fonction S qui s'annule pour $z = a$.

3) Application au calcul du volume d'un cône.
Soit un cône de révolution de hauteur h et dont la base a pour rayon R. Une section de cote z_0 est un cercle de rayon r.

a) Montrer que : $$z_0 = \frac{rh}{R}.$$



b) Calculer le volume du cône.

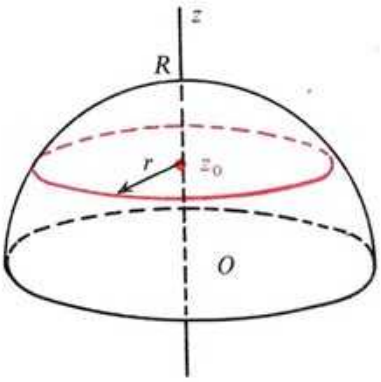
4) **Application** au calcul du volume d'une sphère de rayon R et de centre O.

a) **Montrer** que la section de cote z_0 est un cercle de rayon r avec :

$$r = \sqrt{R^2 - z_0^2}.$$

b) Calculer l'aire $S(z_0)$ de cette section.

c) Calculer le volume de la sphère.



INDEX TERMINOLOGIQUE

Affinité orthogonale p. 76
Application réciproque p. 11
Approximation affine p. 191
Asymptote p. 247
Axe de symétrie p. 89

Bijection p. 10
Branche infinie p. 246

Centre de symétrie p. 84
Coefficient (d'une fonction polynôme) p. 40
Coefficient directeur p. 162
Coefficient dominant p. 40
Coïncidence p. 7

Demi-tangente p. 196
Développement limité p. 186
Discriminant p. 50
Dividende p. 46
Diviseur p. 46

Equation bicarrée p. 59
Erreur p. 187

Fonction bornée p. 29
Fonction continue p. 187
Fonction dérivable p. 193
Fonction dérivable à droite, à gauche p. 199
Fonction dérivable sur un intervalle p. 212
Fonction dérivée p. 212
Fonction impaire p. 83
Fonction inverse p. 27
Fonction majorée p. 29
Fonction minorée p. 29
Fonction paire p. 87
Fonction périodique p. 80
Fonction polynôme p. 40
Fonction polynôme divisible par une autre p. 42
Fonction polynôme factorisable p. 42
Fonction polynôme unitaire p. 40
Fonction produit (de deux fonctions) p. 26
Fonction produit (d'une fonction par un nombre réel) p. 26
Fonction quotient p. 26
Fonction somme p. 26
Formule de récurrence p. 99

Image directe p. 2
Image réciproque p. 5
Incertitude p. 190
Injection p. 16
Involution p. 22

Limite à droite (à gauche) en zéro p. 184
Limites de références p. 177
Limite en moins l'infini p. 237
Limite en plus l'infini p. 237
Limite en un nombre réel p. 188
Limite en zéro p. 181
Limite nulle en zéro p. 179

Maximum relatif p. 228
Minimum relatif p. 228

Nombre dérivé p. 193
Nombre dérivé à droite (à gauche) p. 199

Ordre de multiplicité p. 48

Période p. 80
Permutation p. 10
Point anguleux p. 198
Point d'arrêt p. 196
Primitive p. 262
Prolongement p. 9

Quotient p. 46

Raison (d'une suite arithmétique) p. 110
Raison (d'une autre géométrie) p. 115
Reste p. 46
Restriction p. 9

Suite arithmétique p. 110
Suite constante p. 102
Suite convergente p. 137
Suite croissante p. 102
Suite décroissante p. 102
Suite de limite nulle p. 131
Suite de référence p. 135
Suite divergeant vers moins l'infini p. 146
Suite divergeant vers plus l'infini p. 145
Suite géométrique p. 115
Suite harmonique p. 132
Suite monotone p. 103
Suite numérique p. 97
Suite périodique p. 107
Surjection p. 14

Tableau de variation p. 225
Tangente p. 195
Taux de variation p. 222

Zéro p. 47

ACHEVÉ D'IMPRIMER 3e TRIMESTRE 1987
SUR LES PRESSES SPÉCIALES DE LA
SOCIÉTÉ EUROPÉENNE DES ARTS GRAPHIQUES
5, RUE DE PONTOISE
75005 PARIS
IMPRIMÉ EN ITALIE
NUMÉRO D'ÉDITEUR D 42901 (D.O.VII)

168211